UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

O MATERIAL MANIPULÁVEL ALGEBLOCKS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

ALEX SANDER MARTINS DE CAMARGO

SOROCABA - SP

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

ALEX SANDER MARTINS DE CAMARGO

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO CÉSAR OLIVEIRA

O MATERIAL MANIPULÁVEL ALGEBLOCKS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA - SP

2020

Camargo, Alex Sander Martins de

O MATERIAL MANIPULÁVEL ALGEBLOCKS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO / Alex Sander Martins de Camargo. -- 2020.
151 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador: Paulo César Oliveira
Banca examinadora: Antonio Noel Filho, Nelson Antônio Pirola, Paulo César Oliveira
Bibliografia

1. Algeblocks. 2. Representações figurais. 3. Tarefas exploratório-investigativas. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).
DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)
Bibliotecário(a) Responsável: Ronildo Santos Prado – CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Alex Sander Martins de Camargo, realizada em 19/03/2020:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Nelson Antônio Pirola
UNESP

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
IFSP

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Nelson Antônio Pirola e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer a Deus por minha vida, pela minha família, pelos meus amigos, por ter sempre me protegido e iluminado meu caminho nesta peleja nos momentos mais difíceis. Seu poder grandioso resplandece na vida de todos nós com o sacrifício de seu filho unigênito Jesus. Nenhum mortal pode negar, sua luz brilhará por toda eternidade em nosso interior.

Agradeço agora aos meus pais, por terem me concedido minha vida. Mesmo com a falta de presença, não posso deixar de ser grato, pois vocês me permitiram que eu chegasse até esse nobre momento acadêmico. Compreendo que vocês fizeram o melhor que podiam por mim!

Aos meus professores, desde os de minha educação mais básica. Vocês têm sido meus heróis e me dado inspiração para seguir com ‘meus números’. Divido minha conquista com cada um.

Aos meus amigos e familiares mais próximos. Sou grato pela amizade de todos vocês e acredito não ser justo citar os nomes de todos, já que daria uma lista demasiado extensa. Os amigos são mais do que especiais; considero-os de minha família. Desculpem-me por todas as ausências devido aos meus estudos, principalmente meus segundos pais.

Aos meus colegas mestrandos da UFSCar, por todos os conhecimentos, momentos e experiências compartilhadas. Que o desejo de apreender mais sobre a nossa nobre ciência nunca se apague em nossos corações. Que este seja ardente “como a chama do Olimpo”.

Ao nobre Prof. Osli Almeida Paes, que tem me inspirado na graduação às demonstrações matemáticas mais elaboradas, embora seja um dos mais humildes. Um elegante e requintado toque de matemático sempre estará comigo, graças a você!

A nobre Profª. Maria da Penha Rodrigues de Oliveira Godinho, por toda a didática compartilhada na graduação. Almejo ainda ter didática, mas tudo no seu devido tempo.

Ao nobre Prof. Dr. Antonio Noel Filho, que tem se tornado um grande amigo desde minha graduação, até o dado momento no mestrado. Jamais me esquecerei das oportunidades e ajudas que tem me dado em todo o percurso.

Ao nobre Prof. Ms. Luiz Rodolfo Kusuki, que além de ser meu amigo, foi meu orientador de Iniciação cientifica. A mesma temática continuou viva e foi desenvolvida neste trabalho. Obrigado por me apresentar aos materiais didáticos manipuláveis. Isso me move para novas investigações e estudos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira, agradeço pela paciência comigo, por ter me ajudado com as formalidades e por acreditar em mim. Mesmo em alguns momentos onde as trevas reinavam nessa peleja, você mostrou muita sensibilidade, um ótimo amigo. Não me esqueço de seus discursos; o humano mais racional e engajado na área, à que tive o prazer de conhecer.

A todos que influenciaram direta ou indiretamente essa pesquisa. Vocês são como os paralelepípedos das estradas; ‘não se sabe quem’, mas permitiram-me o caminhar alinhado nesta jornada. Agradeço de coração a todos que não tiveram seus nomes aqui citados que me contemplaram com tais influências.

Por último gostaria de agradecer a mim mesmo, pela fibra e moral, cujo quais não me permitiram desistir. Resiliência é o que nos mantém no caminho.

Compreendo que esses últimos agradecimentos emanam de Deus, o primeiro a quem sou grato e assim se tornam cíclicos esses parágrafos; rumo ao infinito. A vitória é sua, não só perante este trabalho; mas sim por toda a criação de tudo o que nos permite conhecer. *A matemática foi o alfabeto qual o Senhor utilizou para criar o Universo.*

MUITO OBRIGADO! DE CORAÇÃO!

[...] E horas sem conta passo, mudo,
O olhar atento,
A trabalhar, longe de tudo
O pensamento.

Porque o escrever – tanta perícia,
Tanta requer,
Que ofício tal... nem há notícia
De outro qualquer.

Assim procedo. Minha pena
Segue esta norma,
Por te servir, Deusa serena,
Serena Forma! [...]

Profissão de Fé (excerto) – **(Olavo Bilac)**

RESUMO

Este trabalho teve o propósito de desenvolver um produto educacional na forma de proposta de ensino para a álgebra das séries do ensino médio. Mais especificamente, propor os estudos de conteúdos algébricos por meio da utilização do material manipulativo concreto denominado de Algeblocks. Dado o suporte teórico-metodológico das tarefas exploratórias-investigativas propostas por João Pedro da Ponte e seus colaboradores, além das representações figurais de Efraim Fischbein, foram planejadas quatro tarefas, envolvendo os seguintes conteúdos: função de 2º grau; conceitos de polígonos regulares; resolução, análise e discussão de sistemas lineares com duas equações e duas variáveis utilizando escalonamento; abordagem de conceitos prismas (área da superfície e volume) e relação de Euler. Para cada uma das tarefas, foi apresentado um possível roteiro de resolução, articulado com os referenciais teóricos apresentados nesta pesquisa. Em termos de potencialidades do material didático destacamos que é um recurso relevante para o estabelecimento de registros de representação, tanto geométrico, como algébrico; versátil para a utilização em conteúdo do ensino fundamental e médio. Uma reflexão sobre as limitações do material é que ele não assegura a validade de demonstrações matemáticas numa investigação matemática.

Palavras-chave: Algeblocks. Conceitos figurais. Material manipulável. Representações figurais. Tarefas exploratório-investigativas.

ABSTRACT

This work had the purpose of developing an educational product in the form of a teaching proposal for the algebra of high school grades. More specifically, to propose studies of algebraic content through the use of concrete manipulative material called Algeblocks. Given the theoretical and methodological support of the exploratory-investigative tasks proposed by João Pedro da Ponte and his collaborators, in addition to the figurative representations of Efraim Fischbein, four tasks were planned, involving the following contents: second degree function; concepts of regular polygons; resolution, analysis and discussion of linear systems with two equations and two variables using scaling; approach to prism concepts (surface area and volume) and Euler relationship. For each of the tasks, a possible resolution script was presented, articulated with the theoretical frameworks presented in this research. In terms of the potential of didactic material, we highlight that it is a relevant resource for the establishment of representation records, both geometric and algebraic; versatile for use in elementary and high school content. A reflection on the limitations of the material is that it does not guarantee the validity of mathematical statements in a mathematical investigation.

Keywords: Algeblocks. Figurative concepts. Manipulated material. Figurative representations. Exploratory-investigative tasks.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Introduziremos o nosso trabalho, apresentando um breve relato sobre a trajetória do pesquisador, que a conduziu até esse presente estudo. Desde o desenvolvimento do ensino médio em 2012, cursado em Escola Técnica - ETEC o pesquisador notou algumas dificuldades relativas a produtos notáveis, polinômios, falhas na execução de algoritmos simples como o desenvolvimento de $(a-b)^2$. Observou erros algébricos cometidos pelos alunos deste meio, inclusive ele próprio tal como $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ ou $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; percebeu a dificuldade que os educandos enfrentavam na resolução de equações de 1º e 2º graus; erros de resolução em sistemas lineares simples (2 ou 3 variáveis) entre outros. Surgiam questões frequentes na mente deste pesquisador: Porque tais erros ocorrem? O que fazer para ajudar nestes casos? Será que só o conhecimento de algoritmos resolutivos é suficiente para o aprendizado de conteúdos matemáticos? Entre outras derivadas destas. Porem em dado momento, faltava engajamento na área para responder essas e outras perguntas, que poderiam ser sanadas no ensino superior.

Na fase de ingresso, na graduação em 'Licenciatura em Matemática' na Universidade de Sorocaba - UNISO no ano de 2014, notou a persistência dos erros pontudos, isto é, pelos graduandos. O pesquisador relatava observações ao professor com quem tinha mais proximidade de diálogo, Luiz Rodolfo Kusuki, que é Mestre em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, campus de Sorocaba. Em meio a esses momentos, surgiu o interesse para retomar os questionamentos, buscando respostas. Diante destes questionamentos, durante as oficinas de matemática que eram desenvolvidas no 'Laboratório de Ensino de Matemática' – LEM, direcionadas para o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - PIBID da mesma instituição, Luiz Rodolfo propôs a elaboração e estudo sobre o material didático Algeblocks. Ele pontuou que este material poderia auxiliar nestas questões relativas à álgebra.

As atividades desenvolvidas nestas oficinas eram supervisionadas pelo Prof. Dr. Antônio Noel Filho e Prof. Me. Luiz Rodolfo Kusuki. Na escola parceira: E.E Prof. Altamir Gonçalvez – Sorocaba foi supervisionado por Marici Martins Claro, durante as aulas ministradas, que contavam com um material didático similar ao Algeblocks, no caso, o Algeplan. Essa foi a única experiência na área que o pesquisador teve, durante dois anos, até o desenvolvimento deste presente estudo, em que pode notar que suas indagações realmente eram válidas e os educandos expressam tais dificuldades algébricas pontuadas.

O interesse pelo tema e por materiais didáticos manipuláveis virou a primeira iniciação científica do pesquisador, que foi desenvolvida com o Programa Voluntário de Iniciação Cientifica – PROVIC ofertado pela mesma universidade que se graduou. Foi intitulada de “Tarefas investigativas utilizando o material manipulativo Algebloc”. Foi orientada pelo Prof. Me. Luiz Rodolfo Kusuki. Seguindo a mesma linha de pesquisa, o trabalho de conclusão de curso - TCC desenvolvido no fim da mesma graduação, consistiu na elaboração de algumas atividades matemáticas direcionadas para as séries finais do ensino fundamental – EF e ensino médio – EM utilizando o material proposto. O TCC ficou intitulado de “Tarefas investigativas utilizando o material didático manipulativo Algebloc”. Consolidadas essas etapas, o pesquisador manteve o interesse em continuar com o tema em sua dissertação de mestrado.

Este trabalho teve o propósito de desenvolver um produto educacional na forma de proposta de ensino para a álgebra das séries do ensino médio. A motivação inicial para essa pesquisa foi o desenvolvimento da iniciação cientifica, já abordada e a derivação desta para um Trabalho de Conclusão de Curso, que foi apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma de graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade de Sorocaba (UNISO). Na IC foram feitas pesquisas bibliográficas sobre a utilização do material didático manipulativo denominado de ‘Algeblocks’ no Brasil, sendo também verificadas possíveis aplicações deste em conteúdos matemáticos respeitando os documentos oficiais vigentes no Estado de São Paulo.

O TCC desenvolvido foi uma ampliação do conteúdo contido na IC, trazendo sugestões de atividades voltadas para os anos finais do ensino fundamental e ensino médio, com o mesmo material. Tanto na IC quanto no TCC, a revisão bibliográfica realizada não apontou potencialidades do Algeblocks no processo de ensino–aprendizagem de matemática, devido à falta de estudos e/ou aplicações no ambiente escolar brasileiro até o ano de 2016. Este fato contribuiu no interesse em continuar a investigação sobre este material no desenvolvimento da presente dissertação de mestrado.

Em nossa pesquisa de Mestrado encontramos no cenário brasileiro apenas a dissertação de Silva (2018) intitulada “Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks”, cujo objetivo foi investigar como esse material manipulativo e a metodologia de ensino–aprendizagem–avaliação de matemática através da resolução de problemas contribuiu para o ensino intradisciplinar (conexões entre diferentes conteúdos escolares), tomando por base uma turma de oitavo ano de uma escola pública.

Para delinear o mapeamento de pesquisas recorremos ao Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior - CAPES e à Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD e inserimos o descritor “algeblocks” na base de busca dessas plataformas digitais.

A pesquisa de Silva (2018) apropriou-se das dez etapas de desenvolvimento da metodologia de ensino–aprendizagem–avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para orientar o trabalho do professor: proposição do problema; leitura individual; leitura em grupo; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária (discussão coletiva); busca do consenso; formalização do conteúdo construído e proposição e resolução de novos problemas.

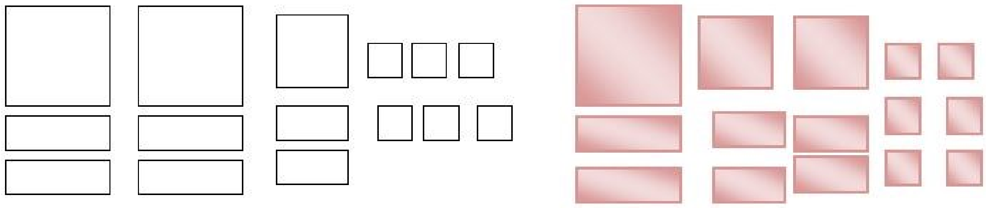
Silva (2018) pontuou em seu trabalho que a resolução de problemas envolvendo o uso do Algeblocks explorou a utilização de diversos conceitos matemáticos abstratos no meio concreto, o qual contribuiu para o ensino intradisciplinar de matemática estabelecendo conexões entre os diferentes ramos (aritmética, álgebra, geometria), cooperando positivamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Mais especificamente, os conceitos explorados com o uso do material manipulável foram: “número inteiro, adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros, expressões algébricas, polinômios, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios e produtos notáveis” (SILVA, 2018, p.178).

O estudo de Silva (2018), por sua vez, referenciou somente a dissertação de mestrado de Espejel (2010) intitulada de “Desarrollo Del Pensamiento Algebraico a través del uso de los Algeblocks em Alumnos de Segundo Grado de Educación Secundaria”, a qual envolveu o uso do Algeblocks.

Espejel (2010) explorou a utilização do Algeblocks com 50 alunos da educação secundária mexicana (equivalente ao 7º, 8º e 9º ano do Ensino Fundamental). O propósito dessa investigação foi analisar a utilização “da linguagem algébrica para generalizar propriedades aritméticas e geométricas” além de “resolver problemas mediante formulação de equações” (ESPEJEL, 2010, p.100).

As tarefas propostas por Espejel (2010) não envolveu o espaço tridimensional. Nesse sentido, por exemplo, no estudo de polinômios, na resolução das tarefas foi utilizado o Algeplan, apresentado na **figura 1**:

Figura 1: Modelo de Algeplan usado por Espejel (2010).

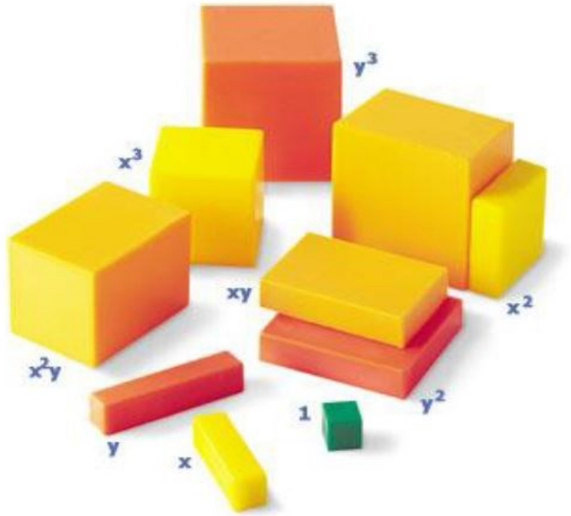


Fonte: Espejel (2010) p. 57.

O protótipo (**figura 1**) utilizado por Espejel (2010) de fato, não foi o Algeblocks, mas sim, um material similar conhecido popularmente como Algeplan no Brasil. Diferente do Algeblocks (tridimensional), o Algeplan é bidimensional. Geometricamente falando, cada peça do Algeplan representa em si, uma das faces de um prisma reto de base quadrada ou retangular do Algeblocks.

Silva (2018) utilizou na proposta de suas tarefas o Algeblocks, conforme conteúdo da **figura 2**:

Figura 2: Modelo de Algeblocks.



Fonte: Silva (2018, p.88).

No decorrer do trabalho de campo de Silva (2018) os alunos sujeitos da sua pesquisa, tiveram a oportunidade de manipular o material didático Algeblocks na resolução de cada atividade matemática.

Espejel (2010) não proporcionou aos alunos participantes de sua pesquisa o uso do material didático. Optou-se pela representação figural na construção das representações algébricas solicitadas, deixando como sugestão para os alunos a construção do Algeplan utilizando papel cartolina, madeira, plástico ou outros tipos de materiais.

Os trabalhos de Silva (2018) e Espejel (2010) contemplaram o segundo ciclo do Ensino Fundamental, no entanto, o objetivo da nossa dissertação de mestrado foi apresentar uma proposta de ensino contendo tarefas exploratórias-investigativas para alunos do Ensino Médio. Utilizamos o termo ‘tarefas’ relacionando aquilo que o professor propõe para seus alunos como estratégia de ensino, no ambiente escolar. Já a expressão ‘exploratório-investigativa’ leva em conta ponderações estabelecidas por Ponte et al. (2015, p.112):

> As tarefas fechadas (como exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada, ao passo que as tarefas abertas (explorações e investigações) ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando-as matematicamente. Por outro lado, as tarefas com um grau de desafio mais reduzido (exercícios e explorações) favorecem o sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança enquanto as tarefas mais desafiantes (problemas e investigações) proporcionam experiências matemáticas mais profundas.

As tarefas propostas nesta pesquisa foram elaboradas com o objetivo de contribuir no desenvolvimento de competências específicas e habilidades abordadas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018).

O relatório da pesquisa foi sendo tecido de acordo com seus capítulos, sendo a “introdução”, o primeiro deles.

No capítulo 2 descrevemos o que é proposto em nível curricular sobre os conteúdos que podem ser abordados com o Algeblocks: função do 1º grau; função de 2º grau; polígonos regulares (inscrição/circunscrição); resolução, análise e discussão de sistemas lineares de ordem 2 e 3 utilizando escalonamento; prismas (área da superfície e volume). Todavia, deixamos claro que não contemplamos todos estes conteúdos em nossa proposta de ensino, usando nosso protótipo de material didático.

Para o terceiro capítulo apresentamos os propósitos educacionais de trabalhar com o material concreto e manipulável.

No capítulo quatro abordamos as tarefas exploratório-investigativas como base teórico-metodológica de pesquisa.

Finalmente no quinto capítulo apresentamos as tarefas na forma de proposta de ensino, bem como a solução esperada de acordo com as competências específicas e habilidades contidas na BNCC (BRASIL, 2018).

Apresentamos também as considerações finais e as referências que nortearam essa pesquisa.

2 ABORDAGEM EM NÍVEL CURRICULAR DO ALGEBLOCKS

Neste capítulo relacionamos os conteúdos matemáticos para o Ensino Médio com possibilidades de ensino via material manipulativo Algeblocks. Para tal propósito, consideramos a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), por ser o documento mais atual no cenário educativo brasileiro, vigente desde 2018.

2.1 ANÁLISE CURRICULAR DA BNCC

No processo ensino-aprendizagem dos conteúdos de matemática, a avaliação dos alunos é norteada pelo desenvolvimento de competências e habilidades. Mas o que de fato o que são competências e habilidades, na perspectiva da BNCC (BRASIL, 2018)?

Competência, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 8), compreende a "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". Nesse documento, competência também é definida como habilidade que contempla práticas escolares que visam o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, bem como o estímulo para que os estudantes possam lidar com as emoções, relações interpessoais, além do gerenciamento de objetivos de vida, como autoconhecimento, colaboração, resolução de problemas, entre outros. Por outro lado, o termo 'habilidade' compreende a qualidade ou característica de quem é hábil, neste contexto.

Quanto à proposta de organização curricular apresentada pela BNCC, para o ensino médio segue alterada. Conforme (BRASIL, 2018, p. 475), tem-se que as recentes mudanças na Lei de Diretrizes e Base - LDB, em função da Lei nº 13.415/2017, substituem o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível.

Após a implementação de tais mudanças na LDB 9394/96, fica estabelecido que os currículos não sejam mais unificados como ocorria até dado momento. Isto sugere que pode haver uma diversidade de currículos para uma mesma disciplina, para quaisquer localidades brasileiras. Devido a este fato, como a utilização do material didático Algeblocks depende de conteúdos matemáticos, mapeamos conteúdos matemáticos para estabelecer uma tabela de conteúdos matemáticos, que atende o que está proposto em termos de competências e habilidades conforme (BRASIL, 2018). Apresentamos a referida tabela de conteúdos a seguir, que auxiliou na elaboração de tarefas exploratório-investigativas propostas neste estudo:

Tabela 1: Conteúdos que podem ser abordados com Algeblocks no EM.

1ª série (EM)	
Bimestre	**Conteúdo**
1º	Não há conteúdos previstos.
2º	Zero(s) da função do 2º grau.
3º	Não há conteúdos previstos.
4º	Polígonos regulares: principais propriedades.
2ª série (EM)	
Bimestre	**Conteúdo**
1º	Não há conteúdos previstos.
2º	Resolução, análise e discussão de sistemas lineares de ordem 2 e 3 utilizando escalonamento.
3º	Não há conteúdos previstos.
4º	Prismas: área de superfície e volume; Relação de Euler.
3ª série (EM)	
Bimestre	**Conteúdo**
1º	Não há conteúdos previstos.
2º	Não há conteúdos previstos.
3º	Não há conteúdos previstos.
4º	Não há conteúdos previstos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Definidos então os referidos conteúdos matemáticos que estão associados ao Algeblocks na **tabela 1**, que unifica estes em séries, notamos que de cada 4 bimestres das duas séries iniciais do ensino médio, somente dois deles podem ser contemplados com a proposta de tarefas exploratório-investigativas, ou seja, à 50% da distribuição dos bimestres ao longo dos respectivos anos letivos. A terceira série não foi contemplada pela proposta em totalidade. Consideremos a seguir, o que fica definido após a flexibilização curricular proposta por (BRASIL, 2018). Não abordamos todos esses conteúdos em nossa proposta de ensino, mas reiteramos que a tabela segue como sugestão aos docentes interessados em variar os temas.

Devido a nova tendência regimental de propor a não universalização de um currículo escolar, passa então, em (BRASIL, 2018, p. 475) a ser definido que:

> o currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
>
> I – linguagens e suas tecnologias;
>
> II – matemática e suas tecnologias;
>
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
>
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
>
> V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas).

A diversidade e flexibilidade curricular ampara-se nas diversidades regionais e culturais, quando aponta a relevância para o contexto local, quando aponta a relevância para o contexto local. Conforme o excerto analisado, temos presente o termo itinerário. Neste contexto, a BNCC refere-se a itinerário caminho a seguir, ou seguido, para ir de um lugar a outro pelo docente responsável por cada componente curricular. Estes itinerários formativos foram denotados como estratégicos para a flexibilização. Com isto, a organização curricular permite opção de escolha aos estudantes. Esta pode ser estruturada com foco em uma disciplina, na formação técnica, profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes disciplinas.

Assim, os itinerários formativos podem ser estruturados com foco em uma disciplina, na formação técnica, profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes disciplinas. Conforme (BRASIL, 2018), a escolha por diferentes áreas do conhecimento compõe os denominados itinerários integrados.

Se a opção for diferentes áreas do conhecimento estaremos lidando com itinerários integrados. No caso do componente curricular de matemática nesta etapa do ensino é possível ofertar aos educandos, conforme as opções:

> aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 477).

A possibilidade da escolha conferida quanto aos itinerários formativos, conforme definido pela BNCC, deve considerar a realidade local; as necessidades da comunidade escolar, os recursos materiais e humanos disponíveis. Estes visam garantir aos estudantes, possibilidades para a efetiva construção e desenvolvimento de seus projetos de vida, ressaltando a integração destes como cidadãos autônomos e conscientes, para o mundo do trabalho. Por outro lado, (BRASIL, 2018) afirma que os itinerários devem assegurar a apropriação de procedimentos cognitivos e o uso de metodologias que favoreçam o protagonismo juvenil. Neste contexto, é válido afirmar sobre os itinerários formativos conceituados na BNCC pretendem promover competências e habilidades aos alunos, nas mais diversas áreas do conhecimento.

Outro aspecto a ser considerado nos itinerários formativos é a apropriação de procedimentos cognitivos e o uso de metodologias que favoreçam o protagonismo juvenil, mediante quatro eixos estruturantes:

I) Investigação científica: neste eixo, considera-se o aprofundamento de conceitos importantes das ciências para a explicação de ideias, fenômenos, procedimentos utilizados em investigações ao encarar situações cotidianas, a apresentação de novas ideias que contemplem o desenvolvimento e a melhoria da qualidade de vida da comunidade local;

II) Processos criativos: este eixo ressalta-se a valorização do aprofundamento do conhecimento científico na elaboração de experimentos, modelos, desenvolvimento de protótipos para o aprimoramento de processos produtivos ou produtos que contribuam com a sociedade em algum âmbito;

III) Mediação e intervenção sociocultural: este eixo coordena a integração de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento sobre problemas comunitários e promove soluções para estes;

IV) Empreendedorismo: este eixo tem como intuito a utilização conhecimentos de diferentes áreas visando à formação de organizações com múltiplas missões com foco no desenvolvimento de produtos, prestação de serviços inovadores fazendo o uso das novas tecnologias.

Sobre a proposta curricular apresentada com os eixos estruturantes, (BRASIL, 2018) orienta que, as aprendizagens a serem desenvolvidas seguindo os itinerários formativos devem garantir aos educandos a competência de acompanhar e participar de debates que a cidadania exige, entendendo e questionando os argumentos apresentados que apoiam as diversas posições, implicando na formação de um cidadão imparcial. Com os eixos estruturantes a BNCC destaca

> que a flexibilidade seja tomada como princípio obrigatório. Independentemente da opção feita, é preciso destacar a necessidade de romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real (BRASIL, 2018, p. 479).

Deste modo, o currículo passa a ser dinâmico, rompendo antigos paradigmas tradicionais em sua construção. Sabemos da importância destas propostas curriculares e mais importante do que as mesmas é como serão executadas. Neste aspecto (BRASIL, 2018), afirma que é fundamental que se tomem tratamentos metodológicos que favoreçam e estimulem o protagonismo dos educandos. Tratar o aluno como o protagonista de seu sucesso escolar pode ser encarado como um equívoco, pois, o processo de ensino-aprendizagem é como uma via de mão dupla onde figuram o docente e o educando, seja em qualquer área do conhecimento. Neste sentido, incluindo o docente e sua prática quer que a metodologia de trabalho utilizada nas escolas

> evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social e possibilitando o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências pessoais, sociais e do trabalho (Resolução CNE/CEBnº 3/2018, Art. 7, § 2º) (BRASIL, 2018, p. 479).

A proposta de ruptura com a grade curricular convencional dos componentes disciplinares instiga-nos propor uma indagação cuja reflexão não é alvo desta pesquisa: será que o Brasil, já tem consolidado neste momento histórico, um sistema educacional público que sustente tal flexibilidade curricular defendida?

Esse documento normativo, também efetuou a organização curricular de matemática para o ensino fundamental segundo as denominadas ‘unidades de conhecimento’. A BNCC propôs essa organização com as unidades de conhecimentos: **Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.** Por outro lado, para o ensino médio, devido à flexibilização curricular e existência de vários currículos relatados neste estudo, (BRASIL, 2018) não efetua a montagem de um currículo para o componente curricular de matemática, o que era esperado. Para a BNCC, após a etapa do ensino fundamental,

> em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (BRASIL, 2018, p. 528).

A análise deste excerto de (BRASIL, 2018), permite afirmar que a continuidade dos estudos no ensino médio quanto ao componente curricular de matemática, tem como foco a contextualização da matemática para o aluno. Deste modo, são consideradas as diversidades e o ambiente em qual os alunos estão imersos; os avanços tecnológicos e suas implicações no mercado de trabalho; a bagagem cultural entre outros aspectos. Nesse contexto (BRASIL, 2018), destaca-se a importância das novas tecnologias digitais, programas, aplicativos, entre outros. Estas tecnologias, podem dar suporte tanto para a investigação matemática como na continuidade no desenvolvimento do pensamento computacional, já iniciado no ensino fundamental.

Conforme as considerações até o momento efetuadas, para (BRASIL, 2018), o componente curricular de matemática do ensino médio deve aproveitar todo o potencial já constituído pelos educandos no ensino fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático já iniciado. Com isto, almeja-se para os alunos que os novos conhecimentos matemáticos estimulem processos mais elaborados de reflexão, abstração, permitam a sustentação de modos de pensar que possibilitem a formulação e resolução de problemas em diversos contextos. Visa-se os alunos desempenhem estas de forma mais autônoma e com ampliação no repertório de recursos matemáticos conhecidos. Desta forma, podemos afirmar que para (BRASIL, 2018), os itinerários formativos de matemática incorporados num currículo devem propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas específicas, como esperado.

O presente documento normativo, diz que os alunos devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, construção de modelos matemáticos e de resolução de problemas**. Para isto, os educandos devem desenvolver as seguintes competências gerais da área: **o raciocinar, representar, comunicar, argumentar, aprender conceitos, desenvolver representações e procedimentos matemáticos mais elaborados**. A BNCC, ressalta a necessidade de se propor o trabalho coletivo em discussões e validações matemáticas para os alunos. Pelo fato de a competência desenvolver representações e procedimentos matemáticos mais elaborados ser um processo efetuado pelo aluno, adotamos esta como uma ou mais habilidades matemáticas, associadas a ela em nossa proposta.

Nosso itinerário segue rumo às competências e habilidades matemáticas apontadas pela BNCC. Em termos de competências gerais da área, esse documento assenta-se nas capacidades de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e aprender conceitos (BRASIL, 2018).

Para o desenvolvimento de competências que envolvem **o raciocinar** matemático, pontua-se a necessidade de os educandos interagirem com seus colegas, professores mobilizando habilidades em investigações, explicações e justificativas das soluções elaboradas para os problemas, sem deixar de dar ênfase aos processos de argumentação matemática.

As competências que estão associadas ao **representar** implicam na necessidade de elaboração de registros para exprimir um objeto ou conceito matemático. Embora não seja exclusividade da matemática, todas as áreas do conhecimento têm definido os processos de representação a serem utilizados. As representações específicas de cada área permeiam a compreensão de fatos, ideias e conceitos próprios. O acesso aos objetos matemáticos se dá por meio das representações e das diferentes linguagens, muitas vezes, necessária para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Neste aspecto deste estudo, pressupõe-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação matemática, consigam aplicar estes em situações propostas fazendo o uso da linguagem específica da matemática apropriados para a busca de soluções e respostas às mesmas.

A **comunicação** é outro aspecto imprescindível. Neste ato compartilhado com o professor e/ou colegas da turma, os alunos devem ter habilidades para justificar suas respostas não apenas com uso da simbologia matemática e dos conectivos lógicos, mas prioriza-se a recorrência ao uso da língua materna quando necessário. Essa necessidade ocorre de forma natural, quando o educando não tem a bagagem matemática necessária ou não há consolidado o conhecimento acerca de representações matemáticas que retratem o fato desejado. Para auxiliar neste processo, sugere a realização de apresentações orais dos resultados, elaboração de relatórios, entre outras formas de apresentação.

Para a competência da **argumentação,** seu desenvolvimento pode incluir a formulação e o teste de conjecturas matemáticas efetuadas.

Tendo em vista que no Ensino Médio ocorre a ampliação de conceitos já vistos no Ensino Fundamental, a competência **aprender conceitos** implica em deixar estes bem definidos e mobilizar os conceitos já conhecidos sob uma nova perspectiva e na aprendizagem de novos conceitos matemáticos. Embora a BNCC enfatize que o desenvolvimento dessas competências gerais não segue uma hierarquia, as mesmas são contempladas com habilidades compatíveis:

> [...] isso não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras. Ainda que Matemática, tal como Língua Portuguesa, deva ser oferecida nos três anos do Ensino Médio (Lei nº 13.415/2017), as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação. Essa decisão permite flexibilizar a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola (BRASIL, 2018, p. 530).

Considerando os propósitos da BNCC, as flexibilizações curriculares abordadas e em articulação com as competências gerais para a área de Matemática, devem capacitar os estudantes para o desenvolvimento de cinco competências específicas. A aglomeração de duas ou mais competências, resulta em uma macrocompetência, conforme a BNCC. Estas competências específicas da área de matemática foram organizadas com base em (BRASIL, 2018), conforme o quadro a seguir:

Quadro 1: As 5 Competências Específicas da BNCC para a matemática do EM.

Competência Específica	Descrição da Competência
1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgadas por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e
3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Brasil (2018, p.531)

Conforme o **quadro 1**, extraído da BNCC, ficam estabelecidas cinco competências específicas para a área de matemática. Estas devem ser desenvolvidas durante a duração do ensino médio, independente da ordem de ocorrência. Embora cada competência seja apresentada de forma ampla, conceituamos cada uma delas, conforme o proposto pela BNCC seguindo a ordem estabelecida neste mesmo quadro.

A primeira competência específica implica no desenvolvimento da criticidade, especificamente, que os estudantes sejam

> capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes de forma imprópria e que induz a erro: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros (BRASIL, 2018, p. 532).

A segunda competência específica é uma extensão da primeira; por colocar os estudantes em investigações de situações cotidianas com mobilização de questões de impacto social que vise a proposta ou participação de alunos em ações individuais ou coletivas para a resolução de problemas em sua comunidade.

O desenvolvimento da terceira competência específica está associada às habilidades de interpretação, construção de modelos matemáticos, resolução e formulação de problemas matemáticos. Um destaque importante da BNCC, que não é contemplado nos documentos oficiais normativos anteriores é a ênfase na formulação de problemas matemáticos, como um ponto importante para o enriquecimento na formação do aluno.

Especificamente para a resolução e formulação de problemas,

> os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada (BRASIL, 2018, p. 535).

Ainda no contexto da resolução de problemas, na BNCC é pontuado sobre a categoria de problemas em que não está explícito o que se pede no enunciado. Nesses casos, os educandos envolvidos devem mobilizar seus conhecimentos e habilidades para identificar os conceitos matemáticos a serem utilizados no processo de resolução de problemas.

Na BNCC destaca-se a importância para a elaboração de problemas com a recomendação de que para formular um problema é necessário que se conheça e se investigue outros problemas matemáticos similares.

A quarta competência específica articula a utilização das diversas representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas, pontuando que estas representações são importantes no processo de aprendizagem dos alunos. Há o pressuposto de que se os alunos conseguem utilizar as representações matemáticas, eles compreendem as ideias expressas e passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializam de forma significativa suas capacidades de resolver problemas, comunicar e argumentar.

Sobre a mobilização e coordenação de registros de representação, na BNCC é concebido que

> [...] para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece (BRASIL, 2018, p. 538).

A última competência específica matemática definida implica no desenvolvimento de um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos aos alunos. Estas capacidades podem ser resultantes de experiências empíricas dos educandos envolvidos com a prática. Neste contexto, "são induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo" (BRASIL, 2018, p. 540).

Em nossa pesquisa as induções correlacionam com a manipulação do material didático Algeblocks, podendo desencadear a formulação de conjecturas, uma importante característica desta área do conhecimento. De acordo com a BNCC, recomenda-se que os alunos devem buscar contraexemplos para refutá-los e quando necessário, procurar argumentos para validá-las (BRASIL, 2018). Neste aspecto, destaca-se que a validação, demonstração ou prova matemática, não pode ser feita apenas com base em argumentos empíricos, mas deve-se mobilizar a busca por argumentos formais, que podem incluir a demonstração de proposições matemáticas, apoiadas na utilização do Algeblocks.

No quinto capítulo desta dissertação de mestrado dedicamos à apresentação das tarefas propostas, buscando contribuir no desenvolvimento da terceira à quinta competência, a saber:

a) interpretar e construir modelos matemáticos;
b) utilizar representações matemáticas para um mesmo objeto matemático na resolução de problemas;

c) desenvolver habilidades voltadas às capacidades de investigação, formulação de explicações e argumentos.

Em termos de habilidades associadas à abordagem de conteúdos matemáticos, destacamos:

a) medida e cálculo de perímetros, área e volume;
b) resolução de expressões algébricas;
c) estudo de relações algébricas, inclusive de natureza funcional;
d) propriedades de polígonos regulares;
e) estudo e resolução de sistemas lineares;
f) estudo de prisma reto-retângulo: área de superfície, volume e Relação de Euler.

Os conteúdos citados foram escolhidos, dada a potencialidade do material didático Algeblocks, independente da disposição dos conteúdos no decorrer dos estudos no Ensino Médio. As competências e habilidades matemáticas que podem ser desenvolvidas com nossa proposta de ensino, estão elencadas a mesma tabela, contempladas com os mesmos conteúdos matemáticos.

Mais importante do que o estabelecimento de um currículo de matemática e suas implicações em termos de competências e habilidades encerraremos este capitulo pontuando a necessidade de se aprofundar quanto aos termos já citados neste capítulo: as orientações para o trabalho com materiais didáticos manipuláveis, a necessidade de se ter um espaço específico para averiguações e estudos matemáticos deste tipo e a abordagem metodológica da proposta que foi efetuada em forma de tarefas matemáticas exploratório-investigativas. Ressaltamos desde já, que nesta proposta de ensino, são necessárias reflexões por parte do professor sobre a prática docente nesta etapa do ensino; pois sem a prática não se pode desenvolver o ensino, tampouco a aprendizagem, seja em qual grande área for. No próximo capítulo abordamos todas estas questões e estabelecemos o aprofundamento nas questões relativas ao trabalho com materiais didáticos. Apontamos um mapeamento bibliográfico sobre este material didático do estudo, bem como outros trabalhos de mesma natureza.

3 O TRABALHO COM MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS

Nesse momento da escrita do relatório da pesquisa abordamos os propósitos educacionais de trabalhar com o material concreto e manipulável conforme as principais ideias e orientações de Lorenzato (2012). Posteriormente, abordamos as potencialidades do Algeblocks no processo de ensino-aprendizagem de matemática, um protótipo desse material didático, além da proposta para a construção do mesmo. Apontamos também, neste capítulo, um mapeamento de estudos sobre o material didático utilizado.

3.1 CONCEPÇÕES SOBRE MATERIAL DIDÁTICO E ALGUNS PARADIGMAS MATEMÁTICOS

De modo geral, uma concepção básica relativa ao material didático é o fato de ser qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Assim o ‘material didático’ para Lorenzato (2012, p. 18) pode ser “um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.”

No caso da referência ao material didático como ‘concreto’ há pelo menos duas interpretações: a primeira delas refere-se ao palpável, manipulável e a segunda interpretação considerada mais ampla, inclui também as imagens gráficas, que são referentes ao próprio objeto concreto (LORENZATO, 2012).

Os sentidos fisiológicos associados ao uso deste tipo de material a serem destacados é a visão e o tato. Neste contexto, este autor ressalta que muitos educadores famosos, nos últimos séculos, apontaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitadores da aprendizagem.

Os educadores citados por Lorenzato (2012), que ressaltam tais importâncias para estes apoios são: Comenius (século XVII); Locke (século XVII); Pestalozzi e Froebel (século XIX); Herbart (século XIX); Dewey (século XX) e Poincaré (século XX). Conforme o autor, Comenius afirmava que o ensino devia dar-se do **concreto ao abstrato**; Locke pontuava para a necessidade da experiência sensorial para se atingir o conhecimento; Pestalozzi e Froebel, também defendiam que o ensino deveria ser iniciado no concreto; Herbart, na mesma linha de raciocínio, afirmava que a aprendizagem começa pelo campo sensorial; Dewey confirmou o pensamento de Comenius, apontando-o como fator básico para a construção do conhecimento e Poincaré recomendava o uso imagens vivas para reforçar as verdades matemáticas. Ambos os estudiosos citados, acreditam que na aprendizagem da matemática, **primeiro vem o concreto, depois o abstrato**. Como essas proposições destacadas são equivalentes entre si e também são um “mito”, utilizamos o artigo de Falcão (2007), para desmistificar tal afirmação, acerca do contexto do ensino e aprendizagem da matemática.

3.1.1 Desmistificando o mito: “o processo de ensino-aprendizagem se dá do concreto ao abstrato”

Falcão (2007), argumenta que a respeito da proposição ressaltada, tanto no ensino, como na aprendizagem da matemática, trata-se de um mito difundido nesta área. Segundo este autor, a teorização psicológica contribuiu com este fato, relevando os vieses da proposta piagetiana – moderada por Jean Piaget. Conforme Falcão (2007), tal crendice é aparente desde a gênese do desenvolvimento cognitivo humano, apresentada em termos de uma evolução ao longo de estágios pontuados por Piaget. O final e quarto estágio, neste contexto engloba as abstrações formais (relações de segunda ordem, ou relações de relações, como na proporcionalidade), conforme o presente autor permearam conhecimentos enraizados em fatos concretos. Nesse sentido, o autor argumenta que, o concreto, precede o formal-abstrato.

Seguem alguns exemplos dados pelo autor acerca da proposição tratada, incluindo alguns materiais didáticos, encarados como suportes representacionais concretos: Material Dourado – sistema numérico decimal, Pizza – fracionamento e relação entre parte-todo e Balança de dois pratos – princípio de equivalência algébrico.

Os exemplos citados:

> mostram o quanto o princípio teórico do primado do concreto em relação ao abstrato encontrou terreno fértil na didática da matemática: a partir da observação de situações específicas, concretas, particulares, caberia ao aluno, via abstração reflexiva, generalizar e inferir princípios, ou como é usualmente dito, “subir ao abstrato” (FALCÃO, 2007, p. 8).

Neste contexto, quando o docente propõe um assunto matemático em sala de aula, seria necessário exemplificá-lo adequadamente, ou seja, mencionar situações concretas relacionadas a teoria associada ao assunto, conforme argumenta Falcão (2007).

Falcão (2007, p. 8), relata que Lev Vygotsky vai referir-se, aqui, de forma um tanto provocativa, a uma “subida ao concreto”, de forma a desmistificar a hierarquia valorativa embutida nessas subidas e descidas epistemológicas. Deste modo, fica evidente o pensamento difundido pelos estudiosos já pontuados, que o processo de ensino-aprendizagem é unidirecional, relevando a premissa a desmistificar. Para esta finalidade, Falcão (2007, p. 9), defende que:

> de fato, se o processo de construção de conhecimento extra-escolar parece caracterizar-se pelo acúmulo de experiências singulares a partir das quais se torna pertinente construir generalizações abstratas, tal processo no âmbito escolar muito frequentemente segue direção inversa, partindo do formal e buscando instâncias de ressignificação concretas, os chamados “exemplos de aplicação”.

Deste modo, o autor deixa claro que não seria conexo associar unidirecionalmente a precedência do abstrato em relação ao concreto. Falcão (2007, p. 9), diz, neste contexto, que o concreto e abstrato se interpenetrariam no processo de construção de conhecimento humano. Em outras palavras, Falcão (2007, p. 9), estabelece o seguinte contra enunciado para o mito, já desmistificado:

> aspectos concretos e abstratos da atividade matemática não são etapas lineares em processo unidirecional simples “baixo-alto”, mas momentos dialeticamente integrados no contexto da construção de significado nos campos conceituais matemáticos.

Deste modo, concluímos que é mito tratar como unidirecional, o processo de ensino-aprendizagem na matemática, sempre “do concreto ao abstrato”.

Retomando as reflexões sobre materiais didáticos, temos que Lorenzato (2012), fez referência a médica e pedagoga Maria Montessori que deixou um legado de exemplos de materiais didáticos e atividades que contemplaram a aprendizagem associada ao campo sensorial. No campo da psicologia, o autor exaltou Jean Piaget com a crença de que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre um dado objeto, enquanto Lev Vygotsky e Jerome Bruner convergiam para a linha de raciocínio que valorizava as experiências do mundo real, como caminho para o constructo do raciocínio da criança, fato associado ao mito que Falcão (2007) desmistificou.

Ele concluiu que todos estes educadores reconheceram que a ação do indivíduo sobre um dado objeto é básica para a aprendizagem, apontando que no contexto da sala de aula, tais reconhecimentos evidenciam o papel fundamental que um material didático pode desempenhar para a aprendizagem.

Quanto aos diversos modelos de materiais didáticos manipuláveis, Lorenzato (2012) afirma que estes podem ser de diversos tipos. Há os materiais que não admitem alterações em suas formas geométricas, que é o caso dos sólidos geométricos construídos com cartolina papel cartão ou madeira, denotando-os de ‘estáticos’. Esses materiais permitem somente a visualização e manipulação pelo educando.

Neste mesmo contexto, o presente autor apontou outros materiais didáticos que permitem uma maior participação pelo aluno em relação aos estáticos denominados de ‘dinâmicos’, como é o caso do ábaco, Soroban, material dourado, jogos de tabuleiro, entre outros. Para o mesmo, os materiais didáticos dinâmicos permitem a realização de transformações por continuidade, que podem facilitar ao educando a realização de descobertas, a melhor percepção de certas propriedades matemáticas; afirmando que estes apresentam maiores potencialidades para a aprendizagem.

Quanto à tipologia dos materiais didáticos e sua utilização em atividades na sala de aula, Lorenzato (2012, p. 21) orienta que “convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno.”

No que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem de matemática com materiais didáticos, este autor defende que a utilização destes materiais está intimamente relacionada a um processo de ensino que possui uma característica paradoxal. Tal paradoxo, para este autor, é o fato de que há muita dificuldade, para qualquer ser humano caracterizar um dado objeto, tal como um espelho, telefone, bicicleta, elevador, escada rolante, entre outros, sem que esse sujeito tenha visto tal objeto.

Neste contexto, Lorenzato (2012) afirma que, para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando esses ouvem menções a estes, a concepção inicial gerada em suas mentes referente a tal objeto flui mentalmente, sem a necessidade dos apoios com os atributos iniciais correspondentes, tais como: cor, forma, movimento peso e tamanho. Conforme o mesmo autor, tais conceitos evoluem com o processo de abstração; ressaltando que a abstração ocorre pela separação mental das propriedades inerentes ao objeto conceituado.

O processo de abstração para Lorenzato (2012, p. 22), "começa com o apoio dos nossos sentidos e assim, ele é aparentemente paradoxal porque, para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto". Tal fato parece ser válido, dadas as considerações de Falcão (2007), já que nós humanos, utilizamos os campos sensoriais em nossas conceituações sobre o concreto. Ele acredita que o abstrato consiste no isolamento de alguma propriedade sensorialmente perceptível de um dado objeto; um conceito mais amplo do que o antônimo do termo concreto, que não é propriamente o abstrato. Neste contexto, não havendo ambiguidades sobre os significados dos termos concreto e abstrato,

> essa trajetória é semelhante à que se deve fazer para conseguir o rigor matemático: para consegui-lo, com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios, é preciso começar pelo conhecimento dos alunos, que é um ponto distante e oposto ao rigor matemático, porque é empírico e baseado no concreto (LORENZATO, 2012, p. 23).

Todavia, para Lorenzato (2012, p.18), por melhor que seja um material didático, o mesmo "não ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o material didático não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor".

Como o material didático é um recurso auxiliar do professor, o seu bom uso pode ampliar as suas potencialidades e qualidades quanto ao ensino-aprendizagem. Quanto ao uso de materiais didáticos no ambiente escolar, Lorenzato (2012, p. 23) afirma que "a atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar". Deste modo, não adianta ter bons materiais, boas condições para o trabalho nestes locais, mas sim, professores que saibam como utilizar todos os recursos disponíveis em seu favor, garantindo assim, condições para uma aprendizagem efetiva; seja em qualquer área do conhecimento.

Na próxima seção apresentamos um processo de mapeamento de pesquisas brasileiras em nível de teses e dissertações que revelaram apenas o trabalho de Silva (2018) abordado no capítulo introdutório deste relatório.

3.2 MAPEAMENTO DE ESTUDOS COM O MATERIAL DIDÁTICO ALGEBLOCKS

A busca por teses e dissertações foi restrito aos estudos envolvendo materiais didáticos, restrito aos de natureza manipulável e concretos. Para efetuar o mapeamento destes estudos, foi necessário conhecer textos denominados de “estado da arte”. Diante deste fato, recorremos ao artigo de Ferreira (2002) e o de Tavares e Lopes (2019), que estabelece um trajeto de percurso para o mapeamento de pesquisas em bancos de dados digitais.

Segundo as concepções de Ferreira (2002), os textos que recebem a denominação de “Estado da Arte” ou “Estado do Conhecimento”, são textos dotados de caráter bibliográfico, que possuem em comum o desafio de mapear e de transcorrer sobre uma determinada produção acadêmica em diferentes áreas do conhecimento. Este referido mapeamento visa apontar que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e evidenciados em épocas e lugares distintos, como e em que condições têm sido produzidos determinadas produções acadêmicas. Dentre estas, Ferreira (2002) destaca as dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e revistas, exposições em anais de congressos e de seminários. Conforme Ferreira (2002, p. 258) estas pesquisas:

> também são reconhecidas por realizarem uma metodologia de caráter inventariante e descritivo da produção acadêmica e científica sobre o tema que busca investigar, à luz de categorias e facetas que se caracterizam enquanto tais em cada trabalho e no conjunto deles, sob os quais o fenômeno passa a ser analisado.

O resumo como parte integrante das dissertações e teses, não deve ser o elemento exclusivo para a constituição do mapeamento e análise de pesquisas. Ferreira (2002) orientou que o pesquisador deve ler e analisar cada resumo associando-os com o trabalho na íntegra. Tavares e Lopes (2019, p.9) destacou que o mapeamento da “produção acadêmica somente por resumos pode ser uma limitação, pois podem ser muito confusos e até mesmo incompletos, sem informação sobre o tipo de pesquisa e os procedimentos de coleta de dados”.

Utilizamos como base para o mapeamento o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), conforme a proposta de Tavares e Lopes (2019).

O trabalho inicial de coleta de dados foi desenvolvido através de um levantamento realizado no catálogo de teses e dissertações da CAPES. Atualmente, os filtros de pesquisa dessa plataforma digital ofertados ao pesquisador são respectivamente: Tipo; Ano; Autor; Orientador; Banca; Grande Área Conhecimento; Área Conhecimento; Área Avaliação; Área Concentração; Nome Programa; Instituição e Biblioteca. Os filtros de pesquisa desta plataforma digital têm como intuito, facilitar a localização de teses e dissertações de mestrado, permitindo que o pesquisador opte pela qualificação destes conforme os filtros escolhidos.

Com o descritor 'algeblocks' foi exibido somente um único resultado de pesquisa, com consulta em 07/11/2019, sem utilizar os filtros de pesquisa. Isto garante que nenhum trabalho associado a este descritor foi deixado de lado na plataforma de dados, independente da época das pesquisas, já que há unicidade no resultado. Disponibilizamos o **quadro 2**, que contempla a pesquisa obtida com informações sucintas:

Quadro 2: O mapeamento preliminar das pesquisas.

Autor	Título	Ano	Instituíção de ensino	Tipo da pós-graduação	Foco temático e etapa do ensino
Lilian Esquinelato da Silva	*Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks*	2018	Universidade Estadual Paulista - UNESP	Mestrado em Educação Matemática	Investigar como o material manipulativo Algeblocks e a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuem para o Ensino Intradisciplinar, direcionado para o ensino fundamental.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após a realização da classificação preliminar do trabalho de Silva (2018), recorremos à plataforma BDTD, visando encontrar mais resultados de pesquisas. Seguindo a mesma linha de raciocínio, foi realizada uma nova pesquisa para averiguar a quantidade de teses e dissertações produzidas elencando o descritor 'algeblocks'. A BDTD oferece os seguintes filtros de pesquisa em sua interface: Instituições; Repositório; Programa; Autor; Contribuidor; Orientador/a; Tipo Documento; Idioma; Assunto; Assunto em Inglês; Área de Conhecimento e Ano de Defesa.

Utilizando o descritor ‘algeblocks’ na BDTD, não obtivemos outro trabalho além de Silva (2018).

A dissertação de Silva (2018) consistiu na tentativa de mostrar um caminho alternativo para o ensino intradisciplinar, que é uma forma de se ensinar estabelecendo conexões entre diferentes ramos da matemática, segundo as concepções do autor Sérgio Lorenzato. Silva (2018), optou pelo uso do material manipulativo Algeblocks em seu estudo, desenvolvendo no ambiente escolar seu projeto, efetuando a aplicação deste material em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental. Silva (2018), implementou seu projeto em uma escola estadual da rede pública de ensino na cidade de Rio Claro - SP.

Essa pesquisa foi norteada pela metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas. Essa mesma autora, em seus relatos, pontuou que problema é o ponto de partida nesta metodologia, que devem ser trabalhados na sala de aula.

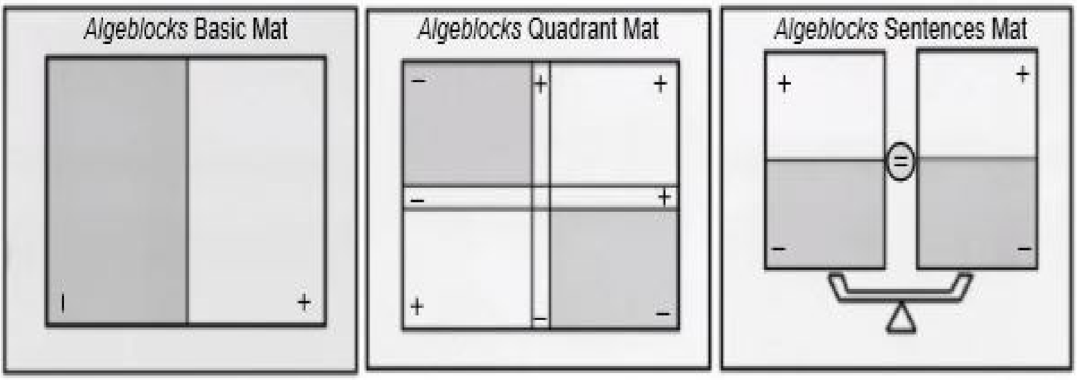
No trabalho de Silva (2018), foi estabelecido que os educandos deveriam fazer conexões entre diferentes ramos desta ciência, com uso dos Algeblocks, trabalhando a compreensão dos conceitos matemáticos associados aos conteúdos e o material didático. Ela relatou, como potencialidade de seu trabalho, que o professor de matemática ao fazer uso da metodologia adotada por ela, dá a possibilidade, mediante o uso do Algeblocks, de se trabalhar conceitos matemáticos realizando as conexões entre diferentes ramos matemáticos, justamente o que foi o objetivo.

A metodologia adotada por Silva (2018), denominada de Modelo de Romberg-Onuchic, foi desenvolvido por Lourdes de La Rosa Onuchic, que atualmente é professora e pesquisadora voluntária da Universidade Estadual Paulista - UNESP “Júlio de Mesquita Filho”, em Rio Claro - SP. Conforme Silva (2018), esta metodologia consiste em três blocos organizados. O primeiro dos blocos pretende identificar o problema da pesquisa, o segundo é planejar e executar um plano para buscar a solução do problema, usando os dados da pesquisa, e no bloco final acontece a análise e avaliação do material obtido com o projeto.

Sobre o material didático Algeblocks, a presente autora acredita que é importante usar esse material manipulativo no ensino de matemática, pois ele apresenta diversas potencialidades. Conforme Silva (2018, p. 84), os Algeblocks dão exemplos para os estudantes visualizarem a apresentação concreta de conceitos abstratos. Essa é a principal potencialidade dos Algeblocks, apresentada por Silva (2018), que remete à questão dos registros de representação e das representações figurais. Neste sentido, como o material permite que o possível educando registre suas soluções tanto com figuras quanto com notação algébrica, os estudantes podem ligar seu trabalho manipulativo à álgebra formal, conforme relata a autora do estudo. Para a autora, o seu protótipo de Algeblocks ofereceu um número suficiente de blocos (peças) para se trabalhar com grupos de quatro possíveis alunos, que forma dispostos em grupos de aprendizagem cooperativos, permitindo-se então a socialização na execução das tarefas, bem como na discussão dos resultados encontrados para os problemas propostos.

O protótipo do Algeblocks utilizado por Silva (2018) contou também com um manual de apoio para seu uso, que estabelece uma série de conteúdos matemáticos que podem ser abordados com esse material. Também foram ofertados alguns modelos de folhas de apoio, que podem auxiliar o docente, ao mobilizar o uso desse material, para a resolução de equações, operações com polinômios, operações com inteiros, entre outros. Esses modelos foram utilizados nas resoluções dos problemas propostos, no projeto da autora ressaltada, e constam na **figura 3**:

Figura 3: Folhas de apoio ao Algeblocks utilizado por Silva (2018).



Fonte: Silva (2018, p.89).

A principal limitação deste material didático, que foi notada no decorrer do trabalho de Silva (2018), é a restrição ao conjunto dos números inteiros para representar as expressões algébricas e numéricas. Essa limitação leva o docente a ter que escolher muito bem os coeficientes associados aos termos das equações, bem como restringir ele ao conjunto dos inteiros, senão a aplicação do Algeblocks pode tornar-se difícil e fazer com que o material perca a sua função nesse processo. O limite ao número de peças também pode fazer com que o docente opte por trabalhar apenas com disposições de peças que necessitem um número reduzido delas. O docente deve estar atento a este fato, pois a manipulação do material didático para os supostos alunos, pode tornar-se apenas a exposição desta. Por exemplo, se o docente pedir que os possíveis alunos construam em grupo, a expressão $(X+Y+1)^3$, para um grupo com quatro integrantes, a quantidade de peças é insuficiente para que cada um efetue a manipulação em conjunto.

Em termos de ensino de conteúdos matemáticos, nossa proposta de ensino associa-se em muitos pontos com a da autora abordada em nosso estudo, pois utilizamos o material didático Algeblocks como um auxiliar para estabelecer representações figurais para os conceitos matemáticos. Porém, nosso trabalho contempla as tarefas exploratório-investigativas voltadas para o Ensino Médio. Por outro lado, Silva (2018), optou pela metodologia associada a resolução de problemas, que não contêm a mesma abertura que nas explorações ou investigações matemáticas, desenvolvendo seu trabalho no Ensino Fundamental. Quanto ao conteúdo resolução de sistemas lineares de ordem 2 e 3, construímos um modelo de cartaz que auxilia o suposto educando nesta resolução e se associa à ideia geral da última folha de apoio contido na **figura 3,** sabendo que o conceito matemático geral associado a ela é o princípio da igualdade.

Na próxima seção apresentamos o protótipo de Algeblocks desenvolvido por nós para a proposta das tarefas.

3.3 O PROTÓTIPO DE ALGEBLOCKS DESENVOLVIDO

O protótipo de material didático Algeblocks é constituído por 72 peças prismáticas de 10 cores diferentes, para a distinção entre as dimensões de suas referidas peças. O protótipo foi construído com a matéria prima Medium Density Fiberboard – MDF, termo em inglês; que em português significa placa de fibra de média densidade, popularmente conhecida como madeira MDF.

Para tal construção, foi necessário considerar um terno de dimensões X, Y e 1u (uma unidade) para os prismas a serem construídos, pois estamos considerando um material didático com peças tridimensionais. Foi adotado o terno de dimensões para o corte das placas de MDF na confecção, sendo X = 60 mm, Y = 50 mm e 1u = 35 mm. Após a etapa de confecção destas peças, elas foram pintadas e classificadas conforme a lista a seguir:

- 8 Cubos Amarelos de arestas X, X e X $(Peça\ X^3)$; **(Correspondência dimensional em mm: 60x60x60).**
- 8 Cubos Laranjas de arestas Y , Y e Y $(Peça\ Y^3)$; **(Correspondência dimensional em mm: 50x50x50).**
- 16 Cubos Azuis de arestas $1u$, $1u$ e $1u$ $(Peça\ 1u^3)$; **(Correspondência dimensional em mm: 35x35x35).**
- 6 Prismas Vermelhos de arestas X , X e Y $(Peça\ X^2Y)$; **(Correspondência dimensional em mm: 60x60x50).**
- 6 Prismas Verdes de arestas X , X e $1u$ $(Peça\ X^2)$; **(Correspondência dimensional em mm: 60x60x35).**
- 6 Prismas Marrons de arestas Y , Y e X $(Peça\ Y^2X)$; **(Correspondência dimensional em mm: 50x50x60).**
- 6 Prismas Roxos de arestas Y , Y e $1u$ $(Peça\ Y^2)$; **(Correspondência dimensional em mm: 50x50x35).**
- 6 Prismas Verdes Claros de arestas $1u$, $1u$ e X $(Peça\ X)$; **(Correspondência dimensional em mm: 35x35x60).**
- 6 Prismas Azuis Claros de arestas $1u$, $1u$ e Y $(Peça\ Y)$; **(Correspondência dimensional em mm: 35x35x50).**
- 4 Prismas Rosas de arestas X , Y e $1u$ $(Peça\ XY)$. **(Correspondência dimensional em mm: 60x50x35).**

Também foi construída uma caixa com MDF para o armazenamento deste material didático, para que não se perca nenhuma peça no manuseio deste. Foi suficiente construir a caixa com dimensões de 25x25x24 cm, que também foi pintada para tornar o material mais elegante. Foi feita a doação desse material para o acervo da Universidade Federal de Sorocaba (UFSCar), após o término da pesquisa. Apresentamos uma sequência de três figuras que ilustram o protótipo do Algeblocks, com suas peças e sua caixa de acomodação:

Figura 4: As peças do Algeblocks.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 5: Algeblocks e sua Caixa de Acomodação.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 6: Algeblocks completo para uso.

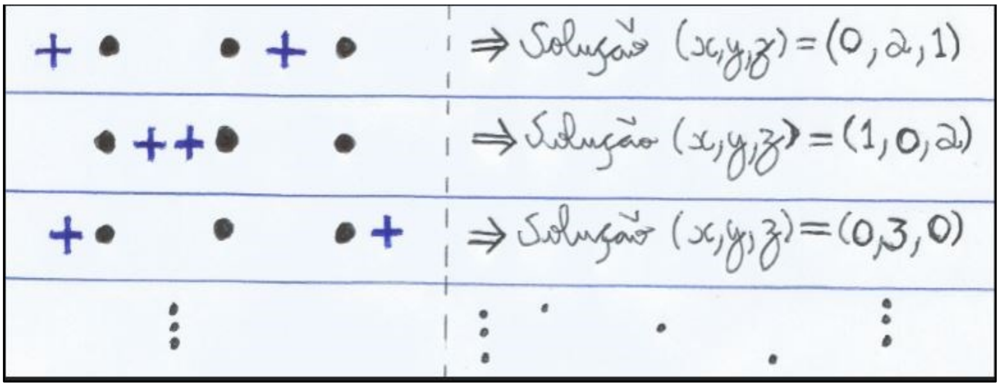
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Uma pergunta inicial que se faz sobre o Algeblocks é sobre o porque de exatamente 10 tipos de peças para compor esse material? Nos trabalhos de Silva (2018) e Espejel (2010) não encontramos respostas para esta pergunta.

Vamos dissertar sobre a resposta para o questionamento exposto. Considerando que temos que selecionar três dimensões, conforme o terno X , Y e $1u$, para determinar o número de casos possíveis, utilizamos alguns conceitos de análise combinatória. Para isso, foi verificado o número possível de soluções inteiras e positivas da equação $x + y + z = 3$, isto é, com $x, y, z \in Z_+$; com x representando a escolha da dimensão X, y representando a escolha da dimensão Y e finalmente, z representa a escolha pela dimensão $1u$.

Uma observação importante que se faz é que caso o conjunto de soluções fosse dado em Z, teríamos infinitas soluções para as ternas x, y, z. Consideramos o conteúdo da **figura 7**, que visa simplificar a obtenção do total destas ternas, utilizando o raciocínio combinatório:

Figura 7: Diagrama de representações para as ternas.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os pontos que representam as 3 unidades da soma e os sinais de adição funcionam como separadores destas unidades na soma. Então, dispomos de um total de 5 objetos, dos quais três deles são repetidos em uma categoria (a dos pontos) e os dois restantes são repetidos em outra categoria (de sinais de adição). Então, temos um caso de permutação com repetição, que pode ser tratada matematicamente da seguinte forma:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = \frac{20}{2.1!} = \frac{20}{2} = 10$$

Observação: $P_n^{\alpha,\beta,\gamma\ldots}$ denota uma permutação de n elementos, cujos quais: α são repetidos, β são repetidos, γ são repetidos. E $P_n^{\alpha,\beta,\gamma\ldots} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\gamma!\ldots}$.

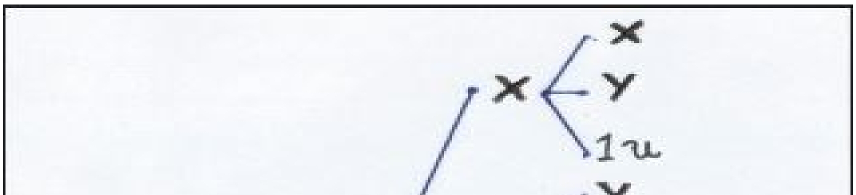
Poderíamos ter obtido mais rapidamente o número de casos possíveis, utilizando o conceito de combinação com repetição. Como a ordem da escolha das três dimensões do terno $X, Ye1u$ podem ser repetidos e fazemos 3 escolhas, temos o seguinte cálculo:

$$CR_3^3 = C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = \frac{20}{2.1!} = \frac{20}{2} = 10.$$

Observação: CR_n^k denota uma combinação com repetição de$n$ elementos (a ordem dos elementos pode ser repetida na escolha), tomando os em conjuntos de classe k e $CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!.[(n+k-1)-k]!} = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$. C_n^k denota a combinação simples de n elementos, tomados em conjuntos de classe k e $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$. Logo, temos estabelecido matematicamente, que existem exatamente 10 modos de dispor as dimensões das peças do Algeblocks.

Conforme Lorenzato (2012), é necessário que o docente antes de apresentar um material didático, esteja atento às suas características. Sugere-se também apresentar indagações como aquela abordada em parágrafos anteriores. Pode ser uma boa sugestão, já que no Ensino Médio, os conteúdos que envolvem análise combinatória são contemplados na abordagem curricular de matemática. Para facilitar o trabalho do docente ao justificar a questão proposta, caso não se tenha desenvolvido o estudo de análise combinatória, sugerimos a apresentação de um diagrama de árvore simplificado, conforme a **figura 8**, que pode mostrar esse fato de forma mais sucinta.

Figura 8: Diagrama de árvore para a obtenção das ternas.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Considerando o diagrama ilustrado nessa **figura 8**, basta percorrer os caminhos estabelecidos, desde seu início e dirigir-se ao final, considerando as três etapas. Os caminhos encerrados em duas etapas não devem ser considerados, pois esgotaram-se todas as possibilidades de escolha das ternas formadas por X , Y ou $1u$.

3.4.1 Proposta alternativa para a construção do Algeblocks

Esse material didático pode ser confeccionado com papel cartão, cartolina, papelão, madeira, plástico, entre outros. Porém, a escolha pelo papel cartão ou cartolina, pode tornar mais acessível em termos de custo esse material. Por outro lado, justifica-se a escolha por essas duas matérias primas, por serem fáceis de se obter em papelarias e estas permitem a escolha pelas cores (não necessariamente as que utilizamos para diferenciar as peças de nosso protótipo); além de tornar o material rígido após a construção.

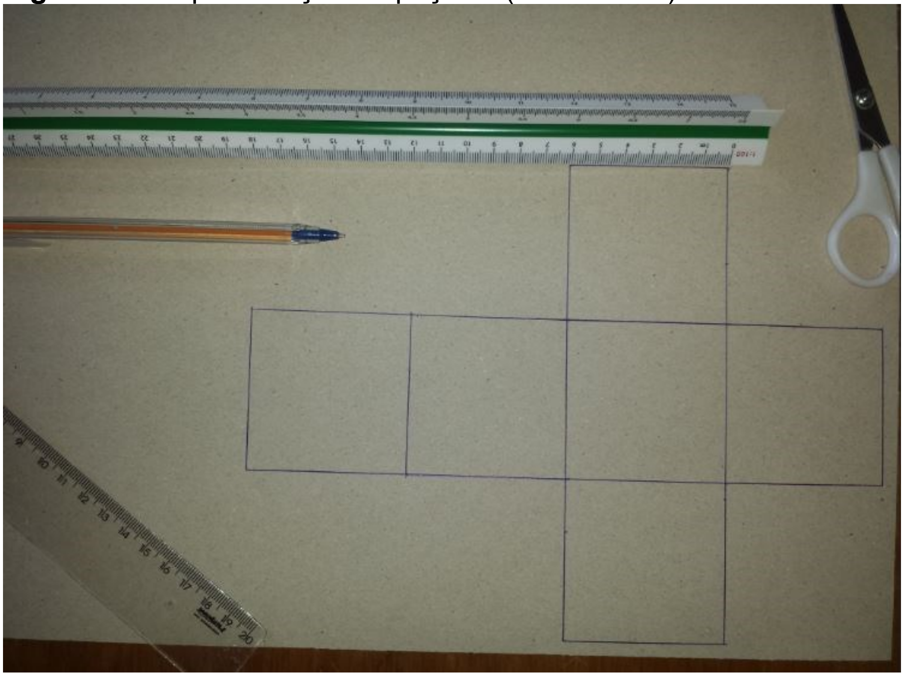
Caso o professor opte pela construção deste material com seus supostos alunos, deve-se estar ciente que será necessário orientá-los para a correta utilização dos materiais. Outro ponto importante, é que como a versão deste material sugerida conta com 72 peças, recomenda-se utilizar cada exemplar para, no máximo 4 possíveis alunos, pois pelo menos, cada um dos integrantes deste grupo devem receber uma peça de cada tipo, permitindo efetuar análises que necessitam de menos peças.

Sistematizamos este processo de confecção em três etapas: planificação, dobradura e colagem.

Na primeira etapa (planificação) os possíveis educandos envolvidos na construção, devem efetuar a planificação dos prismas do Algeblocks, utilizando régua e esquadro, atentos as dimensões sugeridas para as ternas de dimensões ($X = 60\,mm,\ Y = 50\,mm$ e $1u = 35\,mm$) e caso o docente deseje, pode-se optar pelo trabalho com compasso para aumentar a precisão das planificações. Essas dimensões podem ser previamente alteradas pelo docente, caso deseje-se ampliar ou reduzir o tamanho do protótipo.

Uma sugestão é que se pode efetuar uma única planificação para cada tipo de peça e depois utilizar esta como molde. Este molde pode ser contornado sobre a folha de papel cartão ou cartolina, reduzindo o tempo que se é despendido refazendo o processo sucessivas vezes. Por outro lado, se não há uma boa precisão na confecção deste molde, a imprecisão cometida se propagará com mais intensidade nas demais peças. O docente deve prestar todo apoio necessário aos grupos, fazendo visitas periódicas em cada um destes e avaliar o trabalho desenvolvido. Um detalhe importante para a construção destas planificações, é que as bordas para a colagem, devem ter em média 1 cm de espessura. Consideremos o exemplo de pré-planificação de molde para a peça X^3, conforme a **figura 9**:

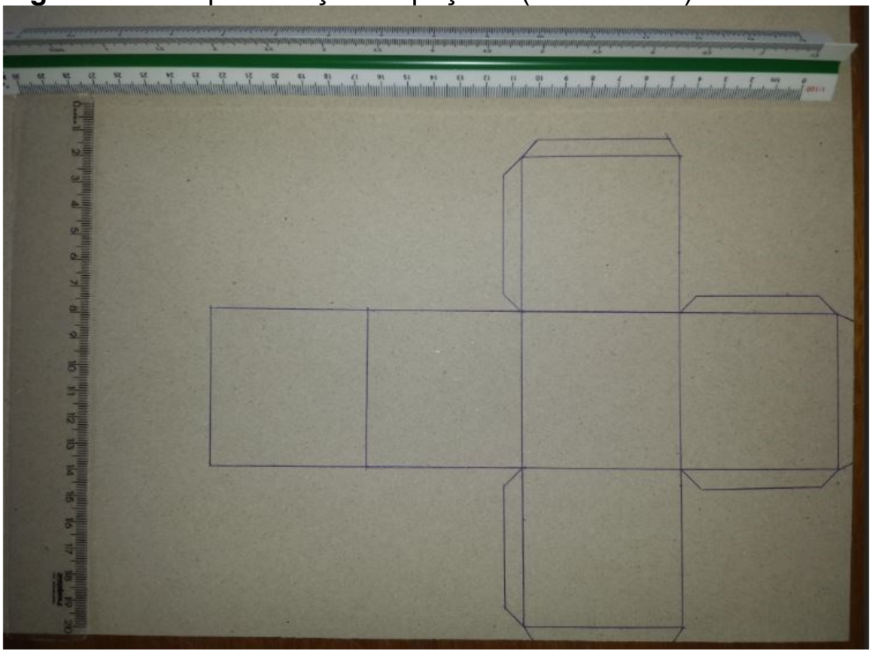
Figura 9: Pré-planificação da peça X³ (sem bordas).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Faz-se necessário construir as bordas para essa planificação. São as bordas que permitem a colagem da planificação desta peça. Consideremos então, o molde de planificação conforme a **figura 10**:

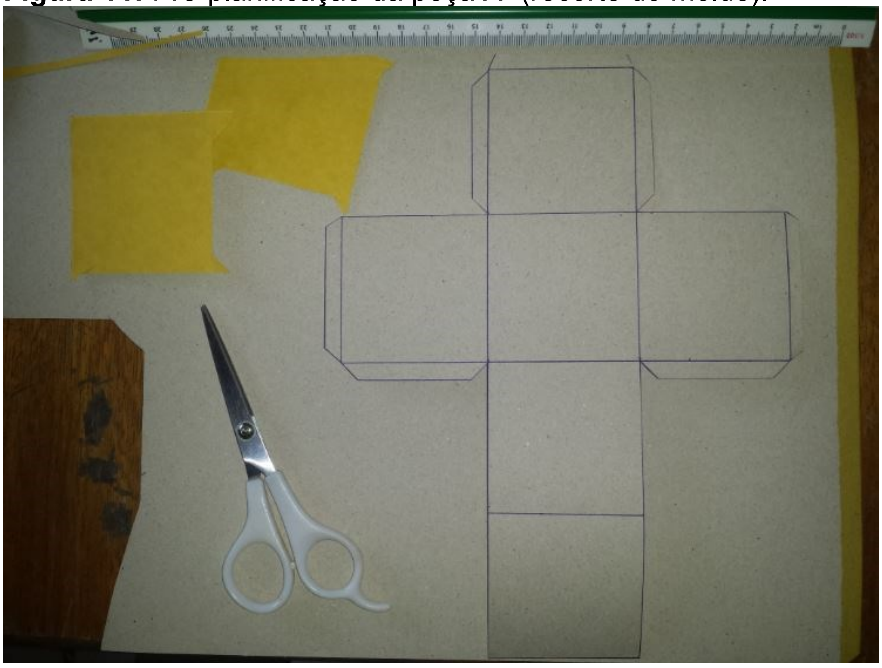
Figura 10: Pré-planificação da peça X³ (com bordas).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após o desenho das bordas, pode-se recortar o molde para a peça, com cautela para que não se corte. Tendo-se esta cautela e efetuados os cortes, obtemos o molde para a peça X^3, conforme a **figura 11**:

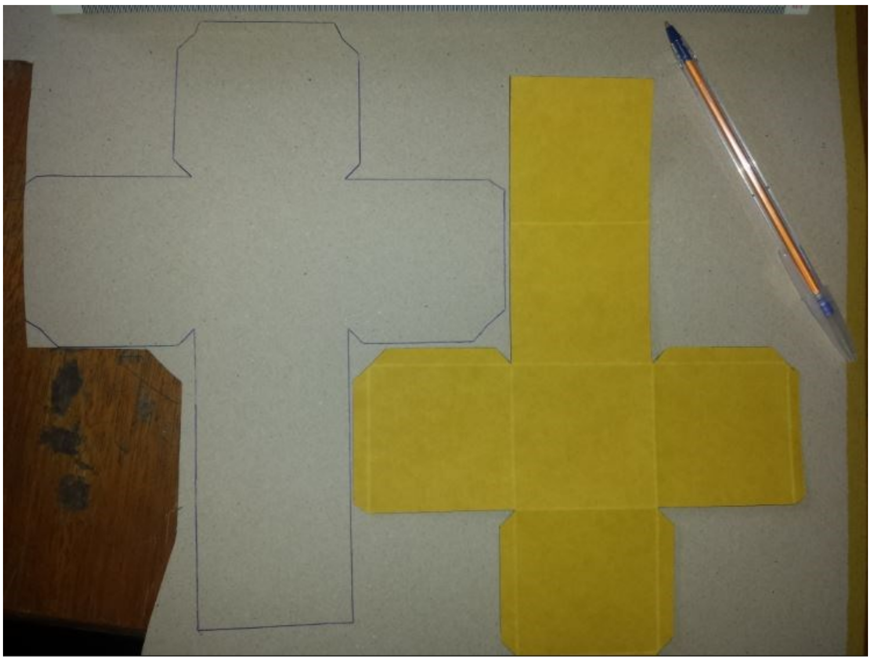
Figura 11: Pré-planificação da peça X³ (recorte do molde).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após a obtenção do molde principal para determinada peça, caso o docente opte por seguir a sugestão da utilização deste, aplica-se o molde sobre o papel cartão ou cartolina, fazendo o contorno, conforme a **figura 12**:

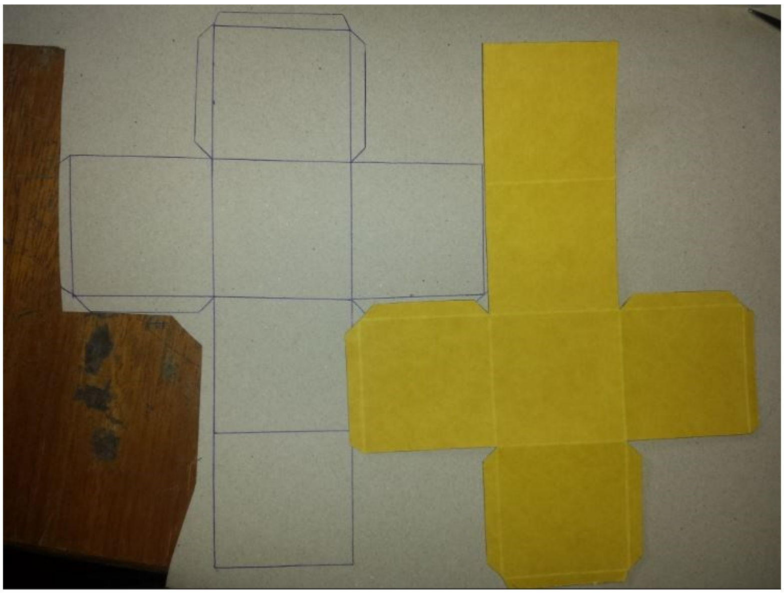
Figura 12: Pré-planificação da peça X³ (aplicação do contorno do molde).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Fazendo o contorno do molde, conforme a **figura 12**, necessita-se efetuar os demais traços internos desta planificação. Uma sugestão interessante é valorizar os vértices do contorno e a graduação da régua. Assim se confere as medidas e pode-se fazer um melhor trabalho ao traçar as semirretas paralelas desta construção. Consideremos a **figura 13**, que mostra essa finalização:

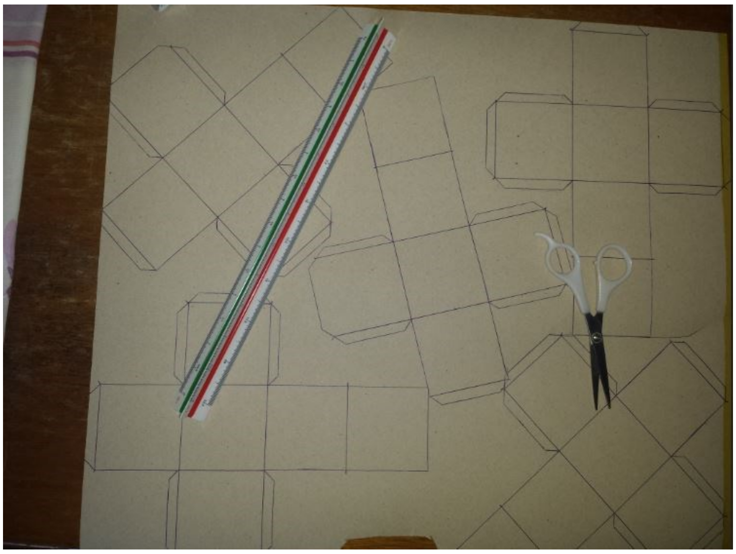
Figura 13: Pré-planificação da peça X³ (finalização da aplicação do molde).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Por outro lado, é interessante tentar utilizar o máximo possível do papel cartão ou cartolina, para que se maximize a produção de peças. Consideremos o seguinte exemplo de disposição das planificações, visando essa maximização, conforme a **figura 14**:

Figura 14: Pré-planificação da peça X³ (tentativa de maximização).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após a implementação de todos esses passos, finaliza-se então a etapa de planificação. Essa etapa é análoga para as demais peças do Algeblocks. Consideremos então, a finalização destas planificações construídas, conforme a **figura 15**:

Figura 15: Conclusão das planificações para a peça X³.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

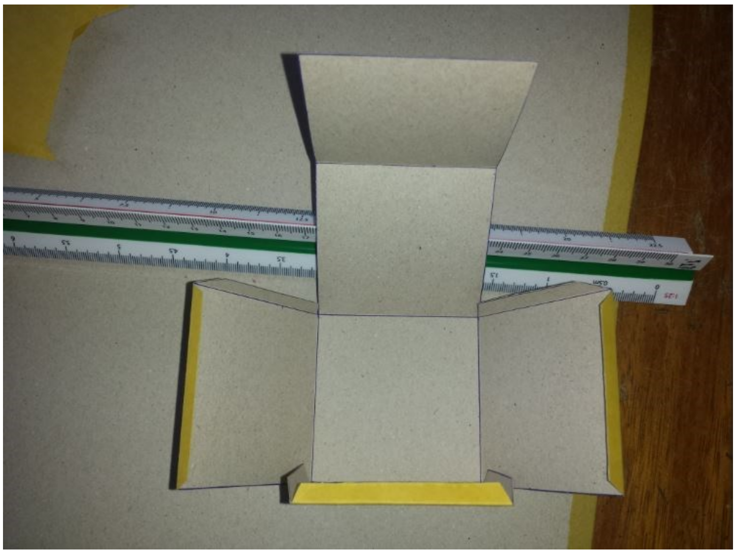
Na segunda etapa (dobradura) os possíveis educandos devem dobrar as faces das planificações construídas para o Algeblocks, utilizando régua como apoio. Vale ressaltar que se essas planificações não forem corretamente dobradas, provavelmente o prisma não irá fechar ou ficará com 'torções' em sua estrutura. Para efetuar as dobras, consideremos o posicionamento da régua, priorizando inicialmente as bordas, conforme a **figura 16**:

Figura 16: Dobras da planificação da peça X³.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Seguindo corretamente os traços internos das planificações, obtém-se o resultado, conforme a **figura 17**:

Figura 17: Finalização das dobras da planificação da peça X³.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

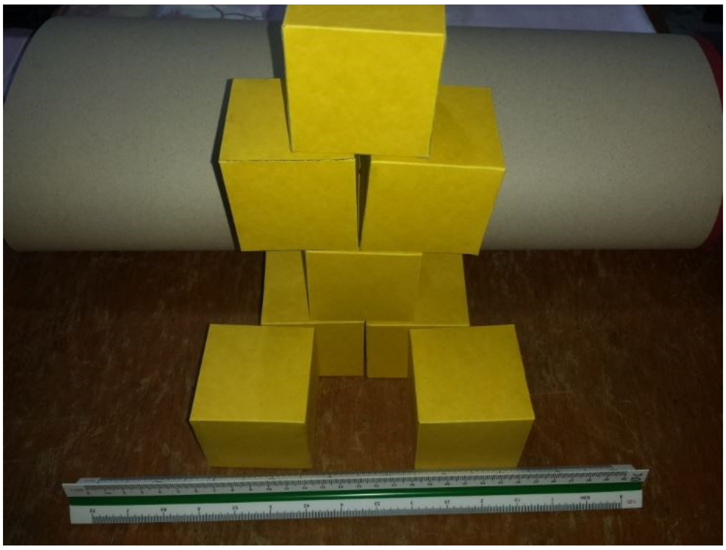
Na etapa final (colagem da planificação) os educandos envolvidos devem efetuar a colagem das faces das planificações construídas para o Algeblocks, com cola de papel ou madeira. Recomenda-se que a face que ficará em contato com uma superfície plana (de uma mesa por exemplo), seja a face que esteja interligada ao máximo de faces possíveis. As demais faces são as que contém as bordas e que necessitam ser coladas; o contrário ocorre com a face ressaltada que não necessita de colagem. Pode-se utilizar outros materiais como apoio para a fixação da cola. Consideremos a **figura 18**, que ilustra o posicionamento sugerido para a colagem:

Figura 18: Colagem da planificação da peça X³.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Efetuando-se corretamente os três passos propostos, pode-se obter as peças X^3 finalizadas para o Algeblocks, conforme a **figura 19**:

Figura 19: Finalização das peças X^3.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Vale ressaltar, que seguindo os passos propostos para a construção das peças X^3, constrói-se as demais peças. O que vai diferir é somente o tamanho das dimensões e a cor a ser utilizada. Encerra-se então a proposta de sugestão para a construção deste material didático.

No próximo capítulo abordamos as tarefas exploratório-investigativas e o conceito de representação figural como base teórico-metodológica de pesquisa com esse material didático.

4 TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS E TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES FIGURAIS

No presente capítulo, conceituamos a abordagem das tarefas exploratório-investigativas como base teórico-metodológica de pesquisa, conforme as principais ideias do autor João Pedro da Ponte e seus colaboradores. No que respeito às representações figurais; dado a natureza geométrica do Algeblocks, vamos utilizar Fischbein (1993).

4.1 CONCEITUAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE ‘TAREFAS’ NA MATEMÁTICA

Antes de conceituarmos as “tarefas exploratório-investigativas” no contexto matemático, o leitor deve preliminarmente compreender a conceituação de tarefa e atividade. Para Ponte (2014, p. 15)

> uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. Mais importante, a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele).

As tarefas são frequentemente (mas não de forma necessária) propostas pelo docente. Uma vez propostas, elas devem ser interpretadas pelo próprio aluno e podem originar atividades muito diversas, ou até mesmo nenhuma atividade;

Sobre a conceituação de tarefas, Ponte (2014, p. 16), sistematiza que

> as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação.

Tal excerto permite-nos concluir que embora as tarefas sejam cruciais na matemática, estas por sua vez, conceitualmente e procedimentalmente falando, podem não apresentar potencialidades na matemática. Podemos reiterar, seguindo a linha de raciocínio de Ponte (2014), que uma atividade engloba uma ou mais tarefas num determinado contexto matemático. Conforme afirma Ponte (2014, p. 17), “é pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor”.

4.2 ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA INSERÇÃO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS-INVESTIGATIVAS

Em termos curriculares na área de matemática, as tarefas que o docente propõe na sala de aula são demarcadores fundamentais do ensino. Ponte (2014) também indica que o docente deve atribuir e elaborar tarefas aos alunos, que se amparem em uma matemática correta e significativa; conhecimentos acerca das compreensões, interesses, experiências dos alunos e no conhecimento das diversas maneiras, considerando como diferentes alunos aprendem matemática em diversas perspectivas.

Ponte (2014), além de apontar que o docente deve considerar vários aspectos matemáticos nas tarefas a serem trabalhadas e em suas formulações, também estabelece que estas devem envolver os alunos em atividades intelectuais, isto é, respeitando as orientações curriculares vigentes. As referidas atividades intelectuais, pontuadas por Ponte (2014), direcionadas aos educadores da área são:

I. desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos;

II. instigar os alunos a fazerem ligações entre conceitos e a desenvolverem um quadro coerente de ideias matemáticas;

III. exigir a formulação, resolução de problemas e o raciocínio matemático;

IV. promover a comunicação acerca da matemática desenvolvida no grupo;

V. representar a matemática como uma atividade humana que está constante desenvolvimento;

VI. mostrar sensibilidade, apoiar-se nas experiências e disposição dos alunos;

VII. visar mobilizar todos os alunos para se ‘fazer’ matemática.

Visando-se compreender a estrutura de formulação da tarefa, Ponte (2014) destaca quatro tipos e discute o modo de trabalhar em sala de aula. Uma primeira distinção básica entre ‘exercício’ e ‘problema’ indispensável, conforme Ponte (2014), foi feita por George Pólya. Um ensino convencional é marcado pelo termo ‘exercício’, que se caracteriza por ser uma ‘questão’, cuja resolução desta necessita de um método de solução apropriado, que deve ser ensinado pelo professor e executado pelo aluno.

Um tipo de tarefa distinto do ‘exercício’ é o ‘problema’. Conforme as concepções de Ponte (2014), um dado problema é uma questão que requer do suposto educando o conhecimento de uma estratégia de resolução, que é desconhecida até o momento para o próprio. Considerando as concepções de Ponte (2014, p. 18), a noção de problema:

> revela-se, ela própria, problemática, havendo muitos entendimentos do que é ou não é um problema e, especialmente, um bom problema para propor aos alunos. Será que os problemas que aparecem nos manuais, às vezes numa seção à parte, são tarefas que podem ajudar a dar corpo a uma orientação curricular alternativa?

De certa forma, é muito difícil definir o que é ou não é um problema ‘as cegas’, e muito menos propor a categorização destes, pois não há critérios bem definidos para tal propósito. Tomando como ponto de partida a distinção entre ‘problema’ e ‘exercício’, Ponte (2014), caracteriza diversos tipos de problemas:

- ✓ De palavras (“word problem” ou problemas verbais);
- ✓ Para equacionar (conhecidos como problemas de equacionamento);
- ✓ Para demonstrar (conhecidos como problemas de demonstração);
- ✓ Para descobrir (problemas de exploração ou investigação);
- ✓ Dá vida real (denominados de problemas contextualizados) e
- ✓ Situações problema.

Para Ponte (2014), os tipos de problemas que se destacam pertencem as três últimas categorias, pela sua relação adjacente à realidade e, em específico, pela sua natureza aberta destes. Logo, podemos inferir, conforme Ponte (2014), que as explorações ou investigações matemáticas associam-se à descoberta de algo pelo educando, ou até mesmo, para o docente. Por outro lado, Ponte (2014) acredita na contraposição entre os termos “exercícios” e “cenários de investigação”, sendo este último referente ao campo de trabalho do docente.

Deste modo, estando estabelecido que um cenário para investigação é local de trabalho que convida os educandos a formularem questões, procurarem explicações, conforme a conceituação de investigação matemática é evidente que não são todos os exercícios de matemática que contemplam essa modalidade metodológica. Todavia, para Ponte (2014), para que o trabalho com as tarefas proceda é necessário que os educandos aceitem o convite proposto pelo professor inicialmente. De modo geral, as tarefas devem ser executadas em cenários de investigação e Ponte (2014, p. 18) define que:

> as tarefas podem remeter para três grandes tipos de referências – à Matemática, à vida real e ao que designa de "semi-realidade" – ou seja, situações com a aparência de reais, mas que na verdade são artificiais e concebidas exclusivamente para a aprendizagem.

Ponte (2014), acredita que o desenvolvimento da autonomia intelectual dos educandos requer em caráter preliminar que estes sejam convidados a realizar "matemática investigativa", isto é, seguindo os principais aspectos do trabalho efetuado pelos matemáticos em sua ciência. Um trabalho deste tipo traz para o docente dificuldades adicionais em relação ao trabalho convencional, forçando o mesmo a alterar o contrato didático pré-estabelecido com os educandos (isto é, caso exista o contrato). Deste modo, os educandos são forçados a sair da denominada "zona de conforto" e colocando-o numa "zona de risco", no qual existe a vantagem deste se apoiar no trabalho colaborativo, realizando com os seus colegas as tarefas propostas pelo docente.

Ponte (2014, p.19) também credita que há distinção entre exercícios, provas ("probes") e puzzles matemáticos:

> os exercícios são tarefas escolhidas dentro de um certo domínio ao serviço da habituação do aluno, tendo em vista o refinamento de habilidades ("skills") e a aprendizagem de memória ("rote learning"). As provas são as tarefas ou questões que têm em vista avaliar a compreensão dos alunos, ao mesmo tempo que servem como veículos para a sua aprendizagem. Finalmente, os puzzles ou problemas não-rotineiros são as tarefas para as quais a pessoa não dispõe de um método de resolução, necessitando de empregar a sua "persistência, curiosidade, coragem, criatividade, iniciativa e sensibilidade estética".

Levando em consideração as diversas tipologias de tarefas matemáticas, Ponte (2014) ressalta as duas dimensões fundamentais das tarefas são o "grau de desafio matemático" e o "grau de estrutura". Conforme Ponte (2014), o grau de desafio matemático é dependente da percepção da dificuldade da questão proposta, podendo variar entre o "reduzido" e "elevado" numa escala pré-estabelecida.

O grau de estrutura engloba o contexto do enunciado de uma dada tarefa, que pode variar entre os polos "aberto" e "fechado". Neste contexto, uma tarefa fechada é claramente enunciado o que é dado e o que se pede do educando, restringindo o conjunto de solução ou soluções desta. Uma tarefa aberta admite alguma indeterminação pelo menos num dos aspetos das tarefas fechadas, por exemplo, a existência de diversas soluções para a tarefa. Associando as duas dimensões de tarefas pontuadas por Ponte (2014), há quatro tipos de tarefa:

I. Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
II. Um problema é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
III. Uma investigação é uma tarefa aberta com desafio elevado e
IV. Uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos.

Ponte (2014, p.21) afirmou que nem sempre fica nítida a linha de demarcação entre os diferentes tipos de tarefa,

> por exemplo, uma certa tarefa pode ser uma exploração ou um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos. Contrariando a ideia que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la, indica que estes aprendem fora da escola muitos conhecimentos que podem mobilizar na aula de Matemática – e é isso que se procura potenciar na abordagem exploratória. Valoriza assim a (re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver uma questão, sublinhando que essa é muitas vezes a melhor forma de aprender.

Deste modo, a bagagem de conhecimentos prévios dos alunos pode alterar a tipologia de uma dada tarefa, implicando que elas podem assumir assim características notáveis dos exercícios, problemas, explorações ou investigações.

Outros pontos importantes para Ponte (2014), além das tipologias das tarefas é a duração e o contexto em que estas se enquadram. Ponte (2014) relata que as tarefas de longa duração, tal como como os projetos, podem ser muito ricas em termos de aprendizagens, mas também há o risco dos alunos se dispersarem na prática.

4.3 OS PROCESSOS UTILIZADOS EM UMA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Ponte (2015) sugere também que o primeiro passo para qualquer investigação é identificar de forma clara o que se pretende solucionar. Sejam tarefas do tipo exercício, problema, investigação ou até mesmo a exploração, o consenso geral é de que se clarifique previamente o que é dado num enunciado e o que se quer que seja efetuado pelo suposto educando. Ainda neste mesmo contexto, Ponte (2015) aponta que há uma estreita relação entre problemas e investigações na matemática e esse fato deve ser levado em consideração pelo docente ao propor tarefas.

Seguindo as principais orientações de Ponte (2015), quando se efetua o trabalho com problemas, naturalmente o objetivo deve ser a sua resolução, assim como no caso das tarefas. Para Ponte (2015, p. 17), “além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original”.

Deste modo, podemos dizer que em alguns casos, a resolução de uma dada tarefa pode transcender a sua finalidade, quando no processo de exploração se fazem descobertas inesperadas. Ponte (2015) também argumenta que mesmo nos casos em que não se consegue resolver tal tarefa, o trabalho efetuado não deve ser desconsiderado, pois neste processo pois sempre se proporciona descobertas desconhecidas até então.

Uma investigação matemática, de acordo com Ponte (2015), normalmente desenvolve-se em quatro momentos principais. O primeiro destes momentos abrange o reconhecimento inicial da situação dada, a sua exploração preliminar bem como a formulação de questões (indagações sobre os dados preliminares). No segundo momento, refere-se ao processo de formação de conjecturas, levando em consideração os dados iniciais. O terceiro momento contempla a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas efetuadas no segundo momento. O quarto e último momento de uma investigação matemática contempla a argumentação, a demonstração da validade de uma conjectura e a avaliação do trabalho efetuado.

Para Ponte (2015), esses momentos, por muitas vezes podem ocorrer de forma simultânea, como por exemplo: a formulação de questões e a conjectura inicial ou a conjectura com seu teste, entre outros.

A atividade matemática dos estudantes em seu processo de resolução da tarefa proposta se dá por meio de representações matemáticas, comumente externalizadas via registros escritos. Na próxima seção abordamos conceitualmente representações matemáticas e, no caso de trabalharmos com figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, finalizamos conceituando representações figurais, no sentido de Fischbein (1993).

4.4 REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Na resolução de uma tarefa é decisivo o modo como os alunos interpretam as representações matemáticas indicadas nos enunciados, muitas vezes, na forma de registro da língua natural e, como criam e interpretam as suas próprias formas de representação. Deste modo, fica estabelecido que é fundamental que o docente compreenda como funcionam tais representações, já que elas normalmente figuram tanto no enunciado, como na resolução de uma tarefa.

Ponte (2014), argumenta que os objetos matemáticos são abstratos e seu acesso é possível pelas formas de representação. Este autor acrescenta que

> a relação entre a representação e o objeto não é biunívoca. Assim, um dado objeto matemático pode ter diversas representações. Por exemplo, o número natural quatro pode ser representado por “4” (dígito),“IV” (numeração romana), “100” (no sistema binário), “quatro” (palavra da língua portuguesa), “four” (em inglês), “●●●●”, etc. (PONTE, 2014, p.23)

Porém, um mesmo registro de representação pode associar-se a diferentes significados. Por exemplo, o símbolo ‘=’ tanto pode representar uma equivalência, quanto o resultado de uma operação (PONTE, 2014). Justamente por este fato, não podemos interpretar uma representação matemática de forma direta, a não ser em um contexto bem definido, contando com um sistema de representação com regras e significados bem estabelecidos.

No caso da geometria recorremos às especificidades de Fischbein (1993) quanto a forma de conceber a externalização das representações matemáticas a partir da ação cognitiva.

Fischbein (1993) argumenta que o objeto geométrico é tratado como conceito figural por conter duas componentes: uma conceitual e outra figural. A componente conceitual expressa propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos através da linguagem escrita ou falada, de acordo com o processo indutivo ou dedutivo utilizado. A componente figural corresponde à imagem mental que associamos ao conceito geométrico, que pode ser manipulada por diversos atos de movimentos.

Fischbein (1993, p. 139) forneceu o seguinte exemplo:

> uma esfera geométrica, por exemplo, é um ideal abstrato, entidade formalmente determinável, como todo conceito genuíno. Ao mesmo tempo, possui propriedades figurativas, antes de tudo uma certa forma. A idealidade, a perfeição absoluta de uma esfera geométrica não pode ser encontrada na realidade.

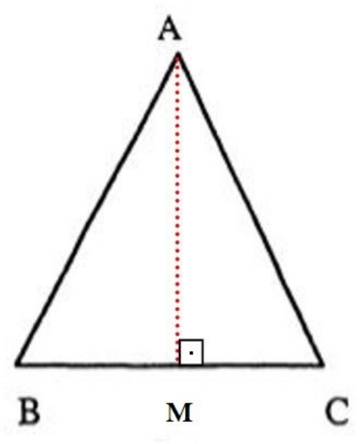
Para Fischbein o que caracteriza um dado conceito é o fato de ele poder expressar uma ideia, uma 'representação geral ideal' de uma classe de objetos, com base em suas características comuns. Por outro lado, a figura, foi tratada por Fischbein (1993, p. 139) como:

> em contraste, uma imagem (nos referimos aqui a imagens mentais) é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. O conceito de metal é a ideia geral de uma classe de substâncias que têm em comum várias propriedades: eletricamente condutivas etc. A imagem de um objeto metálico é a representação sensorial do respectivo objeto (incluindo cor, magnitude etc.).

Consideremos o seguinte exemplo proposto por Fischbein (1993), no qual são utilizadas representações figurais para provar matematicamente que os ângulos da base de um triângulo isósceles coincidem.

Inicia-se então a demonstração, após considerar a representação figural elaborada do triângulo isósceles ABC com $\acute{A}B = \acute{A}C$, conforme a **figura 20**.

Figura 20: Triângulo isósceles de base BC.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Queremos provar que o ângulo B é igual ao C. Pode-se imaginar a seguinte situação: consideremos a projeção $\acute{A}\acute{M}$ da altura desse triângulo que separa o triângulo em dois novos (AMB e AMC). Considerando que M é o ponto médio de BC $\Rightarrow \acute{B}\acute{M} = \acute{M}\acute{C}$, pode-se imaginar a 'dobra' deste triângulo em relação à AM, de modo que AC mova-se para o lado esquerdo ou AB para o lado direito, e se sobreponha os dois triângulos formados.

Sabemos que AB e AC estão com o mesmo comprimento, ângulo AMB e AMC permanecem os mesmos e finalmente, BM e MC coincidem na base. Então, pelo caso LAL de congruência, os triângulos AMB e AMC são congruentes. Consequentemente AC coincidirá perfeitamente com BC, o que pode ser imaginado mentalmente ou mostrado com dobradura caso seja de difícil percepção para o possível educando.

Como consequência, os ângulos B e C devem ser iguais, como esperado.

Nesta prova matemática, conforme Fischbein (1993) em termos de conceitos e imagens mentais (ou figuras), foi utilizada uma certa quantidade de conhecimento expresso 'conceitualmente': os dois lados AB e AC foram declarados iguais, isso porque o triângulo ABC é isósceles.

Foram utilizados também os conceitos de ponto (vértice), lado, ângulo, triângulo, ponto médio bem como as medidas destes entes. Vale ressaltar que pode se efetuar essa demonstração de diversas formas. Porém, na forma que foi feita, ao mesmo tempo em que se desenvolviam os conceitos, utilizamos informações figurativas e 'operações representadas figuradamente'. Principalmente a ideia de separar o triângulo ABC em dois triângulos novos, traçando a altura dele (perpendicular à sua base) e sobrepô-lo ao outro triângulo, imaginando a referida 'dobra', com base em AM.

No contexto desta prova, considerando as referidas representações figurais, Fischbein (1993, p. 140), diz que:

> estamos lidando aqui com uma mistura de duas entidades definidas e independentes, que são ideias abstratas (conceitos), por um lado, e representações sensoriais que refletem algumas operações concretas, por outro? Vamos considerar o núcleo da prova, que é a operação de separar o triângulo ABC de si mesmo e de revertê-lo. Os conceitos não podem ser desanexados, revertidos e correspondidos. Lidamos aqui com descrições de operações aparentemente práticas. Mas, na realidade, é possível destacar um objeto de si mesmo? Certamente não. Essa operação não tem significado concreto.

Conforme os apontamentos de Fischbein (1993), ao efetuar este tipo de demonstração matemática, utilizamos conceitos e operações em ‘um mundo ideal’, com significados ideais. Objetos como vértices, lados, ângulos e suas operações, têm apenas uma existência ideal no domínio matemático. Estes referidos entes geométricos, são caracterizados por Fischbein (1993), como dotados de natureza conceitual. Ao mesmo tempo em que são conceituais, eles têm uma natureza figurativa intrínseca: apenas ao se referir a eles como ‘imagens’, é possível considerar operações como dobrar, reverter ou sobrepor, conforme relata Fischbein (1993).

Certamente, o triângulo que utilizamos e seus elementos não pode ser considerado o único válido para a demonstração conforme argumenta Fischbein (1993), nem os conceitos puros utilizados e nem as meras imagens comuns similares. As operações mobilizadas neste exemplo, seguindo as ideias de Fischbein (1993), não poderiam ter sido executadas com conceitos puros do mundo físico ou com objetos reais. Todavia, essas entidades e operações participaram de uma prova formal, lógica, matematicamente válida e, ao mesmo tempo, a conclusão da igualdade dos ângulos B e C, pode ser verificada na prática, conforme a sugerida dobradura com papel, porém a simples experimentação ou exploração não garante a validade matemática para todos os casos.

As entidades mobilizadas no exemplo, no caso, vértices, lados (segmentos de reta), ângulos, o próprio triângulo e suas as operações, possuem conceitos próprios e qualidades. No entanto, considerando o raciocínio matemático, não podemos nos referir a eles como objetos, materiais ou simplesmente desenhos. Neste contexto, para Fischbein (1993, p. 141), deve se considerar que:

> os objetos materiais - sólidos ou desenhos - são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático lida. Em segundo lugar, apenas no sentido conceitual pode-se considerar a perfeição absoluta das entidades geométricas: linhas retas, círculos, quadrados, cubos, etc.

Seguindo então a argumentação de Fischbein (1993), qualquer modelo para o material didático Algeblocks, conterá os entes geométricos associados as suas formas, mas apenas em caráter conceitual. Por outro lado, convém reiterar que a perfeição para as peças do material não pode ser garantida, já que na etapa de construção os erros ao efetuar as medidas se propagam diversas vezes, ainda mais em peças tridimensionais confeccionadas manualmente.

Neste sentido, mesmo que dispuséssemos de uma tecnologia precisa para construir sólidos geométricos, pelo fato de serem elaborados com materiais do mundo físico, não há como garantir a perfeição absoluta deles. Justamente por este motivo, o Algeblocks pode oferecer uma boa alternativa para representar figurativamente os entes geométricos associados a si e o processo de ensino-aprendizagem com ele estará carregado de conceitos idealizados. Adiante, antes de ser estabelecida a nossa proposta de ensino, ficará claro que o que é visível no mundo físico, não deve ser encarado como justificativa para se validar os conhecimentos matemáticos.

Conforme argumenta Fischbein (1993), as entidades geométricas como pontos (objetos que possuem dimensão zero), linhas (objetos que possuem dimensão um, denominadas de unidimensionais), planos (objetos de dimensão dois, denominadas de bidimensionais) não existem no mundo físico, não têm correspondentes materiais genuínos e deste modo, não podem existir na realidade.

Para Fischbein (1993, p. 141), os objetos reais de nossa experiência prática são necessariamente tridimensionais. Mas mesmo o cubo ou a esfera a que o matemático se refere não existe na realidade, apesar de serem tridimensionais. Tais construções mentais já conhecidas, não devem possuir nenhuma realidade substancial.

Um ponto importante a considerar é que todas essas construções são representações gerais de um dado objeto matemático e Fischbein (1993), acredita que, como todo conceito, não podem ser tratadas como cópias mentais de objetos concretos em particular. Considerando-se o exemplo dado utilizando representações figurais para provar que os ângulos da base de um triângulo isósceles coincidem elaborada anteriormente, Fischbein (1993, p. 141) diz que:

> quando você desenha um determinado triângulo ABC em uma folha de papel para verificar algumas de suas propriedades (por exemplo, as propriedades de suas alturas são simultâneas), você não se refere ao respectivo desenho específico, mas a uma determinada forma que pode ser a forma de uma classe infinita de objetos. Mesmo a forma particular desenhada por você com seus lados e ângulos especificados pode ter a forma de uma infinidade de objetos. Como de fato, lidamos com uma hierarquia de formas, de uma aparentemente particular - mas de fato corresponde a uma infinidade de objetos possíveis - à categoria universal de triângulos.

Diante desta reflexão proposta por Fischbein (1993), fica evidente que a representação figural do triângulo utilizada na demonstração não é o que garante a validade da demonstração matemática estabelecida para o fato, já que teoricamente haveriam infinitos triângulos isósceles a considerar caso a afirmação fosse negativa. Então o idealismo, abstração, perfeição absoluta, universalidade presentes nestas representações são propriedades que fazem sentido somente no campo dos conceitos, isto considerando-se a linha de raciocínio de Fischbein (1993).

Ainda, levando em consideração o exemplo estabelecido para a demonstração com o triângulo, Fischbein (1993) alerta que há uma propriedade que caracteriza as figuras geométricas e que também está conectada com a sua natureza conceitual – a axiomática.

Para Fischbein (1993, p. 141), "as propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições no reino de um determinado sistema axiomático". Neste caso, utilizamos conceitos próprios da geometria euclidiana, e podemos dizer também, que uma figura geométrica neste sistema também tem natureza conceitual.

Uma outra reflexão matemática, proposta por Fischbein (1993, p. 141), que também pode ser explorada com o uso do Algeblocks é que:

> um quadrado não é uma imagem desenhada em uma folha de papel. É uma forma controlada por sua definição (embora possa ser inspirada por um objeto real). Um quadrado é um retângulo com lados iguais. A partir dessas propriedades, pode-se continuar descobrindo outras propriedades do quadrado (a igualdade de ângulos que são todos os ângulos retos, a igualdade de diagonais etc.).

Considerando-se então esta reflexão proposta por Fischbein (1993), pode resultar numa frase similar quando abordada com tarefas exploratório-investigativas: todos os quadrados são retângulos, mas nem todos os retângulos são quadrados.

Neste contexto, conforme a argumentação estabelecida por Fischbein (1993), uma figura geométrica pode ser caracterizada como portadora de propriedades intrinsecamente conceituais. Todavia, uma figura geométrica não deve ser encarada como um mero conceito, conforme orienta Fischbein (1993). Deste modo, uma figura geométrica deve ser uma imagem, uma imagem visual, que certamente é a representação figural para um dado objeto matemático. São dotadas de uma propriedade que os conceitos usuais não têm que é a inclusão da representação mental da propriedade espacial.

Considerando que esta propriedade pode auxiliar muito no trabalho com tarefas exploratório-investigativas, Fischbein (1993, p. 143) diz que:

> os objetos de investigação e manipulação no raciocínio geométrico são então entidades mentais, chamadas por conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais - como idealidade, abstração, generalidade, perfeição.

Considerando-se então essa observação estabelecida por Fischbein (1993), as representações figurais são indispensáveis para a nossa proposta de ensino utilizando o Algeblocks nas tarefas exploratório-investigativas elaboradas, já que este material possuí tais atribuições apontadas. Por outro lado, Fischbein (1993), alerta que a representação que temos em mente, ao idealizar uma figura geométrica, não é desprovida de qualquer qualidade sensorial (como por exemplo a cor, textura, entre outros), exceto as propriedades espaciais.

Neste sentido, Fischbein (1993) quer se referir ao fato que as qualidades ou aspectos físicos não surtem efeito perante a abordagem matemática da figura. Ainda neste contexto, Fischbein (1993, p. 143) propõe o seguinte questionamento, que pode ser explorado pelo docente numa tarefa de caráter exploratória, clarificando ainda mais a importância das representações figurais:

> pergunto-me: que forma terei como resultado do corte de um cubo com um plano através das diagonais de duas faces opostas? A operação é fácil de imaginar. Mas duas realidades mentais distintas precisam ser consideradas. Uma é a representação de um cubo real (algo como um cubo de madeira) e a operação de cortá-lo. É uma imagem sensorial como tantas imagens que vêm à mente como efeito de nossa experiência prática: a casa em que moro, a sala em que trabalho, representações de parentes, amigos, estudantes etc.

Além das imagens associadas a este exemplo, existe um outra não perceptível sensorialmente, mas sim pensada ou idealizada, o objeto genuíno próprio do raciocínio geométrico. Para Fischbein (1993), essa é a imagem à qual nos referimos ao executar uma operação matemática. Convém reiterar então, que a representação figural para um objeto matemático, produzida mentalmente é abstrata e também dissocia de conceitos puros da geometria.

Relevando as concepções de representações figurais, Fischbein (1993), relatou que estamos muito acostumados a estabelecer distinções entre imagens, abordando-as como ‘figuras na cabeça’, e conceitos. Partindo deste princípio recaímos, nas ideias gerais, que não carregam aspectos sensoriais, o que pode dificultar a aceitação de um construto que teria, simultaneamente, qualidades espaciais conceituais e propriedades genuínas da imaginação.

Até este presente momento deste estudo, deve estar bem esclarecido para o leitor, que a fusão entre conceito e figura resulta nas referidas representações figurais conceituadas por Fischbein (1993). Essas, por sua vez, associadas ao raciocínio geométrico, expressam apenas uma situação extrema ideal interiorizada pelo indivíduo, que por outro lado para Fischbein (1993), não pode alcançada de forma absoluta por causa de restrições psicológicas.

Ao efetuar o trabalho com a mobilização das representações figurais, Fischbein (1993) defende que se deve levar em consideração, três categorias de entidades mentais quando se referirmos a figuras geométricas:

I. A definição (de forma clara, evitando ambiguidades sobre o dado conceito matemático associado a ela);
II. A imagem (baseada na experiência perceptivo-sensorial, como a imagem de um desenho) e
III. O conceito figurativo ou representação figural. A representação figural é uma realidade mental, conforme define Fischbein (1993), é o resultado do constructo tratado pelo raciocínio matemático no campo da geometria. Essa representação é indissociável dela.

Em muitas vezes, Fischbein (1993) refere-se a conceito figurativo como equivalente a representação figural. Essas representações, perante o olhar matemático, são desprovidas de propriedades sensoriais do concreto (como cor, peso, densidade, entre outros), mas sempre exibe propriedades figurativas.

No processo de construção mental das representações figurais, Fischbein (1993, p. 148) diz que:

> esse construto figurativo é controlado e manipulado, em princípio sem resíduos, por regras e procedimentos lógicos no domínio de um determinado sistema axiomático. A dificuldade de aceitar a existência desse terceiro tipo de entidades mentais é determinada pelo fato de estarmos diretamente cientes apenas da representação mental (incluindo várias propriedades sensoriais como a cor) e o conceito correspondente. Precisamos de um esforço intelectual para entender que as operações lógicas-matemáticas manipulam apenas uma versão purificada da imagem, o conteúdo espacial-figurativo da imagem.

Não só no constructo destas representações mentais, mas sim também nas suas representações externas, seja através da escrita por exemplo, ainda esboça a interferência dos conceitos mentais agregados pelo indivíduo. Para Fischbein (1993), os significados estão além da materialidade do termo expresso: o significado é uma ideia fixada por um complexo de relacionamentos ou estabelecidos por experiências de um indivíduo, ou seja, pode ser constituído empiricamente. Por outro lado, relevando a concepção de significado, o conceito figurativo também é tratado como significativo por Fischbein (1993). As particularidades desses tipos de significados é que eles incluem a configuração como uma propriedade intrínseca.

Neste contexto, considerando-se a definição de 'lugar geométrico' bidimensional: consiste no conjunto de pontos de um plano que gozam de uma determinada propriedade, sem exceções e somente esse conjunto, temos que o significado genuíno da palavra circunferência na geometria, como é manipulada pelo nosso processo de raciocínio, não seria redutível a uma definição puramente formal.

Um outro termo importante que deve ser bem explicitado é a palavra 'figura'. Para Fischbein (1993), o termo figura apresenta-se de forma ambígua e pode denominar uma numerosa variedade de significados. Neste sentido, quando utilizamos este termo, queremos nos referir apenas a imagens espaciais. Fischbein (1993), afirma que, normalmente, uma figura possui uma certa estrutura, uma forma ou 'Gestalt' (estudo da percepção humana em relação as formas, a existência de padrões ou configurações de comportamento visual que temos). Figuras geométricas satisfazem a essa caracterização proposta por Fischbein (1993), mas este autor adiciona mais algumas especificações:

- Uma figura geométrica é uma imagem mental, cujas propriedades são completamente controladas por uma ou mais definições e indissociável dela (as);
- Um desenho não é a figura geométrica propriamente referida, mas sim uma incorporação material ou gráfica, ou concreta, deste modo, as representações figurais não são genuinamente só constructos mentais, já que o termo figura é indissociável desta teoria e
- A imagem mental de uma figura geométrica é, geralmente, a representação do modelo materializado dela.

Levando-se em consideração o termo figura e as especificações estabelecidas por Fischbein (1993), temos que a figura geométrica é apenas a ideia correspondente em que a entidade figural abstrata, segue idealizada e purificada por vieses puros da matemática, estritamente determinada por sua definição.

As figuras geométricas, por outro lado, não são as únicas imagens controladas pelos conceitos ou definições correspondentes a elas. Fischbein (1993, p. 149), relata que, nas ciências empíricas, o conceito tende a aproximar-se da realidade existente correspondente, enquanto na matemática é o conceito, por meio de sua definição, que determina as propriedades das figuras correspondentes.

Há um outro ponto muito interessante pontuado por Fischbein (1993), ao mobilizar a importância das representações figurais nesta área do conhecimento. Fischbein (1993), argumenta que uma diversidade de processos investigativos feitos por matemáticos pode ser mobilizada mentalmente, seguindo um sistema axiomático próprio, ressaltando também que o cientista empírico deve, em certo momento de sua investigação, retornar a fontes empíricas.

Considerando-se o fato de que observações empíricas não conduzem a verdades matemáticas, convém alertar de antemão que embora utilizemos o material didático Algeblocks como suporte para estabelecer representações figurais de objetos matemáticos, não se deve encarar esse uso como uma validação de um fato matemático.

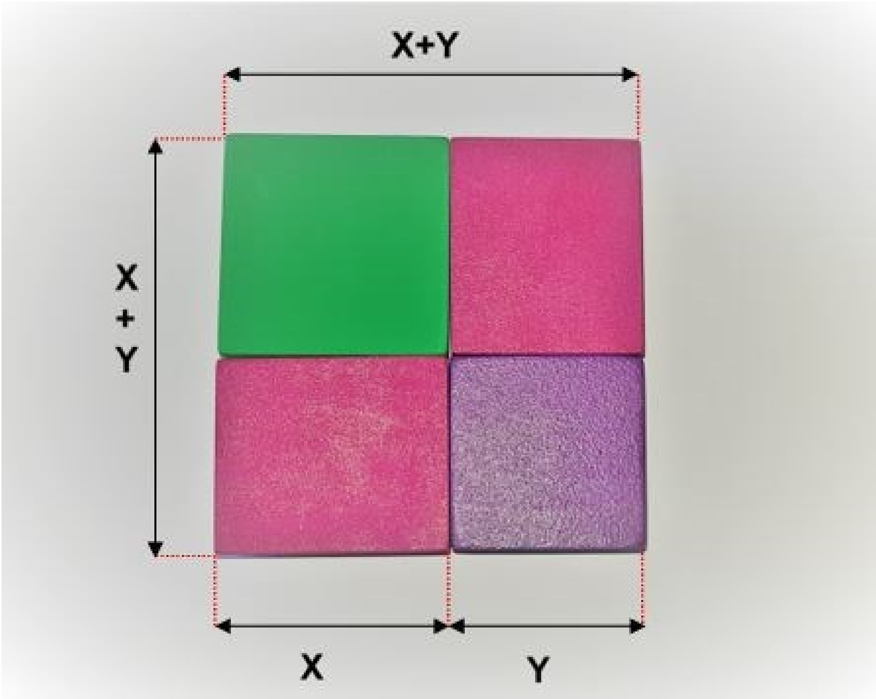
Justamente por isso, Lorenzato (2012) já alertava que um material didático nunca deve ultrapassar a finalidade de recurso auxiliar para o ensino, muito menos pode ser visto como um meio de consolidação de justificativas matemáticas. Deste modo, podemos dizer que com o uso do Algeblocks é possível estabelecer representações figurais, que podem ser auxiliares no contexto das tarefas exploratório-investigativas.

4.4.1 O uso do Algeblocks na mobilização das representações figurais

Apresentamos três exemplos para o uso do material didático Algeblocks, valendo-se dos produtos notáveis e noção de sequência.

Em relação ao produto notável, uma aplicação do material didático em um contexto bidimensional, abordamos o quadrado da soma de dois termos. Esse produto notável leva o quadrado da soma de dois números reais em outra expressão algébrica também equivalente. Consideremos então que queremos construir um quadrado de lado $X + Y$, utilizando o Algeblocks, conforme conteúdo da **figura 21**:

Figura 21: O produto notável quadrado da soma.



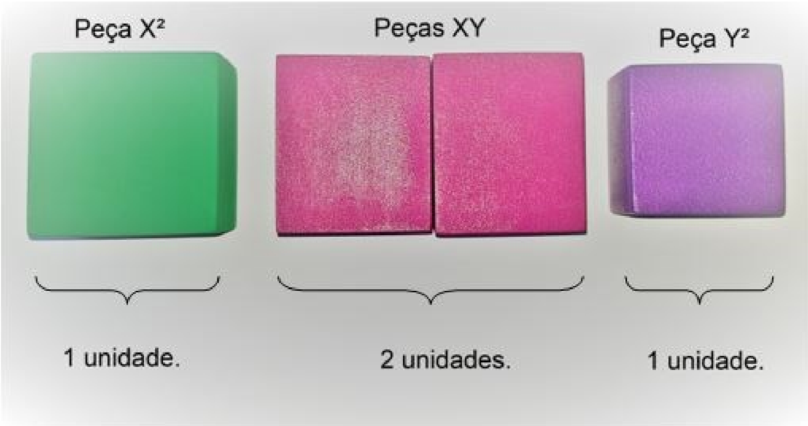
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na construção do quadrado de lado $X + Y$, foram utilizadas 4 peças do Algeblocks, sendo que cada lado deste, possui conceitualmente medida equivalente $X + Y$ também. Seguindo este raciocínio, utilizam-se peças com lados (também correspondentes as suas medidas) X e Y, estabelecendo que a reunião dessas peças equivale a soma das medidas. Sabemos que esse conceito de medida e de lado são próprios da matemática e conforme Fischbein (1993), nossa representação figural não é perfeita.

O procedimento de reunião das peças, visando consolidar a representação figural desejada é controlada por conceitos próprios da geometria euclidiana, que também pode ser efetuado mentalmente.

Considerando a expressão algébrica que temos para a ‘área A’ deste quadrado, estabelece-se que $A = (X + Y)^2$. Fica claro, que há uma diferença entre o conceito de área e sua figura, conforme Fischbein (1993) já havia nos alertado. Consideremos então, a **figura 22**, que contempla uma outra disposição dessas peças:

Figura 22: Peças utilizadas no produto notável quadrado da soma.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ambas as disposições destas peças, estabelecidas nas **figuras 21** e **22**, utilizam as peças X^2, XY e Y^2. Pelas atribuições espaciais do Algeblocks já conhecidas pelo leitor, uma das dimensões de cada uma destas peças é equivalente à $1u$ – uma unidade e, por esse motivo, desconsideramos essa dimensão para efetuar o trabalho, tratando somente o bidimensional. Deste modo, somente as faces do Algeblocks são consideradas nessa análise.

Sabemos que conceitualmente, a área de um polígono pode ser definida como a reunião das áreas de todos os polígonos em seu interior, ou seja, esse conceito puro da geometria euclidiana implica numa 'soma', considerando as diversas regiões do polígono referido. Deste modo, no nosso exemplo, conforme a **figura 22**, temos que a área do quadrado é equivalente a soma das faces consideradas do Algeblocks, então $A = X^2 + 2.XY + Y^2$. Logo, como as duas disposições das peças implicam em áreas equivalentes ($A = A$), tem-se que $(X + Y)^2 = X^2 + 2.XY + Y^2$.

Neste exemplo sucinto, temos claramente que o Algeblocks fornece a resposta de forma direta para o produto notável, abordado com conceitos próprios da geometria euclidiana. Mas há um problema conceitual associado a esta simples demonstração, pois estamos considerando X, Y reais.

Fazemos então, a seguinte pergunta para o leitor: a validade dessa demonstração decorre pelas suas representações figurais associadas? Claramente a resposta é 'não'. A justificativa ocorre devido à seguinte observação já feita neste capítulo: as representações figurais são indissociáveis de conceitos genuinamente geométricos, conforme Fischbein (1993). O conceito central da demonstração é o de medida, justamente o qual está causando uma inconsistência matemática. Quando foi estabelecido geometricamente que X, Y e $X + Y$ são medidas, tem-se que considerar que na geometria euclidiana, a medida deve se sempre positiva, que é uma grandeza que deve representar significativamente a medida de um segmento de reta, neste caso.

Deste modo, se fossem X, Y reais positivos, ou seja, dever-se-ia ter $X > 0, Y > 0 \Rightarrow X + Y > 0$ porque são medidas presentes nas representações figurais utilizadas. É absurdo, neste caso, que as medidas $X \leq 0, Y \leq 0$ ou mesmo $X + Y \leq 0$. Sugerimos ao leitor, tentar imaginar um quadrado com lado de medida, como um contraexemplo elementar.

Pode ter gerada uma certa dúvida no leitor: qual a finalidade de apresentar então, uma demonstração invalida? Acreditamos, que, em alguns casos, o incorreto uso do material didático Algeblocks pode levar a este tipo de inconsistência matemática, mas convém reiterar conforme Lorenzato (2012), que o material didático deve ser utilizado somente como um auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de matemática. Neste sentido, o Algeblocks dá a noção geral de como fica a forma algébrica do referido produto notável.

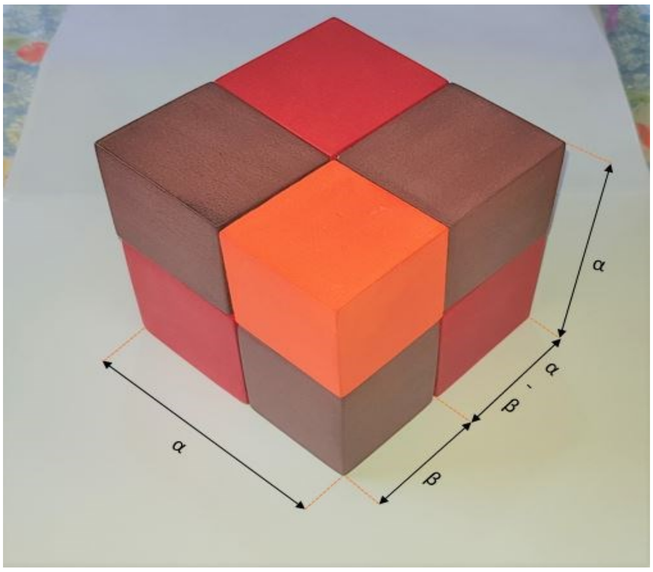
Algebricamente, termos que efetuar somente uma distributiva em relação as somas dos conteúdos dos binômios: $(X + Y)^2 = (X + Y).(X + Y) = X^2 + XY + YX + Y^2 = X^2 + 2.XY + Y^2$. Tal expressão é válida $\forall X, Y \in R$. Uma observação importante é que esse tratamento de forma algébrica apontada, é controlada totalmente por conceitos abstratos e puros da álgebra, principalmente na distributiva. A propriedade distributiva não pode ser visualizada em representações figurais, mas sim, compreendida como um procedimento matemático orientado, a ser efetuado. Uma outra observação importante é que, numericamente falando, ambas as demonstrações são válidas, mas conceitualmente não.

Em certos momentos do ensino fundamental, pode ser difícil de ensinar os educandos a aplicar a distributiva, então o docente pode utilizar o Algeblocks como recurso auxiliar, trazendo um contato maior com a manipulação de materiais concretos. Reafirmamos que Lorenzato (2012) defende a necessidade do processo de ensino-aprendizagem a partir do concreto. Diante disto, o Algeblocks pode ser um aliado do docente, nos momentos em que os supostos educandos não têm uma 'maturidade matemática' suficiente, para encarar certos objetos matemáticos de forma abstrata.

Consideramos o próximo exemplo de aplicação de nosso material didático em um contexto tridimensional, abordando o produto notável conhecido por diferença entre dois cubos, de forma similar ao exemplo anterior. Esse produto notável ou caso de fatoração, leva a diferença entre os cubos de dois números reais em outra expressão algébrica equivalente.

Vamos estabelecer a diferença entre os cubos de dois números reais α, β, utilizando o Algeblocks. Em termos algébricos, a representação para essa diferença é $\alpha^3 - \beta^3$. Podemos fazer sempre a troca das incógnitas correspondentes às dimensões das faces das peças do Algeblocks, sempre denotando corretamente quais serão consideradas. A construção da representação figural que associa as peças do Algeblocks nestes termos requer um pouco mais de empenho e atenção que na estabelecida no exemplo anterior, já que consideramos as três dimensões, conforme o conteúdo da **figura 23**:

Figura 23: O cubo inicial para a diferença entre dois cubos.



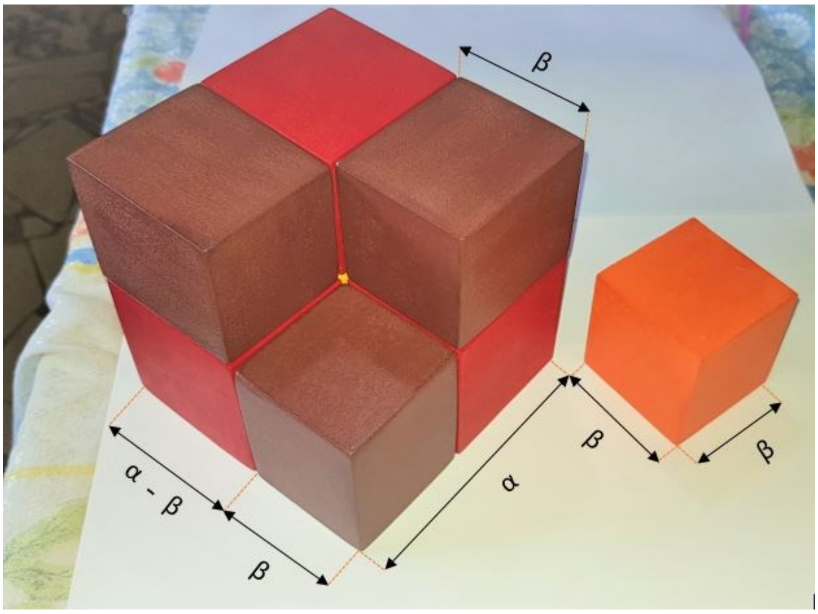
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na construção do cubo de aresta α, foram utilizadas 8 peças do Algeblocks, sendo que cada lado deste novo cubo formado a partir da reunião das peças, que possui diversos conceitos geométricos associados à sua representação figural. Seguindo este raciocínio, utilizam-se peças com arestas (também correspondentes as suas medidas), com base nas peças do Algeblocks, que contém as dimensões X e Y, de modo que a troca de variáveis estabelecida implica em $X + Y = \alpha$ e $Y = \beta \Rightarrow X = \alpha - Y = \alpha - \beta$. Fica estabelecido que a reunião destas peças leva numa soma (de volumes em especial) e a soma das arestas é equivalente a soma das medidas correspondentes, bem como as diferenças. Sabemos que esse conceito de medida e de aresta são próprios da matemática e que estão associadas às dimensões espaciais deste cubo.

Conforme as ideias de Fischbein (1993), nossa representação figural, além de não ser perfeita, certamente não é a única. O procedimento de reunião das peças, visa consolidar a representação figural desejada, de modo que seja mais fácil fazer o tratamento algébrico do produto notável, já que há diversas maneiras de se estabelecer tal figura ou procedimento. Vale reiterar que estes processos são controlados por conceitos próprios da geometria euclidiana, e que também podem ser desenvolvidos mentalmente.

Considerando a expressão algébrica associada ao 'volume V' deste cubo, temos que $V = \alpha^3$. É evidente, que os conceitos divergem, em termos de volume, área de superfície, a sua figura, conforme Fischbein (1993), que já havia nos alertado, pois a representação figural não é a única e nem a mais correta. Consideremos então, a **figura 24**, que contempla a retirada do cubo de aresta β e volume β^3, da reunião das peças:

Figura 24: O cubo retirado na diferença entre dois cubos.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Ambas as disposições destas peças, mostradas nas **figuras 23** e **24**, utilizam as peças X^3 (peça amarela posicionada ao fundo da representação figural), X^2Y (peças vermelhas), Y^2X (peças marrons) e Y^3 (peça laranja). Pelas atribuições espaciais do Algeblocks já conhecidas pelo leitor, consideramos todas as dimensões espaciais ofertadas pelo material para efetuar o trabalho, tratando então, do tridimensional neste exemplo. Deste modo, somente as faces do Algeblocks são consideradas nessa análise.

Sabemos conceitualmente, que o volume de um poliedro pode ser definido como a reunião dos volumes de todos os poliedros que o compõem, ou seja, esse conceito puro da geometria euclidiana implica numa 'soma', considerando as diversas regiões do polígono referido. Vale reiterar que a diferença volumes (em módulo), leva num volume de outro poliedro, dissociado da parcela que foi retirada em termos de volume.

Deste modo, no nosso exemplo, conforme a **figura 23**, temos que o volume do cubo maior, minuendo o volume do cubo de aresta β é equivalente a diferença entre os volumes, estabelecidas conforme as representações figurais via Algeblocks, então $V-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$. Diferente do exemplo anterior, essa análise tridimensional requer mais procedimentos para determinar o produto notável. Estabelecemos então, o procedimento algébrico a seguir, operando em termos de volumes:

$$
\begin{aligned}
V-\beta^3 &= \alpha^3-\beta^3 \\
&= \overbrace{\alpha^2}^{\text{área da base do prisma inferior.}} \;.\; \underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{altura do prisma inferior.}} \\
&+ \overbrace{(\alpha^2-\beta^2)}^{\text{área da base do polígono superior.}} \;.\; \underbrace{\beta}_{\text{altura do poliedro superior.}} \\
&= \alpha^2.(\alpha-\beta) + \overbrace{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)}^{\text{produto notável}-\text{diferença entre dois quadrados.}} .\beta \\
&= \overbrace{(\alpha-\beta)}^{\text{fator comum em evidência.}} .[\alpha^2+(\alpha+\beta).\beta] = (\alpha-\beta).(\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2).
\end{aligned}
$$

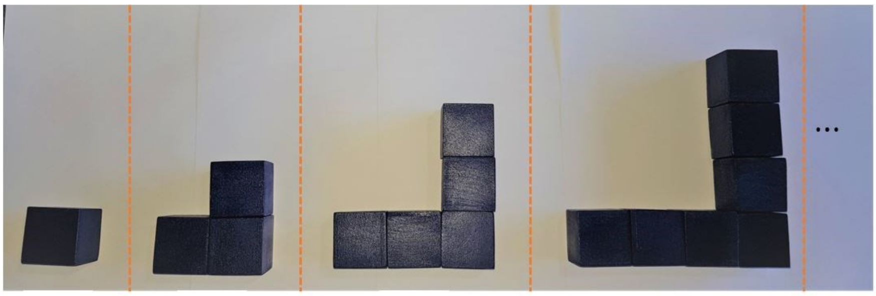
Logo, tem-se o produto notável procurado, tem a forma $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta).(\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2)$. O tratamento algébrico dado para a expressão pode ser obtido com outros desenvolvimentos, o que vai depender de como se faz a observação da disposição dos prismas, já que temos mais entes geométricos no meio tridimensional. Convém reiterar que é necessário compreender que a representação figural mental fala forte neste exemplo, já que a aplicação do Algeblocks mobiliza mais conceitos abstratos e puros da geometria euclidiana, quando se envolve a terceira dimensão. Tal atribuição implica na utilização dos conceitos matemáticos presentes no meio bidimensional (área da base dos poliedros, que figura de forma forte), bem como é imprescindível o uso do produto notável conhecido como diferença entre dois quadrados (que também pode ser abordado com o Algeblocks), e que tal expressão algébrica correspondente é $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta).(\alpha + \beta)$, dados $\forall \alpha, \beta \in R$. Sugerimos ao leitor, verificar a diferença entre dois quadrados, utilizando representações figurais próprias deste material como exercício.

Nesse exemplo mais elaborado do que o anterior, temos claramente que o Algeblocks não fornece a resposta de forma direta para o produto notável, abordado com conceitos próprios da geometria euclidiana, mas fornece meios para que se visualize de forma clara em sua representação figural, quais procedimentos algébricos e geométricos devem ser mobilizados.

Mas ainda há um problema conceitual associado à esta demonstração, assim como na anterior, pois $\alpha, \beta \in R$. Não há poliedros com dimensões negativas e nem nulas, deste modo, podemos dizer que quaisquer demonstrações desta natureza, elaboradas com o uso deste material didático devem ter a mesma inconsistência. Porém o Algeblocks deve servir somente como base de apoio para o estabelecimento das representações figurais, que atuam como auxiliares aos registros algébricos. Então a validade destas provas, não decorrem pelas representações figurais estabelecidas com o material (mobilizando os entes geométricos), mas sim, da conversão do registro de representação geométrico para o algébrico, efetuando-se então posteriormente, o tratamento algébrico destas informações.

Vamos então ao próximo e último exemplo de aplicação de nosso material didático em um contexto bidimensional ou tridimensional (depende da forma que o leitor encara a análise), abordando a noção de sequência (uma progressão aritmética essencialmente), de forma totalmente diferente dos exemplos anteriores. Vale notar que uma dada sequência numérica ou padrão, carrega fortemente os conceitos de ordenação e cardinalidade (quanto à posição dos termos e o conjunto a ser mobilizado para a 'chegada, em alguns casos' - N), estabelecendo-se associações biunívocas nestes. A rigor, uma sequência real (normalmente denotada por a_n, na área), é uma função tal que: $a: N \longrightarrow (A \subseteq R)$, de modo que cada $n \mapsto a_n \in R$, sendo A a imagem da função a. Em alguns casos usa-se, $n \in N \cup \{0\}$. Consideremos então, um caso mais simples e acessível para possíveis educandos do ensino médio em N, mobilizando os n primeiros números impares, bem como a sua soma, a seguir, utilizando o Algeblocks como material de aporte. Consideremos então, a **figura 25**, que ilustra a sequência a que nos referimos:

Figura 25: Os primeiros naturais ímpares.



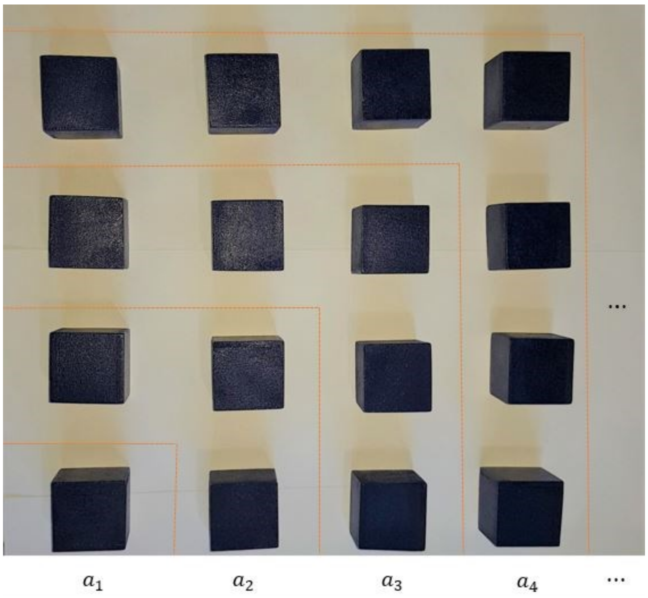
a_1 a_2 a_3 a_4 $\cdots$

Fonte: Arquivo do pesquisador.

A sequência estabelecida na **figura 25**, utiliza em sua representação figural somente um tipo de peça - $1u^3$, que associa a noção de uma unidade cúbica. Consideremos então, que devemos abordar a sequência numericamente e expandi-la. Então temos que: $\{a_n\} = \left\{ a_1 = 1, a_2 = 1 + \overbrace{2}^{1\ vez.} = 3, a_3 = 1 + \overbrace{2+2}^{2\ vezes.} = 5, a_4 = 1 + \overbrace{2+2+2}^{3\ vezes.} = 7, \cdots, a_n = 1 + 2.\overbrace{(n-1)}^{n-1\ vezes.} = 2n - 2 + 1 = 2n - 1 \right\} = \{1,2,3,5,7,\cdots,2n-1\}.$

O tratamento que pode ser dado para essa sequência é a sua observação, como uma progressão aritmética de primeiro termo igual à 1 e razão igual à 2. Mas o objetivo do exemplo proposto não é simplesmente representar e tratar dessa sequência numericamente, mas sim, manipular a representação figural anterior, resultando na sua soma. Vejamos esses procedimentos matemáticos na **figura 26**:

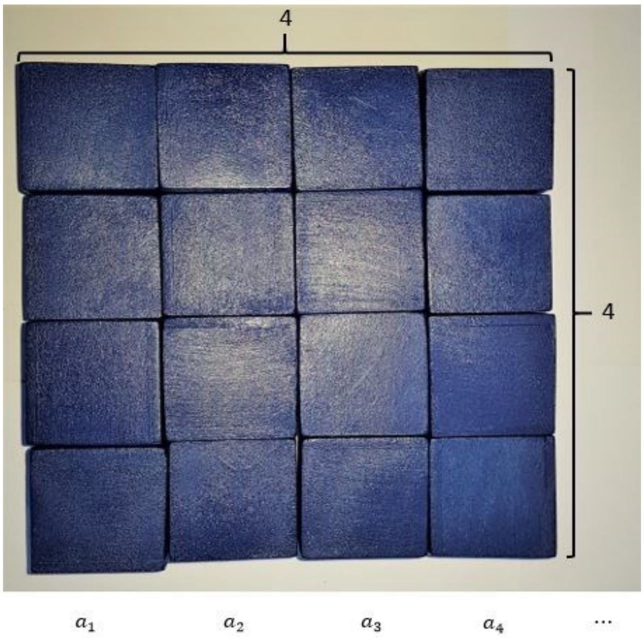
Figura 26: Reordenamento da disposição sequencial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Separando cada conjunto de peças e fazendo essa organização de cada termo da sequência, podemos então, construir uma espécie de quadrado na representação figural. Percebe-se que para cada termo subsequente há sempre a formação de um quadrado maior, associando sempre a posição com o número ímpar de peças unitárias. Vejamos então, a seguir, uma outra representação figural, estabelecida na **figura 27**:

Figura 27: Reordenamento final da sequência para conjectura.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural, permite-nos conjecturar que quando efetuamos a união de n termos, precisamos de n^2 peças para construir a soma. Com essa representação, já manipulada, fica fácil de encontrar essa conjectura, mas se a organização estivesse diferente, talvez fosse mais difícil de visualizar mentalmente esse quadrado associado.

Conforme Fischbein (1993), há diversas representações figurais para um dado objeto matemático, como por exemplo, poderíamos ter usado pontinhos para representar a cardinalidade de cada grupo associado à um termo, numa posição. Não há representações figurais certas e nem erradas para Fischbein (1993), pois elas, geralmente são idealizadas mentalmente no mesmo momento. Por quê utilizar o Algeblocks em sequências? Esse é o tipo de pergunta que o docente deve se fazer no processo de elaboração de uma tarefa, mobilizando temas matemáticos com materiais didáticos.

Neste exemplo, o papel do Algeblocks é ser um recurso lúdico em sua manipulação ou exploração, já que esta, permeia o desenvolvimento do raciocínio matemático indutivo – característico desta área do conhecimento. Se esse exemplo fosse proposto conforme a proposta em tarefa exploratório-investigativa, conforme Ponte (2015), a tarefa até esse momento foi exploratória. Seria investigativa se fosse provado matematicamente que a soma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2, i \in N$$

A somatória estabelecida equivale a dizer que:

$$\sum_{i=1}^{n} 2.i - 1 = n^2, i \in N$$

Porém, para que se garanta esse fato, faz-se necessário utilizar o método da indução finita em n, o que não é um conteúdo matemático de ensino médio. Deste modo, as aplicações deste material, se hipoteticamente fosse inserido neste contexto, com o trabalho em tarefas exploratório-investigativas, teríamos a limitação destas somente às explorações, ou no máximo, elaboração de conjecturas sem justificativas matemáticas, conforme orientações de Ponte (2015).

No próximo capítulo apresentamos a proposta de ensino composta por quatro tarefas envolvendo o material didático Algeblocks.

5 A UTILIZAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO ALGEBLOCKS EM TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

No quinto capítulo desta dissertação de mestrado dedicamos à apresentação das tarefas exploratório-investigativas propostas, buscando contribuir no desenvolvimento da terceira à quinta competência específica (estabelecidas no **quadro 1**), conforme a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), já abordadas no segundo capítulo, sabendo que cada competência, em seu desenvolvimento, carrega uma diversidade de habilidades matemáticas. Convém reiterar que tais habilidades se condicionam ao uso do Algeblocks nesta proposta, visando mobilizar então, o desenvolvimento das três competências especificas pontuadas. Deste modo, reiteramos as principais competências específicas abrangidas pela proposta, na **tabela 2**:

Tabela 2: As 3 Competências Específicas da BNCC pertinentes para a proposta.

Identificador da Competência	Descrição da Competência Específica
(a)	Interpretar e construir modelos matemáticos.
(b)	Utilizar representações matemáticas para um mesmo objeto matemático na resolução de problemas.
(c)	Desenvolver habilidades voltadas às capacidades de investigação, formulação de explicações e argumentos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Consideramos outro ponto importante de (BRASIL, 2018), as habilidades matemáticas, que são conexas com as competências específicas da **tabela 2**. Sabemos que cada competência específica pode contemplar uma ou mais habilidades matemáticas, não havendo uma ordem preestabelecida para a sua mobilização pelo suposto educando. Em termos de habilidades associadas à abordagem de conteúdos matemáticos, destacamos estas, conforme a **tabela 3**:

Tabela 3: As habilidades matemáticas conexas com as competências.

Identificador da Habilidade	Descrição das Habilidades Matemáticas
I	Medida e cálculo de perímetros, área e volume.
II	Resolução de expressões algébricas.
III	Estudo de relações algébricas, inclusive de natureza funcional.
IV	Propriedades de polígonos regulares.
V	Estudo e resolução de sistemas lineares.
VI	Estudo de prisma reto-retângulo: área de superfície, volume e Relação de Euler.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os conteúdos citados foram escolhidos e estabelecidos, dada a potencialidade do material didático Algeblocks, independente da disposição dos conteúdos no decorrer dos estudos no Ensino Médio - EM. O motivo de não estabelecer os conteúdos conforme um currículo uniformizado, é que já foi discutido no segundo capítulo este fato. A BNCC – (BRASIL, 2018), deixa estabelecido que a organização curricular para o EM, não deve ser estabelecida de forma única, quando se propõe a constituição dos itinerários formativos. Deste modo, vele reiterar que cabe ao docente mobilizar a escolha destes conforme a etapa de ensino pretendida, de modo que contemplem as exigências de (BRASIL, 2018), em termos de competências e habilidades matemáticas, bem como seus desenvolvimentos. Seguiremos então, com a nossa sequência de tarefas propostas.

5.1 OS ZEROS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Essa foi a primeira tarefa exploratório-investigativa contemplada em nossa proposta de ensino. A inspiração para que consolidássemos a proposta desta tarefa, consistiu numa abordagem particular do conteúdo matemático ‘Funções Quadráticas’. Por limitações próprias do material didático Algeblocks, foi possível contemplar somente a questão relativa aos zeros desse tipo de função, que geralmente é um tema abordado no primeiro ano do ensino médio, por volta do segundo bimestre. Esse tema é muito relevante e por isso, ele é abordado no início do ensino médio, pois é uma ferramenta matemática indispensável para diversos temas subsequentes a ele. Conforme a definição de função quadrática, estabelecida por Lima (2017), uma função $f: R \longrightarrow R: (x \longmapsto f(x))$ denomina-se quadrática quando são dados números reais a, b e c $(a \neq 0)$, tais que $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, $\forall x \in R$. Por causa das restrições do material didático Algeblocks, recomendamos que o docente utilize o conjunto $N \cup \{0\}$ ou no máximo Z, para os coeficientes a, b e c $(a \neq 0)$. Os zeros da função quadrática, são todos os valores reais de x, para que a função f se anula, ou seja, em termos matemáticos: são todos $x \in R: f(x) = 0$, ou seja $a.x^2 + b.x + c = 0$. A abordagem dos zeros da função quadrática recai na resolução de equações do segundo grau, conteúdo que deve ter sido estudado pelo aluno no ensino fundamental.

Para Lima (2017, p. 108), o estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Lima (2017), também argumenta que os problemas que recaem numa equação do segundo grau, estão sempre entre os mais antigos da matemática, como os problemas escritos em linguagem cuneiforme, elaborados pelos babilônios há cerca de quatro mil anos. Problemas que envolvem a determinação de dois números conhecendo a sua soma e seu produto, foram tratados pelos babilônios em termos geométricos, determinado as dimensões de um retângulo conhecendo seu semi-perímetro e a área deste. Esses problemas se reduziam somente as equações do segundo grau do tipo $x^2 - s.x + p = 0$, sendo $s =$ semi-perímetro e $p =$ a área do retângulo. Lima (2017), considerou que a determinação das raízes 'ou zeros' deste tipo de equação é um conhecimento milenar estabelecido pelos babilônios, que só no após o fim do século XVI passou a ser abordado com fórmulas resolutivas. Esse fato ocorreu por que os babilônios não representavam por letras os coeficientes associados à equação. Considerando a equação $x^2 - s.x + p = 0$, Lima (2017, p. 108), relatou a regra utilizada pelos babilônios em sua resolução era o algoritmo:

> eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da doma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Nas notações atuais, para determinar os números procurados, sendo $s =$ 'semi-perímetro' e $p =$ 'a área do retângulo' associado à sua representação figural e a equação, temos:

$x = \frac{s}{2} + \sqrt[2]{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]}$ e $s - x = s - \left\{\frac{s}{2} + \sqrt[2]{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]}\right\} = s - \frac{s}{2} - \sqrt[2]{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]} =$ $\frac{s}{2} - \sqrt[2]{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]}$. Essas são as raízes fornecidas pelos babilônios para a equação $x^2 - s.x + p = 0$. Conforme Lima (2017), os babilônios deixaram os registros escritos, mas não as justificativas para o estabelecimento da regra ou, sua demonstração matemática. Sabemos que se existe a representação figural para o retângulo, certamente $\left(\frac{s}{2}\right)^2 > 0$, mas caso $\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{s}{2}\right)^2 < p$, os babilônios diziam que os números não existiam, o que é correto atualmente, quando consideramos os números reais. Caso $\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p < 0$ fosse validada naquela época, teríamos $\sqrt[2]{\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]}$, que resulta na extração da raiz quadrada de um número negativo. Esse fato não motivou os babilônios a investigarem matematicamente a questão, postergando então a descoberta dos números complexos. Os números complexos só foram admitidos matematicamente somente no século XVI, com a formula resolutiva para equações do terceiro grau (conhecida popularmente como Fórmula de Cardano).

Estabelecendo-se então que o interesse de nossa tarefa exploratório-investigativa proposta foi mobilizar o estudo das raízes das funções quadráticas, que reduzem-se a abordagem das equações do segundo grau $a.x^2 + b.x + c = 0$ com a, b e c $(a \neq 0)$ sendo números do conjunto $N \cup \{0\}$ ou no máximo em Z (para o uso do Algeblocks), seguimos com o enunciado. **Observação**: não explicitamos os conjuntos para os coeficientes associados às equações no enunciado, com a finalidade de conferir abertura a tarefa exploratório-investigativa.

5.1.1 A tarefa exploratório-investigativa da Função Quadrática

Consideremos uma função quadrática f, de modo que $f: R \longrightarrow R: \left(x \mapsto f(x)\right)$ tal que $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ com $(a \neq 0)$. Os zeros dessa função são todos os valores para $x \in R$, tal que $f(x) = 0$.

a) Utilizar o Algeblocks com procedimentos algébricos e geométricos para determinar os zeros da função f, tal que $f(x) = 2.x^2 + 4.x - 16$. Apresente os cálculos e as representações figurais utilizadas nos procedimentos. Após sua resolução, crie uma equação deste tipo e resolva utilizando os mesmos procedimentos. **Observação importante**: não utilize outro artificio a não ser o Algeblocks.

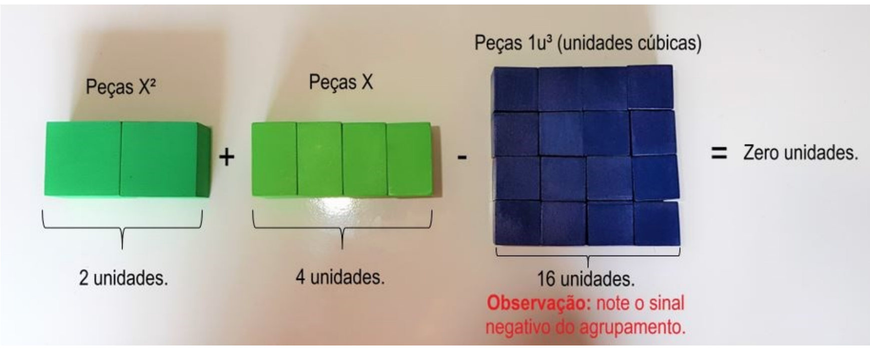
b) Utilizando os procedimentos anteriormente mobilizados, use o Algeblocks para obter a Fórmula de Bháskara.

c) A fórmula anteriormente encontrada se valida pela utilização do Algeblocks? **Dica**: apresente contraexemplos geométricos, testando as soluções encontradas.

5.1.2 Resolução e discussão da tarefa exploratório-investigativa da Função Quadrática

✓ Resolução para o **item a)**: neste item da tarefa exploratório-investigativa inicial, de forma preliminar deve mobilizar os supostos alunos a recordarem do conceito de zeros da função quadrática. Neste aspecto, o que se espera é que todos os possíveis educandos envolvidos na prática, já compreendam a resolução de uma equação do segundo grau. Até o início do ensino médio, os educandos já tiveram contato com a fórmula de Bháskara, cujo qual é o método resolutivo para estas equações. Mas o método a ser utilizado para determinar os zeros da função f, tal que $f(x) = 2.x^2 + 4.x - 16$, não poderá ter o emprego da fórmula resolutiva, deixando os educandos fictícios somente com o material didático Algeblocks e meios para que eles produzam os registros escritos. O que está sendo pedido inicialmente são as soluções para a equação $2.x^2 + 4.x - 16 = 0$, pois estas soluções são claramente, os zeros 'ou raízes' da função dada. Construímos uma proposta de resolução para ela, usando o Algeblocks, sabendo inicialmente que precisamos representá-la conforme a **figura 28**:

Figura 28: Representação inicial da equação 2.x²+4.x-16=0.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

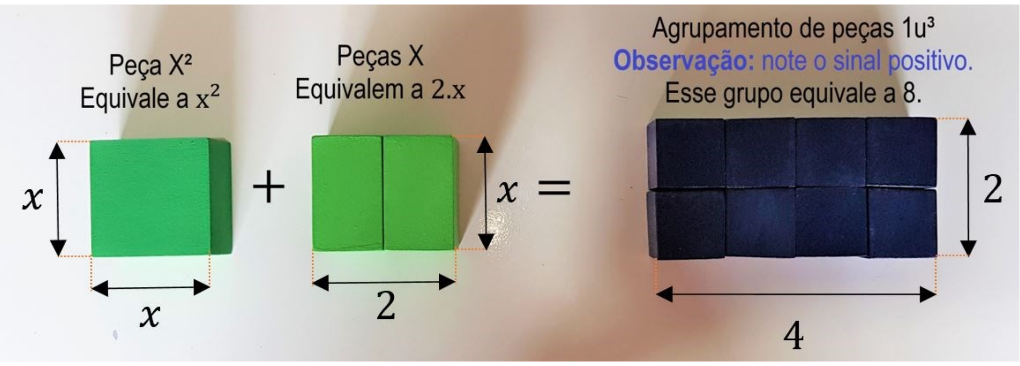
Conforme a representação figural estabelecida na **figura 28**, temos um exemplo de disposição para as peças do Algeblocks, permitindo a visualização da equação que foi estabelecida no enunciado deste item. Faz-se necessário ao docente e ao suposto educando compreender, que nesta representação, a cardinalidade dos grupos de peças é relevante na representação figural inicial. Ela é estabelecida entre os coeficientes da equação e o número de peças correspondentes dos blocos do Algeblocks utilizados. Como no membro direito da equação não há peças, então é dito que temos 'zero unidades', pois zero é justamente, o valor da função f. Faz-se então a primeira manipulação da representação figural para a equação, conforme a **figura 29**:

Figura 29: Manipulação inicial da equação 2.x²+4.x-16=0.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

O tratamento algébrico que se dá na **figura 29**, é a divisão de ambos os membros da equação por 2, visando transformar o coeficiente '2' que acompanha o termo x^2 (associado as peças X²), correspondente a '1' (uso de somente uma peça X²). Esse procedimento facilita a resolução para a equação e está associado a aplicação de conceito de inverso multiplicativo. Em linguagem algébrica temos: $2.x^2 + 4.x - 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{2.x^2+4.x-16}{2} = \frac{0}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2.x^2}{2} + \frac{4.x}{2} - \frac{16}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2.x - 8 = 0.$ Deste modo, basta adicionar 8 unidades (das peças 1u³) a ambos os membros da igualdade (conforme o princípio aditivo $a - a = 0, \forall a \epsilon R$), obtendo a representação figural seguinte, conforme a **figura 30**:

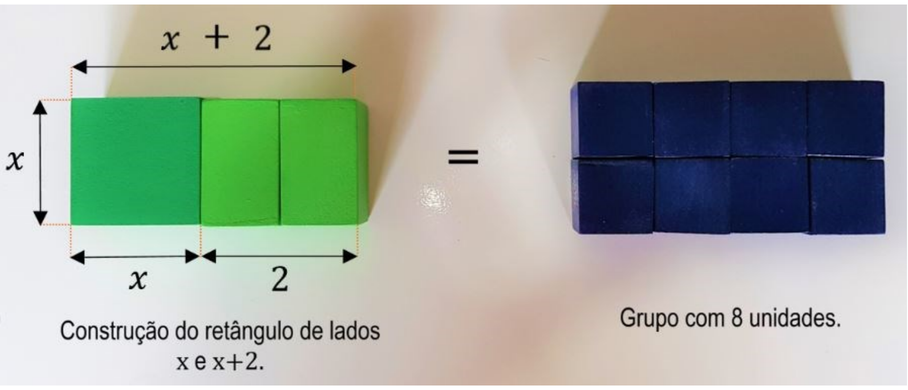
Figura 30: Transferindo as unidades para o membro direito da equação x²+2.x-8=0.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após a suposta 'transferência' das unidades que estavam no membro esquerdo da equação, para o direito, o sinal do grupo de peças que era negativo, passa a ser positivo. Podemos dizer que está bem estabelecida a presença de conceitos figurais geométricos nesta exploração algébrica (até o momento), pois figura o conceito geométrico de medida. Como fica difícil estabelecer o conceito aditivo, foi necessário omitir sua utilização na representação figural usando o Algeblocks. Mas no tratamento algébrico estabelecido pela representação figural, efetuamos o seu emprego: $x^2 + 2.x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2.x \underbrace{-8+8}_{0} = \underbrace{0+8}_{8} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2.x + 0 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2.x = 8.$ Não é necessário que o suposto aluno apresente em sua resolução o passo-a-passo detalhado usando axiomática, mas convém reiterar que para nós educadores, isso é essencial. Desde que o possível educando consiga estabelecer a representação figural com o Algeblocks conveniente e fazer o tratamento algébrico para a equação, já é o suficiente para essa exploração, pois caso contrário, o material didático dificulta ainda mais a abordagem para o tema e tira o foco do possível aluno envolvido. Seguimos então, com a **figura 31**:

Figura 31: Organizando os membros da equação x²+2.x=8.

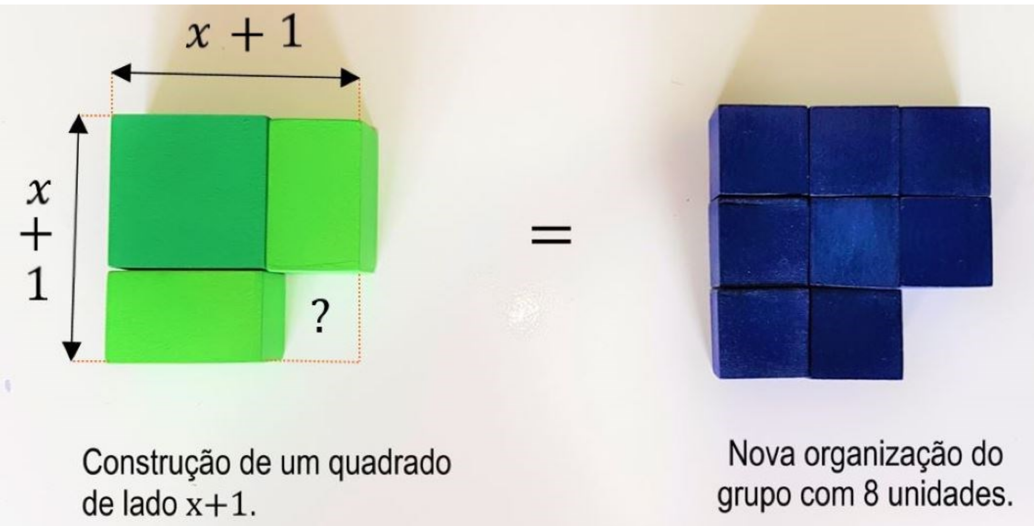


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Com a organização no membro esquerdo da equação estabelecido na **figura 31**, fica mais evidente a exposição dos conceitos associados a representação figural (conceitos próprios da geometria Euclidiana). Com essa organização, já podemos descartar a terceira dimensão do Algeblocks (equivalente a 1u), pois essa dimensão é comum (profundidade dos grupos de peças), igual a 1 em termos algébricos e não interfere em termos de cálculo neste contexto.

Desprezando-se então a terceira dimensão do Algeblocks, cabe apenas a análise bidimensional nas representações figurais. Neste sentido, agora temos a presença de um retângulo de lados x e $x + 2$, cuja área equivale a $8u^2$ (unidades quadradas). O tratamento algébrico para os entes geométricos estabelecidos a ser mostrado se faz da seguinte forma: $x^2 + 2.x = \overbrace{x}^{\text{Fator comum em evidência.}} .(x + 2) = 8$. Ao efetuar a exposição do fator comum em evidência, o suposto educando, utilizando a ideia de 'tentativa ou erro', pode obter tranquilamente as soluções para a equação, com testes numéricos. Caso a resolução deste item vá para as tentativas numéricas do suposto aluno e ele acerte, a resolução deve ser considerada correta, pois o enunciado de uma exploração, não deve 'dirigir o aluno fictício' em sua condução, conforme as ideias de Ponte (2014). Por outro lado, caso os possíveis educandos sigam a resolução completa, apresentamos a transformação do retângulo num quadrado (popularmente conhecido como método de completar quadrados), como alternativa para solucionar o impasse. A noção inicial do método a que nos referimos, foi aplicado na **figura 32**:

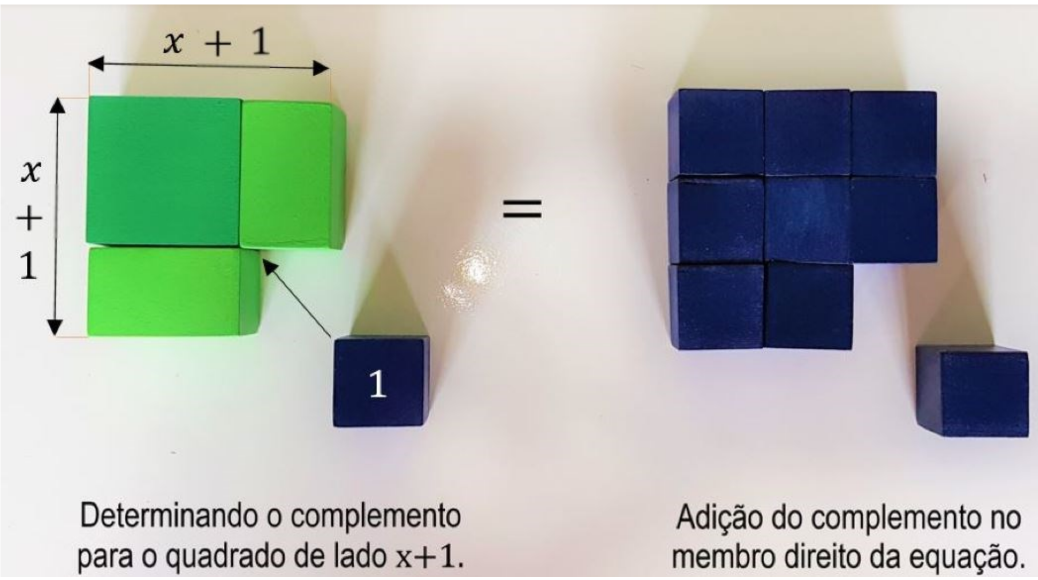
Figura 32: Completando o quadrado do membro esquerdo da equação x²+2.x=8.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A construção do quadrado de lado $x + 1$, a partir do retângulo de lados x e $x + 2$ original, pode levar o possível educando a estranhar a ideia, pois não há como formar de imediato, tal quadrado. Desloca-se então a metade do grupo de peças X, sobre outro lado adjacente à um vértice da peça X², conforme o exposto na representação figural. O sinal de interrogação, contido na **figura 32**, mostra a necessidade de se preencher tal região, isto é, em termos de área. Mostramos o complemento correto, para que se possa fazer o preenchimento da região a que nos referimos, conforme a **figura 33**:

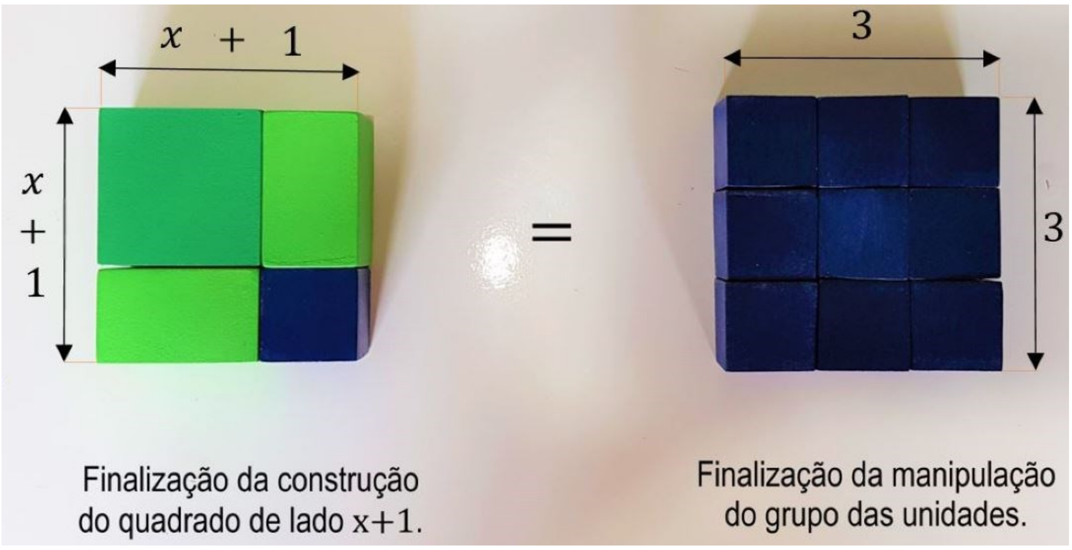
Figura 33: Estabelecendo o complemento para o quadrado do membro esquerdo da equação $x^2+2.x=8$.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após o suposto educando notar que a região a ser preenchida é um quadrado com lado igual a 1 (resultante da decomposição do retângulo anterior e reagrupamento das peças do Algeblocks), ele deve colocar esse complemento em ambos os membros da equação. Como os conceitos associados à essa decomposição e composição são puramente figurais, deve-se manter o foco geométrico para a compreensão. O tratamento que se dá para os conceitos de áreas é algébrico, então se o suposto educando adiciona uma nova peça na composição, é equivalente a somar a área equivalente a ela em cada membro da equação que relaciona essas informações. Consideremos então a representação figural final, necessária nesta resolução, conforme a **figura 34**:

Figura 34: Finalizando a manipulação do membro direito da equação x²+2.x+1=9.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após completar o quadrado no membro esquerdo da equação em termos geométricos, fica evidente ao educando fictício o tratamento algébrico que se dá: $\overbrace{x^2+2.x+1}^{Disposição\ dissociada\ das\ peças\ do\ Algeblocks.} = \overbrace{8+1=9}^{Área\ resultante.} \Leftrightarrow \overbrace{(x+1).(x+1)}^{Fatores\ da\ área\ do\ quadrado.} = \overbrace{(x+1)^2}^{Binômio\ associado\ à\ área\ do\ quadrado.} = 9 \Leftrightarrow \sqrt[2]{(x+1)^2} = \sqrt[2]{9} \Leftrightarrow |x+1| = |3| = 3 \Leftrightarrow x+1=3$ ou $x+1=-3 \Leftrightarrow x=3-1=2$ ou $x=-1-3=-4 \Longrightarrow Se 2.x^2+4.x-16=0, x \in \{-4,2\}$.

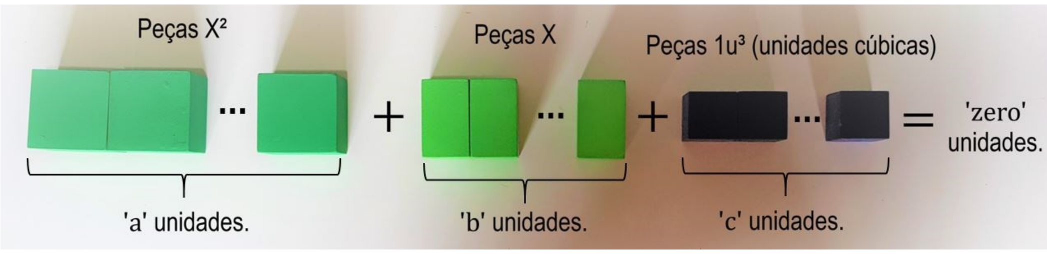
As soluções esperadas dos supostos alunos, para a equação $2.x^2+4.x-16=0$, são $x=2$ ou $x=-4$, justamente as raízes da função f, o que parcialmente completa a resolução deste item. A completa resolução para este item da tarefa, que tem caráter exploratório, se dá após a solução do exemplo dado e a apresentação de um novo exemplo, constando também a resolução com o Algeblocks. É claro que a função que consta em nosso exemplo foi escolhida convenientemente para que o possível aluno obtivesse de forma mais rápida a solução, bem como a denotação dos coeficientes nas representações figurais fosse facilitada. É possível utilizar o Algeblocks para obter os zeros de quaisquer funções quadráticas, mas o processo é dificultado caso se implemente o conjunto dos reais nos coeficientes. Por exemplo, o suposto educando que escolher hipoteticamente, uma função $g$do tipo $g(x) = \sqrt[2]{2}.x^2 - \sqrt[3]{3}.x - \sqrt[4]{\pi}$, terá imensas dificuldades para usar o Algeblocks em sua resolução. Justamente por esse motivo, orientamos que o docente restrinja o conjunto para os coeficientes no momento da aplicação dessa tarefa exploratório-investigativa, mobilizando o conjunto dos inteiros. O conjunto dos inteiros no máximo, fará os supostos educandos a utilizarem mais os números racionais.

Assim com o todo material didático, o Algeblocks possuí limitações. Neste caso, para que se facilite o processo de ensino-aprendizagem, ao utilizar esse material neste tipo de tarefa, o docente deve estar atento ao fato de que o número de peças do Algeblocks é limitado; então é conveniente fazer uma escolha prudente para as funções quadráticas, bem como fazer a resolução antes de propor a tarefa. Fazendo-se isso, o docente minimiza as dificuldades no processo de ensino e provavelmente, tem maiores chances de ampliar o processo de aprendizagem.

Não se objetiva que o possível educando dê o mesmo tratamento algébrico aqui mencionado, pois o objetivo central desse item da tarefa é compreender que podem ser utilizados outros métodos ‘a não ser a fórmula de Bháskara’, para obter os zeros de funções quadráticas. Considerando-se que os alunos fictícios forneceram seus exemplos e solucionaram, utilizando o Algeblocks, considere a resolução proposta para o item seguinte desta tarefa.

✓ Resolução para o **item b)**: neste item da tarefa exploratório-investigativa, que passa a ser uma investigação matemática, visa mobilizar os supostos alunos a apresentarem uma demonstração matemática para a fórmula de Bháskara. O que se espera é que todos os supostos educandos já tenham compreendido a resolução de uma equação do segundo grau, usando o Algeblocks no item anterior. O ponto mais interessante é que foi mostrado que com as representações figurais estabelecidas pelo Algeblocks, os métodos já aplicados no **item a)**, conduzem a obtenção da fórmula de Bháskara. Essa fórmula estabelece o método resolutivo, popularmente difundida entre os possíveis educandos desde o ensino fundamental. O que está sendo pedido é determinar os zeros da função quadrática geral f, tal que $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, dados números reais a, b e c $(a \neq 0)$. Deve ser utilizado somente o material didático Algeblocks e meios para a produção dos registros escritos. Consideramos pertinente que o docente mobilize a questão do conjunto para os coeficientes da equação após o fechamento das demonstrações, elaboradas pelos alunos fictícios. Então determina-se as soluções para a equação do segundo grau geral $a.x^2 + b.x + c = 0$, que resultam nos zeros ‘ou raízes’ da função que deve ser mobilizada. Caso desejado, o suposto educando pode alterar as denotações para os coeficientes da equação, mas deve expressar corretamente o uso destas. Construímos uma proposta de demonstração, usando o Algeblocks, sabendo inicialmente que é preciso representar a equação, conforme a **figura 35**:

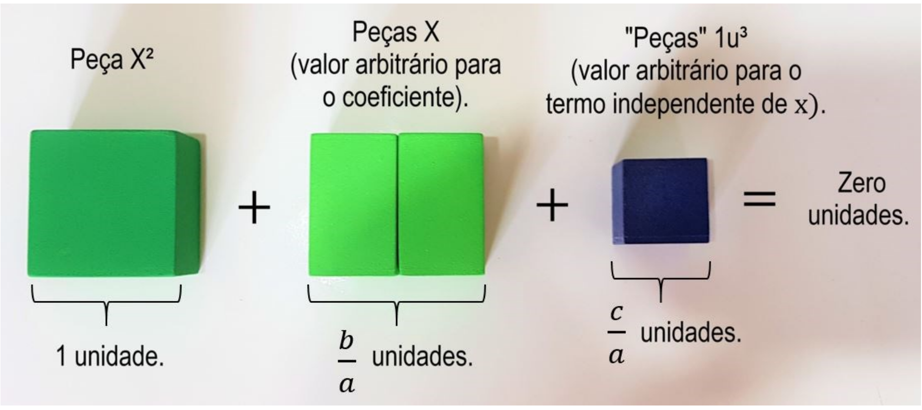
Figura 35: Representação inicial da equação geral.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a representação figural contida na **figura 35**, temos um exemplo de disposição para as peças do Algeblocks, permitindo a visualização da equação que é o objeto matemático de estudo, neste item da investigação. Faz-se necessário ao docente e ao possível educando envolvido compreender, que nesta representação, a cardinalidade dos grupos de peças é relevante, mas é diferente do que foi feito com a simples resolução de uma equação, pois os coeficientes da equação são arbitrários. Foi estabelecida uma relação entre os coeficientes da equação e o número de peças correspondentes dos blocos do Algeblocks utilizados. No membro direito da equação não há peças, atribuímos o valor 'zero unidades', sendo o valor da função f. Foi feita então, a primeira manipulação da representação figural para a equação geral, conforme a **figura 36**, visando transformar o coeficiente $a$em 1, com base no princípio do inverso multiplicativo de um número real não nulo:

Figura 36: Manipulação inicial da equação geral.

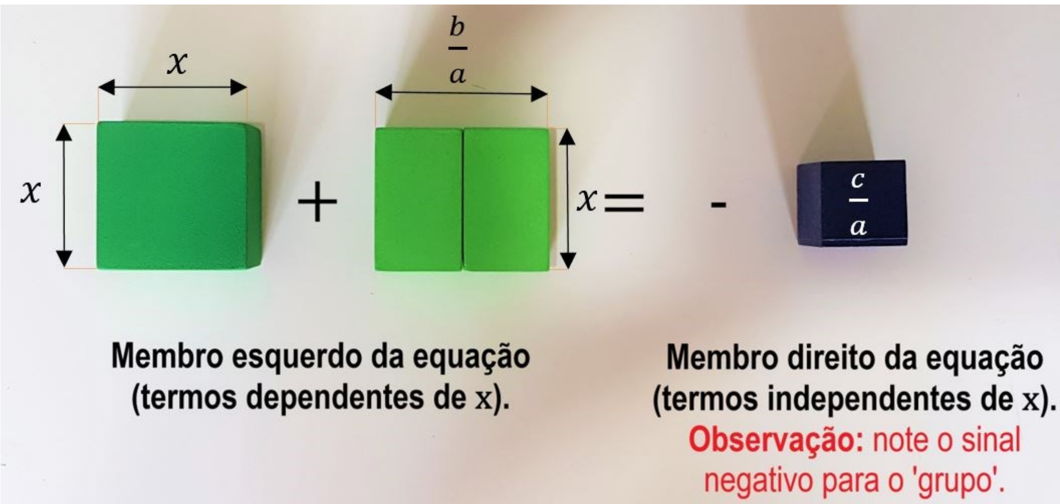


Fonte: Arquivo do pesquisador.

O tratamento algébrico que foi feito na **figura 36**, consiste divisão de ambos os membros da equação por $a, (a \neq 0)$, visando transformar o coeficiente 'a' que acompanha o termo x^2 (associado ao grupo de peças X²), num grupo unitário (uso de somente uma peça X²). Em linguagem algébrica temos o seguinte procedimento: $a.x^2 + b.x + c = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{a \neq 0} \frac{a.x^2+b.x+c}{a} = \frac{0}{a} = 0 \Leftrightarrow \frac{a.x^2}{a} + \frac{b.x}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0.$

O passo seguinte para a demonstração, consiste em adicionar o número fictício $\frac{-c}{a}$ 'unidades' (das peças 1u³) a ambos os membros da igualdade, seguindo o princípio aditivo já aplicado anteriormente. Uma observação que fazemos é que o coeficiente novo, que acompanha o grupo com duas peças X é equivalente a $\frac{b}{a}$, que também é um número fictício, se considerarmos a cardinalidade das peças. A cardinalidade das peças passou a ser irrelevante após a manipulação inicial da equação, pois os coeficientes podem ser números reais. Neste sentido, considerando a cardinalidade de cada grupo de peças, só é possível representar com facilidade, utilizando o Algeblocks as equações em que os coeficientes a, b e c são números inteiros, tais que $a|b$ e $a|c$. Então temos a representação figural seguinte, conforme a **figura 37**:

Figura 37: Transferindo as 'unidades' para o membro direito da equação geral.

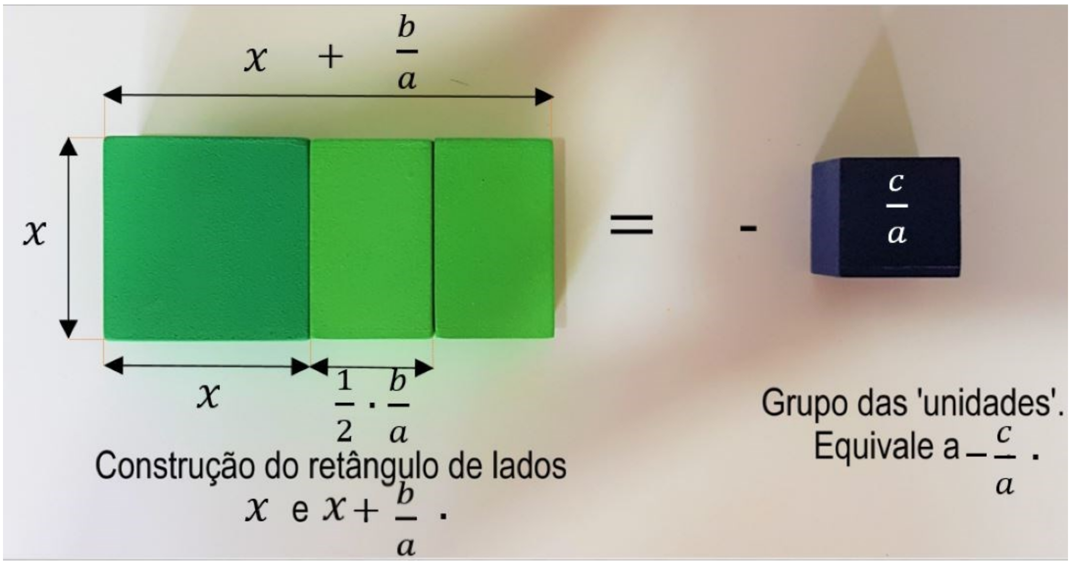


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a **figura 37**, a suposta 'transferência' das $\frac{c}{a}$ unidades fictícias que estavam no membro esquerdo da equação, para o direito, altera o sinal do grupo de peças que era positivo, para negativo. Estando estabelecida a presença de conceitos figurais geométricos nesta investigação algébrico-geométrica em curso, mobilizamos diversas vezes o conceito geométrico de medida. Foi necessário omitir o princípio aditivo na representação figural usando o Algeblocks, pois ele só pode ser compreendido algebricamente neste contexto. No tratamento algébrico dado a representação figural, efetuamos o seu correto uso: $x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}.x\underbrace{\frac{+c}{a} - \frac{c}{a}}_{0} = \underbrace{0 - \frac{c}{a}}_{\frac{-c}{a}} = \frac{-c}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}.x + 0 = \frac{-c}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}.x = \frac{-c}{a}$.

Convém reiterar que não é necessário que o suposto aluno apresente em sua resolução o passo-a-passo detalhado usando axiomática como aqui fizemos. É necessário que suposto educando consiga estabelecer a representação figural com o Algeblocks e fazer o tratamento algébrico para a equação, que já é o suficiente para cumprir essa investigação. Por outro lado, a construção conveniente da representação figural com o Algeblocks, pode facilitar a abordagem desta tarefa. Neste sentido, destacamos a importância do grupo com duas peças X, equivalente a $\frac{b}{a}$, pois um número par de peças podem ser reagrupadas de modo a formar um quadrado com maior facilidade. Seguimos então, com a **figura 38**, que estabelece a formação do retângulo no membro esquerdo da equação:

Figura 38: Organizando os membros da equação geral.

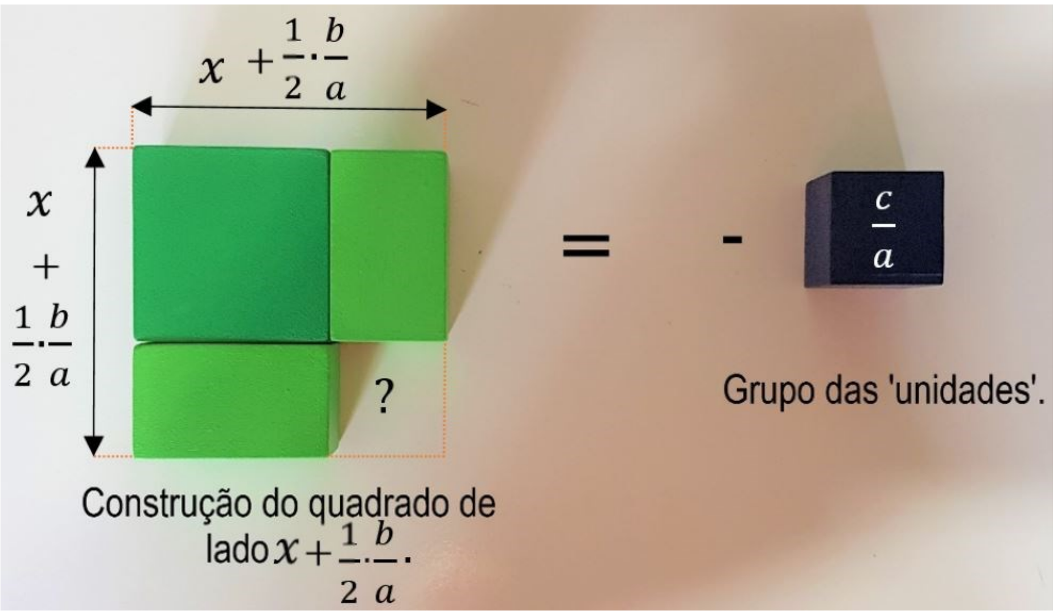


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Com a organização efetuada no membro esquerdo da equação estabelecido na **figura 38**, fica mais evidente a exposição dos conceitos associados a representação figural, que são indissociáveis desta. Com essa organização, já se pode descartar a terceira dimensão do Algeblocks (equivalente a 1u), pois essa dimensão é comum (profundidade dos grupos de peças), igual a 1 em termos algébricos e não interfere em termos de cálculo nesta investigação.

Desprezando-se então a terceira dimensão do Algeblocks, cabe apenas a análise bidimensional nas representações figurais. Neste sentido, agora temos a presença de um retângulo de lados x e $x + \frac{b}{a}$, cuja área equivale a $\frac{-c}{a}u^2$ (unidades quadradas). O tratamento algébrico para esta situação se faz da seguinte forma: $x^2 + \frac{b}{a}.x = \overbrace{x}^{Fator\ comum\ em\ evidência.} .\left(x + \frac{b}{a}\right) = \frac{-c}{a}$. Fica evidente que com a exposição do fator comum em evidência 'x', o suposto educando, utilizando a ideia de 'tentativa ou erro', não consegue obter as soluções para a equação, com testes numéricos, como ocorria na exploração inicial com o Algeblocks. Novamente caímos no caso da transformação do retângulo num quadrado para solucionar a equação. Utilizamos novamente o método de completar quadrados, conforme relatamos na **figura 39**:

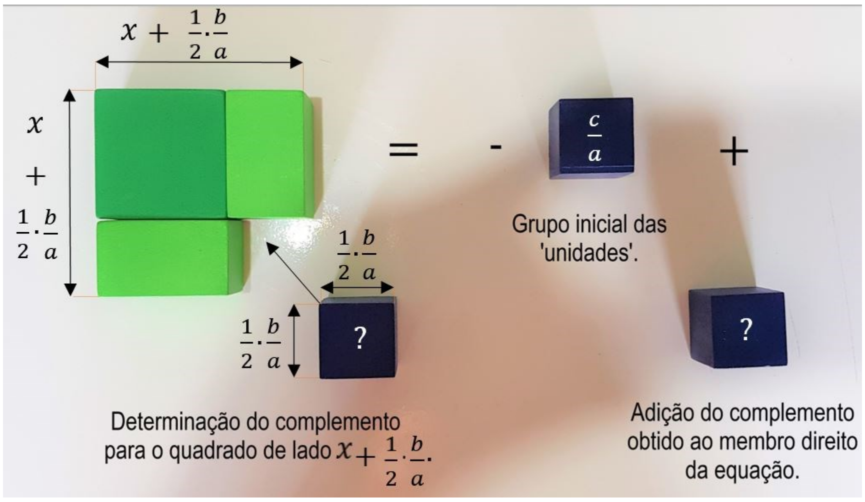
Figura 39: Completando o quadrado do membro esquerdo da equação geral.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A construção do quadrado de lado $x + \frac{b}{2.a}$, a partir do retângulo de lados x e $x + \frac{b}{a}$ original, já deve estar claro para o possível educando, pois ele precisa compor um quadrado nesta etapa da investigação. Desloca-se então a metade do grupo de peças X (equivalente a $\frac{b}{2.a}$), sobre outro lado adjacente à um vértice da peça X² utilizada, conforme o exposto na **figura 39**. O sinal de interrogação, contido na representação figural, mostra a necessidade de se preencher a região com lacuna, isto é, como fizemos anteriormente em termos de área. Mostramos o complemento correto para que se possa fazer o preenchimento da região referida, conforme a **figura 40**:

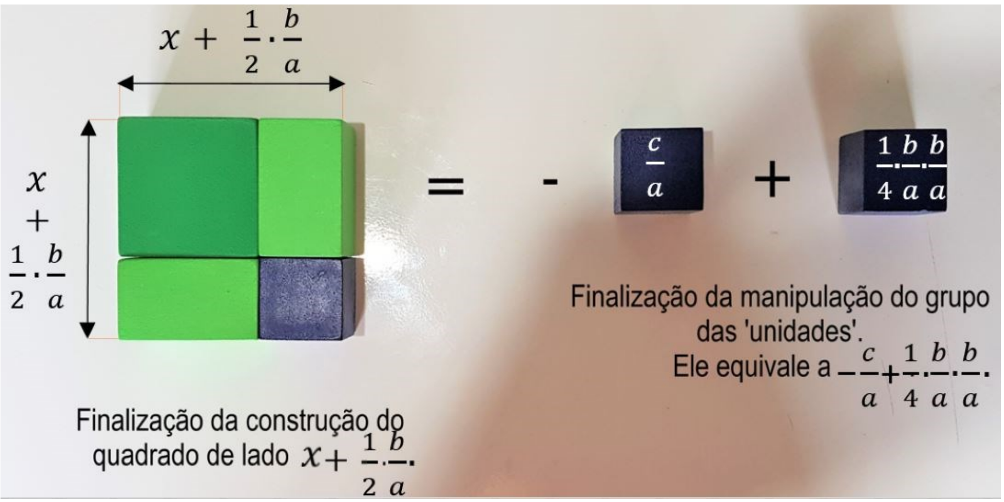
Figura 40: Estabelecendo o complemento para o quadrado do membro esquerdo da equação geral.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após o estabelecimento do complemento em forma de quadrado que deve ser adicionado a região referida, de modo que o quadrado de lado $x + \frac{b}{2.a}$ seja completado, resultante da decomposição do retângulo anterior e reagrupamento das peças do Algeblocks, o suposto educando deve incluir esse em ambos os membros da equação. Cabe agora, o fechamento da demonstração, com foco algébrico-geométrico. O tratamento que se dá para os conceitos de áreas mobilizadas até então é algébrico, então se o possível educando envolvido adiciona uma nova peça na composição, é equivalente a somar a área equivalente a ela em ambos os membros da equação que relaciona essas informações, como foi estabelecido no item anterior. Consideremos então a representação figural final desta investigação, conforme a **figura 41**:

Figura 41: Finalizando a manipulação do membro direito da equação geral.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Após completar o quadrado no membro esquerdo da equação geral em termos geométricos, fica evidente ao suposto educando o tratamento algébrico que ele deve utilizar para finalizar sua demonstração: $\overbrace{x^2+\frac{b}{a}.x+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2}^{Disposição\ dissociada\ das\ peças\ do\ Algeblocks.} = \overbrace{\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2.a}\right)^2}^{Área\ resultante.} \Leftrightarrow \overbrace{\left(x+\frac{b}{2.a}\right).\left(x+\frac{b}{2.a}\right)}^{Fatores\ da\ área\ do\ quadrado.} = \overbrace{\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2}^{Binômio\ associado\ à\ área\ do\ quadrado.} = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2.a}\right)^2 = \frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4.a^2} = \frac{b^2}{4.a^2}-\frac{4.a.c}{4.a^2} = \frac{b^2-4.a.c}{4.a^2} \Leftrightarrow \sqrt[2]{\left(x+\frac{b}{2.a}\right)^2} = \sqrt[2]{\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}} = \frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{\sqrt[2]{4.a^2}} = \frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a\vee\Leftrightarrow\left|x+\frac{b}{2.a}\right| = \frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a\vee = \frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a}\Leftrightarrow x+\frac{b}{2.a} = \frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a}}}$ ou $x+\frac{b}{2.a} = \frac{-\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2.a}+\frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a} = \frac{-b+\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a}$ ou $x+\frac{b}{2.a} = \frac{-\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2.a}-\frac{\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a} = \frac{-b-\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a} \Longrightarrow \text{Se } a.x^2+b.x+c=0 (a\neq 0), x \in \left\{\frac{-b+\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a}, \frac{-b-\sqrt[2]{b^2-4.a.c}}{2.a}\right\}$.

Logo, o educando fictício mostrou a formula resolutiva para a equação do segundo grau geral $a.x^2+b.x+c=0$. As soluções são dadas pela fórmula de Bháskara, $x=\frac{-b\pm\sqrt[2]{\Delta}}{2.a}$, com $\Delta= b^2-4.a.c$ representando o discriminante da equação geral e caso $\Delta< 0$, diz-se que não existem soluções reais para a equação. Essas soluções são justamente as raízes da função geral f, o que completa a resolução deste item. A resolução para este item da tarefa tem caráter investigativo, pois há uma demonstração matemática conduzida com o Algeblocks.

Fica então estabelecido que é possível utilizar o Algeblocks para obter os zeros de quaisquer funções quadráticas, mas o processo é dificultado caso se implemente o conjunto dos reais nos coeficientes, pois fica difícil para o possível educando denotar as representações figurais. Não objetivamos que o suposto educando envolvido dê o mesmo tratamento algébrico aqui mencionado, pois o objetivo central desse item da tarefa é compreender que podem ser utilizados outros métodos ‘a não ser a fórmula de Bháskara’, para obter os zeros em quaisquer funções quadráticas, mas o processo é agravado dependendo do conjunto numérico em que estão seus coeficientes. Consideramos, após a finalização dos itens anteriores, que os possíveis alunos envolvidos têm condições, após constatações sobre o Algeblocks, de argumentar no item seguinte desta tarefa.

✓ Resolução para o **item c)**: no item final dessa tarefa exploratório-investigativa, o foco é mobilizar uma reflexão final sobre os métodos utilizados com o Algeblocks para se obter os zeros de funções quadráticas. Considerando os resultados anteriores, que foram mobilizados com o Algeblocks, resolvendo equações e demonstrando a fórmula de Bháskara, o suposto educando deve argumentar se a validação da fórmula obtida é decorrente da utilização do Algeblocks.

Se o suposto aluno considerar a dica dada no final do enunciado deste item e que o Algeblocks apenas é um meio para a obtenção de representações figurais, pode ficar mais clara a compreensão para ele. Tomando como referência as representações figurais utilizadas **no item a)** desta tarefa, percebemos que o conceito geométrico que mais é aparente consiste nas medidas. No decorrer deste item, temos a presença de um retângulo de lados x e $x+2$, cuja área equivale a $8u^2$ (unidades quadradas) e a expressão algébrica que associa sua área é $x.(x+2)=8$. Para que exista geometricamente tal retângulo, valendo-se do conceito de medida geométrica, ‘que deve sempre ser uma grandeza positiva’, aplicamos nos lados do retângulo da representação figural esse conceito: temos que ter $x>0$ e $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$. Testando as soluções $x=2$ e $x=-4$, temos que:

- $x=2>0 \Rightarrow 2.(2+2)=2.4=8$, consiste na representação figural de um retângulo de lados 2 e 4 e
- $x=-4<0$ e $-4 \leftarrow 2$, e caso essas dimensões fossem aceitáveis, teríamos um retângulo com área $-4.(-4+2)=(-4).(-2)=8$ e lados -4 e -2. Em termos de área, o valor dado pela equação é satisfeito, mas como a representação

figural é indissociável do conceito de medida, esse retângulo não existe, pois, suas dimensões são negativas.

Logo, embora o Algeblocks permita a composição das representações figurais nesta tarefa exploratório-investigativa, pelo fato de termos estabelecido uma conexão entre álgebra e geometria, certamente a demonstração efetuada com o uso deste não se valida pelo uso deste. A validade da demonstração deve-se embasar somente na manipulação algébrica efetuada nas equações, que foram somente auxiliadas pelo Algeblocks. Encerra-se então a resolução desta tarefa.

Consideremos o **quadro 3**, que contempla a relação das competências e habilidades, que podem ser desenvolvidas com essa tarefa exploratório-investigativa inicial:

Quadro 3: Competências Específicas e Habilidades Matemáticas mobilizadas na Tarefa 1.

Identificadores das Competências Específicas	Indicadores das Habilidades Matemáticas
(a), (b) e (c).	I, II e III, somente.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Prossegue-se então, após a consideração das competências específicas e habilidades matemáticas desta tarefa relatadas no **quadro 3**, para a próxima tarefa.

5.2 EXPANSÃO DOS CONCEITOS DE POLÍGONOS E POLIEDROS REGULARES: QUADRADOS, RETÂNGULOS, CUBOS E PARALELEPÍPEDOS RETO-RETÂNGULOS

Essa é a segunda tarefa exploratório-investigativa da sequência, que foi contemplada em nossa proposta de ensino. A inspiração inicial para idealizar a proposta desta tarefa, consistiu numa abordagem mais ampla dos conceitos matemáticos de polígonos e poliedros regulares, contemplando resultados matemáticos importantes sobre quadrados, retângulos, cubos e paralelepípedos reto-retângulos, que são entes geométricos que figuram no Algeblocks.

Ao considerar as características próprias do material didático Algeblocks, foi possível contemplar a abordagem tridimensional de nosso material didático, mobilizando esses conceitos que geralmente são abordados no último bimestre da primeira e segunda série do Ensino Médio. O enfoque geométrico no bidimensional prevalece na primeira série do Ensino Médio e, posteriormente, tem-se na segunda série a expansão conceitual da geometria plana para a espacial, ou seja, o estudo do espaço tridimensional. Neste sentido, o possível educando pode selecionar itens desta tarefa exploratório-investigativa para o ano que for conveniente, ou optar pela aplicação dela na integra, no segundo ano do ensino médio. Neste sentido, a aplicação integral da tarefa é válida, pois garante-se que os supostos educandos já possuem uma melhor base na geometria plana.

Muniz Neto (2013) não apresenta o conceito para polígonos regulares, mas fornece subsídios para sua compreensão. Deste modo, os polígonos regulares são equiláteros e equiângulos, o que quer dizer que o polígono deve ter todos seus lados e ângulos congruentes. Em relação ao Algeblocks, o conceito de polígono regular aplica-se somente aos quadrados presentes em muitas peças deles, estabelecido na representação figural das faces. **Observação importante:**

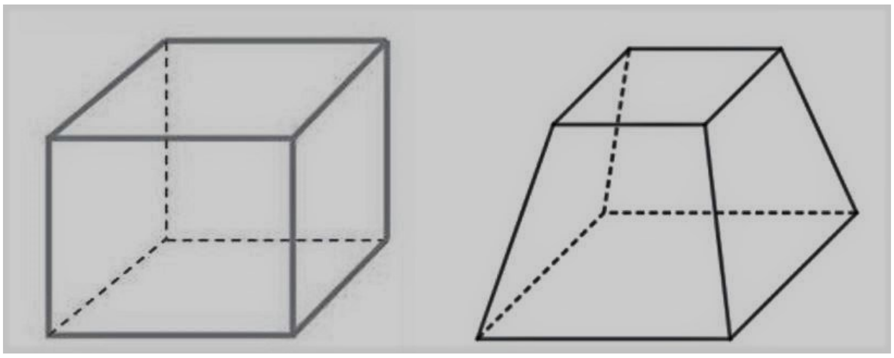
Um poliedro convexo é denominado poliedro de Platão quando:

- ✓ Todas as faces tem o mesmo número de lados;
- ✓ Em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Logo, os poliedros regulares são tipos especiais de poliedros de Platão.

Consideremos o exemplo a seguir, de poliedros de Platão, conforme a **figura 42:**

Figura 42: Poliedros de Platão – Hexaedro regular x Hexaedro irregular.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Deste modo, um hexaedro regular – cubo, é um poliedro de Platão (especial, da classe dos poliedros regulares) e um hexaedro irregular – tronco de pirâmide com base quadrangular, também é um poliedro de Platão; porém, este último não é regular. Por outro lado, considerando os poliedros, Muniz Neto (2013, p. 327) define que:

> Um poliedro convexo é dito **regular** se as duas condições a seguir forem satisfeitas:
> (a) Todas as suas faces forem polígonos regulares com um mesmo número de arestas.
> (b) Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas.

Um fato interessante sobre os poliedros regulares, também denominados de poliedros regulares de Platão é que só existem cinco deles. Caso um poliedro seja regular, ele é: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Deste modo, considerando este conceito, pode-se aplicá-lo somente sobre os hexaedros regulares do Algeblocks, ou seja, os cubos.

O que mobilizamos com o uso do Algeblocks nesta tarefa exploratório-investigativa proposta consistiu na averiguação de importantes afirmações matemáticas:

- ✓ **Em âmbito bidimensional**: todo quadrado é um retângulo e
- ✓ **Em âmbito tridimensional**: todo cubo é um paralelepípedo reto-retângulo.

Foram investigadas tais afirmações, como também refutadas as recíprocas para estas afirmações, usando o Algeblocks na resolução proposta para a tarefa. Os conceitos de polígono e poliedro regular pode ser resgatado com o Algeblocks, bem como é uma denominação que auxiliou a elaboração do enunciado da tarefa. Então, na resolução, certamente o suposto educando deverá recordar esses e outros conceitos básicos da geometria plana, que contemplam as condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um quadrado ou um retângulo. Na resolução proposta, utilizamos conceitos matemáticos para conjuntos, como a relação de inclusão, reunião e intersecção. O Diagrama de Venn-Euler também foi utilizado como auxiliar para as representações figurais pertinentes à discussão e validação da investigação.

Em relação aos conceitos mencionados anteriormente, conforme Lima (2017), a relação de inclusão para conjuntos é tratada da seguinte forma: sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B ou que A é parte de B. Denota-se este fato com a notação $A \subset B$. A relação de inclusão serviu como aporte para incluir todas as propriedades elementares dos quadrados, no conjunto das propriedades dos retângulos. Por outro lado, considerando a abordagem tridimensional do Algeblocks, ela permitiu a inclusão de todas as propriedades dos cubos, no conjunto das propriedades dos paralelepípedos reto-retângulos.

A relação de inclusão serviu como ferramenta de fechamento para a investigação de cada afirmação matemática explicitada. A conceituação de reunião e intersecção foi estabelecida da seguinte forma, por Lima (2017): dados os conjuntos A e B, a reunião, denotada por AUB é o conjunto formado pelos elementos de A com os elementos de B, e por outro lado, a intersecção, denotada por $A \cap B$ é o conjunto dos objetos que pertencem simultaneamente a A e B. Se for considerado que as asserções, sobre um elemento x, se $x \in (A \cup B)$, significa que "$x \in A$ ou $x \in B$". Por outro lado, se $x \in (A \cap B)$, significa que "$x \in A$ e $x \in B$". É evidente que os conectivos lógicos 'ou' e 'e', correspondem respectivamente, a contrapartida da reunião e intersecção.

Esses conceitos foram necessários para tratar o conjunto universo dos quadriláteros com o Algeblocks, dizendo se cada peça dele pertence ou não ao dado conjunto 'ou parte dele (s)', configurados pelas atribuições das propriedades notáveis dos quadrados e retângulos. Os diagramas de Venn Euler serviram somente para uma percepção inicial da divisão das peças em diferentes conjuntos, bem como, uma ferramenta simples para mobilizar a reunião e intersecção destes.

Mediante as observações pontuadas, seguimos com o enunciado desta tarefa exploratório-investigativa.

5.2.1 A tarefa exploratório-investigativa da expansão dos conceitos de polígonos e poliedros regulares

Considere inicialmente as condições necessárias e suficientes para a constituição de quadrados e retângulos, resgatando suas definições. Após isso, apresente as resoluções para os seguintes itens desta tarefa.

a) Caracterize o conjunto com as peças do Algeblocks, que contém polígonos regulares em sua composição. Repita o procedimento para o conjunto com as peças que contêm faces retangulares.

b) É verdade que todos os quadrados são retângulos? E que todos os cubos são paralelepípedos reto-retângulos? Utilize o Algeblocks para ajudar na argumentação escrita das respostas.

c) Considere as afirmações: ‘todos os retângulos são quadrados’ e ‘todos os paralelepípedos são cubos’. Elas são verdadeiras? Mostre ou dê contraexemplos usando o Algeblocks para essas reciprocas.

5.2.2 Resolução e discussão da tarefa exploratório-investigativa da expansão dos conceitos de polígonos e poliedros regulares

✓ Resolução para o **item a)**: neste item inicial da tarefa exploratória proposta, deve se mobilizar os possíveis educandos envolvidos a recordarem os conceitos que caracterizam as propriedades notáveis dos quadrados e retângulos. O docente deve assegurar que as definições foram recordadas antes de prosseguir com a resolução. Essas definições acerca de quadrados, retângulos, cubos e paralelepípedos reto-retângulos, são indispensáveis para esta tarefa. Bem definidos então estes entes geométricos, pode-se mobilizar a aplicação deles nas peças do Algeblocks.

O **item a)**, essencialmente exploratório, pede que o educando fictício averigue o Algeblocks, dividindo-o em dois conjuntos de peças: o conjunto A – peças que contêm faces em que figuram polígonos regulares; e B – peças que contêm faces retangulares. É necessário ao suposto educando ter prévio conhecimento sobre o conceito de polígonos regulares para que ele possa caracterizar A, como o conjunto que contêm peças cujas faces são quadradas, pois os quadrados são os únicos polígonos regulares que podem ser encontrados no Algeblocks. No conjunto B, o possível educando deve incluir as peças que têm retângulos como suas faces. Até este momento da resolução deste item, percebe-se que é indispensável que o educando fictício envolvido, tenha apreendido de forma clara os conceitos figurais associados a estes entes geométricos. Apresentamos então, a representação figural, para os conjuntos A e B conforme as **figuras 43** e **44**:

Figura 43: Conjunto A - peças do Algeblocks em que figuram polígonos regulares.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 44: Conjunto B - Peças do Algeblocks em que figuram retângulos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a **figura 43**, temos um exemplo de representação figural correta para a disposição de peças do Algeblocks, respeitando o que foi definido para o conjunto A. Fazendo a substituição das dimensões das peças do Algeblocks por Xx, Yy e 1u1, temos a seguinte representação em simbologia de conjuntos 'em termos de volume' para as peças relevantes: $A = \{x^3, y^3, 1^3 = 1, x^2.y, x^2.1 = x^2, y^2.x, y^2.1 = y^2, x.1^2 = x, y.1^2 = y\}$. Essa forma de registro de representação pode facilitar a percepção do suposto educando, de que as peças do Algeblocks que contêm quadrados como faces, devem possuir nos produtos de seus respectivos volumes, um quadrado ou um cubo de um número. Por outro lado, o educando fictício que pensar da seguinte forma: devo identificar as peças que contêm quadrados, então, se identificar a (s) peças que não contêm quadrados em sua composição, posso retirá-las do conjunto de todas as peças, obtendo então o conjunto A pedido. Esse aluno fictício certamente está empregando corretamente o raciocínio lógico embasado no dilema destrutivo. O suposto educando identificou a peça que não contêm quadrados em sua composição – somente a peça XY, denotou o conjunto universo U de todas as peças e seus volumes: $U = \{x^3, y^3, 1^3 = 1, x^2.y, x^2.1 = x^2, y^2.x, y^2.1 = y^2, x.1^2 = x, y.1^2 = y, x.y.1 = x.y\}$. Ao mobilizar seu raciocínio define $A = U\{x.y\} = \{x^3, y^3, 1, x^2.y, x^2, y^2.x, y^2, x, y\}$, que é exatamente o mesmo conjunto obtido pelo suposto educando que mobilizou o raciocínio embasado no embasado no dilema construtivo. Equivale a representação figural da **figura 43**, ao mobilizar a construção de tal conjunto, utilizando todas as peças do Algeblocks que satisfazem tais condições. O raciocínio combinatório utilizado, para constatar que o Algeblocks só possui dez tipos de peças também pode ser um aliado para fechar este conjunto.

O suposto aluno que compreendeu anteriormente que todos os quadrados são retângulos, ao resgatar os conceitos de quadrado e retângulo, certamente determinou corretamente o conjunto B, conforme a **figura 44**. Note que o conjunto $B = U$, conforme a discussão mobilizada anteriormente. Caso a identificação do conjunto não tenha ocorrido como o esperado, certamente o possível educando acredita que quadrados são somente quadrados e por isso, não podem ser retângulos, o que é um pensamento incorreto acerca da definição matemática que é conferida para cada ente geométrico mobilizado nesta tarefa, em âmbito bidimensional. Neste mesmo contexto, é interessante que o suposto educando não tenha consolidado esse prévio conhecimento, pois ele terá chance de compreender de forma mais clara com a exploração do Algeblocks, no andamento da tarefa. Logo, resta a seguinte disposição de peças, conforme a **figura 45**:

Figura 45: Conjunto B - identificação incorreta das peças em que figuram retângulos.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a **figura 45**, o educando fictício desconsiderou todas as peças que continham somente peças com faces quadradas do Algeblocks, ou seja, os cubos – peça X^3, peça Y^3 e peça $1u^3$. Então, a representação figural estabelecida na **figura 45**, decorrente de incorreta interpretação das definições, pode ser representada pela seguinte notação de conjuntos: $B = U\{x^3, y^3, 1\} = \{x^2.y, x^2, y^2.x, y^2, x, y\}$. Essa representação não pode ser encarada pelo docente como completamente incorreta, pois no enunciado deste item, não está delimitado que há somente um conjunto com as peças do Algeblocks, que contém somente faces retangulares em sua composição. Deste modo, podemos dizer que para o conjunto B, o suposto educando pode apresentar qualquer exemplo de conjunto de peças do Algeblocks, desde que esse conjunto não seja vazio. Caso os supostos educandos não tenham incluído todas as peças do Algeblocks no conjunto pedido, ou constituído apenas um conjunto parcial de peças, certamente estes terão mais dificuldades para apresentar as suas argumentações no item seguinte. Prossigamos então, com a resolução do **item b)** desta tarefa.

✓ Resolução para o **item b)**: neste item desta tarefa exploratória, já temos um dos pontos que caracterizam uma investigação matemática – a formulação de conjecturas, que visa mobilizar os possíveis alunos envolvidos a apresentarem suas argumentações. Os supostos educandos que sabem de certa forma, que os quadrados são retângulos – pois os pares de lados paralelos opostos podem ser iguais, o que não é vedado por sua definição, bem como os ângulos internos dos retângulos e quadrados são todos retos e iguais entre si. Certamente esse aluno fictício vai apresentar uma argumentação similar à que apresentamos acima, exemplificando tal fato com algum conjunto de peças C do Algeblocks, tal que $C \subseteq B = U$, já mostrado na **figura 44**. Podemos inferir que os educandos fictícios que já conheciam esse fato não vão ficar surpresos, e que os supostos alunos que visualizaram isso, ao recordar as definições de quadrados e retângulos, certamente ficaram surpresos. A conjectura será negativa para eles, afirmando que todos os quadrados são retângulos. Só falta provar esse fato, o que ocorre no item seguinte.

Estendendo essa análise para a terceira dimensão do Algeblocks, se os supostos educandos notarem que um paralelepípedo reto-retângulo pode ter base quadrangular e altura igual à do quadrado de sua base. Seguramente esse sólido ainda é um paralelepípedo reto-retângulo, mas que é um cubo por ter suas arestas todas iguais, bem como nas suas representações figurais, os ângulos internos às suas bases e laterais são todos retos (formalmente, equivale a dizer que a medida de seus triedros são todas equivalentes).

Então, podemos dizer que a conjectura feita por esses possíveis alunos, certamente vai reafirmar que todos os cubos são paralelepípedos reto-retângulos, apresentando os mesmos exemplos que na análise bidimensional, porem apontando somente os cubos do Algeblocks - peça X^3, peça Y^3 e peça $1u^3$, justamente o conjunto de peças, que gera inconsistências para os demais alunos fictícios envolvidos, ao determinar o conjunto B completo.

Ainda a resolução com comentários não está concluída, pois há o caso em que os possíveis educandos que não compreenderam que os quadrados são retângulos. Neste caso, o docente deve recordar as definições de quadrado e retângulo na lousa, mostrando os pares de lados paralelos opostos podem ser iguais no caso dos retângulos, o que não pode ser vedado por sua definição.

Deve ser ressaltado também que ângulos internos dos retângulos e quadrados são todos retos e iguais entre si, de modo a garantir que não haja ambiguidades quanto as propriedades elementares destes entes geométricos. Assegurado isso, podemos prosseguir com a argumentação matemática plausível para as duas afirmações já abordadas. Pontuamos que os conceitos associados a uma representação figural, tanto de um quadrado, quanto de um retângulo são elementares e de fácil compreensão. Porém é crucial que os supostos educandos, antes de partirem para a resolução deste item, devem ter domínio sobre eles. Os possíveis educandos envolvidos devem argumentar sobre a: **asserção 1** – todos os quadrados são retângulos; **asserção 2** – todos os cubos são paralelepípedos reto-retângulos.

Apresentamos então, os conceitos necessários para a argumentação do educando fictício:

- **Definição de quadrado com suas propriedades**:

P_1 – é um quadrilátero equilátero;

P_2 – é equiângulo e seus ângulos valem 90° e

P_3 – lados opostos (ou não adjacentes à um vértice) são paralelos.

- **Definição de retângulo com suas propriedades**:

Q_1 – é um quadrilátero;

Q_2 – é equiângulo e seus ângulos valem 90° e

Q_3 – lados opostos (ou não adjacentes à um vértice) são paralelos.

- **Definição de cubo com suas propriedades**:

R_1 – é um hexaedro regular;

R_2 – é equiângulo (em termos de faces) e

R_3 – faces opostas (ou não adjacentes à uma aresta) são paralelas.

- **Definição de paralelepípedo reto-retângulo com suas propriedades**:

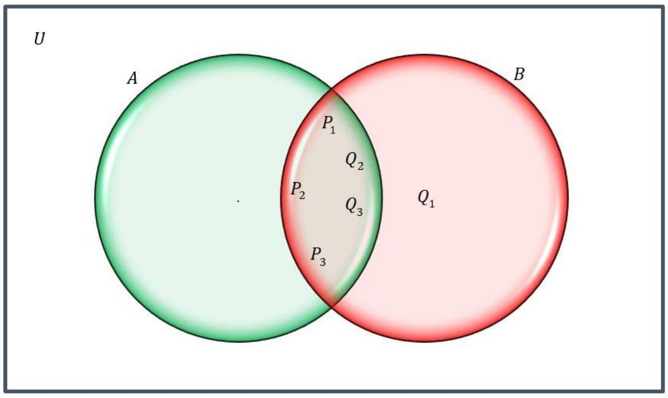
S_1 – é um hexaedro (ou prisma);

S_2 – é equiângulo (em termos de faces) e

S_3 – faces opostas (ou não adjacentes à uma aresta) são paralelas.

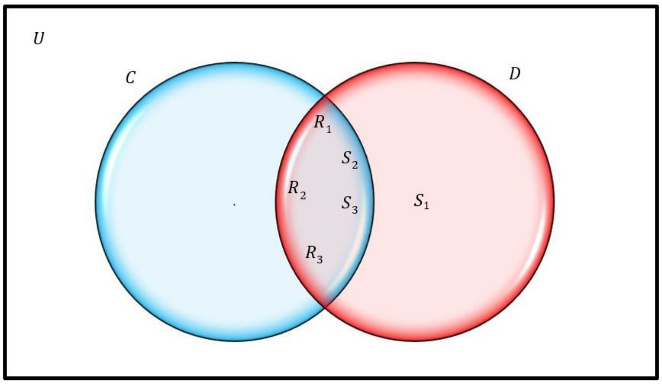
Uma maneira intuitiva, que os supostos educandos podem utilizar em suas argumentações, pode ser com o estabelecimento de Diagramas de Venn, valendo-se das propriedades dos entes geométricos a serem analisados, conforme as **figuras 46** e **47**:

Figura 46: Diagrama – argumentação para a asserção 1.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 47: Diagrama – argumentação para a asserção 2.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os diagramas de Venn, estabelecidos nas **figuras 46** e **47**, fornecem apenas uma visão geral das observações que devem ser mobilizadas nas argumentações para as **asserções 1** e **2**, mas não podemos afirmar que ele garante a validade das afirmações tratadas. A propriedade Q_1, não pode ser incluída em $A \cap B$, pois nem todos os quadriláteros que são dotados desta propriedade, pertencem a A, ou seja, não são necessariamente quadrados. Por outro lado, a propriedade S_1, não pode ser incluída em $C \cap D$, pois nem todos os paralelepípedos reto-retângulos cujos quais, são dotados desta propriedade, pertencem a C, ou seja, não são necessariamente cubos. Essas observações são relevantes para que os educandos fictícios concluam de forma concisa suas argumentações.

Embora as demonstrações matemáticas para as teses 1 e 2 não possam ser contempladas com o Algeblocks, o objetivo central desta tarefa é apresentar essas curiosidades para os possíveis educandos. O Algeblocks apenas serve como uma base para as primeiras representações figurais de entes geométricos envolvidos nas análises, bem como para que auxilie nas conjecturas iniciais, estabelecidas as argumentações com base nas definições. Conforme já foi visto, um material didático manipulável não serve para assegurar generalidades matemáticas, com base nas ideias de Lorenzato (2012).

Seguimos então, com a resolução do **item c)**, desta tarefa, antecipando que ele deve ser puramente exploratório.

✓ Resolução para o **item c)**: no item final desta tarefa exploratório-investigativa, o foco é mobilizar os educandos fictícios a refutarem matematicamente as reciprocas para as **asserções 1** e **2**, cujo quais foram argumentadas no item anterior.

Considerando então, a **reciproca da asserção 1**: todos os retângulos são quadrados, qualquer uma das peças contidas na **figura 45** (cujo os possíveis educandos envolvidos não indicaram os cubos), fornece um contraexemplo que refuta essa afirmação, caso se considere as faces retangulares das peças, logo nem todo retângulo é quadrado. Para a **reciproca da asserção 2**, que afirma que todos os paralelepípedos são cubos, também pode ser refutada usando qualquer uma das peças contidas na **figura 45**. Neste sentido, vale dizer que mesmo o conjunto B construído de forma incompleta, tem efeito para oferecer tais refutações com o Algeblocks.

Embora o Algeblocks permita a composição das representações figurais nesta tarefa, não podemos denomina-la de investigativa conforme Ponte (2014), pois, por mais que seja engajada a argumentação do suposto aluno, certamente está não compõe uma demonstração matemática para as asserções exploradas. Como fizemos a demonstração das proposições abordadas por fora da resolução dos itens e assim deve ser, então concluímos uma exploração matemática, seguindo esse conceito estabelecido por Ponte (2014). Por outro lado, uma demonstração que evidentemente utiliza conjuntos 'não genéricos', não estabelece uma argumentação matematicamente válida. Caso utilizássemos o Algeblocks, visando validar as duas teses discutidas no **item b)**, certamente estaríamos pegando apenas um conjunto limitado de exemplos para os entes geométricos envolvidos nas análises e justamente por este fato, deixamos uma demonstração para o docente. Por outro lado, embora o Algeblocks auxilie o estabelecimento de conjecturas, pode ter auxiliado, por partir do concreto para os conceitos figurais abstratos, conforme argumenta Fischbein (1993). O material apresentou potencial para estabelecer contraexemplos, refutando as reciprocas falaciosas. Encerra-se então a resolução desta tarefa.

5.2.3 Uma demonstração matemática para as afirmações matemáticas mobilizadas

Apresentamos aqui, uma demonstração válida para as asserções matemáticas do **item b)** desta tarefa exploratória. Para que se possa demonstrar algo matematicamente, é necessário que se conheça o que se quer provar – a tese; bem como o que temos a disposição para utilizar – a hipótese. Neste sentido, temos como teses: **tese 1** – todos os quadrados são retângulos; **tese 2** – todos os cubos são paralelepípedos reto-retângulos.

Como hipóteses temos somente as definições de quadrado, retângulo, cubo e de paralelepípedo reto-retângulo. É necessário estruturar bem as demonstrações para cada tese, mas de modo que seja adequado a compreensão dos possíveis alunos envolvidos. Neste sentido, temos as noções e relações que se estabelecem em conjuntos matemáticos, como auxiliares para a prova, que deve ser conhecida pelo docente. Recordamos preliminarmente aqui, os conceitos básicos associados as definições, pertinentes a nossa demonstração:

Estando bem definidas as definições para os entes geométricos abordados nesta tarefa, transcorremos então as demonstrações:

Demonstração para a **tese 1**: sabendo que estamos avaliando o conjunto dos quadriláteros não-reversos, denotamos os conjuntos $A =$ 'quadriláteros que gozam das propriedades do quadrado'$\{P_1, P_2, P_3\}$ e $B =$ 'quadriláteros que gozam das propriedades do retângulo'$\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Sabendo que P_1 é relativa aos quadriláteros regulares 'quadrados' e que Q_1 refere-se somente a natureza geral do polígono de ser quadrilátero $\Rightarrow P_1$ resulta em todos casos particulares (o fato de ser equilátero) de Q_1, pois todos quadrados são quadriláteros $\Rightarrow P_1 \in B$. Como $P_2 = Q_2$ e $P_3 = Q_3 \Rightarrow P_2, P_3 \in B$. Mas, $P_1, P_2, P_3 \in B \Rightarrow A \subseteq B$. Logo, todos os quadriláteros que gozam das propriedades de A, também gozam das propriedades de B, o que nos leva a concluir que todos os quadrados são retângulos ■.

Demonstração para a **tese 2**: sabendo que estamos avaliando o conjunto dos hexaedros, denotamos os conjuntos $C =$ 'hexaedros que gozam das propriedades do cubo'$\{R_1, R_2, R_3\}$ e $D =$ 'hexaedros que gozam das propriedades de um paralelepípedo reto-retângulo'$\{S_1, S_2, S_3\}$. Sabendo que R_1 é propriedade relativa aos hexaedros regulares 'cubos' e que S_1 refere-se somente a natureza geral do poliedro ser hexaedro $\Rightarrow R_1$ resulta em todos casos particulares (o fato de ser regular) de S_1, pois todos cubos são hexaedros $\Rightarrow R_1 \in D$. Como $R_2 = S_2$ e $R_3 = S_3 \Rightarrow R_2, R_3 \in D$. Mas, $R_1, R_2, R_3 \in D \Rightarrow C \subseteq D$. Logo, todos os hexaedros que gozam das propriedades de C, também gozam das propriedades de D, o que nos leva a concluir que todos os cubos são paralelepípedos reto-retângulos ■.

Considerando-se então as demonstrações apresentadas, não queremos que os docentes a tratem dessa forma com os possíveis educandos, mas sim, proponha uma demonstração mais acessível, além das argumentações, caso seja possível, seja utilizando a língua corrente e mobilizando os apontamentos necessários. A dica para que o suposto educando consiga apresentar uma argumentação consistente para a **tese 1**, é mobilizar as propriedades P_1 e Q_1, de modo a estabelecer que todo quadrilátero do conjunto A, também é quadrilátero de B, caso o docente queira estender essa tarefa para uma investigação. Para concluir uma prova matemática, eles devem expor que as demais propriedades destes conjuntos são idênticas.

Para a **tese 1**, o raciocínio é o mesmo, quando se nota que as propriedades R_1 e S_1, implicam que todo hexaedro do conjunto C, também é hexaedro de D. Na conclusão da prova, deve ser exposto que as demais propriedades destes conjuntos são também idênticas.

Consideremos o **quadro 4**, a seguir que contempla a relação das competências e habilidades, que podem ser desenvolvidas com essa tarefa exploratório-investigativa, para finalizar a discussão desta tarefa:

Quadro 4: Competências Específicas e Habilidades Matemáticas mobilizadas na Tarefa 2.

Identificadores das Competências Específicas	Indicadores das Habilidades Matemáticas
(a), (b) e (c).	IV e VI, somente.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Aqui se encerra a segunda tarefa exploratório-investigativa de nossa proposta de ensino. Prosseguimos então, após a consideração das competências específicas e habilidades matemáticas desta tarefa relatadas no **quadro 4**, para a próxima tarefa.

5.3 RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE SISTEMAS LINEARES: DUAS EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS VARIÁVEIS

Essa foi a terceira tarefa exploratória da sequência contemplada em nossa proposta de ensino. A inspiração para que consolidássemos a proposta desta tarefa, consistiu na abordagem do conteúdo matemático ‘Sistemas Lineares’. Os sistemas lineares trabalhados com o Algeblocks, foram resolvidos ou discutidos (no caso da impossibilidade de determinar soluções ou de infinitas soluções). Por limitações próprias do material didático Algeblocks, foi possível contemplar essa abordagem, tratando de sistemas de equações com coeficientes inteiros. Esse tema geralmente é abordado no segundo ano do ensino médio, por volta do segundo bimestre. Esse tema é muito relevante e por isso, ele é abordado no início do ensino médio. Assim como a determinação dos zeros de uma função quadrática, os sistemas lineares são ferramentas matemáticas indispensáveis para diversos temas subsequentes a eles, auxiliares em exercícios e problemas do cotidiano escolar.

Conforme Delgado (2017), frequentemente na matemática, se enfrenta a necessidade de se resolver um sistema de duas equações lineares com duas variáveis. Delgado (2017) afirma que um dos métodos que pode ser utilizado é a Regra de Cramer. Como fica difícil de se utilizar o Algeblocks com esse método, pois não fica visível para o suposto aluno, as matrizes associadas ao tal sistema, optamos pelo método de Escalonamento de Sistemas. O docente que preferir, pode adaptar o método de substituições na aplicação desta tarefa, caso opte, pois, o Algeblocks permite essa flexibilidade. Conforme Delgado (2017), denomina-se de sistema linear de duas equações lineares com duas variáveis x, y, a seguinte representação:

$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$$

Por outro lado, temos a representação da **matriz incompleta** do sistema que é expressa por $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ e a **matriz completa** deste sistema é dada por $\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$, sendo a terceira coluna a representante dos termos independentes do sistema linear. Ao abordar esse sistema, visa-se determinar $x, y \in R$ (caso existam), em função dos números reais a_i, b_i, c_i, com $i \in \{1,2\}$, escalonando a matriz completa associada a ele, como foi proposto o método resolutivo. É claro que nem todo sistema linear possuí soluções, mas neste caso especifico, valendo-se do fatos que no plano cartesiano (sistema de eixos ortogonais, sendo OX – eixo horizontal e OY – eixo vertical): as equações do sistema representam duas retas - r_1, r_2 do plano, sendo $r_1: a_1.x + b_1.y = c_1$ e $r_2: a_2.x + b_2.y = c_2$. Como sabemos, dadas duas retas r_1, r_2 do plano, temos três possibilidades: I - $r_1 = r_2$ (retas coincidentes), II - $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ (retas concorrentes no ponto P) e III - $r_1 \parallel r_2$ (retas paralelas). Para o caso I, as duas retas são coincidentes

⇒ $\forall(x_0, y_0) \in r_1$, também é ponto de r_2, ou seja, um sistema linear que associa as equações destas duas retas, fornece infinitas soluções. No caso II, como r_1, r_2 são retas concorrentes no ponto P, então a solução fornecida pelo sistema, que associa as equações destas duas retas, é única. Esses são os conceitos preliminares que o docente deve ter em mente, ao efetuar o trabalho com esse conteúdo, ainda mais, se fizer o uso do Algeblocks, recomendamos utilizar a_i, b_i, c_i, inteiros, sendo $i \in \{1,2\}$ para os sistemas, também popularmente conhecidos como 2x2.

Por outro lado, seguindo as concepções de Delgado (2017), o docente, ao mobilizar a discussão dos sistemas lineares após a resolução (ou tentativa de resolução quando o escalonamento falhar), deve ter outros conceitos para denominar tais sistemas: **(i) sistema determinado** – quando o sistema possui uma única solução (corresponde ao caso II, com retas concorrentes no plano), que também pode ser denominado de **sistema normal**; **(ii) sistema indeterminado** – sistema que possui mais de uma solução (corresponde ao caso I, com retas coincidentes do plano) e **(iii) sistema impossível** – quando o sistema não apresenta soluções (corresponde ao caso III, com retas paralelas no plano). Ressaltamos que o docente, deve ter cautela com as denominações **(ii)** e **(iii)**, conhecendo como eles aparecem no método de escalonamento de sistemas. Para a denominação **(ii)**, o registro escrito do sistema escalonado, sem perda de generalidade para a ordem das equações, fica expresso: $\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ 0.x + 0.y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1.x + b_1.y = c_1$

É claro que existem infinitos pontos (x_0, y_0), tais que $0.x_0 + 0.y_0 = 0$, o que pode ser estabelecido, mediante as representações figurais do Algeblocks para o sistema escalonado. Neste caso, descartando-se a segunda equação do sistema, toda solução (x'_0, y'_0) de $a_1.x + b_1.y = c_1$ (com variável livre y), também é solução da equação descartada. Por outro lado, denominação **(iii)**, o registro escrito para o sistema escalonado, sem perda de generalidade para a ordem das equações, se expressa: $\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ 0.x + 0.y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ 0 = k \end{cases}$

Deste modo, não existem (x_0, y_0), tais que $0.x_0 + 0.y_0 = k$, $(k \in R\ )$ o que pode ser constatado, também com as representações figurais do Algeblocks para o sistema escalonado. Neste caso, não se pode descartar a segunda equação do sistema e como $0.x_0 + 0.y_0 = k$, com $k \in R$, certamente temos um absurdo matemático '$k = 0$' nas presentes condições, o que nos leva a denominar esse sistema de **impossível**.

Um outro ponto de atenção que o docente deve ter é com o sistema denominado de **homogêneo** (que tem todos os termos independentes nulos). Em símbolos:

$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = 0 \\ a_2.x + b_2.y = 0 \end{cases}$$

É claro que em todo sistema homogêneo, temos a presença da **solução trivial** $(x, y) = (0,0)$. Porém, essa solução pode não ser a única para esse tipo de sistema. O que garante que a solução seja a única, é o fato do determinante da matriz A do sistema não ser nulo, ou seja, se seus vetores linha ($\vec{u} = (a_1, b_1), \vec{v} = (a_2, b_2)$), são 'Linearmente Independentes'. Em símbolos, deveríamos ter para esse caso: $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ e $det(A) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$. **Observação**: quando se caracteriza dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ de Linearmente Independentes - LI, queremos dizer que o vetor nulo $\vec{0} = 0$ resulta numa combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$, porém com escalares λ_1, λ_2 únicos e nulos. Em símbolos, $\exists!\, \lambda_1, \lambda_2 \in R$, $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) = \vec{0}$ tais que $\lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v} = \vec{0} = 0$ (**nota**: ∃! = existe um único). Por outro lado, caso a solução para a combinação linear não seja o vetor $\vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v} = \vec{0} = 0$, com $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são denominados de Linearmente Dependentes - LD. Esses conceitos não podem ser passados para possíveis alunos do ensino médio, pois é teoria, os vetores a ser desenvolvida no ensino superior, o que resultou no descarte do sistema homogêneo em nossa proposta de ensino. Considerando tais apontamentos efetuados, com base na teoria desenvolvida no livro de Delgado (2017), prosseguimos então para o enunciado desta tarefa.

5.3.1 A tarefa exploratório-investigativa dos sistemas lineares com duas equações e duas variáveis

Utilizando o material didático manipulativo Algeblocks, represente, resolva (caso possível) e apresente as anotações pertinentes sobre os sistemas lineares com duas equações e duas variáveis. Classifique os sistemas em **normal**, **indeterminado** ou **impossível** no final de cada uma das resoluções.

a) Apresente as soluções para o seguinte sistema linear, utilizando o Algeblocks. Dê um exemplo de sistema e também o resolva com o Algeblocks.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2.y = 0 \end{cases}$$

b) Determine as soluções para o seguinte sistema linear, utilizando o Algeblocks. Como o Algeblocks ajudou a caracterizar o sistema?

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -2.x + 2.y = -4 \end{cases}$$

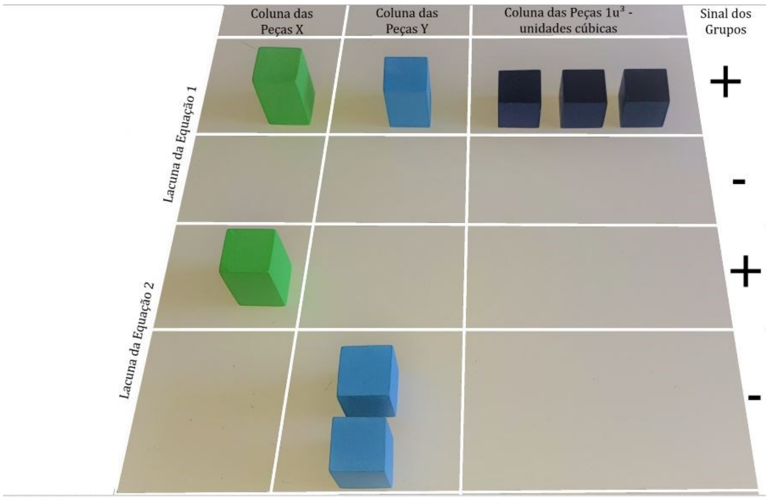
c) Foi possível determinar as soluções para o seguinte sistema linear, utilizando o Algeblocks? O que ocorreu de errado na resolução? Como o Algeblocks permitiu caracterizar o sistema?

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -2.x + 2.y = -5 \end{cases}$$

5.3.2 Resolução e discussão da tarefa exploratória dos sistemas lineares com duas equações e duas variáveis

✓ Resolução para o **item a)**: neste item inicial da tarefa exploratória proposta, a intenção preliminar é propiciar que os supostos alunos envolvidos, resolvam o sistema linear dado, utilizando o material didático Algeblocks para representa-lo. Posteriormente os supostos educandos devem efetuar os algoritmos matemáticos necessários para escalonar esse sistema. Apresentamos então, um exemplo de representação figural auxiliar na resolução para o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2.y = 0 \end{cases}$', conforme a **figura 48**:

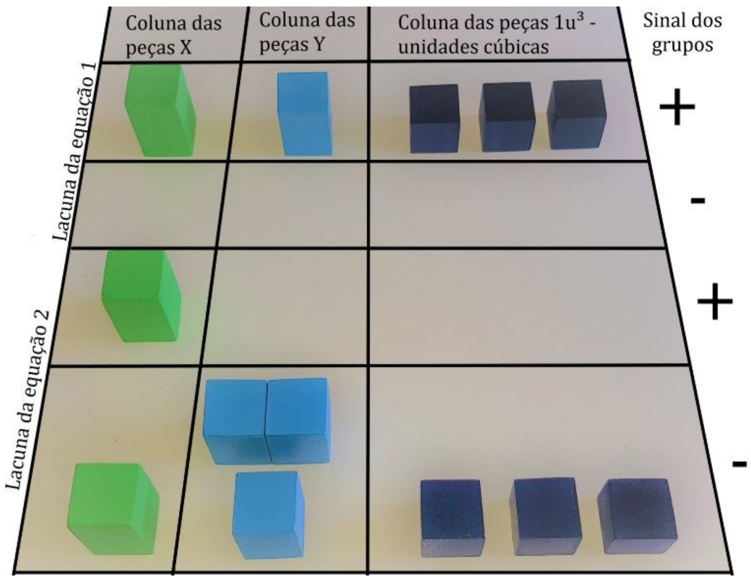
Figura 48: Representação do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural para o sistema, conforme a **figura 48**, também pode ser expresso pela matriz completa do sistema $\left(\begin{matrix}1 & 1\\1 & -2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right)$. A primeira coluna da matriz corresponde a coluna das peças X do Algeblocks, a segunda das peças Y e a terceira das 1u³ - unidades cúbicas (podemos também denominar ela de coluna das unidades). Conforme os métodos utilizados num escalonamento, procedemos para zerar o segundo elemento da primeira coluna da matriz considerada "-1", sabendo que $-1+1=1-1=0$. Considere a **figura 49**, que representa o procedimento efetuado com o Algeblocks:

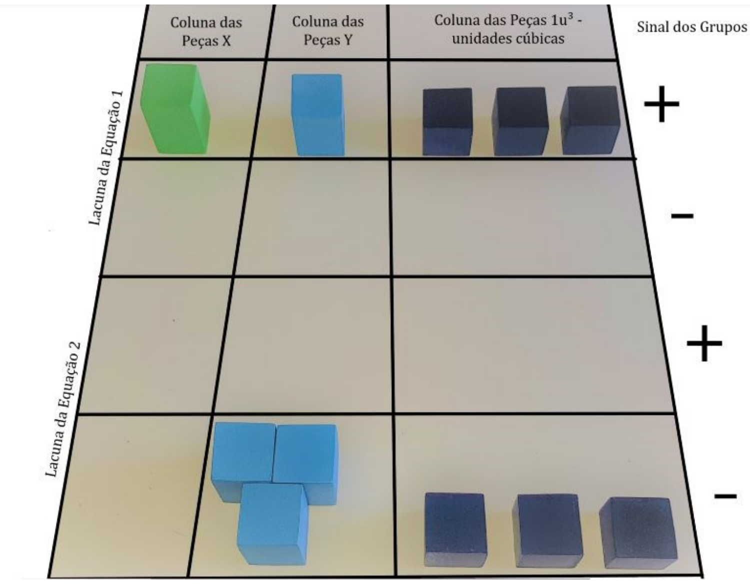
Figura 49: Iteração 1 para o escalonamento do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

O procedimento efetuado com o Algeblocks, denominado de iteração 1, estabelecido da **figura 48** para a **figura 49**, foi adicionar a equação 1, na lacuna da equação 2, porém, no grupo das peças com sinais negativos (veja a ênfase dada na matriz, para os números em vermelho). Isso equivale a retirar a equação 1, da equação 2, obtendo uma nova equação na lacuna da equação 2, conforme a **figura 49**. Seguindo o escalonamento, temos a matriz nova $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1-1 & -2-1 & 0-3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$, que é estabelecida conforme a representação figural seguinte, que encerra essa iteração inicial no sistema, na **figura 50**:

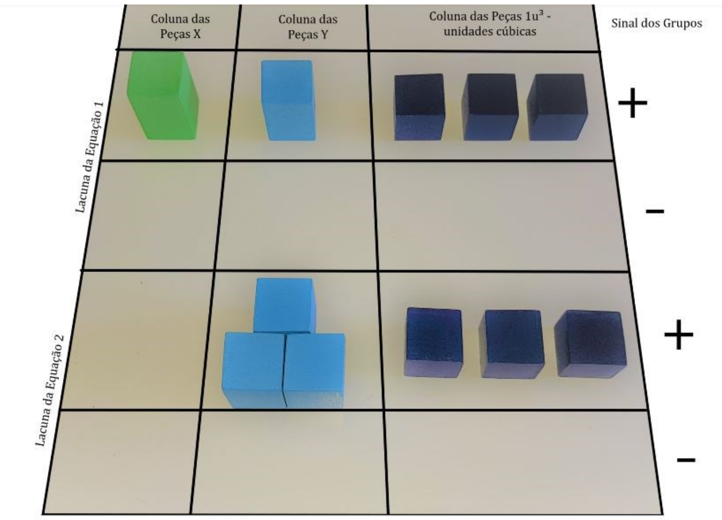
Figura 50: Concretizando a iteração 1 para o escalonamento do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural, conforme a **figura 50**, pode foi expressa pela matriz escalonada do sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$. Parando o procedimento aqui, o educando fictício já consegue conduzir a resolução do sistema, estabelecendo que $-3.y = -3 \Leftrightarrow \frac{-3.y}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \Leftrightarrow y = 1$. Então o suposto educando substituí o valor de y, em qualquer uma das duas equações do sistema original e determina a segunda solução x. Mas o possível educando pode continuar fazendo procedimentos após a representação figural da **figura 50**, alterando o sinal do bloco de peças na lacuna da equação 2 (que está com sinal negativo), passando para o sinal positivo na mesma lacuna. Consideremos a **figura 51**:

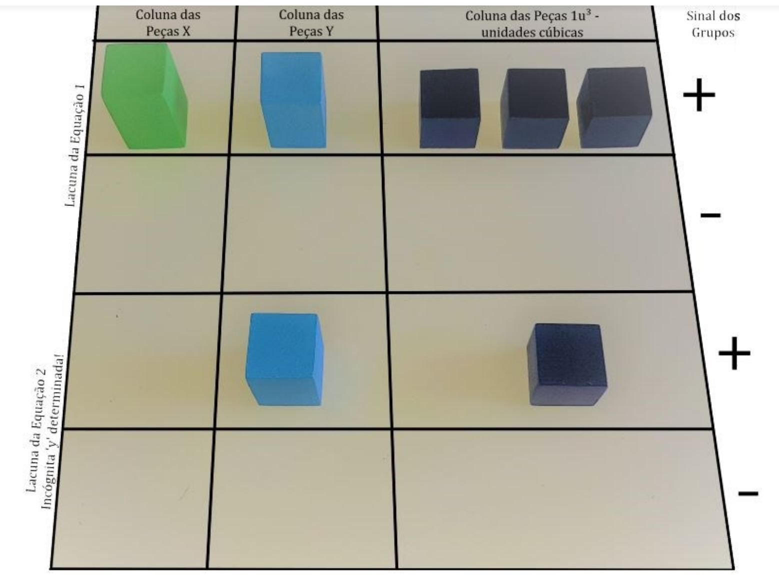
Figura 51: Iteração 2 para o escalonamento do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a representação figural estabelecida na **figura 51,** temos a iteração 2 para o escalonamento da matriz completa do sistema. Esse passo consiste em transformar o bloco de peças da lacuna da equação 2 (grupo de peças com sinais negativos), para que o tornemos positivos na mesma lacuna. Fazer esse tipo de toca de peças, alternando seus respectivos sinais numa lacuna de equação, corresponde a multiplicar a equação contida nela pelo fator -1, alterando o sinal de todos os seus membros. Neste contexto, para este sistema temos: $-3.y = -3 * (-1)$, que equivale a $3.y = 3$ e assim se obtém a matriz seguinte no escalonamento: $\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3\\ 3\end{matrix}\right)$. Agora, basta proceder, conforme a **figura 52**, para que se determine o valor da incógnita y:

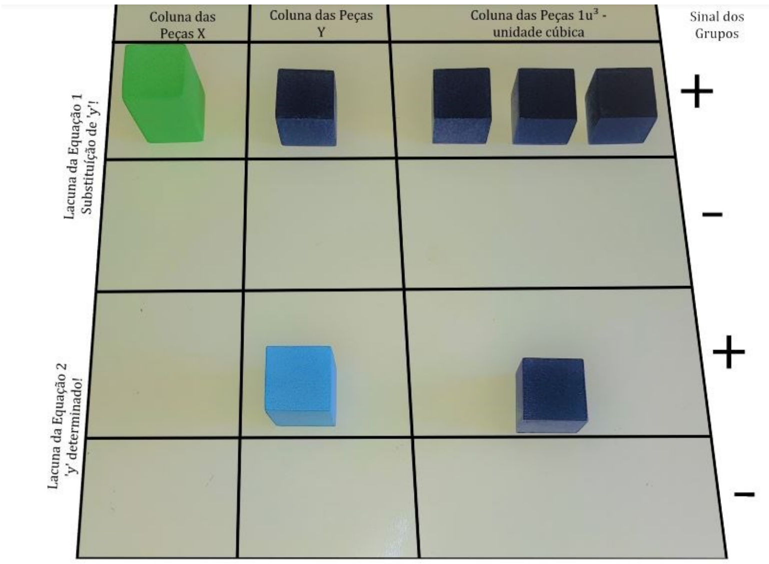
Figura 52: Iteração 3 para o escalonamento do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Seguindo a representação figural da iteração 3, para o escalonamento, encontra-se $y = 1$ visualizando-se a disposição das peças do Algeblocks na lacuna da equação 2, o que pode ser expresso pela matriz $\left(\begin{matrix}1 & 1\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right)$. Aqui se concluí o escalonamento efetuado. Agora, o suposto educando pode utilizar o valor da incógnita y determinada, voltando em qualquer uma das equações originais do sistema, substituindo-a nela e apresentando seus registros de representação escritos, conveniente a solução. Por outro lado, o educando fictício também pode fazer tal substituição de y, utilizando o Algeblocks no esquema utilizado nesta resolução. Ilustramos esse procedimento intuitivo, que pode conduzir o suposto educando envolvido à só utilizar o Algeblocks em sua resolução, conforme a **figura 53**:

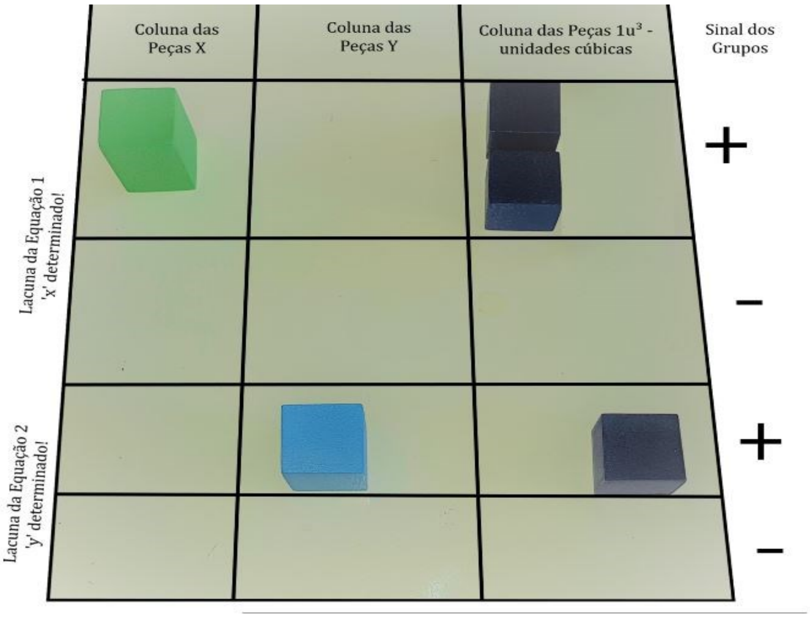
Figura 53: Substituição da incógnita 'y' obtida no escalonamento do sistema inicial.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a representação figural estabelecida na **figura 53**, foi feita a substituição de y na lacuna da equação 1, utilizando o Algeblocks. Como $y = 1$, substitui-se o grupo unitário (da peça Y), pela peça 1u³ - unidade cúbica, na lacuna da equação 1, que aparecia na **figura 52**. Seria conceitualmente incorreto expressar aqui a matriz que representa esse diagrama, mesmo que ela corresponda numericamente essa situação. Alocar um número de uma coluna para a outra, atribuindo um valor a ele, não é procedimento condizente com o escalonamento. Apresentamos então, a representação figural final para a nossa resolução, **na figura 54**:

Figura 54: Sistema inicial solucionado.



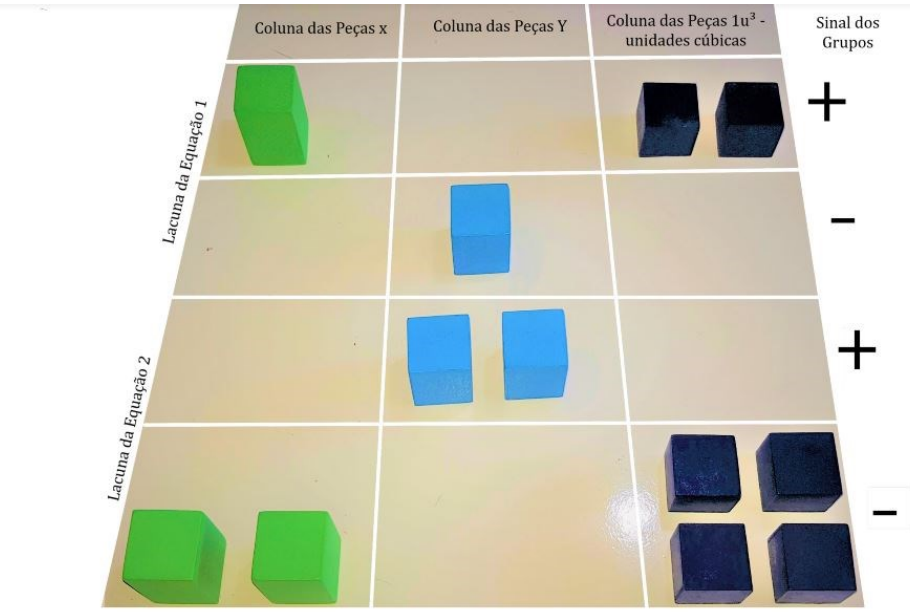
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Considerando a representação figural final para a resolução deste item da tarefa, estabelecido na **figura 54**, após retirar uma unidade em cada um dos membros da equação associada a essa representação, encontra-se a solução fina x. Observando-se as lacunas das equações com as incógnitas, bem como as unidades correspondentes a elas na coluna das unidades, obtemos $x = 2$ e $y = 1$. Denotando de S, o conjunto solução para o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2.y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{(x, y) = (2,1)\}$. Após o suposto educando solucionar esse sistema proposto, ele deve caracterizá-lo como **sistema determinado** ou **sistema normal**, pois foi possível determinar suas soluções. Ainda a resolução não está completa, pois o possível educando deve apresentar um outro exemplo de sistema linear, com duas equações e duas incógnitas, resolvendo-o conforme os procedimentos inicialmente utilizados com o Algeblocks. Também deve ser feita a classificação do sistema apresentado por ele. Isto efetivamente encerra a resolução deste item da tarefa exploratória proposta. Seguimos então, com a resolução dos itens seguintes.

✓ Resolução para o **item b)**: neste da tarefa exploratória proposta, a intenção é permitir que os supostos alunos discutam o sistema linear dado, utilizando o material didático Algeblocks para representar seus procedimentos, conforme foi feito no item anterior. Posteriormente os educandos fictícios devem concluir a discussão do sistema dado, classificando-o em **sistema determinado** (ou **sistema normal**),

sistema indeterminado ou **sistema impossível**. Apresentamos, um exemplo de representação figural auxiliar na discussão para o sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2.x + 2.y = -4 \end{cases}$, conforme a **figura 55**:

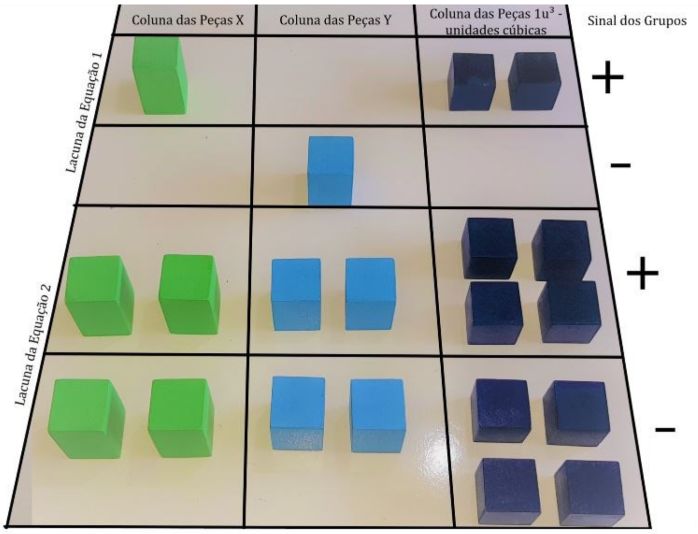
Figura 55: Representação do sistema para a discussão (item b).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural para o sistema a ser discutido neste item da tarefa, considerando a **figura 55**, também pode ser expresso pela matriz completa do sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$. Analogamente ao procedimento anterior, executado no **item a)**, a primeira coluna da matriz corresponde a coluna das peças X do Algeblocks, a segunda das peças Y e a terceira das 1u³ - unidades cúbicas (coluna das unidades). Segundo os métodos usados num escalonamento, procedemos para zerar o segundo elemento da primeira coluna da matriz considerada “-2”, sabendo que $-2 + 2.1 = -2 + 2 = 2 - 2 = 0$. Considere a **figura 56**, que representa o procedimento que foi efetuado com o Algeblocks:

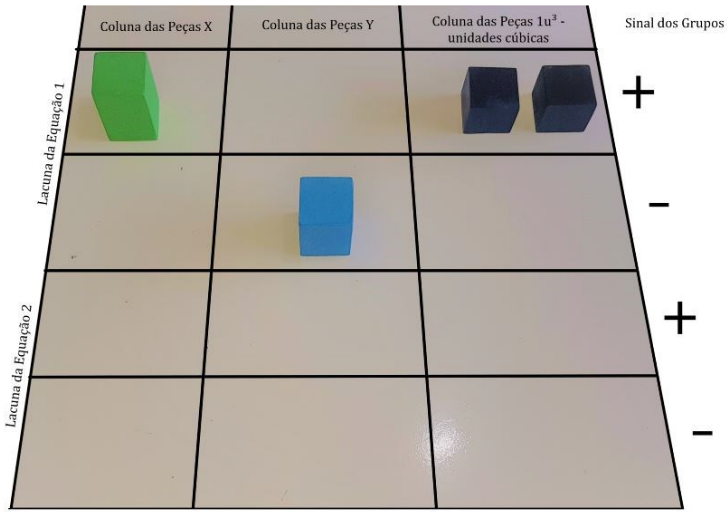
Figura 56: Iteração 1 para o escalonamento do sistema para a discussão (item b).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

O procedimento efetuado com o Algeblocks na iteração 1, estabelecido da **figura 55** para a **figura 56**, foi adicionar a o dobro da equação 1 representada com o Algeblocks, na lacuna da equação 2, porém, mantendo-se o ordenamento inicial (veja a ênfase dada na matriz, para os números em vermelho). Isso equivale a adicionar a equação 2, ao dobro da equação 1, obtendo uma nova equação na lacuna da equação 2, conforme a **figura 56**. Seguindo o escalonamento, temos a matriz nova $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -2+2.1 & 2+2.(-1) & -4+2.2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, que é estabelecida conforme a representação figural seguinte, que encerra a iteração inicial no sistema, na **figura 57**, e nos revela que não há mais procedimentos a serem efetuados com o Algeblocks:

Figura 57: Finalização da iteração 1 para o escalonamento do sistema para a discussão (item b).



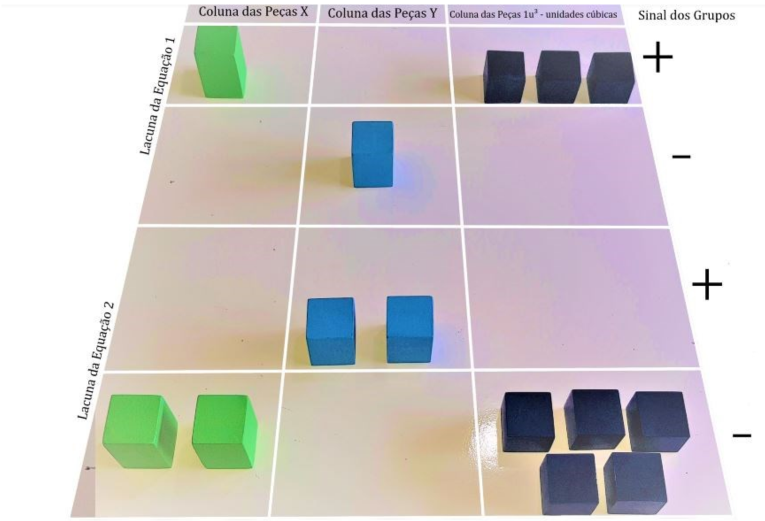
Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural, conforme a **figura 57**, pode ser expressa pela matriz escalonada do sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Essa representação figural não dá sentido geométrico para a lacuna da equação 2, que fica completamente vazia. Este fato revela a limitação do material didático Algeblocks para a abordagem deste sistema, cujo qual, não pode ser completamente solucionado com o Algeblocks. Como mencionamos, o procedimento de escalonamento deve ser encerrado aqui, pois temos claramente, uma lacuna de equação sem peças do Algeblocks, ou seja, o caso $0.x + 0.y = 0$. Neste caso, o suposto educando deve considerar apenas os seus registros escritos e descartar a segunda equação do sistema original, notando que a variável y é livre, ou seja, $\forall y_0 \in R$ são soluções para essa equação do sistema. Se $\forall y_0$ fornece solução para o sistema, então voltando para a primeira equação deste '$x - y = 2$', temos $x - y_0 = 2 \Leftrightarrow x = 2 + y_0 \Longrightarrow$ se S é o conjunto solução para $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2.x + 2.y = -4 \end{cases} \Rightarrow S = \{x = 2 + y_0, y = y_0; \forall y_0 \in R\}$. O educando fictício não necessita estabelecer dessa forma a sua solução. O que se deseja é que ele note que, existem infinitas soluções $(x, y) = (x_0, y_0)$, para a equação $0.x + 0.y = 0$, representada na lacuna da equação 2 (inclusive, sem indicação de sinal para os grupos de peças), conforme a **figura 57**.

Reconhecido este fato, o suposto educando deve concluir sua resolução, caracterizando esse sistema como **sistema indeterminado**, pois ele expressa infinitas soluções.

- ✓ Resolução para o **item c)**: neste da tarefa exploratória proposta, a intenção é similar à que estabelecemos no item anterior. Os supostos educandos devem representar e concluir a discussão do sistema dado, classificando-o em **sistema determinado** (ou **sistema normal**), **sistema indeterminado** ou **sistema impossível**, utilizando o material didático Algeblocks. Apresentamos, a representação figural auxiliar na discussão para o sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2.x + 2.y = -5 \end{cases}$, conforme a **figura 58**:

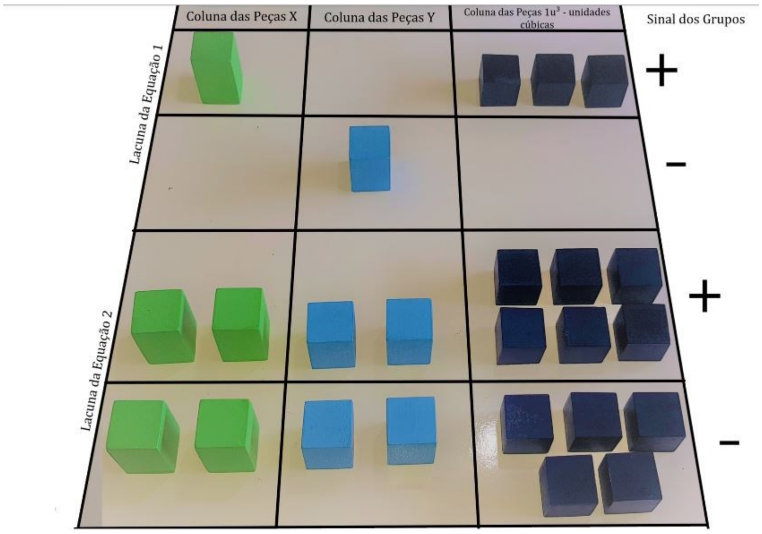
Figura 58: Representação do sistema para a discussão (item c).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural para o sistema a ser discutido neste item da tarefa, considerando a **figura 58**, também pode ser expresso pela matriz completa do sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{array}\right)$. Analogamente aos procedimentos anteriores, executados nos **itens a)** e **b)**, a primeira coluna da matriz corresponde a coluna das peças X do Algeblocks, a segunda das peças Y e a terceira das 1u³ - unidades cúbicas (coluna das unidades). Usando métodos comuns em um escalonamento, procedemos para zerar o segundo elemento da primeira coluna da matriz considerada "-2", sabendo que $-2 + 2.1 = -2 + 2 = 2 - 2 = 0$, resultado já conhecido e explorado anteriormente. Considere a **figura 59**, que representa tal procedimento efetuado com o Algeblocks:

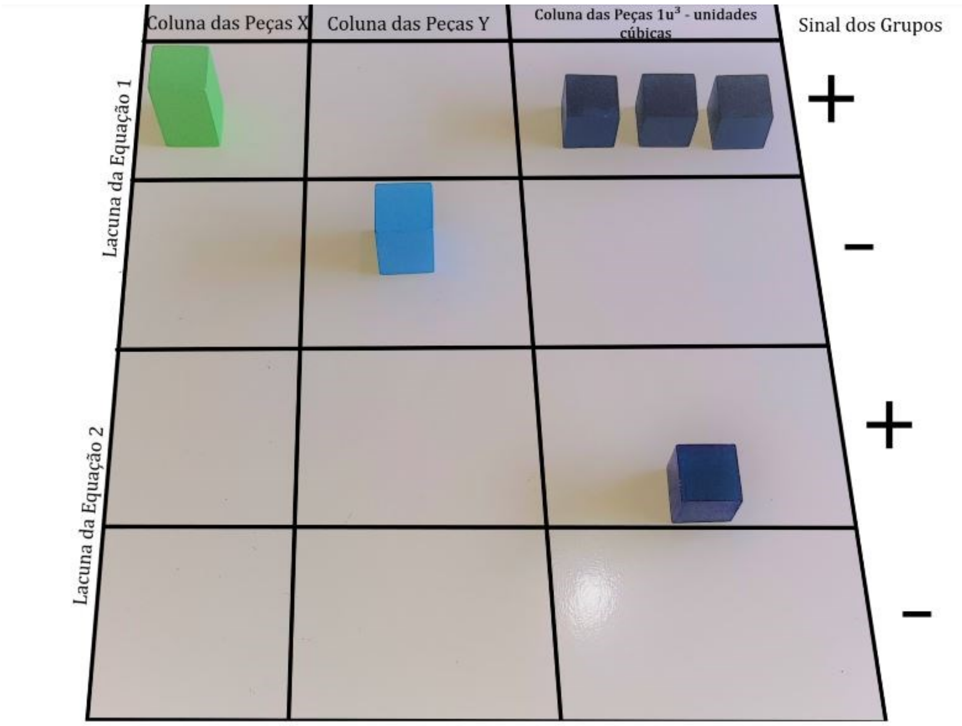
Figura 59: Iteração 1 para o escalonamento do sistema para a discussão (item c).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

O procedimento efetuado com o Algeblocks na iteração 1, estabelecido da **figura 58** para a **figura 59**, foi adicionar a o dobro da equação 1 representada com o Algeblocks, na lacuna da equação 2, porém, mantendo-se o ordenamento inicial (veja a ênfase dada na matriz, para os números em vermelho). Isso equivale a adicionar a equação 2, ao dobro da equação 1, obtendo uma nova equação na lacuna da equação 2, conforme a **figura 56**. Seguindo o escalonamento, temos a matriz nova $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2+2.1 & 2+2.(-1) & -5+2.3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, que é estabelecida conforme a representação figural seguinte conforme a **figura 59**, que encerra a iteração inicial no sistema. Esse passo revela que não há mais procedimentos a serem efetuados com o Algeblocks, bem como dá a noção geral de que não existem soluções. Veja a última representação figural pertinente a este sistema linear, expressa pela **figura 60**:

Figura 60: Finalização da iteração 1 para o escalonamento do sistema para a discussão (item c).



Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural, conforme a **figura 60**, como já apontamos, pode ser expressa pela matriz escalonada do sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Essa representação figural não dá sentido geométrico para a as colunas das peças X e Y, na lacuna da equação 2, sendo as únicas colunas sem peças, mas por outro lado, resta uma peça na coluna das unidades. Logo, este sistema também não pode ser completamente solucionado completamente com o Algeblocks. Deste modo, o procedimento de escalonamento deve ser encerrado aqui, pois temos claramente, que a lacuna da equação 2 expressa suas colunas de variáveis sem peças do Algeblocks, porem com uma única unidade na coluna das unidades, ou seja, o caso $0.x + 0.y = 1$. Neste caso, o suposto educando deve considerar suas representações escritas, argumentando que "somas de parcelas nulas, terá que resultar numa soma nula, dados quaisquer números", ou seja, que $0.x + 0.y = 1$ certamente é uma absurdo matemático (insolúvel). O que se deseja dos possíveis educandos é que eles notem que não existem soluções para a equação $0.x + 0.y = 1$, representada na lacuna da equação 2, conforme a **figura 60**. Justamente pelo fato de toda solução de uma equação de um sistema linear ter que ser solução das demais, certamente o conjunto solução S deste sistema considerado neste item da tarefa é vazio '$S = \{\ \} = \emptyset$'. **Nota**: nunca representar um conjunto vazio por $\{\emptyset\}$.

Reconhecidas as observações efetuadas, o possível educando deve caracterizar esse sistema como **sistema impossível**, pois ele não tem solução.

Um detalhe importante sobre esta tarefa proposta, é que nos referimos a ela como 'exploratória'. Para Ponte (2014), esta tarefa não pode ser denominada de investigativa, pois não foi efetuada nenhuma demonstração matemática e muito menos, foi mobilizado o raciocínio lógico dedutivo, que são elementos cruciais para a consolidação de uma investigação matemática.

Consideremos o **quadro 5**, que contempla a relação das competências e habilidades, que podem ser desenvolvidas com essa tarefa exploratória:

Quadro 5: Competências Específicas e Habilidades Matemáticas mobilizadas na Tarefa 3.

Identificadores das Competências Específicas	**Indicadores das Habilidades Matemáticas**
(a), (b) e (c).	II, III e V, somente.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

5.4 A RELAÇÃO DE EULER

Essa é a última tarefa exploratório-investigativa contemplada em nossa proposta de ensino. A inspiração para a proposta desta tarefa consistiu na definição da Relação de Euler, um tema que é abordado especialmente, no último ano do ensino médio, no momento em que se aprofunda o estudo da geometria espacial com os poliedros convexos e não convexos. Essa famosa relação matemática estabelece uma generalidade para os poliedros convexos, associando matematicamente os números correspondentes aos entes geométricos primitivos do poliedro, valendo como uma constante igual a 2.

Antes de considerar o enunciado para a tarefa, recordamos a definição da Relação de Euler. Muniz Neto (2013) trata esse resultado como 'Teorema de Euler': dado um poliedro P(não necessariamente convexo), denotando respectivamente por V, A e F seus números de vértices, arestas e faces, tem se que $\chi(P) = V - A + F$. $\chi(P)$ denota a denominada 'característica de Euler' de P e $\chi(P) = 2$, para todo poliedro convexo.

O interessante ponto a destacar da Relação de Euler, é o fato de que existem poliedros não convexos de modo que $\chi(P) = 2$, fato que foi possível ser notado com representações figurais que utilizam o Algeblocks. Estabelecemos então, o enunciado para a nossa tarefa.

5.4.1 A tarefa exploratória da Relação de Euler

Sabe-se que todo poliedro convexo respeita a Relação de Euler, e é dito 'Euleriano'.

a) Resgate a Relação de Euler e construa poliedros Eulerianos utilizando o Algeblocks. Represente seu poliedro com o cálculo usando a relação, diga quais e quantas peças do Algeblocks foram utilizadas.

b) Há poliedros não convexos que respeitam a Relação de Euler? Utilize o Algeblocks para apresentar o seu poliedro e o representar, caso seja válida a sentença.

c) Um poliedro não convexo que respeita a relação de Euler pode ser dito 'Euleriano'? Diga como o Algeblocks lhe ajudou a formular sua argumentação.

Sugestão: troque o termo “convexo” por “que”, fazendo os ajustes necessários na definição.

Apresentamos então, uma possível resolução com exemplos para a tarefa exploratória proposta, apontando seus principais pontos e a discussão acerca das competências específicas e habilidades associadas a ela no final de sua abordagem.

5.4.2 Resolução e discussão da tarefa exploratória com a Relação de Euler

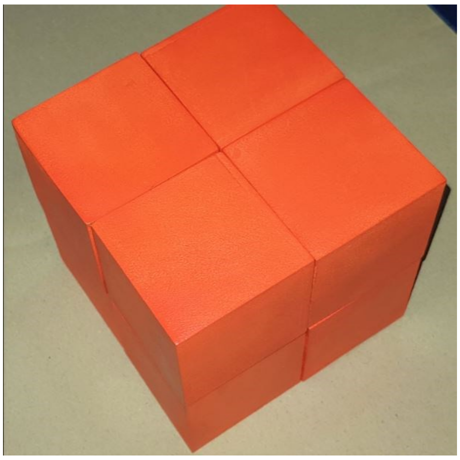
- ✓ Resolução para o **item a)**: neste item da tarefa exploratória, a intenção geral é mobilizar os alunos fictícios a recordarem a Relação de Euler, que é válida para todos os poliedros convexos: o educando fictício deve denotar os entes geométricos de um poliedro convexo, com V= número de vértices, A=número de arestas e F=número de faces deste. A relação que deve ser apresentada pelos supostos educandos é $V - A + F = 2$. A denotação para os números dos entes geométricos do poliedro convexo também pode ser estabelecida com outras simbologias, desde que esteja claramente explicada.

O principal ponto deste item da tarefa não é o resgate da Relação de Euler, mas sim, do momento de exploração a ser apreciado pelo suposto aluno, manipulando o material didático Algeblocks para a construção de seus poliedros. Posteriormente o suposto educando apresenta o cálculo associado à Relação de Euler, visualizando os entes geométricos primitivos presentes neste.

Ao apresentar a tarefa exploratória com o enunciado estabelecido, espera-se que os possíveis alunos construam poliedros convexos com o Algeblocks, já que foi exposto que todos os poliedros convexos são ditos ‘Eulerianos’, sendo uma possível solução para a exploração. Mas o docente deve estar atento que os alunos fictícios, podem apresentar exemplos e representações figurais para poliedros não convexos, que atendem a Relação de Euler. Neste caso, a resolução do suposto aluno estará correta se o cálculo apresentado satisfazer a relação. Em ambos casos, os possíveis alunos devem apresentar as representações figurais do Algeblocks com registros manuscritos de forma legível, bem como o número de cada tipo de peça que foram utilizadas.

Apresentamos preliminarmente, alguns dos possíveis exemplos de construção dos poliedros convexos, lembrando que todos eles são prismas reto-retângulos, conforme as **figuras 61**, **62** e **63**:

Figura 61: O cubo de aresta 2Y.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na **figura 61**, foi estabelecida a disposição das peças, constituindo um cubo de aresta $2.Y$, que necessitou de oito unidades das peças Y^3. Nessa representação figural, cada aresta de cada peça é formada pela união de duas peças com mesmas dimensões e na contagem dos entes geométricos, isso deve estar claro ao possível educando envolvido, para que não haja uma contagem errada, muito menos a concepção distorcida do poliedro. Essa junção entre as peças, constituindo um poliedro maior com o Algeblocks é puramente conceitual e indissociável desse fato. Como em todos os cubos, tem-se que $V = 8$ vértices, $A = 12$ arestas e $F = 6$ faces e é claro que a Relação de Euler é válida para ele, pois é convexo.

Figura 62: O paralelepípedo de arestas (X+Y), (X+Y) e (Y+1).

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na **figura 62**, temos uma nova disposição das peças, constituindo um paralelepípedo de arestas $(X+Y)$, $(X+Y)$ e $(Y+1)$, que necessitou de oito peças do Algeblocks, sendo uma peça Y^3, uma peça X^2Y, uma peça XY, uma peça X^2, duas peças Y^2X e duas peças XY. Na representação figural construída, cada aresta de cada peça é formada pela união de duas peças com mesmas dimensões, assim como na **figura 61** e o docente deve estar atento a este fato. Como em todos os paralelepípedos, tem-se novamente que $V=8$ vértices, $A=12$ arestas e $F=6$ faces. A Relação de Euler certamente é válida para ele. Consideraremos então, uma exemplificação final para uma nova disposição de peças, conforme o proposto na exploração, vide a **figura 63**:

Figura 63: O paralelepípedo de arestas (X+Y+1), (X+Y+1) e Y.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Conforme a representação figural da **figura 63**, temos um novo arranjo das peças, constituindo um prisma reto-retângulo com base quadrangular e altura Y. As dimensões de suas arestas são $(X+Y+1)$, $(X+Y+1)$ e Y. Foram utilizadas nove peças do Algeblocks, sendo uma peça Y^3, uma peça X^2Y, uma peça Y, duas peças Y^2X, duas peças Y^2 e duas peças XY. Na representação figural construída, cada aresta da base de cada peça é formada pela união de três peças com mesmas dimensões, assim como nos exemplos anteriores. Como em todos os prismas reto-retângulos, que a contagem dos entes geométricos puros dele é a mesma que nos exemplos anteriores, e essa verdade se estende para todas as disposições de peças do Algeblocks, mediante estas condições. Vale ressaltar que Relação de Euler vale para todas as disposições deste tipo. Esse item a) certamente possuí caráter exploratório e não pode ser tratado como uma investigação, pois a finalidade não é provar fatos matemáticos. Não apresentamos disposições de peças que resultam em poliedros não convexos, pois não é a finalidade deste item da exploração. Prosseguimos então, para o próximo item da tarefa.

✓ Resolução para o **item b)**: neste item da tarefa exploratória, o foco é mobilizar os educandos fictícios a questionarem a Relação de Euler, apresentando um único exemplo de construção com o Algeblocks, para um poliedro não convexo e que respeita a relação. Existem inúmeros exemplos desta natureza, mas um fato curioso é que os supostos alunos, ao se depararem com o enunciado, podem conjecturar que se o poliedro não é convexo, então ele não respeita a relação, o que é um equívoco decorrente da negação das proposições implicadas, que nem sempre é um resultado válido na matemática.

Exibimos a seguinte argumentação embasada em lógica proposicional envolvida nessa análise para um prévio conhecimento pelo docente, que foi utilizada como base para a elaboração desse item da tarefa, bem como potenciais alterações que podem gerar outras explorações deste tipo:

Sejam as proposições p: se um poliedro é convexo, q: respeita a Relação de Euler. Em linguagem lógica, a Relação de Euler se traduz em $p \rightarrow q$, e que possui valor lógico verdadeiro. Logo a negação dela é equivalente a $p \rightarrow q$, que em língua corrente equivale a ‘se um poliedro não é convexo, então ele não respeita a Relação de Euler’. Acontece que $p \rightarrow q \not\Leftrightarrow p \rightarrow q$, pois o fato de tomarmos a negação da sentença, não é condição necessária e suficiente para torna-la tautológica, o que pode ser verificado mediante a construção de uma tabela da verdade. Então, logicamente, o fato de um poliedro não ser convexo, não implica que ele não respeite a Relação de Euler, ou seja, não se pode afirmar que ele não é Euleriano. Por outro lado, não se pode garantir a reciproca da Relação de Euler nestes termos, pois se o poliedro é Euleriano, não quer dizer que ele seja convexo. Em linguagem lógica, isso se traduz em $p \rightarrow q \not\Leftrightarrow q \rightarrow p$, pois a sentença certamente não é tautológica.

Um fato curioso é que a contraposição da Relação de Euler, logicamente deve ser válida, pois em simbologia lógica, $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$. Em língua corrente, o lado esquerdo da equivalência se traduz em: se um poliedro não é Euleriano, então ele não é convexo. Esses exemplos apresentados, ao leitor, que mobilizam justificativas lógicas para as proposições, podem servir de exemplo na elaboração de tarefas exploratório-investigativas e também para a abordagem de outros importantes resultados matemáticos. O docente deve valer-se desses recursos quando for conveniente, ao elaborar seus enunciados.

Consideremos então, alguns exemplos com cálculos, sobre a construção de poliedros não convexos e que respeitam a Relação de Euler, nas representações figurais com o Algeblocks a seguir:

Figura 64: Exemplo inicial de poliedro não convexo Euleriano.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural estabelecida na **figura 64**, nos mostrou uma configuração preliminar com as peças Y^3 do Algeblocks, com um paralelepípedo com um furo. Essa disposição satisfaz a condição proposta neste item da tarefa exploratória, pois é não convexo e que respeita a Relação de Euler no mesmo tempo. Mostramos os números associados aos entes geométricos dele, bem como o cálculo que se faz conforme a Relação de Euler.

Esse poliedro possui: $V = \overbrace{8}^{Vértices\ da\ parte\ exterior.} + \underbrace{8}_{Vértices\ da\ parte\ interior\ ao\ furo.} = 16$ vértices, $A = \overbrace{12}^{Arestas\ exteriores.} + \underbrace{12}_{Arestas\ interiores\ ao\ furo.} = 24$ arestas e $F = \overbrace{6}^{Faces\ de\ um\ prisma\ sem\ furo.} +$

$\underbrace{4}_{Faces\ estabelecidas\ pelo\ furo.} = 10$ faces. Pela relação, temos que: $V - A + F = 16 - 24 + 10 = -8 + 10 = 2$, logo o poliedro respeita a relação de Euler.

Deve-se ter cuidado com a contagem dos entes geométricos, especialmente para os poliedros não convexos e esse procedimento é puramente conceitual. A visualização dos elementos na representação figural estabelecida depende da percepção individual do sujeito, mas o Algeblocks auxilia neste processo por ser manipulável. É evidente neste contexto, que o material concreto atua como um facilitador da compreensão do que foi mobilizado no meio abstrato, que é uma atribuição do material didático. Claramente esse poliedro satisfez o proposto neste item da tarefa, então existe pelo menos um exemplo até o momento. Foi então dado um outro exemplo similar na **figura 65**.

Figura 65: Segundo exemplo de poliedro não convexo Euleriano.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural situada na **figura 65**, expõe uma outra configuração utilizando as peças X^3 do Algeblocks, com uma forma de 'U'. Esse arranjo de peças satisfaz a condição proposta pela tarefa exploratória no **item b)**. O poliedro é não convexo e ainda respeitou a Relação de Euler no mesmo tempo. Efetuamos então a contagem dos entes geométricos associados a ele, bem como o cálculo que o acompanha.

O poliedro possui: $V = \overbrace{4.2}^{Vértices\ da\ parte\ lateral\ exterior.} + \underbrace{2.4}_{Vértices\ da\ parte\ interior\ ao\ 'U'.} = 2.8 = 16$ vértices, $A = \overbrace{5.2 + 6}^{Arestas\ da\ leteral\ exterior.} + \underbrace{2.3 + 2}_{Arestas\ interiores\ ao\ 'U'.} = 16 + 8 = 24$ arestas e $F = \overbrace{3.2 + 2}^{Faces\ das\ laterias\ do\ poliedro.} + \underbrace{2}_{Face\ superior\ e\ inferior\ do\ 'U'.} = 8 + 2 = 10$ faces. Pela relação, novamente temos que: $V - A + F = 16 - 24 + 10 = -8 + 10 = 2$, logo o poliedro respeita a relação de Euler, assim como o anterior. Inclusive os cálculos foram idênticos, mas o que difere é a forma de visualizar a representação figural como referencial na contagem.

Claramente a visualização dos elementos na representação figural estabelecida depende da percepção individual do sujeito e neste caso, a forma de organizar a visualização espacial, auxilia neste processo com o uso do Algeblocks. Neste caso, se for feita a contagem de forma desordenada, há maior chance de erros na contagem dos entes geométricos. Logo, esse poliedro satisfez o proposto neste item da tarefa, então existem outros exemplos para o caso. O suposto aluno pode utilizar vários tipos de peças em seu exemplo, o que não foi mencionado até o momento. Mostramos um exemplo final outro exemplo final com os cálculos, acerca do poliedro da **figura 66**:

Figura 66: O exemplo final de poliedro não convexo Euleriano.

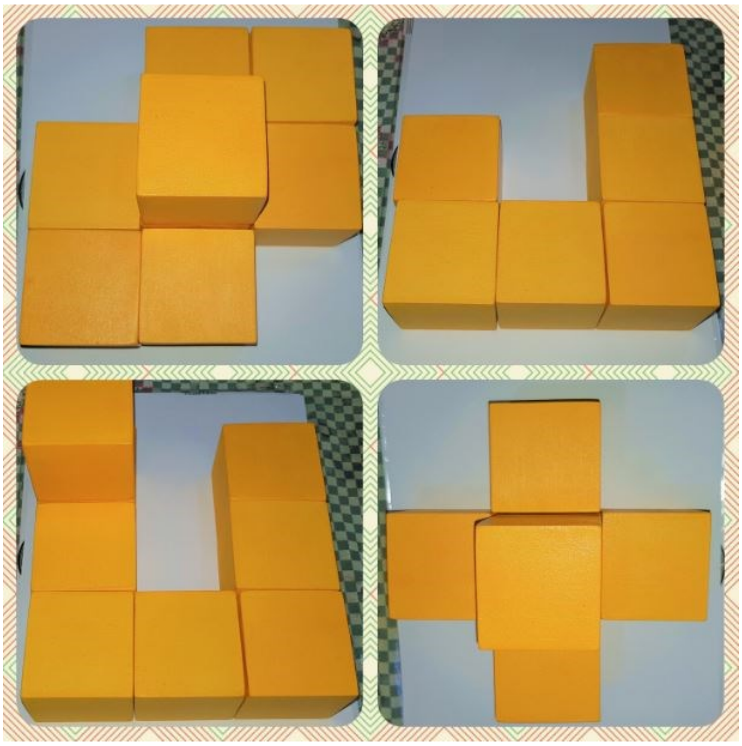
Fonte: Arquivo do pesquisador.

A representação figural exposta na **figura 66**, mostra uma outra disposição utilizando as peças X^3 do Algeblocks, com uma forma de 'L'. Esse arranjo de peças satisfaz a condição da tarefa exploratória neste item. O poliedro é não convexo e ainda respeita a Relação de Euler. Foi feita a contagem dos entes geométricos associados a ele, e a apresentação do cálculo:

O poliedro apresentado possui: $V = \overbrace{6}^{Vértices\ da\ parte\ superior.} + \underbrace{6}_{Vértices\ da\ parte\ inferior.} = 12$ vértices, $A = \overbrace{6+6}^{Arestas\ superiores\ e\ inferiores.} + \underbrace{6}_{Arestas\ das\ laterais.} = 18$ arestas e $F = \overbrace{6}^{Faces\ laterais.} + \underbrace{2}_{Face\ superior\ e\ inferior.} = 8$ faces. Pela relação, temos que: $V - A + F = 16 - 24 + 10 = -8 + 10 = 2$, logo o poliedro respeita a relação de Euler.

Pela relação, novamente temos que: $V - A + F = 12 - 18 + 8 = 12 - 10 = 2$, logo o poliedro respeita a relação, assim como nos exemplos anteriores. Apresentamos uma figura que contem outros exemplos que podem ser encontrados pelos supostos educandos, com a **figura 67**, mas não apesentamos os cálculos:

Figura 67: Outros exemplos de poliedros não convexos e Eulerianos.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Existem muitos outros exemplos de poliedros não convexos que podem ser encontrados e que são Eulerianos. A **figura 67**, dá apenas um número reduzido destes. O que é importante é sempre verificar se a relação é válida ou não. O intuito principal deste item foi, que o suposto educando deve construir com as peças do Algeblocks o seu exemplo e justificar com o cálculo sobre a relação entre o número de entes geométricos de sua representação figural. Outro objetivo importante foi gerar uma inquietação no possível educando, que a relação de Euler deve ser válida somente para poliedros convexos, mas no enunciado não se afirmar o contrário para poliedros não convexos. Após o encerramento deste item da tarefa, o aluno fictício tem subsídios matemáticos suficientes para concluir o item final desta.

Resolução para o **item c)**: no item final dessa tarefa exploratória, o foco é mobilizar uma reflexão final sobre a Relação de Euler, considerando os resultados anteriores, que foram abordados com o Algeblocks, visando construir poliedros convexos e não convexos (que respeitam a relação). Vale ressaltar que geralmente os possíveis alunos, ao se depararem com o enunciado para a relação de Euler, podem conjecturar erroneamente que se o poliedro não é convexo, então ele não respeita a relação. Esse fato pode ser decorrente da ausência de noções básicas de lógica matemática no Ensino Médio. De certo modo, se uma definição matemática não explicita nada para o contrário de uma condição, certamente não se pode garantir nada matematicamente nesse sentido. Porém, a BNCC reitera como competência o ‘apreender novos conceitos’, de maneira ampla, mas não os delimita. Valendo-se da ideia de que o suposto educando não tem uma noção de lógica geral para tratar as proposições matemáticas, é claro que ele ficará surpreso com a possibilidade de um poliedro não convexo respeitar a relação de Euler, feita a constatação com o Algeblocks.

Por outro lado, a definição dada no enunciado de que “todo poliedro convexo respeita a Relação de Euler e este poliedro é dito ‘Euleriano’ “, pode deixar o suposto aluno envolvido confuso, para a conclusão da sua argumentação neste item. Mas o que os possíveis educandos envolvidos devem compreender que se a definição não afirmou nada para os poliedros não convexos. O docente deve ressaltar então para os educandos fictícios, que quando é estabelecido um resultado matemático, não se pode afirmar que o contrário desta afirmação estabelece um resultado também contrário ao anterior. Um exemplo que clarifica essa ideia, usando um cubo e um paralelepípedo do Algeblocks pode ser dado: todo cubo é um paralelepípedo, mas nem todo paralelepípedo é um cubo.

O suposto educando, após seguir a sugestão dada no final do **item c)**, faz a modificação para a definição dada no início da tarefa, obtendo um enunciado similar a "todo poliedro que respeita a Relação de Euler é dito 'Euleriano'. Essa sentença permite estender a denominação de 'poliedro Euleriano' para a reunião dos poliedros convexos e não convexos, isto é, se tais poliedros tomados desse conjunto universo respeitarem a relação. Logo, o possível educando também deve concluir, que um poliedro não convexo pode ser Euleriano, como o proposto neste item.

Uma sugestão interessante de adaptação para essa tarefa, seria propor a alteração no enunciado do **item b):** há poliedros não convexos que **não** respeitam a Relação de Euler? Utilize o Algeblocks para apresentar o seu poliedro e o representar, caso seja válida a sentença. Deste modo, os supostos educandos teriam que encontrar exemplos com o Algeblocks, para poliedros que não respeitam a Relação de Euler, e, no mesmo tempo, não são convexos. Pode parecer uma exploração desafiadora, mas ao conceber que os poliedros, também podem ser compostos pela união de outros poliedros (estabelecendo a conexão entre vértice com vértice, aresta com aresta, face com face, entre outros), fica mais fácil a apresentação de exemplos. Esses poliedros a que nos referimos, são de uma classe especial, denominadas de Poliedros de Cauchy. O docente não necessita expor o nome desta categoria de poliedros.

Um detalhe importante desta tarefa, é que nos referimos a ela também como 'exploratória'. Conforme as principais ideias de Ponte (2014), esta tarefa não pode ser denominada de investigativa, pela ausência de elementos cruciais para a consolidação de uma investigação matemática, em que ocorre uma demonstração ou prova matemática, utilizando-se o raciocínio logico dedutivo do suposto aluno. Essa observação se estende à todas as tarefas denominadas de exploratórias.

Consideremos o **quadro 6**, que contempla a relação das competências e habilidades, conforme a BNCC, que podem ser desenvolvidas com essa tarefa exploratória final:

Quadro 6: Competências Específicas e Habilidades Matemáticas mobilizadas na Tarefa 4.

Identificadores das Competências Específicas	Indicadores das Habilidades Matemáticas
(a), (b) e (c).	Somente VI.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Os supostos educando(s)/aluno(s), possíveis alunos/educandos, serviram apenas como auxiliares para a idealização das tarefas propostas. Não houve aplicação destas no ambiente escolar.

Após a construção de nossa proposta de ensino, utilizando o Algeblocks, apresentamos então, as nossas considerações finais sobre todo o trabalho transcorrido, nesta presente dissertação.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma proposta de ensino com base em tarefas exploratórias-investigativas em que foi envolvida a utilização do material didático manipulativo denominado de Algeblocks. Desde o início deste trabalho, já tínhamos uma noção de que a averiguação desse material didático manipulativo, pode ser de grande importância para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, bem como para o estabelecimento de representações para estes.

Preliminarmente neste trabalho, procurou-se explicitar, primeiramente, os motivos pelos quais resolvemos trabalhar com uma proposta de ensino, utilizando o material didático indicado, com enfoque nos conteúdos de matemática do ensino médio. O primeiro contato do pesquisador com o Algeblocks foi na Iniciação Cientifica desenvolvida na Universidade de Sorocaba e com o Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado em torno do mesmo material e mesma instituição de ensino.

Explicitamos o porquê de se utilizar especificamente este recurso no trabalho desenvolvido, seguindo as orientações de Lorenzato (2012), apontando os locais em que ele pode ser utilizado no ambiente escolar, para o desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas matemáticas, conforme as principais ideias de Ponte (2014, 2015), em torno deste tipo de tarefa. Buscamos também, neste sentido, apontar estudos sobre este material didático em território nacional, em termo de dissertações e teses, porém só encontramos o trabalho de Silva (2018), o que relevou a escassez de estudos sobre o Algeblocks. Este fato implicou na necessidade de desenvolvimento deste, dado que tal material, possui potencialidades como auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de álgebra e geometria, como constatamos.

Para que fosse possível efetuar a nossa proposta de ensino, pontuamos a necessidade de se seguir os documentos normativos oficiais vigentes e então, consideramos a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). Apontamos também conteúdos matemáticos, bem como as competências e habilidades matemáticas, conforme a BNCC. O processo ensino-aprendizagem dos conteúdos de matemática, bem como a avaliação dos possíveis alunos envolvidos é norteada pelo desenvolvimento de competências e habilidades, conforme o mesmo documento.

Explicitamos as tipologias de materiais didáticos conforme Lorenzato (2012), bem como as suas recomendações para utilização, sendo somente um material de apoio ao docente de matemática e não ‘uma panaceia’, para todos os conteúdos e momentos de trabalho com a matemática. Reiteramos a importância do uso de material didático para ensinar matemática, seguindo as concepções deste mesmo autor. Justamente por este fato e relevando o trabalho com materiais didáticos manipuláveis, também denominados de materiais concretos, Lorenzato (2012), reforçou a importância de se ter um local adequado para o manuseio ou construção destes aparatos, apontando uma possível forma para a confecção do Algeblocks. Nestes meios, pode ser mais produtiva a orientação dos possíveis educandos em averiguações abstratas via materiais didáticos manipuláveis em torno de tarefas exploratório-investigativas conforme Ponte (2014).

Embora o apoio dos nossos sentidos seja importante na matemática para consolidar os conhecimentos empíricos, convém lembrar que Lorenzato (2012) nos acredita que para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto, relevando a importância do trabalho com materiais didáticos. Porém, como Falcão (2007), nos permitiu concluir que esse processo não é unidirecional, encaramos essa proposição como mito. Após a abordagem das concepções sobre materiais didáticos, efetuamos buscas por teses e dissertações restritas aos estudos envolvendo materiais didáticos, de natureza manipulável e concretos. Essa averiguação resultou somente no estudo de Silva (2018), já apontado.

Em outro momento da dissertação abordamos as concepções de tarefas conforme Ponte (2014) e após isso, foram caracterizadas as concepções sobre tarefas exploratórias-investigativas. O autor destacou os principais tipos de tarefas presentes no contexto escolar, bem como sua abrangência:

a) exercício: tarefa fechada e de desafio reduzido;

b) problema: tarefa também fechada, mas com desafio elevado;

c) investigação: tarefa aberta com desafio elevado;

d) exploração: tarefa aberta acessível à maioria dos alunos (tipo de tarefa que mais figurou em nossa proposta de ensino).

Levando em consideração as diversas tipologias de tarefas matemáticas, Ponte (2014) também apontou as duas dimensões fundamentais pertinentes as tarefas: o “grau de desafio matemático” e o “grau de estrutura”.

Outro ponto importante a se destacar deste estudo foi a presença de quatro momentos principais envolvidos numa tarefa exploratório-investigativa, conforme estabelece Ponte (2014): o reconhecimento da situação, sua exploração preliminar e a formulação de questões; o processo de formulação de conjecturas a partir da organização dos dados; a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas, fazendo afirmações sobre as mesmas e a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado, justificando uma conjectura e avaliando o resultado do raciocínio (caso se consolide a investigação matemática). Não é necessário que seja seguida uma ordem para estes momentos: convêm ao docente, estar atento e imerso neste processo, já que nas tarefas deste tipo, o desfecho pode ser imprevisível.

Num outro ponto desta dissertação, percebemos a importância dos registros de representação que estão associados ao desenvolvimento das tarefas propostas. Sabemos que cada registro de representação pode associar diferentes significados ao objeto matemático. Justamente por este fato, concluímos que não podemos interpretar uma representação matemática de forma direta, a não ser em um contexto bem definido, contando com um sistema de representação com regras e significados bem estabelecidos.

Para isso, recorremos as concepções de Fischbein (1993), mobilizando as representações figuras. Pelo fato do Algeblocks ser um material didático concreto que contêm muitos conceitos figurais, recorremos às especificidades de Fischbein (1993) quanto a forma de conceber a externalização das representações matemáticas a partir da ação cognitiva, utilizando estas reflexões na elaboração de nossas tarefas. Durante o tratamento das representações figurais para as tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas ficou mais evidente que essas representações não são únicas. Cabe ao docente reconhecer, que um objeto matemático tem infinitas representações figurais, a ser expressa ou imaginada conforme a pessoa que o aborda, ou seja, o educando em sua individualidade.

Ao analisar a produção das tarefas exploratório-investigativas que foram contempladas pela nossa proposta de ensino, foi possível verificar que em todas elas, aparecem conceitos figurais e propriedades predominantes da geometria euclidiana, estabelecendo-se assim as representações figurais – resultante de uma composição de conceitos de natureza figural. Por outro lado, percebemos que a tipologia de tarefa que sempre será mobilizada, quando se trabalha com materiais didáticos é a denominada de exploratória. Esse fato é evidente, já que o fato do material didático Algeblocks ser lúdico, certamente se estabelecem explorações matemáticas, indissociáveis de conceitos e representações figurais, conforme as principais concepções de Fischbein (1993).

No final do desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas, percebemos que somente uma das tarefas mostrou-se ser uma investigação matemática – a que envolve os zeros da função quadrática. Essa foi a única tarefa que contemplou, além da exploração matemática, a demonstração da fórmula de Bháskara, podendo então ser denominada de investigação matemática. Por outro lado, as demais tarefas são exploratórias, porque não contemplaram a demonstração matemática dos fatos abordados, porém revelam-se pertinentes, dado que a inspiração para a elaboração destas se deu em torno de curiosidades matemáticas, que visam ampliar o repertório de conhecimento acerca de representações pelo possível aluno, bem como o desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas indicadas, conforme a BNCC.

Pode não ser um conhecimento agregado ao possível educando, do ensino médio, conceber que todo quadrado é um retângulo, bem como todo cubo é um paralelepípedo reto-retângulo. Neste sentido, os conhecimentos de outros métodos para a resolução de sistemas lineares também podem se dar com materiais concretos. O Algeblocks tem potencial para auxiliar em sistemas lineares com ordem superior ao abordado, por exemplo, com três equações e três variáveis, mas o docente deve ter cuidado com a escolha dos exemplos a serem abordados (conjunto para os coeficientes das variáveis e número de peças a serem utilizadas, por exemplo), pois pode se comprometer o papel do material didático que é de facilitador do processo de ensino-aprendizagem.

Reiteramos, que as tarefas desenvolvidas não foram aplicadas no ambiente escolar, pois nosso foco foi consolidar uma proposta de ensino. As orientações didático-pedagógicas expressas neste estudo, são sugestões para os docentes interessados na utilização deste material didático.

O uso de qualquer material didático requer o preparo por parte do docente. O professor precisa estar disposto a sair de sua zona de conforto, uma vez que no desenvolvimento de uma atividade poderá ocorrer situações não previstas, conforme orientamos durante a descrição dos passos efetuados nas tarefas desenvolvidas.

É necessário ressaltar que, não basta ao docente apenas conhecer os conteúdos matemáticos a serem abordados com este tipo de proposta de ensino. O docente deve sempre mobilizar as tarefas com clareza, evitando-se assim ambiguidades ao tratar dos conceitos pertinentes às tarefas exploratório-investigativas.

O docente também deve demonstrar interesse e empatia por esse processo, cativando os alunos envolvidos em suas explorações e investigações matemáticas. Se seguidas tais observações, ampliam-se as chances de sucesso e aprendizado significativo e efetivo aos possíveis educandos envolvidos em tarefas deste tipo, utilizando-se quaisquer matérias didáticos neste contexto. Por outro lado, a utilização do Algeblocks só produzirá bons frutos se o docente acreditar na potencialidade desse recurso didático. Assim, o planejamento para a abordagem de tarefas deste tipo em sala de aula, o conhecimento detalhado do Algeblocks são pontos a serem fortemente considerados pelo docente que optar implementar esse tipo de trabalho com seus possíveis alunos, pois o modo de utilização do Algeblocks depende da concepção agregada na bagagem matemática de cada docente a respeito da matemática, bem como de sua forma de ensinar – implicado pela sua formação e experiências da área.

A utilização de qualquer material didático, conforme as observações de Lorenzato (2012), não ameniza a falta de domínio de um conteúdo matemático, por parte do docente. Há a possibilidade dessa falta de domínio ser ressaltada, pois durante uma aula podem surgir questões que dificilmente seriam levantadas sem o uso deste aparato, o que pode resultar na falta de confiança dos supostos educandos, em relação ao docente.

Durante o processo transcorrido nesta pesquisa, compreendemos a importância de trabalhar com a elaboração de tarefas exploratório-investigativas, conforme Ponte (2014); Ponte (2015). Este tipo de trabalho levou-nos a refletir como utilizar corretamente o material didático, de modo que possa permear desde a exploração e mobilização de conceitos empíricos já conhecidos pelos educandos fictícios, podendo levar até o desenvolvimento do raciocínio logico-dedutivo; característico e predominante nesta área do conhecimento.

A descoberta das representações figurais, que são inerentes ao material didático Algeblocks, seguindo as concepções de Fischbein (1993), revelou-se muito importante neste estudo, ampliando a compreensão acerca dos diversos registros de representação essencialmente matemáticos, que não necessariamente coexistem com unicidade. As representações figurais são relevantes, essencialmente no ensino da geometria, pois elas foram fundamentais para que elaborássemos as tarefas propostas, reafirmando que uma dada representação não valida uma demonstração de um fato matemático, mas sim, dá uma noção preliminar de como se deve proceder para este propósito. Reiteramos também, ser de suma importância as explorações geométricas que não se concretizam em investigações matemáticas.

Deixamos a partir daqui, para o leitor, uma série de sugestões para a ampliação do estudo do material didático Algeblocks: verificação das potencialidades do material didático manipulativo no ensino fundamental – apontamos que a abordagem dos produtos notáveis pode ser produtiva com esse material, permitindo com que o suposto educando apreenda essas representações algébricas com mais facilidade.

Sabemos que não é possível demonstrar a fórmula de Ferro-Cardano (fórmula para determinar os zeros de uma equação geral de grau 3: $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0; a \neq 0$) utilizando o Algeblocks, pois a representação figural da expressão genérica resultaria em uma concatenação de diversos prismas. Esse agrupamento de peças teria que ser reduzido à montagem de um único cubo no processo final da demonstração, o que é algo impossível quando se nota a teoria desenvolvida por Évariste Galois em sua álgebra.

‘Fisicamente’ é impossível conceber tal processo de ordenamento de peças, contendo seccionamentos, pois caso afirmativo, teríamos um problema ainda mais complexo do que a duplicação de cubos (construção de um cubo com o dobro de volume, a partir da aresta do cubo inicial com régua e compasso), sendo impossível construir todos os números racionais associados às raízes dos polinômios destas representações figurais. Indicamos como sugestão de desdobramento para esta pesquisa, a abordagem dos casos convenientes para as raízes das cúbicas, em que o Algeblocks pode ser auxiliar – nos casos das equações cúbicas incompletas.

Também há aplicação para o Algeblocks em geometria analítica, abordando equações de cônicas, como as das: circunferências, elipses, hipérboles e parábolas. Como o Algeblocks permite o estabelecimento do passo-a-passo do método de completar quadrados, ao tratar destas equações, pode-se fazer a passagem das equações sob forma geral para a forma reduzida e vice-versa. Basta empregar o método de completar quadrados sucessivas vezes. Essas são apenas algumas das nossas sugestões para desdobramentos desta pesquisa, utilizando o material didático Algeblocks e a metodologia de trabalho, deve ser definida pelo futuro pesquisador.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC):** Educação é a base. Brasília: MEC, 2018. 600p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2019.

BILAC, Olavo. Excerto da Obra. In: BILAC, Olavo. **Profissão de Fé**. Rio de Janeiro: Biblioteca Virtual de Literatura, sem data de publicação. 4p. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=7563>. Acesso em: 22 jan. 2020.

ESPEJEL, Norma Angélica Hernánez. **Desarrollo Del Pensamiento Algebraico a través del uso de los Algeblocks em Alumnos de Segundo Grado de Educación Secundaria'**. 2010. 174 f. Tese (Mestrado em Educação Matemática). Ciudad de México: Universidad Pedagógica Nacional, 2010.

FALCÃO, Jorge Tarcisio da Rocha. **Dez mitos acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática:** síntese de pesquisas e reflexões teóricas 1986/2006. In: Encontro de Educação Matemática, 9. Belo Horizonte 2007. Anais do IX Encontro de Educação Matemática. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Matemática, p.1-16, 2007.

FISCHBEIN, Efraim. The Teory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v.24, p.139-162, 1993.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017. 249p.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. 186p.

FERREIRA, Norma Sandra de Almeida. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & Sociedade.** Campinas, v.23, n.79, p.257-272, 2002.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 430p.

PONTE, João Pedro da. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. 542p.

___________________; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 160p.

___________________ et al. Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de professora num estudo de aula. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p.111-134, 2015.

SILVA, Lilian Esquinelato da. **Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas:** o caso do Algeblocks. 2018. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2018.

TAVARES, Fernando Gonzales; LOPES, Celi Espasandin. Mapeamento do uso do GeoGebra no ensino de estatística. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 14, Edição Especial Educação Estatística, p.1-20, 2019.