

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESPAÇOS DE HARDY RADIAL

Victor Hugo Falcão Francheto

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Co-orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

São Carlos-SP

06 de fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESPAÇOS DE HARDY RADIAL

Victor Hugo Falcão Francheto

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Co-orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

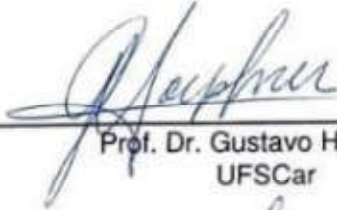
São Carlos-SP

06 de fevereiro de 2020

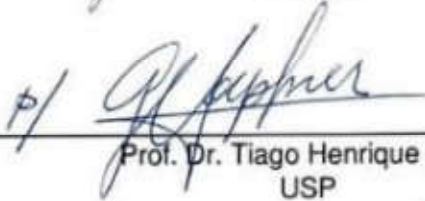


Folha de Aprovação

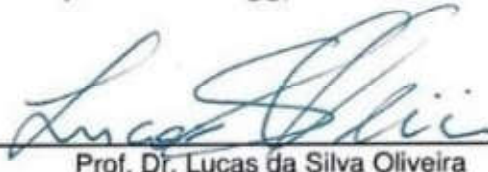
Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Victor Hugo Falcão Francheto, realizada em 06/02/2020:



Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

#/ 

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP



Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
UFRGS

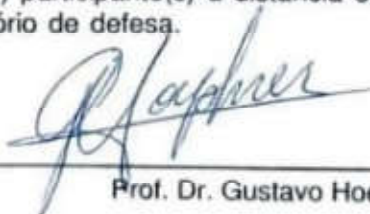


Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
USP



Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Tiago Henrique Picon e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.



Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Agradecimentos

Aos professores Dr. Gustavo Hoepfner e Dr. Tiago H. Picon, pela sábia escolha do tema o qual desenvolvi na minha tese, pela paciência a qual tiveram no decorrer deste trabalho e por toda ajuda a mim dedicada.

Aos professores do DM-UFSCar, pelos ensinamentos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pela oportunidade de realização deste trabalho.

Aos meus amigos Cláudio Vasconcelos, Ronaldo Bressan e Patrícia Sato, cujo os laços de amizade se fortaleceram nos últimos anos.

Ao meu amigo Roberto Carlos Alvarenga que mesmo longe sempre se fez presente.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma decomposição atômica via átomos radiais para distribuições em um subespaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$ do espaço de Hardy radial $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \doteq H^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Tal decomposição atômica nos diz que se $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \subseteq H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ então f possui uma decomposição atômica e os átomos da sua decomposição são radiais.

Este trabalho é uma extensão de um teorema publicado por R. R. Coifman e G. Weiss em [7] no qual os autores apresentam uma decomposição atômica para funções radiais $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ no qual os átomos dessa decomposição são funções radiais.

A decomposição atômica que tratamos aqui neste trabalho nos fornece informações sobre a radialidade dos átomos para $0 < p \leq 1$. Especificamente, definimos um espaço de Hardy radial maximal e demonstramos uma decomposição atômica para este espaço via átomos radiais.

Abstract

One presents in this work an atomic decomposition via radial atoms for distributions on subspace $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ for $0 < p \leq 1$, of Hardy radial spaces $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \doteq H^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Such atomic decomposition tell us that, if $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \subseteq H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, then f has an atomic decomposition and the atoms of its decomposition are radials.

This work extends a theorem proved by R. R. Coifman and G. Weiss [7] in which the authors give a radial atomic decomposition for radial functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ where the atoms of such decomposition are radial functions.

The decomposition that we present here give us similar about the atoms radially for $0 < p \leq 1$. Specifically we define a maximal radial Hardy space and we prove an atomic decomposition for this spaces via radial atoms.

Sumário

1 Preliminares	16
1.1 Notações e definições básicas	16
1.2 Espaços de Hardy	22
1.3 Decomposição de Whitney	33
1.4 Funções e distribuições radiais	37
1.5 Espaços de Hardy radial segundo R. R. Coifman e G. Weiss	45
2 O Espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$	46
2.1 Resultados preliminares	46
2.2 Decomposição radial de Whitney	49
2.3 Construção da partição da unidade associada a conjuntos radiais	54
2.4 Definição e propriedades de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$	56
3 Decomposição Radial de Calderón-Zygmund	63
3.1 Decomposição radial de Calderón-Zygmund	63
3.2 Demonstração do caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$	76
4 Átomos Radiais e Decomposição Atômica de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$	89
4.1 $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$	89
4.2 Átomos radiais	100
4.3 Decomposição atômica radial	103
4.4 Partições de anéis em \mathbb{R}^n que preservam medida	114
4.5 Caracterização do espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ segundo R. R. Coifman e G. Weiss	119

4.6 Perguntas abertas	126
A Fórmula Faa di Bruno e aplicações	128
Referências Bibliográficas	131

Introdução

A teoria clássica dos espaços de Hardy tem origem no início do século XX com o estudo sobre a caracterização de valores de fronteira de funções holomorfas $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ no disco unitário \mathbb{D} , em uma variável complexa. Em 1915, G. H. Hardy no artigo [14] estudou o comportamento de funções da forma

$$\mu_p(F; r) \doteq \left(\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

no qual $0 \leq r < 1$ e investigou propriedades como o princípio do módulo máximo. Em 1923, F. Riesz no artigo [19] motivado pela propriedade que $\mu_p(F; r)$ é uma função crescente com respeito a r considerou o conjunto

$$H^p(\mathbb{D}) \doteq \left\{ F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorfa} : \sup_{0 < r < 1} \|\mu_p(F; r)\|_{L^p([0, 2\pi])} < \infty \right\},$$

cuja a notação utilizada H^p foi dada em homenagem a Hardy, e investigou a existência do valor de fronteira da função

$$f(e^{it}) = \lim_{r \nearrow 1} \operatorname{Re} \{ F(re^{it}) \} \quad (1)$$

em quase todo ponto $t \in [0, 2\pi)$. Observe que a função F pode ser reconstruída a partir de f pela integral de Poisson

$$F(re^{it}) = \int_0^{2\pi} P_r(e^{i(t-\theta)}) f(e^{i\theta}) d\theta, \quad (2)$$

no qual P_r é o núcleo de Poisson que satisfaz $\int_0^{2\pi} P_r(e^{i\eta}) d\eta = 1$. Fixado $1 < p < \infty$, Riesz demonstrou que para cada $f(e^{it}) \in L^p([0, 2\pi))$ a fórmula (2) define $F \in H^p(\mathbb{D})$ e $\mu_p(F; r) \leq A_p \|f(e^{it})\|_{L^p([0, 2\pi))}$ uniformemente para $0 \leq r < 1$, sendo $A_p > 0$ independente de f , além disso, o limite em (1) pode ser estendido em norma para $L^p([0, 2\pi))$. Dessa forma, cada $f(e^{it}) \in L^p([0, 2\pi))$ é identificada como o valor de fronteira da parte real de funções em $H^p(\mathbb{D})$ no sentido de (1).

Os espaços de Hardy, nas décadas subsequentes, evoluíram para outras caracterizações como $H^p(\mathbb{R}_+^2)$ associado ao semi-plano superior \mathbb{R}_+^2 , $H^p(\mathbb{R})$ associado a reta, além de outras extensões como $H^p(\mathcal{X})$ para espaços \mathcal{X} do tipo homogêneo desenvolvida por R. R. Coifman e G. Weiss em [7]. Para um maior aprofundamento dos espaços clássicos de Hardy citamos [9].

Em meados do século XX, com o desenvolvimento da Teoria de Calderón-Zygmund em Análise Harmônica (iniciado no artigo [5]), os espaços de Hardy tiveram um novo protagonismo. No célebre artigo de C. Fefferman e E. M. Stein [11] de 1972, uma extensão dos espaços de Hardy no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é apresentada. Nesse artigo, o espaço de Hardy em \mathbb{R}^n , denotado por $H^p(\mathbb{R}^n)$, é definido via funções (famílias) maximais que haviam sido apresentadas de maneira preliminar no artigo [4] de Burkholder, Gundy e Silverstein publicado em 1971. Conforme a definição apresentada em [11] dizemos que uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ quando existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$ tal que

$$M_\varphi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(\varphi_t * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

no qual $\varphi_t(x) \doteq t^{-n} \varphi(t^{-1}x)$. Além disso $\|f\|_{H^p} \doteq \|M_\varphi f\|_{L^p}$ define em $H^p(\mathbb{R}^n)$ uma p -norma (também chamada de quasi-norma) quando $0 < p < 1$ e uma norma quando $1 \leq p < \infty$, que induz uma métrica tornando o espaço completo. Como consequência da definição podemos concluir, por exemplo, que os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ equivalem os espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $1 < p \leq \infty$ e que $H^1(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço próprio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ (veja [22]). Os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ são considerados ótimos substitutos dos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, uma vez que estes espaços coincidem para $1 < p \leq \infty$ com suas normas sendo

equivalentes e o espaço dual de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$, não é trivialmente nulo.

Como destacado na definição, os elementos dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ são distribuições temperadas para $p < 1$ e funções $1 \leq p < \infty$. C. Fefferman, no artigo [10] de 1971, demonstrou uma importante propriedade dos espaços de Hardy na reta quando $p = 1$, a saber: o dual do espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R})$ é identificado com o espaço $BMO(\mathbb{R})$, conhecido como o espaço de F. John e L. Nirenberg das funções de oscilação média limitada, apresentado no clássico artigo [16]. Na demonstração dessa surpreendente identificação, de maneira implícita, C. Fefferman propôs uma decomposição do espaço $H^1(\mathbb{R})$ em elementos mais simples, que no futuro dariam origem a funções especiais denominada átomos. Em 1974 no artigo [6], R. R. Coifman apresenta um teorema de decomposição para $H^1(\mathbb{R})$ denominado por teorema de decomposição atômica que é estendido por R. Latter para o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$ no artigo [17] de 1978. Dizemos que uma função mensurável a é um H^p átomo ou simplesmente um (p, ∞) -átomo quando

(i) a possui suporte contido numa bola $B \doteq B(x_0, r)$;

(ii) $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq |B|^{-1/p}$;

(iii) a satisfaz condições de momento

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)x^\alpha dx = 0, \quad \forall |\alpha| \leq N_p \doteq \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right\rfloor.$$

O teorema de decomposição atômica provado por Latter afirma que dada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ existe uma família de (p, ∞) -átomos $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ e escalares $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ (reais ou complexos) tais que $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ em norma $H^p(\mathbb{R}^n)$ (e também em distribuição) e além do mais $\|f\|_{H^p}$ é comparável a

$$\inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j \right\},$$

no qual o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições atômicas de f .

O teorema anterior possui uma vasta lista de aplicações (veja [22] para algumas delas) no qual podemos ilustrar como exemplo uma aplicação sobre a limitação de operadores lineares $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Seja T

um operador linear contínuo em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se T é limitado uniformemente sobre (p, ∞) -átomos, então T é limitado em $H^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ então $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ no qual $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de (p, ∞) -átomos e $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ uma sequência de escalares (reais ou complexos). Usando o fato de T ser um operador linear, temos $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) = \sum_{j=1}^N \lambda_j T(a_j)$, e sendo $\{T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j)\}_{N=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo $H^p(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in H^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) \rightarrow g$ quando $N \rightarrow \infty$. Segue pela continuidade do operador T e pela unicidade do limite que $T(\sum_{j=1}^N \lambda_j a_j) \rightarrow Tf$ quando $N \rightarrow \infty$. Consequentemente temos T um operador limitado em $H^p(\mathbb{R}^n)$. A recíproca deste resultado também é válida, ou seja, se T for um operador linear contínuo e limitado em $H^p(\mathbb{R}^n)$, então T é uniformemente limitado em (p, ∞) -átomos. Isto decorre imediatamente do fato que os (p, ∞) -átomos são uniformemente limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Vimos anteriormente que os espaços de Hardy coincidem com os espaços de Lebesgue quando $p > 1$ e que algumas propriedades sobre os espaços de Lebesgue podem ser transferidas para os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$. Como exemplo podemos citar os operadores de Calderón-Zygmund (veja [22]) que são limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ (em geral não são limitados em $L^1(\mathbb{R}^n)$) e limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $p_0 < p \leq 1$. Um exemplo para ilustrar o comentário anterior é o operador Transformada de Riesz R_j definido pelo multiplicador $\widehat{R_j u}(\xi) = (\xi_j/|\xi|^{-1})\hat{u}(\xi)$, para $j = 1, \dots, n$ que é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ e em $H^1(\mathbb{R}^n)$, mas não é limitado em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Outras caracterizações dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ são conhecidas no qual citamos definições via funções maximais (grande função maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ e função não tangencial M_{φ}^*), fórmula da área de Lusin, além de caracterizações via teoremas de decomposição atômica e molecular. Uma interessante caracterização apresentada dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ foi recentemente obtida por A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier em [2] para funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ associada a famílias de funções no espaço de Sobolev $W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ para $q > n$. A caracterização obtida pelos autores em [2] é a caracterização a qual nos inspiramos para definir um espaço do tipo Hardy radial que apresentamos nesta tese, vamos descrever tal caracterização.

Considere $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja

$$M_q f(x) \doteq \sup_{\psi \in \mathcal{F}_x^q} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(y) dy \right|,$$

no qual \mathcal{F}_x^q é o conjunto das funções $\psi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ suportadas em alguma bola $B(x, r)$ satisfazendo

$$\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + r \|\nabla \psi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq |B(x, r)|^{1-\frac{1}{q}}.$$

Em [2] os autores demonstram que

$$\|\mathcal{M}_q f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

no qual $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ e $\frac{1}{q} < \frac{n+1}{n} - \frac{1}{p}$. Em particular o resultado é válido para $q = \infty$.

Considere agora uma distribuição temperada radial $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. O teorema da decomposição atômica enunciado anteriormente não nos fornece nenhuma garantia que os átomos que compõem a decomposição $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ sejam átomos radiais. Então, podemos formular o seguinte problema: dada $f \in \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n) \cap H^p(\mathbb{R}^n)$ é possível escolher os átomos radiais na decomposição anterior? Qual deveria ser a noção natural de átomos radiais? Vamos considerar inicialmente o caso $p = 1$, para refletir sobre tais questionamentos. Suponhamos inicialmente que f seja radial e $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Segue pelo teorema da decomposição atômica e da convergência em norma $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(x)$$

em quase todo ponto. Considere a mudança de coordenadas esféricas, dada por $x = r\omega$, no qual $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $r = |x|$, além disso como f é radial podemos escrever $f(x) = f^o(|x|)$. Logo,

$$f^o(r) |\mathbb{S}^{n-1}| = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f^o(r) d\theta = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta) d\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a_j(r\theta) d\theta.$$

Os autores R. R. Coifman e G. Weiss em [7] definiram a função

$$A^o(r) \doteq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta) d\theta$$

e em seguida estenderam a função A^o radialmente, isto é, $A(x) \doteq A^o(|x|)$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Também, provaram que a função A satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\text{supp } A \subset A_{r,R}$, no qual $A_{r,R} \subset \mathbb{R}^n$ é um anel;
- (ii) $\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_n |A_{r,R}|^{-1}$, no qual c_n é uma constante que depende somente da dimensão n ;
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} A(x) dx = 0$.

Na prova apresentada pelos autores, a condição (ii) está parcialmente demonstrada, pois os argumentos apresentados por eles requer uma análise adicional (uma ressalva na argumentação é apresentada pelos autores é dada na página 4.5). Inspirados pela definição acima de R. R. Coifman e G. Weiss em [7] definimos o conceito de átomo radial da seguinte forma: uma função $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um átomo radial para $0 < p \leq 1$ se satisfaz as seguintes condições:

- (i)* A função a é radial;
- (ii)* $\text{supp } a \subset A_{r,R}$, no qual $A_{r,R} \subset \mathbb{R}^n$ é um anel;
- (iii)* $\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq |A_{r,R}|^{-\frac{1}{p}}$;
- (iv)* $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) |x|^{|\alpha|} dx = 0$, para todo $|\alpha| \leq \left\lfloor n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right\rfloor$.

Motivados pelo resultado apresentado em [7] que nos diz que, se f é uma distribuição radial em $H^1(\mathbb{R}^n)$, então f tem uma decomposição atômica no qual seus átomos são funções radiais, surge o seguinte questionamento: é possível se obter uma decomposição atômica para distribuições radiais em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$ no qual os átomos sejam radiais satisfazendo (i)* – (iv)*?

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma versão do teorema da decomposição atômica (vide o Teorema 4.3.1) para distribuições radiais em espaços de Hardy, no qual as propriedades dos átomos definidos nos itens (i)* – (iv)* possam ser satisfeitas em algum sentido para funções radiais.

Os seguintes conceitos e resultados foram obtidos:

- Uma versão radial do teorema de decomposição de Calderón-Zygmund;

- Um conceito sobre átomos radiais;
- Decomposição atômica radial para distribuições radiais;
- Uma extensão e comentários do Corolário 2.27 apresentado em [7].

Existem também caracterizações dos espaços de Hardy por outros espaços funcionais, como por exemplo a caracterização dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ com os espaços de Lizorkin-Triebel homogêneo $\dot{F}_{p,2}^0(\mathbb{R}^n)$, isto é $H^p(\mathbb{R}^n) = \dot{F}_{p,2}^0(\mathbb{R}^n)$ (veja [24]-[25]). Em [21] os autores W. Sickel e L. Skrzypczak provaram um teorema de decomposição atômica para distribuições radiais no espaço de Lizorkin-Triebel e conseqüentemente para os espaços H^p 's, porém os átomos por eles obtidos não são necessariamente radiais.

As técnicas utilizadas para definirmos os espaços de Hardy radial e os resultados obtidos nesta tese são mais simples para serem utilizadas em aplicações e mais naturais do que as apresentadas nos espaços de Lizorkin-Triebel, pois as técnicas utilizadas resgatam a maneira como os espaços de Hardy foram originalmente definidos via funções maximais.

Este texto está dividido em quatro capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo e o apêndice podem ser lidos separadamente, pois no Capítulo 1 tratamos apenas de pré-requisitos os quais nos auxiliam na compreensão dos demais capítulos e no apêndice apresentamos uma aplicação das fórmulas de Faa di Bruno (veja [1] e [8]). Esta aplicação nos auxilia nas demonstrações dos teoremas que abordamos no texto.

No Capítulo 1, apresentamos todos os pré-requisitos e notações como por exemplo: teorema de caracterização maximal, definição dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, definição de átomos e o teorema da decomposição atômica para os espaços de Hardy. Além disso, apresentamos o conceito de distribuições radiais e teoremas de caracterização para distribuições radiais.

Já no Capítulo 2, construímos uma partição da unidade radial (suporte radial, mais precisamente o suporte é um anel em \mathbb{R}^n), definimos os espaços de Hardy radial $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$, demonstramos que $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço fechado do espaço das distribuições radiais e que $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo.

Um dos resultados centrais deste texto trata-se de uma versão radial do teorema da decomposição de Calderón-Zygmund (vide [22], página 3.1) para distribuições pertencentes ao espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$. Esta versão radial do teorema da decomposição de Calderón-Zygmund enunciamos e demonstramos no Capítulo 3. A versão radial da decomposição de Calderón-Zygmund nos impulsiona a definir átomos radiais.

Por fim, no Capítulo 4 demonstramos teoremas de densidades, como por exemplo que o espaço de Hardy radial $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$. Utilizando os resultados obtidos até então é possível concluir que o espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq 1$. Definimos o conceito de átomo radial e demonstramos que os espaços de Hardy radiais $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ possuem decomposição atômica radial, para $0 < p \leq 1$. Finalmente, demonstramos que o espaço de Hardy radial $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço próprio de $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \doteq H^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$. Quando $p = 1$, temos $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n) = H_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ e a demonstração deste caso foi inicialmente apresentada por R. R. Coifman e G. Weiss em [7], como mencionado anteriormente.

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar o espaço de Hardy em \mathbb{R}^n o qual foi introduzido no ano de 1971 pelos autores E. M. Stein e G. Weiss em [23]. Além desta referência, estaremos usando a caracterização do espaço de Hardy apresentada por E. M. Stein em [22], sendo esta a principal referência que será usada no texto.

Algumas propriedades que os espaços de Hardy possuem serão apenas enunciadas, para mais propriedades e suas respectivas demonstrações vide a referência E. M. Stein [22].

1.1 Notações e definições básicas

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definimos a bola aberta em \mathbb{R}^n de centro x_0 e raio $r > 0$ por

$$B(x_0, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\},$$

no qual $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^n .

Definimos a função parte inteira $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$[x] \doteq \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}.$$

Analogamente, definimos a função $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\lceil x \rceil \doteq \min\{m \in \mathbb{Z} : x \leq m\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis (também chamado de funções suaves) e $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções suaves $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ com suporte compacto.

Definição 1.1.1 *Considere o espaço formado por todas as funções $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\varphi(x)| = 0. \quad (1.1)$$

Esse espaço é chamado de espaço das funções contínuas que se anulam no infinito e será denotado por $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Em símbolos, temos de (1.1) que, dado $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|\varphi(x)| < \varepsilon$, para todo $x \notin K$.

Em $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ a topologia considerada é a topologia induzida pela norma $\mathcal{N}(\varphi) \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$.

Definição 1.1.2 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções mensuráveis em Ω tal que $\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty$, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensuráveis} : \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial no qual o funcional

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \doteq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$.

Quando $p = \infty$ o espaço $L^\infty(\Omega)$ é definido como sendo o espaço das funções

mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensuráveis} : \text{ess sup}_\Omega |f| < \infty\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial no qual o funcional

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \doteq \text{ess sup}_\Omega |f|$$

define uma norma em $L^\infty(\Omega)$.

Para um melhor entendimento dos teoremas que apresentaremos no decorrer do texto é necessário apresentarmos algumas definições e resultados prévios.

Definição 1.1.3 (σ -Álgebra) *Sejam $X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ não vazio. Dizemos que \mathcal{A} é uma álgebra se:*

- (i) Se $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^k \mathcal{E}_j \in \mathcal{A}$;
- (ii) Se $\mathcal{E} \in \mathcal{A} \implies \mathcal{E}^c \in \mathcal{A}$.

Além disso, se \mathcal{A} satisfaz

- (i)* $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{E}_j \in \mathcal{A}$,
- dizemos que \mathcal{A} é uma σ -álgebra.

Definição 1.1.4 *Uma medida positiva em \mathfrak{M} é uma função $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência arbitrária disjunta de conjuntos em \mathfrak{M} , então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{E}_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(\mathcal{E}_j).$$

Se ao invés de (ii) a função μ satisfizer

- (ii)* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k \in \mathfrak{M}$ disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^k \mathcal{E}_j\right) = \sum_{j=1}^k \mu(\mathcal{E}_j);$$

dizemos que μ é medida finitamente aditiva.

Seja $X \neq \emptyset$ e \mathfrak{M} uma σ -álgebra em X . Ao par (X, \mathfrak{M}) damos o nome de *espaço mensurável* e os elementos de \mathfrak{M} são chamados de *conjuntos mensuráveis*. Se $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma medida, então a terna (X, \mathfrak{M}, μ) é chamado de *espaço medida*.

Definição 1.1.5 (Medida com Sinal) *Seja (X, \mathfrak{M}) um espaço mensurável. Uma medida com sinal em (X, \mathfrak{M}) é uma função*

$$\nu : \mathfrak{M} \rightarrow [-\infty, +\infty) \quad \text{ou} \quad \nu : \mathfrak{M} \rightarrow (-\infty, +\infty]$$

que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ disjuntos, então

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(\mathcal{E}_j).$$

Definição 1.1.6 (Mutuamente Singular) *Dizemos que duas medidas com sinal μ e ν em (X, \mathfrak{M}) são mutuamente singulares e denotaremos este fato por $\nu \perp \mu$ se existem $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = X$, $\mu(\mathcal{A}) = 0$ e $\nu(\mathcal{B}) = 0$.*

Definição 1.1.7 *Dizemos que (X, \mathfrak{M}, μ) é σ -finito se:*

- (i) Existir uma coleção $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ tal que $\mu(\mathcal{E}_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$;
- (ii) $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j$.

Definição 1.1.8 (Medida Complexa) *Uma medida complexa no espaço de medida (X, \mathfrak{M}) é uma função $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $\nu(\emptyset) = 0$;
- (ii) Se $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos, então

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(\mathcal{E}_j)$$

no qual a série converge absolutamente.

Definição 1.1.9 A álgebra de Borel \mathcal{B}_X de um espaço métrico (ou topológico) é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos em X (ou, equivalentemente, pelos fechados em X). Os conjuntos pertencentes a \mathcal{B}_X são chamados conjuntos de Borel de X ou, simplesmente, borelianos de X .

Uma medida de Borel é uma medida definida sobre os borelianos de \mathbb{R}^n .

Definição 1.1.10 (Medida Regular) Uma medida de Borel μ definida em \mathbb{R}^n é regular se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\mu(\mathcal{K}) < \infty$, para todo compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\mu(\mathcal{E}) = \sup\{\mu(\mathcal{K}) : \mathcal{K} \subset \mathcal{E} \text{ compacto}\}$;
- (iii) $\mu(\mathcal{E}) = \sup\{\mu(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \supset \mathcal{E} \text{ aberto}\}$.

Definição 1.1.11 (Absolutamente Contínua) Seja ν uma medida com sinal e μ uma medida positiva em (X, \mathfrak{M}) . Dizemos que ν é absolutamente contínua em relação a μ e denotada por $\nu \ll \mu$. Se $\mu(\mathcal{E}) = 0$ para todo $\mathcal{E} \in \mathfrak{M}$, então $\nu(\mathcal{E}) = 0$.

Definição 1.1.12 Seja μ uma medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n e definimos a medida σ_{n-1} sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} da seguinte forma: Se $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ no qual A é um conjunto de Borel, seja \tilde{A} o conjunto dos pontos $r \cdot u$ no qual $0 < r < 1$ e $u \in A$. Definimos

$$\sigma_{n-1}(A) \doteq n \mu(\tilde{A}).$$

Além disso, se f é uma função Borel mensurável e não negativa, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta) d\sigma_{n-1}(\theta).$$

Observação 1.1.1 Por simplicidade de notação, denotaremos apenas por σ a medida sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} . Para mais propriedades sobre a medida σ_{n-1} vide W. Rudin [20]. Além disso, para não sobrecarregarmos as notações, por muitas vezes denotaremos por $|\mathbb{S}^{n-1}| \doteq \sigma(\mathbb{S}^{n-1})$.

Teorema 1.1.1 (Representação de Riesz) Se $\Psi : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo, então Ψ pode ser representado por uma única medida

μ de Borel complexa e regular, isto é,

$$\Psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Vide W. Rudin [20], Teorema 6.19, página 130. ■

Teorema 1.1.2 (Lebesgue-Radon-Nykodym) *Sejam ν uma medida com sinal e σ -finita em (X, \mathfrak{M}) , e μ uma medida positiva σ -finita em (X, \mathfrak{M}) . Então, existem únicas λ e ρ medidas com sinal em (X, \mathfrak{M}) satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $\nu = \lambda + \rho$;
- (ii) $\lambda \perp \mu$;
- (iii) $\rho \ll \mu$.

Além disso, existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a qual é μ -integrável estendida, tal que $d\rho = f d\mu$ e f é única μ -q.t.p.

Demonstração. Vide G. B. Folland [12], Teorema 3.8, página 90. ■

Definição 1.1.13 (Espaço de Schwartz) *Definimos o espaço de Schwartz das funções suaves que decaem rapidamente no infinito por*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq c_{\alpha, \beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos a seminorma $\mathcal{P}_{\alpha, \beta}(\varphi) \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Esta seminorma induz uma topologia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a qual o torna um espaço de Fréchet.

Observação 1.1.2 *A topologia gerada pelas seminormas $\mathcal{P}_{\alpha, \beta}$ pode ser consultada em L. Hörmander [15].*

Definição 1.1.14 *O espaço dos funcionais lineares contínuos via a topologia fraca definidos em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ serão denotados respectivamente por $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Os espaços $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ recebem o nome de “espaço das distribuições” e “espaço das distribuições temperadas”, respectivamente.*

Se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, denotaremos a ação da distribuição f sobre a função φ por $\langle f, \varphi \rangle$. E analogamente, denotaremos a ação da distribuição temperada f sobre a função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por $\langle f, \varphi \rangle$.

Definição 1.1.15 (Convolução) *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sendo que f ou g tenham suporte compacto. Definimos a convolução de f por g como*

$$(f * g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(y-x) dy.$$

De modo mais geral temos a seguinte definição.

Definição 1.1.16 *Se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ denotaremos por $f * \varphi$ a função*

$$f * \varphi(x) \doteq \langle f, \check{\varphi}_x \rangle$$

sendo $\check{\varphi}_x(y) \doteq \varphi(x-y)$. Dizemos que $f * \varphi$ é a convolução da distribuição f pela função φ .

Definição 1.1.17 *Sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções e $\mathbb{R}^n \supseteq A \neq \emptyset$. Diremos que f é comparável com g e denotaremos por $f \approx g$ se existirem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$C_1 g(x) \leq f(x) \leq C_2 g(x), \quad \forall x \in A.$$

Denotaremos por $f(x) \lesssim g(x)$ quando $f(x) \leq Cg(x)$ para todo $x \in A$ e $C > 0$ uma constante independente de $x \in A$.

1.2 Espaços de Hardy

Nesta seção apresentaremos os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq 1$ e algumas propriedades e aplicações associadas a eles. Os espaços de Hardy aqui tratados são os mesmos da referência E. M. Stein [22], assim como suas respectivas propriedades.

Definição 1.2.1 (Distribuição Limitada) *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que f é uma distribuição limitada, se para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tem-se $f * \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.2.2 *Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma função suportada na bola unitária $B(0, 1)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definimos a função maximal*

$M_\varphi f$ associada a função φ por

$$M_\varphi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(x)|,$$

no qual $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(\frac{x}{t})$.

Definição 1.2.3 Fixado $N \in \mathbb{N}$ definimos uma subcoleção $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\mathcal{F} \doteq \mathcal{F}_N = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq 1, |\alpha|, |\beta| \leq N\}.$$

Definimos a grande função maximal de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ associada à coleção \mathcal{F} por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{F}} M_\varphi f(x).$$

Se f é uma distribuição temperada e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * \varphi$ é uma função bem definida e de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denotando por \mathbb{R}_+^{n+1} o semi-plano superior composto de todos os pontos $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, o núcleo de Poisson de \mathbb{R}_+^{n+1} é definido por

$$P(x) \doteq \frac{c_n}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{e} \quad P_t(x) \doteq \frac{1}{t^n} P\left(\frac{x}{t}\right),$$

no qual c_n é uma constante a qual depende somente da dimensão n . Quando f é uma distribuição limitada, definimos $u(x, t) \doteq f * P_t(x)$ como sendo a integral de Poisson de f definida no semi-plano superior.

A função maximal não-tangencial de u é definida por

$$u^*(x) = \sup_{|x-y| \leq t} |u(y, t)|.$$

Os espaços de Hardy podem ser caracterizados de diferentes formas, como mostra o teorema a seguir (veja E. M. Stein [22] na página 91).

Teorema 1.2.1 (Caracterização Maximal) *Seja $0 < p \leq \infty$. Então, para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$ tal que $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;*
- (ii) *Existe uma coleção \mathcal{F} tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;*

(iii) A distribuição f é limitada e $u^*(x) \doteq \sup_{|x-y| \leq t} |(f * P_t)(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$, no qual P é o núcleo de Poisson.

Uma quarta condição pode ser incluída ao Teorema [1.2.1](#) que consiste em trocar “existe” por “para toda” na condição (i). De fato, suponha que (i) seja válida para alguma $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com integral não nula. Dada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que

$$M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Desde que (i) \Rightarrow (ii), existe, portanto, \mathcal{F}_N tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\varepsilon\varphi \in \mathcal{F}_N$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\varepsilon M_\varphi f(x) = \varepsilon \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(x)| = M_{\varepsilon\varphi} f(x) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f(x),$$

implicando em $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Uma distribuição temperada f pertence ao espaço de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, se f cumpre qualquer uma das condições do Teorema [1.2.1](#). Mais precisamente, definimos o espaço de Hardy da seguinte forma.

Definição 1.2.4 (Espaço de Hardy) *Seja $0 < p \leq \infty$. Uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente, se $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \doteq \|M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Em notação de conjuntos

$$H^p(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Quando $0 < p < 1$ o funcional $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} : H^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma p -norma, isto é, se $f, g \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então

(i) $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = 0 \iff f \equiv 0$ no sentido das distribuições, isto é, $\langle f, \varphi \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

$$(ii) \|\lambda f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = |\lambda| \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}, \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \|f + g\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p + \|g\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Por simplicidade diremos que $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ é uma norma em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Afirmamos que a norma em $H^p(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translação. De fato, definindo $T_h(\varphi)(x) = \varphi(x + h)$, temos

$$\begin{aligned} M_\varphi(T_h a)(x) &= \sup_{t>0} |T_h(a) * \varphi_t(x)| \\ &= \sup_{t>0} |T_h(a * \varphi_t)(x)| \\ &= \sup_{t>0} |a * \varphi_t(x + h)| \\ &= M_\varphi(a)(x + h). \end{aligned}$$

Disto, decorre que

$$\|T_h(a)\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} = \|M_\varphi(T_h a)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|M_\varphi(a)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Para $0 < p \leq 1$, o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo munido da métrica

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p, \quad \forall f, g \in H^p(\mathbb{R}^n).$$

Uma outra propriedade que os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ possuem é que, se $f_j \rightarrow 0$ em $H^p(\mathbb{R}^n)$, então $f_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, isto é, a topologia de $H^p(\mathbb{R}^n)$ é mais fina do que em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.2.1 *Uma propriedade interessante que relaciona os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ e os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ é que $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$. Além do mais $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão vale em norma. A demonstração deste fato pode ser consultada em E. M. Stein [22] na página 112.*

Os espaços de Hardy são inicialmente definidos para distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, porém o próximo teorema nos diz que os espaços de Hardy também podem ser definidos sobre o espaço de distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2.2 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição (não necessariamente temperada) e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$. Se $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 0$, então $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Vide a referência A. Uchiyama [26]. ■

A seguir iremos apresentar uma outra caracterização dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, e esta caracterização é de grande relevância para este texto.

Sejam $f \in \mathcal{D}'(B(x, r))$ e $N \in \mathbb{N}_0$. Para todo $r > 0$ definimos

$$\mathcal{M}_{r,N}f(x) \doteq \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B(x,r')) \\ 0 < r' \leq r}} |\langle f, \varphi \rangle|, \quad (1.2)$$

no qual o supremo em (1.2) é tomado na classe de funções definida por

$$\mathcal{C}_{c,N}^\infty(B) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x, r)) : |\partial^\alpha \varphi| \leq r^{-n-|\alpha|}, \forall |\alpha| \leq N\}.$$

Observe que, se $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B)$, então $t^{-n}\varphi(tB) \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(tB)$ para todo $t > 0$. Quando $r = \infty$ denotaremos a função maximal em (1.2) por $\mathcal{M}_{\infty,N}f(x)$.

Uma observação importante em E. M. Stein [22], página 99 é que, assumindo N grande o suficiente (dependendo somente de p e n), uma distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente, se $\mathcal{M}_{\infty,N}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \varphi \subset \overline{B(0, 1)}$, $\varphi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Note que

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| = \sup_{t>0} |\langle f, \varphi_t(x - \cdot) \rangle|. \quad (1.3)$$

Se definirmos $\psi_t(y) \doteq t^{-n}\varphi((x - y)/t)$, temos que

$$\text{supp } \psi_t \subset \overline{B(x, t)} \quad \text{e} \quad \|\partial^\alpha \psi_t\| \leq c_\alpha t^{-n-|\alpha|}.$$

Definindo a função $\tilde{\psi}_t = c^{-1}\psi_t$ no qual $c = \max_{|\alpha| \leq N} \{c_\alpha\}$, temos claramente que $\tilde{\psi}_t \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B(x, t))$. Portanto, assumindo $\mathcal{M}_{\infty,N}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ temos por (1.3) que

$$M_\varphi f(x) \leq c \mathcal{M}_{\infty,N}f(x) \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

e conseqüentemente

$$\|M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\mathcal{M}_{\infty,N} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Portanto, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B(x,r))$. Definindo $\tilde{\varphi}(y) \doteq r^n \varphi(x - ry)$, temos $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B(0,1))$ e $\|\partial^\alpha \tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$. Conseqüentemente, temos $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\tilde{\varphi}) \leq 1$, para todo $|\alpha|, |\beta| \leq N$, no qual N indexa a família \mathcal{F}_N da grande função maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Portanto, como $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}_N$, $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N}^\infty(B(x,r))$ e

$$\varphi(y) = \frac{1}{r^n} \tilde{\varphi}\left(\frac{x-y}{r}\right) = \tilde{\varphi}_r(x-y)$$

temos

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi}_r(x - \cdot) \rangle = f * \tilde{\varphi}_r(x) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x). \quad (1.5)$$

Segue de (1.5) que $\mathcal{M}_{\infty,N} f(x) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x)$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$ e conseqüentemente $\|\mathcal{M}_{\infty,N} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

A seguir, apresentaremos uma outra forma de definir os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ desde que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. A caracterização é obtida por A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier em [2].

Seja $q > n$. Fixe $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a família \mathcal{F}_x^q como sendo o conjunto das funções $\psi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ com suporte em alguma bola $B(x,r)$ as quais satisfazem

$$\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + r \|\nabla \psi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq |B(x,r)|^{-\frac{1}{q}},$$

no qual $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Desde que $q > n$, o teorema de Sobolev nos garante que as funções testes são limitadas.

Para $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\mathcal{M}_q f(x) \doteq \sup_{\psi \in \mathcal{F}_x^q} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) f(x) dx \right|.$$

Lema 1.2.1 *Seja $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.*

(i) Existe uma constante $C > 0$ independente de f tal que

$$M_\varphi f \leq C \mathcal{M}_\infty f, \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) Para $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ e $\frac{1}{q} < \frac{n}{n+1} - \frac{1}{p}$

$$\|\mathcal{M}_q f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Vide a referência A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier [2]. ■

O exemplo apresentado a seguir é de uma função a qual pertence ao espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.1 Seja $\mathbf{a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\mathbf{a}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ -1, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, a função \mathbf{a} cumpre as seguintes propriedades:

(i) $\text{supp } \mathbf{a} \subset [0, 1]$;

(ii) $\|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}(x) dx = 0$.

A função \mathbf{a} é um caso particular de uma classe de funções especiais denominadas “átomo” a qual iremos definir a seguir.

Definição 1.2.5 (Átomo) Sejam $0 < p \leq 1$ e $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$. Uma função $a \in L^q(\mathbb{R}^n)$ é chamada de (p, q) -átomo se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\text{supp } a \subset B(x_0, r)$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$;

(ii) $\|a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| \leq \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right\rfloor$.

Afirmamos que, todo (p, ∞) -átomo é um (p, q) -átomo para $q \geq 1$. De fato, seja a um (p, ∞) -átomo, então

$$\|a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{B(x_0, r)} |a(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(|B(x_0, r)|^{-\frac{q}{p}+1} \right)^{\frac{1}{q}} = |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.2.3 *Os (p, ∞) -átomos são uniformemente limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe $c = c(n, p) > 0$ tal que*

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} (M_\varphi a(x))^p dx \leq c, \quad (1.6)$$

no qual $c > 0$ é independente de qualquer (p, ∞) -átomo.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp } \varphi \subset B(0, 1)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Suponhamos que a seja um (p, ∞) -átomo e $\text{supp } a \subset B \doteq B(x_0, r)$. Usando o fato de que a norma $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$ é invariante por translação, podemos supormos que $B = B(0, r)$ e consideremos $B^* = B(0, 2r)$. Para demonstrarmos (1.6) basta estimarmos uniformemente I_1 e I_2 abaixo

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{B^*} (M_\varphi(a)(x))^p dx + \int_{(B^*)^c} (M_\varphi(a)(x))^p dx \doteq I_1 + I_2.$$

Note que

$$(i) |(a * \varphi_t)(x)| \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\varphi_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{|B|^{\frac{1}{p}}};$$

$$(ii) |(a * \varphi_t)(x)| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{t^n} \int_B |a(x)| dx \leq \frac{c}{t^n |B|^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Vamos estimar a integral I_1 . Com efeito, por (i), temos

$$\int_{B^*} (M_\varphi(a)(x))^p dx \leq \int_{B^*} \frac{1}{|B|} dx = 2^n < \infty. \quad (1.7)$$

Em (1.7) o argumento usado para se obter a estimativa é válido para todo $0 < p \leq 1$.

Para estimarmos I_2 , vamos supor inicialmente que $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$. Neste caso, tal condição implica que

$$0 \leq n \left\lfloor \frac{1}{p} - 1 \right\rfloor < 1$$

e, portanto, se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| \leq n[\frac{1}{p} - 1]$, então $\alpha = 0$, isto é, se $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$, então os (p, ∞) -átomos possuem momentos nulos, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0. \quad (1.8)$$

Seja $x \in (B^*)^c$, então $|x| \geq 2r$. Consequentemente,

$$\frac{1}{2}|x| \leq |x - y| < t, \quad \forall y \in B \cap \text{supp } \varphi_t(x - \cdot). \quad (1.9)$$

Por (1.8), temos

$$\begin{aligned} (a * \varphi_t)(x) &= \frac{1}{t^n} \int_B a(y) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \\ &= \frac{1}{t^n} \int_B a(y) \left[\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right] dy. \end{aligned}$$

Segue, pela desigualdade do valor médio e (1.9), que

$$\begin{aligned} |(a * \varphi_t)(x)| &\leq \frac{1}{t^n} \int_B |a(y)| \left| \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right| dy \\ &\leq \frac{c}{t^{n+1}} \int_B |a(y)| |y| dy \\ &\leq \frac{c r}{t^{n+1} |B|^{\frac{1}{p}-1}} \\ &\leq \frac{c r}{|x|^{n+1} |B|^{\frac{1}{p}-1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{(B^*)^c} (M_\varphi a(x))^p dx &\leq \frac{c^p r^p}{|B|^{1-p}} \int_{(B^*)^c} |x|^{-p(n+1)} dx \\ &\leq \frac{c^p r}{|B|^{1-p}} \int_{2r}^\infty \rho^{-p(n+1)+n-1} d\rho \\ &\leq C_{n,p} r^{p-n(1-p)} r^{-p(n+1)+n} \\ &= C_{n,p} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{(B^*)^c} (M_\varphi a(x))^p dx \leq c_{n,p}. \quad (1.10)$$

Combinando (1.7) com (1.10) temos (1.6), desde que $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$.

Agora, suponhamos $\frac{n}{n+N_p+1} < p \leq \frac{n}{n+N_p}$ e $N_p \doteq \lfloor n(\frac{1}{p} - 1) \rfloor$. Pela expansão de Taylor com resto integral, temos

$$\varphi_t(x - y) = P_{N_p}(y) + R_{N_p}(y),$$

no qual

$$P_{N_p}(y) = \sum_{|\alpha| \leq N_p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi_t(x) y^\alpha$$

e

$$R_{N_p}(y) = \sum_{|\beta|=N_p+1} \frac{N_p+1}{t^{n+|\beta|}\beta!} \int_0^1 (1-s)^{N_p} (\partial^\beta \varphi) \left(\frac{x+sy}{t} \right) y^\beta ds.$$

Então,

$$|R_{N_p}(y)| \leq \frac{c |y|^{N_p+1}}{t^{n+N_p+1}}. \quad (1.11)$$

Usando a condição de momento de a , temos

$$\begin{aligned} (\varphi_t * a)(x) &= \int_{(B^*)^c} [\varphi_t(x - y) - P_{N_p}(y)] a(y) dy \\ &= \int_{(B^*)^c} R_{N_p}(y) a(y) dy. \end{aligned}$$

Logo, pela condição de controle da norma $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ do átomo a e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned} |(\varphi_t * a)(x)| &\leq \int_B |R_{N_p}(y)| |a(y)| dy \\ &\leq \int_B \frac{c |y|^{N_p+1}}{t^{n+N_p+1}} |a(y)| dy \\ &\leq \frac{c r^{N_p+1}}{t^{n+N_p+1} |B|^{\frac{1}{p}-1}} \\ &\leq \frac{c r^{N_p+1}}{|x|^{n+N_p+1} |B|^{\frac{1}{p}-1}}, \end{aligned}$$

devido a (1.9). Disto segue que

$$\begin{aligned} \int_{(B^*)^c} (M_\varphi a(x))^p dx &\leq c_{n,p} r^{(N_p+1)p-n(1-p)} \int_{(B^*)^c} |x|^{-p(n+N_p+1)} dx \\ &\leq c_{n,p} r^{(N_p+1)p-n(1-p)} \int_{2r}^\infty \rho^{-p(n+N_p+1)+n-1} d\rho \\ &= c_{n,p} r^{(N_p+1)p-n(1-p)} r^{-p(n+N_p+1)+n} \\ &= c_{n,p} < \infty \end{aligned}$$

e, portanto

$$\int_{(B^*)^c} (M_\varphi a(x))^p dx \leq c_{n,p}. \quad (1.12)$$

Combinando (1.7) com (1.12) temos (1.6) para $\frac{n}{n+N_p+1} < p \leq \frac{n}{n+N_p}$ e, consequentemente temos (1.6) para todo $0 < p \leq 1$. ■

A seguir listaremos algumas propriedades que os (p, ∞) -átomos possuem. As demonstrações de tais propriedades podem ser encontradas na referência E. M. Stein [22].

Teorema 1.2.4 *Seja Θ o conjunto formado pelas combinações lineares finitas de (p, ∞) -átomos. Então, Θ é denso em $H^p(\mathbb{R}^n)$.*

O Teorema 1.2.4 segue do seguinte resultado.

Teorema 1.2.5 (Decomposição Atômica) *Se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então existe uma sequência $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ de (p, ∞) -átomos e uma sequência de escalares (reais ou complexos) $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^p(\mathbb{N})$ tais que*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j, \quad \text{em } H^p(\mathbb{R}^n).$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\}, \quad (1.13)$$

o ínfimo em (1.13) é tomado sobre todas as decomposições atômicas de f .

A recíproca do teorema da decomposição atômica 1.2.5 também é válida e é apresentada a seguir.

Teorema 1.2.6 *Sejam $0 < p \leq 1$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^p(\mathbb{N})$ uma sequência de escalares (reais ou complexos) e $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ uma sequência de (p, ∞) -átomos. Então, a série $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ converge para uma distribuição $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ no sentido das distribuições. Além disso,*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\}.$$

1.3 Decomposição de Whitney

A partir de agora, $F \subset \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto fechado não vazio e Ω o seu complementar. Por *cubos* em \mathbb{R}^n entenderemos cubos fechados cujas as faces são paralelas aos planos coordenados. Dizemos que dois cubos são “disjuntos” se seus interiores forem dois a dois disjuntos.

Denotaremos o diâmetro de um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\text{diam}(Q) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in Q\}$$

e por

$$d(Q, F) = \inf\{\|x - y\| : x \in Q, y \in F\}$$

a distância entre Q a F . Além disso,

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}$$

denotará a distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ a F . Por fim, denotaremos o lado de um cubo Q por $\ell(Q)$.

Teorema 1.3.1 (Decomposição de Whitney) *Seja $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ fechado. Então, existe uma coleção de cubos $\mathcal{V} = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ com interiores dois a dois disjuntos tais que:*

(i) $\Omega = F^c = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$;

(ii) *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ satisfazendo*

$$C_1 \text{diam}(Q_j) \leq d(Q_j, F) \leq C_2 \text{diam}(Q_j).$$

Demonstração. Considere todas as n -uplas com coordenadas inteiras. Estas definem cubos unitários cujos os vértices são n -uplas com coordenadas inteiras. A este conjunto denotemos por \mathfrak{M}_0 . Dado $k \in \mathbb{Z}$, definamos $\mathfrak{M}_k = 2^{-k}\mathfrak{M}_0$. Note que, cada cubo de \mathfrak{M}_k dá origem a 2^n cubos de \mathfrak{M}_{k+1} . Além disso, os cubos de \mathfrak{M}_k tem comprimento de aresta 2^{-k} e diâmetro $2^{-k}\sqrt{n}$.

Definamos para cada $k \in \mathbb{Z}$ as camadas Ω_k por

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^N : C 2^{-k} < d(x, F) \leq C 2^{-k+1}\},$$

no qual $C > 0$ é uma constante a qual será escolhida no decorrer da demonstração. Então, decorre da definição de Ω_k que

$$\Omega = \bigcup_k \Omega_k.$$

Considere a seguinte família de cubo

$$\mathfrak{F}_0 = \bigcup_k \{Q \in \mathfrak{M}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}$$

e conseqüentemente, afirmamos que:

$$(i) \text{ diam}(Q) \leq d(Q, F) \leq 4 \text{ diam}(Q), \quad \forall Q \in \mathfrak{F}_0;$$

$$(ii) \bigcup_{Q \in \mathfrak{F}_0} Q = \Omega.$$

De fato, mostremos inicialmente (i). Dado $Q \in \mathfrak{F}_0$, temos por definição que $Q \in \mathfrak{M}_k$ e $Q \cap \Omega_k \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in Q$ tal que

$$C 2^{-k} < d(x, F) \leq C 2^{-k+1}.$$

Tomando $C = 2\sqrt{n}$, obtemos que

$$d(Q, F) \leq d(x, F) \leq C 2^{-k+1} = 4 \cdot 2^{-k} \sqrt{n} = 4 \text{ diam}(Q).$$

Seja $y \mapsto d(y, F)$ a função que a cada $y \in \mathbb{R}^n$ calcula a distância de y a F . A função $y \mapsto d(y, F)$ é contínua, então possui um valor máximo e mínimo sobre Q , uma vez que Q é compacto. Deste modo, existe $y \in Q$ tal que $d(y, F) = d(Q, F)$.

Portanto,

$$d(x, F) - d(y, F) \leq |d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y) \leq \text{diam}(Q).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(Q, F) &= d(y, F) \\ &\geq d(x, F) - 2^{-k} \sqrt{n} \\ &\geq 2\sqrt{n}2^{-k} - 2^{-k} \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}2^{-k} \\ &= \text{diam}(Q), \end{aligned}$$

o que prova (i).

Vejamos a demonstração de (ii). Seja $x \in \Omega$, então pelo fato de que $\bigcup_k \Omega_k = \Omega$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \Omega_k$. Como a malha gerada pelos cubos de \mathfrak{M}_k é uma cobertura para \mathbb{R}^n , em particular, também é uma cobertura para

Ω_k , portanto $x \in Q$ para algum $Q \in \mathfrak{F}_0$. Assim, mostrando que

$$\Omega \subset \bigcup_{Q \in \mathfrak{F}_0} Q.$$

Seja $x \in Q$, para algum $Q \in \mathfrak{F}_0$. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $Q \in \mathfrak{M}_k$ e existe $y \in Q \cap \Omega_k$. Note que, pelo item (i) temos

$$2\sqrt{n}2^{-k-1} = \sqrt{n}2^{-k} = \text{diam}(Q) \leq d(Q, F) \leq d(x, F).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(x, F) &\leq d(x, y) + d(y, F) \\ &\leq \sqrt{n}2^{-k} + 2\sqrt{n}2^{-k+1} \\ &= 5\sqrt{n}2^{-k} \\ &\leq 2^3\sqrt{n}2^{-k} \\ &= 2\sqrt{n}2^{-(k-1)+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(x, F) \in [2\sqrt{n}2^{-(k+1)}, 2\sqrt{n}2^{-(k-1)+1}] \subset (2\sqrt{n}2^{-(k+2)}, 2\sqrt{n}2^{-(k-1)+1}].$$

Observando que

$$\bigcup_{j=k-1}^{k+2} \Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 2\sqrt{n}2^{-(k+2)} < d(x, F) \leq 2\sqrt{n}2^{-(k-1)+1}\},$$

o que mostra $x \in \Omega_j$, para algum $j = k-1, k, \dots, k+2$. Logo, $x \in \Omega$, concluindo o item (ii).

A construção acima não garante que os cubos tenham interiores dois a dois disjuntos, pois os cubos da malha \mathfrak{M}_k contém os cubos da malha \mathfrak{M}_{k+1} , para todo $k \in \mathbb{Z}$. Observe ainda que, se $Q_1 \in \mathfrak{M}_{k_1}$ e $Q_2 \in \mathfrak{M}_{k_2}$ não disjuntos, então um contém o outro. Por exemplo, se $Q_1 \subset Q_2$, então é porque $k_2 < k_1$. Para contornarmos este problema, vamos proceder do seguinte modo: dado $Q \in \mathfrak{F}_0$, existe um único cubo Q' tal que $Q \subset Q'$ ou $Q' \cap Q = \emptyset$, isto é, Q' é um cubo

maximal e ainda está na família e satisfaz as condições (i) e (ii) do enunciado do teorema.

Para escolhermos os cubos maximais que satisfazem as condições (i) e (ii), basta usarmos o axioma da escolha para obtermos tais cubos. ■

Observação 1.3.1 *Se existir uma coleção $\mathcal{V} = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ como a descrita no Teorema [1.3.1](#), então*

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\ell(Q_k)}{\ell(Q_j)} \leq 4$$

desde que, os cubos Q_j e Q_k se interceptam somente na fronteira.

De fato,

$$\sqrt{n}\ell(Q_j) \leq \text{dist}(Q_j, F) \leq \text{dist}(Q_j, Q_k) + \text{dist}(Q_k, F) \leq 0 + 4\sqrt{n}\ell(Q_k).$$

1.4 Funções e distribuições radiais

Apresentaremos nesta seção o conceito de funções radiais e de distribuições radiais. Os resultados apresentados nesta seção, são adaptações dos resultados e conceitos publicados por L. Grafakos e G. Teschl em [\[13\]](#).

A transformada de Fourier de uma aplicação $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ é definida pela convergência da integral oscilatória

$$\widehat{\Phi}(\xi) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Se a função Φ é radial, isto é, $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ no qual $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par, então a transformada de Fourier de Φ é radial. Para ver a demonstração deste resultado veja E. M. Stein e G. Weiss [\[23\]](#) nas páginas 155 a 170.

Definição 1.4.1 *Definimos por $\mathcal{O}(n)$ o espaço formado por todas as transformações lineares $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ as quais são ortogonais, isto é, $|A(x)| = |x|$.*

Definição 1.4.2 *Uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dita radial, se para toda*

transformação ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$ tivermos que

$$\varphi = \varphi \circ A.$$

Denotaremos o espaço de todas as funções $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ radiais por $\mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

É claro que quando $n = 1$ temos

$$\mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \varphi(x) = \varphi(-x)\},$$

em outras palavras, as funções Schwartz radiais em \mathbb{R} são as funções pares de Schwartz.

Definição 1.4.3 *Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dita radial, se para toda transformação ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$ tivermos que*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \circ A \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Denotaremos por $\mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as distribuições temperadas em \mathbb{R}^n radiais.

Analogamente, uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dita radial, se para toda transformação ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$ tivermos que

$$\langle f, \psi \rangle = \langle f, \psi \circ A \rangle, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as distribuições em \mathbb{R}^n radiais.

Observação 1.4.1 *Denotaremos por $\mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço formado pelas funções $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e radiais.*

Seja $n > 1$. Existe um homomorfismo natural $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$\varphi(x) \mapsto \varphi^o(r) \doteq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) d\theta.$$

É claro que o homomorfismo está bem definido, pois $\varphi^o \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R})$. No

caso $n = 1$, temos

$$\varphi^{rad}(x) \doteq \varphi^o(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)).$$

Reciprocamente, dada uma função $\varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R})$ podemos definir uma função radial em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pela aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(r) &\longmapsto \varphi^O(x) \doteq \varphi(|x|). \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação $\varphi \mapsto \varphi^O$ é claramente um homomorfismo entre os espaços $\mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A composição $\varphi \mapsto \varphi^o \mapsto (\varphi^o)^O \doteq \varphi^{rad}$ dá origem a um homomorfismo entre os espaços $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Um outro fato que podemos observar é que, φ é radial se, e somente, se $\varphi = \varphi^{rad}$.

Outra propriedade interessante é que, se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $\varphi * \psi$ também é radial. De fato, se $A \in \mathcal{O}(n)$, então

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(Ax - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(A(x - A^{-1}y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x - A^T y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\psi(x - z)|\det A| dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\psi(x - z) dz \\ &= (\varphi * \psi)(x). \end{aligned}$$

Também temos que $f \in \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n)$, então $f * \varphi$ também é radial. De fato, se $A \in \mathcal{O}(n)$, então

$$(f * \varphi)(Ax) = \langle f, \check{\varphi}_{Ax} \rangle = \langle f, \check{\varphi}_x \rangle = (f * \varphi)(x), \quad (1.14)$$

no qual $\check{\varphi}(y) \doteq \varphi(-y)$ e usamos o fato de que φ é radial (portanto $\check{\varphi}$ é radial) para escrevermos $\check{\varphi}_{Ax}(y) = \check{\varphi}(y - Ax) = \check{\varphi}(A^T y - x) = \check{\varphi}_x(A^T y)$.

Os argumentos acima continuam válidos para $f \in \mathcal{D}'_{rad}$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.4.1 *Se $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi^{rad} \rangle.$$

Demonstração. Inicialmente vamos supor que $f \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, se $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, usando mudança de variável esférica juntamente com o fato de que $f(x) = f^o(|x|)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \\ &= \int_0^{+\infty} f^o(r) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) d\theta r^{n-1} dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^{+\infty} f^o(r)\varphi^o(r)r^{n-1} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi^o)^O(x) dx \\ &= \langle f, (\varphi^o)^O \rangle \\ &= \langle f, \varphi^{rad} \rangle. \end{aligned}$$

No caso em que f é uma distribuição radial, seja $\psi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1$. Então, usando o caso feito anteriormente e o Teorema 4.1.4 em [15], temos

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f * \psi_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f * \psi_\varepsilon, \varphi^{rad} \rangle = \langle f, \varphi^{rad} \rangle.$$

■

Observação 1.4.2 *Note que, uma distribuição radial é determinada exclusivamente por sua ação em funções $\varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dada uma distribuição f , podemos definir uma distribuição radial $f^{rad} \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\langle f^{rad}, \varphi \rangle \doteq \langle f, \varphi^{rad} \rangle.$$

Proposição 1.4.2 *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e radial, então*

$$\langle f, \varphi \rangle = |\mathbb{S}^{n-1}| \langle f^o, \varphi^o(r)r^{n-1} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Suponhamos que $f(x) = f^o(|x|)$ para $f^o : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Então, usando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty f^o(r)\varphi^o(r)r^{n-1} dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle f^o, \varphi^o(r)r^{n-1} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

A Proposição [1.4.2](#) nos diz que dada uma função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a qual é radial, podemos encontrar uma função par em \mathbb{R}_+ a qual sua ação sobre a função $r^{n-1}\varphi^o$ é determinada pela ação da função f sobre a função φ .

Seja $n \in \mathbb{N}$ e definamos $\mathcal{R}_n \doteq r^{n-1}\mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}_+)$ o espaço das funções da forma $r^{n-1}\varphi(r)$, no qual $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ e é par. Este espaço é munido pela topologia induzida de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e o dual de \mathcal{R}_n denotaremos por \mathcal{R}'_n .

Sempre é possível construirmos distribuições radiais em \mathbb{R}^n começando com distribuições em \mathcal{R}'_n . De fato, dada $f^o \in \mathcal{R}'_n$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ podemos definir uma distribuição radial f por

$$\langle f, \varphi \rangle \doteq |\mathbb{S}^{n-1}| \langle f^o, \varphi^o(r)r^{n-1} \rangle.$$

A recíproca deste fato também é válida e a apresentaremos a seguir, mas antes é necessário o seguinte lema.

Lema 1.4.1 *Seja $f \in \mathcal{C}_{rad}^\infty(\mathbb{R})$. Então, existe uma função $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

$$f(x) = g(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para todo $t \geq 0$

$$|g^{(k)}(t)| \leq c_k \sup_{0 \leq s \leq \sqrt{t}} |f^{(2k)}(s)|. \quad (1.15)$$

Demonstração. Pelo teorema de Whitney em [27], existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$f(t) = g(t^2).$$

Para demonstrarmos (1.15), basta usarmos o teorema de Taylor com resto integral, para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{g^{(k)}(t^2)}{k!} &= (2t)^{-2k+1} k \binom{2k}{k} \int_0^t (t^2 - s^2)^{k-1} \frac{f^{(2k)}(s)}{(2k)!} ds \\ &= 2^{-2k} k \binom{2k}{k} \int_0^1 (1 - s^2)^{k-1} \frac{f^{(2k)}(st)}{(2k)!} ds. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Em particular,

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \quad (1.17)$$

desde que

$$2^{-2k} k \binom{2k}{k} \int_0^1 (1 - s^2)^{k-1} \frac{f^{(2k)}(st)}{(2k)!} ds = \frac{\Gamma(k)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} = 1.$$

Segue de (1.16) que

$$\begin{aligned} |g^{(k)}(t^2)| &\leq \tilde{c}_k t^{-2k+1} \int_0^t (t^2 - s^2)^{k-1} \sup_{0 \leq s \leq t} |f^{(2k)}(s)| ds \\ &\leq \tilde{c}_k t^{-2k+1} \sup_{0 \leq s \leq t} |f^{(2k)}(s)| \int_0^t (2t^2)^{k-1} ds \\ &\leq c_k t^{-2k+1} t^{2k-1} \sup_{0 \leq s \leq t} |f^{(2k)}(s)| \\ &= c_k \sup_{0 \leq s \leq t} |f^{(2k)}(s)|. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo a mudança de variável $t^2 = w$ obtemos (1.15). \blacksquare

Proposição 1.4.3 *A aplicação $\mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{C}_{c,rad}^\infty$ definida por $\varphi(r)r^{n-1} \mapsto \varphi^O$ é um homeomorfismo e para toda distribuição radial $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ podemos definir $f^o \in \mathcal{R}'_n$ por*

$$\langle f^o, \varphi(r)r^{n-1} \rangle \doteq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \langle f, \varphi^O \rangle.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$, então para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existem um inteiro \tilde{m} e uma constante $C > 0$ tais que

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq \tilde{m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi(x)|, \quad \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ supp } \psi \subset K.$$

Para demonstrarmos esta proposição é suficiente provarmos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (\varphi(|x|))| \leq \sum_{0 \leq \ell, m \leq 4(|\alpha|+n)} \sup_{r>0} \left| r^m \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell (r^{n-1} \varphi(r)) \right|.$$

Vamos considerar inicialmente $r \doteq |x| \leq 1$. Usando o Lema 1.4.1 para $\varphi(t) = g(t^2)$ temos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \varphi(|x|)| &\leq c_\alpha \sum_{k=0}^{|\beta|} |g(|x|^2)| |x|^k \\ &\leq c_\alpha \sum_{k=0}^{|\beta|} |g^{(k)}(|x|^2)| \\ &\leq c_\alpha \sum_{k=0}^{|\beta|} c_k \sup_{0 < s < r} |\varphi^{(2k)}(s)|. \end{aligned}$$

Precisamos fazer uso da desigualdade

$$|\varphi(s)| \leq \sup_{0 < t < s} \left| \left(\frac{d}{dt} \right)^M (t^M \varphi(t)) \right|. \quad (1.18)$$

A desigualdade em (1.18) decorre da aplicação do teorema fundamental do

cálculo M vezes na identidade

$$s^M \frac{d^m}{ds^m} \varphi(s) = \sum_{\ell=0}^m (-1)^\ell \ell! \binom{m}{\ell} \binom{M}{\ell} \left(\frac{d}{ds}\right)^{m-\ell} (s^{M-\ell} \psi(s)) \quad (1.19)$$

a qual é válida desde que $M \geq m$.

Aplicando (1.18) para $\varphi^{(2k)}(s)$ temos

$$|\varphi^{(2k)}(s)| \leq \sup_{0 < t < s} \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^M (t^M \varphi^{(2k)}(t)) \right| \quad (1.20)$$

Usando a desigualdade em (1.19) para $s^M \varphi^{(2k)}(s)$ com $M = 2|\beta| + n - 1$ e $m = 2k$ temos que $|\varphi^{(2k)}(s)|$ é pontualmente limitada por uma soma de derivadas dos termos $s^{n-1} \psi(s)$, pois as potências de s que são diferente de $n-1$ podemos estimar por 1 desde que $s \leq 1$. Disto segue que, $\sup_{s>0} |\varphi^{(2k)}(s)|$ é controlada por uma quantidade finita de somas de derivadas da função $s^{n-1} \varphi(s)$.

Suponhamos agora que $|x| \geq 1$. Pelo Corolário A.0.1 temos

$$|\partial^\alpha \varphi(|x|)| \leq \sum_{k=0}^{|\alpha|} |\varphi^{(k)}(|x|)| \frac{c_{k,\alpha}}{|x|^{|\alpha|-k}},$$

e tomando $M = |\alpha| + n - 1$ temos

$$\sup_{|x| \geq 1} |\partial^\alpha (\varphi(|x|))| \leq c_\alpha \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sup_{s \geq 1} \{s^M |\varphi^{(k)}(s)|\} \quad (1.21)$$

a qual é controlada por uma soma finita de derivadas da função $s^{n-1} \varphi(s)$ vezes potências de s , mas como $\text{supp } \varphi \subset K$ podemos limitar os s 's com potências diferente de $n-1$ por uma constante e este fato decorre de (1.19).

Por fim, note que a aplicação $\varphi(r)r^{n-1} \mapsto \varphi^O$ é uma função bijetora a qual a sua inversa $\varphi^O \mapsto \varphi(r)r^{n-1}$ é contínua. Para a prova da continuidade da função $\varphi(r)r^{n-1} \mapsto \varphi^O$ basta combinar (1.21) com o argumento prévio da estimativa do caso $|x| \leq 1$. ■

1.5 Espaços de Hardy radial segundo R. R. Coifman e G. Weiss

Nesta seção temos como objetivo central apresentarmos os *espaços de Hardy radial* segundo R. R. Coifman e G. Weiss.

Definição 1.5.1 *Definimos o espaço de Hardy radiais $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ como sendo o subespaço de $H^p(\mathbb{R}^n)$ o qual é formado por todas as distribuições radiais em $H^p(\mathbb{R}^n)$, isto é, $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \doteq H^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$.*

Considere um conjunto de seminormas sobre o espaço das funções radiais no espaço de Schwartz $\mathcal{F}_{rad} \doteq \mathcal{F}_{N,rad}$ no qual $N \in \mathbb{N}_0$, dado por

$$\mathcal{F}_{N,rad} \doteq \{\varphi \in \mathcal{S}_{rad}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq 1, |\alpha|, |\beta| \leq N\} \subset \mathcal{F}_N.$$

Definimos a grande função maximal (radial) de uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ associada a família $\mathcal{F}_{N,rad}$ por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{N,rad}}f(x) \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{F}_{N,rad}} M_{\varphi}f(x). \quad (1.22)$$

A função $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_{N,rad}}f$ definida em (1.22) é radial, pois $M_{\varphi}f$ é radial para cada $\varphi \in \mathcal{F}_{N,rad}$ e, além disso,

$$|(f * \varphi_t)(Ax)| = |(f * \varphi_t)(x)| \leq M_{\varphi}f(x) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{F}_{N,rad}}f(x),$$

para toda $\varphi \in \mathcal{F}_{rad,N}$ e $A \in \mathcal{O}(n)$.

O Espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$

O objetivo inicial deste capítulo é apresentarmos uma partição da unidade radial e na sequência definirmos um espaço de Hardy radial maximal. Antes de iniciarmos a construção da partição da unidade radial, vamos apresentar algumas definições e notações as quais serão usadas no decorrer da construção.

2.1 Resultados preliminares

Definição 2.1.1 *Seja $0 \leq r < R \leq \infty$. Definimos como sendo um anel aberto em \mathbb{R}^n o conjunto*

$$A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$$

e definimos o tamanho do anel $A_{r,R}$ como sendo o número $\ell(A_{r,R}) = R - r > 0$.

Analogamente, definimos o anel fechado como sendo

$$\bar{A}_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r \leq |x| \leq R\}$$

e definimos o tamanho do anel $\bar{A}_{r,R}$ como sendo o número $\ell(\bar{A}_{r,R}) = R - r > 0$.

Definição 2.1.2 (Centro do anel) *Seja $A_{r,R} \subset \mathbb{R}^n$ um anel. Definimos como centro do anel $A_{r,R}$ a esfera \mathbb{S}_δ^{n-1} centrada na origem e de raio $\delta \doteq \frac{R+r}{2}$. Quando $x \in \mathbb{S}_\delta^{n-1}$ diremos que x pertence ao centro do anel $A_{r,R}$.*

Observação 2.1.1 *Se $B(0, R)$ é uma bola em \mathbb{R}^n podemos identificá-la com o anel $A_{0,R}$. Disto decorre que para este caso em especial, anéis podem ser interpretado como bolas. A partir de agora, não faremos distinção entre a bola $B(0, R)$ e o anel $A_{0,R}$.*

Seja $A_{r,R}$ um anel genérico (aberto ou fechado) e seja $1 < \nu < \frac{R+r}{R-r}$ uma constante fixa. Considere $A_{r,R}^\nu$ o anel de mesmo centro de que $A_{r,R}$ porém dilatado na proporção ν , isto é,

$$A_{r,R}^\nu = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{R(1-\nu) + r(1+\nu)}{2} < |x| < \frac{R(1+\nu) + r(1-\nu)}{2} \right\}.$$

Note que, se $\nu \geq \frac{R+r}{R-r}$ temos $A_{r,R}^\nu \equiv B(0, \frac{R(1-\nu)+r(1+\nu)}{2})$.

A seguir apresentaremos uma relação entre a medida do anel $A_{r,R}$ e seu tamanho $\ell(A_{r,R})$.

Lema 2.1.1 *Se $A_{r,R}$ é um anel (aberto ou fechado), então $|A_{r,R}| \gtrsim \ell(A_{r,R})^n$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $n > 1$. Note que

$$\int_{A_{r,R}} dx = |\mathbb{S}^{n-1}| \int_r^R \rho^{n-1} d\rho = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} R^n - r^n.$$

Basta mostrar que $R^n - r^n \geq (R-r)^n$. Para isto, defina a função

$$\phi : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\phi(t) = (t-1)^n + 1 - t^n$. Note que

$$\phi'(t) = n(t-1)^{n-1} - nt^{n-1}.$$

Assim, como $\phi'(t) < 0$, para todo $t > \frac{1}{2}$ temos que ϕ é decrescente. Então, $\phi(1) \geq \phi(\frac{R}{r})$ o que conclui $R^n - r^n \geq (R-r)^n$. ■

Lema 2.1.2 *Seja $\nu \geq 1$ uma constante fixada. Seja*

$$A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$$

um anel e

$$A_{r,R}^\nu = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{R(1-\nu) + r(1+\nu)}{2} < |x| < \frac{R(1+\nu) + r(1-\nu)}{2} \right\}$$

o anel de mesmo centro que $A_{r,R}$, porém dilatado na proporção ν . Então

$$|A_{r,R}^\nu| \leq \nu^n |A_{r,R}|.$$

Demonstração. Usando coordenadas esféricas podemos escrever

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \{(\rho, \Theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}\} \quad (2.1)$$

no qual $\rho = |x|$ e $\Theta = \frac{x}{|x|}$. Seja $\pi_1(A_{r,R})$ a projeção na coordenada radial da decomposição em coordenadas esféricas de $A_{r,R}$ dada por (2.1), isto é,

$$\begin{aligned} \pi_1(A_{r,R}) &= \{\rho \in (0, \infty) : (\rho, \Theta) \in A_{r,R} \text{ para algum (para todo) } \Theta \in \mathbb{S}^{n-1}\} \\ &= (r, R). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\pi_1(A_{r,R}^\nu) = \left(\frac{R(1-\nu) + r(1+\nu)}{2}, \frac{R(1+\nu) + r(1-\nu)}{2} \right).$$

Por uma simplicidade de notação, denotaremos por $I_{r,R} = \pi_1(A_{r,R})$ a projeção na coordenada radial de $A_{r,R}$ e $I_{r,R}^\nu = \pi_1(A_{r,R}^\nu)$ a projeção na primeira coordenada radial de $A_{r,R}^\nu$.

Note que, $c = \frac{R+r}{2}$ é o centro do intervalo $I_{r,R}$ e $v = \frac{R-r}{2}$ é o raio do intervalo $I_{r,R}$, então podemos escrever o intervalo $I_{r,R}^\nu$ como sendo

$$I_{r,R}^\nu = (c - \nu v, c + \nu v).$$

Seja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(\vartheta) \doteq (c + \vartheta v)^n - (c - \vartheta v)^n.$$

Note que,

$$|A_{r,R}| = c_n(R^n - r^n)$$

e

$$|A_{r,R}^\nu| = c_n[(c + \nu v)^n - (c - \nu v)^n].$$

Pela definição da função f , temos

$$|A_{r,R}| = c_n(R^n - r^n) = c_n f(1), \quad (2.2)$$

no qual $c_n \doteq \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= (c + \vartheta v)^n - (c - \vartheta v)^n \\ &= \vartheta^n \left[\left(\frac{c}{\vartheta} + v \right)^n - \left(\frac{c}{\vartheta} - v \right)^n \right] \\ &\doteq \vartheta^n g\left(\frac{1}{\vartheta}\right), \end{aligned}$$

no qual $g(w) \doteq (cw + v)^n - (cw - v)^n$. Note que, g é uma função crescente, assim temos $g(\frac{1}{\vartheta}) \leq g(1)$, pois $\vartheta \geq 1$. Portanto, segue de (2.2) e do fato de que $g(1) = f(1)$ a estimativa

$$\begin{aligned} |A_{r,R}^\nu| &= c_n f(\nu) \\ &\leq c_n \nu^n g(1) \\ &= c_n \nu^n f(1) \\ &= \nu^n |A_{r,R}|. \end{aligned}$$

■

2.2 Decomposição radial de Whitney

Nesta seção vamos apresentar uma versão do Teorema 1.3.1 para conjuntos fechados e radiais.

Definição 2.2.1 *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito radial, se Ω satisfaz a seguinte*

propriedade:

$$x \in \Omega \implies y \in \Omega, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ com } |x| = |y|.$$

Como uma consequência da Definição [2.2.1](#) temos a seguinte propriedade.

Lema 2.2.1 *Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é radial se, e somente, se $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ é radial.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega^c$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| = |y|$. Se $y \notin \Omega^c$, então $y \in \Omega$ e como Ω é radial e $|x| = |y|$, temos que $x \in \Omega$ o que é uma contradição.

A recíproca segue de modo análogo. ■

Observação 2.2.1 *Diremos que dois anéis são disjuntos se seus interiores forem disjuntos.*

Dado um conjunto X , denotaremos por $\overset{\circ}{X}$ o seu interior.

Teorema 2.2.1 (Decomposição radial de Whitney) *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e radial. Então, existe uma coleção de anéis fechados $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ no qual $A_k = A_{r_k, R_k}$ para seqüências de números reais não negativos $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ com $r_k < R_k$ tal que:*

- (i) $\overset{\circ}{A}_j \cap \overset{\circ}{A}_k = \emptyset$, para $j \neq k$;
- (ii) $\Omega \doteq F^c \doteq \cup_{k=1}^{\infty} A_k$;
- (iii) *Para todo $k \in \mathbb{N}$ o tamanho $\ell(A_k)$ é comparável com a distância de A_k a F . Além disso, existem constantes c e C estritamente positivas tais que*

$$c \ell(A_k) \leq d(F, A_k) \leq C \ell(A_k).$$

Demonstração. Pelo Lema [2.2.1](#) temos que $F = \Omega^c$ é um conjunto aberto e radial. Usando coordenadas esféricas podemos escrever

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \{(\rho, \Theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}\} \quad (2.3)$$

no qual $\rho = |x|$ e $\Theta = \frac{x}{|x|}$. Note que,

$$(\rho, \Theta) \in F \text{ (ou } \Omega) \iff (\rho, \Theta') \in F \text{ (ou } \Omega), \forall \Theta' \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Denote por F_1 e Ω_1 as respectivas projeções na coordenada radial da decomposição em coordenadas esféricas de F e Ω dada por (2.3), isto é,

$$F_1 \doteq \{\rho \in (0, \infty) : (\rho, \Theta) \in F \text{ para algum (e assim para todo) } \Theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$$

e analogamente para Ω_1 . Usando (2.3) temos que F_1 é um conjunto fechado em $[0, \infty)$, Ω_1 é um conjunto aberto em $[0, \infty)$ e $\Omega_1 = [0, \infty) \setminus F_1$. Então, usando o Teorema 1.3.1 para Ω_1 , temos que existe uma coleção de intervalos (os quais são cubos em \mathbb{R}) $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ denotados por $I_k \doteq [r_k, R_k]$ satisfazendo as seguintes condições:

$$(i)' \quad \overset{\circ}{I}_j \cap \overset{\circ}{I}_k = \emptyset, j \neq k;$$

$$(ii)' \quad \Omega_1 = \cup_{k=1}^\infty \overset{\circ}{I}_k;$$

(iii)' Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\ell(I_k) = R_k - r_k$ é comparável com a distância de I_k até F_1 . Além disso, existem constantes positivas c e C tais que

$$c \ell(I_k) \leq d(F_1, I_k) \leq C \ell(I_k)$$

Definamos $A_k \doteq A_{r_k, R_k}$, isto é, A_k é o anel associado ao intervalo I_{r_k, R_k} . Note que, $\overset{\circ}{A}_j \cap \overset{\circ}{A}_k = \emptyset$ se $k \neq j$, pois caso contrário, existiria $z \in \overset{\circ}{A}_k \cap \overset{\circ}{A}_j$ no qual $z \cong (\rho, \Theta)$ com $\rho \in (0, \infty)$ e $\Theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\rho \in \overset{\circ}{I}_j \cap \overset{\circ}{I}_k \neq \emptyset$ o que é absurdo por (i)'.

Seja $z \in \Omega$, pela identificação (2.3) temos que $z \cong (\rho, \Theta)$ para algum $\rho \in \Omega_1$ e $\Theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Por (ii)' existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho \in I_{k_0}$ e conseqüentemente $z \in A_{k_0}$. Agora, suponha que $z \in \cup_{k=1}^\infty A_k$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in A_{k_0}$. Mas, pela identificação $z \cong (\rho, \Theta)$ com $\rho \in \Omega_1$ e $\Theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ temos que $\rho \notin F_1$ e conseqüentemente $(\rho, \Theta) \notin F$ o que implica em $(\rho, \Theta) \in F^c = \Omega$.

Finalmente, como $\ell(I_k) = \ell(A_k)$ e $d(F_1, I_k) = d(F, A_k)$ temos por (iii)' que

$$c \ell(A_k) \leq d(F, A_k) \leq C \ell(A_k).$$

■

Uma demonstração alternativa para o Teorema 2.2.1 é a seguinte:

Demonstração. A demonstração alternativa para o Teorema 2.2.1, consiste em “repetir” demonstração do Teorema 1.3.1 da seguinte forma:

Consideremos \mathfrak{M}_0 como sendo todas as 1-uplas com coordenadas em \mathbb{N} , isto define intervalos $I_k = [k, k + 1]$ de tamanho 1.

Dado $j \in \mathbb{Z}$, definindo $\mathfrak{M}_j = 2^j \mathfrak{M}_0$ temos que, os elementos de \mathfrak{M}_j são intervalos $I_{j,k} \doteq [2^j k, 2^j(k + 1)]$. Assim, de modo análogo a demonstração do Teorema [1.3.1](#), obtemos uma família $\mathfrak{F} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tal que a família de intervalos $\{I_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema [1.3.1](#).

Por fim, para obtermos a demonstração do Teorema [2.2.1](#) basta considerarmos a família de anéis $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ definidos por

$$A_{j,k} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : 2^j k \leq |x| \leq 2^j(k + 1)\}.$$

■

Observação 2.2.2 *Segue da demonstração acima, que podemos considerar os anéis do Teorema [2.2.1](#) como sendo os anéis da família $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$.*

Observação 2.2.3 *A partir de agora, iremos denotar a projeção na coordenada radial da decomposição em coordenadas esféricas em [\(2.3\)](#) de um anel $A_{r,R}$ por $\pi_1(A_{r,R}) \doteq (r, R)$.*

Observação 2.2.4 *Sejam $\mathcal{F} \doteq \{I_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ a família de intervalos maximais obtida pela projeção dos anéis $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ do Teorema [2.2.1](#) e $I_{j,k}^*$ o intervalo de mesmo centro que $I_{j,k}$, porém dilatado na proporção $\nu^* > 1$ com ν^* suficientemente próximo de 1, isto é,*

$$I_{j,k}^* = [2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*), 2^j k + 2^{j-1}(1 + \nu^*)].$$

Denotemos esta família por $\mathcal{F}^* \doteq \{I_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$. Afirmamos que, existe $\nu^* > 1$ tal que, se $I_{j,k}^* \in \mathcal{F}^*$ então $I_{j,k}^*$ intercepta no máximo outros dois intervalos da família \mathcal{F}^* . De fato, sejam $I_{j,k}, I_{j_t, k_t}, I_{j_s, k_s} \in \mathcal{F}$ fixados, no qual I_{j_t, k_t} é o intervalo à esquerda de $I_{j,k}$ satisfazendo $I_{j_t, k_t} \cap I_{j,k} \neq \emptyset$ e I_{j_s, k_s} é o intervalo à direita de $I_{j,k}$ satisfazendo $I_{j_s, k_s} \cap I_{j,k} \neq \emptyset$. Vamos escolher ν^* de forma que o ponto final de $I_{j,k}^*$ seja menor que o ponto médio do intervalo à direita e o ponto inicial de $I_{j,k}^*$ seja maior que o ponto médio do intervalo à esquerda. De

fato, devido escolha dos intervalos temos

$$2^{j_t}(k_t + 1) = 2^j k \quad e \quad 2^j(k + 1) = 2^{j_s} k_s. \quad (2.4)$$

Sejam m_s e m_t os pontos médios de I_{j_s, k_s} e I_{j_t, k_t} respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} m_t = 2^{j_t} k_t + 2^{j_t-1}, \\ m_s = 2^{j_s} k_s + 2^{j_s-1}. \end{cases}$$

Então, precisamos encontrar ν^* suficientemente próximo de 1 de forma que

$$\begin{cases} 2^{j_t} k_t + 2^{j_t-1} < 2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*) \\ 2^j k + 2^{j-1}(1 + \nu^*) < 2^{j_s} k_s + 2^{j_s-1}. \end{cases}$$

Segue pela primeira igualdade em (2.4) que

$$\begin{aligned} 2^{j_t} k_t + 2^{j_t-1} &= 2^{j_t} \left(k_t + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2^{j_t} (k_t + 1) - 2^{j_t-1} \\ &= 2^j k - 2^{j_t-1}. \end{aligned}$$

Agora, vamos escolher ν^* de forma que

$$-2^{j_t-1} < 2^{j-1}(1 - \nu^*).$$

Pela Observação 1.3.1, temos

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2^{j_t}}{2^j} \leq 4.$$

Daí,

$$-2^{j_t-1} \leq -\frac{2^{j-1}}{4}.$$

Portanto, basta escolher ν^* de forma que

$$-\frac{1}{4} < (1 - \nu^*),$$

isto é,

$$-\frac{5}{4} < -\nu^* \iff \nu^* < \frac{5}{4}.$$

Analogamente, pela segunda igualdade em (2.4) temos

$$2^{j_s} k_s + 2^{j_s-1} = 2^j (k+1) + 2^{j_s-1}.$$

Precisamos escolher ν^* tal que

$$2^{j-1}(\nu^* - 1) < 2^{j_s-1}.$$

Pela Observação 1.3.1, temos

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2^{j_s}}{2^j} \leq 4.$$

Então, escolhendo ν^* tal que $(\nu^* - 1) < \frac{1}{4}$, isto é, $\nu^* < \frac{5}{4}$ temos

$$2^{j-1}(\nu^* - 1) < \frac{2^{j-1}}{4} \leq 2^{j_s-1}.$$

Portanto, escolhendo $1 < \nu^* < \frac{5}{4}$ temos que o intervalo $I_{j,k}^*$ intercepta no máximo outros dois intervalos da família \mathcal{F}^* , para todo $(j, k) \in \mathfrak{F}$.

2.3 Construção da partição da unidade associada a conjuntos radiais

Sejam $\tilde{\nu}$ e ν^* constantes suficientemente próximas de 1 e satisfazendo $1 < \tilde{\nu} < \nu^*$.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então, definimos os intervalos \tilde{I} e I^* como sendo os intervalos abertos $\tilde{I} \doteq \tilde{\nu}I$ e $I^* \doteq \nu^*I$, isto é, os intervalos \tilde{I} e I^* são intervalos com o mesmo centro que I porém dilatados na proporção $\tilde{\nu}$ e ν^* respectivamente.

Seja $I_{j,k} \doteq [2^j k, 2^j (k+1)]$, $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{Z}$ fixados. Consideremos $A_{j,k}$ o anel gerado pelo intervalo $I_{j,k}$, isto é,

$$A_{j,k} \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : 2^j k \leq |x| \leq 2^j (k+1)\}.$$

Sejam $\tilde{I}_{j,k}$ e $I_{j,k}^*$ os intervalos de mesmo centro que $I_{j,k}$, porém dilatados na proporção $\tilde{\nu}$ e ν^* respectivamente e consideremos $\tilde{A}_{j,k}$ e $A_{j,k}^*$ os anéis gerado por esses intervalos.

Vamos construir funções $\Phi_{j,k}$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) $\text{supp } \Phi_{j,k} \subset \tilde{A}_{j,k}$;
- (ii) $\Phi_{j,k}$ é radial;
- (iii) $\Phi_{j,k} \equiv 1$ em $A_{j,k}$;
- (iv) $\|\partial^\alpha \Phi_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha (2^j)^{-|\alpha|}$.

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ não-negativa, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $\text{supp } \varphi \subset \tilde{I}$. Denote por $x_{j,k} \doteq 2^j k + 2^{j-1}$ o centro de $I_{j,k} = [2^j k, 2^j(k+1)]$ e note que, o seu tamanho é $\ell(I_{j,k}) = 2^j$. Definamos

$$\varphi_{j,k}(w) \doteq \varphi\left(\frac{x_{j,k} - w}{2^j}\right).$$

Temos que $\varphi_{j,k}$ é identicamente 1 em $I_{j,k}$ e $\text{supp } \varphi_{j,k} \subset \tilde{I}_{j,k}$. Além disso,

$$\|\partial_w^l \varphi_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_\alpha (2^j)^{-l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

Finalmente, se definirmos $\Phi_{j,k}(x) \doteq \varphi_{j,k}(|x|)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, afirmamos que $\Phi_{j,k}$ é a função procurada. As condições (i) – (iii) são imediatas. A demonstração de (iv) segue do Corolário [A.0.1](#).

A construção da função $\Phi_{j,k}$ pode ser feita para todos os pares $(j,k) \in \mathfrak{F}$ os quais os anéis fechados $A_{j,k}$ associados a estes pares decompõem o Ω do Teorema [2.2.1](#). Podemos considerar os anéis dessa forma devido ao que foi feito na Observação [2.2.2](#). Dessa forma é possível contruir uma família de funções $\{\Phi_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ associada a família de anéis $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ e satisfazendo as condições (i) – (iv).

O próximo resultado apresenta uma partição da unidade radial associada a família $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$.

Teorema 2.3.1 *Seja $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ a família de anéis que decompõem o Ω do Teorema [2.2.1](#). Então, existe uma família de funções $\{\eta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)* $\text{supp } \eta_{j,k} \subset \tilde{A}_{j,k} \subset A_{j,k}^*$;

- (ii)* $\eta_{j,k}$ é radial;
 (iii)* $\sum_{j,k} \eta_{j,k}(x) = 1, \forall x \in \Omega$;
 (iv)* $\|\partial^\alpha \eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha (2^j)^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{H} \doteq \sum_{j,k} \Phi_{j,k}$, no qual as $\Phi_{j,k}$'s definidas acima. Note que, se $x \in \Omega$, então $\mathfrak{H} \geq 1$. Agora, para cada $(j, k) \in \mathfrak{F}$ definamos $\eta_{j,k}(x) \doteq \frac{\Phi_{j,k}(x)}{\mathfrak{H}(x)}$. Claramente $\eta_{j,k}$ cumpre as condições (i)* – (iv)* \blacksquare

Agora, temos como objetivo introduzir o espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 0$. Mais adiante, mostraremos que este espaço possui uma decomposição atômica cujo os átomos são funções radiais.

2.4 Definição e propriedades de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$

Vamos introduzir nesta seção uma família de funções que darão origem a uma função maximal radial. A construção dessa família assim como a função maximal radial é baseada na construção apresentada por A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier em [2].

Definição 2.4.1 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado. Definimos $\mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$ como sendo a família das funções φ 's cumprindo as seguintes condições:*

- (i) *supp $\varphi \subset A_{r,R}$, no qual $x_0 \in \mathbb{S}_\delta^{n-1}$ com $\delta = \frac{R+r}{2}$;*
 (ii) *$\varphi \in \mathcal{C}_{rad}^\infty(\mathbb{R}^n)$;*
 (iii) *$\varphi \in B_{L^1(\mathbb{R}^n)}(0, 1)$, isto é, $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$;*
 (iv) *$\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha \ell(A_{r,R})^{-n-|\alpha|}, \quad \forall |\alpha| \leq N$.*

Em notação de conjuntos

$$\mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0) \doteq \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap B_{L^1(\mathbb{R}^n)}(0, 1) : \text{supp } \varphi \subset A_{r,R}, x_0 \in \mathbb{S}_\delta^{n-1} \text{ e } \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha \ell(A_{r,R})^{-n-|\alpha|}, \forall |\alpha| \leq N \right\}.$$

Exemplo 2.4.1 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixado. Sempre é possível encontrar uma família de funções $\{\Phi_t\}_t \subset \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$, para todo $0 < t < |x_0|$.*

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ sendo $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ com $0 \leq \varphi \leq 1$ e considere a função $\Phi(x) \doteq \varphi(|x_0| - |x|)$, que é radial. Definindo $\tilde{\Phi}_t(x) \doteq \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{|x_0| - |x|}{t}\right)$ que

é radial, temos para todo $0 < t < |x_0|$ vale

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\Phi}_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_t(x)| dx \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_{|x_0|-\frac{t}{2}}^{|x_0|+\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{|x_0|-r}{t}\right) r^{n-1} dr \\
&\leq |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{1}{t} \int_{|x_0|-\frac{t}{2}}^{|x_0|+\frac{t}{2}} r^{n-1} dr \\
&\leq |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{(2|x_0|)^{n-1}}{t} \int_{|x_0|-\frac{t}{2}}^{|x_0|+\frac{t}{2}} dr \\
&\leq 2^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| |x_0|^{n-1}.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\text{supp } \tilde{\Phi}_t \subset A_t \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_0| - \frac{t}{2} < |x| < |x_0| + \frac{t}{2} \right\},$$

temos para $x \in A_t$ que $|x| > |x_0| - \frac{t}{2}$ e sendo $t < |x_0|$ segue que

$$|x| > |x_0| - \frac{t}{2} > \frac{t}{2}. \quad (2.5)$$

Reproduzindo o Corolário [A.0.1](#) para a função $\tilde{\Phi}_t$ e combinando com [\(2.5\)](#) temos

$$|\partial^\alpha \tilde{\Phi}_t(x)| \leq \frac{c_\alpha}{t^{1+|\alpha|}}.$$

Agora, se definirmos

$$\Phi_t \doteq \frac{\tilde{\Phi}_t}{c 2^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| |x_0|^{n-1}},$$

temos que $\|\Phi_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ e

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \Phi_t| &= \frac{|\partial^\alpha \tilde{\Phi}|}{c 3^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}| |x_0|^{n-1}} \\ &\leq \frac{c_{\alpha,n}}{t^{1+|\alpha|} |x_0|^{n-1}} \\ &\leq \frac{c_{\alpha,n}}{t^{|\alpha|+n}}. \end{aligned}$$

Assim, a família $\{\Phi_t\}_{0 < t < |x_0|} \subset \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$.

Definição 2.4.2 Definimos a grande função maximal de $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ associada a família $\mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ por

$$\mathcal{M}_N f(x) \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)} |\langle f, \varphi \rangle|, \quad (2.6)$$

no qual o supremo em (2.6) é tomado sobre todos os anéis que contêm o suporte de φ e x pertencente ao centro do anel.

A função em (2.6) é radial, pois a família $\mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(\cdot)$ é invariante por transformações ortogonais

$$\mathcal{M}_N f(Ax) \doteq \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(Ax)} |\langle f, \varphi \rangle| = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)} |\langle f, \varphi \rangle| = \mathcal{M}_N f(x), \quad \forall A \in \mathcal{O}(n).$$

Proposição 2.4.1 A grande função maximal $\mathcal{M}_N f$ é semicontínua inferiormente.

Demonstração. Para demonstrarmos que a função $\mathcal{M}_N f$ é semicontínua inferiormente, vamos mostrar que, dado $\lambda > 0$ o conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > \lambda\}$$

é aberto. De fato, seja $x_0 \in \Omega$, então $\mathcal{M}_N f(x_0) > \lambda$. Dado $\varepsilon = \frac{1}{k}$ para $k \in \mathbb{N}$, existe $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$ tal que

$$\mathcal{M}_N f(x_0) \leq |\langle f, \varphi \rangle| + \frac{1}{k} \quad (2.7)$$

e $\text{supp } \varphi \subset A_{r,R}$ para algum anel $A_{r,R}$. Como $x_0 \in \mathbb{S}_\delta^{n-1}$ e sendo $\pi_1(A_{r,R}) = I_{r,R}$ a projeção na primeira coordenada esférica do anel $A_{r,R}$, temos

$$I_{r,R} = (|x_0| - \rho, |x_0| + \rho),$$

no qual $\rho > 0$ é o raio do intervalo $I_{r,R}$ e $|x_0|$ seu centro.

Vamos mostrar que $B(x_0, \rho) \subset \Omega$. Com efeito, se $y \in B(x_0, \rho)$ definamos

$$A \doteq \{z \in \mathbb{R}^n : |y| - 2\rho < |z| < |y| + 2\rho\}.$$

Note que, $A_{r,R} \subset A$, pois $I_{r,R} \subset I$ no qual $I = \pi_1(A)$. Consequentemente, $\text{supp } \varphi \subset A$ e como $\ell(A) = 4\rho$ temos

$$\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \leq c_\alpha \frac{1}{\ell(A_{r,R})^{n+|\alpha|}} = c_\alpha \frac{1}{\ell(I_{r,R})^{n+|\alpha|}} = \tilde{c}_\alpha \ell(A)^{-n-|\alpha|}$$

e assim $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(y)$. Portanto, fazendo $k \rightarrow +\infty$ em (2.7) temos

$$M_N f(y) > \lambda$$

o que mostra que $y \in \Omega$ e isto implica em Ω ser um conjunto aberto. \blacksquare

Definição 2.4.3 *Definimos o espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq \infty$ como sendo*

$$\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \doteq \{f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{M}_N f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}. \quad (2.8)$$

Em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq \infty$, consideraremos a p -norma dada por

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \doteq \|\mathcal{M}_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

É claro que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}$ só é uma norma no sentido usual se $p \geq 1$. Porém, como $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}$ é subaditiva, podemos definir em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq 1$ a métrica

$$\rho(f, g) \doteq \|f - g\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p, \quad f, g \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n).$$

Afirmamos que, $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ quando $j \rightarrow +\infty$. Além

disso, temos $\langle f_j, \varphi \circ A \rangle = \langle f_j, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para toda $A \in \mathcal{O}(n)$. Então, usando o fato de que $\varphi \circ A \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle f, \varphi \circ A \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle f_j, \varphi \circ A \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle f_j, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Teorema 2.4.1 *O espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. É claro que $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico, pois satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\rho(f, g) = 0 \iff f \equiv g, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n);$
- (ii) $\rho(f, g) = \rho(g, f), \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n);$
- (iii) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g), \quad \forall f, g, h \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n).$

Sejam $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de Cauchy e $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\text{supp } \varphi \subset B(x, r)$. Vamos mostrar que $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Pela Proposição [1.4.1](#) temos que

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi^{rad} \rangle. \quad (2.9)$$

Além disso, φ^{rad} é radial, é de classe \mathcal{C}^∞ e

$$\text{supp } \varphi^{rad} \subset A \doteq \{y \in \mathbb{R}^n : |x| - r < |y| < |x| + r\}.$$

Afirmamos que, existe $0 < \varepsilon = \varepsilon(\varphi^{rad})$ tal que $\varepsilon\varphi^{rad} \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$. De fato, tome

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\max_{|\alpha| \leq N} \{\|\partial^\alpha \varphi^{rad}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\}} \frac{1}{\max_{|\alpha| \leq N} \{\ell(A)^{|\alpha|}\}} \frac{1}{|A|}.$$

Devido a essa escolha de ε temos que $|\varepsilon \partial^\alpha \varphi^{rad}| \leq c_n \ell(A)^{-n-|\alpha|}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varepsilon \varphi^{rad}(x)| dx \leq 1.$$

Pelo fato anterior, temos

$$|\langle f_j - f_k, \varphi \rangle| = \frac{1}{\varepsilon} |\langle f_j - f_k, \varepsilon \varphi^{rad} \rangle| \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{M}_N(f_j - f_k)(x). \quad (2.10)$$

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto. Segue de (2.10) que

$$\begin{aligned} |\langle f_j - f_k, \varphi \rangle|^p &\leq \frac{1}{\varepsilon^p |K|} \int_K (\mathcal{M}_N(f_j - f_k)(x))^p dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^p |K|} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N(f_j - f_k)(x))^p dx \\ &\leq \frac{\rho(f_j, f_k)}{\varepsilon^p |K|} \rightarrow 0, \quad j, k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e sendo $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ subespaço fechado de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, existe $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Agora, vamos mostrar que $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\rho(f_{j+1}, f_j) \leq 2^{-j}.$$

Como $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ obtemos

$$|\langle f - f_j, \varphi \rangle| = \left| \sum_{k=j}^{\infty} \langle f_{k+1} - f_k, \varphi \rangle \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=j}^{\infty} \mathcal{M}_N(f_{k+1} - f_k)(x). \quad (2.11)$$

Usando o fato da norma em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ ser subaditiva temos em (2.11) que

$$\|f - f_j\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{k=j}^{\infty} \|f_{k+1} - f_k\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} \leq 2^{1-j}. \quad (2.12)$$

Portanto, segue de (2.12) que $f = (f - f_j) + f_j \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposição 2.4.2 *Se $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_j\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$, então $f_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x, r))$. Então, pela Proposição 1.4.1, temos

$$\langle f_j, \varphi \rangle = \langle f_j, \varphi^{rad} \rangle,$$

pois as f_j 's são radiais. Procedendo de maneira análoga a demonstração do Teorema 2.4.1, temos que

$$|\langle f_j, \varphi \rangle|^p \leq \frac{1}{\varepsilon^p |K|} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N f_j(x))^p dx. \quad (2.13)$$

Fazendo $j \rightarrow +\infty$ em (2.13) temos que $|\langle f_j, \varphi \rangle| \rightarrow 0$, ou seja, $f_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$. ■

Decomposição Radial de Calderón-Zygmund

Apresentaremos neste capítulo um teorema de decomposição radial baseado no clássico teorema de decomposição de Calderón-Zygmund que pode ser consultado em E. M. Stein [22] na página 101.

3.1 Decomposição radial de Calderón-Zygmund

Teorema 3.1.1 (Decomposição radial de C-Z) *Sejam $0 < \lambda$, $0 < p \leq 1$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^p_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Então, existe uma decomposição $f \doteq g + b$ na qual $b = \sum_{(j,k) \in \mathfrak{F}} b_{j,k}$ e g são funções radiais, e uma coleção de anéis $\{A^*_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. $|g(x)| \leq c\lambda$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$;

2. $\text{supp } b_{j,k} \subset A^*_{j,k}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \lesssim \int_{A^*_{j,k}} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx;$$

3. $\bigcup_{(j,k) \in \mathfrak{F}} A^*_{j,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > \alpha\}$ e a coleção $\{A^*_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ tem a propriedade da interseção limitada, isto é, existe $\tilde{N} > 0$ tal que para

cada j e k ambos fixados tem-se:

$$\forall x \in \Omega \implies \#\{A_{j,k}^* \in \mathfrak{F} : x \in A_{j,k}^*\} \leq \tilde{N}.$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$. Sejam $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda > 0$. Definamos

$$\Omega \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > \lambda\}.$$

Como Ω é aberto e radial, pois $\mathcal{M}_N f$ é semicontínua inferiormente e radial, temos pelo Teorema 2.2.1 que existe uma coleção de anéis fechados $\{A_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ tal que $\Omega = \cup_{(j,k) \in \mathfrak{F}} A_{j,k}$. Note que, dado $x \in \Omega$ temos que x pertence no máximo em $\tilde{N} = 2$ anéis da família $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$, isto decorre da Observação 2.2.4. Disto segue que, a família \mathfrak{F} tem a propriedade da interseção limitada. Portanto, o item 3. está demonstrado. Além disso, segue pela propriedade da interseção limitada que $\Omega = \cup_{(j,k) \in \mathfrak{F}} A_{j,k}^*$, pois se $x \in A_{j,k}^*$ para algum $(j,k) \in \mathfrak{F}$ temos $x \in A_{s,t}$ para algum $(s,t) \in \mathfrak{F}$ no qual $A_{s,t}$ é um dos anéis que $A_{j,k}^*$ intercepta devido a propriedade da interseção limitada.

Seja $\{\eta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ como no Teorema 2.3.1, isto é,

- (i)* $\text{supp } \eta_{j,k} \subset \tilde{A}_{j,k} \subset A_{j,k}^*$;
- (ii)* $\eta_{j,k}$ é radial;
- (iii)* $\sum_{j,k} \eta_{j,k}(x) = 1, \forall x \in \Omega$;
- (iv)* $\|\partial^\alpha \eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha (2^j)^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

Definamos

$$c_{j,k} \doteq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \eta_{j,k}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{j,k}(x) dx} \quad \text{e} \quad b_{j,k} \doteq (f - c_{j,k}) \eta_{j,k}. \quad (3.1)$$

Claramente, temos que $\text{supp } b_{j,k} \subset A_{j,k}^*$, $b_{j,k}$ é radial e $\int_{\mathbb{R}^n} b_{j,k}(x) dx = 0$. Além disso, se $x \in A_{j,k}^*$ existe $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j,k} \Phi_{j,k}(x) \leq \tilde{N}$ pela propriedade

da interseção limitada. Então,

$$\int_{A_{j,k}^*} \eta_{j,k}(x) dx \geq \int_{A_{j,k}} \eta_{j,k}(x) dx = \int_{A_{j,k}} \frac{\Phi_{j,k}(x)}{\sum \Phi_{j,k}(x)} dx \geq \frac{|A_{j,k}|}{2}.$$

Portanto,

$$\int_{A_{j,k}} \eta_{j,k}(x) dx \geq c |A_{j,k}| \geq c_n \{2^{jn}(k+1)^n - 2^{jn}k^n\} \geq c_n 2^{jn}, \quad (3.2)$$

no qual $c_n \doteq \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{2n}$. Note que,

$$\begin{aligned} f &= f\chi_\Omega + f\chi_{\Omega^c} \\ &= f\left(\sum \eta_{j,k}\right) + f\chi_{\Omega^c} \\ &= \sum (f - c_{j,k})\eta_{j,k} + \sum c_{j,k}\eta_{j,k} + f\chi_{\Omega^c} \\ &\doteq \sum b_{j,k} + g, \end{aligned}$$

no qual

$$g \doteq \sum c_{j,k}\eta_{j,k} + f\chi_{\Omega^c}. \quad (3.3)$$

Afirmamos que $|g(x)| \leq c\lambda$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(A_{j,k}, \partial\Omega) = d(A_{j,k}, x_0)$, pois $\partial\Omega$ é fechado. Segue do Teorema [2.2.1](#) que

$$d(A_{j,k}^*, x_0) \leq d(A_{j,k}, x_0) \leq 4\ell(A_{j,k}) = 2^{j+2} \approx \ell(A_{j,k}^*).$$

Seja $\pi_1(A_{j,k}^*) \doteq I_{j,k}^*$, isto é,

$$I_{j,k}^* = (2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*), 2^j k + 2^{j-1}(1 + \nu^*))$$

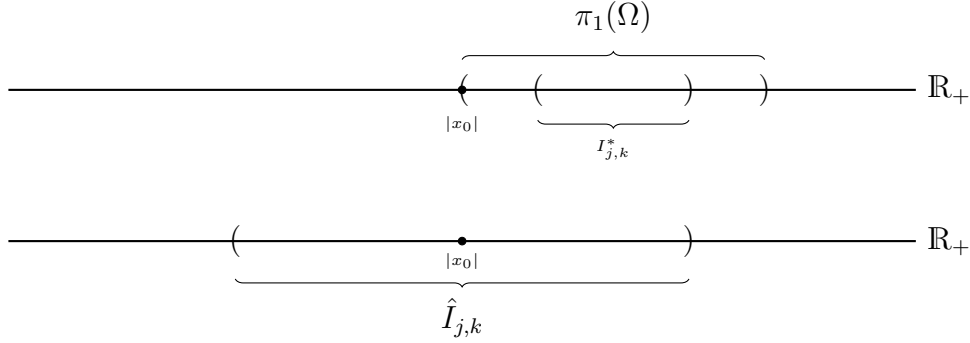


Figura 3.1: $I_{j,k}^* \subset \hat{I}_{j,k}$

e definamos $\hat{I}_{j,k}$ como sendo o intervalo de centro $|x_0|$ e de raio $\tilde{r}_{j,k} = 2^{j+2} + \nu^* 2^j$. Claramente, $I_{j,k}^* \subset \hat{I}_{j,k}$, pois se $r \in I_{j,k}^*$ temos $|r - x_{j,k}| < \frac{\ell(I_{j,k}^*)}{2}$ e

$$\begin{aligned}
 |r - |x_0|| &\leq |r - x_{j,k}| + ||x_0| - x_{j,k}| \\
 &< \frac{\ell(I_{j,k}^*)}{2} + \frac{\ell(I_{j,k}^*)}{2} + d(I_{j,k}^*, |x_0|) \\
 &< \ell(I_{j,k}^*) + d(I_{j,k}^*, |x_0|) \\
 &< \nu^* 2^j + 2^{j+2} \\
 &= \tilde{r}.
 \end{aligned}$$

Seja $\hat{A}_{j,k}$ o anel associado ao intervalo $\hat{I}_{j,k}$. Definindo $\Psi_{j,k} \doteq \frac{\eta_{j,k}}{\|\eta_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$ temos que, $\text{supp } \Psi_{j,k} \subset \hat{A}_{j,k}$, $\|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ e por (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\partial^\alpha \Psi_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|\eta_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{-1} \|\partial^\alpha \eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
 &\leq c_{\alpha,n} \frac{1}{2^{jn}} \frac{1}{(2^j)^{|\alpha|}} \\
 &\leq c_{\alpha,n} (2^j)^{-n-|\alpha|} \\
 &\leq \tilde{c}_{\alpha,n} \ell(\hat{A}_{j,k})^{-n-|\alpha|}.
 \end{aligned}$$

Logo, $\Psi_{j,k} \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$ para $x_0 \in \partial\Omega$. Como $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ podemos definir $c_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$. Além disso, segue do fato que $\Psi_{j,k} \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$ e da definição de $\mathcal{M}_N f$ que

$$|c_{j,k}| = |\langle f, \Psi_{j,k} \rangle| \leq \mathcal{M}_N f(x_0) \leq \lambda, \quad (3.4)$$

uma vez que $x_0 \in \partial\Omega$.

Agora, se $x \in \Omega$ segue da definição de g em (3.3) que

$$g(x) = \sum c_{j,k} \eta_{j,k}(x)$$

e, portanto segue de (3.4) que

$$|g(x)| = \left| \sum c_{j,k} \eta_{j,k}(x) \right| \leq \sum |c_{j,k}| \eta_{j,k}(x) \leq \lambda.$$

Vejam agora o caso em que $x \in \Omega^c$. Neste caso, segue de (3.3) que $f(x) = g(x)$. Sejam $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\varphi^o \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, $\varphi^o \geq 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^o(r) dr = 1$. Se definirmos a função $\varphi_t^o(w) = \frac{1}{t} \varphi^o\left(\frac{w}{t}\right)$, temos que $\partial_w^k \varphi_t^o(w) = \frac{1}{t^{1+k}} \partial_w^k \varphi^o\left(\frac{w}{t}\right)$ e $\text{supp } \varphi_t^o \subset (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$. Além disso, $\varphi_t^o \rightarrow \delta_0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Definamos para cada $x_0 \in \Omega^c$ fixado, $x_0 \neq 0$ a função

$$\Phi_t(x) \doteq \frac{1}{t} \varphi^o\left(\frac{|x_0| - |x|}{t}\right) = \varphi_t^o(|x_0| - |x|), \quad 0 < t < |x_0|.$$

Assim, temos que $\text{supp } \Phi_t \subset A_{t,x_0}$ no qual

$$A_{t,x_0} \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x_0| - \frac{t}{2} < |x| < |x_0| + \frac{t}{2} \right\}$$

e $\ell(A_{t,x_0}) = t$. Afirmamos que

$$\|\partial^\alpha \Phi_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha \ell(A_{t,x_0})^{-1-|\alpha|}, \quad 0 < t < |x_0|. \quad (3.5)$$

De fato, reproduzindo o Corolário A.0.1 do apêndice para Φ_t e combinando com o fato que $|x| > |x_0| - \frac{t}{2} > \frac{t}{2}$ obtemos (3.5).

Seja $x_0 \in \Omega^c$ e $x_0 \neq 0$. Como $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é radial, pela Proposição 1.4.2 temos

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_t \rangle &= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle f^o(r), \varphi_t^o(|x_0| - r)r^{n-1} \rangle \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_{\mathbb{R}} f^o(r) \varphi_t^o(|x_0| - r)r^{n-1} dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| (\tilde{f}^o * \varphi_t^o)(|x_0|), \end{aligned}$$

no qual $\tilde{f}^o(r) \doteq f^o(r)r^{n-1}$. Fazendo $t \rightarrow 0^+$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle f, \Phi_t \rangle &= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle \delta_{|x_0|}, \tilde{f}^o \rangle \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \tilde{f}^o(|x_0|) \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| |x_0|^{n-1} f^o(|x_0|) \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| |x_0|^{n-1} f(x_0). \end{aligned}$$

Definindo $\tilde{\Phi}_t(x) \doteq \frac{\Phi_t(x)}{(3|x_0|)^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|}$ para $0 < t < |x_0|$ temos por (3.5) que

$$|\partial^\alpha \tilde{\Phi}_t(x)| \leq \frac{c_{n,\alpha}}{t^{1+|\alpha|} |x_0|^{n-1}} \leq \frac{\tilde{c}_{n,\alpha}}{t^{n+|\alpha|}}. \quad (3.6)$$

Pela definição de $\tilde{\Phi}_t$ e assumindo que $0 < t < |x_0|$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\Phi}_t(x)| dx &= \frac{1}{(3|x_0|)^{n-1}} \int_{|x_0|-\frac{t}{2}}^{|x_0|+\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{|x_0|-r}{t}\right) r^{n-1} dr \\ &\leq \left(\frac{|x_0|+\frac{t}{2}}{3|x_0|}\right)^{n-1} \int_{|x_0|-\frac{t}{2}}^{|x_0|+\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{|x_0|-r}{t}\right) dr \\ &\leq \left(\frac{|x_0|+\frac{t}{2}}{3|x_0|}\right)^{n-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi(w) dw \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Segue de (3.6) e pelos fatos demonstrados anteriormente que a família de funções $\{\tilde{\Phi}_t\}_{0 < t < |x_0|} \subset \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$. Portanto,

$$\mathcal{M}_N f(x_0) \geq |\langle f, \tilde{\Phi}_t \rangle| = \frac{1}{(3|x_0|)^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} |\langle f, \Phi_t \rangle|$$

e fazendo $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$|f(x_0)| \leq 3^{n-1} \mathcal{M}_N f(x_0) \leq c_n \alpha,$$

no qual $c_n = 3^{n-1}$.

Para demonstrarmos 2. é suficiente demonstrarmos que, existem constantes positivas c_1 e c_2 as quais dependem apenas da dimensão n e de p tais que:

- (i) $\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \leq c_1 \mathcal{M}_N f(x)$, $x \in A_{j,k}^*$;
- (ii) $\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \leq c_2 \lambda \frac{2^j}{||x| - x_{j,k}|^{n+1}} |A_{j,k}^*|$, $x \notin A_{j,k}^*$,

Vamos assumir que as estimativas (i) e (ii) estejam ambas demonstradas. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx = \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx + \int_{(A_{j,k}^*)^c} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx. \quad (3.7)$$

Vamos estimar a segunda parcela do lado direito de (3.7). Com efeito, assumindo (ii) e combinando com o Lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{(A_{j,k}^*)^c} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx &\leq c_2^p \lambda^p |A_{j,k}^*|^p (2^j)^p \int_{(A_{j,k}^*)^c} \frac{1}{||x| - x_{j,k}|^{p(n+1)}} dx \\ &\leq 2c_2^p \frac{\lambda^p |A_{j,k}^*|}{|A_{j,k}^*|^{(1-p)}} (2^j)^p \int_{B(0, 2^{j-1} \nu^*)^c} \frac{1}{|x|^{p(n+1)}} dx \\ &\leq 2c_2^p \frac{\lambda^p |A_{j,k}^*|}{(2^j)^n (1-p)} (2^j)^p |\mathbb{S}^{n-1}| \int_{\nu^* 2^{j-1}}^\infty r^{-p(n+1)+n-1} dr \\ &\leq \left(\frac{2c_2^p |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{n-p(n+1)}}{p(n+1) - n} \right) \int_{A_{j,k}^*} \lambda^p dx \\ &\leq \left(\frac{2c_2^p |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{n-p(n+1)}}{p(n+1) - n} \right) \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_{(A_{j,k}^*)^c} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \leq c_{n,p} \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx. \quad (3.8)$$

Segue de (3.7) combinado com (i) e (3.8) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \leq \tilde{c}_{n,p} \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx.$$

Inicialmente vamos demonstrar (i). Fixe $x \in A_{j,k}^*$ e seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ com $\text{supp } \varphi \subset A$ sendo A um anel e $x \in \mathbb{S}_\delta^{n-1}$, no qual \mathbb{S}_δ^{n-1} é o centro do anel A . Então, pelas definições apresentadas de $b_{j,k}$ e $c_{j,k}$ em (3.1) temos

$$|\langle b_{j,k}, \varphi \rangle| \leq |\langle \eta_{j,k} f, \varphi \rangle| + |\langle \eta_{j,k} c_{j,k}, \varphi \rangle|. \quad (3.9)$$

Vamos estimar cada uma das parcelas em (3.9). Com efeito, usando o fato que $|c_{j,k}| \leq \lambda \leq \mathcal{M}_N f(x)$ temos que a segunda parcela à direita de (3.9) pode ser estimada por

$$\begin{aligned} |\langle \eta_{j,k} c_{j,k}, \varphi \rangle| &= |c_{j,k}| |\langle \eta_{j,k}, \varphi \rangle| \\ &\leq \lambda \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \eta_{j,k}(y) dy \right| \\ &\leq \lambda \|\eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| dy \\ &\leq \mathcal{M}_N f(x), \quad x \in A_{j,k}^*. \end{aligned}$$

Para estimarmos a primeira parcela à direita da desigualdade (3.9), iremos supor inicialmente que $\ell(A) \geq d(A_{j,k}, \Omega^c) \geq \frac{\ell(A_{j,k}^*)}{\nu^*}$ e que $x \in A$. Para este caso definamos \widehat{A} como sendo o anel de centro x e tamanho $3\ell(A_{j,k}^*)$, desta forma temos que $A_{j,k}^* \subset \widehat{A}$ e $\ell(\widehat{A}) \approx \ell(A_{j,k}^*)$.

Agora, para $|\alpha| \leq N$, temos

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\eta_{j,k}\varphi)| &= \left| \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} C_{\beta,\gamma} \partial^\beta(\eta_{j,k}) \partial^\gamma(\varphi) \right| \\
&\leq c \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_\beta c_\gamma (2^j)^{-|\beta|} \ell(A)^{-n-|\gamma|} \\
&\leq c c_1 c_2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} (\nu^*)^{n+|\gamma|} (2^j)^{-|\beta|} \ell(A_{j,k}^*)^{-n-|\gamma|} \\
&\leq c c_1 c_2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} (\nu^*)^{n+|\gamma|+|\beta|} \ell(A_{j,k}^*)^{-|\beta|} \ell(A_{j,k}^*)^{-n-|\gamma|} \\
&\leq c c_1 c_2 c_\alpha \ell(\widehat{A})^{-n-|\alpha|}
\end{aligned}$$

no qual $c = \max_{|\beta|,|\gamma| \leq N} \{C_{\beta,\gamma}\}$, $c_\beta = \|\partial^\beta \eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $c_1 = \max_{|\beta| \leq N} \{c_\beta\}$, $c_\gamma = \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $c_2 = \max_{|\gamma| \leq N} \{c_\gamma\}$ e $c_\alpha = (\nu^*)^{n+|\alpha|}$. Além disso, usando o fato de que $\text{supp } \eta_{j,k}\varphi \subset \widehat{A}$, $\|\eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ e $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\eta_{j,k}(x)\varphi(x)| dx \leq 1.$$

Isto implica que $\eta_{j,k}\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$. Portanto, $|\langle \eta_{j,k}f, \varphi \rangle| \lesssim \mathcal{M}_N f(x)$ desde que $\ell(A) \geq d(A_{j,k}, \Omega^c)$.

Caso tenhamos $d(A_{j,k}, \Omega^c) \geq \ell(A)$, basta definirmos \widehat{A} o anel contendo x em seu centro e de tamanho $3\ell(A)$. Desta forma $A \subset \widehat{A}$, $\ell(\widehat{A}) \approx \ell(A)$ e sendo $4\ell(A_{j,k}) \geq d(A_{j,k}, \Omega^c)$, temos

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\eta_{j,k}\varphi)| &= \left| \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} C_{\beta,\gamma} \partial^\beta(\eta_{j,k}) \partial^\gamma(\varphi) \right| \\
&\leq c \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_\beta c_\gamma (2^j)^{-|\beta|} \ell(A)^{-n-|\gamma|} \\
&\leq 4c c_1 c_2 \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \ell(A)^{-|\beta|} \ell(A)^{-n-|\gamma|} \\
&\lesssim 12c c_1 c_2 \ell(\widehat{A})^{-n-|\alpha|} \\
&\lesssim \ell(\widehat{A})^{-n-|\alpha|},
\end{aligned}$$

no qual as constantes c, c_1 e c_2 são tomadas como no caso anterior.

Antes de iniciarmos a demonstração de (ii) vamos realizar a seguinte observação:

Seja $\rho \in \mathbb{R}_+$. Definindo a aplicação $X_\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$X_\rho(x) = \frac{x}{|x|}\rho,$$

temos que $|X_\rho(x)| = \rho$. Considere $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = \psi^\circ(|x|)$ para alguma função $\psi^\circ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida por $\Psi \doteq \psi \circ X_{x_0}$ temos que

$$\Psi(x) = (\psi \circ X_{x_0})(x) = \psi(X_{x_0}(x)) = \psi^\circ(|X_{x_0}(x)|) = \psi^\circ(x_0). \quad (3.10)$$

Segue de (3.10) que Ψ é constante e, portanto $\partial^\alpha \Psi = 0$, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Agora, vamos demonstrar (ii). Fixe $x \notin A_{j,k}^*$ e seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ com $\text{supp } \varphi \subset A$. Usando a propriedade de que $b_{j,k}$ tem momento nulo e denotando

$$\mathbf{x}_{j,k} \doteq X_{x_{j,k}}(y), \quad (3.11)$$

temos

$$\begin{aligned} |\langle b_{j,k}, \varphi \rangle| &= \left| \int_{A_{j,k}^* \cap A} b_{j,k}(y) \varphi(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{A_{j,k}^* \cap A} b_{j,k}(y) (\varphi(y) - \varphi(\mathbf{x}_{j,k})) dy \right| \\ &\leq \left| \int_{A_{j,k}^* \cap A} f(y) \eta_{j,k}(y) (\varphi(y) - \varphi(\mathbf{x}_{j,k})) dy \right| \\ &\quad + |c_{j,k}| \left| \int_{A_{j,k}^* \cap A} \eta_{j,k}(y) (\varphi(y) - \varphi(\mathbf{x}_{j,k})) dy \right| \\ &\doteq |\langle f, \eta_{j,k}(\varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k})) \rangle| + |c_{j,k}| |\langle \eta_{j,k}, \varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k}) \rangle|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos estimar cada um dos emparelhamentos em (3.12). Primeiramente vejamos uma estimativa para o emparelhamento à esquerda de (3.12). De fato, note que $|x| \notin I_{j,k}^*$, $\text{supp } b_{j,k} \subset \tilde{A}_{j,k} \subset A_{j,k}^*$ e assim, temos as seguintes conclusões (veja a Figura 3.2):

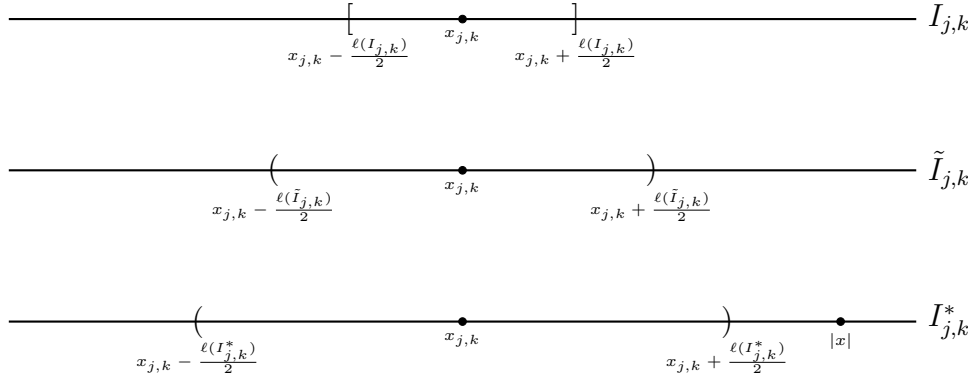


Figura 3.2: $I_{j,k} \subset \tilde{I}_{j,k} \subset I_{j,k}^*$

$$(i)^* \quad |x| - x_{j,k} \leq \tilde{\nu}2^{j-1} + \ell(A);$$

$$(ii)^* \quad |x| - x_{j,k} \geq \nu^*2^{j-1}.$$

Segue de (i)* que

$$\ell(A) \geq (|x| - x_{j,k}) - \tilde{\nu}2^{j-1}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, de (ii)* temos

$$-\tilde{\nu} \left(\frac{|x| - x_{j,k}}{\nu^*} \right) \leq -\tilde{\nu}2^{j-1}. \quad (3.14)$$

Combinando (3.13) com (3.14) podemos concluir que

$$\ell(A) \geq \frac{\nu^* - \tilde{\nu}}{\nu^*} (|x| - x_{j,k}) \geq \frac{\nu^* - \tilde{\nu}}{\nu^*} \nu^* 2^{j-1} = \tilde{c} \ell(A_{j,k}^*). \quad (3.15)$$

Agora, vamos construir um anel $\hat{A}_{j,k}$ tal que $A_{j,k}^* \subset \hat{A}_{j,k}$ e $\ell(\hat{A}_{j,k}) \approx \ell(A_{j,k}^*)$. De fato, seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(\partial\Omega, A_{j,k}) = d(x_0, A_{j,k})$, a escolha de x_0 é possível, pois $\partial\Omega$ é fechado. Então pelo Teorema 2.2.1 temos

$$d(x_0, A_{j,k}) \leq 4\ell(A_{j,k}) = \frac{4}{\nu^*} \ell(A_{j,k}^*) = c \ell(A_{j,k}^*).$$

Definindo $\widehat{A}_{j,k}$ como sendo o anel com centro contendo x_0 e de tamanho $\ell(\widehat{A}) = 2(c+1)\ell(A_{j,k}^*)$ no qual $c > 0$ é uma constante independente de j e k , temos $A_{j,k}^* \subset \widehat{A}_{j,k}$ e $\ell(\widehat{A}_{j,k}) \approx \ell(A_{j,k}^*)$.

Seja $\psi_{j,k} \doteq \eta_{j,k} \frac{(\varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k}))}{|A_{j,k}^*|}$ e note que $\text{supp } \psi_{j,k} \subset \widehat{A}_{j,k}$. Pelo fato de que $\|\eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$, combinado com a desigualdade do valor médio, pela definição em (3.11), o Lema 2.1.1 e pelo controle (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} |\psi_{j,k}(y)| &\leq \|\partial\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \| |y| - x_{j,k} | |A_{j,k}^*|^{-1} \\ &\leq c_n \frac{\nu^* 2^{j-1}}{\ell(A)^{n+1}} (2^j)^{-n} \\ &\leq \frac{\tilde{c}_n 2^j}{\| |x| - x_{j,k} |^{n+1}} \frac{1}{\ell(\widehat{A}_{j,k})^n}, \end{aligned}$$

no qual $\tilde{c}_n \doteq \frac{2n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \left(\frac{\nu^* - \tilde{\nu}}{2\nu^*}\right)^{-n-1} (2(c+1))^n$ e $c_n \doteq \frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|}$. Portanto,

$$\left| \frac{\| |x| - x_{j,k} |^{n+1}}{2^j} \psi_{j,k}(y) \right| \leq \frac{\tilde{c}_n}{\ell(\widehat{A}_{j,k})^n}.$$

Suponhamos que $|\alpha| \leq N$. Segue da desigualdade do valor médio, do fato de $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$, da definição em (3.11), do Lema 2.1.1 e do controle em (3.15), que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \psi_{j,k}(y)| &\leq c |A_{j,k}^*|^{-1} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{c_\beta}{(2^j)^{|\beta|}} |\partial^\gamma \varphi(y) - \partial^\gamma \varphi(\mathbf{x}_{j,k})| \\ &\leq c c_1 |A_{j,k}^*|^{-1} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{c_\gamma}{(2^j)^{|\beta|}} \frac{|y - \mathbf{x}_{j,k}|}{\ell(A)^{n+|\gamma|+1}} \\ &\leq 2^{-1} \nu^* c c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{2^j}{\| |x| - x_{j,k} |^{n+1}} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{1}{\ell(A_{j,k})^{n+|\beta|+|\gamma|}} \\ &\leq 2^{-1} \nu^* c c_1 c_2 \tilde{c}_{n,\alpha} c_3 c_4 \frac{2^j}{\| |x| - x_{j,k} |^{n+1}} \frac{1}{\ell(\widehat{A}_{j,k})^{n+|\alpha|}} \\ &\lesssim \frac{1}{\ell(\widehat{A}_{j,k})^{n+|\alpha|}}, \end{aligned}$$

no qual c , c_β , c_1 , c_γ e c_2 são tomadas como nos casos anteriores e aqui temos, $c_3 = \left(\frac{\nu^*}{2(\nu^* - \tilde{\nu})}\right)^{n+1}$, $c_4 = \max_{|\gamma| \leq N} \left\{ \left(\frac{1}{2(\nu^* - \tilde{\nu})}\right)^{|\gamma|} \right\}$ e $\tilde{c}_{n,\alpha} = \left(2\left(\frac{4}{\nu^*} + 1\right)\right)^{n+|\alpha|}$. Portanto,

$$\left| \frac{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}}{2^j} \partial^\alpha \psi_{j,k}(y) \right| \lesssim \frac{1}{\ell(\widehat{A}_{j,k})^{|\alpha|+n}}.$$

Definindo $\Psi_{j,k} \doteq \frac{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}}{2^j} \psi_{j,k}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi_{j,k}(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}}{2^j} \psi_{j,k}(y) dy \\ &\leq c \int_{A_{j,k}^*} \frac{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}}{2^j} \frac{\nu^* 2^{j-1}}{\ell(A)^{n+1}} |A_{j,k}^*|^{-1} dy \\ &\leq \frac{\nu^*}{2} \left(\frac{\nu^*}{\nu^* - \tilde{\nu}}\right)^{n+1} \doteq \bar{c}. \end{aligned}$$

Portanto, redefinindo $\Psi_{j,k}$ e combinando com as conclusões acima, conclui-se que $\Psi_{j,k} \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x_0)$. Assim, usando a definição da função maximal $\mathcal{M}_N f$ e o fato de que $x_0 \notin \Omega$ temos $|\langle f, \Psi_{j,k} \rangle| \leq \mathcal{M}_N f(x_0) \leq \lambda$ o que implica devido a definição de $\Psi_{j,k}$ em

$$|\langle f, \eta_{j,k}(\varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k})) \rangle| \lesssim \lambda |A_{j,k}^*| \frac{2^j}{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}}. \quad (3.16)$$

Agora, vamos estimar o segundo emparelhamento lado esquerdo de (3.12). Usando que $\ell(A) \gtrsim \|x - x_{j,k}\|$ mostrado em (3.15) juntamente com (3.4), temos

$$\begin{aligned} |c_{j,k}| |\langle \eta_{j,k}, \varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k}) \rangle| &\leq \lambda \int_{A_{j,k}^*} |\eta_{j,k}(y)(\varphi(y) - \varphi(\mathbf{x}_{j,k}))| dy \\ &\leq \lambda \int_{I_{j,k}^*} \frac{|r - x_{j,k}|}{\ell(A)^{n+1}} r^{n-1} dr \\ &\leq \lambda \frac{\nu^* 2^{j-1}}{\ell(A)^{n+1}} |A_{j,k}^*| \\ &\lesssim \lambda \frac{2^j}{\|x - x_{j,k}\|^{n+1}} |A_{j,k}^*|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\langle \eta_{j,k}, \varphi - \varphi(\mathbf{x}_{j,k}) \rangle| \lesssim \lambda \frac{2^j}{\| |x| - x_{j,k} \|^{n+1}} |A_{j,k}^*|. \quad (3.17)$$

Seguem das estimativas (3.16) e (3.17) que

$$\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \lesssim \lambda \frac{2^j}{\| |x| - x_{j,k} \|^{n+1}} |A_{j,k}^*|,$$

como queríamos demonstrar.

3.2 Demonstração do caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$

Assim como no caso clássico, para demonstrarmos o teorema da decomposição radial de Calderón-Zygmund para o caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$ é necessário melhorarmos a estimativa

$$\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \lesssim \lambda \frac{2^j}{\| |x| - x_{j,k} \|^{n+1}} |A_{j,k}^*|, \quad x \notin A_{j,k}^*, \quad (3.18)$$

a qual obtemos no caso $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$, pois esta não é suficiente para demonstrarmos o teorema quando $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$. Isto será feito modificando a definição inicial das funções $b_{j,k}$'s de modo que as novas funções $b_{j,k}$'s tenham uma condição adicional de momento, isto é, as funções $b_{j,k}$'s devem cumprir

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_{j,k}(x) p(x) dx = 0. \quad (3.19)$$

para todo “polinômio” $p(x) \doteq p^o(|x|)$ em que p^o é um polinômio em \mathbb{R} de grau menor ou igual a $N_p \doteq \left\lfloor n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right\rfloor$. Obteremos a condição de momentos nulos em (3.19) a partir de

$$\int_{I_{j,k}^*} b_{j,k}^o(r) p^o(r) r^{n-1} dr = 0,$$

no qual $b_{j,k}^o(|x|) \doteq b_{j,k}(x)$.

Antes de apresentarmos a demonstração para o caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$ vamos apresentar algumas definições e resultados que nos auxiliarão na demonstração.

Seja $\{\eta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ a partição da unidade construída no Capítulo 2. Lembrando que a partição $\{\eta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\eta_{j,k}(x) \doteq \eta_{j,k}^o(|x|)$;
- (ii) $\text{supp } \eta_{j,k} \subset A_{j,k}^* \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : 2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*) < |x| < 2^j k + 2^{j-1}(1 + \nu^*)\}$;
- (iii) $\sum_{(j,k) \in \mathfrak{F}} \eta_{j,k}(x) = 1$, para todo $x \in \Omega$;
- (iv) $\|\partial^\alpha \eta_{j,k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha (2^j)^{-|\alpha|}$. Além disso,

$$\text{supp } \eta_{j,k}^o \subset I_{j,k}^* \doteq (2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*), 2^j k + 2^{j-1}(1 + \nu^*))$$

e $\ell(I_{j,k}^*) = 2^j \nu^*$. Denotando por $x = r \cdot \omega$ para $r = |x|$ e $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} |\partial_r^\kappa \eta_{j,k}^o(r)| &= |\partial_r^\alpha \eta_{j,k}(r \cdot \omega)| \\ &= \left| \sum_{|\alpha|=\kappa} \partial^\alpha \eta_{j,k}(r \cdot \omega) \cdot \omega^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=\kappa} |\partial^\alpha \eta_{j,k}(x)| |\omega|^{|\alpha|} \\ &\leq c_\alpha (2^j)^{-\kappa}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

no qual $\omega^\alpha = \prod_{j=1}^n \omega_j^{\alpha_j}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Em adicional, usando o fato de que a família $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ possui a propriedade da interseção limitada, temos

$$\begin{aligned} \int_{A_{j,k}^*} \eta_{j,k}(x) dx &\geq \int_{A_{j,k}} \eta_{j,k}(x) dx \\ &= \int_{A_{j,k}} \frac{\Phi_{j,k}(x)}{\sum_{(j,k) \in \mathcal{F}} \Phi_{j,k}(x)} dx \\ &\geq \frac{|A_{j,k}|}{2} \\ &\geq c_n (2^j)^n, \end{aligned}$$

no qual $c_n = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{2}$ e consequentemente, usando o fato de $\eta_{j,k}$ ser radial obtemos

$$\int_{I_{j,k}^*} \eta_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \geq c (2^j)^n. \tag{3.21}$$

Definindo

$$\tilde{\eta}_{j,k}^o(w) \doteq \frac{\eta_{j,k}^o(w)}{\int_{I_{j,k}^*} \eta_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr}, \quad (3.22)$$

temos por (3.22) combinado com (3.20) e (3.21) que

$$\|\partial_r^{|\alpha|} \tilde{\eta}_{j,k}^o\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)} \leq c_{|\alpha|} (2^j)^{-n-|\alpha|} \quad \text{e} \quad \int_{I_{j,k}^*} \eta_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \leq c_n |A_{j,k}^*|. \quad (3.23)$$

Seja $\mathcal{H} = L^2(I_{j,k}^*, \tilde{\eta}_{j,k}^o r^{n-1} dr)$ o espaço de Hilbert munido pelo produto interno

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} &\doteq \int_{I_{j,k}^*} f(r) \overline{g(r)} \tilde{\eta}_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \\ &= \langle f, \bar{g} \tilde{\eta}_{j,k}^o r^{n-1} \rangle \\ &\doteq \langle f, \bar{g} \tilde{\eta}_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1} dr}. \end{aligned}$$

Considere \mathcal{H}_{N_p} o subespaço de \mathcal{H} formado pelos polinômios em \mathbb{R} de grau menor ou igual a $N_p \doteq \lfloor n(\frac{1}{p} - 1) \rfloor$, referente ao espaço \mathcal{H}_{N_p} temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 *Se q é um polinômio em \mathbb{R} de grau menor ou igual a N_p , então*

$$\|\partial^{|\alpha|} q\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)} \leq c_\alpha \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|q\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall q \in \mathcal{H}_{N_p}. \quad (3.24)$$

Demonstração. Inicialmente observamos que

$$r(t) \doteq \ell(I_{j,k}^*)t + 2^j k + 2^{j-1}(1 - \nu^*) \in I_{j,k}^* \iff t \in I \doteq (0, 1). \quad (3.25)$$

Além disso, temos para $k \geq 1$ e do fato de $r(t) \in I_{j,k}^*$ que

$$r(t) \geq \ell(I_{j,k}^*)t + 2^j \left(1 + \frac{1}{2}(1 - \nu^*)\right) > \ell(I_{j,k}^*)t, \quad \forall t \in I, \quad (3.26)$$

para $\nu^* > 1$ e suficientemente próximo de 1. Quando $k = 0$ basta definir

$r(t) \doteq 2^{j-1}t(1 + \nu^*)$ e proceder de modo análogo as contas que serão feitas a seguir. Combinando (3.25) com (3.26) obtemos

$$r(t) - 2^j k - 2^{j-1}(1 - \nu^*) = \ell(I_{j,k}^*)t < r(t), \quad \forall t \in I. \quad (3.27)$$

Definamos a função

$$\psi_{j,k}(t) \doteq \frac{(2^j)^n}{|A_{j,k}^*|} \eta_{j,k}^o(r(t)). \quad (3.28)$$

Note que, $\psi_{j,k} \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ e que quando o parâmetro t percorre o intervalo I a função $r(t)$ percorre o intervalo $I_{j,k}^*$ e $\text{supp } \eta_{j,k}^o \subset I_{j,k}^*$. Consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^o \doteq L^2(I, \psi_{j,k} t^{n-1} dt)$. Se $\mathcal{H}_{N_p}^o$ é o subespaço de \mathcal{H}^o formado pelos polinômios de grau menor ou igual a N_p , então

$$\|\partial_t^{|\alpha|} p\|_{L^\infty(I)} \leq c_{|\alpha|} \|p\|_{L^2(I, \psi_{j,k} t^{n-1} dt)}, \quad \forall p \in \mathcal{H}_{N_p}^o. \quad (3.29)$$

O controle em (3.29) segue do fato que em espaços normados de dimensão finita a seminorma é controlada pela norma.

Agora, vamos demonstrar (3.24). De fato, se definirmos

$$p(t) \doteq q(r(t)) \quad (3.30)$$

temos da definição (3.30) que

$$\partial_t^{|\alpha|} p(t) = \ell(I_{j,k}^*)^{|\alpha|} \partial_t^{|\alpha|} q(r(t)) \quad (3.31)$$

e, conseqüentemente, combinando (3.31) com (3.25) obtemos que

$$\|\partial_t^{|\alpha|} p\|_{L^\infty(I)} = \ell(I_{j,k}^*)^{|\alpha|} \|\partial_t^{|\alpha|} q\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, temos por (3.27) que fazendo a mudança de variáveis $r =$

$r(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 p^2(t) \psi_{j,k}(t) t^{n-1} dt &= \frac{(2^j)^n}{|A_{j,k}^*|} \int_0^1 q^2(r(t)) \eta_{j,k}^o(r(t)) t^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{|A_{j,k}^*|} \int_{I_{j,k}^*} q^2(r) \eta_{j,k}^o(r) [r - 2^j k - 2^{j-1}(1 - \nu^*)]^{n-1} dr \\ &\leq \frac{1}{|A_{j,k}^*|} \int_{I_{j,k}^*} q^2(r) \eta_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\|p\|_{L^2(I, \psi_{j,k} t^{n-1} dt)} \leq \left(\frac{1}{|A_{j,k}^*|} \int_{I_{j,k}^*} q^2(r) \eta_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Combinando a segunda estimativa em (3.23) com (3.33) obtemos que

$$\|p\|_{L^2(I, \psi_{j,k} t^{n-1} dt)} \leq \left(\int_{I_{j,k}^*} q^2(r) \tilde{\eta}_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Finalmente, se combinarmos (3.32), (3.29) e (3.34) nesta ordem, temos

$$\begin{aligned} \|\partial_r^{|\alpha|} q\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)} &= \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|\partial_r^{|\alpha|} p\|_{L^\infty(I)} \\ &\leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|p\|_{L^2(I, \psi_{j,k} r^{n-1} dr)} \\ &\leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \left(\int_{I_{j,k}^*} q^2(r) \tilde{\eta}_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|q\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\partial_r^{|\alpha|} q\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)} \leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|q\|_{\mathcal{H}}. \quad \blacksquare$$

Agora temos todos os ingredientes necessários para obtermos a demonstração do Teorema 3.1.1 para o caso em que $\frac{n}{n+N_p+1} < p \leq \frac{n}{n+N_p}$.

Demonstração: Seja $\mathbb{B} \doteq \{e_0, e_1, \dots, e_{N_p}\}$ uma base ortornormal de \mathcal{H}_{N_p}

e complete-a a uma base ortonormal de \mathcal{H} . Assim, toda $u \in \mathcal{H}$ se escreve como

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \langle u, e_l \rangle_{\mathcal{H}} e_l.$$

Logo, o operador projeção $\mathcal{P}_{j,k} : \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}_{N_p}$ é definido por

$$\mathcal{P}_{j,k}(f)(r) = \sum_{l=0}^{N_p} \langle f^o, e_l \rangle_{\mathcal{H}} e_l(r). \quad (3.35)$$

Note que, $\mathcal{P}_{j,k}$ é uma extensão do operador projeção $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{N_p}$. Seja $c_{j,k}^o$ definido como sendo o único polinômio em \mathbb{R} tal que

$$\langle f^o - c_{j,k}^o, q \rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall q \in \mathcal{H}_{N_p}. \quad (3.36)$$

Agora, estendemos radialmente $c_{j,k}(x) \doteq c_{j,k}^o(|x|)$. Afirmamos que para a nova função

$$b_{j,k} \doteq (f - c_{j,k})\eta_{j,k} \quad (3.37)$$

as seguintes estimativas são válidas:

$$|c_{j,k}(x)\eta_{j,k}(x)| \leq c\lambda, \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n \quad (3.38)$$

e

$$|\mathcal{M}_N b_{j,k}(x)| \leq c\mathcal{M}_N f(x), \quad x \in A_{j,k}^*. \quad (3.39)$$

Vamos demonstrar primeiramente (3.38). De fato,

$$\begin{aligned}
c_{j,k}(x) &= c_{j,k}^o(|x|) \\
&= \sum_{l=0}^{N_p} \langle f^o, e_l \rangle_{\mathcal{H}} e_l(|x|) \\
&= \int_{I_{j,k}^*} f^o(r) \sum_{l=0}^{N_p} \overline{e_l(r)} e_l(|x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \\
&= \int_{I_{j,k}^*} f^o(r) P(r, |x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o(r) r^{n-1} dr \\
&= \langle f^o, P(\cdot, |x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1} dr}
\end{aligned}$$

no qual $P(r, |x|) \doteq \sum_{l=0}^{N_p} \overline{e_l(r)} e_l(|x|)$ é um polinômio em r para cada x fixado.

Agora, o objetivo é demonstrarmos que

$$\|\partial_r^{|\alpha|} (P(\cdot, |x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-n-|\alpha|}, \quad (3.40)$$

uniformemente em x . Uma vez provado (3.40), podemos em seguida estender radialmente $P(\cdot, |x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o$, e assim obteremos uma função a qual pertencerá a família $\mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(\bar{x})$ com \bar{x} a ser escolhido em $\partial\Omega$ e, conseqüentemente, vamos conseguir provar (3.38).

Vamos provar (3.40). Segue da Proposição 3.2.1 que

$$\begin{aligned}
\|\partial_r^{|\alpha|} P(\cdot, |x|)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \|P(\cdot, |x|)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq c_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|} \max_{0 \leq l \leq N_p} \|e_l\|_{L^\infty(I_{j,k}^*)} \sum_{l=0}^{N_p} \|e_l\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \tilde{c}_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\partial_r^{|\alpha|} P(\cdot, |x|)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{c}_{|\alpha|} \ell(I_{j,k}^*)^{-|\alpha|}. \quad (3.41)$$

Combinando (3.23) com (3.41) junto com a regra de Leibniz obtemos (3.40).

Agora, estendendo radialmente $\psi^O(y) \doteq P(|y|, |x|)\tilde{\eta}_{j,k}^o(|y|)$ temos

$$\|\partial^\alpha \psi^O\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha \ell(A_{j,k}^*)^{-n-|\alpha|} \quad \text{e} \quad \text{supp } \psi^O \subset A_{j,k}^*, \quad (3.42)$$

no qual a estimativa em (3.42) é uniforme em x . Procedendo de modo análogo ao argumento usado nas páginas 65 a 66, podemos escolher $\bar{x} \in \partial\Omega$ e construir um anel A de modo que $A_{j,k}^* \subset A$ com \bar{x} pertencente ao seu centro e $\ell(A) \approx \ell(A_{j,k}^*)$. Disto segue que, se $\bar{x} \notin \Omega$ e usando a Proposição (1.4.3), existe uma constante $c_n > 0$ independente de j e k tal

$$\begin{aligned} |c_{j,k}(x)\eta_{j,k}(x)| &\leq c_n |\langle f, \psi^O \rangle| \\ &\leq c_n \mathcal{M}_N f(\bar{x}) \\ &\leq c_n \lambda. \end{aligned}$$

Agora vamos provar (3.39). Para isto, fixe $x \in A_{j,k}^*$ e seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$. Então, pela definição da função $b_{j,k}$ dada em (3.37) temos

$$|\langle b_{j,k}, \varphi \rangle| \leq |\langle f, \eta_{j,k}\varphi \rangle| + |\langle c_{j,k}, \eta_{j,k}\varphi \rangle| \doteq I_1 + I_2. \quad (3.43)$$

Vamos estimar cada uma das parcelas em (3.43). Para estimarmos I_1 , basta observarmos que $\eta_{j,k}\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ e, conseqüentemente,

$$|\langle f, \eta_{j,k}\varphi \rangle| \leq \mathcal{M}_N f(x). \quad (3.44)$$

Para I_2 , usamos primeiramente (3.38), em seguida o fato de que $x \in A_{j,k}^*$ e obtemos que

$$|\langle c_{j,k}, \eta_{j,k}\varphi \rangle| \leq \int_{A_{j,k}^*} |c_{j,k}(y)\eta_{j,k}(y)| |\varphi(y)| dy \leq c_n \lambda \leq c_n \mathcal{M}_N f(x), \quad (3.45)$$

no qual $c > 0$ é a constante dada por (3.38) e é independente de j e k .

Combinando (3.44), (3.45) com (3.43) obtemos

$$\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \leq c \mathcal{M}_N f(x), \quad x \in A_{j,k}^*. \quad (3.46)$$

Por fim, para a conclusão da demonstração do teorema no caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$, basta provarmos que

$$|\mathcal{M}_N b_{j,k}(x)| \leq c \lambda \frac{(2^j)^{N_p+1}}{||x| - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} |A_{j,k}^*|, \quad x \notin A_{j,k}^*, \quad (3.47)$$

pois uma vez provado (3.47) e combinando com (3.46) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \lesssim \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx.$$

De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx = \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx + \int_{(A_{j,k}^*)^c} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx. \quad (3.48)$$

Vamos estimar a segunda parcela do lado direito de (3.48). Com efeito, assumindo (3.47) e usando o Lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned} \int_{(A_{j,k}^*)^c} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx &\leq c^p \lambda^p |A_{j,k}^*|^p (2^j)^{p(N_p+1)} \int_{(A_{j,k}^*)^c} \frac{1}{||x| - x_{j,k}|^{p(n+N_p+1)}} dx \\ &\leq 2c^p \frac{\lambda^p |A_{j,k}^*|}{|A_{j,k}^*|^{(1-p)}} (2^j)^{p(N_p+1)} \int_{B(0,2^{j-1}\nu^*)^c} \frac{1}{|x|^{p(n+N_p+1)}} dx \\ &\leq \left(\frac{2c^p |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{n-p(N_p+n+1)}}{p(N_p+n+1) - n} \right) \lambda^p |A_{j,k}^*| \\ &\leq \left(\frac{2c^p |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{n-p(N_p+n+1)}}{p(N_p+n+1) - n} \right) \int_{A_{j,k}^*} \lambda^p dx \\ &\leq \left(\frac{2c^p |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{n-p(N_p+n+1)}}{p(N_p+n+1) - n} \right) \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \leq c_{n,p} \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx. \quad (3.49)$$

Segue de (3.48) combinado com (3.46) e (3.49) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \leq \tilde{c}_{n,p} \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx.$$

Agora vamos demonstrar (3.47). De fato, sejam $x \notin A_{j,k}^*$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ com $\text{supp } \varphi \subset A$, x pertencente ao centro do anel A e $\varphi(x) = \varphi^o(|x|)$. Seja P_{N_p} o polinômio de Taylor com resto de Lagrange de grau N_p centrado em $x_{j,k}$ da função $\mathbb{R}_+ \ni w \mapsto \varphi^o(w)$, isto é,

$$\varphi^o(w) = \underbrace{\sum_{|\beta| \leq N_p} \frac{\partial_w^{|\beta|} \varphi^o(x_{j,k})}{|\beta|!} (w - x_{j,k})^{|\beta|}}_{=P_{N_p}(r)} + R_{N_p+1}(w),$$

em que R_{N_p+1} é o resto de Lagrange, dado por

$$R_{N_p+1}(w) = \frac{\partial_w^{N_p+1} \varphi^o(\theta_w)}{(N_p + 1)!} (w - x_{j,k})^{N_p+1} \quad (3.50)$$

para algum $\theta_w \in [x_{j,k}, w] \doteq tx_{j,k} + (1-t)w$ para $t \in [0, 1]$. Note que, de (3.50) e supondo $w \in I_{j,k}^*$ temos

$$\begin{aligned} |\partial_w^{|\alpha|} R_{N_p+1}(w)| &\leq C_{N_p} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} |\partial_w^{|\beta|+N_p+1} \varphi(\theta_w)| |\partial_w^{|\gamma|} (w - x_{j,k})^{N_p+1}| \\ &\leq C_{N_p} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{1}{\ell(A)^{N_p+1+n+|\beta|}} (2^j)^{N_p+1-|\gamma|} \\ &\leq C_{N_p} \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{1}{\ell(A)^{N_p+1+n}} (2^j)^{N_p+1-|\gamma|-|\beta|} \\ &\leq C_{N_p} \frac{(2^j)^{N_p+1-|\alpha|}}{\ell(A)^{N_p+1+n}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

no qual a constante $C_{N_p} > 0$ depende apenas de N_p . Consequentemente usando as estimativas em (3.20), (3.51) e fazendo uso do mesmo argumento que prova

(3.15), temos que $\ell(A) \gtrsim |v - x_{j,k}|$ com $v = |x|$ e obtemos a estimativa

$$|\partial_w^{|\alpha|}(R_{N_p+1}(w)\eta_{j,k}^o(w))| \leq C_{N_p,|\alpha|} \frac{(2^j)^{N_p+1-|\alpha|}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}}, \quad (3.52)$$

no qual $C_{N_p,|\alpha|} > 0$ é uma constante independente de j e k . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle b_{j,k}, \varphi \rangle &= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle b_{j,k}^o, \varphi^o(r) r^{n-1} \rangle - |\mathbb{S}^{n-1}| \underbrace{\langle b_{j,k}^o, P_{N_p}(r) r^{n-1} \rangle}_{=0} \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| (\langle f^o, R_{N_p+1}\eta_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1}dr} - \langle c_{j,k}^o, R_{N_p+1}\eta_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1}dr}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Definindo $\zeta(w) \doteq R_{N_p+1}(w)\eta_{j,k}^o(w)$ e $\psi(w) \doteq c\zeta(w) \frac{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}}{(2^j)^{n+N_p+1}}$ no qual $c > 0$ é independente de j e k , obtemos

$$|\partial_w^{|\alpha|}\psi(w)| \leq c\ell(A_{j,k}^*)^{-n-|\alpha|} \quad \text{e} \quad \text{supp } \psi \subset A_{j,k}^*. \quad (3.54)$$

Escolhendo $\bar{x} \in \partial\Omega$ como feito na página 65, podemos construir um anel A tal que $A_{j,k}^* \subset A$ com \bar{x} pertence ao seu centro e $\ell(A) \approx \ell(A_{j,k}^*)$. Por fim, estendendo radialmente $\psi^O(y) = \psi(|y|)$ e usando a Proposição 1.4.3 temos

$$\begin{aligned} |\langle f^o, R_{N_p+1}\eta_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1}dr}| &= c |\langle f^o, \psi \rangle_{r^{n-1}dr}| \frac{(2^j)^{n+N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+d+1}} \\ &= c_n |\langle f, \psi^O \rangle| \frac{(2^j)^{n+N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} \\ &\leq c_n \mathcal{M}_N f(\bar{x}) \frac{(2^j)^{n+N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} \\ &\leq c_n \lambda \frac{(2^j)^{n+N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}}, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$|\langle f^o, R_{N_p+1}\eta_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1}dr}| \leq c_n \lambda \frac{(2^j)^{N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} |A_{j,k}^*|. \quad (3.55)$$

Usando as estimativas (3.38) e (3.52) obtemos

$$|\langle c_{j,k}^o, R_{N_p+1} \eta_{j,k}^o \rangle_{r^{n-1} dr}| \leq c_n \lambda \frac{(2^j)^{N_p+1}}{|v - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} |A_{j,k}^*|. \quad (3.56)$$

Por fim, combinando (3.55) e (3.56) obtemos a partir de (3.53) que

$$\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \leq c \lambda \frac{(2^j)^{N_p+1}}{||x| - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} |A_{j,k}^*|, \quad x \notin A_{j,k}^*.$$

■

Observação 3.2.1 *Seja $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição não necessariamente localmente integrável. Então, valem as seguintes estimativas:*

(i) $\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \lesssim \mathcal{M}_N f(x)$, $x \in A_{j,k}^*$;

(ii) $\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \lesssim c \lambda \frac{(2^j)^{n+1}}{||x| - x_{j,k}|^{n+1}}$, $x \notin A_{j,k}^*$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}(x))^p dx \lesssim \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx$;

(iv) $|\mathcal{M}_N b_{j,k}(x)| \leq c \lambda \frac{(2^j)^{N_p+1}}{||x| - x_{j,k}|^{n+N_p+1}} |A_{j,k}^*|$, $x \notin A_{j,k}^*$.

As demonstrações dos itens (i) – (iv) requer que troquemos algumas integrais na demonstração do Teorema 3.1.1 por emparelhamento com funções testes. De fato, se $\frac{n}{n+1} < p \leq 1$ e f uma distribuição, definimos a distribuição de suporte compacto $b_{j,k} \doteq (f - c_{j,k})\eta_{j,k}$ no qual sua ação em funções testes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\langle b_{j,k}, \varphi \rangle \doteq \langle f \eta_{j,k}, \varphi \rangle - c_{j,k} \langle \eta_{j,k}, \varphi \rangle,$$

no qual $c_{j,k} \doteq \langle f, \eta_{j,k} \rangle \|\eta_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{-1}$. Usando o argumento análogo ao feito nas páginas 65 a 67 temos $|c_{j,k}| \leq \lambda$. Agora, usando argumentos análogos aos usados nas páginas 69 a 76, obtemos as conclusões (i) – (iii) listadas acima para a distribuição $b_{j,k}$.

Agora, se $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$ definimos

$$c_{j,k}(x) \doteq \langle f^o, P(\cdot, |x|) \tilde{\eta}_{j,k}^o r^{n-1} \rangle,$$

no qual $P(r, |x|) \doteq \sum_{l=0}^{N_p} \overline{e_l(r)} e_l(|x|)$ é um polinômio em r para cada x fixado. Note que os e_l 's são os elementos da base \mathbb{B} da página [80](#). Procedendo de modo análogo ao feito nas páginas [80](#) a [87](#) obtemos (iii) e (iv).

Átomos Radiais e Decomposição Atômica de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$

O objetivo deste capítulo é apresentarmos uma decomposição atômica radial para as distribuições no espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq 1$ no qual $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Hardy radial definido no Capítulo 2.

Antes de apresentarmos os átomos radiais e o teorema de decomposição atômica radial em questão introduziremos alguns resultados preliminares.

4.1 $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$

O objetivo desta seção é demonstrarmos que o espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leq 1$. Este resultado nos proporcionará uma maior facilidade para demonstrarmos o teorema da decomposição atômica. Para isto precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 4.1.1 *O espaço $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ (não necessariamente localmente integrável). Consideremos $b_{j,k} \doteq (f - c_{j,k})\eta_{j,k}$ como na Observação [3.2.1](#), então $b_{j,k}$ é uma distribuição com suporte compacto. Assim, o emparelhamento de $b_{j,k}$ com a função constante $c(x) \equiv 1$ a qual é $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, está bem definido e

consequentemente, obtemos

$$\langle b_{j,k}, c \rangle = 0. \quad (4.1)$$

Por (iii) da Observação 3.2.1 temos que, a série $\sum_{j,k} b_{j,k}$ pertence a $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, pois usando o fato de $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ ter a propriedade da interseção limitada e a subaditividade da função $p \mapsto s^p$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j,k} b_{j,k} \right\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq c \sum_{j,k} \|b_{j,k}\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq c \sum_{j,k} \int_{A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \\ &\leq c \int_{\cup_{j,k} A_{j,k}^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx = \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Portanto, definindo $b \doteq \sum_{j,k} b_{j,k}$ temos que $g \doteq f - b = f - \sum_{j,k} b_{j,k}$ está bem definida e $g \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$.

Afirmamos que

$$\mathcal{M}_N g(x) \leq c \mathcal{M}_N f(x) \chi_{\Omega^c}(x) + \tilde{c} \lambda \sum_{j,k} \frac{\ell(A_{j,k}^*)^{n+1}}{(\ell(A_{j,k}^*) + \|x - x_{j,k}\|)^{n+1}} \quad q.t.p. x \in \mathbb{R}^n,$$

no qual

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > \lambda\}.$$

Consideremos inicialmente o caso em que $x \in \Omega^c$. Então, pela definição da distribuição g temos

$$\mathcal{M}_N g \leq \mathcal{M}_N f + \sum_{j,k} \mathcal{M}_N b_{j,k}.$$

Para $x \in \Omega^c$ temos que $||x| - x_{j,k}| \geq \frac{\ell(A_{j,k}^*)}{2}$ e

$$\begin{aligned} ||x| - x_{j,k}| &= \frac{||x| - x_{j,k}|}{2} + \frac{||x| - x_{j,k}|}{2} \\ &\geq \frac{\ell(A_{j,k}^*)}{4} + \frac{||x| - x_{j,k}|}{2} \\ &\geq \frac{1}{4} \left(||x| - x_{j,k}| + \ell(A_{j,k}^*) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Portanto, combinando o item (ii) com (4.2) temos

$$\mathcal{M}_N g(x) \leq c_1 \mathcal{M}_N f(x) \chi_{\Omega^c}(x) + c_2 \lambda \sum_{j,k} \frac{\ell(A_{j,k}^*)^{n+1}}{(\ell(A_{j,k}^*) + ||x| - x_{j,k}|)^{n+1}}.$$

Agora, fixemos $x \in \Omega$. Então, existe $(j_0, k_0) \in \mathfrak{F}$ tal que $x \in A_{j_0, k_0}$. Vamos dividir a partição $\{A_{j,k}^*\}_{j,k}$ em duas partes: uma parte em anéis “próximos” a qual denotaremos por P e uma outra parte em anéis “longes” a qual denotaremos por L . Por anéis “próximos” entenderemos como sendo os anéis da família $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ tais que $A_{j,k}^* \cap A_{j_0, k_0}^* \neq \emptyset$ e entenderemos como anéis “longes” como sendo os anéis da família $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ tais que $A_{j,k}^* \cap A_{j_0, k_0}^* = \emptyset$.

Note que, existem apenas dois anéis em P independente de x , tais que $A_{j,k}^* \cap A_{j_0, k_0}^* \neq \emptyset$, pois a coleção $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ tem a propriedade da interseção limitada.

Podemos escrever a função g da forma

$$g = (f - \sum_P b_{j,k}) - \sum_L b_{j,k}.$$

Para os anéis em L temos por (ii) da Observação 3.2.1 que

$$\mathcal{M}_N b_{j,k}(x) \lesssim \lambda \frac{\ell(A_{j,k}^*)^{n+1}}{||x| - x_{j,k}|^{n+1}},$$

pois $x \in A_{j_0, k_0}$ e $x \notin A_{j, k}^*$. Além disso, como $||x| - x_{j, k}| \geq \frac{\ell(A_{j, k}^*)}{2}$ temos consequentemente que $||x| - x_{j, k}| \gtrsim (\ell(A_{j, k}^*) + ||x| - x_{j, k}|)$ e, portanto

$$\left(\mathcal{M}_N \sum_L b_{j, k} \right)(x) \lesssim \lambda \sum_L \frac{\ell(A_{j, k}^*)^{n+1}}{(\ell(A_{j, k}^*) + ||x| - x_{j, k}|)^{n+1}}. \quad (4.3)$$

Analisemos agora os anéis em P , para isto escrevemos

$$f - \sum_P b_{j, k} = f - \sum_P f \eta_{j, k} + \sum_P c_{j, k} \eta_{j, k} \doteq h + \sum_P c_{j, k} \eta_{j, k}, \quad (4.4)$$

em que $h \doteq f - \sum_P f \eta_{j, k}$. Afirmamos que $\mathcal{M}_N \eta_{j, k}(x) \leq 1$. De fato, sejam $x \in A_{j_0, k_0}$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{c, N, rad}^\infty(x)$. Então,

$$|\langle \eta_{j, k}, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{j, k}(y) \varphi(y) dy \right| \leq 1 \quad (4.5)$$

e, como (4.5) vale para todo $\varphi \in \mathcal{C}_{c, N, rad}^\infty(x)$, temos

$$\mathcal{M}_N \eta_{j, k}(x) \leq 1. \quad (4.6)$$

Usando o fato de que $|c_{j, k}| \lesssim \lambda$ na segunda parcela em (4.4) junto com (4.6), temos

$$\left(\mathcal{M}_N \sum_P c_{j, k} \eta_{j, k} \right)(x) \leq \sum_P |c_{j, k}| (\mathcal{M}_N \eta_{j, k})(x) \leq c \lambda, \quad (4.7)$$

pois a quantidade de anéis em P os quais tem-se $A_{j, k}^* \cap A_{j_0, k_0}^* \neq \emptyset$ é finita.

Vamos agora refinar a estimativa (4.7), para isso, se $x \in A_{j_0, k_0}$, temos que $||x| - x_{j_0, k_0}| \leq \frac{\ell(A_{j_0, k_0}^*)}{2}$ e, consequentemente,

$$\ell(A_{j_0, k_0}^*) + ||x| - x_{j_0, k_0}| \leq \frac{3}{2} \ell(A_{j_0, k_0}^*) \quad (4.8)$$

e

$$\frac{2}{3\ell(A_{j_0, k_0}^*)} \leq \frac{1}{\ell(A_{j_0, k_0}^*) + ||x| - x_{j_0, k_0}|}. \quad (4.9)$$

Combinando (4.8) e (4.9) temos

$$\frac{1}{\ell(A_{j_0,k_0}^*)^n} \leq \frac{3^n}{2^n(\ell(A_{j_0,k_0}^*) + \|x - x_{j_0,k_0}\|)^n} \leq \frac{3^n}{2^n\|x - x_{j_0,k_0}\|^n}. \quad (4.10)$$

Aplicando (4.10) em (4.7) obtemos que

$$\left(\mathcal{M}_N \sum_P c_{j,k} \eta_{j,k}\right)(x) \leq c \lambda \frac{\ell(A_{j_0,k_0}^*)^{n+1}}{\ell(A_{j_0,k_0}^*)^{n+1}} \leq c_n \lambda \frac{\ell(A_{j_0,k_0}^*)^{n+1}}{\|x - x_{j_0,k_0}\|^{n+1}}.$$

Para finalizarmos a demonstração da afirmação, inicialmente devemos estimar $\mathcal{M}_N h(x)$. Para isto, seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$, $\text{supp } \varphi \subset A$ sendo x pertencente ao centro do anel A e tal que $\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha \ell(A)^{-n-|\alpha|}$.

Suponhamos inicialmente que $\ell(A) \leq c_0 d(A_{j_0,k_0}, \Omega^c)$ para algum $c_0 > 0$. Note que, se $y \in A$ então

$$\|y - x_{j_0,k_0}\| \leq \|y - x\| + \|x - x_{j_0,k_0}\| \leq (4c_0 + 1) \left(\frac{\ell(A_{j_0,k_0})}{2}\right), \quad (4.11)$$

o que implica em $y \in A_{j_0,k_0}^*$. Portanto, $A \subset A_{j_0,k_0}^*$ e como $1 - \sum_P \eta_{j,k} \equiv 0$ em A_{j_0,k_0}^* , segue que $\langle h, \varphi \rangle = 0 \leq \lambda$.

Agora, se $\ell(A) \geq c_0 d(A_{j_0,k_0}, \Omega^c) \geq c_0 \ell(A_{j_0,k_0})$ consideremos $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(x_0, A_{j_0,k_0}) = d(\partial\Omega, A_{j_0,k_0})$. Segue do Teorema 2.2.1 que $\ell(A_{j_0,k_0}) \approx \ell(A_{j_i,k_i})$ para $i = 1, 2$ desde que A_{j_1,k_1} intercepta A_{j_0,k_0} somente na fronteira.

Vamos estimar cada uma das parcelas

$$\langle h, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \left\langle f, \sum_P \varphi \eta_{j,k} \right\rangle. \quad (4.12)$$

Procedendo de modo análogo ao caso feito em (i) do Teorema 3.1.1 nas páginas 69 a 71, temos

$$\mathcal{M}_N h(x) \lesssim \lambda \lesssim \lambda \frac{\ell(A_{j_0,k_0}^*)^{n+1}}{\|x - x_{j_0,k_0}\|^{n+1}}, \quad x \in A_{j_0,k_0}.$$

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{M}_N g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_N g(x) dx &= \int_{\Omega^c} \mathcal{M}_N g(x) dx + c \lambda \sum_{j,k} \int_{A_{j,k}} \frac{\ell(A_{j,k}^*)^{n+1}}{(\ell(A_{j,k}^*) + ||x - x_{j,k}||)^{n+1}} dx \\ &\leq c \lambda \sum_{j,k} |A_{j,k}| + \int_{\Omega^c} \mathcal{M}_N f(x) dx \\ &= c \lambda \sum_{j,k} |A_{j,k}| + \int_{\Omega^c} (\mathcal{M}_N f(x))^p (\mathcal{M}_N f(x))^{1-p} dx \\ &\leq c \lambda |\Omega| + \lambda^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx < \infty, \end{aligned}$$

pois $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ e $\sum_{j,k} |A_{j,k}| = |\Omega| < \infty$.

Por fim, consideremos $\Omega_l \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > 2^l\}$. Note que,

$$\bigcap_{l \in \mathbb{Z}} \Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) = +\infty\}.$$

Então, usando o fato de $\mathcal{M}_N f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ temos

$$|\Omega_l| = \int_{\Omega_l} dx < \frac{1}{2^l} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_N f(x)|^p dx = 2^{-l} \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \longrightarrow 0, \quad (4.13)$$

quando $l \rightarrow +\infty$.

Pelo que foi provado anteriormente temos $b^l \doteq \sum_{j,k} b_{j,k}^l$ pertence a $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ e temos que $g^l \doteq f - b^l$ está bem definida e pertence a $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, usando o fato de $\{A_{j,k}^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{F}}$ ter a propriedade da interseção limitada e (4.13),

obtemos

$$\begin{aligned}
\|b^l\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b^l(x))^p dx \\
&\leq \sum_{j,k} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N b_{j,k}^l(x))^p dx \\
&\leq c \sum_{j,k} \int_{(A_{j,k}^l)^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \\
&\leq c' \int_{\cup_{j,k} (A_{j,k}^l)^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \\
&= c' \int_{\Omega_l} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $l \rightarrow +\infty$.

Afirmamos que $g^l \rightarrow f$ em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, quando $l \rightarrow +\infty$. De fato,

$$\|g^l - f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} = \left\| \sum_{j,k} b^l \right\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad l \rightarrow +\infty.$$

Portanto, $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 4.1.1 $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Fixe $f \in \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$. Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e definamos

$$\Phi_t^x(w) \doteq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}| |x|^{n-1} t} \varphi\left(\frac{|x| - |w|}{t}\right)$$

no qual $\varphi \in \mathcal{C}_{c,rad}^\infty((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ com $\int \varphi(x) dx = 1$. Note que, $\Phi_t^x \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ desde que $0 < t < |x|$ e a demonstração desse fato decorre do Corolário [A.0.1](#).

Pela definição da função maximal $\mathcal{M}_N f$ temos

$$|\langle f, \Phi_t^x \rangle| \leq \mathcal{M}_N f(x) \implies \int_{\mathbb{R}^n} |\langle f, \Phi_t^x \rangle| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_N f(x) dx < \infty. \quad (4.14)$$

Segue de [\(4.14\)](#) que $F_t(x) \doteq \langle f, \Phi_t^x \rangle$ pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ uniformemente em $t > 0$ e ainda por [\(4.14\)](#) podemos extrair uma subsequência $\{F_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ a qual é limitada, pois $\{F_t\}_{t>0}$ é limitada devido a [\(4.14\)](#). Pelo teorema de Banach-Alaoglu (vide [\[3\]](#), Teorema 3.16, página 66), existe uma

subseqüência de $\{F_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ a qual também denotaremos por $\{F_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ e uma medida de Borel μ tal que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_{t_j}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu, \quad \forall g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n). \quad (4.15)$$

Em particular, segue de (4.15) que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_{t_j}(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.16)$$

Por outro lado, devemos ressaltar que, se definirmos

$$\varphi_t^{|x|}(w) \doteq \frac{1}{|x|^{n-1}t} \varphi\left(\frac{|x| - w}{t}\right)$$

temos que $\Phi_t^x(w) = (\varphi_t^{|x|})^{\mathcal{O}}(w)$. Consequentemente, pela Proposição 1.4.3 obtemos que

$$\begin{aligned} F_{t_j}(x) &\doteq \langle f, \Phi_t^x \rangle \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \langle f^{\mathcal{O}}, \varphi_{t_j}^{|x|}(r)r^{n-1} \rangle \\ &= \frac{1}{|x|^{n-1}} \langle f^{\mathcal{O}}, \varphi_{t_j}(|x| - r)r^{n-1} \rangle \\ &= \left(\frac{1}{|x|^{n-1}} \tilde{f}^{\mathcal{O}} * \varphi_{t_j} \right)(|x|), \end{aligned}$$

em que $\tilde{f}^{\mathcal{O}} \doteq f^{\mathcal{O}} \cdot \zeta$ e $\zeta(r) \doteq r^{n-1}$ e $r > 0$.

Afirmamos que $\{F_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ converge para f em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, fixemos $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e combinando as Proposições 1.4.1 e 1.4.2 e 1.4.3 respectivamente,

temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle F_{t_j}, \phi \rangle &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle F_{t_j}, \phi^{rad} \rangle \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle F_{t_j}^o, (\phi^{rad})^o(r) r^{n-1} \rangle \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^\infty F_{t_j}^o(r) (\phi^{rad})^o(r) r^{n-1} dr \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^\infty (\tilde{f}^o * \varphi_{t_j})(r) (\phi^{rad})^o(r) dr \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} (\tilde{f}^o * \varphi_{t_j}) * (\phi^{rad})^o(0) \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} \tilde{f}^o * (\varphi_{t_j} * (\phi^{rad})^o)(0) \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \tilde{f}^o, [\varphi_{t_j} * (\phi^{rad})^o](r) \rangle \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle \tilde{f}^o, (\phi^{rad})^o(r) \rangle \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \langle f^o, (\phi^{rad})^o(r) r^{n-1} \rangle \\
&= \langle f, \phi^{rad} \rangle \\
&= \langle f, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Usando a convergência de $\{F_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ para f em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ com a igualdade em (4.16), segue que $f = \mu$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pela unicidade do limite. Pelo teorema de Lebesgue-Radon-Nykodyn 1.1.2 temos que, existem medidas μ_a e μ_s tais que

$$\mu = \mu_a + \mu_s \quad (4.17)$$

sendo $\mu_a \ll dx$ e $\mu_s \perp dx$ e além disso, existe uma única $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mu_a(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} h(x) dx, \quad \forall \mathcal{E} \text{ mensurável.} \quad (4.18)$$

Afirmamos que $\mu_s \equiv 0$. De fato, para provarmos essa afirmação, basta provarmos que

$$|\mathcal{X}| = 0 \implies \mu(\mathcal{X}) = 0, \quad \forall \mathcal{X} \text{ mensurável.} \quad (4.19)$$

Seja \mathcal{X} um conjunto Lebesgue mensurável qualquer. Como $\mu_s \perp dx$, temos que existem conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} ambos Lebesgue mensuráveis tais que $\mathbb{R}^n = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mu_s(\mathcal{B}) = 0$ e $|\mathcal{A}| = 0$. Disto segue que $|\mathcal{X} \cap \mathcal{A}| = 0$, $\mu_s(\mathcal{X}) = \mu_s(\mathcal{X} \cap \mathcal{A})$ e

$$\mu_s(\mathcal{X}) = \mu_s(\mathcal{X} \cap \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{X} \cap \mathcal{A}) - \int_{\mathcal{X} \cap \mathcal{A}} h(x) dx = \mu(\mathcal{X} \cap \mathcal{A}).$$

Vamos demonstrar (4.19). De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que μ seja uma medida positiva, uma vez que os mesmos argumentos que faremos a seguir podem ser usados para as variações positiva e negativa de μ , μ^+ e μ^- respectivamente. Pelo fato de que μ é uma medida regular, temos

$$\mu(\mathcal{X}) = \sup\{\mu(\mathcal{K}) : \mathcal{K} \subset \mathcal{X} \text{ compacto}\}. \quad (4.20)$$

Assim, para concluirmos (4.19) será suficiente mostrar que, se \mathcal{K} é compacto com $|\mathcal{K}| = 0$, então $\mu(\mathcal{K}) = 0$. De fato, seja $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ compacto e consideremos $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\psi_j \equiv 1$ numa vizinhança de \mathcal{K} , para todo $j \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\psi_j \rightarrow \chi_{\mathcal{K}}$, quando $j \rightarrow +\infty$. Em particular, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x) d\mu = \mu(\mathcal{K}).$$

Segue de (iii) que dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que

$$\mu(\mathcal{K}) \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) d\mu \right| + \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0. \quad (4.21)$$

Por (4.15), temos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_{t_j}(x) \psi_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) d\mu. \quad (4.22)$$

Pela convergência em (4.22), temos que, dado $\varepsilon > 0$ e fixado $k \geq k_0$, existe $j_0 = j_0(\varepsilon, k)$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x) d\mu \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} F_{t_j}(x) \psi_k(x) dx \right| + \varepsilon, \quad \forall j \geq j_0. \quad (4.23)$$

Combinando (4.21) com (4.23) temos que

$$\mu(\mathcal{K}) \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} F_{t_j}(x) \psi_k(x) dx \right| + 2\varepsilon, \quad \forall j \geq j_0, \forall k \geq k_0. \quad (4.24)$$

Portanto, segue de (4.24) combinado com (4.14) que

$$\mu(\mathcal{K}) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_N f(x) \psi_k(x) dx + 2\varepsilon, \quad \forall k \geq k_0. \quad (4.25)$$

Fazendo $k \rightarrow +\infty$ em (4.25) e usando o fato de que $|\mathcal{K}| = 0$ temos

$$\mu(\mathcal{K}) \leq 2\varepsilon.$$

Isto prova que $\mu(\mathcal{K}) = 0$ e consequentemente mostramos que vale (4.19). Logo, para todo \mathcal{E} mensurável temos

$$\mu(\mathcal{E}) = \mu_a(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} h(x) dx,$$

ou seja, $d\mu = h dx$. Usando o fato de que $f = \mu$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ temos que, dada $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, \phi \rangle = \langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \phi(x) dx = \langle h, \phi \rangle.$$

Portanto, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 4.1.1 *O espaço $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição (4.1.1) e do Teorema (4.1.1). ■

4.2 Átomos radiais

Antes de apresentarmos o principal resultado desta tese, vamos introduzir o conceito de átomo radial.

Definição 4.2.1 (átomo radial) *Sejam $0 < p \leq 1$ e $q \in [1, \infty] \cap (p, \infty]$. Uma função $a \in L^q(\mathbb{R}^n)$ é chamada de $\mathcal{H}_{rad}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ -átomo se satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *A função a é radial;*
- (ii) *$\text{supp } a \subset \bar{A}$, sendo A um anel em \mathbb{R}^n ;*
- (iii) *$\|a\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq |A|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$;*
- (iv) *$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) |x|^{|\alpha|} dx = 0, \quad \forall |\alpha| \leq N_p \doteq \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right\rfloor$.*

Quando $q = \infty$ denotaremos por $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo ao invés de denotarmos por $\mathcal{H}_{rad}^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ -átomo, devido a simplicidade de notação.

Exemplo 4.2.1 *Sejam $0 < p \leq 1$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função não identicamente nula, suave e tal que $\text{supp } \varphi \subset I = (r, R)$ e $0 \leq r < R < \infty$. Definamos $\tilde{a} \doteq \varphi^{(\kappa)}$ (κ -ésima derivada da função φ) para algum $\kappa > N_p + n - 1$, no qual κ é um inteiro positivo. Usando o fato de que $\text{supp } \varphi \subset I$, integração por partes e sendo $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \leq N_p$, temos*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(\kappa)}(r) r^{l+n-1} dr &= \int_0^1 \varphi^{(\kappa)}(r) r^{l+n-1} dr \\ &= (l+n-1) \int_0^1 \varphi^{(\kappa-1)}(r) r^{l+n-2} dr. \end{aligned}$$

Repetindo o processo acima κ -vezes e usando os fatos de que $\text{supp } \varphi \subset I$, $k > N_p + n - 1$ e $l \leq N_p$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(r) r^{l+n-1} dr = 0.$$

Por fim, estendendo radialmente \tilde{a} e definindo

$$a(x) \doteq \tilde{a}(|x|) (\|\tilde{a}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |A_{r,R}|^{\frac{1}{p}})^{-1},$$

temos que a é um $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo.

Teorema 4.2.1 *Se a é um $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo, então $a \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso,*

$$\|a\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1.$$

Demonstração. Seja a um $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo. Então, existe um anel A tal que $\text{supp } a \subset A$.

Sejam $\frac{5}{4}\nu^* > \tilde{\nu} > 1$ como no Capítulo 2. Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx = \int_{A^{\nu^*}} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx + \int_{(A^{\nu^*})^c} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx < \infty,$$

independente de a .

Sejam $x \in A^{\nu^*}$, $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$, $\text{supp } \varphi \subset \widehat{A}$ e x pertencente ao centro do anel \widehat{A} . Então

$$\begin{aligned} |\langle a, \varphi \rangle| &= \left| \int_{A \cap \widehat{A}} a(y) \varphi(y) dy \right| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| dy \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq |A|^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.1.2 e para $0 < p \leq 1$ temos

$$\int_{A^{\nu^*}} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx \leq \frac{|A^{\nu^*}|}{|A|} \leq (\nu^*)^n. \quad (4.26)$$

Sejam $x \in (A^{\nu^*})^c$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$. Procedendo de modo análogo ao que foi feito na página 72 temos que $\ell(\widehat{A}) \gtrsim \|x\| - |x_A|$, no qual $|x_A|$ é o centro do intervalo $I_A = \pi_1(A)$ e \widehat{A} o anel tal que x pertence ao centro, $\text{supp } \varphi \subset \widehat{A}$ e $|\partial^\alpha \varphi| \leq c_\alpha \ell(\widehat{A})^{-n-|\alpha|}$. Fazendo a expansão de Taylor com resto de Lagrange para a função $\mathbb{R}_+ \ni w \mapsto \varphi^o(w)$ em torno de $|x_A|$, isto é,

$$\varphi^o(w) = \sum_{|\alpha| \leq N_p} \frac{\partial_w^{|\alpha|} \varphi^o(|x_A|)}{|\alpha|!} (w - |x_A|)^{|\alpha|} + R_{N_p+1}(w),$$

no qual $N_p = \lfloor n(\frac{1}{p} - 1) \rfloor$ e R_{N_p+1} é o resto de Lagrange, dado por

$$R_{N_p+1}(w) = \frac{\partial^{N_p+1} \varphi^o(\theta_w)}{(N_p+1)!} (w - |x_A|)^{N_p+1}, \quad (4.27)$$

para algum $\theta_w \in [w, |x_A|] \doteq (1-t)w + t|x_A|$, para $t \in [0, 1]$. Segue de (4.27) que

$$|R_{N_p+1}(w)| \leq c_{N_p} \frac{|w - |x_A||^{N_p+1}}{\ell(\widehat{A})^{n+N_p+1}}. \quad (4.28)$$

Combinando a Proposição 1.4.2 com (4.28) obtemos

$$\begin{aligned} |\langle a, \varphi \rangle| &= |\mathbb{S}^{n-1}| |\langle a^o(r), \varphi^o(r) r^{n-1} \rangle| \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| |\langle a^o(r), \varphi^o(r) r^{n-1} \rangle - \langle a^o, P_{N_p}(r) r^{n-1} \rangle| \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| |\langle a^o(r), R_{N_p+1}(r) r^{n-1} \rangle| \\ &\leq |\mathbb{S}^{n-1}| c_{N_p} \int_{\pi_1(A)} |a^o(r)| \frac{|r - |x_A||^{N_p+1}}{\ell(\widehat{A})^{n+N_p+1}} r^{n-1} dr \\ &\leq \tilde{c}_{N_p} |A|^{-\frac{1}{p}+1} \frac{\ell(A)^{N_p+1}}{2^{N_p+1}} \frac{1}{\||x| - |x_A|\|^{n+N_p+1}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Elevando a potência p a estimativa (4.29) e usando o Lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned} &\int_{(A^{\nu^*})^c} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx \\ &\leq 2^{-N_p-1} \tilde{c}_{N_p} |A|^{-1+p} \ell(A)^{(N_p+1)p} \int_{(A^{\nu^*})^c} \frac{1}{\||x| - |x_A|\|^{(n+N_p+1)p}} dx \\ &\leq 2^{-N_p} \tilde{c}_{N_p} |\mathbb{S}^{n-1}| |A|^{-1+p} \ell(A)^{(N_p+1)p} \int_{2^{j-1}\nu^*}^{\infty} r^{-p(n+N_p+1)+n-1} dr \\ &\leq \left(\frac{2^{-N_p} \tilde{c}_{N_p} |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{-p(n+N_p+1)+n}}{2^{-p(n+N_p+1)+n} p(n+N_p+1) - n} \right) |A|^{-1+p} \ell(A)^{(N_p+1)p-p(n+N_p+1)+n} \\ &\leq \left(\frac{2^{-N_p} \tilde{c}_{N_p} |\mathbb{S}^{n-1}| (\nu^*)^{-p(n+N_p+1)+n}}{2^{-p(n+N_p+1)+n} p(n+N_p+1) - n} \right) |A|^{-1+p} \ell(A)^{n(1-p)} \\ &\leq \left(\frac{2^{-N_p} \tilde{c}_{N_p} |\mathbb{S}^{n-1}| 2^{(n+N_p+1)+n}}{n 2^{-p(n+N_p+1)+n} (p(n+N_p+1) - n)} \right) |A|^{-1+p} |A|^{-p+1} \\ &\leq C_{N_p, n}, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_{(A^{\nu^*})^c} (\mathcal{M}_N a(x))^p dx \leq C_{n,p}. \quad (4.30)$$

Portanto, todo $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo pertence a $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é uniformemente limitados em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ devido a (4.26) combinado com (4.30). ■

O Teorema 4.2.1 também é válido para $\mathcal{H}_{rad}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ -átomos, isto é, os $\mathcal{H}_{rad}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ -átomos são uniformemente limitados em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$. A demonstração deste fato segue de modo análoga a feita no Teorema 4.2.1

4.3 Decomposição atômica radial

Esta seção é devotada ao principal resultado desta tese. A seguir enunciaremos o teorema de decomposição atômica radial para $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.3.1 (Decomposição atômica radial) *Sejam $0 < p \leq 1$ e $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Então, existem $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos $\{a_{j,k}\}_{j,k} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e escalares $\{\lambda_{j,k}\}_{j,k} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ tais que*

$$f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k} a_{j,k}, \quad \text{em } \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Reciprocamente, sejam $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^p(\mathbb{N})$ uma sequência de escalares e $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos. Então a série

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$$

converge em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para uma distribuição $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j \right\}, \quad (4.31)$$

no qual o ínfimo em (4.31) é tomado sobre todas as decomposições atômicas radiais de f .

A demonstração do Teorema 4.3.1, por ser longa, será dividida em três teoremas intermediários.

Teorema 4.3.2 *Sejam $0 < p \leq 1$ e $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Então, existem $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos $\{a_{j,k}\}_{j,k} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e escalares $\{\lambda_{j,k}\}_{j,k} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ tais que*

$$f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k} a_{j,k}, \quad \text{em } \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Note que, se

$$\Omega_l \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > 2^l\}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

então $\Omega_{l+1} \subset \Omega_l$ e $\cup_{l \in \mathbb{Z}} \Omega_l = \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 3.1.1 temos que $f = g^l + b^l$ com b^l e g^l ambas radiais. Além disso, temos as seguintes propriedades:

(i) $\Omega_l = \bigcup_{j,k} (A_{j,k}^l)^*$;

(ii) $|g^l| \leq c 2^l$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $b^l = \sum_{j,k} b_{j,k}^l$ e $\int_{\mathbb{R}^n} b_{j,k}^l(x) |x|^{|\alpha|} dx = 0, \quad \forall |\alpha| \leq \left\lfloor n \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right\rfloor$;

(iv)

$$\|b_{j,k}^l\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \int_{(A_{j,k}^l)^*} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx.$$

Vimos na demonstração do Teorema 4.1.1 que $b^l \rightarrow 0$ em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ quando $l \rightarrow +\infty$. Logo, pela Proposição 2.4.2 temos que $b^l \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, $g^l \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $l \rightarrow +\infty$. Além disso, quando $l \rightarrow -\infty$ temos por (ii) que $g^l \rightarrow 0$ uniformemente e, conseqüentemente, $g^l \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quando $l \rightarrow -\infty$ (note que, por (ii) temos g^l é localmente integrável). Por

outro lado,

$$s_M = \sum_{|l| \leq M} g^{l+1} - g^l = g^{-M+1} - g^{M+1}.$$

Fazendo $M \rightarrow +\infty$ e combinando com os argumentos anteriores, temos

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} (g^{l+1} - g^l), \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (4.32)$$

Note que $\Omega_l = \cup_{j,k} (A_{j,k}^l)^*$, $\sum_{j,k} \eta_{j,k}^l \equiv 1$ em $(A_{j,k}^l)^*$,

$$g^{l+1} - g^l = f - b^{l+1} - (f - b^l) = b^l - b^{l+1}$$

e $\text{supp } (g^{l+1} - g^l) \subset \Omega_{l+1} \cup \Omega_l \subset \Omega_l$. Disto segue que, podemos reescrever a igualdade (4.32) como

$$\begin{aligned} f &= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k} (g^{l+1} - g^l) \eta_{j,k}^l \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j,k} \lambda_{j,k,l} (\lambda_{j,k,l}^{-1} (g^{l+1} - g^l) \eta_{j,k}^l) \\ &\doteq \sum_{j,k,l} \lambda_{j,k,l} a_{j,k,l}, \end{aligned}$$

definindo $a_{j,k,l} \doteq \lambda_{j,k,l}^{-1} (g^{l+1} - g^l) \eta_{j,k}^l$ e $\lambda_{j,k,l} \doteq c 2^l |(A_{j,k}^l)^*|^{\frac{1}{p}}$ (no qual c é uma constante que será escolhida). Temos as seguintes conclusões:

(i)* $\text{supp } a_{j,k,l} \subset (A_{j,k}^l)^*$;

(ii)* $|a_{j,k,l}(x)| \leq \frac{|g^{l+1}(x) - g^l(x)|}{c 2^l |(A_{j,k}^l)^*|^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\tilde{c}(2^{l+1} + 2^l)}{c 2^l |(A_{j,k}^l)^*|^{\frac{1}{p}}} \leq |(A_{j,k}^l)^*|^{-\frac{1}{p}}$.

Em vista dos itens (i)* e (ii)* acima, para concluirmos a demonstração do teorema basta mostrar que as funções $a_{j,k,l}$ possuem momentos nulos o que, não necessariamente, acontece. Para resolver a falta de momentos, iremos refinar a soma tripla acima. Antes de iniciarmos o refinamento dos átomos é necessário ressaltarmos que não faremos distinção entre as funções $\eta_{j,k}$'s e as projeções $c_{j,k}$'s das suas partes radiais $\eta_{j,k}^o$ e $c_{j,k}^o$ para não sobrecarregarmos as notações

que usaremos no decorrer da demonstração do teorema.

Sejam

$$\psi_{j,k}^l(r) \doteq \frac{\eta_{j,k}^l(r)}{\int_{(I_{j,k}^l)^*} \eta_{j,k}^l(r) r^{n-1} dr}$$

e $\mathcal{H} \doteq L^2((I_{j,k}^l)^*, \psi_{j,k}^l r^{n-1} dr)$ o espaço de Hilbert munido pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_{(I_{j,k}^l)^*} f(r) \overline{g(r)} \psi_{j,k}^l(r) r^{n-1} dr.$$

Além disso, de modo análogo ao caso feito na demonstração do Teorema 3.1.1 em (3.23) temos $|\partial_r^{|\alpha|} \psi_{j,k}^l(r)| \leq c_{|\alpha|} \ell((I_{j,k}^l)^*)^{-n-|\alpha|}$.

Seja $\mathcal{P}_{j,k}^l \doteq \mathcal{P}_{j,k}$ a projeção usada na demonstração do Teorema 3.1.1 na página 81 em (3.35). Neste caso tínhamos que $c_{j,k}^l(x)$ era a extensão radial de $c_{j,k}^l(|x|) \doteq \mathcal{P}_{j,k}^l(f^o)(|x|)$ e, conseqüentemente, $c_{j,k}^{l+1}(|x|) \doteq \mathcal{P}_{j,k}^{l+1}(f^o)$. Consideremos \mathcal{H}_{N_p} o subespaço de \mathcal{H} formado pelos polinômios em \mathbb{R} de grau menor ou igual a $N_p \doteq \lfloor n(\frac{1}{p} - 1) \rfloor$ e $\mathcal{P}_{j,k}^l : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{N_p}$ a projeção de \mathcal{H} sobre \mathcal{H}_{N_p} a qual é linear e contínua. Então, para cada $g \in \mathcal{H}_{N_p}$ temos

$$f^o - \mathcal{P}_{j,k}^l(f^o) \perp \mathcal{H}_{N_p} \iff \langle f^o - \mathcal{P}_{j,k}^l(f^o), g \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (4.33)$$

Agora, seja $c_{(j,k),(s,t)}^l$ o único polinômio em \mathbb{R} de grau menor ou igual a N_p dado por

$$c_{(j,k),(s,t)}^l(r) \doteq \mathcal{P}_{s,t}^{l+1}[(f^o - c_{s,t}^{l+1})\eta_{j,k}^l](r), \quad (4.34)$$

no qual satisfaz (4.33). Estendendo radialmente o polinômio $c_{(j,k),(s,t)}^l$ temos $\sum_{j,k} c_{(j,k),(s,t)}^l(x) = 0$. De fato, usando o fato de que o operador $\mathcal{P}_{j,k}^l$ é

idempotente, isto é, $\mathcal{P}_{j,k}^l \circ \mathcal{P}_{j,k}^l = \mathcal{P}_{j,k}^l$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} c_{(j,k),(s,t)}^l &= \sum_{j,k} \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} [(f^o - c_{s,t}^{l+1}) \eta_{j,k}^l] \\
&= \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} \left[(f^o - c_{s,t}^{l+1}) \sum_{j,k} \eta_{j,k}^l \right] \\
&= \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} [(f^o - c_{s,t}^{l+1})] \\
&= \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} (f^o) - \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} (c_{s,t}^{l+1}) \\
&= \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} (f^o) - \mathcal{P}_{s,t}^{l+1} (f^o) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, se $(I_{j,k}^l)^* \cap (I_{s,t}^{l+1})^* = \emptyset$, então $c_{(j,k),(s,t)}^l = 0$. Com efeito,

$$c_{(j,k),(s,t)}^l = \langle f^o - c_{s,t}^{l+1}, \eta_{j,k}^l P(\cdot, |x|) \psi_{s,t}^{l+1} r^{n-1} \rangle = 0,$$

pois $\text{supp } \eta_{j,k}^l \cap \text{supp } \psi_{s,t}^{l+1} = \emptyset$ e, portanto, $\eta_{j,k}^l \cdot \psi_{s,t}^{l+1} \equiv 0$. Por outro lado, a família de anéis $\{(A_{j,k}^l)^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{S}}$ forma uma cobertura para Ω_l , e como $\Omega_{l+1} \subset \Omega_l$ temos em particular que $\{(A_{j,k}^l)^*\}_{(j,k) \in \mathfrak{S}}$ também é uma cobertura de Ω_{l+1} . Assim,

$$\begin{aligned}
g^{l+1} - g^l &= b^l - b^{l+1} \\
&= \sum_{j,k} b_{j,k}^l - \sum_{j,k} b_{j,k}^{l+1} \\
&= \sum_{j,k} (f - c_{j,k}^l) \eta_{j,k}^l - \sum_{j,k} (f - c_{j,k}^{l+1}) \eta_{j,k}^{l+1} \\
&= \sum_{j,k} (f - c_{j,k}^l) \eta_{j,k}^l - \sum_{j,k} \sum_{s,t} (f - c_{s,t}^{l+1}) \eta_{s,t}^{l+1} \eta_{j,k}^l + \sum_{j,k} \sum_{s,t} c_{(j,k),(s,t)}^l \eta_{s,t}^{l+1},
\end{aligned}$$

disto segue que podemos reescrever $g^{l+1} - g^l = \sum_{j,k} F_{j,k}^l$, no qual

$$F_{j,k}^l = (f - c_{j,k}^l) \eta_{j,k}^l - \sum_{s,t} (f - c_{s,t}^{l+1}) \eta_{s,t}^{l+1} \eta_{j,k}^l + \sum_{s,t} c_{(j,k),(s,t)}^l \eta_{s,t}^{l+1} \quad (4.35)$$

e por (4.32) temos

$$f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j,k} F_{j,k}^l. \quad (4.36)$$

Note que, pelo fato de que $\sum_{s,t} \eta_{s,t}^{l+1} = 1$ e $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^l \left(f - \sum_{s,t} f \eta_{s,t}^{l+1} \right) &= \eta_{j,k}^l f - \eta_{j,k} f \chi_{\Omega_{l+1}} \\ &= \eta_{j,k}^l (1 - \chi_{\Omega_{l+1}}) \\ &= \eta_{j,k}^l f \chi_{\Omega_l \setminus \Omega_{l+1}^c}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Combinando (4.35) com (4.37) podemos reescrever $F_{j,k}^l$ como sendo

$$F_{j,k}^l = \eta_{j,k}^l f \chi_{(\Omega_{l+1})^c} - c_{j,k}^l \eta_{j,k}^l + \sum_{s,t} c_{s,t}^l \eta_{s,t}^{l+1} \eta_{j,k}^l + \sum_{s,t} c_{(j,k),(s,t)}^l \eta_{s,t}^{l+1}. \quad (4.38)$$

Vamos estimar cada uma das parcelas em (4.38). De modo análogo ao caso feito em (3.38) temos

$$|c_{j,k}^l \eta_{j,k}^l| \leq c 2^l \quad (4.39)$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{s,t} c_{s,t}^l \eta_{s,t}^{l+1} \eta_{j,k}^l \right| \leq \sum_{s,t} |c_{s,t}^l \eta_{s,t}^{l+1} \eta_{j,k}^l| \leq c 2^l.$$

Por outro lado, se repetirmos a demonstração do item 1. do Teorema 3.1.1 temos $|f| \leq c 2^l$ em Ω_{l+1}^c o que implica em $|\eta_{j,k}^l f \chi_{(\Omega_{l+1})^c}| \leq c 2^l$.

Para estimarmos a última parcela restante, note que

$$c_{(j,k),(s,t)}^l = \underbrace{\langle f^o, P(\cdot, |x|) \eta_{j,k}^l \psi_{s,t}^{l+1} r^{n-1} \rangle}_{\doteq I_1} - \underbrace{\langle c_{s,t}^{l+1}, P(\cdot, |x|) \eta_{j,k}^l \psi_{s,t}^{l+1} r^{n-1} \rangle}_{\doteq I_2}. \quad (4.40)$$

Vamos estimar inicialmente I_2 . Com efeito, usando (4.39), o fato de que a família de intervalos $\{(I_{s,t}^l)^*\}_{s,t}$ tem a propriedade da interseção limitada juntamente com as estimativas $\|P(\cdot, |x|)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_0$, $\|\eta_{j,k}^l\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_1$ e o

Lema [2.1.2](#) obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle c_{s,t}^{l+1}, P(\cdot, |x|) \eta_{j,k}^l \psi_{s,t}^{l+1} r^{n-1} \rangle| &\leq \int_{(I_{s,t}^{l+1})^*} |c_{s,t}^{l+1}(r) P(r, |x|) \eta_{j,k}^l(r) \psi_{s,t}^{l+1}(r) r^{n-1} dr \\
&\leq c 2^l \int_{(I_{s,t}^{l+1})^*} r^{n-1} dr \left(\int_{(I_{s,t}^{l+1})^*} \eta_{s,t}^{l+1}(r) r^{n-1} dr \right)^{-1} \\
&\leq \tilde{c}_n 2^l \int_{(I_{s,t}^{l+1})^*} r^{n-1} dr |A_{s,t}^{l+1}|^{-1} \\
&\leq \tilde{c}_n 2^l.
\end{aligned}$$

Para estimarmos a parcela I_1 basta proceder de modo análogo ao caso feito no Teorema [3.1.1](#) nas páginas [82](#) e [82](#). Combinando as estimativas provadas obtemos que $|F_{j,k}^l| \leq c 2^l$. Como $f^o - \mathcal{P}_{j,k}^l(f) \perp \mathcal{H}_{N_p}$ e

$$F_{j,k}^l = (f - c_{j,k}^l) \eta_{j,k}^l - \left(\sum_{s,t} [(f - c_{s,t}^{l+1}) \eta_{j,k}^l - c_{(j,k),(s,t)}^l] \eta_{s,t}^{l+1} \right)$$

temos que $\int_{\mathbb{R}^n} F_{j,k}^l(x) |x|^{|\alpha|} dx = 0$ para todo $|\alpha| \leq N_p$, pois

$$\int_0^\infty b_{j,k}^l(r) r^{|\alpha|+n-1} = 0,$$

no qual $b_{j,k}(r) = (f^o(r) - c_{j,k}^l(r)) \eta_{j,k}^l(r)$. Além disso, por [\(4.34\)](#) temos

$$\int_0^\infty [(f^o(r) - c_{s,t}^{l+1}(r)) \eta_{j,k}^l(r) - c_{(j,k),(s,t)}^l(r)] \eta_{s,t}^{l+1}(r) r^{|\alpha|+n-1} dr = 0.$$

Afirmamos que, se $(A_{j,k}^l)^* \cap (A_{s,t}^{l+1})^* \neq \emptyset$, então existe uma constante $C > 0$ independente de j, k, s , e t tal que $\ell((A_{j,k}^l)^*) \geq C \ell((A_{s,t}^{l+1})^*)$. Com efeito, pelo Teorema [2.2.1](#) temos que $\ell((A_{s,t}^{l+1})^*) \approx d((A_{s,t}^{l+1})^*, \Omega_{l+1}^c)$ e, consequentemente, $\ell((A_{s,t}^{l+1})^*) \leq c_1 d((A_{s,t}^{l+1})^*, \Omega_{l+1}^c)$. Pela definição de distância temos

$$d((A_{s,t}^{l+1})^*, \Omega_{l+1}^c) = \inf \{ d(p, \Omega_{l+1}^c) : p \in (A_{s,t}^{l+1})^* \}.$$

Então,

$$d((A_{s,t}^{l+1})^*, \Omega_{l+1}^c) \leq d(p, \Omega_l^c),$$

pois sendo $l+1 \geq l$ temos $\Omega_{l+1} \subset \Omega_l$. Agora, como $\ell((A_{j,k}^l)^*) \approx d((A_{j,k}^l)^*, \Omega_l^c)$, devido ao Teorema [2.2.1](#), temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{p} \in (A_{j,k}^l)^*$ tal que

$$d(\tilde{p}, \Omega_l^c) \leq c_2 \ell((A_{j,k}^l)^*) + \varepsilon.$$

Assim, dado $p \in (A_{s,t}^{l+1})^* \cap (A_{s,t}^l)^*$ temos

$$\begin{aligned} d(p, \Omega_l^c) &\leq d(p, \tilde{p}) + d(\tilde{p}, \Omega_l^c) \\ &\leq c_1 \ell((A_{j,k}^l)^*) + d(\tilde{p}, \Omega_l^c) \\ &\leq c_1 \ell((A_{j,k}^l)^*) + c_2 \ell((A_{j,k}^l)^*) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Disto segue que,

$$\ell((A_{s,t}^{l+1})^*) \leq c_1 d(p, \Omega_l^c) \leq C \ell((A_{j,k}^l)^*) + \varepsilon, \quad \forall p \in (A_{s,t}^{l+1})^* \cap (A_{j,k}^l)^*.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, temos a demonstração da afirmação.

Definindo o anel $\tilde{A}_{j,k}^l$ como sendo o anel de mesmo centro que $(A_{j,k}^l)^*$ e de tamanho $c \ell((A_{j,k}^l)^*)$ no qual $c \doteq C^{-1}$. Segue desta construção, que o anel $\tilde{A}_{j,k}^l$ contém $(A_{j,k}^l)^*$ e todos os anéis $\ell((A_{s,t}^{l+1})^*)$ tais que $(A_{j,k}^l)^* \cap (A_{s,t}^{l+1})^* \neq \emptyset$. Portanto, $\text{supp } F_{j,k}^l \subset \tilde{A}_{j,k}^l$.

Para finalizarmos a demonstração da decomposição atômica, note que por [\(4.36\)](#) temos $f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j,k} F_{j,k}^l$ e definindo $a_{j,k,l} \doteq \lambda_{j,k,l}^{-1} F_{j,k}^l$ no qual $\lambda_{j,k,l} \doteq c 2^l |\tilde{A}_{j,k}^l|^{\frac{1}{p}}$ vemos que estes são os átomos procurados.

Por fim, para concluirmos a demonstração do teorema é necessário provarmos que $\sum_{j,k,l} |\lambda_{j,k,l}^l|^p < \infty$ e para isto é necessário o seguinte resultado (vide G. B. Folland [\[12\]](#), 6.17 e página 193).

Se F é uma função mensurável, então

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2^{lp} |\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 2^l\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} F^p(x) dx.$$

Segue do resultado citado acima e do Lema [2.1.2](#) que

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k,l} |\lambda_{j,k,l}|^p &= c \sum_{j,k,l} 2^{lp} |\tilde{A}_{j,k}^l| \\
&\lesssim \sum_{j,k,l} 2^{lp} |A_{j,k}^l| \\
&\lesssim \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2^{lp} |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}_N f(x) > 2^l\}| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_N f(x))^p dx \\
&\approx \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{j,k,l} |\lambda_{j,k,l}|^p \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p$ e isto conclui a demonstração do teorema. \blacksquare

Teorema 4.3.3 *Sejam $0 < p \leq 1$ e $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Então, existem escalares $\{\lambda_{j,k}\}_{j,k} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ e $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos $\{a_{j,k}\}_{j,k} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k} a_{j,k}, \quad \text{em } \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Pelo Corolário [4.1.1](#), existe uma sequência $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $f_0 \equiv 0$;
- (ii) $f_i \rightarrow f$ em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$;
- (iii) $\|f_i - f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq 2^{-i-1} \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p$.

Por (iii) temos, $f = \sum_{i=0}^\infty f_{i+1} - f_i$ converge uniformemente em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o Teorema [4.3.2](#) para $f_{i+1} - f_i$ temos que, existem $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos

$\{a_{j,k}^i\}_{j,k} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e escalares $\{\lambda_{j,k}^i\}_{j,k} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ tais que

$$f_{i+1} - f_i = \sum_{j,k} \lambda_{j,k}^i a_{j,k}^i, \quad \text{em } \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n).$$

Segue de (i) e (ii) que,

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j,k} \lambda_{j,k}^i a_{j,k}^i$$

e disto combinado com (iii) obtemos

$$\sum_{i,j,k} |\lambda_{j,k}^i|^p \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \|f_{i+1} - f_i\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq c \|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p}^p,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Teorema 4.3.4 *Sejam $0 < p \leq 1$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^p(\mathbb{N})$ uma seqüência de escalares e $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma seqüência de $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos. Então, a série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$$

converge em $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para uma distribuição $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso,

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\}.$$

Demonstração. Definamos $f_M(x) \doteq \sum_{j=1}^M \lambda_j a_j(x)$. Vamos mostrar que, $f_M \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e seja $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$, pelo Teorema 4.2.1 e do fato de $0 < p \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |\langle f_M, \varphi \rangle|^p &= \left| \left\langle \sum_{j=1}^M \lambda_j a_j, \varphi \right\rangle \right|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^M |\langle a_j, \varphi \rangle|^p |\lambda_j|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^M (\mathcal{M}_N a_j(x))^p |\lambda_j|^p \\ &\leq c_{n,p} \sum_{j=1}^M |\lambda_j|^p. \end{aligned}$$

Disto segue que,

$$(\mathcal{M}_N f_M(x))^p \leq c_{n,p} \sum_{j=1}^M |\lambda_j|^p < \infty.$$

Segue da conclusão acima que se $M \leq \tilde{M}$ então

$$\|f_M - f_{\tilde{M}}\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \lesssim \sum_{j=M+1}^{\tilde{M}} |\lambda_j|^p < \infty.$$

Dada $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \psi^{rad} \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(\cdot)$. Então,

$$|\langle f_M, \psi \rangle - \langle f_{\tilde{M}}, \psi \rangle|^p \lesssim \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_M - f_{\tilde{M}}\|_{\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)}^p \lesssim \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{j=M+1}^{\tilde{M}} |\lambda_j|^p \rightarrow 0,$$

quando $M, \tilde{M} \rightarrow \infty$. Logo, para cada $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ a sequência $\{\langle f_j, \psi \rangle\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e sendo $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ completo, existe $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \rightarrow f$ em $\mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \quad \text{em } \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n),$$

consequentemente $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$. ■

4.4 Partições de anéis em \mathbb{R}^n que preservam medida

Seja $A_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\} \subset \mathbb{R}^n$ e σ a medida de área definida sobre a esfera \mathbb{S}^{n-1} . Afirmamos que é possível dividir o anel $A_{r,R}$ em K -partes com cada uma destas partes possuindo a mesma medida (induzida na esfera) e com diâmetros comparáveis. De fato, em [18] o autor provou que dado $K \geq 1$ é possível encontrar uma partição $S = \{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ da esfera \mathbb{S}^{n-1} a qual cada elemento $S_l \in P$ é um conjunto fechado e os quais possuem a mesma medida de área $\sigma \doteq \sigma_{n-1}$ (σ como na Definição 1.1.12)

$$\sigma(S_l) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{\#S}, \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (4.41)$$

no qual $\#S = K$ indica a cardinalidade de S e $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Além disso, cada um dos elementos que compõem a partição da esfera tem fronteira de área nula, isto é, $\sigma(\partial S_l) = 0$, para todo $l = 1, 2, \dots, K$. Em adicional, os elementos que compõem a partição da esfera \mathbb{S}^{n-1} possuem diâmetro limitado por $C K^{-\frac{1}{n-1}}$, sendo $C > 0$ uma constante independente de S_l e K vide [18], isto é,

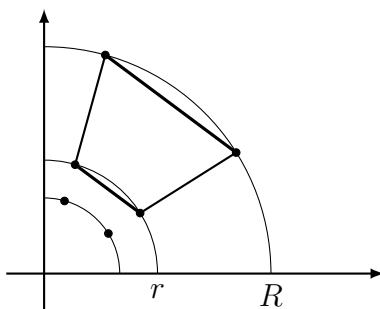
$$\text{diam}(S_l) \leq C K^{-\frac{1}{n-1}}, \quad l = 1, 2, \dots, K. \quad (4.42)$$

Portanto, uma vez obtida a partição P da esfera \mathbb{S}^{n-1} projetamos radialmente cada um dos elementos de $S_l \in P$ no anel $A_{r,R}$. Assim, obtemos uma partição $L = \{L_1, L_2, \dots, L_K\}$ de $A_{r,R}$ com estas partes possuindo medidas iguais entre si. Note que

$$L_j = \left\{ x \in A_{r,R} : \frac{x}{|x|} \in S_j \right\}.$$

É claro que, para todo $l = 1, 2, \dots, K$ tem-se de (4.41) que

$$|L_l| = \int_{L_l \cap \mathbb{S}^{n-1}} \int_r^R \rho^{n-1} d\rho d\sigma = \sigma(L_l) \frac{(R^n - r^n)}{n} = \sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \frac{(R^n - r^n)}{nK}. \quad (4.43)$$

Figura 4.1: Diâmetro da porção S_l

Para melhor ilustrarmos esta partição, vamos considerar primeiramente o caso em que $n = 2$. Seja S_l um elemento da partição P da esfera \mathbb{S}^1 e suponhamos que $\text{diam}(S_l)$ seja dado pelo diâmetro do trapézio como na Figura 4.1. Escolhendo $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} \leq K \leq 2 \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2},$$

temos que

$$K \approx \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} = \frac{R + r}{R - r}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{K} \approx \frac{R - r}{R + r} = \frac{\ell(A_{r,R})}{R + r}. \quad (4.44)$$

Note que $h = r \text{diam}(S_l)$, em que $\text{diam}(S_l)$ denota o diâmetro de S_l e $S_l \in P$. Segue de (4.44) e por propriedade da geometria do trapézio (vide a Figura 4.2) que

$$d \leq \ell(A_{r,R}) + h \leq \ell(A_{r,R}) + r \frac{\ell(A_{r,R})}{R + r} \leq 2\ell(A_{r,R}). \quad (4.45)$$

Portanto, por (4.45) segue que a seção do anel $A_{r,R}$ está contida numa bola de raio $2\ell(A_{r,R})$.

De modo geral, podemos estender o argumento anterior para todo $n > 2$.

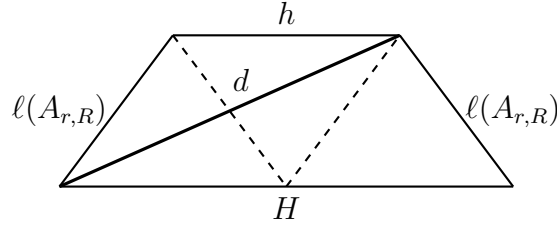


Figura 4.2: Diâmetro do trapézio

De fato, seja S_l um elemento da partição P da esfera \mathbb{S}^{n-1} e suponhamos que $\text{diam}(S_l)$ seja dado pelo comprimento do segmento $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ no qual os pontos final e inicial $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ pertencem a S_l

$$\text{diam}(S_l) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \quad (4.46)$$

Note que, o segmento de reta γ projetado sobre uma esfera centrada na origem e de raio $r > 0$ nos dará um novo segmento de reta $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\zeta(t) \doteq r\gamma(t)$ a qual seu comprimento será igual ao diâmetro da projeção de S_l sobre a esfera de raio r . De fato, por (4.46) temos

$$\|\zeta\| = \|r\gamma\| = \int_0^1 |r\gamma'(t)| dt = r \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = r \text{diam}(S_l), \quad (4.47)$$

como queríamos demonstrar.

Por outro lado, escolhendo $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{R^n - r^n}{(R - r)^n} \leq K \leq 2 \frac{R^n - r^n}{(R - r)^n} \quad (4.48)$$

temos que existe uma partição $\{S_l\}_{l=1}^K$ da esfera \mathbb{S}^{n-1} tal que

$$\sigma(S_l) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{K} \quad \text{e} \quad \text{diam}(S_l) \lesssim \left(\frac{R^n - r^n}{(R - r)^n} \right)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Segue de (4.48) que projetando radialmente cada S_l sobre o anel $A_{r,R}$ obtemos

uma partição $\{L_l\}_{l=1}^K$ do anel $A_{r,R}$ tal que

$$\begin{aligned} |L_l| &= \sigma(L_l) \frac{(R^n - r^n)}{n} \\ &= \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) (R^n - r^n)}{K n} \\ &\geq c_n (R - r)^n, \quad l = 1, 2, \dots, K, \end{aligned}$$

no qual $c_n \doteq \frac{\sigma(\mathbb{S}^{n-1})}{2n}$.

Agora, vamos provar que para cada $l = 1, 2, \dots, K$, existe uma bola $B(x_j, 2\ell(A_{r,R}))$ tal que $L_j \subset B \doteq B(x_j, \ell(A_{r,R}))$ e $x_j \in L_j$ é o seu centro de massa. De fato, note que

$$\begin{aligned} \left(\frac{R^n - r^n}{(R - r)^n} \right)^{-\frac{1}{n-1}} &= \left(\frac{(R - r)(R^{n-1} + rR^{n-2} + \dots + r^{n-1})}{(R - r)^n} \right)^{-\frac{1}{n-1}} \\ &= \frac{R - r}{(R^{n-1} + rR^{n-2} + \dots + r^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \\ &\leq \frac{\ell(A_{r,R})}{\max\{R, r\}} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{diam}(S_l) \lesssim \left(\frac{R^n - r^n}{(R - r)^n} \right)^{-\frac{1}{n-1}} \lesssim \frac{\ell(A_{r,R})}{\max\{R, r\}}. \quad (4.49)$$

Denotando por \tilde{S}_l a projeção de S_l para cada $l = 1, \dots, K$, sobre a esfera centrada na origem e de raio $r > 0$ temos por (4.47) e (4.49) que

$$\text{diam}(\tilde{S}_l) = r \text{diam}(S_l) \lesssim \ell(A_{r,R}). \quad (4.50)$$

Analogamente, denotando por \hat{S}_l a projeção de S_l para cada $l = 1, \dots, K$, sobre a esfera centrada na origem e de raio $R > 0$ temos

$$\text{diam}(\hat{S}_l) \lesssim \ell(A_{r,R}). \quad (4.51)$$

Portanto, combinando (4.50) com (4.51) e denotando a projeção radial de S_l sobre o anel $A_{r,R}$ por L_l para $l = 1, 2, \dots, K$, obtemos que $L_l \subset$

$B(x_l, 2C\ell(A_{r,R}))$.

Teorema 4.4.1 *Se $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, então $f \in H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para $0 < p \leq 1$. A inclusão $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $f = a$ seja um $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo. Então, existem $0 \leq r < R < \infty$ de forma que $\text{supp } a \subset A_{r,R}$ e a satisfaz as propriedades da Definição 4.2.1. Escolhendo K como em (4.48), existem uma partição $\{L_j\}_{j=1}^K$ do anel $A_{r,R}$ e uma constante positiva C , independente de r e R dada por (4.42), tal que tal que $L_j \subset B_j \doteq B(x_j, 2C\ell(A_{r,R}))$ com $x_j \in L_j$ sendo seu centro de massa e $|L_j| \geq \frac{|B|}{c_n}$ no qual $c_n = 2nC$ é independente de r e R . Usando a propriedade (iv) da Definição 4.2.1 de átomo radial, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|x|^{|\alpha|} dx \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_r^R a^\circ(r)r^{n-1+|\alpha|} dr, \quad \forall |\alpha| \leq \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right] \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_r^R a^\circ(r)r^{n-1+|\alpha|} dr = 0. \quad (4.52)$$

Definindo $a_j \doteq a\chi_{L_j}$ em que χ_{L_j} é a função característica da porção L_j , temos por (4.52) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} a(x)x^\alpha dx &= \int_{L_j \cap \mathbb{S}^{n-1}} \int_r^R a^\circ(r)r^{n-1}(r\sigma)^\alpha dr d\theta \\ &= \int_{L_j \cap \mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha \int_r^R a^\circ(r)r^{n-1+|\alpha|} dr d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|a_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{|A_{r,R}|^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{(K|L_j|)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{K^{\frac{1}{p}}|L_j|^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{c_n^{\frac{1}{p}}}{K^{\frac{1}{p}}|B|^{\frac{1}{p}}}.$$

Sejam $\tilde{a}_j \doteq a_j K^{\frac{1}{p}} c_n^{-\frac{1}{p}}$ e $\lambda_j \doteq K^{-\frac{1}{p}} c_n^{\frac{1}{p}}$. Então, \tilde{a}_j é um (p, ∞) -átomo,

$$a = \sum_{j=1}^K a_j = \sum_{j=1}^K \lambda_j \tilde{a}_j \quad (4.53)$$

e $\sum_{j=1}^K |\lambda_j|^p = c_n < \infty$. Segue de (4.53) que o $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomo a tem uma decomposição atômica finita em (p, ∞) -átomos e, conseqüentemente, $a \in H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos agora o caso geral. Se $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, então temos pelo Teorema 4.3.3 que, existem $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ -átomos $\{a_j\}_j$ e escalares $\{\lambda_j\}_j \subset \ell^p(\mathbb{N})$ tais que

$$f = \sum_j \lambda_j a_j \quad em \quad \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n).$$

Pelo caso anterior, temos que, para cada j que $\lambda_j a_j = \lambda_j \sum_{k=1}^{K_j} \tilde{a}_k^j \alpha_k^j$ sendo \tilde{a}_k^j um (p, ∞) -átomo e $\sum_{k=1}^{K_j} \alpha_k^j = c_n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, segue pelo Teorema 1.2.3 e de (4.53) que

$$|\lambda_j|^p \|a_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \tilde{c}_{n,p} |\lambda_j|^p \sum_{k=1}^{K_j} |\alpha_k^j|^p \leq c_{n,p} |\lambda_j|^p$$

Portanto, $f \in H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \tilde{c}_{n,p} \sum_j |\lambda_j|^p < \infty. \quad (4.54)$$

Além disso, segue de (4.54) que a inclusão $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua. ■

4.5 Caracterização do espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ segundo R. R. Coifman e G. Weiss

O resultado enunciado a seguir é devido a R. R. Coifman e G. Weiss publicado em [7]. Eles afirmam encontrar uma caracterização das funções radiais que pertencem a $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.5.1 (Corolário 2.27, [7]) *Suponha que f seja uma função definida em $[0, \infty)$, então $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(|x|) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $[0, \infty) \ni r \mapsto f(r)r^{n-1} \in H^1(\mathbb{R})$.*

Iremos acompanhar os passos da demonstração da implicação

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(|x|) \in H^1(\mathbb{R}^n) \implies [0, \infty) \ni r \mapsto f(r)r^{n-1} \in H^1(\mathbb{R}) \quad (4.55)$$

Demonstração. Suponhamos que $f \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$. Segue pelo Teorema [1.2.5], que existem $(1, \infty)$ -átomos $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ (não necessariamente funções radiais) e $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^1(\mathbb{N})$ tais que $f = \sum_j \lambda_j a_j$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Definamos, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$A_j(|x|) \doteq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a_j(|x|\theta) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.56)$$

e afirmamos que A_j é um múltiplo (independente de j) de um $(1, \infty)$ -átomo radial no sentido da Definição [4.2.1].

Para mostrarmos esta afirmação fixemos $j \in \mathbb{N}$ e denotamos $a = a_j$ e $A = A_j$. Primeiramente notemos que A possui média zero, pois o mesmo vale para o $(1, \infty)$ -átomo a . De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} A(x) dx &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty A(r) r^{n-1} dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta) d\theta \right) r^{n-1} dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta) r^{n-1} d\theta dr \\ &= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para mostrarmos a condição de tamanho, isto é, a condição (ii) dada pela Definição [4.2.1] dividiremos a demonstração nos casos em que $0 \in \text{supp } a$ e $0 \notin \text{supp } a$. Suponhamos inicialmente que $0 \in \text{supp } a \subset B(x_0, d)$ em que $B(x_0, d)$ é a bola dada pela Definição [1.2.5] satisfazendo (i) e (ii). Neste caso,

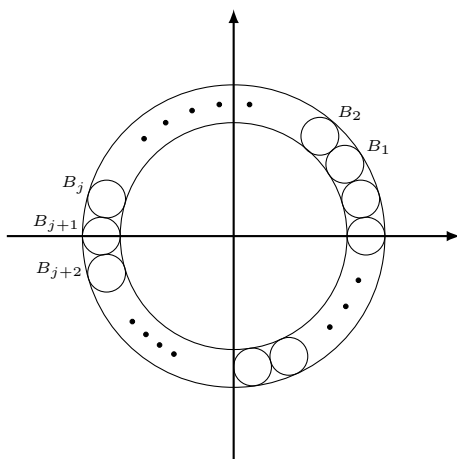


Figura 4.3: $\text{supp } a^j \cap \text{supp } a^k = \emptyset, j \neq k$

o suporte de $A(x)$ está contido no anel $A(0, 2d) = B(0, 2d)$ e vale

$$|A(x)| \leq \|a\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\theta \leq d^{-n} = 2^n \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|B(0, 2d)|}. \quad (4.58)$$

Agora, seja $B(x_0, d)$ a bola que contém o suporte de a e satisfaz as condições (ii) da Definição 1.2.5 e tal que $0 \notin \text{supp } a$. Neste caso, considere r a distância de $B(x_0, d)$ até a origem, $\ell = 2d$ e $R = r + \ell$. Assim o suporte de A está contido no anel $A_{r,R}$. Agora escolhamos um natural $K \geq C \lceil \frac{r}{d} \rceil^{n-1}$ e rotações ρ_1, \dots, ρ_K (veja a Figura 4.3 a qual representa este fato em \mathbb{R}^2) de forma que os suportes de $a^l \doteq a \circ \rho_l$ são conjuntos disjuntos dois a dois. Observamos que

$$A(x) = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{l=1}^K a^l(|x|\theta) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.59)$$

A partir daí, obtém-se segundo R. R. Coifman e G. Weiss em [7] a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|A(x)| &\leq \frac{1}{K} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{l=1}^K \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \text{supp } a^l(|x|\cdot)} d\theta \\
&\leq \frac{1}{K} \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|B(x_0, d)|} = \frac{1}{K} d^{-n} \\
&\leq C \left(\frac{d}{r}\right)^{n-1} d^{-n} = C \frac{1}{dr^{n-1}} \\
&\leq C \frac{1}{(r+\ell)^n - r^n} \quad (\diamond) \\
&\leq c_n \frac{1}{|A_{r,R}|}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

no qual $\text{supp } A \subset A_{r,R}$ e $c_n \doteq \frac{C|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}$.

A desigualdade (\diamond) acima só é possível se $\ell = 2d = O(r)$ (ordem de r) e não é válida para $\ell \gg r$. De fato, primeiramente note que, se $f = \sum_{j=1}^\infty \beta_j a_j$ com $\{\beta_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^1(\mathbb{N})$ e $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ são $(1, \infty)$ -átomos, então podemos redefinir via translação e dilatação os $(1, \infty)$ -átomos a_j 's de modo que, $\text{supp } a_1 \subset B(x_1, d_1)$, $\text{supp } a_2 \subset B(x_2, 2d_1)$, \dots , $\text{supp } a_k \subset B(x_k, kd_1)$ e assim sucessivamente. Agora, queremos comparar as expressões

$$\frac{1}{(r+\ell)^n - r^n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ell r^{n-1}}. \tag{4.61}$$

Caso $\ell = O(r)$, pelo teorema binomial, temos que

$$(r+\ell)^n - r^n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \ell^j r^{n-j} = \ell \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \ell^{j-1} r^{n-j} \leq C \ell r^{n-1}. \tag{4.62}$$

Note que, por (4.61) e (4.62) temos

$$\frac{(r+\ell)^n - r^n}{\ell r^{n-1}} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \left(\frac{\ell}{r}\right)^{j-1}$$

a qual tende para o infinito quando $\ell \rightarrow \infty$ e r permanece limitado, mostrando que (\diamond) não vale neste caso.

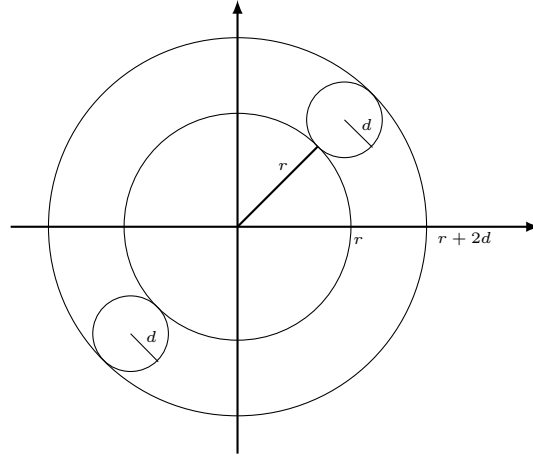


Figura 4.4: Rotações simétricas

Para consertarmos o problema acima, basta procedermos da seguinte forma: Se $\ell < r$, então a demonstração apresentada por R. R. Coifman e G. Weiss em [7] é válida e (\diamond) se verifica. Caso contrário, basta escolhermos $K = 2$, isto é, quando $r < \ell$ basta fixarmos uma rotação ρ_1 (a qual é sempre possível encontrar) e definirmos $\rho_2 \doteq -\rho_1$. Note que a^1 e a^2 tem suporte disjuntos, mesmo quando r está fixado e $\ell \rightarrow +\infty$ (veja a Figura 4.4). Assim,

$$\begin{aligned}
 |A(x)| &\leq \frac{1}{2} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{l=1}^2 \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \text{supp } a^l(|x|\cdot)} d\theta \\
 &\leq \frac{1}{2} \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|B(x_0, d)|} \\
 &= \frac{2^{n-1}}{\ell^n} \\
 &\leq \left(\int_r^{r+\ell} \rho^{n-1} d\rho \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

desde que $r < \ell$, pois

$$\int_r^{r+\ell} \rho^{n-1} d\rho \leq (r + \ell)^{n-1} \ell \leq 2^{n-1} \ell^n.$$

Assim, definindo $\tilde{A} \doteq (2^{(2n-2)} |\mathbb{S}^{n-1}|)^{-1} A$, temos \tilde{A} um $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ -átomo.

Agora, vamos mostrar que $f \in \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, como provado anteriormente \tilde{A} é um $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ -átomo no sentido da Definição 4.2.1. Por fim, note que dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{c,N,rad}^\infty(x)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle a_j, \varphi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) \varphi(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a_j(r\theta) d\theta \varphi^o(r) r^{n-1} dr \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j 2^{(2n-2)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \tilde{A}_j^o(r) \varphi^o(r) r^{n-1} dr d\theta \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j 2^{(2n-2)} \langle \tilde{A}_j, \varphi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_j, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.3.4 segue que $f \in \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora, vamos mostrar que a inclusão $H_{rad}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Com efeito, se $f \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ temos pelo que foi provado anteriormente que, existem escalares $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^1(\mathbb{N})$ e $\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ -átomos $\{\tilde{A}_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$f = \sum_j \tilde{\lambda}_j \tilde{A}_j, \quad \text{em } \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 4.2.1 e pelo fato de $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^\infty \subset \ell^1(\mathbb{N})$ temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)} &\leq c_n \sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{\lambda}_j| \\
&= \frac{c_n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \sum_{l=1}^{\infty} |\lambda_l| \\
&\leq \tilde{c}_n \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que a inclusão $H_{rad}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{H}_{rad}^1(\mathbb{R}^n)$ é contínua. \blacksquare

Uma pergunta que podemos fazer em função do Teorema 4.4.1 é a seguinte: se $f \in H_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, então $f \in \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$?

O questionamento anterior é uma pergunta em aberto, entretanto iremos realizar alguns comentários e observações.

1. Para uma possível adaptação dos argumentos de R. R. Coifman e G. Weiss é necessário resultados sobre empacotamentos de esferas em \mathbb{R}^n , isto é, se \mathbb{S}_R^{n-1} é uma esfera de raio $R > 0$ quantas esferas \mathbb{S}_r^{n-1} de raio $r > 0$ tangenciam \mathbb{S}_R^{n-1} de modo que as esferas de raio r sejam todas disjuntas?
2. Caso $\frac{n}{n+1} < p < 1$, a demonstração seguirá como no caso $p = 1$, desde que seja possível escolher $K \geq C \left[\frac{r}{d} \right]^{\frac{n-1}{p}}$ transformações ortogonais $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K$ tais que suporte dos átomos $a^l \doteq a \circ \rho_l$ sejam dois a dois disjuntos. Note que a condição de momentos para $\frac{n}{n+1} < p < 1$ segue análogo como no caso $p = 1$.
3. No caso em que $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$ os átomos têm condição de momentos de ordem $|\alpha| = \lfloor n(\frac{1}{p} - 1) \rfloor \geq 1$. Procedendo de modo análogo a demonstração de R. R. Coifman e G. Weiss em (4.56) podemos definir um “átomo” radial a partir do (p, ∞) -átomo a . Afirmamos que este “átomo” radial A obtido via (4.56) possui momentos radiais de ordem par nulos, isto é, se $2|\gamma| \leq |\alpha|$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x) |x|^{|\gamma|} dx = 0.$$

De fato, inicialmente note que,

$$\theta \in \mathbb{S}^{n-1} \iff |\theta|^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_n^2 = 1$$

e consequentemente $|\theta|^k = 1$. Usando coordenadas esféricas e o fato de

a ser um (p, ∞) -átomo, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|x|^{|\gamma|} dx &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty A^\circ(r)r^{2k+n-1} dr d\theta \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta)r^{2k}r^{n-1} dr d\theta \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta)(\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2)^k r^{2k}r^{n-1} dr d\theta \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} a(r\theta) \sum_{|\gamma|=k} \binom{k}{\alpha} ((r\theta_1)^2, \dots, (r\theta_n)^2)^\gamma r^{n-1} dr d\theta \quad (\clubsuit) \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty a(r\theta)(r\theta)^\alpha r^{n-1} dr d\theta \\
&= |\mathbb{S}^{n-1}| \sum_{|\gamma|=k} \binom{k}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^{2\gamma} dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A técnica utilizada para provar que A tem momentos nulos de ordem par não é aplicável quando os momentos são de ordem ímpar, pois a igualdade em (\clubsuit) não é válida. Pelo fato da técnica acima não valer para momentos de ordem ímpar e também devido a possibilidade do teorema de empacotamento de esferas ser falho para K grande, isto é, $K \geq \left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{n-1}{p}} \rightarrow +\infty$ quando $r > d$ e $p \rightarrow 0$, nos faz acreditar que a inclusão $H_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ não seja válida para o caso $0 < p \leq \frac{n}{n+1}$.

4.6 Perguntas abertas

Algumas perguntas naturais surgem após a conclusão do Teorema [4.3.3](#) e as listaremos a seguir.

1. É possível encontrar uma decomposição atômica para $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$, no qual os átomos sejam (p, q) -átomos radiais?
2. É possível encontrar uma decomposição atômica para $f \in \mathcal{D}'_{rad}(\mathbb{R}^n)$, no qual os átomos sejam \mathcal{C}^∞ ?

3. Se $0 < p \leq 1$, qual o espaço dual dos espaços de Hardy radial $\mathcal{H}_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$?

Fórmula Faa di Bruno e aplicações

O principal objetivo deste apêndice é apresentar uma aplicação das fórmulas de Faa di Bruno a qual nos é útil para concluirmos algumas demonstrações de resultados que apresentamos no texto. As demonstrações das fórmulas de Faa di Bruno podem ser encontradas nos artigos [1] e [8].

Teorema A.0.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Sejam $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^p)$ tal que $g(U) \subset \Omega$ e definamos h como sendo a composição $f \circ g \doteq h$. Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, temos que*

$$\partial^\alpha h(x) = \sum_{\mathcal{S}_\alpha} (\partial^\kappa f)(g(x)) \alpha! \frac{(\partial^{\delta_1} g(x))^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{|\beta_1|}} \cdots \frac{(\partial^{\delta_\ell} g(x))^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{|\beta_\ell|}}, \quad (\text{A.1})$$

no qual $\kappa = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell$ e \mathcal{S}_α é o conjunto $\{\delta_1, \dots, \delta_\ell\}$ de todos os elementos distintos de $\mathbb{Z}_+^p \setminus \{0\}$ e todos os $(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \in (\mathbb{Z}_+^p \setminus \{0\})^\ell$, $\ell = 1, 2, 3, \dots$, tais que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} |\beta_j| \delta_j.$$

Queremos aplicar a fórmula Faa di Bruno, dada por (A.1), no caso especial em que $p = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}$, neste caso a fórmula Faa di Bruno pode ser simplificada:

Teorema A.0.2 *Sejam $\Omega = \mathbb{R}$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e definamos por h a composição $f \circ g \doteq h$. Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, temos que*

$$\partial^\alpha h(x) = \alpha! \sum_{\mathcal{S}_\alpha} f^{(\kappa)}(g(x)) \frac{(\partial^{\delta_1} g(x))^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{\beta_1}} \cdots \frac{(\partial^{\delta_\ell} g(x))^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{\beta_\ell}}, \quad (\text{A.2})$$

no qual $k = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell$ and \mathcal{S}_α é o conjunto $\{\delta_1, \dots, \delta_\ell\}$ de todos os elementos distintos de $\mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ e de todos os $(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \in (\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\})^\ell$, $\ell = 1, 2, 3, \dots$, tais que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \delta_j. \quad (\text{A.3})$$

Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e defina

$$f(t) \doteq \varphi(b(a-t)), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$$

e

$$g(x) \doteq |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Note que

$$\|D^\kappa f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|D^\kappa \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} b^\kappa = c_\kappa b^\kappa, \quad (\text{A.4})$$

no qual $D^\kappa \doteq \left(\frac{d}{dx}\right)^\kappa \doteq f^{(\kappa)}$ desde que $x \in \mathbb{R}$.

Para obter estimativas para a função g , aplicaremos a fórmula Faa di Bruno simplificada dada pelo Teorema (A.0.2).

Lema A.0.1 *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe uma constante $c_\alpha > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq c_\alpha |x|^{1-|\alpha|} \quad (\text{A.5})$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que $g(x) = f_1(g_1(x))$ em que

$$g_1(x) \doteq \sum x_j^2, \quad \text{e} \quad f_1(t) \doteq t^{\frac{1}{2}}.$$

Pela fórmula Faa di Bruno, dada por (A.2), obtemos

$$\partial^\alpha g(x) = \alpha! \sum_{\mathcal{S}_\alpha} (f_1^{(\kappa)})(g_1(x)) \frac{(\partial^{\delta_1} g_1(x))^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{\beta_1}} \cdots \frac{(\partial^{\delta_\ell} g_1(x))^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{\beta_\ell}}, \quad (\text{A.6})$$

e como g_1 é um polinômio de grau 2, os únicos valores de δ_j que irão contribuir para a fórmula acima na decomposição descrita em (A.3) são aqueles em que $\delta_j = 2e_k$ ou $\delta_j = e_k$. Temos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(x)| &\leq \alpha! \sum_{\mathcal{S}_\alpha} C_k |x|^{1-2k} \frac{|x|^{(2-|\delta_1|)\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{\beta_1}} \cdots \frac{|x|^{(2-|\delta_\ell|)\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{\beta_\ell}} \\ &\leq C_\alpha \sum_{\mathcal{S}_\alpha} C_k |x|^{1-2k} \frac{|x|^{2(\beta_1+\cdots+\beta_\ell)-(|\delta_1|\beta_1+\cdots+|\delta_\ell|\beta_\ell)}}{\beta_1! \times \cdots \times \beta_\ell!} \\ &\leq C_\alpha |x|^{1-|\alpha|}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

como queríamos demonstrar. ■

Como uma consequência, podemos estimar as derivadas de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ da função $h(x) \doteq (f \circ g)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Corolário A.0.1 *Seja $N \in \mathbb{N}$ fixado. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe uma constante $c_\alpha > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha h(x)| \leq c_\alpha \sum_{\kappa=1}^{|\alpha|} b^\kappa |x|^{\kappa-|\alpha|}, \quad \forall |\alpha| \leq N \quad (\text{A.8})$$

Demonstração. Pela fórmula Faa di Bruno, dada por (A.2), obtemos

$$\partial^\alpha h(x) = \alpha! \sum_{\mathcal{S}_\alpha} f^{(\kappa)}(|x|) \frac{(\partial^{\delta_1} g(x))^{\beta_1}}{\beta_1! \delta_1!^{\beta_1}} \cdots \frac{(\partial^{\delta_\ell} g(x))^{\beta_\ell}}{\beta_\ell! \delta_\ell!^{\beta_\ell}}, \quad (\text{A.9})$$

no qual $k = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell$ and \mathcal{S}_α é o conjunto $\{\delta_1, \dots, \delta_\ell\}$ de todos os elementos distintos de $\mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ e de todos os $(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \in (\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\})^\ell$, $\ell = 1, 2, 3, \dots$,

tais que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \delta_j. \quad (\text{A.10})$$

Combinando (A.9) com o resultado obtido no Lema A.0.1 obtemos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha h(x)| &\leq c_\alpha \sum_{\mathcal{S}_\alpha} |f^{(\kappa)}(|x|)| |x|^{(1-|\delta_1|)|\beta_1|} \dots |x|^{(1-|\delta_\ell|)|\beta_\ell|} \\ &\leq c_\alpha \sum_{\kappa=1}^{|\alpha|} |f^{(\kappa)}(|x|)| |x|^{\kappa-|\alpha|}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

em que $c = \max_{1 \leq j \leq \ell} \{c_{\delta_j}\}$ é finito, pois a quantidade de ℓ 's é finito uma vez que $|\alpha| \leq N$. Além disso, a quantidade de elementos que compõem \mathcal{S}_α os quais satisfazem (A.10) é limitado por $|\alpha|$ e isto justifica a estimativa do lado direito de (A.11). Usando estimativa em (A.4) combinada com a estimativa (A.11) obtemos

$$|\partial^\alpha h(x)| \leq c_\alpha \sum_{\kappa=1}^{|\alpha|} b^\kappa |x|^{\kappa-|\alpha|}, \quad \forall |\alpha| \leq N.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] E. Bierstone e P. D. Milman. Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes. *Selecta Math. (N.S.)*, 10(1):1–28, 2004.
- [2] A. Bonami, J. Feuto e S. Grellier. Endpoint for the div-curl lemma in Hardy spaces. *Publ. Mat.*, 54(2):341–358, 2010.
- [3] H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. *Universitext. Springer*, New York, 2011.
- [4] D. L. Burkholder, R. F. Gundy e M. L. Silverstein. A maximal function characterization of the class H^p . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157:137-153, 1971.
- [5] A. P. Calderon e A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88:85-139, 1952.
- [6] R. R. Coifman. A real variable characterization of H^p . *Studia Math.*, 51:269-274, 1974.
- [7] R. R. Coifman e G. Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(4):569-645, 1977.
- [8] G. M. Constantine e T. H. Savits. A multivariate Faà di Bruno formula with applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(2):503-520, 1996.
- [9] P. L. Duren. Theory of H^p spaces. *Pure and Applied Mathematics.*, Vol. 38. Academic Press, New York-London, 1970.

-
- [10] C. Fefferman. Characterizations of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:587-588, 1971.
- [11] C. Fefferman e E. M. Stein. H^p spaces of several variables. *Acta Math.*, 129(3-4):137-193, 1972.
- [12] G. B. Folland. Real analysis. Pure and Applied Mathematics. *John Wiley Sons, Inc.*, New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [13] L. Grafakos e G. Teschl. On Fourier transforms of radial functions and distributions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 19(1):167-179, 2013.
- [14] G. H. Hardy. The mean value of the modulus of an analytic function. *Proceedings of the London Mathematical Society.*, s2 14(1):269-277, 1915.
- [15] L. Hormander. The analysis of linear partial differential operators I. *Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.*, Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin].
- [16] F. John e L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415-426, 1961.
- [17] R. H. Latter. A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms. *Studia Math.*, 62(1):93-101, 1978.
- [18] P. Leopardi. A partition of the unit sphere into regions of equal area and small diameter. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 25:309-327, 2006.
- [19] F. Riesz. Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques. *Szeged Varosi Nyomda es Konyvkiado.*, 1922.
- [20] W. Rudin. Real and complex analysis. *McGraw-Hill Book Co.*, New York, third edition, 1987.
- [21] W. Sickel e L. Skrzypczak. Radial subspaces of Besov and LizorkinTriebel classes: extended Strauss lemma and compactness of embeddings. *J. Fourier Anal. Appl.*, 6(6):639-662, 2000.

-
- [22] E. M. Stein. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. *volume 43 of Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [23] E. M. Stein e G. Weiss. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.
- [24] H. Triebel. Theory of function spaces. *volume 78 of Monographs in Mathematics.*, Birkhauser Verlag, Basel, 1983.
- [25] H. Triebel. Fractals and spectra. *volume 91 of Monographs in Mathematics.*, Birkhauser Verlag, Basel, 1997. Related to Fourier analysis and function spaces.
- [26] A. Uchiyama. On the radial maximal function of distributions. *Pacific J. Math.*, 121(2):467-483, 1986.
- [27] H. Whitney. Differentiable even functions. *Duke Math. J.*, 10:159-160,1943.