Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

O Ensino de Polinômios e Gráficos na Educação Básica

Autor: *Humberto Domingues Thiago Sato*

Orientador: *Alex Carlucci Rezende*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: João Carlos Vieira Sampaio
Luciene Nogueira Bertoncello
Natália Andrea Viana Bedoya

São Carlos, 2 de Dezembro de 2019.

O Ensino de Polinômios e Gráficos na Educação Básica

Autor: *Humberto Domingues Thiago Sato*

Orientador: *Alex Carlucci Rezende*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: João Carlos Vieira Sampaio
Luciene Nogueira Bertoncello
Natália Andrea Viana Bedoya

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 2 de Dezembro de 2019.

Humberto Domingues Thiago Sato (aluno)	Alex Carlucci Rezende (orientador)

Conteúdo

Lista de Figuras

Resumo

Neste trabalho, estudamos funções polinomiais, iniciando com um breve levantamento histórico de como foram sendo construídas as soluções gerais das equações polinomiais de primeiro até terceiro graus, passando, em seguida, a analisar os pontos importantes que os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam em relação ao ensino de álgebra e de polinômios. No desenvolver do trabalho, também foram feitas as demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra (analítica e algébrica) e das soluções gerais das equações polinomiais de até grau três por meio de radicais. Por fim, apresentamos algumas atividades para serem aplicadas na sala de aula com o intuito de aprimorar o processo de ensino e aprendizagem com o uso do *software* computacional Geogebra. Aplicamos uma das atividades em sala de aula e discutimos os resultados.

Palavras-chave: Polinômios, Equações polinomiais, Funções polinomiais, Ensino de polinômios.

Abstract

In this monography, we study polynomial functions, starting with a brief historical research about how the general solutions of the first to third degree polynomial equations were constructed, then we proceed to analyze the important points that the National Curricular Parameters stand out in relation to the teachings of algebra and polynomials. In the development of the work, we also adress the demonstrations of the Fundamental Theorem of Algebra (analytic and algebraic proofs) and the demonstrations of the general solutions of the polynomial equations up to degree three by means of radicals. Finally, some activities are introduced to be applied in the classroom in order to improve the teaching and learning process through Geogebra computational software. We apply one of these activities in a classroom and we discuss the results.

Keywords: Polynomials, Polynomial equations, Polynomial functions, Polynomial teaching.

Capítulo 1

Introdução

Não há como saber ao certo quando a matemática surgiu, por exemplo antropólogos acharam diversos objetos pré-históricos que podem ser utilizados na contagem de números e operações aritméticas durante o desenvolvimento da humanidade e há resquícios de "funções" que relacionavam pedras com número de cabeças de gado. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2008) Sabe-se que por volta de 5.000 a.C. a escrita começou a ser desenvolvida e por consequência a matemática despertou em seu modo mais primitivo, sendo principalmente utilizada como ferramenta de contagem para acompanhar o que era produzido ou para divisão de terras de plantio.

Com o passar das décadas e séculos, a ampliação do conhecimento matemático pôde ser evidenciado tanto na região da antiga Mesopotâmia, que via o crescimento de populações em volta dos rios Tigres e Eufrates, quanto na região do Egito no rio Nilo. Tal conhecimento dos antigos egípcios se dava através da escrita de papiros e como este trabalho terá foco na álgebra, mais especificamente, nas funções e equações polinomiais que vão até o terceiro grau, vale a pena destacar um documento importante para esta área da matemática, que seria o papiro de Rhind, que já apresentava alguns problemas que se resolviam através de equações de primeiro grau.

Os 85 problemas presentes no papiro de Rhind variavam na sua dificuldade, sendo alguns bem simples e outros complicados, um exemplo direto seria o problema: "uma quantidade; sua metade e seu terço são somados a ela. Ela se torna 10". Este problema pode ser visto como a equação $x+x/2+x/3 = 10$. Vale a pena salientar que o método para a solução desta questão apresentado no papiro se dá pela falsa posição e que "enxergar" a função afim como uma reta é bem mais recente (por volta do século XVII), sendo estes dois métodos relativamente parecidos.

A palavra álgebra é uma variante latina da palavra al-jabr, que foi utilizada no título de um livro do famoso matemático Muhammad Ibn-Musa Al Kwharizmi por volta do ano 825. Ele começa o livro com um debate sobre equações quadráticas, apresentando problemas sobre o assunto, por exemplo: "Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems. Quer dizer, quanto deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove?". Este problema remete à equação de segundo grau $x^2 + 10x = 39$, mas como a simbologia algébrica ainda não havia sido inventada, a solução apresentada por Al-Kwharizmi foi descrita com palavras e chegava a equação $x = \sqrt{b^2/2} + c - b/2$, que é igual à famosa fórmula de Bhaskara quando o termo a é igual a 1 e não levando em conta a solução negativa da equação pois os números inteiros ainda não estavam bem definidos.

Em relação a solução das equações cúbicas a história fica bem mais dramática e romantizada. Na Itália, a álgebra e a aritmética atingiram os grandes pensadores mais rigorosamente a partir da Renascença, que é um dos termos empregados para identificar o momento da História entre a conclusão do século XIII e a metade do século XVII e muito se discutia sobre equações de terceiro grau, durante os séculos seguintes, os estudioso italianos eram em sua maioria sustentados por patronos ricos e tinham que provar seu valor derrotando outros matemáticos em duelos públicos através de seu conhecimento, estes duelos não valiam apenas para prestígio, pois os vencedores ganhavam prêmios em dinheiro, novos educandos e aquisição de cadeiras em faculdades.

Nesta época haviam dois matemáticos conhecidos que alegavam saber a resolução de certas equações cúbicas, sendo eles Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia por causa de um acidente de infância que o deixou gago. No ano de 1535, Tartaglia foi desafiado para um duelo matemático por Antonio Maria Fiore, aluno de Scipione, e Niccolò saiu vitorioso por que conhecia as soluções das equações do tipo $x^3 + bx^2 = d$ e do tipo $x^3 + cx = d$, enquanto Fiore sabia apenas a solução do segundo tipo.

A notícia deste duelo e por consequência da vitória de Tartaglia chegou aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576) que então entrou em contato com o vencedor pedindo para que a solução das equações cúbicas fosse compartilhada. Após muita insistência, Niccolò cedeu suas descobertas a Girolamo, segundo Tartaglia, Cardano havia escrito: "eu juro a você, por Deus, e como um verdadeiro homem de honra, não apenas nunca publicar suas descobertas, se você me ensiná-las, mas eu também prometo a você, e empenho minha fé como verdadeiro cristão, anotá-las em código, de modo que depois de minha morte ninguém seja capaz de entende-las"(Berlinghoff e Gouvêa,2008).

Depois de seis anos trabalhando com o conhecimento que Tartaglia havia compartilhado, Cardano conseguiu resolver o caso geral das cúbicas, e seu assistente, Lodovico Ferrari (1522-1565), conseguiu resolver o caso geral das equações de grau quatro aplicando o mesmo método. Girolamo havia jurado e prometido não publicar os resultados de Tartaglia, mas como Scipione del Ferro havia achado uma solução para um tipo de cúbica, Cardano sentiu que podia publicar seus resultados afirmando que havia aprendido de del Ferro, o que nos forneceu o livro Ars Magna (A Grande Arte).

Após esta publicação que continha a solução do caso geral das cúbicas e quárticas, Tartaglia tornou pública a traição de Cardano, o que atingiu o assistente Lodovico Ferrari, que desfiou Niccolò a uma competição e acabou com a vitória do assistente por este dominar as soluções gerais publicadas por Girolamo. Quanto a Cardano, ele foi preso por heresia, condenação aplicada pela Inquisição e depois de solto, foi proibido de publicar livros.

O contexto histórico da matemática e como ela foi se expandindo é de extrema importância para justificar e complementar seus conteúdos, a partir desta ideia este trabalho propõe desenvolver e apresentar atividades de ensino que auxiliem os alunos e professores a aprenderem e ensinarem sobre polinômios e seus gráficos de forma mais dinâmica e contextualizada.

1.1 Objetivos

• Localizar como funções e equações polinomiais foram tratados no decorrer da história, tendo em vista a importância do contexto histórico para construção do conhecimento.

• Destacar e analisar como o ensino de polinômios e álgebra em geral é pedido nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEMs e PCN+).

• Aprofundar o conhecimento de álgebra através do Teorema Fundamental da Álgebra e suas demonstrações.

• Estudar as resoluções de equações polinomiais de primeiro, segundo e terceiro grau e relacionar tal conhecimento com como ele é apresentado no ensino médio.

• Criar atividades para o ensino de polinômios e seus gráficos com o auxílio de *software* Geogebra com o intuito de aprimorar o ensinar e aprender matemático.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, fica exposto o enunciado e as demonstrações analítica e algébrica do Teorema Fundamental da Álgebra

No Capítulo 3 demonstramos as fórmulas que resolvem as equações de primeiro a terceiro grau.

No Capítulo 4 destacamos e analisamos como deve ser introduzido o ensino de polinômios no ensino médio a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

No Capítulo 5 apresentamos algumas atividades a serem aplicadas na sala de aula com a assistência do *software* para computadores Geogebra.

Ao Capítulo 6 fica destinado o detalhamento de como foi a prática de estagiar em uma escola pública.

No Capítulo 7 analisamos as produções que os alunos fizeram durante as aula ministradas no estágio descrito no capítulo 6.

O Capítulo 8 fica destinado a considerações finais, isto é, as contemplações dos objetivos que este trabalho visou alcançar.

Capítulo 2

Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo será demonstrado o Teorema Fundamental da Álgebra tendo em vista que tal resultado é muito importante, pois nos garante a existência de pelo menos uma raiz complexa para todo polinômio não constante sobre o corpo dos números complexos.

2.1 Demonstração Analítica

Nesta seção apresentaremos uma demonstração analítica do teorema fundamental da álgebra, para isto utilizaremos o teorema de Liouville, mas não apresentaremos a demonstração do mesmo por não estar na finalidade deste trabalho.

Vale ressaltar que o estudo do teorema serviu primariamente para aprimorar meus conhecimentos de álgebra, visto que não se pode ensinar uma matéria que não se domina o assunto.

Teorema 1 (Teorema de Liouville) *Se f é uma função inteira e limitada, então f é constante.*

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio $p(z)$ não constante sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos possui pelo menos uma raiz $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Demonstração Analítica:

Suponha que o polinômio $p(x) \in \mathbb{C}$ não tenha raízes em $\mathbb{C}$. Então, $1/p(z)$ não se anula em ponto algum. Além disso, como

$$\lim_{x\to\infty} |p(z)| = \infty,$$

então

$$\lim_{z\to\infty} |1/p(z)| = 0.$$

Assim, $1/p(z)$ é uma fração limitada do plano. Pelo Teorema de Liouville, $1/p(z)$ é constante e, logo, $p(z)$ é constante. Portanto, um polinômio não constante em $\mathbb{C}[z]$ deve ter pelo menos um zero.

2.2 Demonstração Algébrica

Para a demonstração algébrica do Teorema Fundamental da Álgebra precisamos primeiramente definir o conceito de polinômios simétricos $x_1, x_2, ..., x_n$.

Definição: Um polinômio de $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n]$ é chamado de polinômio simétrico $x_1, x_2, ..., x_n$ se o polinômio continua o mesmo quando fazemos qualquer permutação de $x_1, x_2, ..., x_n$.

São exemplo de polinômios simétricos: $p_1(x,y) = x^2 + y^2$, $p_2(x,y,z) = xyz$, e $p_3(x,y,z) = 4x^3 + 4y^3 + 4z^3$.

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Álgebra 2) *Todo polinômio $p(z)$ não constante sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos possui pelo menos uma raiz $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Demonstração: Devemos notar que há casos que temos garantia quase imediata da existência de raízes, sendo elas:

• Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real. Isto se dá pelo fato da aplicação direta do Teorema do Valor Intermediário dado um $p(x)$ com grau ímpar, quando $x \to \infty$ o sinal de $p(x)$ troca, logo, possui pelo menos uma raiz.

• Todo polinômio de segundo grau com coeficientes complexos possui raízes. Podemos verificar este fato pois as raízes são dadas diretamente através da fórmula de Bhaskara, que será trabalhada na seção 4.2

Para os outros casos é suficiente analisar o caso dos polinômios, mônicos de coeficientes reais.

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ um polinômio de coeficientes complexos, definimos seu conjugado por

$$\overline{p}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1} x + ... + \overline{a_n} x^n.$$

E seja o polinômio $q(x) = p(x)\overline{p}(x)$. Observe que

$$\overline{q}(x) = \overline{p}(x)\overline{\overline{p}}(x) = \overline{p}(x)p(x) = q(x),$$

e como $\overline{q}(x) = q(x), q(x)$ tem coeficientes reais. Se o número complexo z_0 for raiz de $q(x)$ então

$$0 = q(z_0) = p(z_0)\overline{p}(z_0).$$

Por $\mathbb{C}$ ser corpo, temos $p(z_0) = 0$ ou $\overline{p}(z_0) = 0$. Se $\overline{p}(z_0) = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
p(\overline{z_0}) &= a_0 + a_1\overline{z_0} + a_2\overline{z_0}^2 + ... + a_n\overline{z_0}^n \\
&= \overline{\overline{a_0}} + \overline{\overline{a_1}}\ \overline{z_0} + \overline{\overline{a_2}}\ \overline{z_0}^2 + ... + \overline{\overline{a_n}}\ \overline{z_0}^n \\
&= \overline{\overline{a_0} + \overline{a_1}z_0 + \overline{a_2}z_0^2 + ... + \overline{a_n}z_0^n} \\
&= \overline{\overline{p}(z_0)} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, z_0, ou seu conjugado, é raiz de $p(x)$, desta forma podemos demonstrar o teorema para um polinômio de coeficientes reais.

Seja $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Vamos demonstrar que $q(x)$ tem uma raiz complexa por indução ao maior inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de $q(x)$.

Seja n o grau de q e seja k inteiro tal que $n = 2^k a_1$ para a_1 ímpar. Se $k = 0$, $q(x)$ tem grau ímpar e, portanto, $q(x)$ tem pelo menos uma raiz.

Suponhamos por indução que o resultado seja verdadeiro para todo polinômio com coeficientes reais, não constantes, de grau $2^k a_1$, com k e a_1 inteiros não negativos e a_1 ímpar. Seja q um polinômio com coeficientes reais, não constante, mônico de grau $n = 2^{k+1}m$, com m ímpar.

Seja F um corpo de $\mathbb{C}$ que contém as raízes de $q(x)$, ou seja, existem elementos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de F tais que

$$q(x) = (x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n).$$

Note que isto não implica que tais elementos são raízes complexas. Devemos justamente mostrar que algumas dessas raízes são números complexos.

Denotaremos $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Note que:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) \\
&= x^n - (z_1, \ldots, z_n)x^{n-1} + (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n + z_2z_3 + \cdots + z_{n-1}z_n)x^{n-2} \\
&\quad + \cdots + (-1)^n z_1z_2\cdots z_n \\
&= x^n - e_1(z)x^{n-1} + e_2(z)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n e_n(z),
\end{aligned}
$$

onde os polinômios $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, dados por

$$
\begin{aligned}
e_1(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n, \\
e_2(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
e_3(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
e_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1x_2\cdots x_n,
\end{aligned}
$$

são chamados de polinômios simétricos elementares.

Como $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ temos $e_i(z) \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Para um número real t, seja,

$$\begin{aligned} h_t(x) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x - z_i - z_j - t z_i z_j) \\ &= (x - z_1 - z_2 - t z_1 z_2)(x - z_1 - z_3 - t z_1 z_3)(x - z_1 - z_4 - t z_1 z_4) \\ &\quad \cdots (x - z_1 - z_n - t z_1 z_n)(x - z_2 - z_3 - t z_2 z_3)(x - z_2 - z_4 - t z_2 z_4) \\ &\quad \cdots (x - z_2 - z_n - t z_2 z_n) \cdots (x - z_{n-1} - z_n - t z_{n-1} z_n). \end{aligned}$$

Considere os polinômios $g_{ijt}(x_1, \ldots, x_n) = x_i + x_j + t x_i x_j \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, com $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Para simplificar notações, vamos reindexa-los:

$$(g_{1,2,t}, g_{1,3,t}, \ldots, g_{n-1,n,t}) = (g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{lt}),$$

com $l = n(n-1)/2$. Então, reescrevendo $h_t(x)$:

$$\begin{aligned} h_t(x) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x - g_{ijt}(z)) = \prod_{i=l}^{l} (x - g_{lt}(z)) \\ &= x^l - (g_{1t}(z) + g_{2t}(z) + \cdots + g_{lt}(z)) x^{l-1} + \cdots + (-1)^l g_{1t}(z) g_{2t}(z) \cdots g_{lt}(z) \\ &= x^l s_1(g_t) x^{l-1} + \cdots + (-1)^l s_l g(t), \end{aligned}$$

onde s_i são os polinômios simétricos elementares em l variáveis e $g_t = (g_{1t}(z), \ldots, g_{lt}(z))$. Observe que os polinômios $s_i(g_{1t}(z), \ldots, g_{lt}(z))$ são simétricos em $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Neste caso, existe $f_{it} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tal que,

$$s_i(g_{1t}(z), \ldots, g_{lt}(z)) = f_{it}(e_1(z), \ldots, e_n(z)).$$

Como $e_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ são reais, segue que $s_i(g_t)$ são reais, e portanto $h_t(x)$ tem coeficientes reais.

O grau de h_t é

$$l = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^{k+1} m(n-1)}{2} = 2^k m(n-1),$$

em que $m(n-1)$ é ímpar.

Então, pela hipótese de indução, para cada t, h_t tem alguma raiz complexa, ou seja, $z_i + z_j + t z_i z_j$ para dois elementos distintos de i, j de $\{1, 2, ..., n\}$.

Note que, para cada número real t obtemos um par (i, j) tal que $z_i + z_j + t z_i z_j \in \mathbb{C}$. Vemos que ao menos um par (i, j) se repete para valores distintos de t. Com efeito, havendo l pares e tomando $l+1$ valores distintos para t, pelo princípio da casa dos pombos, haverá um par (i, j) para o qual $c = z_i + z_j + tz_iz_j$ e $d = z_i + z_j + sz_iz_j$ sejam complexos, para valores t e s reais distintos. Agora,

$$A = z_i + z_j, \quad B = z_iz_j,$$

são números complexos dados pela solução do sistema linear determinado por

$$\begin{cases} A + tB = c, \\ A + sB = d, \end{cases}$$

nas incógnitas A e B. Logo, z_i e z_j são raízes da equação do polinômio de segundo grau $x^2 - Ax + B = 0$ e, portanto, são números complexos.

Capítulo 3

Resolução de Equações Polinomiais por Radicais

Neste capítulo abordaremos as soluções complexas de equações polinomiais de primeiro até terceiro grau. Devemos notar que a existência de tais soluções foi demonstrada no Capítulo 3 deste trabalho, que assegura que para todo polinômio sobre o corpo dos complexos existe pelo menos uma raiz.

3.1 Raiz da Equação Polinomial de Primeiro Grau

Dada a equação do polinômio de primeiro grau

$$P(x) = ax + b = 0,$$

com a e b números complexos e $a \neq 0$. Resolvendo esta equação temos

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a,$$

logo, há apenas uma raiz complexa $x = -b/a$, ou seja, $-b/a$ é o único ponto em que a equação zera,

$$p\left(\frac{-b}{a}\right) = 0.$$

3.2 Raízes da Equação Polinomial de Segundo Grau

Dada a equação

$$p(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

com a, b e c números complexos e $a \neq 0$. Dividindo todos os membros por a teremos,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0.$$

Somando $-c/a$ aos dois lados da igualdade, obtemos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) - \left(\frac{c}{a}\right) = -\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = \left(\frac{-c}{a}\right).$$

Somando-se $b^2/4a^2$ nos dois lados da igualdade, temos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Note que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Por ser um trinômio quadrado perfeito, teremos então:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad &\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},
\end{aligned}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação polinomial do segundo grau. A expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

é conhecida como fórmula de Bhaskara. Portanto toda equação de segundo grau possui no máximo duas raízes complexas, a saber

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ou seja, há no máximo dois números complexos que zeram a equação polinomial.

3.3 Raízes da Equação Polinomial de Terceiro Grau

Para resolvermos equações de terceiro grau devemos calcular as expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau em função de seus coeficientes, isto é, moldaremos o problema de terceiro grau para um problema que assimila a resolução de uma equação quadrática.

Dada a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ e suas raízes x_1 e x_2 estabelecendo as relações de Girard entre as raízes e os coeficientes a, b e c temos:

- Soma: $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b}{a}$,
- Produto: $P = x_1 x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{c}{a}$.

Dividindo os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Logo,

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

e, portanto, o coeficiente em x é $x_1 + x_2 = -S$ e o termo independente é $x_1 x_2 = P$.

Para aplicarmos tais resultados e raciocínios em equações de terceiro grau procuraremos o valor da expressão

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

elevando ambos os lados da equação ao cubo temos,

$$\begin{aligned} y^3 &= x_1 + 3\sqrt[3]{x_1^2}\sqrt[3]{x_2} + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2^2} + x_2 \\ &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \\ &= x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}), \end{aligned}$$

implicando que

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}y \Rightarrow y^3 - S - 3\sqrt[3]{P}y = 0.$$

Assim, para determinar y devemos resolver a equação de grau 3, isto é, podemos escrever as raízes de uma equação de terceiro grau como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do segundo grau.

Consideremos a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Vamos substituir x por $y + t$. Logo,

$$\begin{aligned} & (y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \\ \Rightarrow\ & y^3 + (3t+a)y^2 + (3t^3 + 2at + b)y + (t^3 + at^2 + bt + c) = 0 \end{aligned}$$

Para anular o coeficiente de y^2 tomamos $3t + a = 0$, que implica $t = -a/3$ e obtemos

$$y^3 + py + q = 0,$$

onde $p = 3t^2 + 2at + b$ e $q = t^3 + at^2 + bt + c$.

Comparando,

$$y^3 + py + q = 0 \Rightarrow y^3 - S - 3\sqrt[3]{P}y = 0,$$

podemos perceber que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \text{ e } \ q = -S,$$

de forma que as raízes x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - Sx + P = 0$. Então, $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$. Temos assim

$$\begin{aligned} p &= -3\sqrt[3]{P} \Rightarrow P = \frac{p^3}{27} \\ q &= -S \Rightarrow S = -q, \end{aligned}$$

ou seja, x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - Sx + P = 0$ e

$$x^2 - (-q)x + \left(\frac{-p^3}{27}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + qx - \frac{p^3}{27},$$

ou ainda,

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ \text{ e } \ x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2},$$

ou melhor,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

satisfazendo,

$$y^3 + py + q = 0.$$

Tendo em vista que a raiz cúbica pode ter no máximo três raízes complexas e que a equação $\sqrt[3]{p} = -p/3$ impõe que o produto das raízes deve ser $-p/3$, pela fórmula acima calculamos as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -a/3$, obtemos as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Portanto, as raízes são dadas por

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(\frac{-a}{3}\right), \\
x_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(\frac{-a}{3}\right), \\
x_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(\frac{-a}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Capítulo 4

Polinômios segundo os PCNEM

Neste capítulo destacaremos e analisaremos quais seriam as diretrizes que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs e PNC+) focam em relação ao ensino de polinômios e seus respectivos gráficos.

Em geral, os Parâmetros propõem que o processo de ensino aprendizagem seja feito de forma contextualizada e interdisciplinar, utilizando-se de ferramentas e de metodologias diferenciadas para uma melhor apresentação e fixação dos diversos conteúdos aos estudantes, de forma que o ensinar e aprender matemática possua grande importância na formação das pessoas, fornecendo uma melhor capacidade no pensamento crítico e analítico sobre um olhar lógico na vida social e profissional, isto é, a matemática tem grande peso na capacidade das pessoas de entenderem e interpretarem a realidade com um olhar racional.

Muito se tem discutido na Educação matemática acerca da necessidade de ensinar conteúdos que possam ser presenciados pelos alunos no seu cotidiano; pois, desta forma, a aprendizagem se torna mais efetiva. Assim, a motivação do ensino deve partir das experiências e de vivências no contexto do aluno, nas quais, observado que os estudantes possuem certa dificuldade em compreender os conteúdos de Álgebra que são apresentados. Desta forma, devemos destacar a importância para o professor ensinar álgebra através de um método sistemático, em que o aluno seja direcionado a entender e resolver problemas em diversas situações do seu dia a dia de forma que ele construa o conhecimento do conteúdo selecionado, tendo o professor como um mediador entre opiniões, ideias e conhecimento formal.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) orientam que os alunos do Ensino Médio:

> [...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006b, p. 69).

Outro aspecto importante que os Parâmetros destacam seria a relação da matemática com outras áreas do conhecimento, como a física e a biologia por exemplo, estas relações interdisciplinares auxiliam no processo de aprendizagem pois fornecem um entendimento direto de como aplicar o conhecimento matemático, saindo do mundo abstrato das incógnitas e variáveis e mostrando aplicações em outras disciplinas, sendo evidenciado que os estudantes podem perceber melhor a complexidade do mundo através desse modo de ensino e também, esta relação permite a produção de sentidos e significados conceituais.

A grande dificuldade em ligar a matemática com outras disciplinas se dá pelo fato da necessidade de um grande conhecimento das mesmas, geralmente professores evitam interferências de outras áreas do conhecimento por não dominarem suficientemente estes outros assuntos. É claro que para se utilizar de certas ferramentas é preciso conhecer tanto seu modo de operar como sua combinação com as ferramentas que já são conhecidas tendo em vista que todo aluno aprende de forma diferente e apresentando motivações diferente para a matemática auxilie em sua compreensão.

Em relação à contextualização e à interdisciplinaridade, os PCNEMs afirmam que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2006a, p.108 ou 111).

Vale apena notar que os PCNs estabelecem a resolução de problemas como metodologia de ensino padrão, visto que os alunos devem construir o próprio conhecimento através de problemas que estimulam o pensamento racional e o olhar crítico, sendo o professor o mediador que fornece ferramentas e argumentos que auxiliam os estudantes a chegarem a respostas e progredirem seu conhecimento formal. Esta ênfase na resolução de problemas não quer dizer que exercícios de repetição como os famosos "calcule..." e "resolva..." devam ser ignorados ou evitados, pois apesar de não serem o suficiente para construírem conhecimentos, eles servem como práticas de fixação do conceitos e propriedades da matemática e tem seu papel a cumprir no sistema de ensino e aprendizagem.

Além da metodologia de resolução de problemas os Parâmetros salientam também a importância da história no ensino, expressando que através do contexto histórico das grandes descobertas da matemática é possível aprimorar a educação, fazendo com que através da análise de como foi construída historicamente se possa entender melhor as motivações que nos levaram a matemática atual, ou ainda, segundo os PCNEMs é necessário:

> [...] compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação

> de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. (BRASIL, 2006a, p.114/115 ou 117/118).

Já sobre polinômios e equações polinomiais em específico, muito se é falado sobre funções e equações de primeiro e segundo grau sempre tendo em vista sua interdisciplinaridade e seu contexto tanto histórico quanto do cotidiano do aluno. Já para graus maiores que dois há apenas um parágrafo nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006a) destacando como deve ser tratado tal conhecimento, no qual, é afirmado que é uma parte da matemática que deve ser abordada mais profundamente na parte flexível do currículo do ensino médio, isto é, fica a cargo de cada escola trabalhar o assunto:

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. (BRASIL, 2006a, p.119 ou 122).

O ensino de Equações polinomiais na educação básica no Brasil é uma parte da matemática que é abordada no estágio final de aprendizagem dos alunos e geralmente tem foco nos macetes e fórmulas para se resolver exercícios de vestibulares, isto é, resolução de equações polinomiais e seus respectivos esboços de gráficos com o intuito de auxiliar ao estudante a "passar no vestibular", neste trabalho serão apresentadas algumas atividades que possam facilitar o entendimento e visualização de funções polinomiais e seus gráficos através do uso do computador, mais especificamente com o uso do programa Geogebra.

Capítulo 5

Atividades na Escola

É evidente que a educação tradicional apresenta diversos problemas, principalmente na dificuldade em se ensina conteúdos relativamente abstratos. Podemos verificar esta condição quando trabalhamos com o conceito de variáveis e coeficientes de funções, deixando muitas dúvidas e definições confusas, podemos também verificar a necessidade da utilização de outras metodologias de ensino, que tornam as aulas mais relevantes ao contexto dos alunos que estão inseridos em um mundo cada vez mais tecnológico, ou ainda, segundo Altoé (2006):

> "E nessa condição passou a exigir o uso de equipamentos que incorporam os avanços tecnológicos. Nesse momento, não se pode ignorar que a educação necessita promover alteração em seu paradigma. E mudanças de paradigma na sociedade significam mudanças de paradigma também na educação e, por conseguinte, na escola. O tipo de homem necessário para a sociedade de hoje é diferente daquele aceito em décadas passadas." (ALTOÉ, 2006, p. 39).

O uso de computadores na sala de aula, pode se tornar uma ferramenta imprescindível no processo de ensino e aprendizagem. A utilização de *softwares* de visualização gráfica e sua direta relação com a álgebra dos problemas, por exemplo o Geogebra, facilita a visualização de conceitos e ideias, de forma que o próprio alunos é responsável pelo desenvolvimento e manipulação dos gráficos e valores das construções, como afirma Valente (1993):

> "O computador pode ser usado também como ferramenta educacional. Segundo esta modalidade o computador não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo, e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador. (...)Programas de processamento de texto, planilhas, manipulação de banco de dados, construção e transformação de gráficos, sistemas de autoria, calculadoras numéricos, são aplicativos extremamente úteis tanto ao aluno quanto ao professor. Talvez estas ferramentas constituam uma das maiores fontes de mudança do ensino e do processo de manipular informação. As modalidades de *softwares* educativos descritas acima podem ser caracterizadas

> como uma tentativa de "computadorizar" o ensino tradicional." (VALENTE, 1993, p. 13)

Além do uso do computador, outro aspecto importante a ser trabalhado na sala de aula é o trabalho em grupo, sobre o papel do trabalho em grupo Teixeira (1999) afirma que a relação entre os alunos e a socialização do conhecimento possui papel importante no aprendizado, pois ao se trabalhar em grupo são levantadas questões, discussões e resoluções de problemas de diversas formas, ou ainda, para Teixeira:

> "É na discussão com os colegas que a criança exercita sua opinião, sua fala, seu silêncio, defendendo seu ponto de vista. O trabalho em grupo, portanto, estimula o desenvolvimento do respeito pelas ideias de todos, a valorização e discussão do raciocínio; dar soluções e apresentar questionamentos, não favorecendo apenas a troca de experiência, de informações, mas criando situações que favorecem o desenvolvimento da sociabilidade, da cooperação e do respeito mútuo entre os alunos, possibilitando aprendizagem significativa. A relação com o outro, portanto, permite um avanço maior na organização do pensamento do que se cada indivíduo estivesse só". (TEIXEIRA, 1999, p.26).

Tendo em mente o possível ganho que programas de computador educacionais e o trabalho em grupo podem trazer para o ensino, o objetivo deste capítulo é introduzir uma sequência de atividades que possibilitem auxiliar os estudantes e professores no processo de aprendizagem sobre o comportamento de funções afim, quadráticas e de terceiro grau segundo a variação de seus coeficientes através da utilização do computador, assim como explorar os conceitos sobre as resolução de equações polinomiais de até grau três, isto é, analisar o estudo diferentes funções através das ferramentas gráficas do *software* Geogebra.

5.1 Sequência de Atividades

O tema trabalhado para esta sequência didática será funções quadráticas e o público alvo pode variar desde o primeiro ano até o terceiro ano do Ensino Médio. As atividades de 1 até 3 visam auxiliar os alunos a enxergarem algumas propriedades gráficas de funções quadráticas quando variamos seus coeficientes. Geralmente, na escola, estas propriedades são ensinadas como dogmas, verdades absolutas. Nestas atividades, os próprios estudantes serão responsáveis pela construção e manipulação do gráficos e a visualização do movimento das parábolas fornecida pelo *software* Geogebra, o que pode auxiliar os alunos no entendimento deste tópico.

Estas atividades relacionadas a funções quadráticas tem como objetivos:

• Resolver problemas sobre funções de segundo grau de forma lógica e utilizando os conhecimentos previamente trabalhados;

• Estimular as relações entre funções e equações polinomiais e suas respectivas representações gráficas;

• Desenvolver a capacidade de interpretação dos alunos através do uso dos computadores;

• Auxiliar na compreensão do significado da interseção do gráfico de uma função com os eixos coordenados.

Tempo necessário para a aplicação: 4 aulas.

Materiais:

- Papel, caneta, lápis, borracha e régua;
- Livro didático e caderno de atividades dos alunos;
- Computadores com o programa Geogebra já instalado;
- Retroprojetor, lousa e giz.

5.2 1ª Atividade

Primeiramente o professor deve dividir a sala em grupos para acomodar os alunos de forma que todos possam visualizar o que está ocorrendo nos computadores. Feito isto passe as seguintes instruções aos alunos:

1. Construa três controles deslizantes a, b, c com a ferramenta "controle deslizante" (utilizando o botão; ver Figura 5.1) com intervalo de -10 a 10 e incremento 0.1, de acordo com a Figura 5.2.

Figura 5.1: Controle Deslizante do GeoGebra.

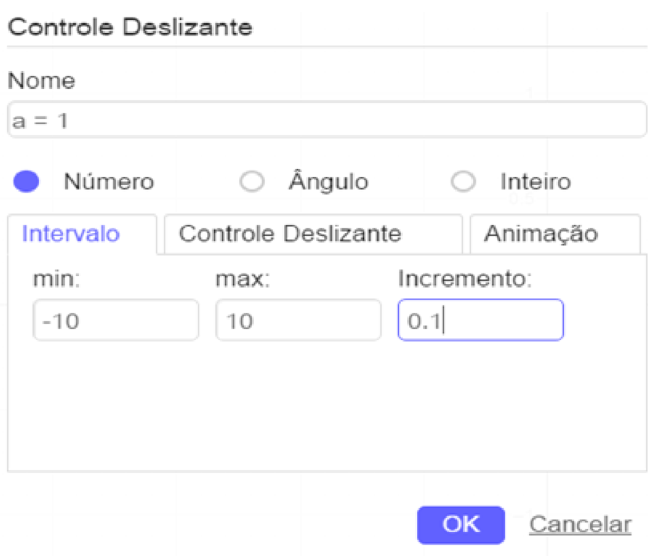


Figura 5.2: Janela do Controle Deslizante no GeoGebra.

2. Digite na caixa de álgebra $f(x) = ax^2 + bx + c$ e aperte a tecla *Enter*.

3. Movimente os controles deslizantes e observe o que acontece. Nesta primeira atividade o aluno é responsável por construir seu próprio gráfico seguindo os dois primeiros exercícios, e no exercício três manipular um pouco os valores de a, b e c, que são os coeficientes da função. Note que é importante diferenciar os coeficientes da variável, além de destacar que neste caso estamos variando os coeficientes para formar os diversos gráficos no computador. Veja exemplo na Figura 5.3.

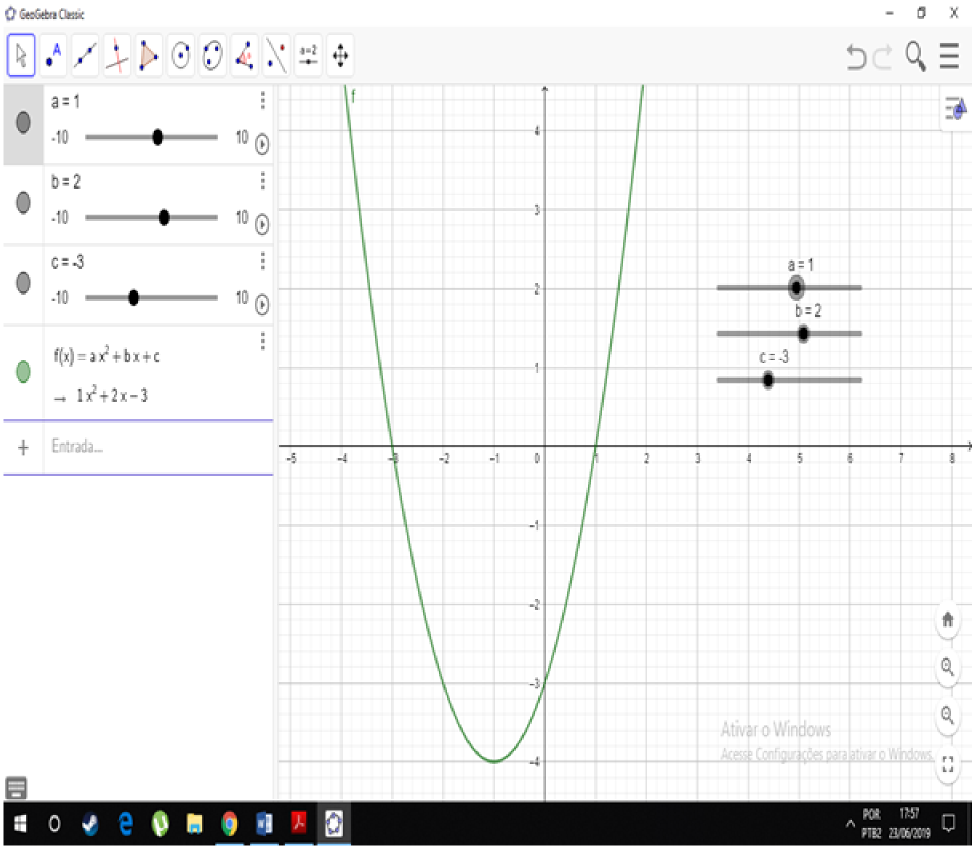


Figura 5.3: Exemplo de uma função do 2º grau no GeoGebra.

5.3 2ª Atividade

Para esta atividade os estudantes receberão papeis com alguns problemas a serem resolvidos. Além de manipular os controles deslizantes no computador, devem também escrever em um papel suas respostas com o intuito de tentar formalizar alguns conceitos.

1. O que acontece com o gráfico quando tomamos $a = 0$? Ele continua sendo uma parábola? Por quê?

   O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno perceba que caso o coeficiente a seja zero, voltaremos ao caso dos exercícios anteriores remetentes a funções afins, ou seja, o gráfico se torna uma reta. Não é uma parábola, pois com $a = 0$ o termo de segundo grau da função se torna nulo, fazendo com que esta não seja mais uma função quadrática e sim uma função de primeiro grau.

2. O que acontece com a concavidade da parábola quando $a < 0$ ou $a > 0$?

   Esta atividade visa auxiliar no entendimento sobre como o coeficiente ligado ao termo de maior grau transforma a parábola, em outras palavras, analisar a concavidade do gráfico.

3. Tomando $a > 0$, o que acontece com a abscissa do vértice quando $b < 0$, $b = 0$, ou $b > 0$?

4. E quando tomamos $a < 0$, o que ocorre com o x do vértice quando $b < 0$, $b = 0$, ou $b > 0$?

   Os problemas três e quatro visam expor o comportamento do x do vértice quando definimos o sinal de a e variamos o sinal de b, de forma que o Geogebra forneceria uma visualização imediata do gráfico.

5. Qual a relação da interseção do gráfico com o eixo das ordenadas (eixo-y) e o controle deslizante c?

   O problema cinco visa ao estudante fazer a relação entre o termo independente e o eixo das ordenadas (eixo-y) e através da manipulação e observação no computador, estas propriedades deixam de ser ensinadas como dogmas e passam a ser verificações pelos próprios educandos.

5.4 3º Atividade

Aos alunos deve ser instruído criarem um novo arquivo no Geogebra e adicionarem quatro controles deslizantes, a, b, c e d variando de -100 a 100 e com incremento 1, como na Figura 5.4.

Após criar os controles deslizantes, instrua os estudantes a digitarem na caixa de álgebra a equação geral de funções polinomiais de terceiro grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e, assim como na primeira atividade, encoraja-los a manipularem os coeficientes inteiros que variam de -100 até 100 para enxergarem padrões e comportamentos presentes nos gráficos, por exemplo a relação do termo independente d e o eixo das abscissas. Vale a pena ressaltar a importância da socialização de ideias geradas no processo. Veja um exemplo na Figura 5.5.

5.5 4ª Atividade

Nesta atividade deve ser entregue a cada grupo uma tabela contendo os nomes dos alunos do grupo e a folha com os problemas a serem resolvidos.

Na tabela, os estudantes devem relatar as descobertas feitas por meio da manipulação dos gráficos, assim como apresentar as respostas e linhas de raciocínio na resolução dos problemas.

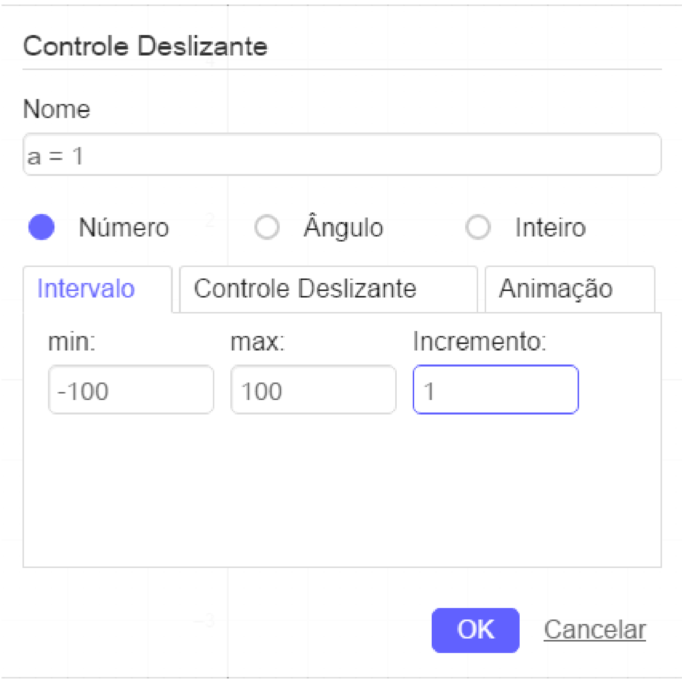


Figura 5.4: Janela do Controle Deslizante para a atividade 3.

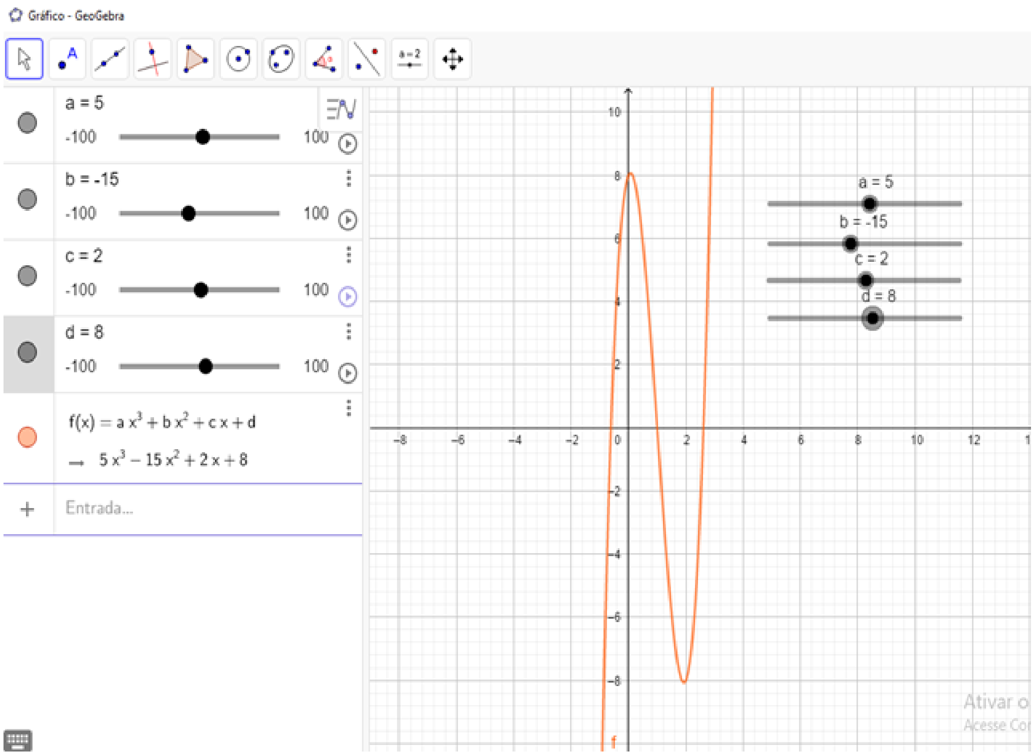


Figura 5.5: Gráfico da função de terceiro grau no Geogebra utilizando controles deslizantes.

A partir daí os alunos deverão solucionar as questões solicitadas com o auxílio do arquivo criado no Geogebra, mantendo o registro dos planos de soluções a serem seguidos.

Após os problemas serem trabalhados pelos grupos, deve haver a socialização dos caminhos tomados para resolução dos problemas e também a divulgação dos resultados obtidos. Vale a pena notar que este é um exercício de cooperação e não de velocidade; então o professor deve estar ciente que apressar os alunos iria contra os propósitos do jogo.

Na folha de problemas, devem ser expostos problemas que estimulem os alunos a pensarem. Seguem alguns exemplos:

1. (ENEM 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela da Figura 5.6 associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Figura 5.6: Tabela para o exercício 1.

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

a) Muito Baixa.

b) Baixa.

c) Média.

d) Alta.

e) Muito Alta.

Neste problema o estudante deve mover os controles deslizantes de modo que se torne equivalente à função citada no enunciado e analisar o gráfico apresentado no *software* para auxiliar a responder a questão. Veja exemplo na Figura 5.7.

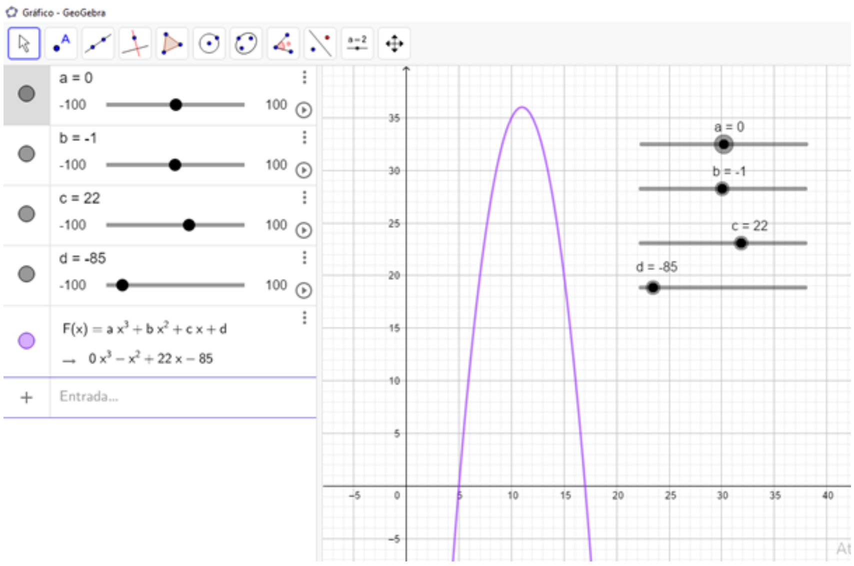


Figura 5.7: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 22x - 85$ no Geogebra.

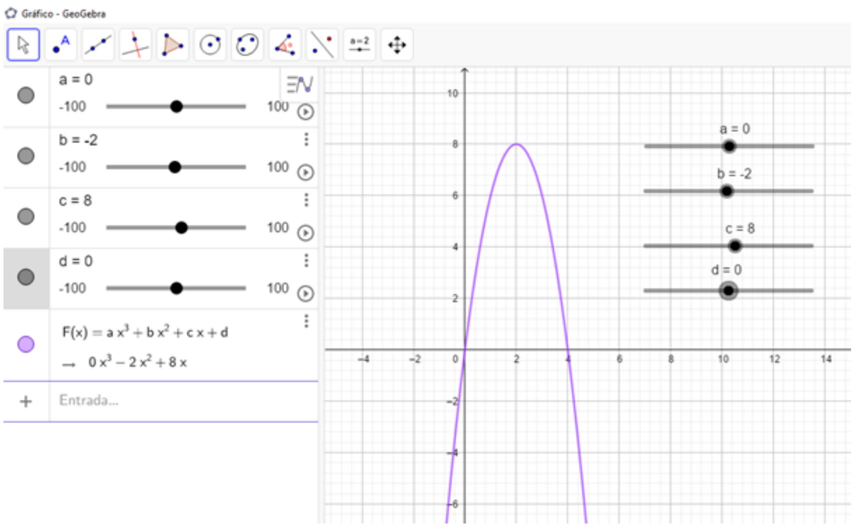


Figura 5.8: Gráfico de $f(x) = -2x^2 + 8x$ no Geogebra.

2. (UFSCar-SP - 2009) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$, $(t \geqslant 0)$, onde t é o tempo medido em segundo e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:

   a) O instante em que a bola retornará ao solo.

   b) A altura atingida pela bola.

   Veja um exemplo na Figura 5.8.

3. No Geogebra, mova os controles deslizantes até construir o gráfico da função $f(x) = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$, em seguida, resolva os seguinte itens:

   a) Qual é o número de raízes desta função?

b) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com o eixo das ordenadas?

c) Resolva em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 - 6x - 9$.

4. No Geogebra, construa o gráfico da função $f(x) = x^3 - 27x - 54$ e resolva os seguintes itens a partir do gráfico:

a) Qual o número de raízes desta função?

b) Resolva em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$ sendo $f(x) = x^3 - 27x - 54$.

Capítulo 6

Estágio Supervisionado

Neste capítulo abordaremos o decorrer da prática do estágio supervisionado e aplicação da atividade apresentada no capítulo anterior. Devemos lembrar que um dos objetivos deste trabalho é elaborar, aplicar e avaliar atividades para o ensino de polinômios e seus gráficos com o auxílio do *software* Geogebra. Para avaliar a qualidade da atividade, decidimos que seriam aplicadas avaliações antes e depois da prática, isto é, seriam aplicadas as avaliações diagnóstica (antes) e somativa (depois).

A escola escolhida para o estágio supervisionado foi a Escola Estadual Professor José Juliano Neto, que atende alunos do Ensino Fundamental II e Médio, e fica localizada no bairro Vila Maria de São Carlos-SP, na Rua Major José Inácio, 3681. Durante o estágio acompanhei o professor Carlos Eduardo que é conhecido pelos colegas de trabalho, pelos alunos e outros funcionários da escola como Kaká. Ele se formou em Licenciatura para Matemática na Universidade Federal de São Carlos na década de 1980 e, segundo seu relato, quando ele estudou na UFSCar o curso de Licenciatura em Matemática não possuía tanto foco na formação de professores quanto atualmente, pois existiam apenas dois períodos de estágio e matérias que atualmente são separadas da licenciatura para o bacharelado antigamente não eram. A metodologia que Kaká segue é, em grande parte, a metodologia tradicional de se ensinar com ênfase na mecânica da matemática, isto é, na resolução de exercícios. Por outro lado, ele recebe um grande número de estagiários anualmente, tanto da UFSCar, quanto do ICMC-USP e esses estagiários aplicam atividades que se utilizam de outras metodologias.

Meu estágio foi dividido em duas semanas, sendo que na primeira semana eu apenas acompanhei o professor durante as aulas, com o intuito de me familiarizar com a classe em que aplicaria as regências. Estas aulas que acompanhei foram, em sua maioria, aplicações de provas bimestrais (provas finais). Na segunda semana o professor Kaká me disponibilizou para ministrar seis aulas no segundo ano do Ensino Médio, turma E. De acordo com o professor, essa turma é a melhor da escola em se tratando de matemática e uma das melhores que ele dá aulas, mesmo comparando com as salas da escola particular Anglo São Carlos onde ele também é professor.

Vale a pena notar que por ser o final do último bimestre e como as provas finais já haviam ocorrido, o número de alunos presentes era relativamente pequeno, pois esta era a "semana de saco cheio". Esta sala, que possui vinte e nove alunos, teve apenas doze estudantes presentes no primeiro dia, quinze no segundo e nove no terceiro. As aulas foram divididas igualmente em três dias, conforme descrevemos a seguir.

6.1 Primeiro Dia (11/11/2019)

No primeiro dia, conversei com os alunos sobre quais eram meus objetivos e fizemos uma breve revisão sobre o que Kaká já havia passado sobre funções polinomiais. Logo em seguida apliquei uma avaliação diagnóstica.

Segundo Menezes (2019), a avaliação diagnóstica, realizada geralmente no início de um processo de aprendizagem, tem como finalidade averiguar os conhecimentos prévios, identificando as dificuldades e suas possíveis causas, na tentativa de corrigi-las. Além disso, favorece uma amostra das aprendizagens dos alunos. Vale enfatizar que a avaliação não é um fim em si mesmo, mas é um meio de aperfeiçoar os processos de ensino e de aprendizagem, sendo útil tanto para o aluno quanto para o professor.

Outro ponto importante para a aplicação da avaliação diagnóstica está presente na adaptação que o docente deve fazer após analisar os resultados da avaliação, isto é, mudar a sua aula de acordo com os erros e dificuldades que os alunos tiveram ao responder o questionário, fazendo com que a aula tenha foco nos conhecimentos que não ficaram claros ou fixados.

Para a avaliação diagnóstica utilizada neste trabalho, foram escolhidas questões referentes a funções e equações polinomiais da Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP), que é uma avaliação externa aplicada na rede estadual de São Paulo e, segundo seus elaboradores, tem caráter diagnóstico, para obter informações sobre as habilidades cognitivas, noções e procedimentos matemáticos já desenvolvidas pelos estudantes, de modo a subsidiar a reorganização dos processos de ensino e aprendizagem.

Segue abaixo as questões escolhidas assim como o objetivo de cada uma e alguns critérios de avaliação para escolhas de respostas incorretas.

1. Assinale a alternativa que indica e justifica se a função da Figura 6.1 é crescente ou decrescente.

   a) A função é crescente porque seu coeficiente angular é positivo.

   b) A função é crescente porque tem valores negativos e positivos.

   c) A função é decrescente porque valores negativos resultam em negativos.

   d) A função é decrescente porque seu coeficiente angular é negativo.

   e) A função não é crescente nem decrescente porque não passa pelo zero.

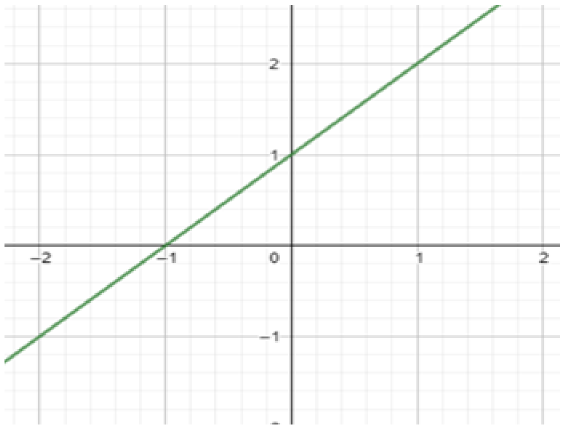


Figura 6.1: Gráfico para avaliação diagnóstica 1.

A resposta correta é a alternativa a), e o objetivo desta questão é avaliar se o aluno sabe reconhecer que, independentemente dos valores que uma função assuma, se o ângulo que ela forma com o eixo x for agudo, seu coeficiente angular será positivo e seu comportamento é crescente.

Quanto às respostas incorretas podemos assumir algumas informações sobre os conhecimentos dos alunos. Ao optar pela alternativa b) o aluno mostra que reconhece a função como crescente, mas não tem argumento consistente para justificar sua escolha.

O aluno que indicar a resposta c) pode tê-lo feito por escolha aleatória, uma vez que há também no gráfico valores positivos que resultam em positivos.

Quem escolher a letra d) nos mostra que sabe distinguir que a relação entre ser decrescente por ter coeficiente angular negativo é correta, mas não se aplica à função apresentada, isto é, o aluno pode ter decorado essas relações, mas não sabe aplica-las quando da leitura de um gráfico.

E por fim quem assinalar a letra e) mostra que não sabe reconhecer crescimento e decrescimento de uma função, pois usa como ponto de referência passar ou não pelo zero.

2. A tabela da Figura 6.2 apresenta valores indicados por uma bomba de gasolina em um posto da cidade.

Litros(L)	Preço(R$)
10	37
25	92,5
30	111
40	148

Figura 6.2: Tabela do Exercício 2.

Assinale e justifique qual função abaixo representa a relação entre a quantidade de litros e o preço a pagar.

a) $y = x - 3,70$.

b) $y = x + 3,70$.

c) $y + x = 3,70$.

d) $y \cdot x = 3,70$.

e) $y = 3,70x$.

A resposta correta é a alternativa e), e o objetivo da questão é que o aluno mostre que reconheceu a relação de proporcionalidade direta entre os valores apresentados na tabela, percebendo que a constante de proporcionalidade é dada pelo preço do litro da gasolina e que sabe fazer a conversão da tabela para a linguagem algébrica (função afim).

Em relação às respostas incorretas, o aluno que assinalar a resposta a) não reconheceu a relação presente entre os termos da tabela, sem notar que a lei de uma função deve representar cada par x e y envolvido.

O aluno que indicar a alternativa b) mostra não compreender uma representação algébrica de uma função a partir de uma tabela, além de não perceber que a adição indicada corresponde a juntar litro com dinheiro.

O aluno que escolher a resposta c) pode ter percebido que há uma relação multiplicativa entre os termos da tabela, porém interpretou-a como uma proporcionalidade inversa.

E finalmente o aluno que escolher a letra d) pode ter feito apenas uma escolha aleatória, o que indica a não compreensão da proposta da questão.

3. Assinale e justifique qual alternativa representa a expressão algébrica que pode corresponder ao gráfico da Figura 6.3:

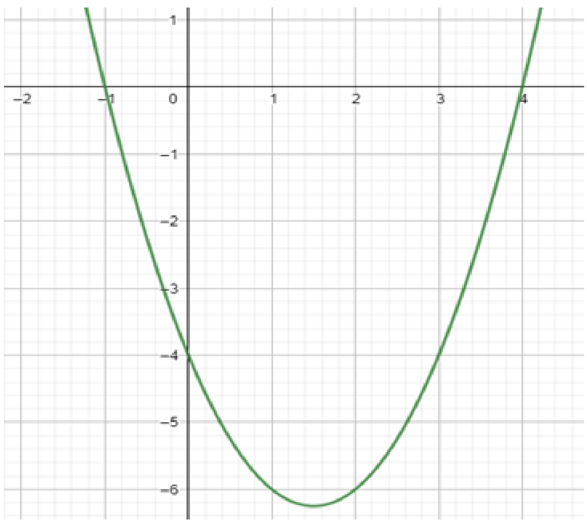


Figura 6.3: Gráfico para avaliação diagnóstica 2.

a) $y = -x^2 - 3x - 4$.

b) $y = x^2 - 4$.

c) $y = x^2 - 3x - 4$.

d) $y = x^2 + 5x + 4$.

e) $y = x^2 - 5x + 4$.

A alternativa correta é a c). O objetivo desta questão é avaliar o conhecimento dos estudantes em relação à representação gráfica de funções de segundo grau, partindo do critério de seus coeficientes e suas raízes.

Para as outras alternativas, os alunos podem ter se confundido nos coeficientes e suas implicações para o gráfico de uma parábola; podem também ter errado no cálculo das raízes ou apenas escolhido aleatoriamente a resposta.

4. Sendo dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$ e sabendo que 4 e -5 são as raízes dessa equação, então temos que:

   a) $B = 1$ e $C = -9$.

   b) $B = 1$ e $C = -20$.

   c) $B = 9$ e $C = 20$.

   d) $B = 20$ e $C = -20$.

A alternativa correta é b). O objetivo da questão é verificar o conhecimento do estudante sobre as relações entre coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de resolução.

Para as outras alternativas o aluno pode ter errado em contas ou escolhido a resposta aleatoriamente. Cabe ao professor ou ao estagiário verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.

5. Uma equação de 3º grau pode ser escrita como $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, (com $a \neq 0$). A equação polinomial cujas raízes são -1, 1 e 2 deve ser escrita como:

   a) $x^3 + 2x^3 - x + 2 = 0$.

   b) $2x^2 + x + 2 = 0$.

   c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

   d) $2x^2 - x - 2 = 0$.

A resposta correta é c). O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto a importância dos coeficientes das equações e suas possíveis raízes, na articulação da técnica e dos significados na resolução de uma equação algébrica.

A opção por outras respostas mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.

Após terminar esta regência, fiz a correção e socialização das respostas apresentadas pelos alunos e analisei alguns fatores interessantes sobre o conhecimento deles para modificar as aulas seguintes, esta análise estará presente no próximo capitulo deste trabalho.

6.2 Segundo dia (12/11/19)

No segundo dia de aula haviam quinze alunos, e eu e o professor Carlos levamos esses alunos para a sala de informática para aplicarmos as atividades descritas no capítulo anterior. Vale ressaltar que houve algumas mudanças do roteiro original, pois eu teria apenas duas aulas para aplicar a atividade que necessita de quatro aulas e também pude notar por meio da avaliação diagnóstica que os alunos em sua maioria não possuíam dificuldades em calcular raízes e vértices de equações quadráticas, o que modificou um pouco as minhas ideias originais de intervenções que faria para formalizar os conceitos vistos nas atividades.

Por haver apenas quinze alunos e dois "professores", o decorrer da atividade foi tranquilo. Dividimos os alunos em cinco trios (grupos A, B, C, D e E), um trio para cada computador e prosseguimos com a familiarizarmos do *software* Geogebra e, em seguida, começamos as atividades.

As Atividades 1, 2 e 3 ocorreram sem problemas aparentes e de forma relativamente rápida, precisando de poucas intervenções visto que os alunos estavam socializando bem os resultados e auxiliando uns aos outros na manipulação do Geogebra.

Na 4ª atividade, como tínhamos pouco tempo, nenhum trio conseguiu terminá-la, sendo que três trios resolveram até o terceiro problema e dois só chegaram até o segundo problema.

A análise das resoluções dos alunos está no próximo capítulo deste trabalho.

6.3 Terceiro dia (14/11/19)

No terceiro dia, por ser quinta-feira durante a "semana saco cheio" e véspera de feriado, o número de alunos diminuiu ainda mais, com apenas nove alunos presentes (os nove estudantes participaram dos três dias de regências).

Comecei a aula retomando os assuntos abordados durante as atividades dos dois dias anteriores, mas infelizmente não pude levar os alunos à sala de computadores para concluir a atividade 4, pois estava sendo utilizada pela professora de inglês. Então, após uma breve discussão de resultados apliquei a avaliação somativa.

A avaliação somativa, segundo Menezes (2019), é um tipo de avaliação que ocorre ao final da instrução com a finalidade de verificar o que o aluno efetivamente aprendeu. Inclui conteúdos mais relevantes e os objetivos mais amplos do período de instrução; visa a atribuição de notas; fornece *feedback* ao aluno (informa-o quanto ao nível de aprendizagem alcançado), se este for o objetivo central da avaliação formativa; e presta-se à comparação de resultados obtidos com diferentes alunos, métodos e materiais de ensino.

A avaliação somativa continha as seguintes questões.

1. Qual é a função que possui a representação gráfica da Figura 6.4?

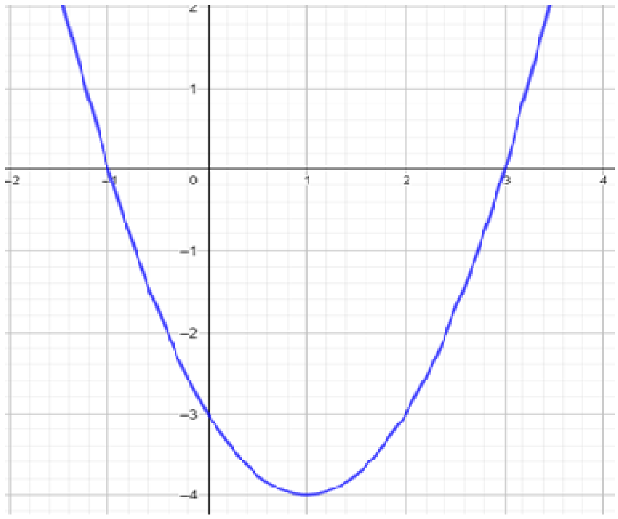


Figura 6.4: Gráfico para avaliação somativa 1.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

c) $f(x) = x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

A alternativa correta é a letra a) e o objetivo desta questão é avaliar se o aluno consegue interpretar matematicamente gráficos de funções quadráticas e se consegue operar algebricamente funções de segundo grau tanto em sua forma geral como na forma fatorada.

A escolha de uma alternativa incorreta pode significar que o aluno escolheu a resposta aleatoriamente ou prosseguiu de forma errada as operações matemáticas, cabendo ao professor avaliar as produções dos estudantes para melhor diferenciar quais foram os erros cometidos.

2. A forma fatorada da equação $x^2 - 10x + 24 = 0$ é:

a) $(x + 4)(x - 6) = 0$

b) $(x - 4)(x + 6) = 0$

c) $(x + 4)(x + 6) = 0$

d) $(x - 4)(x - 6) = 0$

A resposta correta é a d) e o objetivo da questão é verificar o conhecimento do aluno sobre as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de cálculo.

Caso os alunos tenham errado é possível que tenham invertido algum sinal na resolução.

3. Uma pedra é arremessada para o alto. A altura a, em metros, atingida pela bola a partir do ponto de lançamento, depois de t segundos, é dada pela expressão $a(t) = 20t–5t^2$. Qual a altura máxima que essa bola atingirá?

a) 2

b) 25

c) 20

d) 40

A opção correta é a d). O aluno que optar por esta resposta identifica que o ponto de altura máxima a ser atingida pela bola é o vértice da parábola que é dado por $y_v = -\Delta/4a$ ou seja $y_v = 20$.

Para as outras alternativas o aluno pode ter errado ao fazer contas, escolhido de modo aleatório a resposta ou não compreendido a relação de ponto máximo, o que mostra que não reconhece as condições para a obtenção de máximos e mínimos de uma função do 2º grau.

4. A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 12

A resposta correta é a alternativa c) e, assim como a questão 5 da avaliação diagnóstica, o objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto a importância dos coeficientes das equações e suas possíveis raízes, na articulação da técnica e dos significados na resolução de uma equação algébrica.

A opção por outras respostas o aluno demonstra que pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.

5. Dada a Figura 6.5, que é um trecho do gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, quais seriam suas outras raízes?

a) 2 e 1

b) As duas raízes são 2

c) As duas raízes são -1

d) -2 e -1

A alternativa correta é a letra a) e o objetivo desta questão é avaliar se o aluno consegue interpretar matematicamente gráficos de funções cúbicas e se consegue operar algebricamente funções de terceiro grau tanto em sua forma geral como na forma fatorada.

A escolha de uma alternativa incorreta pode significar que o aluno escolheu a resposta aleatoriamente ou prosseguiu de forma errada as operações matemáticas, cabendo ao professor avaliar as produções dos estudantes para melhor diferenciar quais foram os erros cometidos.

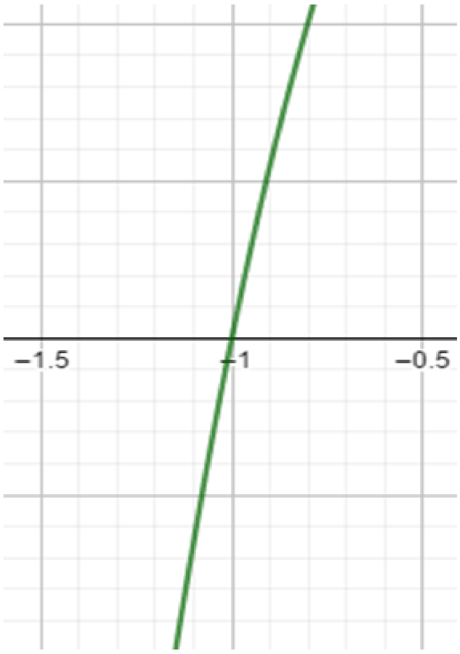


Figura 6.5: Gráfico para avaliação somativa 2.

Capítulo 7

Análise dos resultados

Neste capítulo abordaremos a análise e interpretação das avaliações e produções que foram pedidas aos alunos. Em outras palavras, discutiremos os acertos e erros que os alunos tiveram nas avaliações (diagnóstica e somativa), assim como nos aprofundaremos nas diversas formas que eles utilizaram para resolver um problema ou realizar uma atividade.

Para melhor organização do trabalho seguiremos a mesma vertente de pensamento do capítulo anterior, isto é, analisaremos os resultados de cada dia de regência. Para melhor identificação dos participantes e sem quebrar o anonimato dos alunos, classificaremo-los por letras seguindo a ordem alfabética de seus nomes, ou seja, os dezesseis alunos que participaram de pelo menos um dia de minhas aulas serão chamados pelas letras maiúsculas de A até P. Além disso, a análise será feita de questão para questão.

7.1 Primeiro dia (alunos A, B, D, E, F, G, H, I, J, L, M, O)

A primeira questão da avaliação diagnóstica não aparentou haver problemas, visto que todos os alunos acertaram a alternativa correta, mas questão era de alternativas, não há como ter certeza pois não pedia nenhum tipo de justificativa extra, ou seja, todos os alunos apenas marcaram a alternativa a) e nada mais.

Na segunda questão, nove alunos acertaram, com diversos modos de se fazer os cálculos. Cinco deles apenas dividiram 37 por 10 e relacionaram as grandezas para chegar na função afim, e seis outros fizeram mais uma conta para ter certeza. Por exemplo, 111 divido por 30 ou 148 dividido por 40. Além disso, houve um erro: o aluno H assinalou a alternativa d), pois confundiu a multiplicação dos termos.

Para a questão 3 houve oito acertos, sendo que as alunas A e J resolveram apenas olhar para os coeficientes (Figura 7.1). Nos outros seis acertos, os alunos calcularam as raízes de cada equação usando a fórmula de Bhaskara (Figura 7.2). Os erros foram: o aluno E assinalou a alternativa a), pois seguiu o mesmo raciocínio de A e J, mas trocou a concavidade de quando o coeficiente a é menor que zero, e os alunos B, O e H assinalaram a alternativa e), pois calcularam as raízes de forma errada.

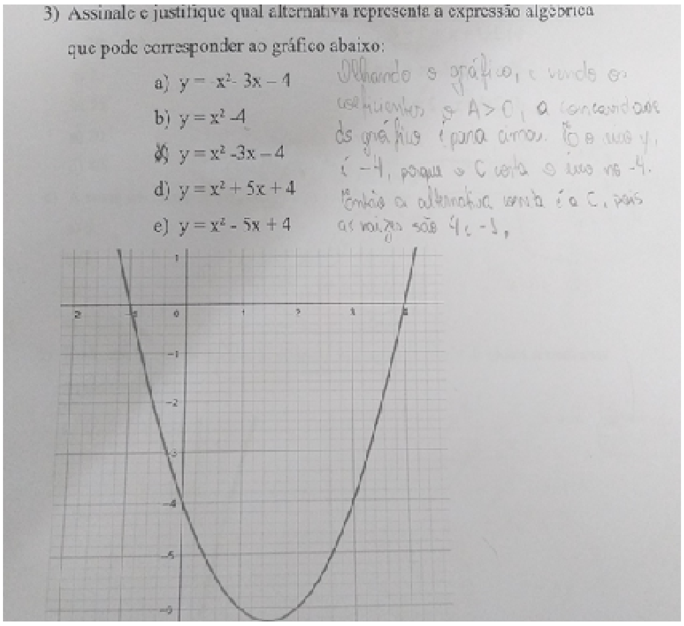


Figura 7.1: Resolução questão 3 - Avaliação Diagnóstica - Aluna A

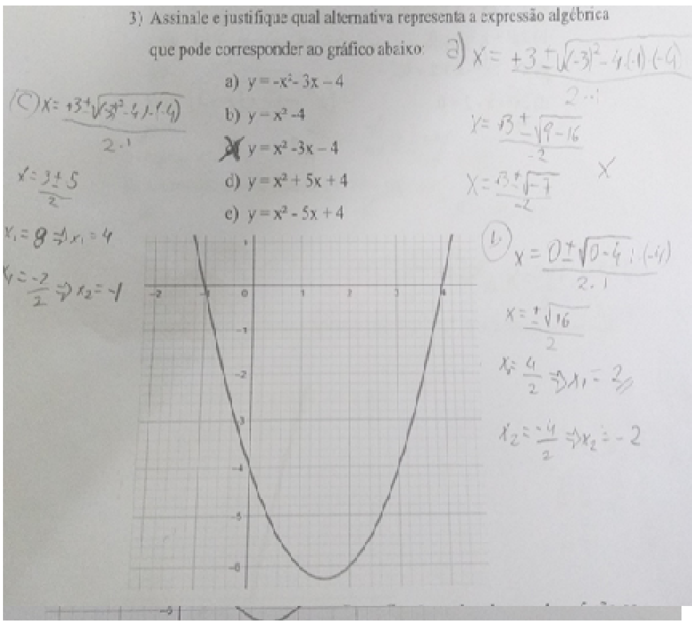
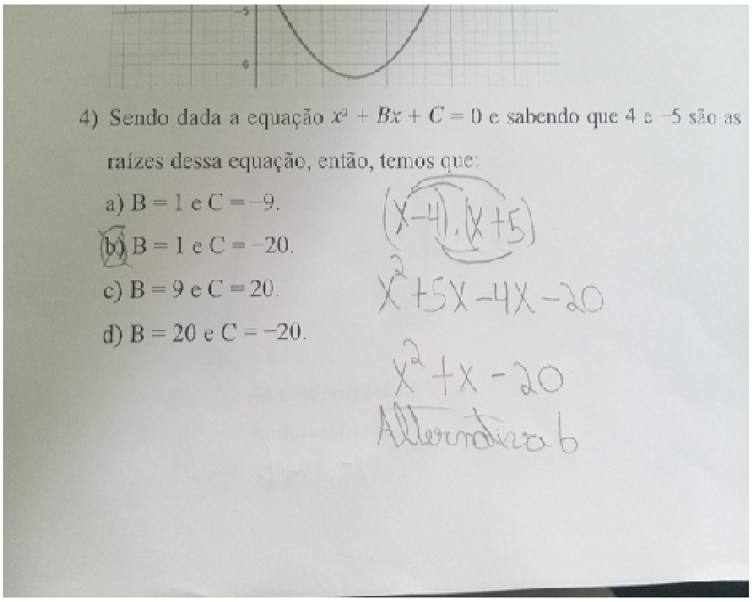


Figura 7.2: Resolução questão 3 - Avaliação Diagnóstica - Aluno F

Na questão 4, novamente houve seis acertos e todos fizeram da mesma forma o resultado (Figura 7.3). Os outros seis (B, C, E, H, M e O) deixaram a questão em branco. O professor Kaká deu uma bronca neles pois uma questão bem parecida caiu na prova que eles haviam feito semana passada.


4) Sendo dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$ e sabendo que 4 e −5 são as raízes dessa equação, então, temos que:

a) B = 1 e C = −9.

b) B = 1 e C = −20.

c) B = 9 e C = 20.

d) B = 20 e C = −20.

$(x-4).(x+5)$

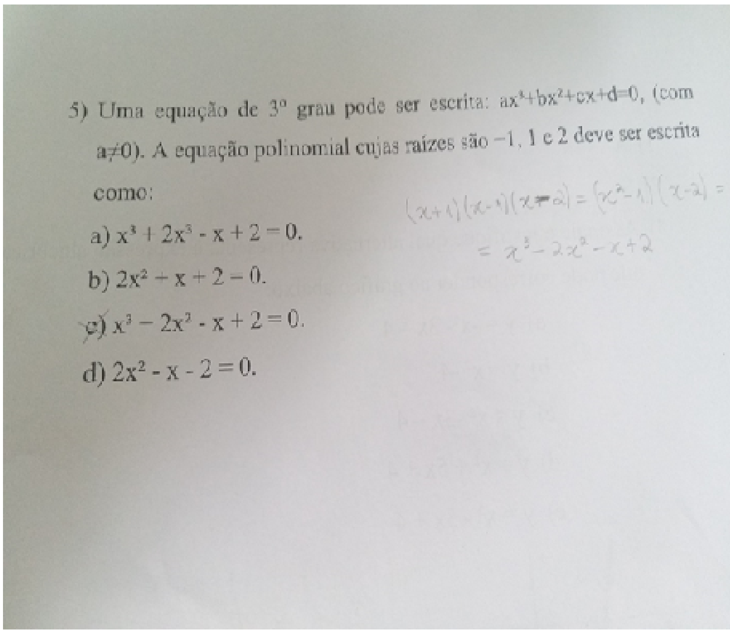
$x^2+5x-4x-20$

x^2+x-20

Alternativa b

Figura 7.3: Resolução questão 4 - Avaliação Diagnóstica - Aluno K

Para a questão 5, apenas as alunas A e J conseguiram responder corretamente e utilizaram o mesmo raciocínio da questão anterior (Figura 7.4). Os demais deixaram em branco.


5) Uma equação de 3º grau pode ser escrita: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, (com $a \neq 0$). A equação polinomial cujas raízes são −1, 1 e 2 deve ser escrita como:

a) $x^3 + 2x^3 - x + 2 = 0$.

b) $2x^2 + x + 2 = 0$.

c) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

d) $2x^2 - x - 2 = 0$.

$(x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) =$

$= x^3-2x^2-x+2$

Figura 7.4: Resolução questão 5 - Avaliação Diagnóstica - Aluna J

Por meio desta avaliação diagnóstica pude perceber que os alunos possuem um conhecimento suficientemente bom sobre funções afim visto que quase todos acertaram as questões um e dois. Além disso, pude perceber que mesmo os estudantes que erraram a questão três não possuem grande dificuldade para calcular as raízes de funções quadráticas usando a fórmula de Bhaskara.

Em relação à forma fatorada das equações de segundo e terceiro grau pude perceber que os estudantes apresentavam certa dificuldade, de acordo com os resultados das questões

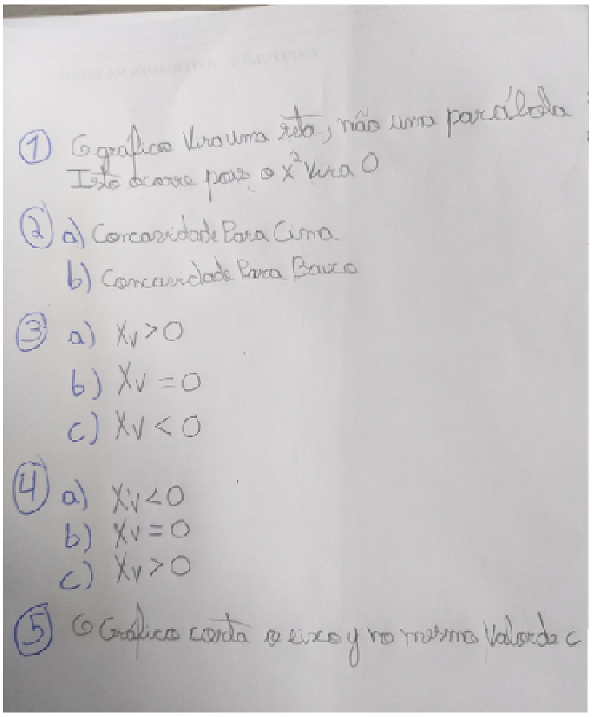

1 O grafico Vira uma reta, não uma parábola
Isto ocorre pois o x^2 vira 0
2 a) Concavidade Para Cima
b) Concavidade Para Baixo
3 a) $X_V > 0$
b) $X_V = 0$
c) $X_V < 0$
4 a) $X_V < 0$
b) $X_V = 0$
c) $X_V > 0$
5 O Gráfico corta o eixo y no mesmo Valor de c

Figura 7.5: Respostas Atividade 2 - Aluno K

quatro e cinco.

7.2 Segundo dia (Alunos A até P, exceto D)

No segundo dia, as atividades descritas no Capítulo 5 foram aplicadas aos cinco trios de alunos. As Atividades 1 e 3 foram criadas com o intuito de socializarmos as informações e pensamentos oralmente. Dessa forma, não disponho de material escrito e formalizado para análise.

Quanto à Atividade 2, todos os trios chegaram a conclusões parecidas, ou seja, os grupos analisaram a relação entre os coeficientes de uma função quadrática de forma parecida (Figuras 7.5 e 7.6).

Já na Atividade 4, são apresentados quatro problemas para os grupos e como foi explicitado anteriormente, nenhum grupo terminou todos. Para melhor avaliação dos resultados seguiremos a análise por problema.

No Problema 1, a primeira observação que os trios fizeram foi a relação entre os coeficientes da função e seu gráfico (Atividade 2), observando que a concavidade estava voltada para baixo pois o coeficiente dominante era menor do que zero, o gráfico corta o eixo y em -85 e possui duas raízes distintas. Foram encontradas duas maneiras de resolução. Os alunos A, D e E aplicaram diretamente a fórmula do y do vértice, sabendo que isto forneceria a maior temperatura que a função descrevia (Figura 7.7), já os alunos B e C foram um pouco mais criativos e calcularam o ponto médio entre as raízes e, em seguida, substituíram o valor encontrado na função (Figura 7.8).

O objetivo do Problema 2 é fazer com que o aluno consiga interpretar as informações

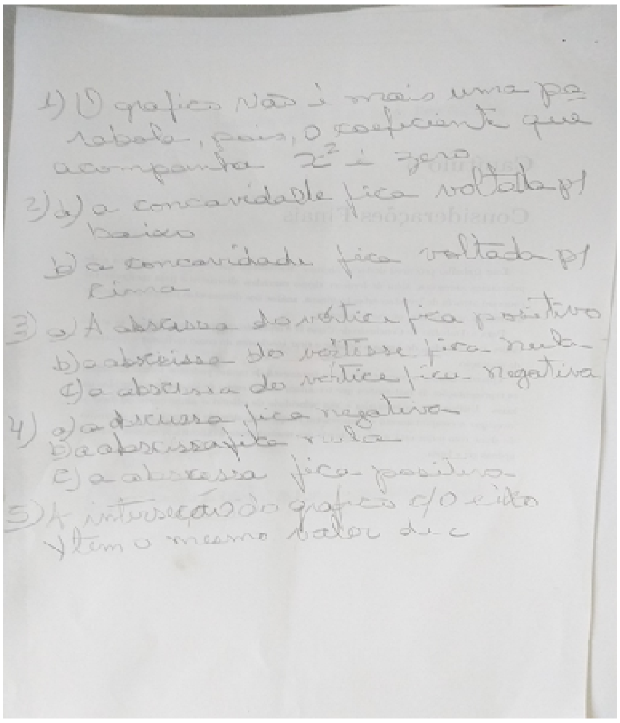
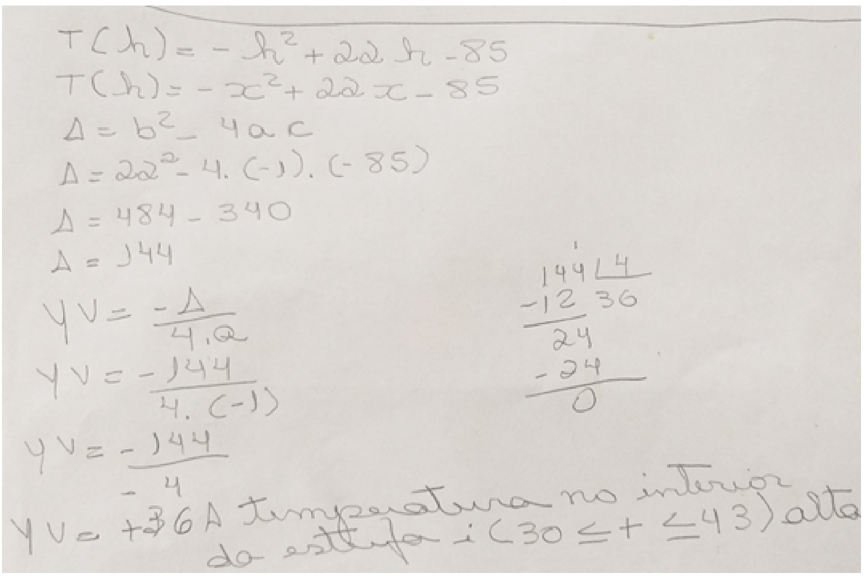

1) O gráfico não é mais uma parábola, pois, o coeficiente que acompanha x^2 é zero.
2) a) a concavidade fica voltada p/ baixo
b) a concavidade fica voltada p/ cima
3) a) A abscissa do vértice fica positivo
b) a abscissa do vértice fica nula
c) a abscissa do vértice fica negativa
4) a) a abscissa fica negativo
b) a abscissa fica nula
c) a abscissa fica positiva
5) A intersecção do gráfico c/ o eixo y tem o mesmo valor de c

Figura 7.6: Respostas Atividade - 2 Aluna B


$T(h) = -h^2 + 22h - 85$
$T(h) = -x^2 + 22x - 85$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 22^2 - 4.(-1).(-85)$
$\Delta = 484 - 340$
$\Delta = 144$
$y_V = \frac{-\Delta}{4.a}$
$y_V = \frac{-144}{4.(-1)}$
$y_V = \frac{-144}{-4}$
$y_V = +36$ A temperatura no interior da estufa é $(30 \leq t \leq 43)$ alta

144 | 4
-12 36
24
-24
0

Figura 7.7: Resolução Problema 1 - Atividade 4 - Aluna B

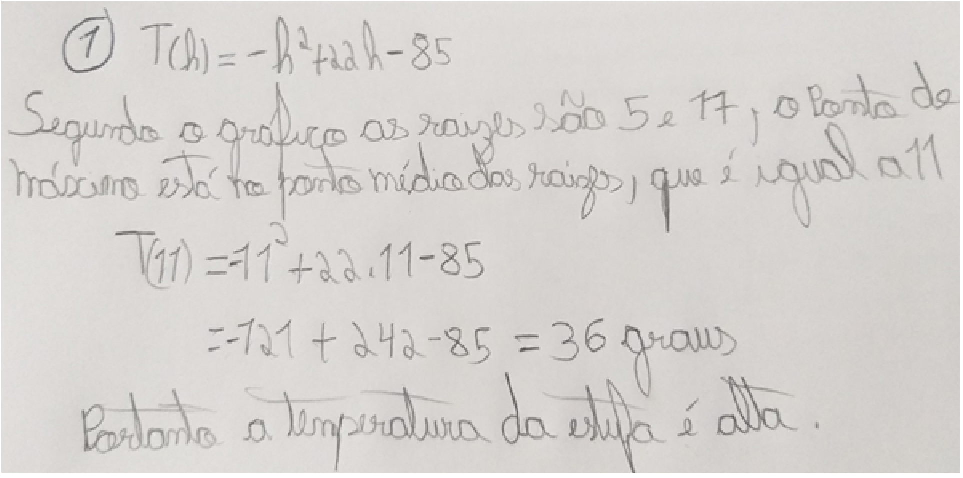


Figura 7.8: Resolução Problema 1 - Atividade 4 - Aluno K

presentes no gráfico de forma algébrica. Então, além de pedir que sejam dadas as respostas, também foi pedido que escrevessem o modo de pensar que eles seguiram. Nesta questão todos os grupos tiveram a mesma linha de raciocínio, que se baseia na interpretação do gráfico.

No Problema 3, assim que foram construídas os gráficos no Geogebra, os grupos perceberam que a função possuía apenas uma raiz real, pois o gráfico interceptava o eixo x em apenas um ponto. Para minha surpresa os alunos falaram que as outras raízes não eram reais e sim imaginárias. Então, Kaká interveio e falou que tinha falado um pouco sobre o assunto logo antes de eu começar a comparecer nas aulas. Pedi então que resolvessem o problema da forma que o professor Carlos havia ensinado.

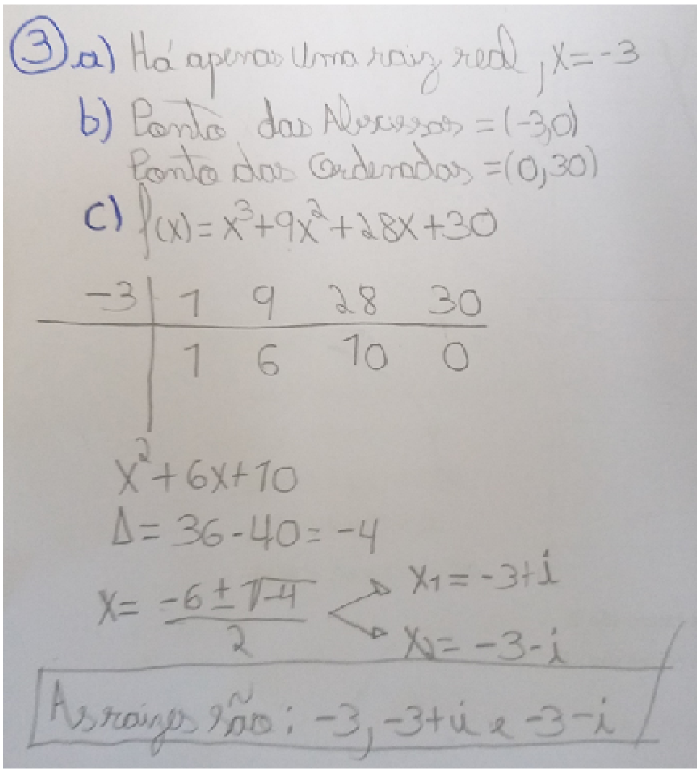
Quatro grupos resolveram o problema utilizando-se do algoritmo de Briot-Ruffini (Figura 7.9). O último trio utilizou a divisão de polinômios para diminuir o problema em uma questão de função quadrática, visto que pelo gráfico era perceptível que a raiz da equação cúbica era -3 (Figura 7.10).

7.3 Terceiro dia (Alunos A, B, F, G, H, J, L, M, O)

Na primeira questão da avaliação somativa, todos os alunos acertaram, e como tínhamos poucos alunos, pude perceber que foi resolvida de forma bem rápida, assim como fizeram na primeira questão da avaliação diagnóstica, que apesar de ser parecida, tratava de um assunto consideravelmente mais simples.

Na segunda questão da avaliação somativa, que remete à questão quatro da avaliação diagnóstica, também não houve erros, mostrando um desempenho melhor que a primeira avaliação, isto é, os alunos presentes conseguiram relacionar o conhecimento entre os coeficientes e raízes de uma equação algébrica.

A questão três pode ser relacionada à segunda questão da Atividade 4. Apenas um aluno errou e foi na parte dos cálculos, em que ele ao invés de dividir o cálculo do y do vértice por 4, a divisão foi feita por 2. O modo correto de resolver o problema está exposto



3 a) Há apenas uma raiz real, $x = -3$

b) Ponto das Abscissas $= (-3,0)$

Ponto das Ordenadas $= (0,30)$

c) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$

-3	1	9	28	30
	1	6	10	0

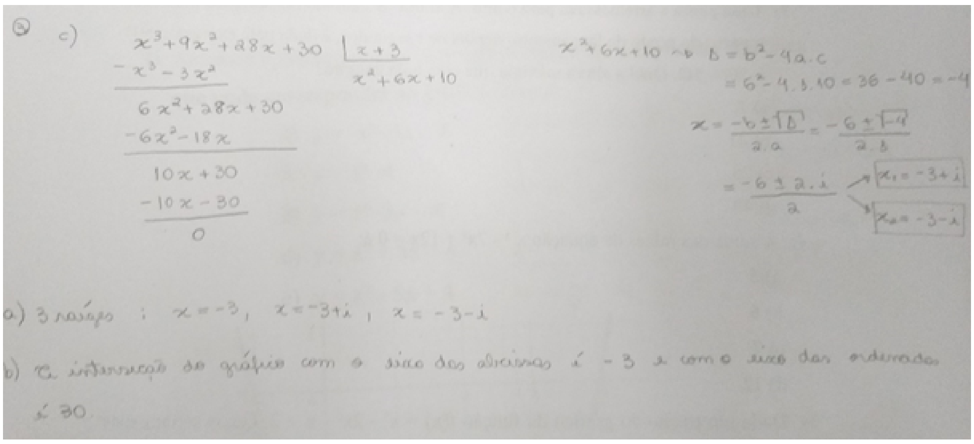
$x^2 + 6x + 10$

$\Delta = 36 - 40 = -4$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2}$ → $x_1 = -3+i$, $x_2 = -3-i$

$\boxed{\text{As raízes são: } -3, -3+i \text{ e } -3-i}$

Figura 7.9: Resolução Problema 3 - Atividade 4 - Aluno G



3 c) $x^3 + 9x^2 + 28x + 30 \;|\; x+3$

$-x^3 - 3x^2 \qquad x^2 + 6x + 10$

$6x^2 + 28x + 30$

$-6x^2 - 18x$

$10x + 30$

$-10x - 30$

0

$x^2 + 6x + 10 \rightarrow \Delta = b^2 - 4a.c = 6^2 - 4.1.10 = 36 - 40 = -4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{-6 \pm 2.i}{2}$ → $\boxed{x_1 = -3+i}$, $\boxed{x_2 = -3-i}$

a) 3 raízes: $x = -3$, $x = -3+i$, $x = -3-i$

b) a intersecção do gráfico com o eixo das abscissas é -3 e com o eixo das ordenadas é 30

Figura 7.10: Resolução Problema 3 - Atividade 4 - Aluna J

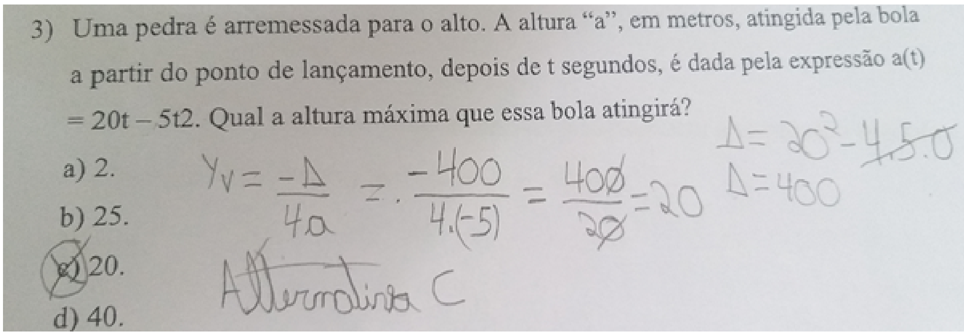


Figura 7.11: Resolução questão 3 - Avaliação Somativa - Aluno G

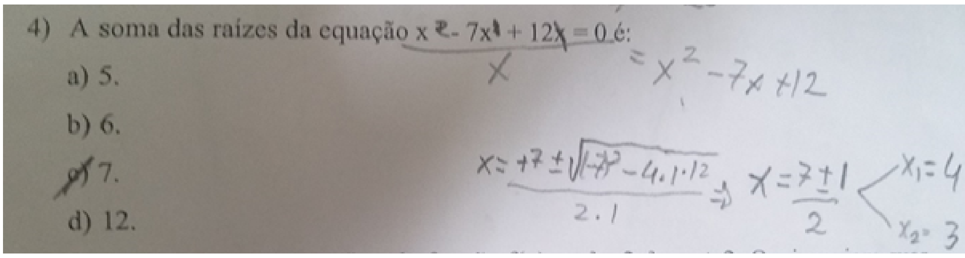


Figura 7.12: Resolução questão 4 - Avaliação Somativa - Aluno F

na Figura 7.11.

A questão quatro diz respeito à questão três da Atividade 4 aplicada dois dias anteriores à avaliação somativa, mas ao invés do aluno manipular o aplicativo Geogebra para descobrir uma raiz, ele deve perceber que $f(0) = 0$, isto é, 0 é uma raiz da função. Neste problema houve 7 acertos que reduziram o problema de terceiro grau para um de segundo grau (Figura 7.12). Os dois alunos que erraram não resolveram a questão, apesar de um deles ter escolhido a alternativa correta.

A questão cinco é bem parecida com a anterior, mas ao invés de incitar que o aluno "perceba" uma raiz, esta raiz é dada em um trecho do gráfico. Apenas 1 aluno errou a questão, deixando-a em branco; os demais utilizaram o mesmo raciocínio do problema anterior (Figura 7.13).

Após avaliar as respostas que os alunos deram na avaliação somativa, pude perceber que o tempo de resolução dos exercícios pedidos diminuiu bastante em relação à avaliação diagnóstica. Além disso, durante a socialização de resultados os estudantes utilizavam a representação gráfica como argumento para justificar suas respostas, por exemplo, ao discutirmos o Problema 5, os alunos argumentavam que -1 era raiz da função pois "o gráfico cortava o eixo x".

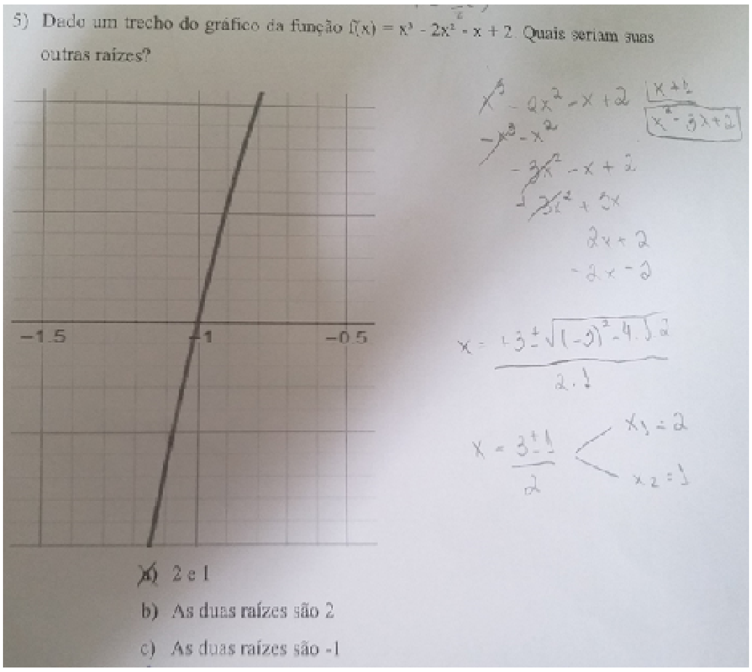


Figura 7.13: Resolução questão 5 - Avaliação Somativa - Aluna A

Capítulo 8

Considerações Finais

Este trabalho procurou destacar algumas dificuldades que o ensino de álgebra e de polinômios apresentam, além de fornecer alguns caminhos alternativos para melhorar tal processo por meio de levantamentos históricos, análise dos documentos oficiais nacionais e atividades que utilizam outras tecnologias.

Com este trabalho pude aprofundar meu conhecimento em matemática com a análise do Teorema Fundamental da Álgebra e do estudo de resoluções de equações polinomiais por seus radicais. Além disso, pude conhecer como foi a construção histórica de cada uma destas resoluções e avaliar como os documentos oficiais brasileiros tratam tal assunto.

Em relação às atividades propostas, ficou evidente que quando usamos o computador como ferramenta de ensino podemos tornar dinâmica as representações da matemática que tomariam muito tempo se fossem reproduzidas na lousa. Utilizando o computador e sua velocidade de cálculo, o aluno pode explorar e investigar o comportamento de funções em tempo real, além de permitir uma interação do aluno com o que está sendo ensinado que normalmente é dificultada quando usamos apenas giz e lousa.

Bibliografia

[1] ALTOÉ, A. Aspectos históricos da formação de professores para o uso do computador na educação. VII Seminário Nacional de Estudos e Pesquisas–História, Sociedade e Educação no Brasil (2006).

[2] BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, F. Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

[3] BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 9.394. 1996. Disponível em: `https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf`. Acesso em 02 de dez. 2019

[4] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Ministério da Educação (MEC), 1999. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf`. Acesso em 02 de dez. 2019

[5] BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf`. Acesso em 02 de dez. 2019

[6] MENEZES, E. T.; SANTOS, T. H. Verbete avaliação somativa. Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: `https://www.educabrasil.com.br/avaliacao-somativa`. Acesso em 02 de dez. 2019

[7] SILVA, E. V. Resolubilidade de Polinômios: da Teoria ao Ensino-Aprendizagem. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2018.

[8] VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. Computadores e Conhecimento: repensando a educação (1993): p.123.