



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Aplicações singulares via grupos de reflexões

José Rafael Borges Zampiva

orientador: *João Nivaldo Tomazella*
co-orientador: *Guillermo Peñafort Sanchis*

São Carlos
Março de 2020

Aplicações singulares via grupos de reflexões

José Rafael Borges Zampiva

orientador: *João Nivaldo Tomazella*

co-orientador: *Guillermo Peñafort Sanchis*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
Março de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato José Rafael Borges Zampiva, realizada em 24/04/2020:

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas
USP

Profa. Dra. Thais Maria Dalbello
UFSCar

Certifico que a defesa realizou-se com a participação à distância do(s) membro(s) Maria Aparecida Soares Ruas, Thais Maria Dalbello e, depois das arguições e deliberações realizadas, o(s) participante(s) à distância está(ao) de acordo com o conteúdo do parecer da banca examinadora redigido neste relatório de defesa.

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Para minha mãe Maria.

*Dies irae, dies illa
Solvat saeculum in favilla
Teste David cum Sibylla
Quantus tremor est futurus
Quando iudex est venturus
Cuncta stricte discussurus!*

*Dies irae, dies illa
Solvat saeculum in favilla
Teste David cum Sibylla
Quantus tremor est futurus
Quando iudex est venturus
Cuncta stricte discussurus!
Quantus tremor est futurus*

*Dies irae, dies illa
Quantus tremor est futurus
Dies irae, dies illa
Quantus tremor est futurus
Quantus tremor est futurus
Quando iudex est venturus
Cuncta stricte discussurus!*

*Cuncta stricte
Cuncta stricte
Stricte discussurus!
Cuncta stricte
Cuncta stricte
Stricte discussurus!*

Requiem - Dies Irae - Wolfgang Amadeus Mozart

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares mais próximos. Em especial, agradeço a minha mãe e minha irmã Anna, por todo o apoio que recebi durante minha vida.

Agradeço aos meus colegas de classe pelos inúmeros momentos. Em particular, agradeço a Dayana, Lorryne e Devis pelas inúmeras horas que passamos juntos entre os estudos.

Agradeço a Larrisa, por ter me mostrado o quanto tocamos a vida das pessoas, mesmo que nunca nos demos conta disso. Serei eternamente grato por todas suas palavras de conforto e ajuda. Essas palavras me deram o apoio necessário e sempre irão ecoar na minha existência.

Agradeço aos professores que contribuíram com o processo da minha formação. Em particular, agradeço aos professores Waldeck, Alessandra e Dirk, e meu orientador, Tomazella pelas oportunidades de aprendizado e pela confiança para desenvolver esse projeto.

Agradeço ao Guille pelo direcionamento dado para a conclusão deste projeto e pela disponibilidade para o devido desenvolvimento.

Por fim, agradeço a CNPq pelo apoio financeiro. Pois, sem isso, não teria conseguido.

Resumo

Nosso objetivo com essa dissertação é descrever um modo de construir germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ \mathcal{A} -finita para $p = 2n$ e $p = 2n - 1$. Caso $p < 2n - 1$, concluímos que não existe germe de aplicação de reflexão \mathcal{A} -finita $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com coposto $f \geq 2$.

Abstract

Our objective with this essay is to describe a way to build germs of applications \mathcal{A} -finite $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ for $p = 2n$ and $p = 2n - 1$. In the case $p < 2n - 1$, we conclude that there is no germ of reflection application \mathcal{A} -finite $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ with $\text{corank } f \geq 2$.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Introdução | xvii |
| 1 Preliminares | 1 |
| 1.1 Topologia | 1 |
| 1.2 Jatos e Germes | 2 |
| 1.3 \mathcal{A} -equivalência e estabilidade | 3 |
| 1.4 Transversalidade | 5 |
| 1.5 Grupo diedral | 6 |
| 1.6 Álgebra comutativa | 6 |
| 1.7 Representação linear de grupos | 8 |
| 1.8 Ações de grupos lineares | 11 |
| 1.9 Geometria analítica complexa e feixes | 13 |
| 2 Grupos de reflexão | 19 |
| 2.1 Grupos de reflexões | 19 |
| 2.2 Polinômios invariantes por grupos de reflexões | 30 |
| 2.3 A função órbita ω | 34 |
| 3 Aplicações de reflexão: Injetividade e normal crossings | 39 |
| 3.1 Aplicações de reflexão | 39 |
| 3.2 Injetividade de aplicações de reflexão | 42 |
| 3.3 Normal crossings para aplicações de reflexão | 44 |
| 4 Espaços de pontos duplos $D^2(f)$ e $B^2(f)$ para uma aplicação de reflexão | 53 |
| 4.1 O espaço de pontos duplos $D^2(\omega)$ | 53 |
| 4.2 O espaço de pontos duplos $B^2(\omega)$ | 59 |
| 5 Obstruções para \mathcal{A}-finitude e aplicações de reflexão \mathcal{A}-finita | 73 |
| 5.1 <i>Singular Locus</i> de $B^2(f)$ e \mathcal{A} -finitude | 74 |
| 5.2 Critério para que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ seja \mathcal{A} -finita, com $p \geq 2n$ | 77 |
| 5.3 Critério para que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ seja \mathcal{A} -finita. | 83 |
| Referências Bibliográficas | 89 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | $Z_{2,2}$ agindo em \mathbb{C}^2 | 24 |
| 2.2 | \mathcal{A} de $Z_{m_1,1,1}$, $Z_{m_1,m_2,1}$ e Z_{m_1,m_2,m_3} em \mathbb{C}^3 | 25 |
| 2.3 | Faces determinadas pelo grupo de reflexões Z_{m_1,m_2} | 25 |
| 2.4 | Faces que passam pela origem de $Z_{m_1,1,1}$, $Z_{m_1,m_2,1}$ e Z_{m_1,m_2,m_3} em \mathbb{C}^3 , respectivamente | 27 |
| 2.5 | Aplicação órbita $\omega_{Z_{m_1,m_2}}$ em \mathbb{C}^2 | 35 |
| 3.1 | $\omega_1 \circ h_1 = \omega_2 \circ h_2 = \omega_3 \circ h_3 = (t^2, t^3)$ | 40 |
| 3.2 | Coposto da aplicação $\omega \circ h_s$ | 42 |
| 3.3 | $Y \cap gY$, para o caso $h_s(t) = (t, t^3 - st)$ | 43 |
| 3.4 | Falha na condição de normal crossings na órbita de $\omega_{Z_{2,2}}$ | 47 |
| 3.5 | h_1 e h_3 falham em ter órbita normal crossings. h_2 e h_4 possuem órbita normal crossings | 48 |
| 3.6 | Falha na condição de injetividade em \mathcal{A} na órbita por $\omega_{Z_{2,2}}$ | 48 |
| 3.7 | h_4 em $Z_{2,2}$ falha com a condição órbita normal crossings. | 51 |
| 3.8 | \tilde{h}_4 satisfaz a condição órbita normal crossings para $Z_{2,2}$. | 51 |
| 4.1 | Decomposição de $D^2(\omega_{Z_{2,2}})$ em pontos regulares e singulares. | 59 |
| 4.2 | Ideia intuitiva do <i>Blowup</i> para uma curva ao longo de 0. | 60 |
| 4.3 | Decomposição de $B^2(\omega_{Z_{2,2}})$. | 66 |

Introdução

Nosso objetivo com essa dissertação de mestrado é o estudo sistemático do artigo: Reflection Maps (referência [\[San16\]](#)). Em que é descrito um modo de construir germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, que são \mathcal{A} -finitos para $p = 2n$ e $p = 2n - 1$. Para tanto, distribuimos o conteúdo dessa dissertação de modo a facilitar o entendimento de tal artigo. Apresentamos o conteúdo dessa dissertação na seguinte ordem de capítulos:

No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos que serão usados ao longo de todo o texto. São eles divididos nas seções: topologia, jatos e germes, \mathcal{A} -equivalência e estabilidade, variedades complexas, grupo diedral, álgebra comutativa, representação linear de grupos, ações de grupos lineares e geometria analítica complexa. Usualmente no começo de cada seção apresentamos uma referência básica que foi usada para consulta.

No capítulo 2 apresentamos os conceitos fundamentais para o nosso trabalho: grupos de reflexões G que atuam em um espaço vetorial V de dimensão finita sobre \mathbb{C} e a aplicação órbita ω_G determinada por cada grupo de reflexão G . Temos que cada grupo G determina um número finito de hiperplanos H_1, \dots, H_k em V ao qual definimos uma partição \mathcal{C} chamada de *complexo* definido por G . Três resultados são importantes: O primeiro é que para cada classe de equivalência $C \in \mathcal{C}$ temos que existe $g \in G$ tal que $\text{Fix } g = \langle C \rangle$. O segundo resultado se refere a ação de G que pode ser induzida na álgebra dos polinômios $K[x_1, \dots, x_n]$, onde teremos todas as informações sobre a álgebra dos invariantes $K[x_1, \dots, x_n]^G$ sobre tal ação. Por fim, o último resultado é que dado $v \in C$, com $C \in \mathcal{C}$, temos que $\ker d\omega_v = \langle C^\perp \rangle$.

No capítulo 3 definimos aplicações da forma $f = \omega_G \circ h$, onde h é um mergulho ou uma aplicação finita, que serão denominadas de aplicação de reflexão e quasi-reflexão, respectivamente. Conseguiremos determinar especificamente os multi-germes e mono-germes da aplicação ω_G . Com isso, veremos que informações importantes, como injetividade e *normal crossings*, sobre tais aplicações independem de ω_G mas de como h cruza pelos hiperplanos H_1, \dots, H_k definidos pelo grupo de reflexões G e pela ação de G em $\text{Im } h = Y$. Concluiremos que a condição de normal crossings para uma aplicação de reflexão será equivalente a duas condições sobre h , chamadas de órbita normal crossings e órbita injetora.

O capítulo 4 possui o conteúdo sobre pontos duplos do tipo $D^2(\omega_G)$ e $B^2(\omega_G)$, para um determinado grupo de reflexões G . Veremos que ambos, $D^2(\omega_G)$ e $B^2(\omega_G)$, são espaços complexos reduzidos com uma determinada decomposição em componentes irredutíveis e

teremos uma decomposição para os pontos duplos $B^2(f)$, com $f = \omega_G \circ h$, em termos de $B^2(\omega_G)$ e \tilde{h} , onde \tilde{h} é um mergulho induzido por h .

Por fim, no capítulo 5 encerraremos nosso trabalho com três resultados importantes: O primeiro é o Teorema [5.11](#) em que para $p < 2n - 1$, mostraremos que não existe germe de aplicação de reflexão \mathcal{A} -finita $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com coposto $f \geq 2$. O segundo e terceiro resultado se referem a construção de germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ \mathcal{A} -finita para $p \geq 2n$ e $p = 2n - 1$, respectivamente. Esses resultados serão concluídos a partir do fato que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é \mathcal{A} -finito se, e somente se, $B^2(f)$ pertence a $\{(0, 0, [u]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1}\}$. Ressaltamos que tais resultados são de natureza técnica e pouco intuitiva.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos que serão usados ao longo do texto. No início de cada seção damos as referências que foram consultadas para o desenvolvimento da mesma.

1.1 Topologia

Observação 1.1. Dado (X, \mathcal{T}) espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que U é vizinhança de x se $x \in U$ e $U \in \mathcal{T}$.

Definição 1.2. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Dizemos que X é localmente compacto em x se para todo subespaço compacto C existe uma vizinhança U de x com $x \in U \subseteq C$. Se X é localmente compacto em todos seus pontos então X é localmente compacto.

Definição 1.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos. Dizemos que f é finita se

- 1) f é fechada. Isto é, $f(A) \subseteq Y$ é fechado para todo $A \subseteq X$ fechado,
- 2) f é quasi-finita. Ou seja, para todo $y \in Y$ temos que a fibra $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito de pontos de X .

Proposição 1.4. *Sejam X e Y espaços localmente compactos de Hausdorff. Se uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua então é fechada.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [\[Mun74\]](#). □

Definição 1.5. Dado qualquer conjunto A , escrevemos a diagonal menor e maior de A^k , respectivamente, como

$$\Delta(A, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k \mid x_i = x_j, \text{ para todo } i, j \leq k\}$$

$$D(A, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k \mid x_i = x_j, \text{ para algum } i \neq j \leq k \}.$$

Escreveremos $\Delta A = \Delta(A, 2)$ e $A^{(k)} = A^k \setminus D(A, k)$.

Definição 1.6. Seja (X, \mathcal{T}) espaço topológico. Dado $A \subseteq X$ definimos o fecho de A em X como $\bar{A} = \{\bigcap U_\alpha \mid A \subseteq U_\alpha \text{ e } U_\alpha \text{ é fechado em } (X, \mathcal{T})\}$.

1.2 Jatos e Germes

Nessa seção damos a definição de k -jato que será usada na próxima seção e a definição de germes de aplicação. A referência geral é [\[DJP13\]](#).

Definição 1.7. Duas aplicações $f, f' : X \rightarrow Y$ definem o mesmo k -jato em um ponto $x \in X$ se $f(x) = f'(x)$ e suas k -ésimas expansões de Taylor, para alguma coordenada local, $j^k f(x)$ e $j^k f'(x)$ coincidem. Temos então uma relação de equivalência definida pelos k -jatos, e por abuso de notação, denotaremos $j^k f(x)$ a classe de equivalência de f e chamaremos de k -jato de f em x . O conjunto de k -jatos de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ com $f(x) = y$ é denotado por $J^k(X, Y)_{x,y}$. O espaço k -jato é denotado como a união disjunta

$$J^k(X, Y) = \bigsqcup_{(x,y) \in X \times Y} J^k(X, Y)_{x,y}.$$

Temos uma aplicação

$$\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X,$$

que associa um jato $\sigma \in J^k(X, Y)_{x,y}$ com x . Para cada $f : X \rightarrow Y$ temos uma extensão de aplicação de k -jato

$$j^k f : X \rightarrow J^k(X, Y),$$

dado por $x \mapsto j^k f(x)$.

Definição 1.8. Dadas duas variedades X, Y e um inteiro $s \geq 2$, chamamos s -dobramento do espaço k -jato a variedade

$$J_s^k(X, Y) = (\alpha \times \dots \times \alpha)^{-1}(X^{(s)}).$$

Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, temos uma aplicação holomorfa

$$j_s^k(f) : X^{(s)} \rightarrow J_s^k(X, Y),$$

dada por $(x_1, \dots, x_s) \mapsto (j^k(x_1), \dots, j^k(x_s))$. Os pontos do espaço $J_s^k(X, Y)$ são chamados de multijatos e $j_s^k f(x_1, \dots, x_s)$ são chamados de multijatos de f em (x_1, \dots, x_s) .

Definição 1.9. Dado um subconjunto $S \subseteq X$, dizemos que dois subconjuntos $Y_1, Y_2 \subseteq X$ definem o mesmo germe ao longo de S se existe uma vizinhança de S em X , tal que

$$Y_1 \cap U = Y_2 \cap U.$$

Temos então uma relação de equivalência nos subconjuntos de X . Uma classe de equivalência dessa relação é chamada de germe (ao longo de S) e o germe representado por $Y \subseteq X$ é denotado por (Y, S) . Quando S é um conjunto discreto, germes ao longo de S são chamados de germes em S . Iremos denotar $(Y, \{x\})$ por (Y, x) .

Dizemos que um germe (Y, S) está contido em um germe (Y', S) , denotado por $(Y, S) \subseteq (Y', S)$, se existe representante Z e Z' de (Y, S) e (Y', S) , respectivamente, satisfazendo $Z \subseteq Z'$. Definimos $(Y, S) \cap (Y', S) = (Y \cap Y', S)$ e $(Y, S) \cup (Y', S) = (Y \cup Y', S)$. Essas operações independem dos representantes.

Definição 1.10. Dado um subconjunto $S \subseteq X$ e duas funções contínuas $f_1 : U_1 \rightarrow Y$ e $f_2 : U_2 \rightarrow Y$, com U_1, U_2 vizinhanças de S , dizemos que f_1 e f_2 definem o mesmo germe ao longo de S se existe uma vizinhança $U \subseteq U_1 \cap U_2$ de S , tal que

$$f_1|_U = f_2|_U.$$

Novamente, temos uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de U em X definidas ao longo de S . Uma classe de equivalência é chamada de germe de aplicação (ao longo de S) e o germe de f será denotado por (f, S) . Um germe de homeomorfismo (ou germe de biholomorfismo, submersão, etc.) é um germe que admite um homeomorfismo (biholomorfismo, submersão, etc.) como representante. Observamos que qualquer germe de aplicação (f, S) , representado por um morfismo $f : X \rightarrow Y$ possui um subconjunto $f(S) \subseteq Y$ bem definido.

Um morfimo de germes

$$f : (X, S) \rightarrow (Y, T)$$

é um germe de aplicação ao longo de S tal que $f(S) \subseteq T$. Germes de aplicação em um conjunto finito S , satisfazendo $f(S) = \{y\}$ para algum $y \in Y$, é chamado de multigerme. Um monogerme em x é um germe de aplicação da forma $(f, \{x\})$, que será denotado por (f, x) .

1.3 \mathcal{A} -equivalência e estabilidade

A referência desta seção é [\[Wal81\]](#).

Definição 1.11. Dois multigerms $f : (X, S) \rightarrow (Y, y)$ e $f' : (X, S) \rightarrow (Y, y)$ são \mathcal{A} -equivalentes se existem multigerms de biholomorfismos $\phi : (X, S) \rightarrow (X, S)$ e $\psi : (Y, y) \rightarrow (Y, y)$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (X, S) & \xrightarrow{f} & (Y, y) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (X, S) & \xrightarrow{f'} & (Y, y) \end{array}$$

Definição 1.12. Um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é k -determinado se qualquer germe satisfazendo $j_s^k f = j_s^k g$ é \mathcal{A} -equivalente a f . Um multigerme é finitamente determinado se é k -determinado para algum k .

Definição 1.13. Um desdobramento de um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um multigerme

$$F : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \rightarrow (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0),$$

da forma $F(s, x) = (s, f_s(x))$, com $f_0(x) = f(x)$.

Dois desdobramentos F e F' são \mathcal{A} -equivalentes se existem desdobramentos de multigermes da identidade em \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^p

$$\Phi : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \rightarrow (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S)$$

e

$$\Psi : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0),$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) & \xrightarrow{F'} & (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

Um desdobramento F de f é chamado de trivial se é \mathcal{A} -equivalente ao desdobramento constante $id \times f$.

Definição 1.14. Um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável se todo desdobramento de f é trivial.

Definição 1.15. Uma aplicação finita $f : X \rightarrow Y$ é estável se, para qualquer $y \in f(X)$, o multigerme de f em $f^{-1}(y)$ é estável.

Dado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação. O leitor poderá consultar a definição de germe de aplicação \mathcal{A} -finita em [Wal81]. No entanto, usaremos como caracterização de aplicação \mathcal{A} -finita o seguinte resultado:

Teorema 1.16. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação. Então f é \mathcal{A} -finita se, e somente se, existe um representante $f : U \rightarrow V$ que é estável em $U \setminus \{0\}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser consultada em [Wal81]. □

1.4 Transversalidade

Nessa seção definimos apenas os conceitos básicos sobre variedades complexas. Para maiores detalhes o leitor poderá consultar [Ebe07](#).

Definição 1.17. Sejam X e Y variedades complexas. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ definimos o coposto de f em $x \in X$ como $\dim_{\mathbb{C}} \ker df_x$. Se $\dim X = n$, então coposto $f_x = n - \text{posto } df_x$.

Definição 1.18. Dadas X e Y variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada de mergulho se

- 1) f é uma imersão, ou seja, dado $x \in X$ temos que a aplicação tangente $df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ é injetora.
- 2) $f : X \rightarrow Y$ é um mergulho topológico, ou seja, $f : X \rightarrow f(X)$ é um homeomorfismo.

Definição 1.19. Dadas X e Y variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada de submersão se dado $x \in X$ temos que a aplicação tangente $df_x : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ é sobrejetora.

Definição 1.20. Sejam X e Y variedades complexas e $W \subseteq Y$ subvariedade complexa. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ dizemos que f é transversal a W em x , denotado por $f \pitchfork W$ em x , se

- 1) $f(x) \notin W$ ou se
- 2) $f(x) \in W$ então

$$T_{f(x)} Y = T_{f(x)} W + df_x(T_x X).$$

Dizemos que f é transversal a W se for transversal em todos os pontos x de X . Dado um germe de aplicação $f : (X, x) \rightarrow (Y, q)$, dizemos que o germe de f é transversal a W em x se existe U vizinhança de x com dado representante $f : U \rightarrow V$, de modo que f é transversal a W em todos os pontos p de U .

Lema 1.21. Sejam Y subvariedade de \mathbb{C}^n , para algum n , e C subespaço vetorial de \mathbb{C}^n . Se $\dim(T_0 Y \cap C^\perp) = d$ então $\dim(Y \cap C) \leq \dim Y - d$.

Demonstração. Como $\dim(T_0 Y \cap C^\perp) = d$ tomemos $u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_r$ base de $T_0 Y$ com $u_1, \dots, u_d \in C^\perp$. Então, podemos tomar coordenadas locais $y_1, \dots, y_d, y_{d+1}, \dots, y_r$ de Y em 0 de modo que as curvas $\gamma_i(t) = ty_i$ satisfazem $\gamma_i'(0) = u_i \in C^\perp$.

Desse modo temos que $Y \cap C \subseteq \{y_1 = \dots = y_d = 0\}$. Como $\dim\{y_1 = \dots = y_d = 0\} = \dim Y - d$, obtemos que $\dim Y \cap C \leq \dim Y - d$. \square

1.5 Grupo diedral

Nessa seção apresentamos conceitos básicos que serão usados no Capítulo 2. A referência geral é [Neu07].

Exemplo 1.22 (Grupo diedral D_{2n}). O grupo diedral D_{2n} de ordem $2n$ é gerado por dois elementos r e s que são sujeitos as seguintes relações $r^n = 1$, $s^2 = 1$ e $(sr)^2 = 1$. Escrevemos como

$$D_{2n} = \langle r, s | r^n = 1, s^2 = 1, (sr)^2 = 1 \rangle.$$

Proposição 1.23. *Dado um grupo G gerado por dois elementos x e y , ambos de ordem 2 e xy possui ordem n . Então G é isomorfo a D_{2n} .*

Demonstração. De fato, temos que $G = \langle x, y | x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} G &= \langle x, y | x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 \rangle \\ &\cong \langle x, y, a | x^2 = y^2 = (xy)^n = 1, a = xy \rangle \\ &\cong \langle x, y, a | x^2 = y^2 = (xy)^n = a^n = 1, a = xy \rangle \\ &\cong \langle x, y, a | x^2 = y^2 = a^n = 1, a = xy \rangle \\ &\cong \langle x, y, a | x^2 = y^2 = a^n = 1, a = xy, (ay^{-1})^2 = 1 \rangle \\ &\cong \langle y, a | y^2 = a^n = 1, (ay^{-1})^2 = 1 \rangle \\ &\cong \langle y, a, b | y^2 = a^n = 1, (ay^{-1})^2 = 1, b = y^{-1} \rangle \\ &\cong \langle y, a, b | y^2 = a^n = 1, (ay^{-1})^2 = 1, b = y^{-1}, b^2 = 1 \rangle \\ &\cong \langle y, a, b | a^n = 1, (ay^{-1})^2 = 1, b = y^{-1}, b^2 = 1 \rangle \\ &\cong \langle y, a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = (ay^{-1})^2 = 1, b = y^{-1} \rangle \\ &\cong \langle y, a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = 1, b = y^{-1} \rangle \\ &\cong \langle a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = 1, \rangle \\ &\cong D_{2n}. \end{aligned}$$

□

1.6 Álgebra comutativa

Durante todo o texto iremos nos referir a anel como anel comutativo com unidade. A referência geral para essa seção é [Mat89].

Definição 1.24. Sejam R um anel e M um grupo abeliano. Então, M é chamado de R -módulo à esquerda se existe uma multiplicação por escalar $\mu : R \times M \rightarrow M$ denotada por $\mu(r, m) = rm$, para todo $r \in R$ e para todo $m \in M$, tal que para todos $r, r_1, r_2 \in R$ e todos $m, m_1, m_2 \in M$, temos

- 1) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,
- 2) $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$,
- 3) $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$,
- 4) $1m = m$.

A definição de R -módulo à direita é análoga. Mas, para os nossos propósitos a escolha é independente.

Definição 1.25. Sejam M e N R -módulos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ que satisfaz

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \text{ e } f(rm) = rf(m),$$

para todo $r \in R$ e $m, m_1, m_2 \in M$ é chamada de homomorfismo de R -módulos.

Definição 1.26. Sejam R anel e I, J ideais de R . Definimos $I : J = \{h \in R \mid hJ \subseteq I\}$.

Proposição 1.27. Sejam R anel e I, J ideais de R . Temos as seguintes propriedades:

- 1) $I : J$ é ideal de R ;
- 2) $I \subseteq I : J$;
- 3) $I : R = I$;
- 4) dados $\lambda, h_1, \dots, h_r \in R$, então $\langle \lambda h_1, \dots, \lambda h_r \rangle : \langle \lambda \rangle = \langle h_1, \dots, h_r \rangle$.

Definição 1.28. Sejam R um anel e M um R -módulo. Um elemento $a \in R$ é chamado de M -regular se $ax \neq 0$, para todo $0 \neq x \in M$. Uma sequência a_1, \dots, a_n de elementos em R é uma M -sequência (ou uma M -sequência regular) se satisfaz:

- 1) a_1 é M -regular, a_2 é (M/a_1M) -regular, \dots , a_n é $(M/\sum_{i=1}^{n-1} a_iM)$ -regular;
- 2) $M/\sum_{i=1}^n a_iM \neq 0$.

Definição 1.29. Seja R um anel Noetheriano, m seu ideal maximal e M -módulo finito em R . A profundidade, denotada por $depth$, de M é o comprimento da sequência M -regular mais longa com elementos em m .

De maneira geral, se R é um anel noetheriano, $I \subseteq R$ é um ideal e M é um módulo de R finitamente gerado, então a profundidade I de M é o comprimento da sequência M -regular mais longa com elementos em I .

Definição 1.30. Seja R um anel. Definimos o *height* de um ideal primo p de R como o supremo de n para uma sequência

$$p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n = p,$$

de ideais primos distintos. Definimos a dimensão de R , usualmente conhecida como *dimensão de Krull* denotada por $\dim R$, como o supremo de *height* de todos os ideais primos de R .

Definição 1.31. Dizemos que um anel R é Cohen-Macaulay se $\text{depth}(R) = \dim(R)$.

Definição 1.32. Dado um anel R . Dizemos que $r \in R$ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$.

Definição 1.33. Um anel R é chamado anel reduzido se não possuir elementos nilpotentes diferentes de zero

Definição 1.34. Sejam R um anel e I ideal de R . Definimos o radical de I , denotado por \sqrt{I} , como $\sqrt{I} = \{x \in R \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \in I\}$. Dizemos que I é um ideal radical se $I = \sqrt{I}$.

Proposição 1.35. *Seja R anel reduzido e $\langle p \rangle$ um ideal de R gerado por p . Então,*

- 1) $R/\langle p \rangle$ é primo se, e somente se, $\langle p \rangle$ é primo;
- 2) $R/\langle p \rangle$ é anel reduzido se, e somente se, $\langle p \rangle$ é radical;

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Mat89](#). □

1.7 Representação linear de grupos

Nessa seção definimos e enunciamos algumas propriedades de espaços vetoriais e representações de grupos.

Definição 1.36. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre \mathbb{C} , uma forma Hermitiana em V é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$,
- 2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$,
- 3) $\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$.

para todo $v, w, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Uma forma Hermitiana é positiva se:

- 4) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Seja V um espaço vetorial com base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dados $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ e $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, então

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \bar{u}_i, \quad (1.1)$$

defina uma forma Hermitiana positiva. Sempre usaremos este produto interno.

Dois vetores $v, u \in V$ são chamados *ortogonais* se $\langle v, u \rangle = 0$ e são chamados *ortonormais* se são ortogonais e $\langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle = 1$.

Definição 1.37. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, H subespaço vetorial de V . O complemento ortogonal de H em V é definido por H^\perp , onde

$$H^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \text{ para todo } w \in H\}.$$

Todo subespaço vetorial W de V com $\dim W = n - 1$ é chamado de hiperplano.

Definição 1.38. Seja V um espaço vetorial. Definimos

$$GL(V) = \{r : V \rightarrow V \mid r \text{ é isomorfismo de transformação linear}\},$$

dizemos que r é unitária se $\langle r(v), r(u) \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $v, u \in V$. Dado K um corpo, denotaremos $GL(n, K) = \{M \in M_{n,n}(K) \mid M \text{ é invertível}\}$.

Definição 1.39. Dado V espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{C} . Definimos

$$U(V) = \{r : V \rightarrow V \mid r \text{ é unitária}\}.$$

Observamos que $U(V)$ é um grupo com a composição de transformações lineares.

Definição 1.40. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão finita n . Dado $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear, definimos $\text{Fix}(T)$, denotado $\text{Fix } T$, como

$$\{v \in V \mid Tv = v\}.$$

Temos que $\text{Fix } T$ é um subespaço vetorial de V .

Definição 1.41. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $T : V \rightarrow V$ operador linear. Dizemos que T possui um adjunto se existir um operador linear $T^* : V \rightarrow V$ tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$, para todos $u, v \in V$.

Proposição 1.42. *Seja V um \mathbb{C} -espaço vetorial com forma Hermitiana positiva. Sejam T e S operadores lineares em V que admitem adjuntos T^* e S^* respectivamente e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então*

- 1) $T + S$ admite adjunto e $(T + S)^* = T^* + S^*$.
- 2) λT admite adjunto $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$.
- 3) $T \circ S$ admite adjunto e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.
- 4) T^* admite adjunto e $(T^*)^* = T$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrado em [\[CL01\]](#). □

Definição 1.43. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e T operador linear em V . Dizemos que T é normal se existir T^* e $T^* \circ T = T \circ T^*$.

Teorema 1.44. *Sejam V um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e T um operador linear em V . Então T será um operador linear normal se e somente se existir uma base ortonormal de V formada por autovetores de T .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrado em [\[CL01\]](#). □

Definição 1.45 (Espaço vetorial quociente). Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e W um subespaço vetorial de V . O espaço vetorial quociente V/W é definido pela relação de equivalência $v_1 \sim v_2$ se e somente se $v_1 - v_2 \in W$. Onde

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \{u \in V \mid u \sim v\} \\
 &= \{u \in V \mid u - v \in W\} \\
 &= \{u \in V \mid \text{existe } w \in W \text{ com } u - v = w\} \\
 &= \{v + w \mid w \in W\} \\
 &= v + W,
 \end{aligned}$$

$V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ e

- 1) $\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w}$, para $\bar{v}, \bar{w} \in V/W$.
- 2) $\lambda \bar{v} = \overline{\lambda v}$, para $\bar{v} \in V/W$ e $\lambda \in K$.

Definição 1.46. Considerando V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K e e_1, \dots, e_n a base canônica em V . Temos que a base dual x_1, \dots, x_n em V^* é definida pelas condições

$$x_i(e_j) = \delta_{ij}, \text{ onde } \delta_{ij} = 1, \text{ se } i = j \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}$$

Definição 1.47. Seja G um grupo e K um corpo. Uma representação linear de G é um homomorfismo de grupos

$$\phi : G \rightarrow GL(n, K)$$

onde n é chamado de grau da representação. Dizemos ainda que a representação é fiel se ϕ é injetora.

Exemplo 1.48. Tomando $n = 4$ na definição de grupo diedral temos um grupo de ordem 8. Tal grupo é dado por $D_8 = \langle r, s | r^4 = 1, s^2 = 1 \text{ e } (sr)^2 = 1 \rangle$.

Temos que

$$\phi_1 : D_8 \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$$

dada por $\phi_1(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\phi_1(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, define um monomorfismo de grupos. Agora, considere ϕ_2 dada por

$$\phi_2(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \phi_2(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que ϕ_2 não é um homomorfismo de grupos de D_8 para $GL_n(2, \mathbb{R})$, pois $(\phi_2(s)\phi_2(r))^2 \neq id$.

Temos também que ϕ_3 definida por

$$\phi_3(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \phi_3(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

não é um homomorfismo de grupos de D_8 para $GL_n(2, \mathbb{R})$. Basta observar que $\phi_3(s)^2 \neq id$.

1.8 Ações de grupos lineares

Nessa seção definimos uma ação de grupo linear e a álgebra gerada pelos invariantes de uma determinada ação, conceito que será usado durante grande parte desse texto. A referência geral é [\[Neu07\]](#).

Dado K corpo sabemos que K^n é um K -espaço vetorial. Por convenção, $v \in K^n$ é dado por $v = (v_1, \dots, v_n)$ e

$$v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Definição 1.49. Seja S um conjunto e G um grupo. Uma ação de G em S (à esquerda) é uma função

$$G \times S \rightarrow S, (g, s) \mapsto gs$$

tal que $es = s$ e $(gh)s = g(hs)$ para quaisquer $g, h \in G$ e $s \in S$.

Se G age em S e T , dizemos que uma função $f : S \rightarrow T$ preserva a ação de G se

$$f(gs) = gf(s), \text{ para quaisquer } s \in S, g \in G.$$

Definição 1.50 (Ação de grupo linear). Sejam K um corpo e G grupo finito. Dada uma representação linear $\rho : G \rightarrow GL(n, K)$ definimos uma ação linear de G em K^n como

$$G \times K^n \rightarrow K^n, (g, v) \mapsto g \cdot v := \rho(g)v^T, \text{ para todo } g \in G \text{ e } v \in K^n.$$

Considerando e_1, \dots, e_n base canônica de K^n e x_1, \dots, x_n sua base dual. Definimos a ação de G em x_1, \dots, x_n por

$$gx_i(e_j) := x_i(g^{-1} \cdot e_j), \text{ para todos } i, j.$$

Observação 1.51. Sempre que for subentendido a ação linear de G em um espaço vetorial V de dimensão finita, iremos denotar $g \cdot v$ apenas por gv , para quaisquer $g \in G$ e $v \in V$.

Anéis de invariantes

Ao longo dessa subseção iremos considerar V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K qualquer e G um grupo finito com uma representação $\rho : G \rightarrow GL(n, K)$ agindo em V . Sejam e_1, \dots, e_n base canônica de V e x_1, \dots, x_n sua base dual. Pela Definição 1.50 podemos estender a ação de G em V para uma ação em V^* .

Denotaremos $K[V] = K[x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios em n indeterminadas x_1, \dots, x_n sobre K . Um monômio é escrito como

$$\mathbf{x}^I = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

para $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Um polinômio $f \in K[V]$ é escrito como uma soma finita

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_I a_I \mathbf{x}^I.$$

Definiremos uma ação de G nos monômios da forma

$$g \cdot (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) = ((g \cdot x_1)^{i_1} \cdots (g \cdot x_n)^{i_n}).$$

Então a ação de g em qualquer polinômio $f \in K[V]$ é dada por

$$g \cdot f = g \cdot \left(\sum_I a_I \mathbf{x}^I \right) = \sum_I a_I g \cdot (\mathbf{x}^I).$$

Ou seja, temos

$$gf(v) = f(\rho(g)^{-1}v), \text{ para todos } g \in G, v \in V \text{ e } f \in K[V].$$

Definição 1.52. Dado V um espaço vetorial e G grupo agindo em V . Dizemos que $f \in K[V]$ é invariante sob a ação de G se

$$gf = f, \text{ para qualquer } g \in G.$$

Denotamos $K[V]^G$ o conjunto dos polinômios em $K[V]$ que são invariantes por G .

Exemplo 1.53. Considere $\langle s \rangle$ subgrupo de D_{2n} e uma representação em $GL(2, \mathbb{C})$ pode ser dada da seguinte forma:

$$\tilde{\phi} : \langle s \rangle \rightarrow GL(2, \mathbb{C}),$$

onde

$$\tilde{\phi}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $s \cdot x(a, b) = x(\tilde{\phi}^{-1}(s)(a, b)^T) = x(b, a) = b = y(a, b)$. De modo análogo, $s \cdot y(a, b) = a = x(a, b)$.

Proposição 1.54. *O conjunto $K[V]^G \subseteq K[V]$ forma uma K -subálgebra de $K[V]$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrado em [\[Neu07\]](#). □

1.9 Geometria analítica complexa e feixes

As referências gerais para essa seção são [\[DJP13\]](#), [\[Ten75\]](#), [\[Har13\]](#) e [\[Vak17\]](#).

Definição 1.55. Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe \mathcal{F} de anéis em X consiste dos seguintes:

- 1) Para cada aberto U de X associamos um anel $\mathcal{F}(U)$ e se $U = \emptyset$ então $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. $s \in \mathcal{F}(U)$ é chamado de seção de \mathcal{F} e se $s \in \mathcal{F}(X)$ então s é chamado de seção global
- 2) Para cada $V \subseteq U$ temos um homomorfismo de anéis $p_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ de modo que $p_{UU} = id$ e se $W \subseteq V \subseteq U$ então $p_{UW} = p_{VW} \circ p_{UV}$. No geral, denotamos $p_{UW}(s) = s|_W$.

Exemplo 1.56. Dados X espaço topológico e U aberto de X definimos o pré-feixe:

$$\mathcal{C}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua} \},$$

onde dado $V \subset U$ definimos p_{UV} como a restrição usual.

Definição 1.57. Seja X um espaço topológico. Um pré-feixe \mathcal{F} de anéis em X é chamado feixe se satisfaz

- 1) Dados U aberto em X e $\mathcal{A} = \{V_i\}_{i \in \Sigma}$ cobertura de U . Seja $s \in \mathcal{F}(U)$ se $s|_{V_i} = 0$, para todo i então $s = 0$.
- 2) Considere ainda $\mathcal{A} = \{V_i\}_{i \in \Sigma}$ cobertura de U . Sejam $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$, para todo i .

Exemplo 1.58. Dados aberto X de \mathbb{C}^n e $U \subseteq X$ aberto. Definimos o feixe

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa em } U \},$$

onde dado $V \subseteq U$ definimos p_{UV} como a restrição usual. É conhecido que \mathcal{O}_X é um feixe.

Definição 1.59. Dados X espaço topológico e \mathcal{F}, \mathcal{G} feixes de anéis em X . Definimos

- 1) \mathcal{F} é sub-feixe de \mathcal{G} se para todo aberto U de X temos $\mathcal{F}(U)$ é subanel $\mathcal{G}(U)$.
- 2) Se \mathcal{F} é sub-feixe de \mathcal{G} . Então, o feixe quociente de \mathcal{F} sobre \mathcal{G} é dado por: para cada U aberto de X considere o anel quociente $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$.

Definição 1.60 (Stalk). Seja X um espaço topológico e \mathcal{F} feixe em X . Dado $p \in X$, definimos

$$\mathcal{F}_p = \lim_{U \ni p} \mathcal{F}(U) / \sim$$

onde $s \in \mathcal{F}(U) \sim_p r \in \mathcal{F}(V)$ se e somente se existe $W \subseteq U \cap V$, com $p \in W$, de modo que $s|_W = r|_W$.

Definição 1.61. Seja $f : X \rightarrow Y$ função contínua entre espaços topológicos. Dado \mathcal{G} feixe de Y definimos em X um feixe $f^*\mathcal{G}$ dado por: Para cada aberto U em X

$$U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V).$$

Temos que $f^*\mathcal{G}$ é um feixe em X .

Proposição 1.62. Seja $f : X \rightarrow Y$ função contínua entre espaços topológicos. Dado \mathcal{G} feixe de Y então dado $p \in X$ temos $f^*\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_{f(p)}$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [\[DJP13\]](#) e [\[Ten75\]](#). □

Definição 1.63. Sejam X espaço topológico e \mathcal{O}_X um feixe em X definimos um espaço anelado como o par (X, \mathcal{O}_X) . É usual denotar $X := (X, \mathcal{O}_X)$.

Um feixe \mathcal{F} em X é um \mathcal{O}_X -módulo se para cada aberto U de X temos que $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo de modo que as restrições $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ são homomorfismos de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos.

Um feixe J de \mathcal{O}_X -módulo que é um subfeixe de \mathcal{O}_X é chamado de feixe de ideais. Definimos $V(J) := \text{supp}(\mathcal{O}_X/J) = \{x \in X \mid J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$.

Em particular, dado $X \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto. Consideramos

$$h_1, \dots, h_k \in \mathcal{O}_X(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa}\}$$

e temos um feixe de ideais dado por $\langle h_1, \dots, h_k \rangle$. Onde, dado $U \subseteq X$ aberto definimos

$$\langle h_1, \dots, h_k \rangle(U) := \langle h_{1|U}, \dots, h_{k|U} \rangle,$$

é um ideal. Dado $p \in X$ temos

$$\langle h_1, \dots, h_k \rangle_p := \langle h_{1,p}, \dots, h_{k,p} \rangle,$$

onde $h_{1,p}, \dots, h_{k,p} \in \mathcal{O}_{X,p}$.

Definição 1.64. Sejam (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) espaços anelados. Um morfismo de espaços anelados é um par

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

onde $f : X \rightarrow Y$ é função contínua e $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X f^{-1}$ é um homomorfismo de \mathcal{O}_Y -módulo. Dizemos que $(f, f^\#)$ é isomorfismo se f é homeomorfismo e $f^\#$ é isomorfismo de \mathcal{O}_Y -módulo.

Definição 1.65 (Espaço complexo modelo). Seja $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e f_1, \dots, f_k aplicações holomorfas definidas em U . Considere $X := V(f_1, \dots, f_k)$, $V \subseteq U$ aberto e o pré-feixe $\mathcal{O}_X(V \cap X) := \frac{\mathcal{O}(V)}{\langle f_1, \dots, f_k \rangle \mathcal{O}(V)}$ em X . O espaço anelado definido por $(V, \mathcal{O}_{V \cap X})$ é chamado de espaço complexo modelo.

Definição 1.66 (Espaço complexo). Seja X um espaço de Hausdorff. (X, \mathcal{O}_X) é chamado de espaço complexo se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança U tal que $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ é isomórfico a (V, \mathcal{O}_V) , onde (V, \mathcal{O}_V) é um espaço de modelo complexo. Onde $i : U \hookrightarrow X$ e $\mathcal{O}_U = i^* \mathcal{O}_X$.

Se (X, \mathcal{O}_X) é um espaço complexo então, por abuso de notação, denotamos $X = (X, \mathcal{O}_X)$.

Observação 1.67 (Feixe de ideais ao longo da diagonal). Seja Y uma variedade complexa. Dada cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ consideramos

$$Y \times Y = \bigcup_\alpha (V_\alpha \times V_\alpha) \cup ((Y \times Y) \setminus \Delta Y).$$

Iremos definir um feixe de ideais $\mathcal{I}_{\Delta Y}$ em $\mathcal{O}_{Y \times Y}$ de modo que $V(\mathcal{I}_{\Delta Y}) = \Delta Y$. Pela definição de $Y \times Y$ dada acima, temos que definir dois feixes de ideais nos abertos da diagonal e fora da diagonal.

Consideremos o ideal $J = \mathcal{O}_{Y \times Y \setminus \Delta Y}$ e, para cada α , $J_\alpha = \langle y_{j,\alpha} - y'_{j,\alpha} \mid j = 1, \dots, p \rangle$ feixe de ideais em $\mathcal{O}_{V_\alpha \times V_\alpha}$, com $y_\alpha = y_{1,\alpha}, \dots, y_{p,\alpha}$ e $y'_\alpha = y'_{1,\alpha}, \dots, y'_{p,\alpha}$ sistemas de coordenadas em V_α . Precisamos mostrar que esse feixe é bem definido, ou seja, que o feixe independe da escolha de qual feixe estamos. Mais precisamente, dado uma vizinhança da forma $V_\alpha \times V_\alpha$ do ponto (y_1, y_2) , com $y_1 \neq y_2$ mostremos que

$$\mathcal{O}_{V_\alpha \times V_\alpha, (y_1, y_2)} \cong \mathcal{O}_{Y \times Y \setminus \Delta Y, (y_1, y_2)}.$$

A Proposição [1.68](#) nos dará uma maneira de fazer isso.

Proposição 1.68 (Gluing Sheaves). *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in \Sigma}$ cobertura de X . Para cada i seja \mathcal{F}_i feixe em U_i e $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ isomorfismos tais que*

- 1) $\phi_{ii} = \text{identidade}$,
- 2) $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Então existe um único feixe \mathcal{F} em X e isomorfismos $\lambda_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}_i$ tal que para todo $i, j, \phi_{ij} \circ \lambda_i = \lambda_j$ em $U_i \cap U_j$. \mathcal{F} é definido como:

$$\mathcal{F}(V) := \left\{ \{s_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in J} \mathcal{F}_i(U_i \cap V) \mid \phi_{ij}(s_i|_{U_i \cap U_j \cap V}) = s_j|_{U_i \cap U_j \cap V} \right\}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [DJP13]. \square

Observação 1.69. Mostremos que o feixe de ideais definido na Observação 1.67 é bem definido. Dado $y \in (U_\alpha \times U_\alpha) \cap (U_\beta \times U_\beta)$ temos que

$$\mathcal{O}_{U_\alpha \times U_\alpha, y} = (\mathcal{O}_{Y \times Y, y} / \langle y_{j, \alpha} - y'_{j, \alpha} \mid j = 1, \dots, p \rangle_y) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}.$$

Pois, J_α é definido por equações irredutíveis. Então,

$$(\mathcal{O}_{Y \times Y, y} / \langle y_{j, \alpha} - y'_{j, \alpha} \mid j = 1, \dots, p \rangle_y) \cong (\mathcal{O}_{Y \times Y, y} / \langle y_{j, \beta} - y'_{j, \beta} \mid j = 1, \dots, p \rangle_y).$$

Dado $U_\alpha \times U_\alpha$ temos $U_\alpha \times U_\alpha \cap (Y \times Y \setminus \Delta Y) = U_\alpha \times U_\alpha \setminus \Delta Y$. Então, dado $y \in U_\alpha \times U_\alpha \setminus \Delta Y$ temos

$$\mathcal{O}_{(U_\alpha \times U_\alpha \setminus \Delta Y), y} \cong \mathcal{O}_{(Y \times Y \setminus \Delta Y), y}.$$

Então, com o enunciado da Proposição 1.68 é suficiente tomarmos $\phi_{ij} = id$, para quaisquer i, j . Portanto, o feixe de ideais $\mathcal{I}_{\Delta Y}$ é bem definido.

Proposição 1.70. *Seja X espaço complexo e \mathcal{I} e \mathcal{J} feixes de ideais em X . Existe um feixe $(\mathcal{I} : \mathcal{J})$ de ideais em X tal que $\mathcal{I}_p : \mathcal{J}_p = (\mathcal{I} : \mathcal{J})_p$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [DJP13]. \square

Definição 1.71. Dado $X \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e U aberto em X . Considere o feixe de ideais

$$\langle h_1, \dots, h_k \rangle.$$

$V(J)$ é, por definição, um espaço complexo, isto é $V(J) = (V(J), \mathcal{O}_X/J|_{V(J)})$. Pela Proposição 1.62 temos que dado $x \in V(J)$ então $V(J)_x = (V(J)_x, \mathcal{O}_{X,x}/J_x)$.

Observação 1.72. Dado $X \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{O}_X(X)$. Considere o feixe de ideais J gerado por h_1, \dots, h_k . Então,

$$V(J) = \{x \in X \mid h_i(x) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq k\}.$$

De fato,

$$x \in V(J) \Leftrightarrow J_x \neq \mathcal{O}_{X,x} \Leftrightarrow J_x \subseteq \mathcal{M}_{X,x},$$

onde $\mathcal{M}_{X,x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$. É sabido que $\mathcal{M}_{X,x}$ é ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Definição 1.73. Um espaço complexo X é chamado Cohen-Macaulay se para todo $x \in X$ temos que $\mathcal{O}_{X,x}$ é anel Cohen-Macaulay.

Definição 1.74. Seja X um espaço complexo. Dizemos que X é reduzido em x se o anel $\mathcal{O}_{X,x}$ é reduzido. X é reduzido se for reduzido em todos seus pontos.

Definição 1.75. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é genericamente reduzido se existe um aberto denso U de X de modo que X é reduzido em U . Isto é, para todo $x \in U$ temos que o anel $\mathcal{O}_{X,x}$ é reduzido.

Definição 1.76. Um espaço complexo $X = (X, \mathcal{O}_X)$ é regular em um ponto $x \in X$ se existe $r \in \mathbb{N}$ de modo que $\mathcal{O}_{X,x}$ possui um isomorfismo de anéis com $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^r,0}$. Dizemos que X é um espaço complexo regular se X for regular em todos seus pontos. Denotamos por $Sing(X)$ os pontos $x \in X$ tais que X não é regular em x .

Observação 1.77. Se X é um espaço complexo regular então X é reduzido. Segue diretamente da definição.

Proposição 1.78 (Critério Jacobiano). *Seja X espaço complexo da forma $X = V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$, com $I = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$. Seja $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}$ a matriz $n \times k$ e seja J o ideal gerado pelos maximais menores de M . Então, o conjunto dos pontos singulares de X , é dado por*

$$Sing(X) = V(I + J).$$

Demonstração. Pode ser encontrado em [\[DJP13\]](#). □

Corolário 1.79. *Com a mesma notação da Proposição [1.78](#). Se as aplicações h_1, \dots, h_k definem uma submersão então X é regular.*

Demonstração. Segue do fato que $V(J) = \emptyset$ e $Sing(X) = V(I + J) = V(I) \cap V(J) = \emptyset$. Então X é regular. □

Proposição 1.80. *Dado $X \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e U aberto em X . Considere o feixe de ideais*

$$J = \langle h_1, \dots, h_k \rangle,$$

para $h_i \in \mathcal{O}_X(X)$. Se \mathcal{O}_X é reduzido então:

O espaço complexo $V(J)$ é reduzido em x se e somente se J_x é ideal radical.

Demonstração. Temos que $\mathcal{O}_{X,x}/J_x$ é reduzido se e somente se $J_x = \sqrt{J_x}$. Ou seja, J_x é ideal radical. □

Proposição 1.81. *Se um espaço complexo X é genericamente reduzido e Cohen-Macaulay então é reduzido.*

Demonstração. Não faremos a demonstração pois precisamos definir conceitos auxiliares que fogem do nosso propósito. No entanto, a demonstração pode ser obtida a partir do exercício 7.7.6, Proposição 4.3.2 e Corolário 4.3.2 de [\[DJP13\]](#). □

Definição 1.82. Seja X um espaço complexo em \mathbb{C}^n . Dizemos que X é de interseção completa se o ideal $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ que gera X é uma sequência regular de \mathcal{O}_n .

Proposição 1.83. *Seja X um espaço complexo em \mathbb{C}^n . Se X é de interseção completa então X é um espaço complexo de Cohen-Macaulay.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [\[DJP13\]](#). □

Capítulo 2

Grupos de reflexão

Neste capítulo apresentaremos os conceitos fundamentais que serão usados ao longo de todo o texto: reflexões e aplicação órbita.

Todas as demonstrações e observações apresentadas foram feitas com a intenção de facilitar ao leitor o entendimento desse capítulo.

Todo espaço vetorial V deste e dos próximos capítulos, a menos que dito o contrário, serão espaços vetoriais de dimensão finita sobre \mathbb{C} com o produto interno definido na Seção [L.7](#).

2.1 Grupos de reflexões

Apresentaremos nessa seção propriedades das reflexões.

Definição 2.1. Seja V espaço vetorial de dimensão n . Uma reflexão em V é um operador linear $r : V \rightarrow V$, satisfazendo:

- 1) r é unitária,
- 2) r tem ordem finita,
- 3) $\dim \text{Fix } r = \dim V - 1$.

Denotamos por $H_r = \text{Fix } r$. Chamaremos H_r de hiperplano definido por r .

Observação 2.2. Apresentamos alguns resultados sobre as reflexões que serão úteis ao longo do texto.

- 1) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e r é uma reflexão em V então r pode ser representada por uma matriz diagonal com respeito a uma determinada base.

De fato, considere $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ base de V de modo que os vetores $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ gerem o espaço $\text{Fix } r$. Então, r é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

para alguns $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Supondo que a ordem de r é m então

$$r^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1(1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^{m-1}) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_2(1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^{m-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n-1}(1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^{m-1}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} = id.$$

Ou seja, devemos resolver as equações:

$$\begin{aligned} \lambda_j(1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^{m-1}) &= 0, \text{ para } 1 \leq j \leq n-1, \\ \lambda_n^m &= 1. \end{aligned}$$

Essas equações são satisfeitas quando λ_n é uma raiz m -ésima da unidade. Pois, nesse caso $1 + \lambda_n + \dots + \lambda_n^{m-1} = 0$ e $\lambda_j \in \mathbb{C}$, para $1 \leq j \leq n-1$, são quaisquer.

Todavia, temos que r é diagonalizável. Isto é, existem matrizes s, s^{-1} de modo que $s^{-1}rs = \tilde{r}$, onde \tilde{r} é uma matriz diagonal. Tomando

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{-\lambda_{n-1}}{\lambda_n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \frac{-\lambda_{n-2}}{\lambda_n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-\lambda_1}{\lambda_n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{\lambda_1}{\lambda_n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, r é diagonalizável com matriz diagonal

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- 2) Considere β a base de modo que r seja diagonal. Então, r admite adjunto r^* . De fato, dados $u, v \in V$, temos que $ru = (u_1, \dots, u_{n-1}, \lambda_n u_n)_\beta$ e então

$$\langle ru, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \bar{v}_i + \lambda_n u_n \bar{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \bar{v}_i + u_n \overline{\lambda_n} v_n = \langle u, \bar{r}v \rangle.$$

Portanto, $r^* = \bar{r}$.

- 3) Como toda reflexão r admite adjunto r^* e dada uma raiz da unidade ξ temos que $\xi \bar{\xi} = 1$. Então, $rr^* = id = r^*r$. Portanto, r é normal. Além disso, o produto de duas reflexões r e s é também uma aplicação normal. De fato,

$$rs(rs)^* = rss^*r^* = rr^* = id.$$

Analogamente, $(rs)^*rs = id$. E portanto, rs é uma aplicação normal. A partir do Teorema [1.44](#) podemos concluir que rs é diagonalizável. Ou seja, V possui uma base de autovetores ortonormais de rs .

- 4) Observamos que a condição $\dim H_r = \dim V - 1$ é equivalente a condição $\dim \ker(id - r) = n - 1$ e então $\dim \text{Im}(id - r) = 1$. Dada uma reflexão r em V , se $a \in H_r^\perp$ então $r(v) = v - \alpha a$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Deve ficar subentendido que α depende de $v \in V$, mas para facilitar a notação não denotaremos α como α_v .
- 5) No geral, se $r = r_1 \cdots r_n$ onde r_i são reflexões e cada uma determina um hiperplano $H_i := H_{r_i}$ com $a_i \in H_i^\perp$. Temos que dado $v \in V$

$$\begin{aligned} r(v) &= r_1 \cdots r_n(v) = r_1 \cdots r_{n-1}(v - \alpha_{n,v} a_n) \\ &= r_1 \cdots r_{n-1}(v) - \alpha_{n,v} (r_1 \cdots r_{n-1}(a_n)) \\ &= r_1 \cdots r_{n-2}(v - \alpha_{n-1,v} a_{n-1}) + \alpha_{n,v} (r_1 \cdots r_{n-2}(a_n - \alpha_{n-1,a_n} a_{n-1})) \\ &\quad \vdots \\ &= v - (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n), \end{aligned}$$

para determinados $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

- 6) Dado um hiperplano H em V , podemos tomar um funcional $L(v) = \langle v, a \rangle$, onde $a \in H^\perp$ e então $\ker L = H$. Temos que L é única a menos de múltiplos.

Se a_1, \dots, a_n são vetores l.i em V então os funcionais L_1, \dots, L_n , onde $L_i(v) = \langle v, a_i \rangle$, são l.i. De fato, considere

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(v) = 0, \text{ para quaisquer } \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ e } v \in V. \quad (2.1)$$

Tomando $v = a_1$ em [2.1](#) temos $\alpha_1 L_1(a_1) = \alpha_1 \langle a_1, a_1 \rangle = 0$ e como $a_1 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Então, a equação [2.1](#) fica

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i L_i(v) = 0, \text{ para quaisquer } \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ e } v \in V.$$

E repetindo esse processo n vezes temos que todos os α_i são nulos. Obtendo o resultado.

Exemplo 2.3. Considere $r : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{m}} \end{pmatrix}.$$

Temos que r é unitária. De fato, dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em \mathbb{C}^2 , como $e^{\frac{2\pi i}{m}} e^{-\frac{2\pi i}{m}} = 1$, então:

$$\begin{aligned} \langle r(x_1, y_1), r(x_2, y_2) \rangle &= \langle (e^{\frac{2\pi i}{m}} x_1, e^{-\frac{2\pi i}{m}} y_1), (e^{\frac{2\pi i}{m}} x_2, e^{-\frac{2\pi i}{m}} y_2) \rangle \\ &= e^{\frac{2\pi i}{m}} x_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{m}} x_2 + e^{-\frac{2\pi i}{m}} y_1 \cdot e^{-\frac{2\pi i}{m}} y_2 \\ &= e^{\frac{2\pi i}{m}} e^{\frac{2\pi i}{m}} x_1 x_2 + e^{-\frac{2\pi i}{m}} e^{-\frac{2\pi i}{m}} y_1 y_2 \\ &= x_1 \overline{x_2} + y_1 \overline{y_2} \\ &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, r é unitária. Mas r não é uma reflexão, pois $\text{Fix } r = \{(0, 0)\}$.

Definição 2.4. Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um subgrupo G de $U(V)$ é um grupo de reflexões se

- 1) G é finito e
- 2) para todo $g \in G$ temos que $g = r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}$, onde r_i é uma reflexão de ordem $m_i \in \mathbb{Z}_+$ e $k_i \leq m_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observação 2.5. 1) O produto de duas reflexões não é necessariamente uma reflexão.

Considere r como no Exemplo [2.3](#)

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{m}} \end{pmatrix}.$$

Temos que $\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{m}} \end{pmatrix}$ são reflexões mas r não é.

Observamos que a reflexão $I = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $m \geq 3$, é tal que I e I^2 definem o mesmo hiperplano $\langle (0, 1) \rangle$ em \mathbb{C}^2 . Portanto, nem todo hiperplano é unicamente definido por uma reflexão.

- 2) Pelo item 3) da Observação [2.2](#) todo elemento de G é diagonalizável.

Proposição 2.6. *Sejam V espaço vetorial, G grupo de reflexões em V e r reflexão de ordem m . Então, $\text{Im}(id - r) = \text{Im}(id - r^k)$ e $\text{ker}(id - r) = \text{ker}(id - r^k)$, para $k < m$.*

Demonstração. A igualdade $\text{Im}(id - r) = \text{Im}(id - r^k)$ segue diretamente do item 5) da Observação 2.2 e $\ker(id - r) \subseteq \ker(id - r^k)$ segue diretamente. Como $\ker(id - r) \subseteq \ker(id - r^k)$ possuem a mesma dimensão, pois $\dim(\text{Im}(id - r)) + \dim(\ker(id - r)) = n$ e $\text{Im}(id - r) = \text{Im}(id - r^k)$. Utilizando que ambos são espaços vetoriais o resultado segue. \square

Exemplo 2.7. Considere $s : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{m}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{m}} & 0 \end{pmatrix}.$$

s é uma reflexão com $\text{Fix } s = \langle (e^{\frac{2\pi i}{m}}, 1) \rangle$ e ordem 2.

Exemplo 2.8. Temos que uma representação para D_{2n} em $GL(2, \mathbb{C})$ pode ser dada da seguinte forma:

$$\phi : D_{2n} \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$$

onde

$$\phi(r) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}} \end{pmatrix} \text{ e } \phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\phi(s)$ é um reflexão de ordem 2 com hiperplano $\langle (1, 1) \rangle$. A matriz $\phi(r)$ não é uma reflexão pois representa uma rotação em \mathbb{C}^2 de ordem n , fixando apenas a origem. Todavia, temos que D_{2n} também pode ser gerado por s e rs , pois $(rs)(s) = r$. Ou seja, a representação pode ser gerada por $\phi(s)$ e

$$\phi(rs) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{n}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{n}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que a matriz $\phi(rs)$ é uma reflexão de ordem 2 fixando a reta gerada pelo vetor $(e^{-\frac{2\pi i}{m}}, 1)$.

Utilizando a mesma notação do Exemplo 2.8 e a Proposição 1.23, temos que D_{2n} pode ser gerado por

$$\phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \phi(rs) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{n}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{n}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, rs, r^2s, r^3s, \dots, r^{n-1}s\}.$$

Definição 2.9. Seja V um espaço vetorial. Considere G um grupo de reflexões com hiperplanos dados por H_1, \dots, H_l . Dados $a_i \in H_i^\perp$, para $i \in \{1, \dots, l\}$, definimos o posto de G como a dimensão do subespaço vetorial W de V gerado pelos a_i , para $i \in \{1, \dots, l\}$.

Observação 2.10. Dado um grupo de reflexões G agindo em V , pela Observação [2.2](#) temos que as reflexões de G são matrizes diagonais, com respeito a uma determinada base. Como cada reflexão age em apenas um subespaço vetorial de dimensão 1 obtemos que o posto de G nos dá informações sobre o tamanho do subespaço vetorial W em V ao qual G está agindo.

Exemplo 2.11. [*Grupo* Z_{m_1, \dots, m_k}] Definimos o grupo de reflexões Z_{m_1, \dots, m_k} agindo em \mathbb{C}^k da seguinte forma:

Para cada $a_i \in \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ considere o operador $i_{a_1, \dots, a_k} : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ cuja representação linear é definido por:

$$i_{a_1, \dots, a_k} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi a_1 i}{m_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi a_2 i}{m_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi a_3 i}{m_3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\frac{2\pi a_k i}{m_k}} \end{pmatrix}.$$

Temos que cada i_{a_1, \dots, a_k} é gerado pelas transformações $i_{a_1, 0, \dots, 0}, i_{0, a_2, \dots, 0}, \dots, i_{0, 0, \dots, a_k}$. Sendo que $\text{Fix } i_{0, \dots, a_j, \dots, 0} = \{v \in \mathbb{C}^k \mid v_j = 0\}$ e que cada $i_{0, \dots, a_j, \dots, 0}$ possui ordem m_j .

Definimos o grupo de reflexões Z_{m_1, \dots, m_k} como o grupo gerado pelas reflexões $i_{a_1, 0, \dots, 0}, i_{0, a_2, \dots, 0}, \dots, i_{0, 0, \dots, a_k}$.

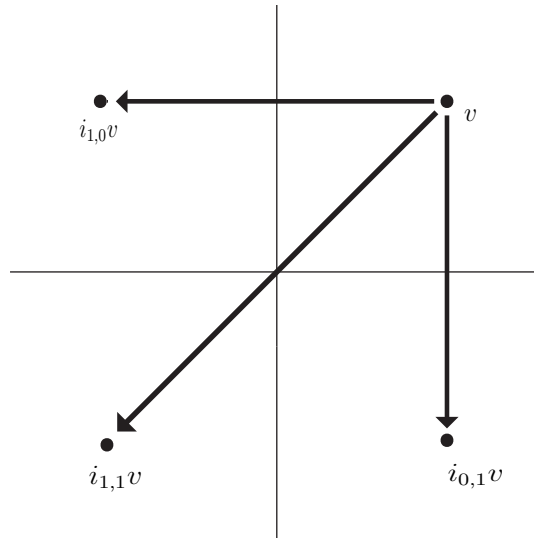


Figura 2.1: $Z_{2,2}$ agindo em \mathbb{C}^2

Definição 2.12. Seja G um grupo de reflexões agindo em V . Definimos o *arranjo* \mathcal{A} de G por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^k H_i,$$

onde H_1, \dots, H_k são todos os hiperplanos gerados pelas reflexões de G .

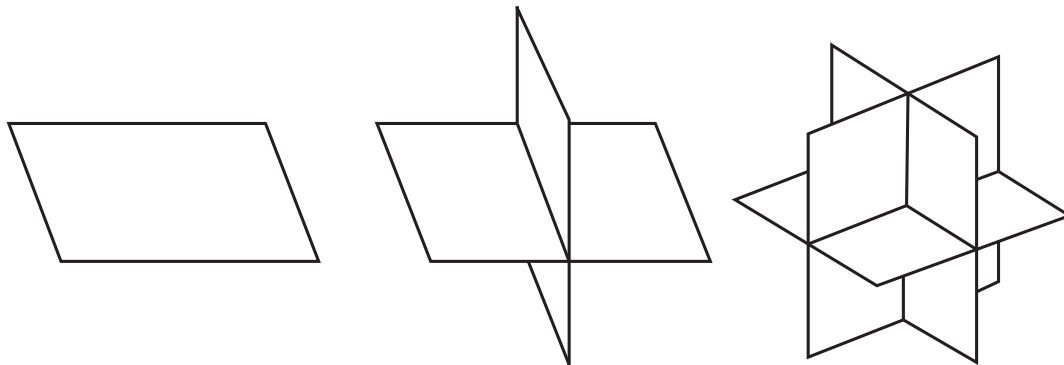


Figura 2.2: \mathcal{A} de $Z_{m_1,1,1}$, $Z_{m_1,m_2,1}$ e Z_{m_1,m_2,m_3} em \mathbb{C}^3

Proposição 2.13. *Sejam V espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V . Considere k o número de hiperplanos em V definidos por G . Dado $B \subseteq \{1, \dots, k\}$ então os conjuntos da forma $C_B = \{v \in V \mid v \in H_i \Leftrightarrow i \in B\}$ formam uma partição \mathcal{C} de V .*

Demonstração. De fato, dados $B, B' \subseteq \{1, \dots, k\}$ temos que $C_B \cap C_{B'} \neq \emptyset$ se, e somente se, existe $v \in V$ de modo que $v \in C_B \cap C_{B'}$, que ocorre, se, e somente se, $B = B'$ e então $C_B = C_{B'}$.

Se $v \in V$ é tal que $v \notin \mathcal{A}$ então $v \in C_\emptyset$. Se $v \in \mathcal{A}$ considere $X(v) = \bigcap_{v \in H_i} H_i$, temos então que $v \in C_B$, onde B contém todos os índices i de modo que $v \in H_i$. \square

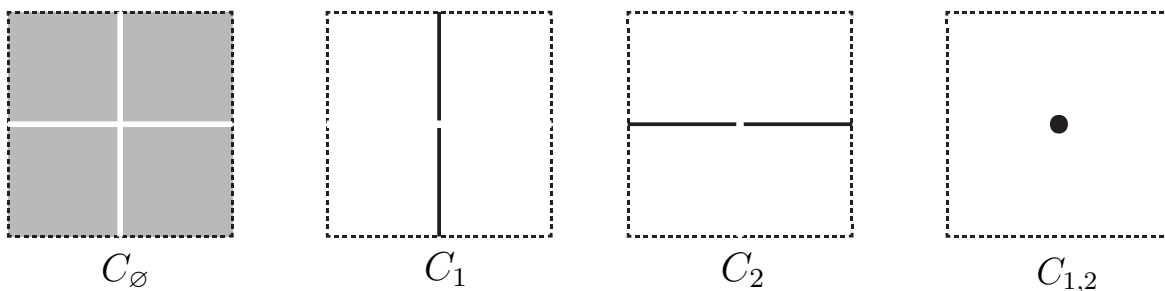


Figura 2.3: Faces determinadas pelo grupo de reflexões Z_{m_1,m_2} .

Definição 2.14. Dado V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V . A partição \mathcal{C} é chamada de *complexo* do grupo G e seus elementos C são chamados de faces. Denotaremos por $\langle C_B \rangle$ a interseção de todos os subespaços vetoriais contendo C_B .

Proposição 2.15. *Dado $C_B \in \mathcal{C}$, para algum $B \subseteq \{1, \dots, k\}$, então $\overline{C_B} = \langle C_B \rangle = \bigcap_{i \in B} H_i$.*

Em particular, temos que $\overline{C_B}$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração. Mostremos que $\overline{C_B} = \bigcap_{i \in B} H_i$. Como cada hiperplano H_i é fechado então qualquer interseção finita de hiperplanos é fechado. Então, por definição de fecho, temos $\overline{C_B} \subseteq \bigcap_{i \in B} H_i$. Dado $v \notin \overline{C_B}$ então $v \notin C_B$ e portanto, pela definição de C_B , $v \notin H_i$, para $i \in B$, ou seja, $v \notin \bigcap_{i \in B} H_i$. Portanto, $\overline{C_B} = \bigcap_{i \in B} H_i$.

Mostremos que $\langle C_B \rangle = \bigcap_{i \in B} H_i$. A inclusão $\langle C_B \rangle \subseteq \bigcap_{i \in B} H_i$ é clara, pois interseções quaisquer de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial. Como $C_B \subseteq \langle C_B \rangle$ então $\overline{C_B} \subseteq \overline{\langle C_B \rangle} = \langle C_B \rangle$. Como já sabemos que $\overline{C_B} = \bigcap_{i \in B} H_i$, obtemos que $\bigcap_{i \in B} H_i \subseteq \langle C_B \rangle$. \square

Observação 2.16. Dado V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V definindo os hiperplanos H_1, \dots, H_k . Dado $v \in V$, considere $X(v) = \bigcap_{v \in H_i} H_i$. Temos que a partição definida na Proposição 2.13 é dada pela relação de equivalência: Dados $v, u \in V$ temos que $v \sim u$ se, e somente se, $X(v) = X(u)$. Notamos que se $v \in V$ não pertence a nenhum hiperplano então $X(v) = \emptyset$.

Corolário 2.17. Dado V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V . A face $C \in \mathcal{C}$ que passa pela origem é fechado.

Demonstração. Sejam H_1, \dots, H_k todos os hiperplanos definidos por G . Como $0 \in C$ e cada hiperplano é um subespaço vetorial temos que $0 \in H_i$ para todo i e, portanto, $0 \in \bigcap_{i=1}^k H_i$. Dado $v \notin C$ então $X(0) \neq X(v)$, ou seja, existe pelo menos um hiperplano H_{i_0} de modo que $v \notin H_{i_0}$ e então $v \notin \bigcap_{i=1}^k H_i$. Portanto, $C = \bigcap_{i=1}^k H_i$ que implica que C é fechado. \square

Observação 2.18. Dado G grupo de reflexões agindo em \mathbb{C}^p , para algum p . A partir do Corolário 2.17, a face C que passa pela origem é a face definida por G de menor dimensão. E como mostraremos no exemplo a seguir é possível encontrar grupos G_i de modo que a face C_i que passa pela origem possuam variadas dimensões.

Exemplo 2.19. Considere \mathbb{C}^3 como \mathbb{C} espaço vetorial e os grupos $G_1 = Z_{m_1, m_2, m_3}$, $G_2 = Z_{m_1, m_2, 1}$ e $G_3 = Z_{m_1, 1, 1}$, para $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. Como já sabemos G_1 é gerado pelos elementos $i_{a_1, 0, 0}$, $i_{0, a_2, 0}$ e $i_{0, 0, a_3}$ com $a_i \leq m_i - 1$. Nesse caso, $\text{Fix } i_{a_1, 0, 0} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, $\text{Fix } i_{0, a_2, 0} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $\text{Fix } i_{0, 0, a_3} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$. Então a face que passa pela origem é dada apenas pela origem. E as outras faces de dimensão 1, como é apresentado na Figura 2.4 são:

$$C_{2,3} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \cap \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 0) \rangle \setminus \{(0, 0, 0)\}: \text{Face em azul};$$

$$C_{1,3} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \cap \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = \langle (0, 1, 0) \rangle \setminus \{(0, 0, 0)\}: \text{Face em amarelo};$$

$C_{1,2} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \cap \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \langle (0, 0, 1) \rangle \setminus \{(0, 0, 0)\}$: Face em verde.

A face que passa pela origem determinada por G_2 é dada pela interseção dos hiperplanos definidos por $\text{Fix } i_{a_1,0,0} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e $\text{Fix } i_{0,a_2,0} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$ então ela é gerada por $\langle (0, 0, 1) \rangle$. Portanto, possui dimensão 1.

Por fim, a face que passa pela origem definida por G_3 é dada pelo hiperplano $\text{Fix } i_{a_1,0,0} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ e então possui dimensão 2.

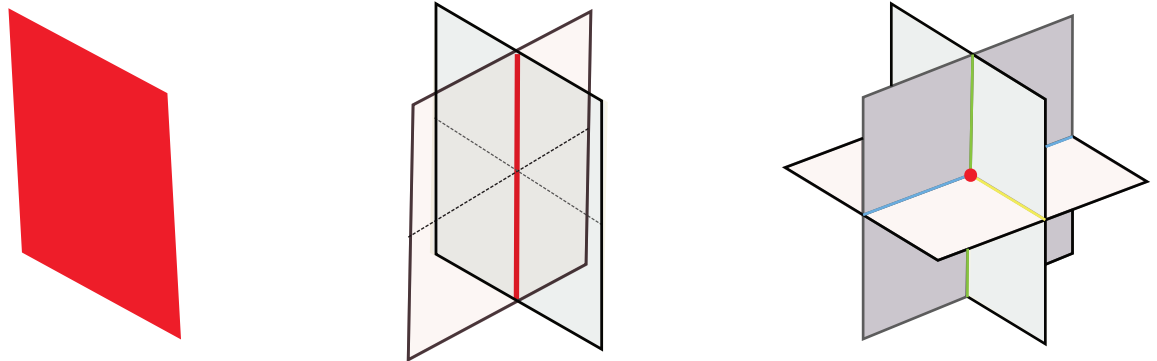


Figura 2.4: Faces que passam pela origem de $Z_{m_1,1,1}$, $Z_{m_1,m_2,1}$ e Z_{m_1,m_2,m_3} em \mathbb{C}^3 , respectivamente

Proposição 2.20. *Dado V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V . Se $C \in \mathcal{C}$ é a face que passa pela origem então*

$$\dim\langle C \rangle + \text{posto } G = n.$$

Em particular, $\dim\langle C^\perp \rangle = \text{posto } G$.

Demonstração. Sejam H_1, \dots, H_k todos os hiperplanos determinados por G em V e $a_i \in H_i^\perp$. Como C é a face que passa pela origem então $\langle C \rangle = \bigcap_{i=1}^k H_i$. Considerando $v \in \langle C \rangle$ e

$w \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ temos $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$, logo

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, v \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle a_i, v \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois, $\langle a_i, v \rangle = 0$ para todo i . Portanto, $\langle C \rangle \subseteq \langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp$. Dado $v \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp$ então $v \in \langle a_i \rangle^\perp$, o que implica que $v \in H_i$, para todo i . Ou seja, $v \in \langle C \rangle$ e então $\langle C \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp$. Como $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \oplus \langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp = V$ com posto $G = \dim \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, obtemos o resultado. \square

O próximo Teorema será importante para concluirmos alguns resultados. Definiremos o item 3) na Seção 2.3. A demonstração foge dos nossos propósitos e poderá ser consultada em [LT09].

Teorema 2.21. *Seja V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V e $v \in V$. Os seguintes números são iguais:*

- 1) $\dim X(v)$;
- 2) $\min\{\dim \text{Fix } g \mid g \in G_v\}$, onde $G_v = \{g \in G \mid gv = v\}$;
- 3) posto $\text{Jac}(\omega)$ no ponto v .

Proposição 2.22. *Sejam V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões agindo em V . Para toda face $C \in \mathcal{C}$, existe um elemento $g \in G$, tal que $\text{Fix } g = \langle C \rangle$.*

Demonstração. Considere H_1, \dots, H_k todos os hiperplanos de V definidos por G , onde cada H_i é hiperplano de r_i . Dado $C \in \mathcal{C}$, então existe $B \subseteq \{1, \dots, k\}$ com $C = C_B$. Pela Proposição 2.15, $\langle C_B \rangle = \bigcap_{i \in B} H_i = X(v)$, para qualquer $v \in C_B$. Após uma reordenação,

caso necessário, podemos considerar que $\langle C_B \rangle = \bigcap_{i=1}^n H_i$, onde $n \leq k$. Se $v \in \text{Fix}(r_1 \cdots r_n)$, então $r_1 \cdots r_n(v) = v$ e como r_1 tem ordem finita, temos $r_2 \cdots r_n(v) = r_1^{-1}(v)$. Todavia, como $r_1^{-1}(v) \in \text{Im}(r_2 \cdots r_n)$ e $r_2 \cdots r_n(v) \in \text{Im}(r_1^{-1})$, pela Proposição 2.6 temos $\text{Im}(r_i) = \text{Im}(r_i^{-1})$ e pelo item 5) da Observação 2.2, temos:

$$v + \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i = v + \alpha_1 a_1. \quad (2.2)$$

Suponha que $\alpha_1 \neq 0$, então na equação 2.2, obtemos $\sum_{i=2}^n \beta_i a_i = a_1$, onde $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1}$. Temos então

$$\begin{aligned} L_1(v) &= \langle v, a_1 \rangle \\ &= \left\langle v, \sum_{i=2}^n \beta_i a_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=2}^n \overline{\beta_i} \langle v, a_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^n \overline{\beta_i} L_i(v). \end{aligned}$$

O que não ocorre, pois os funcionais L_1, \dots, L_n são l.i. Então obtemos $\alpha_1 = 0$ e $r_1^{-1}v = v$. Ou seja, $r_2, \dots, r_n(v) = r_1^{-1}(v) = v$ e utilizando que r_2 possui ordem finita temos $r_3 \cdots r_n(v) = r_2^{-1}(v)$. Repetindo esse processo, temos $r_i v = v$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e daí $v \in \bigcap_{i=1}^n H_i$. Com isso, dados $v, w \in \text{Fix}(r_1 \cdots r_n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, obtemos que $\lambda v + w \in \text{Fix}(r_1 \cdots r_n)$ e como $r_1 \cdots r_n(\lambda v + w) = \lambda r_1 \cdots r_n(v) + r_1 \cdots r_n(w)$ implica em $\lambda v + w \in \bigcap_{i=1}^n H_i$. Então, $\text{Fix}(r_1 \cdots r_n)$ é um subespaço vetorial de $\bigcap_{i=1}^n H_i$.

Dado $v \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ então $r_1 \cdots r_n \in G_v$. Utilizando o Teorema 2.21 temos $\dim \text{Fix}(r_1 \cdots r_n) \geq \dim \bigcap_{i=1}^n H_i$. Concluindo que $\text{Fix}(r_1 \cdots r_n) = \bigcap_{i=1}^n H_i$. \square

Observação 2.23. Pela construção dada na Proposição 2.22 temos que g é dado por $r_1 \cdots r_n$. Mas, claramente, g não é único. Isso é evidente após observamos que $\ker(id - r_j^{k_j}) = \ker(id - r_j)$, para todo $1 \leq k_j \leq m_j - 1$, onde m_j é a ordem da reflexão r_j .

Isto é, o elemento \tilde{g} dado por $r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}$, também satisfaz $\text{Fix } \tilde{g} = \langle C \rangle$.

Teorema 2.24 (Steinberg). *Seja G um grupo de reflexões agindo em V . Para qualquer subconjunto A de V , temos que*

$$G_A = \{g \in G \mid ga = a, \text{ para todo } a \in A\}$$

é um grupo de reflexões, gerado por reflexões em G cujo os hiperplanos de reflexão contém A .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Ste64. \square

Utilizaremos esse Teorema para obter o seguinte Corolário:

Corolário 2.25. *Seja V um espaço vetorial e G grupo de reflexões agindo em V . Então*

- 1) *Para todo $v \in V \setminus \mathcal{A}$, temos $G_v = id$.*
- 2) *Se $v \in V$ é tal que $v \in C$, para alguma face $C \in \mathcal{C}$, então $G_v = G_{\langle C \rangle}$.*

Demonstração. 1) Como $v \in V \setminus \mathcal{A}$ então $v \in C_\emptyset$. Em particular, $v \in \langle C_\emptyset \rangle$. Então, pela Proposição 2.22, existe $g \in G$ com $\text{Fix } g = \langle C_\emptyset \rangle = V$, então $g = id$.

- 2) Temos que $G_C \subseteq G_v$. De fato, dado $g \in G_C$ então $ga = a$, para todo $a \in C$. Em particular, $gv = v$ e daí $g \in G_v$.

Mostremos a outra inclusão. Tome r_1, \dots, r_n reflexões de G com H_i hiperplano de r_i contendo v que geram G_v com a ordem de r_j igual a $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Como $X(v) = \langle C \rangle$, então dado $w \in \langle C \rangle$, temos que $w \in H_i$, para $1 \leq i \leq n$. Então, pela Observação 2.23, $r(w) = w$, para qualquer r da forma $r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}$, com $1 \leq k_j \leq m_j - 1$. Portanto, $r \in G_{\langle C \rangle}$. \square

2.2 Polinômios invariantes por grupos de reflexões

Nessa seção apresentaremos resultados que nos darão todas as informações que precisamos sobre a álgebra dos invariantes $K[V]^G$, para um determinado grupo de reflexões. (Ver seção [1.8](#)).

Informações úteis sobre o tipo de polinômio que gera a álgebra $K[V]^G$ e qual a relação entre o grau dos polinômios geradores e o número de reflexões no grupo G . Para ilustrar o quão importante são esses resultados, iremos encontrar os geradores de $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$ de duas formas: A primeira, como é apresentada no Exemplo [2.31](#), é uma verificação direta de que $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}} = \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$ e a segunda é utilizando os resultados dessa seção, apresentado no Exemplo ??.

Os polinômios que geram a álgebra $K[V]^G$ serão importantes para definirmos uma aplicação a partir do grupo de reflexões G , chamada de aplicação órbita ω , cujas propriedades serão estudadas na próxima seção.

A seguir enunciaremos três resultados que serão importantes para o nosso trabalho, Teoremas [2.26](#), [2.28](#) e Proposição [2.29](#). As demonstrações fogem do propósito dessa dissertação. O leitor poderá encontrá-las em [\[LT09\]](#).

Teorema 2.26 (Hilbert-Noether). *Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e que G é um subgrupo finito de $GL(V)$. Então a álgebra $K[V]^G$ de invariantes é finitamente gerada.*

Definição 2.27. *Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e que G é um subgrupo finito de $GL(V)$. Os geradores da álgebra $K[V]^G$ são chamados de invariantes básicos de G .*

Teorema 2.28 (Shephard-Todd). *Se G é um grupo finito de reflexões sobre um espaço V de dimensão n , então o anel $K[V]^G$ de polinômios G -invariantes é uma álgebra polinomial. Ou seja, é gerado por uma coleção de polinômios homogêneos e algebricamente independentes.*

Proposição 2.29. *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão n e G um grupo de reflexões agindo em V e $\{I_1, \dots, I_r\}$ um conjunto de invariantes básicos de G , então $r = n$ e o grau de cada polinômio I_j é unicamente determinado por G .*

Observação 2.30. Com o Teorema [2.26](#) obtemos a primeira informação importante: A álgebra $K[V]^G$ é finitamente gerada. Isso ocorre para G subgrupo finito de $GL(V)$. Porém, não temos nenhuma informação sobre os geradores.

Essa informação, no caso em que G é um grupo de reflexões, é dada pelo Teorema [2.28](#): os geradores da álgebra $K[V]^G$ são homogêneos e algebricamente independentes. Porém, não temos nenhuma informação sobre a quantidade de geradores.

Essa questão é respondida pela Proposição [2.29](#), em que, temos que o número de invariantes é o mesmo que a dimensão de V .

No próximo exemplo mostraremos explicitamente como encontrar os invariantes para o grupo Diedral D_{2n} :

Exemplo 2.31 (Invariantes de reflexão do grupo diedral D_{2n} em \mathbb{C}^2). Considere a representação de D_{2n} em $GL(2, \mathbb{C})$ que foi dada no Exemplo 2.8. Considere a ação de D_{2n} em \mathbb{C}^2 temos então uma ação de D_{2n} induzida em $\mathbb{C}[x, y]$. Vejamos a ação de D_{2n} nos elementos x e y .

Temos que $s \cdot x(a, b) = x(\phi(s)^{-1}(a, b)^T) = x(b, a) = b = y(a, b)$. De modo análogo, $s \cdot y(a, b) = a = x(a, b)$. Agora,

$$rs \cdot x(a, b) = x(\phi(rs)^{-1}(a, b)^T) = x(e^{\frac{2\pi i}{n}} b, e^{-\frac{2\pi i}{n}} a) = e^{\frac{2\pi i}{n}} b = e^{\frac{2\pi i}{n}} y(a, b),$$

e de modo análogo obtemos que $rs \cdot x(a, b) = e^{-\frac{2\pi i}{n}} x(a, b)$. E como isso independe de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, temos então que

$$s \cdot x = y, \quad s \cdot y = x \quad \text{e} \quad rs \cdot x = e^{\frac{2\pi i}{n}} y, \quad rs \cdot y = e^{-\frac{2\pi i}{n}} x.$$

Mostremos agora que $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}} = \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$.

De fato, claramente temos que $\mathbb{C}[x^n + y^n, xy] \subseteq \mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$ pois $x^n + y^n$ e xy são invariantes pela ação de D_{2n} . Mostremos a outra inclusão. Dado $f \in \mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$, consideremos f homogêneo de grau m . Ou seja,

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \dots + a_1 x y^{m-1} + a_0 y^m.$$

Temos $s \cdot f(x, y) = a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} x + \dots + a_1 y x^{m-1} + a_0 x^m$.

Para que $s \cdot f = f$, devemos ter $a_i = a_{m-i}$. Para rs temos:

$$\begin{aligned} (rs) \cdot f(x, y) &= a_m (e^{\frac{2\pi i}{n}} y)^m + a_{m-1} (e^{\frac{2\pi i}{n}} y)^{m-1} (e^{-\frac{2\pi i}{n}} x) + \dots + a_1 (e^{\frac{2\pi i}{n}} y) (e^{-\frac{2\pi i}{n}} x)^{m-1} + a_0 (e^{-\frac{2\pi i}{n}} x)^m \\ &= a_m e^{\frac{2\pi i m}{n}} y^m + a_{m-1} e^{\frac{2\pi i(m-2)}{n}} y^{m-1} x + \dots + a_1 e^{\frac{2\pi i(2-m)}{n}} y x^{m-1} + a_0 e^{-\frac{2\pi i m}{n}} x^m. \end{aligned}$$

Então os termos de $(rs) \cdot f$ é dado por:

$$a_{m-j} e^{\frac{2\pi i(m-2j)}{n}} y^{m-j} x^j, \quad \text{para } 0 \leq j \leq m.$$

Então, para que ocorra $(rs) \cdot f = f$ e $s \cdot f = f$, devemos ter $e^{\frac{2\pi i(m-2j)}{n}} = 1$ que ocorre se e somente se $m - 2j = kn$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Ou seja, f deve ser da forma

$$f = \sum \alpha_{a,b} x^a y^b, \quad \text{onde } a - b \equiv 0 \pmod{n}.$$

É suficiente mostrar que os polinômios da forma $P_{K_1, K_2} = x^{K_1} y^{K_2} + x^{K_2} y^{K_1}$, para todos $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}_+$ com $K_1 - K_2 \equiv 0 \pmod{n}$, pertencem a álgebra $\mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$.

Observamos que a condição $K_1 - K_2 \equiv 0 \pmod{n}$ é equivalente a $K_1 = kn + K_2$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$. Ou seja, em P_{K_1, K_2} temos

$$x^{kn+K_2} y^{K_2} + x^{K_2} y^{kn+K_2} = (xy)^{K_2} (x^{kn} + y^{kn}).$$

Então é suficiente mostrar que $x^{kn} + y^{kn} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}_+$. Faremos isso usando o segundo método de indução. Para $k = 1$ o resultado é claro. Suponha que

$$x^{jn} + y^{jn} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy], \text{ para todo } 1 \leq j \leq k - 1.$$

Mostremos então que $x^{kn} + y^{kn} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. De fato,

$$(x^n + y^n)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x^n)^{k-i} (y^n)^i \quad (2.3)$$

$$= x^{kn} + y^{kn} + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j} (y^n)^j. \quad (2.4)$$

Então é suficiente mostrar que $\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j} (y^n)^j \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. Como

$$\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j} (y^n)^j = (xy)^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1} \right).$$

$(xy)^n \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$ e então é suficiente mostrar que $\left(\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1} \right) \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. Temos:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1} = x^{n(k-2)} + y^{n(k-2)} + \sum_{j=2}^{k-2} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1}.$$

Como, por hipótese de indução, temos que $x^{n(k-2)} + y^{n(k-2)} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$, é suficiente mostrar que $\sum_{i=2}^{k-2} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. Novamente podemos fatorar $(xy)^n$, ou seja,

$$\sum_{j=2}^{k-2} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-1} (y^n)^{j-1} = (xy)^n \left(\sum_{j=2}^{k-2} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-2} (y^n)^{j-2} \right).$$

Repetindo esse argumento l vezes, obtemos

$$(xy)^n \left(\sum_{j=l}^{k-l} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-l} (y^n)^{j-l} \right),$$

onde a soma $\sum_{j=l}^{k-l} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j-l} (y^n)^{j-l}$ possui nos extremos os elementos $x^{n(k-2l)} + y^{n(k-2l)}$.

Como k é finito, após repetir o processo k vezes o resultado segue.

Notemos o seguinte detalhe, caso k seja ímpar o resultado segue como anteriormente. Agora, caso k seja par então o número de termos da soma no binômio é ímpar e então sempre teremos que os extremos são da forma $x^{n(k-2l)} + y^{n(k-2l)}$ onde, por hipótese de indução, pertencem a $\mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. Para o termo central, teremos $k = 2j$ e $j = l$, obtemos

$$(xy)^n \left(\sum_{j=0}^l \binom{k}{j} (x^n)^j (y^n)^{l-j} \right) = (xy)^n.$$

Então na igualdade 2.4 temos $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (x^n)^{k-j} (y^n)^j \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$ e assim, $x^{kn} + y^{kn} \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$. Concluindo que $f \in \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$ e portanto $\mathbb{C}[x^n + y^n, xy] \subseteq \mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$.

Como é possível observar no Exemplo 2.31 não é trivial determinar a álgebra dos invariantes $K[V]^G$ para um determinado grupo de reflexões. No entanto, os próximos Teoremas relacionam os graus dos polinômios invariantes e o número de reflexões em G com a ordem do grupo G . A demonstração dos próximos resultados, Teoremas 2.32, 2.33 e Lema 2.34 podem ser encontrados no capítulo 3 em [LT09].

Teorema 2.32. *Seja V um \mathbb{C} espaço vetorial de dimensão n e seja G um grupo finito agindo em V . Suponha que f_1, \dots, f_n são polinômios algebricamente independentes em $K[V]^G$ e seja $d_i = \deg f_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então,*

- 1) $|G| \leq d_1 d_2 \cdots d_n$,
- 2) Se $|G| = d_1 d_2 \cdots d_n$, então G é um grupo de reflexões em V e $K[V]^G$ é gerado por f_1, \dots, f_n como álgebra,
- 3) se $K[V]^G$ é gerado por f_1, \dots, f_n como algebra, então a igualdade em 1) ocorre e G é um grupo de reflexões.

Teorema 2.33 (Shephard-Todd). *Se G é um grupo de reflexões finito e se d_1, d_2, \dots, d_n são os graus dos polinômios invariantes de $K[V]^G$ de G , então*

- 1) a ordem de G é $d_1 d_2 \cdots d_n$,
- 2) o número de reflexões em G é $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$.

Com próximo Lema poderemos determinar quando vários polinômios são algebricamente independentes entre si:

Lema 2.34. *Os polinômios $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ são algebricamente independentes se, e somente se, o determinante $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$.*

Exemplo 2.35. Utilizaremos o Teorema 2.32 e o Teorema 2.33 para encontrarmos os invariantes básicos I_1 e I_2 de $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$.

Como o grupo diedral D_{2n} possui ordem $2n$ então de acordo com o item 1) do Teorema 2.33 temos que I_1 deve possuir grau n e I_2 grau 2. Como já sabemos que $x^n + y^n$ e xy são invariantes então esses são os candidatos naturais a serem os geradores de $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$. Porém, para utilizar o Teorema 2.32 precisamos mostrar que $x^n + y^n$ e xy são algebricamente independentes em $\mathbb{C}[x, y]$.

Considerando $i_{0,\dots,a_j,\dots,0}$ como no exemplo 2.11. Temos que o grupo Z_{m_1,\dots,m_k} possui ordem $m_1 \cdots m_k$. Como cada $i_{0,\dots,a_j,\dots,0}$ age em \mathbb{C}^k de modo que $i_{0,\dots,a_j,\dots,0}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, e^{\frac{2\pi i a_j}{m_j}} x_j, \dots, x_k)$. Então, um invariante natural para a ação de $i_{0,\dots,a_j,\dots,0}$ em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$ é dado por $x_j^{m_j}$.

Utilizando o Lema 2.34, podemos mostrar que I_1 e I_2 são algebricamente independentes. Então, usando o item 2) do Teorema 2.32 obtemos que I_1 e I_2 são os geradores da algebra $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}}$. Concluimos que $\mathbb{C}[x, y]^{D_{2n}} = \mathbb{C}[x^n + y^n, xy]$.

Analogamente, obtemos que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]^{Z_{m_1,\dots,m_k}} = \mathbb{C}[x_1^{m_1}, \dots, x_k^{m_k}]$.

2.3 A função órbita ω

Nessa seção apresentaremos a função órbita ω e algumas de suas propriedades que serão usadas ao longo desse texto.

Definição 2.36. A função órbita $\omega_G : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ é definida por

$$\omega_G = (I_1, \dots, I_n).$$

Em que dado $v \in V$ temos $\omega_G(v) = (I_1(v), \dots, I_n(v))$, de modo que $I_j(v)$ é valoração do polinômio G -invariante I_j no ponto v , para todo $1 \leq j \leq n$.

A matriz Jacobiana da aplicação ω_G é a matriz das derivadas parciais:

$$Jac(\omega_G) := \left(\frac{\partial I_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

e $\Delta := \det Jac(\omega_G)$ é chamado de *Jacobiano* de ω_G .

Exemplo 2.37. Temos pelo Exemplo 2.35 que $\omega_{D_{2n}} = (x^n + y^n, xy)$ e $\omega_{Z_{m_1,\dots,m_k}} = (x_1^{m_1}, \dots, x_k^{m_k})$.

No próximo Teorema, provado por Emmy Noether (1882-1935) em [Noe15] teremos uma justificativa para o nome da aplicação ω_G ser aplicação órbita.

Teorema 2.38 (Noether). *Seja G grupo finito agindo linearmente em um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. E considere $\omega_G : V \rightarrow V$ cujas coordenadas são polinômios invariantes básicos sobre G . Então, para qualquer $v \in V$ temos $\omega_G^{-1}(\omega_G(v)) = Gv$, onde $Gv = \{g \cdot v \mid g \in G\}$.*

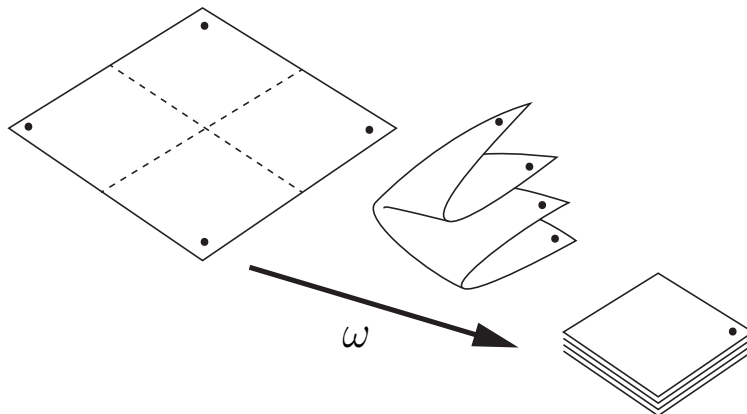


Figura 2.5: Aplicação órbita $\omega_{Z_{m_1, m_2}}$ em \mathbb{C}^2

Observação 2.39. Vamos denotar ω_G apenas por ω quando o grupo G estiver subentendido. Pela definição de ω temos que $\omega(v) = \omega(g \cdot v)$, para quaisquer $v \in V$ e $g \in G$. Onde $\omega(g \cdot v)$ é um abuso de notação que deve ser entendido como $\omega(\rho(g)^{-1}v)$, para uma representação do grupo G de modo que ω seja a respectiva aplicação órbita. De fato,

$$\begin{aligned} \omega(g \cdot v) &= (I_1(g \cdot v), \dots, I_n(g \cdot v)) \\ &= (g^{-1} \cdot I_1(v), \dots, g^{-1} \cdot I_n(v)) \\ &= (I_1(v), \dots, I_n(v)) \\ &= \omega(v). \end{aligned}$$

Ou seja, ω leva todos os pontos que estão na órbita de v pelo grupo de reflexão G na mesma imagem $\omega(v)$.

Lema 2.40. *Seja V um espaço vetorial e G um grupo de reflexões em V . Dado $v \in C$, onde $C \in \mathcal{C}$, temos que $\ker d\omega_v = \langle C^\perp \rangle$. Em particular,*

$$\mathcal{A} = \{v \in V \mid \dim(\text{Im } d\omega_v) \neq n\}.$$

Demonstração. Suponha que H_1, \dots, H_k sejam todos os hiperplanos de V definidos por G . Assuma que $\langle C \rangle = H_1 \cap \dots \cap H_m$, para $m \leq k$. Pela Proposição 2.22 temos que existe $g \in G$ com $\text{Fix } g = \langle C \rangle$ e pelo item 3) da Observação 2.2 g é diagonalizável. Então, consideremos $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V determinada pelos autovetores de g .

Caso necessário, podemos reescrever os elementos de β de forma que $\text{Fix } g = \langle v_{h+1}, \dots, v_n \rangle$ e seja $\beta^* = \{X_1, \dots, X_n\}$ base dual de β . Então, por definição de base dual e como $v \in \text{Fix } g$ temos que $X_j(v) = 0$, para $1 \leq j \leq h$.

Afirmção: Se $f \in \mathbb{C}[V]^G$ então $g \cdot f = f$ e nenhum monômio de f tem grau total igual a 1 em X_1, \dots, X_h .

De fato, observemos primeiro que $g \cdot X_i = X_i$ para $h+1 \leq i \leq n$. Como $\text{Fix } g = \text{Fix } g^{-1}$, dado $w = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_\beta$, temos

$$g \cdot X_i(w) = X_i(g^{-1}(w)) = \alpha_i = X_j(w),$$

ou seja, X_i é invariante sobre g . Suponha que f possui um monômio da forma $X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n}$, para algum $i \in \{1, \dots, h\}$ e $k_{h+1}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$. Como $g \cdot f = f$, temos

$$\begin{aligned} X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n} &= g \cdot (X_i X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n}) \\ &= (g \cdot X_i)(g \cdot (X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n})) \\ &= (g \cdot X_i) X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n}. \end{aligned}$$

O que ocorre se e somente se $X_i = g \cdot X_i$.

Aplicando em v_i temos, $X_i(v_i) = 1$ e $g \cdot X_i(v_i) = X_i(g^{-1}v_i) = 1$ se e somente se $g^{-1}(v_i) = v_i$ e assim, temos $v_i \in \text{Fix } g$. O que não ocorre pois $v_i \notin \text{Fix } g$, para $i \in \{1, \dots, h\}$. Ou seja, $X_i \neq g \cdot X_i$ e f não é invariante. Suponha agora que $f \in \mathbb{C}[V]^G$ seja da forma

$$f = \left(\sum_{i=1}^h \alpha_i X_i \right) f_d,$$

para $f_d = X_{h+1}^{k_{h+1}} \dots X_n^{k_n}$, com $k_{h+1}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $k_{h+1} + \dots + k_n = d$ e $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Pela igualdade $g \cdot f = f$, obtemos que

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i (g \cdot X_i) = \sum_{i=1}^h \alpha_i X_i. \quad (2.5)$$

Supondo que $\alpha_k \neq 0$, aplicamos v_k na igualdade [2.5](#), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h \alpha_i X_i(v_k) &= \sum_{i=1}^h \alpha_i (g \cdot X_i)(v_k) \\ \alpha_k &= \sum_{i=1}^h \alpha_i \cdot X_i(g^{-1}(v_k)) \\ &= \sum_{i=1}^h \alpha_i \cdot X_i\left(\frac{1}{\lambda_k}(v_k)\right) \\ &= \frac{\alpha_k}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\alpha_k = \frac{\alpha_k}{\lambda_k}$. Que ocorre se $\lambda_k = 1$, pois $\alpha_k \neq 0$, daí obtemos que $v_k \in \text{Fix } g$. O que não pode ocorrer e concluímos nossa afirmação.

Como $v \in \text{Fix } g = \langle v_{h+1}, \dots, v_n \rangle$ temos que $\frac{\partial f(v)}{\partial X_i} = 0$ para todo i com $1 \leq i \leq h$. Ou seja, as primeiras h colunas de $d\omega_v$ são nulas, pois $\omega = (I_1, \dots, I_n)$, onde $I_i \in \mathbb{C}[V]^G$.

Tome $u \in \langle C^\perp \rangle$, daí $u = \sum_{i=1}^h \alpha_i v_i$, ou seja, $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_h, 0, \dots, 0)_\beta$ e assim $d\omega_v(u) = 0$. Portanto, $u \in \ker d\omega_v$ e então $\langle C^\perp \rangle \subseteq \ker d\omega_v$.

Observando que $\langle C^\perp \rangle$ é subespaço vetorial de V e dado $\lambda u, w \in \langle C^\perp \rangle$ com $\lambda \in \mathbb{C}$. Pela linearidade de $d\omega_v$ obtemos que $d\omega_v(\lambda u + w) = \lambda d\omega_v(u) + d\omega_v(w) = 0$ e, portanto, $\lambda u + w \in \ker d\omega_v$. Então, $\langle C^\perp \rangle$ é subespaço vetorial de $\ker d\omega_v$.

Pelo Teorema [2.21](#) obtemos que $\text{Fix } g$ e $\text{Im } d\omega_v$ possuem a mesma dimensão. Então $\langle C^\perp \rangle$ e $\ker d\omega_v$ possuem a mesma dimensão. De fato, basta observar $\dim \langle C \rangle + \dim \langle C^\perp \rangle = n$ e $\dim \ker d\omega_v + \dim \text{Im } d\omega_v = n$. Então, concluímos o resultado. \square

Observação 2.41. A aplicação ω é finita. De fato, dado $u \in \text{Im } \omega$ então $\omega^{-1}(u) = \omega^{-1}(\omega(v)) = Gv$. Como G é finito então Gv é finito. Com a Proposição [1.4](#) concluímos que ω é fechada. Portanto, ω é finita.

Capítulo 3

Aplicações de reflexão: Injetividade e normal crossings

Neste capítulo introduzimos as aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ de reflexão e quasi-reflexão com $f = \omega_G \circ h$, para um determinado grupo G de reflexões agindo em \mathbb{C}^p . Veremos como obter informações de germes de tais aplicações estudando a imagem de h .

Estudaremos a injetividade desses germes de aplicações e iremos relacioná-las com o seu coposto. A motivação parte da seguinte Conjectura, proposta por Lê Dung Tráng, cuja reformulação recente pode ser encontrada em [\[dB06\]](#).

Conjectura 1. *Não existe germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ injetor de coposto 2.*

Mostraremos a partir da segunda seção que aplicações de reflexão respeitam essa Conjectura.

Por fim, apresentaremos condições para que uma aplicação de reflexão possua *normal crossings*. Veremos que ω não interfere em tais condições e que o *normal crossings* de uma aplicação de reflexão pode ser estudado apenas com $Y = \text{Im } h$ e gY , para todos $g \in G \setminus \{1\}$.

3.1 Aplicações de reflexão

Nessa seção apresentaremos as aplicações de reflexão e quasi-reflexão e seus resultados que serão utilizados ao longo do texto. No último capítulo consideramos $x, y \in K[V]$ e de agora em diante, a menos que seja dito o contrário, V será considerado um \mathbb{C} espaço vetorial de dimensão p , $n \leq p$, $x, y \in V$ e, portanto, $\omega : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$.

Definição 3.1. Seja G um grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^p . Uma aplicação de reflexão $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é a composição dada por

$$f = \omega \circ h,$$

onde $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é um mergulho e $\omega : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ é a aplicação órbita de G . Se exigirmos apenas que h seja uma aplicação finita então dizemos que f é uma aplicação de quasi-reflexão.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^p \\ & \searrow f := \omega \circ h & \downarrow \omega \\ & & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Estendemos essa definição para germes de aplicações tomando um representante e denotaremos, a menos que dito o contrário, $\text{Im } h = Y$.

Observamos que as funções de reflexão ou quasi-reflexão não são obtidas por únicas ω e h . Como é ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 3.2. A cúspide $t \mapsto (t^2, t^3)$ pode ser dada como uma aplicação de reflexão:

- 1) $h_1(t) = (t, t^3)$ e $\omega_1(x, y) = (x^2, y)$, com reflexão dada pelo grupo $Z_{2,1}$.
- 2) $h_2(t) = (t^2, t)$ e $\omega_2(x, y) = (x, y^3)$, com reflexão dada pelo grupo $Z_{1,3}$.
- 3) $h_3(t) = (t, t)$ e $\omega_3(x, y) = (x^2, y^3)$, com reflexão dada pelo grupo $Z_{2,3}$.

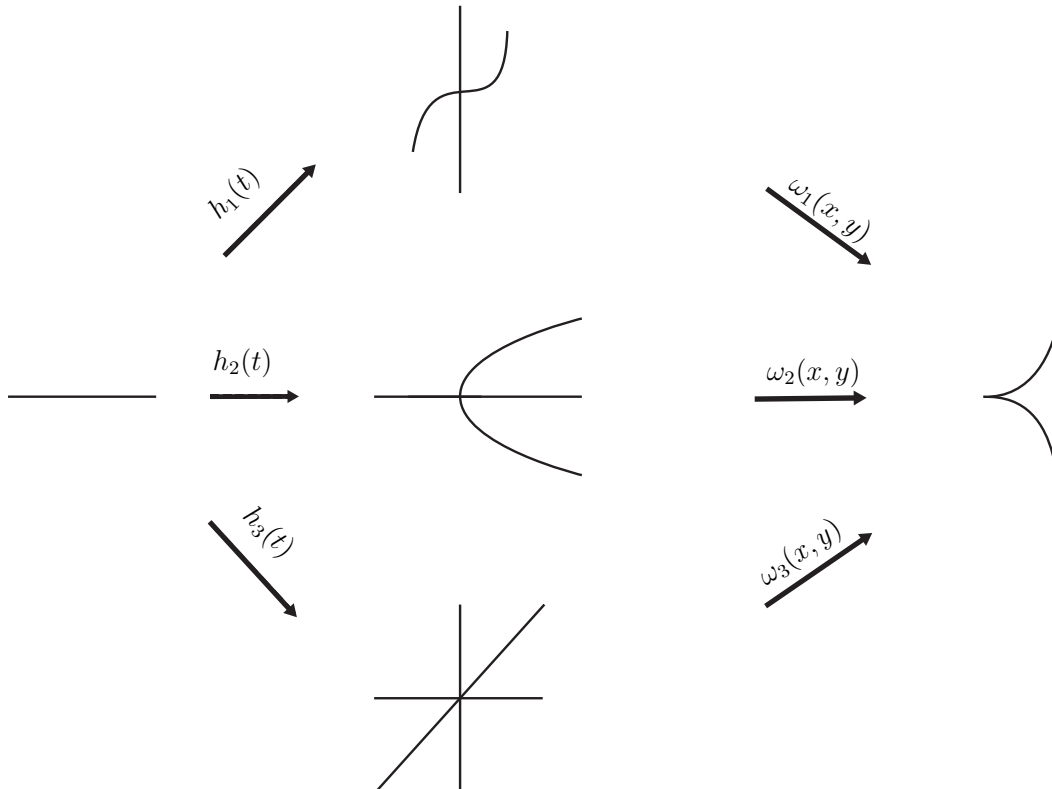


Figura 3.1: $\omega_1 \circ h_1 = \omega_2 \circ h_2 = \omega_3 \circ h_3 = (t^2, t^3)$

Definição 3.3. O coposto de um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é o coposto em 0 de um representante. Dizemos que f é singular em x se df_x é singular, isto é, se coposto $f_x \geq 1$.

Lema 3.4. *Seja f uma aplicação de quasi-reflexão. Se $h(x)$ pertence a uma face $C \in \mathcal{C}$ então $\ker(df_x) = dh_x^{-1}(C^\perp)$. Em particular, se f é um germe de aplicação de reflexão em x e $y = h(x)$, então*

$$\text{coposto } f = \dim(T_y Y \cap C^\perp).$$

Demonstração. Se f é aplicação de quasi-reflexão então h é finita. Mostremos que $\ker(df_x) = dh_x^{-1}(C^\perp)$. Dado $y \in \ker df_x$, pela regra da cadeia temos que $df_x(y) = d\omega_{h(x)}(dh_x(y)) = 0$, e pelo Lema 2.40 temos que $dh_x(y) \in \langle C \rangle^\perp$, ou seja, $y \in dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp)$.

Supondo que f é aplicação de reflexão obtemos que h é um mergulho e então a aplicação $dh_x : T_x \mathbb{C}^n \rightarrow T_y Y$, onde $h(x) = y$ e $\text{Im } h = Y$, é injetora. Observamos que

$$dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp) \cong (\text{Im } dh_x \cap \langle C \rangle^\perp).$$

De fato, mostremos que $dh_x|_{dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp)} : dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp) \rightarrow \text{Im } dh_x \cap \langle C \rangle^\perp$ é um isomorfismo. Como dh_x é injetora então claramente $dh_x|_{dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp)}$ é injetora e essa aplicação também é sobrejetora pois considerando que $\text{Im } dh_x \cap \langle C \rangle^\perp \neq \emptyset$, temos que existe $x' \in T_x \mathbb{C}^n$ de modo que $dh_x(x') \in \langle C \rangle^\perp$, ou seja, $x' \in dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp)$. Então

$$\ker df_x = dh_x^{-1}(\langle C \rangle^\perp) \cong (\text{Im } dh_x \cap \langle C \rangle^\perp) = (T_{h(x)} Y \cap \langle C \rangle^\perp).$$

Obtemos

$$\text{coposto } f = \dim(T_y Y \cap C^\perp).$$

□

O próximo exemplo ilustra o Lema 3.4.

Exemplo 3.5. Seja $h_s, s \in \mathbb{C}$, a família de mergulhos definida por

$$t \mapsto (t, t^3 - st),$$

e f_s a família de aplicações de reflexão definida pelo grupo $Z_{2,1}$. Então, f_s é definida por

$$t \mapsto (t^2, t^3 - st), \text{ para todo } s \in \mathbb{C}.$$

O complexo \mathcal{C} de $Z_{2,1}$ é dado por $\{C_\emptyset, C_1\}$ com

$$C_\emptyset = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x \neq 0\} \text{ e } C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x = 0\}.$$

Como C_\emptyset é aberto em \mathbb{C}^2 obtemos que $C_\emptyset^\perp = \{0\}$ e como h_s é um mergulho obtemos que f_s não é singular fora de C_\emptyset . Temos que h_0 passa pela face C_1 ortogonalmente e produz uma singularidade em f_0 na origem. Agora, com $s \neq 0$ temos que h_s não cruza ortogonalmente a face C_1 . Assim, f_s é uma imersão para $s \neq 0$, pois coposto $f_s = \dim(T_y Y_s \cap C_1^\perp) = 0$, onde $Y_s = \text{Im } h_s$.

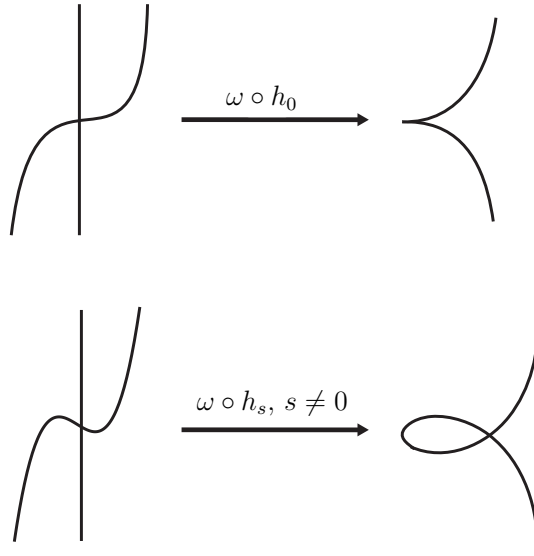


Figura 3.2: Coposto da aplicação $\omega \circ h_s$

3.2 Injetividade de aplicações de reflexão

Nessa seção estudaremos condições para que uma aplicação de reflexão seja injetora e iremos obter resultados sobre obstrução para tal propriedade.

Lema 3.6. *Uma aplicação de quasi-reflexão f é injetora se, e somente se, h é injetora e, para todo $g \in G \setminus \{1\}$, temos que*

$$Y \cap gY \subseteq \text{Fix } g.$$

Demonstração. Se f é injetora então necessariamente h é injetora e dado $y \in Y \cap gY$, com $g \neq 1$, temos que existe $y' \in Y$ com $gy' = y$. Aplicando ω obtemos: $\omega(gy') = \omega(y)$ e como $\omega(gy') = \omega(y')$, concluímos $\omega(y) = \omega(y')$. Então, existem $x, x' \in \mathbb{C}^n$ com $h(x) = y$ e $h(x') = y'$ de modo que $f(x) = (\omega \circ h)(x) = (\omega \circ h)(x') = f(x')$. Como f é injetora obtemos $x = x'$. Ou seja, $h(x) = h(x')$ e então $y = y'$. Utilizando que $gy' = y$ e $y' = y$ temos $gy = y$ e então $y \in \text{Fix } g$.

Mostremos que f é injetora. Dados $x, x' \in \mathbb{C}^n$ com $f(x) = f(x')$. Consideramos $h(x) = y$ e $h(x') = y'$, então $\omega(y) = \omega(y')$. Pela definição de ω , obtemos que existe $g \in G \setminus \{1\}$ com $gy' = y$ então $y \in Y \cap gY \subseteq \text{Fix } g$. Logo, $gy' = y = gy$ o que implica em $y = y'$. Então, $h(x) = h(x')$ e, pela injetividade de h , temos $x = x'$. \square

Exemplo 3.7. Seja $Z_{2,1}$ agindo em \mathbb{C}^2 e $g \in Z_{2,1}$ dada por $g(x, y) = (-x, y)$. Considere, $h(t) = (t, t^3 - t)$ então $Y = \{(t, t^3 - t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$ e $gY = \{(-t, t^3 - t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\} = \{(t, -t^3 + t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$, temos que um ponto pertence a $Y \cap gY$ se, e somente se, $t^3 - t = -t^3 + t$, ou seja, a solução da equação $2(t^3 - t) = 0$ que é $t = 0, t = 1$ e $t = -1$. Como $\text{Fix } g = \langle (0, 1) \rangle$, temos que $Y \cap gY$ não pode estar contido em $\text{Fix } g$. Então a aplicação de reflexão $f(x) = (x^2, x^3 - x)$ (onde $\omega(x, y) = (x^2, y)$ e $h(t) = (t, t^3 - t)$) não é injetora.

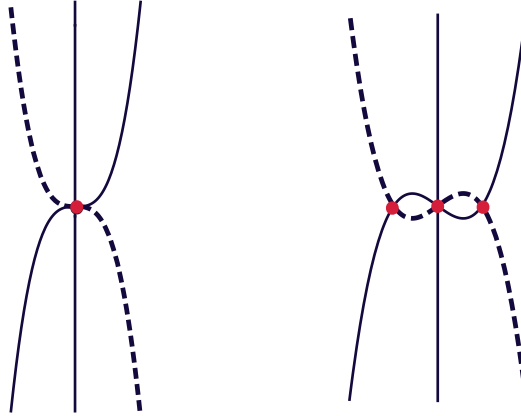


Figura 3.3: $Y \cap gY$, para o caso $h_s(t) = (t, t^3 - st)$.

Proposição 3.8. *Não existe germe de aplicação de quasi-reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ injetor, com posto $G > 2(p - n)$.*

Demonstração. Suponha que exista f injetora com tal propriedade. Pela Proposição 2.20 posto $G = \dim C^\perp$, sendo $C \in \mathcal{C}$ a face que passa pela origem. Como $\dim C + \dim C^\perp = p$, obtemos que $\dim C < 2n - p$. Pela Proposição 2.22, temos que existe $g \in G$, tal que $\text{Fix } g = C$. Como Y possui dimensão n e passa pela origem temos $Y \cap gY \neq \emptyset$ e então $\dim(Y \cap gY) \geq p - 2(p - n) = 2n - p$.

Desse modo, obtemos que $Y \cap gY$ não pode estar contido em $\text{Fix } g$, e então, utilizando o Lema 3.6, concluímos que f não pode ser injetora. □

Exemplo 3.9. Considere \mathbb{C}^3 e o grupo de reflexões G gerado pelas reflexões r_{xy}, r_{xz} e r_{yz} de modo que $r_{xy}(z, y, z) = (x, y, -z)$, $r_{xz}(x, y, z) = (x, -y, z)$ e $r_{yz}(x, y, z) = (-x, y, z)$. Temos que $H_{r_{xy}} := H_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | z = 0\}$, $H_{r_{xz}} := H_{xz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | y = 0\}$ e $H_{r_{yz}} := H_{yz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | x = 0\}$. Portanto, nenhuma aplicação finita da forma $\omega \circ h$, com $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y), h_3(x, y))$ e $\omega(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ é injetora. Pois, posto $G = 3 > 2$.

Em geral, considerando o grupo Z_{m_1, m_2, m_3} onde $m_j \neq 1$ obtemos o mesmo resultado. Pois, Z_{m_1, m_2, m_3} é gerado por $i_{m_1} = (e^{\frac{2\pi i}{m_1}}, 1, 1)$, $i_{m_2} = (1, e^{\frac{2\pi i}{m_2}}, 1)$ e $i_{m_3} = (1, 1, e^{\frac{2\pi i}{m_3}})$. E, considerando C a face que passa pela origem, temos $C = \{(0, 0)\}$ e então posto $G = 3$.

Proposição 3.10. *Não existe germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ injetor, com coposto $f > p - n$.*

Demonstração. Consideramos $Y = \text{Im } h$. Se $p > 2n$ então o resultado é claro pois não existe aplicação com coposto $f > p - n > 2n - n = n$. Suponha que $p \leq 2n$. Se f é injetora então h é injetora e portanto $\dim Y = n$. Se $C \in \mathcal{C}$ é a face passando pela origem e coposto $f = \dim(T_0 Y \cap C)$ então obtemos que $\dim(T_0 Y \cap C^\perp) \geq p - n + 1$. Utilizando o Lema 1.21 temos $\dim(Y \cap C) \leq n - (p - n - 1) = 2n - p - 1$.

Como f é injetora, pelo Lema 3.6, obtemos que para todo $g \in G \setminus \{1\}$ temos $Y \cap gY \subseteq \text{Fix } g$, utilizando a Proposição 2.22, tomemos então g de forma que $\text{Fix } g = \langle C \rangle$. Como $Y \cap gY \neq \emptyset$, temos que $\dim(Y \cap gY) \geq n + n - p = 2n - p$ e, por outro lado, observamos que $Y \cap C = Y \cap gY \cap \text{Fix } g = Y \cap gY$ que implica em $\dim(Y \cap gY) < 2n - p$. Temos uma contradição com as dimensões e então concluímos que f não é injetora. \square

3.3 Normal crossings para aplicações de reflexão

Para aplicações de reflexão e quasi-reflexão as condições de normal crossings são caracterizadas por duas condições que independem da aplicação ω e que podem ser verificadas apenas por $\text{Im } h = Y$ e gY , com $g \in G$. Estudando condições em que essas duas propriedades falham obtemos restrições para que uma aplicação de reflexão possua normal crossings. Essas condições, de violação, serão utilizadas no Capítulo 5.

Definição 3.11. Sejam X e Y variedades diferenciáveis complexas ou reais. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ possui *normal crossings* se, para qualquer $k \geq 2$, a restrição de $f \times \cdots \times f$ a $X^{(k)}$ é transversal a $\Delta(Y, k)$. Ou seja, dado $\mathbf{x} \in X^{(k)}$

- 1) $(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x}) \notin \Delta(Y, k)$ ou
- 2) $(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x}) \in \Delta(Y, k)$ e

$$T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} Y^k = T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} \Delta(Y, k) + d(f \times \cdots \times f)_{\mathbf{x}}(T_{\mathbf{x}} X^{(k)}),$$

isto é, se $(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x}) \in \Delta(Y, k)$ e se considerarmos $f(x_j) = y$, para $j \leq k$, então

$$T_{(y, \dots, y)} Y^k = T_{(y, \dots, y)} \Delta(Y, k) + d(f \times \cdots \times f)_{\mathbf{x}}(T_{\mathbf{x}} X^{(k)}).$$

A definição para germes se estende tomando representantes.

Lema 3.12. *Seja $g : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação linear e $\omega : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação invariante por g . Para qualquer $y \in \mathbb{C}^p$ e qualquer subespaço vetorial W de \mathbb{C}^p , temos que $d\omega_y(W) = d\omega_{gy}(gW)$.*

Demonstração. Se γ é uma curva com $\gamma(0) = y$, com vetor tangente $\gamma'(0) \in W$, então $g\gamma$ satisfaz

$$g\gamma(0) = gy \text{ e } (g\gamma)'(0) \in gW.$$

Se os tangentes de curvas γ_i são de modo que geram W então $g\gamma_i$ geram gW . Consequentemente, $d\omega_x(W)$ e $d\omega_{gx}(gW)$ são gerados por $(\omega \circ \gamma_i)'(0)$ e $(\omega \circ g\gamma_i)'(0)$, respectivamente. Como ω é uma aplicação g -invariante, temos que $\omega \circ \gamma = \omega \circ g\gamma$, e então obtemos o resultado. \square

Exemplo 3.13. Sejam $Z_{2,1}$ agindo em \mathbb{C}^2 e $W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$. Temos que $g \in Z_{2,1}$ é da forma $g(x, y) = (-x, y)$ e $\omega(x, y) = (x^2, y)$. Considerando o ponto $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^2$ da forma $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, temos

$$d\omega_{\mathbf{y}}(W) = (2y_1x, x) \text{ e } d\omega_{g\mathbf{y}}(gW) = d\omega_{(-y_1, y_2)}(-x, x) = (2y_1x, x).$$

E então, $d\omega_{\mathbf{y}}(W) = d\omega_{g\mathbf{y}}(gW)$.

Observação 3.14. Veremos a condição de normal crossings para $k = 2$, com $(x, x') \in X^{(k)}$ e $f(x) = f(x') = y$, na Definição 3.11 é equivalente a $\text{Im } df_x + \text{Im } df_{x'} = T_y Y$. De fato, temos que

$$T_{(f \times f)(x, x')} Y^2 = T_{(f \times f)(x, x')} \Delta(Y, 2) + (df_x, df_{x'}) (T_{(x, x')} X^{(2)}). \quad (3.1)$$

Tomemos $W = \text{Im } df_x$ e $W' = \text{Im } df_{x'}$ e quocientando a Equação 3.1 por $T_{(y, y)} \Delta(Y)$, temos:

$$T_{(y, y)} Y^2 / T_{(y, y)} \Delta(Y) = (T_{(y, y)} \Delta(Y) + (W \times W')) / T_{(y, y)} \Delta(Y).$$

Mostremos que : $T_{(y, y)} Y^2 / T_{(y, y)} \Delta(Y) \cong T_y Y$ e $(T_{(y, y)} \Delta(Y) + (W \times W')) / T_{(y, y)} \Delta(Y) \cong W + W'$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} T_{(y, y)} Y^2 / T_{(y, y)} \Delta(Y) &= \{v + T_{(y, y)} \Delta(Y) \mid v \in T_{(y, y)} Y^2\} \\ &= \{(\gamma, \tilde{\gamma}) + T_{(y, y)} \Delta(Y) \mid \gamma, \tilde{\gamma} \in T_y Y\} \\ &= \{[\gamma + \alpha, \tilde{\gamma} + \alpha] \mid \gamma, \tilde{\gamma}, \alpha \in T_y Y\}. \end{aligned}$$

Tomemos então o isomorfismo dado por:

$T : T_{(y, y)} Y^2 / T_{(y, y)} \Delta(Y) \rightarrow T_y Y$ definido por $[\gamma + \alpha, \tilde{\gamma} + \alpha] \mapsto [\gamma + \alpha - (\tilde{\gamma} + \alpha)]$. E como

$$(T_{(y, y)} \Delta(Y) + (W \times W')) / T_{(y, y)} \Delta(Y) = \{(\gamma, \tilde{\gamma}) + T_{(y, y)} \Delta(Y) \mid (\gamma, \tilde{\gamma}) \in T_{(y, y)} \Delta(Y) + (W \times W')\}$$

obtemos que $(T_{(y, y)} \Delta(Y) + (W \times W')) / T_{(y, y)} \Delta(Y) \cong W + W'$ pelo isomorfismo definido por $[\gamma, \tilde{\gamma}] \mapsto \gamma - \tilde{\gamma}$. E temos que tal homomorfismo é bem definido pois qualquer representante de $[\gamma, \tilde{\gamma}]$ é da forma $(\gamma + \alpha, \tilde{\gamma} + \alpha)$ para algum $\alpha \in T_y Y$ e então $\gamma + \alpha - (\tilde{\gamma} + \alpha) = \gamma - \tilde{\gamma}$.

Obtemos $\text{Im } df_x + \text{Im } df_{x'} \cong T_y Y$ e como $\text{Im } df_x, \text{Im } df_{x'}$ são subespaços de $T_y Y$, concluímos $\text{Im } df_x + \text{Im } df_{x'} = T_y Y$.

Proposição 3.15. *Os multi-germes de ω com normal crossings são exatamente:*

1) *multi-germes em $\{y, g_2 y, \dots, g_k y\}$, com $y \notin \mathcal{A}$ e g_2, \dots, g_k elementos diferentes em $G \setminus \{1\}$.*

2) *Monogermes no ponto $y \in C$, onde $C \in \mathcal{C}$ é uma face de codimensão ≤ 1 ,*

Demonstração. 1) Por hipótese $y \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$ temos que $G_y = 1$. Tomemos U uma vizinhança de y de modo que $g(U) \cap U = \emptyset$ e $U \cap \mathcal{A} = \emptyset$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$. Podemos tomar U dessa forma pois $G \setminus \{1\}$ é finito. Considerando $y' \neq y$ com $y' \in U$ temos que $\omega^{-1}(\omega(y')) \cap U' = \{y', g_2y', \dots, g_ky'\}$, onde $U' = U \cup g_2U \cup \dots \cup g_kU$. Pois, $g_iy' \in g_iU$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Como $\ker d\omega_{y'} = C^\perp$ sendo que $y' \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$ e como $C^\perp = 0$ temos que $\ker d\omega_{y'} = 0$, e isso implica que $d\omega_{y'}$ é sobrejetora para y' e para g_iy' , pois, pelo Lema 3.12, $d\omega_{y'}(W) = d\omega_{g_iy'}(g_iW)$, para todo subespaço vetorial W . Então, temos que $\text{Im } d\omega_{y'} = T_yY$, ou seja, ω possui normal crossings em U' .

Agora, dado multi-germe da aplicação órbita $\omega : (\mathbb{C}^p, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, q)$, onde $S \subseteq \mathbb{C}^p$ finito. Dado um representante de ω , temos que $\omega(S) = q$. Se, $y \in S$ é tal que $y \in \mathcal{A}$ então temos que todos os pontos de S estão em \mathcal{A} . Além disso, como $y \in \mathcal{A}$ temos que $y \in C$, para alguma face em \mathcal{C} e então pela Observação 3.14 temos que $\text{Im } d\omega_y + \text{Im } d\omega_{y'} \neq T_yY$. Pois, $\text{Im } d\omega_y = \text{Im } d\omega_{y'}$ e $\text{Im } d\omega_y \neq T_yY$ se $y \in C$.

Se $y \notin \mathcal{A}$ e como S é finito temos que necessariamente $S = \{y, g_1y, \dots, g_ky\}$ e então ω é da forma já tratada.

- 2) Se $y \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$ então ω é localmente um biholomorfismo e, portanto, possui normal crossings, pois para qualquer $k \geq 2$ temos que $w \times \dots \times w$ restrita a $(\mathbb{C}^p)^{(k)}$ não pertence a $\Delta(\mathbb{C}^p, k)$.

Afirmamos que em \mathcal{A} , os únicos monogermes com normal crossings estão apenas em pontos contidos em um único hiperplano de reflexão.

Tomemos U vizinhança de y . Temos que U pode ser escolhido de modo que $U \cap Gy' \subseteq Gy'$ com $y' \in U$. Se $y \in H_i \in \mathcal{A}$ sendo H_i único, consideremos U , caso necessário, de modo que $\mathcal{A} \cap U = C \cap U$, onde $y \in C$. Pelo item 2) do Corolário 2.25 temos que $G_{y'} = G_C = G_y$, para todo $y' \in \mathcal{A} \cap U$ e daí ω restrita a $\mathcal{A} \cap U$ é bijeção. E isso implica que ω é da forma já tratada em 2).

Agora, tome B uma aberto básico de U , se $y \in H_1 \cap H_2$ com H_1, H_2 hiperplanos, dados pelas reflexões r_1 e $r_2 \in G$ tomemos $y' \in (B \cap H_1) \setminus H_2$ daí temos que $r_2 \in G_y$ pois $y \in H_2$ mas $r_2y' \neq y$ e daí $y' \neq r_2y'$ onde $y' \in B$. Segue pelo item 2) que (y', r_2y') não satisfaz a condição de transversalidade. Pois, $\text{Im } d\omega_{y'} = \text{Im } d\omega_{r_2y'}$ com $\text{Im } d\omega_{y'} \neq T_yY$ e então $\text{Im } d\omega_{y'} + \text{Im } d\omega_{r_2y'} \neq T_yY$.

□

Estudaremos as condições para que uma aplicação h injetora deve satisfazer para produzir uma aplicação de quasi-reflexão f com normal crossings. Como veremos ω não é envolvida no processo e a condição para normal crossings pode ser tomada apenas com gh para $g \in G$. Os Exemplos 3.16 e 3.19 nos darão a intuição necessária antes de darmos o formalismo necessário.

Exemplo 3.16. Seja $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ as duas curvas parametrizadas não pontilhadas na Figura 3.4. Vemos que o resultado da aplicação de reflexão f pelo grupo $Z_{2,2}$ não possui normal crossings. Todavia, não existe aparente restrição quando olhamos apenas para h . A condição falha justamente quando olhamos para o elemento $i_{1,1} \in Z_{2,2}$ agindo em h .

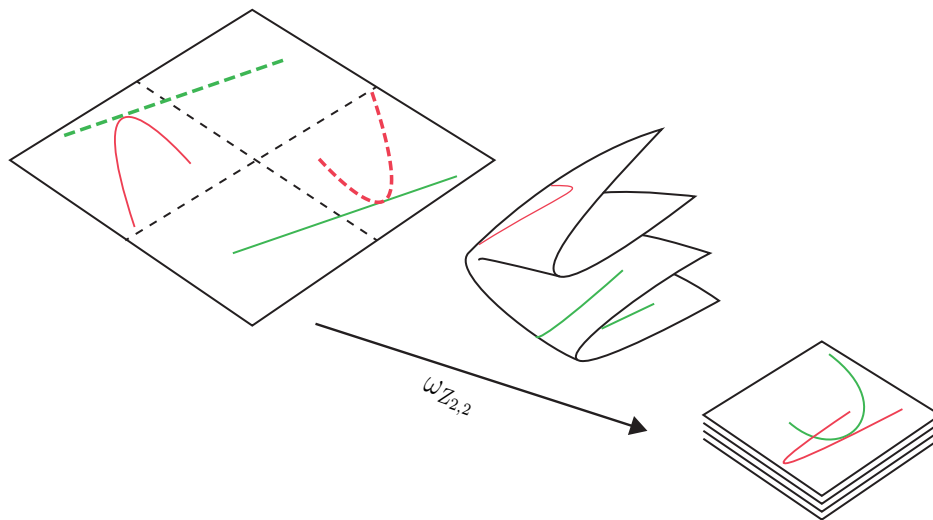


Figura 3.4: Falha na condição de normal crossings na órbita de $\omega_{Z_{2,2}}$

Definição 3.17. Uma aplicação $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ possui órbita normal crossings (por G) se, para qualquer $k \geq 2$ e qualquer k -upla $(g_1, \dots, g_k) \in G^k$, a restrição da aplicação $g_1 h \times \dots \times g_k h$ a $X^{(k)}$ é transversal a $\Delta(\mathbb{C}^n, k)$. A definição se estende para germes de aplicações tomando representantes.

Exemplo 3.18. Esse exemplo é ilustrado na Figura 3.5. Sejam o grupo de reflexões $Z_{2,1}$ agindo em \mathbb{C}^2 e $h_1(t) = (t, t^3)$, $h_2(t) = (t, t)$, $h_3(t) = (t, t^2)$ e $h_4 = (\sqrt{3}t + t^2, -t + \sqrt{3}t^2)$. Temos que h_1 e h_3 não possuem órbita normal crossings por $Z_{2,1}$ mas h_2 e h_4 possuem.

Exemplo 3.19. Seja $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ as duas linhas parametrizadas na Figura 3.6. Novamente, obtemos uma aplicação de reflexão onde a condição de normal crossings falha. Todavia, h possui órbita normal crossings, pois quaisquer translações se cruzam transversalmente e não em mais de dois pontos. O problema é que Y passa por \mathcal{A} em dois pontos $h(x) = (y_1, 0)$ e $h(x') = i_{1,0}(y_1, 0) = (-y_1, 0)$ na mesma órbita. A imagem de $d\omega_{(y_1,0)}$ e $d\omega_{i_{1,0}(y_1,0)}$ são o subespaço $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 | u_2 = 0\}$. Portanto, as imagens de df_x e $df_{x'}$ não podem gerar o espaço \mathbb{C}^2 .

Definição 3.20. Uma aplicação $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é de órbita injetora sobre \mathcal{A} (por G) se a restrição de $\omega \circ h$ a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetora. A definição se estende aos germes tomando representantes.

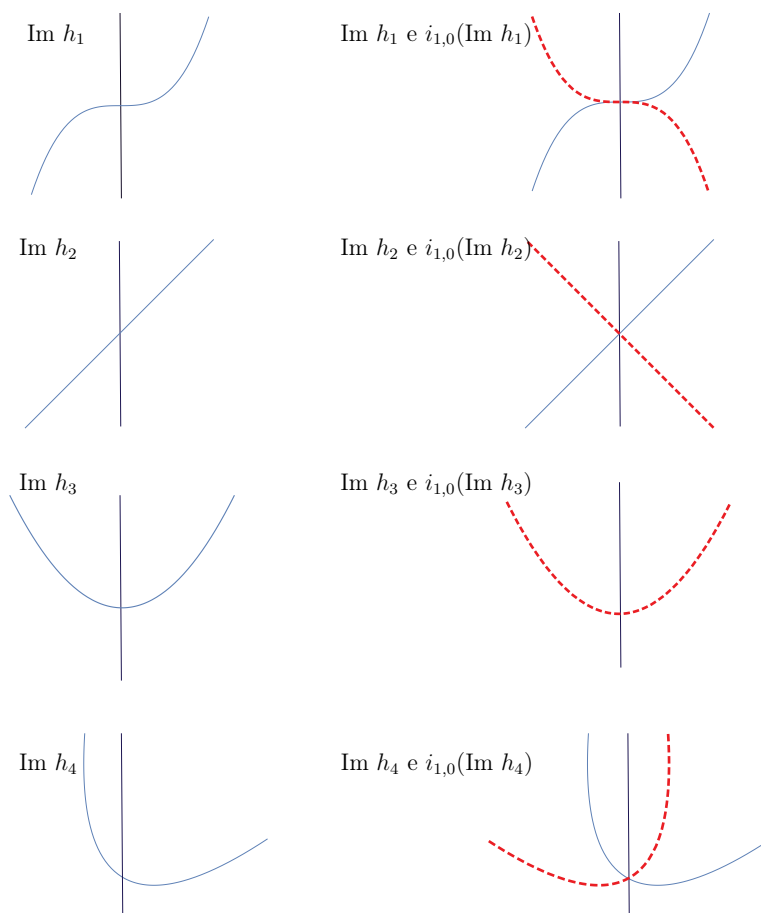


Figura 3.5: h_1 e h_3 falham em ter órbita normal crossings. h_2 e h_4 possuem órbita normal crossings

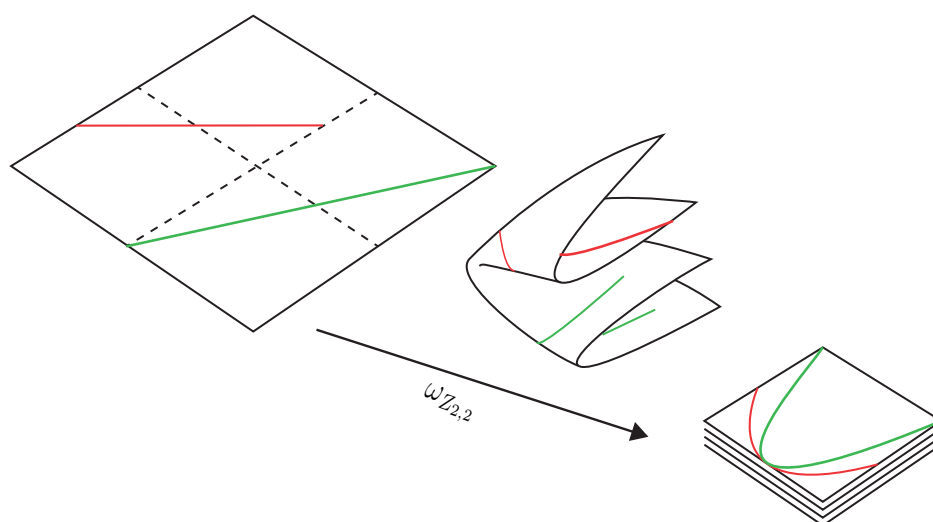


Figura 3.6: Falha na condição de injetividade em \mathcal{A} na órbita por $\omega_{Z_{2,2}}$

Exemplo 3.21. Sejam o grupo de reflexões $Z_{2,2}$ agindo em \mathbb{C}^2 e $h_1(t) = (t, t^3 - t)$, $h_2(t) = (t, t^3)$, $h_3(t) = (t, t^2 - 1)$ e $h_4 = (\sqrt{3}t + t^2, -t + \sqrt{3}t^2)$. Temos que $h_1^{-1}(\mathcal{A}) = \{-1, 0, 1\}$ e $\omega(h_1(-1)) = \omega(-1, 0) = (1, 0)$. De modo análogo, $\omega(h_1(1)) = \omega(1, 0) = (1, 0)$ e então h_1

não é de órbita injetora sobre \mathcal{A} por $Z_{2,2}$.

Temos $h_2^{-1}(\mathcal{A}) = \{0\}$ e $\omega(h_2(0)) = \omega(0,0) = (0,0)$ e então h_2 é de órbita injetora sobre \mathcal{A} por $Z_{2,2}$.

Para h_3 , temos $h_3^{-1}(\mathcal{A}) = \{-1, 0, 1\}$ e $\omega(h(-1)) = \omega(h(1)) = (1,0)$, então h_3 não é de órbita injetora sobre \mathcal{A} por $Z_{2,2}$.

E por fim, $h_4^{-1}(\mathcal{A}) = \{-\sqrt{3}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Então, $\omega(h_4(-\sqrt{3})) = \omega(0, 4\sqrt{3}) = (0, 48)$, $\omega(h_4(0)) = \omega(0,0) = (0,0)$ e $\omega(h_4(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \omega(1 + \frac{1}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}) = (\frac{16}{9}, 0)$. Então, h_4 é órbita injetora sobre \mathcal{A} .

Lema 3.22. *Considere uma aplicação $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$. h é de órbita injetora sobre \mathcal{A} se, e somente se, a restrição de h a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetora e, para $g \in G \setminus \{1\}$, tivermos que*

$$Y \cap gY \cap \mathcal{A} \subseteq \text{Fix } g.$$

Em particular, para $g \in G \setminus \{1\}$ e para todo H_k hiperplano, tivermos que

$$Y \cap gY \cap H_k \subseteq \text{Fix } g.$$

Demonstração. Se $\omega \circ h$ restrito a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetor então h restrito a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetor e dado $y \in Y \cap gY \cap \mathcal{A}$ então existe $y' \in Y$ com $gy' = y$. Pela definição de ω temos $\omega(gy') = \omega(y')$ e pela igualdade $gy' = y$ temos $\omega(gy') = \omega(y)$. Logo, $\omega(y') = \omega(y)$. Tomando $x, x' \in \mathbb{C}^n$ com $h(x) = y$ e $h(x') = y'$ obtemos que $\omega \circ h(x) = \omega \circ h(x')$ e por hipótese $\omega \circ h$ restrito a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetor. Que implica em $x = x'$ e então $y' = y$ e como $gy' = y$ temos que $gy = y$ e logo $y \in \text{Fix } g$.

Dados $x, x' \in \mathbb{C}^n$ com $\omega(x) = \omega(x')$ e $h(x) = y, h(x') = y'$ com ambos $y, y' \in \mathcal{A}$. Logo, $\omega(y) = \omega(y')$ que ocorre apenas se existe $g \in G \setminus \{1\}$ com $gy' = y$ o que implica que $y \in Y \cap gY \cap \mathcal{A}$. Utilizando a hipótese temos que $y \in \text{Fix } g$ e como $gy' = y$ temos que $gy' = gy$ o que implica em $y' = y$. Obtemos $h(x) = h(x')$ e como h restrito a $h^{-1}(\mathcal{A})$ é injetor obtemos $x = x'$.

Como $\mathcal{A} = \bigcup H_k$, com H_k hiperplano. Temos para $g \in G \setminus \{1\}$,

$$Y \cap gY \cap \mathcal{A} \subseteq \text{Fix } g \text{ se, e somente se, } \bigcup (Y \cap gY \cap H_k) \subseteq \text{Fix } g.$$

Ou seja, obtemos que para $g \in G \setminus \{1\}$ e para todo H_k hiperplano, temos

$$Y \cap gY \cap H_k \subseteq \text{Fix } g.$$

□

Teorema 3.23. *Considere $X = \mathbb{C}^n$. Uma aplicação de reflexão $f : X \rightarrow Y$ possui normal crossings se, e somente se, h possui órbita normal crossings e órbita injetora sobre \mathcal{A} .*

Demonstração. Se h não é de órbita injetora sobre \mathcal{A} então pela demonstração do item 2) da Proposição [3.15](#) temos que f não possui normal crossings, pois a condição de transversalidade falha para ω . Portanto, a condição de h ser de órbita injetora sobre \mathcal{A} é uma condição necessária para que f possua normal crossings.

Além disso, a condição de órbita injetora sobre \mathcal{A} também garante que a transversalidade em $\Delta(Y, k)$ é satisfeita por $f \times \cdots \times f$ e por $g_1 h \times \cdots \times g_k h$ em todos os pontos x com $h(x) \in \mathcal{A}$. Isso ocorre pois a condição garante que a imagem (pelas duas funções) de tal x não pode estar contido em $\Delta(Y, k)$. Então a transversalidade ocorre trivialmente.

Isso reduz o problema para verificar se as condições de transversalidade para $f \times \cdots \times f$ e para $g_1 h \times \cdots \times g_k h$ são equivalentes nos pontos da forma $\mathbf{x} = (x, x_2, \dots, x_k) \in X^{(k)}$, tais que $h(x) \notin \mathcal{A}$ e $h(x_i) = g_i h(x)$ para algum $g_i \in G$. Pelo Lema 3.12 e observando que $d(g^{-1}h)_{x_i} = dg_{h(x_i)}^{-1} dh_{x_i} = g^{-1} dh_{x_i}$, pois g^{-1} é linear, em tal ponto temos:

$$\begin{aligned} d(f \times \cdots \times f)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k &= df_x(T_x X) \oplus df_{x_2}(T_{x_2} X) \oplus \cdots \oplus df_{x_k}(T_{x_k} X) \\ &= d\omega_{h(x)}(dh_x T_x X) \oplus d\omega_{g_2 h(x)}(dh_{x_2} T_{x_2} X) \oplus \cdots \oplus d\omega_{g_k h(x)}(dh_{x_k} T_{x_k} X) \\ &= d\omega_{h(x)}(dh_x T_x X) \oplus d\omega_{h(x)}(g_2^{-1}(dh_{x_2} T_{x_2} X)) \oplus \cdots \oplus d\omega_{h(x)}(g_k^{-1}(dh_{x_k} T_{x_k} X)) \\ &= (d\omega_{h(x)} \times \cdots \times d\omega_{h(x)})(dh_x T_x X \oplus d(g_2^{-1}h)_{x_2} T_{x_2} X \oplus \cdots \oplus d(g_k^{-1}h)_{x_k} T_{x_k} X) \\ &= (d\omega_{h(x)} \times \cdots \times d\omega_{h(x)})(d(h \times g_2^{-1}h \times \cdots \times g_k^{-1}h)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k). \end{aligned}$$

Como $h(x) \notin \mathcal{A}$, segue que ω é um biholomorfismo local em $h(x)$, e portanto $d\omega_{h(x)} \times \cdots \times d\omega_{h(x)}$ é um isomorfismo levando o tangente $T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k)$ no tangente $T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} \Delta(Y, k)$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} d(f \times \cdots \times f)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k + T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} \Delta(Y, k) &= \\ (d\omega_{h(x)} \times \cdots \times d\omega_{h(x)})(d(h \times g_2^{-1}h \times \cdots \times g_k^{-1}h)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k + T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k)). \end{aligned}$$

Ou seja, se $f \times \cdots \times f$ possui normal crossings então

$$d(f \times \cdots \times f)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k + T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} \Delta(Y, k) = T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} Y^k.$$

Então

$$(d\omega_{h(x)} \times \cdots \times d\omega_{h(x)})(d(h \times g_2^{-1}h \times \cdots \times g_k^{-1}h)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k + T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k)) = T_{(f \times \cdots \times f)(\mathbf{x})} Y^k,$$

ocorre se, e somente se,

$$d(h \times g_2^{-1}h \times \cdots \times g_k^{-1}h)_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}} X^k + T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k) = T_{(h(x), \dots, h(x))} Y^k. \quad (3.2)$$

Observamos $T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k) \cong T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} \Delta(Y, k)$ e $T_{(h(x), \dots, h(x))} Y^k \cong T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} Y^k$.

De fato, considere a aplicação tangente

$$d(id \times g_2^{-1} \times \cdots \times g_k^{-1})_{(h(x), \dots, h(x))} : T_{(h(x), \dots, h(x))} Y^k \rightarrow T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} Y^k.$$

Como a aplicação $id \times g_2^{-1} \times \cdots \times g_k^{-1}$ é multilinear e isomorfismo, temos que $d(id \times g_2^{-1} \times \cdots \times g_k^{-1})_{(h(x), \dots, h(x))} = (id \times g_2^{-1} \times \cdots \times g_k^{-1})_{(h(x), \dots, h(x))}$. Então, obtemos o isomorfismo $T_{(h(x), \dots, h(x))} Y^k \cong T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} Y^k$.

Restringindo a aplicação $d(id \times g_2^{-1} \times \cdots \times g_k^{-1})_{(h(x), \dots, h(x))}$ ao espaço $T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k)$, obtemos o isomorfismo $T_{(h(x), \dots, h(x))} \Delta(Y, k) \cong T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} \Delta(Y, k)$.

Então, na Equação 3.2 temos:

$$d(h \times g_2^{-1}h \times \cdots \times g_k^{-1}h)_x T_x X^k + T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} \Delta(Y, k) = T_{(h(x), g_2^{-1}h(x), \dots, g_k^{-1}h(x))} Y^k.$$

□

Exemplo 3.24. Pelos Exemplos 3.18 e 3.21 e pelo Teorema 3.23, temos que $\omega \circ h_4$ possui normal crossings pelo grupo de reflexões $Z_{2,1}$. Mas, não pelo grupo $Z_{2,2}$. Basta observar a Figura 3.7. Pois, $\text{Im } h_4$ e $i_{1,1} \text{Im } h_4$ não são transversais.

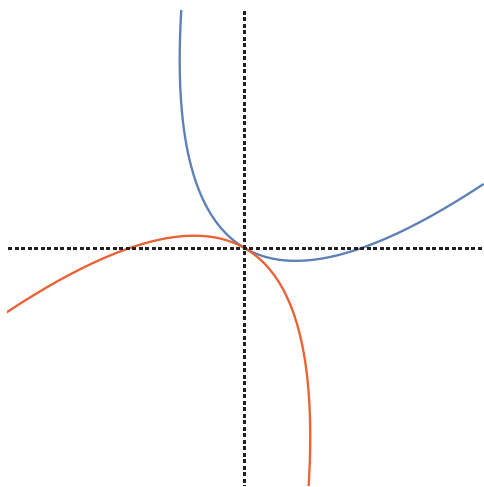


Figura 3.7: h_4 em $Z_{2,2}$ falha com a condição órbita normal crossings.

Exemplo 3.25. A aplicação $\tilde{h}_4 = (\sqrt{3}t + t^2 - 1/10, -t + \sqrt{3}t^2 - 1/10)$ é de órbita normal crossings e injetora na órbita em $Z_{2,2}$. Como pode ser visto na Figura 3.8.

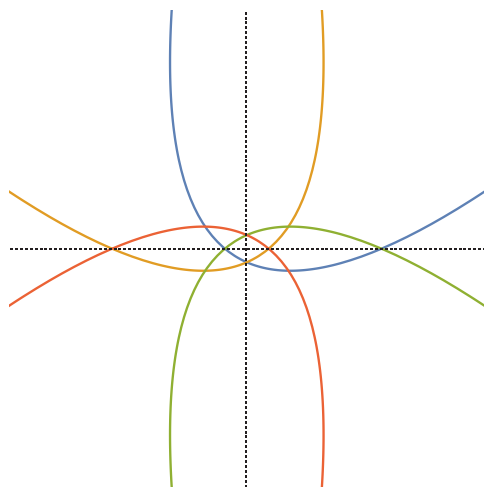


Figura 3.8: \tilde{h}_4 satisfaz a condição órbita normal crossings para $Z_{2,2}$.

A partir da descrição da condição injetividade na órbita sobre \mathcal{A} , obtemos o seguinte resultado sobre obstrução para uma aplicação de reflexão possuir normal crossings:

Proposição 3.26. *Não existe germe de aplicação de quasi-reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com normal crossings e posto $G > 2(p - n) + 1$.*

Demonstração. Mostremos que h não é órbita injetora sobre \mathcal{A} . Temos $Y \cap gY \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ pois $0 \in Y \cap gY \cap \mathcal{A}$. Como $\text{codim}(Y \cap gY \cap \mathcal{A}) < \text{codim } Y + \text{codim } gY + \text{codim } \mathcal{A} = p - n + p - n + 1$ então $\dim Y \cap gY \cap \mathcal{A} > p - (2p - 2n + 1) = 2n - p - 1$. Suponha que posto $G = r$ e seja C a face passando pela origem, então $\dim C = p - r$, sabemos que existe $g \in G$ com $C = \text{Fix } g$. Por hipótese, $r > 2(p - n) + 1$ que ocorre se, e somente se, $p - r < p - 2(p - n) - 1$, ou seja, $p - r < 2n - p - 1$. Como $\dim Y \cap gY \cap \mathcal{A} \geq 2n - p - 1$ e $\dim C = \dim \text{Fix } g = p - r$ obtemos que $Y \cap gY \cap \mathcal{A} \subseteq \text{Fix } g = C$ não pode ocorrer. Então não existe h de órbita injetora e portanto não existe tal aplicação f . \square

Observação 3.27. A Proposição 3.26 não impõe restrições no caso que $p \geq 2n - 1$. Pois, não temos informações alguma sobre grupos de reflexão G com posto $G > p$. Por outro lado, temos que apenas grupos com posto $G = 1$ podem produzir aplicações de reflexão. Em particular, como a aplicação ω é de reflexão, basta tomarmos $h = id$, temos que o resultado é consistente com a Proposição 3.15. Pois, nesse caso, a única face possui $\dim n - 1$.

A partir dos resultados que obtemos e com o seguinte Teorema, essencialmente proposto por Hassler Whitney (1907-1989), que pode ser encontrado em [Whi36]. Podemos caracterizar a estabilidade de aplicações de reflexão $f : X \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$, com $\dim X = n$.

Teorema 3.28. *Seja X variedade complexa de dimensão n e Y variedade complexa de dimensão $2n$. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é estável se, e somente se, f é imersão com normal crossings.*

Corolário 3.29. *Seja X uma variedade complexa de dimensão n . Uma aplicação de reflexão $f : X \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ é estável se, e somente se,*

- 1) h possui órbita normal crossings,
- 2) $Y \cap gY \cap \mathcal{A} \subseteq \text{Fix } g$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$,
- 3) $T_y Y \cap C^\perp = 0$, para todo $y \in Y$ e $C \in \mathcal{C}$ com $y \in C$.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.28, Lema 3.22, Teorema 3.23 e Lema 3.4. \square

Corolário 3.30. *Um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ é \mathcal{A} -finita se, e somente se, h satisfaz os itens 1) e 2) do Corolário 3.29 e a seguinte condição:*

- 3a) $T_y Y \cap C^\perp = 0$, para todo $y \in Y \setminus \{0\}$ e $C \in \mathcal{C}$ com $y \in C$.

Demonstração. Se f é \mathcal{A} -finita então podemos considerar um representante \tilde{f} de f definido em uma vizinhança U de 0 de modo \tilde{f} restrita a $U \setminus \{\tilde{f}^{-1}(0)\}$ é estável e podemos, caso necessário, tomar U de modo que $\tilde{f}(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ em U . Nesse contexto, o resultado segue diretamente do Teorema 3.28, Lema 3.22, Teorema 3.23 e Lema 3.4. \square

Capítulo 4

Espaços de pontos duplos $D^2(f)$ e $B^2(f)$ para uma aplicação de reflexão

Nesse capítulo iremos definir e estudar os espaços de pontos duplos $D^2(f)$ e $B^2(f)$ para uma aplicação de reflexão $f = \omega \circ h$. Nosso principal objetivo é dar uma decomposição do espaço $D^2(f)$ e $B^2(f)$. Porém, conseguiremos isso apenas para $B^2(f)$ em termos de $B^2(\omega)$ e uma aplicação \tilde{h} , induzida por h . Será mostrado que tal decomposição depende diretamente do grupo de reflexão G . Tal resultado nos ajudará no próximo capítulo a determinar uma condição para que f seja \mathcal{A} -finita.

A partir desse capítulo utilizaremos os resultados enunciados na Seção [1.9](#).

4.1 O espaço de pontos duplos $D^2(\omega)$

Sejam X e Y variedades complexas de dimensões n e p , respectivamente. Dados U e V abertos coordenados de X e Y , respectivamente. Consideramos $x = x_1, \dots, x_n$ e $y = y_1, \dots, y_p$ sistema de coordenadas em U e V . Dada aplicação $f : X \rightarrow Y$ e $x', x \in U$, queremos estudar os pontos $(x, x') \in X \times X$ de modo que $f(x) = f(x')$.

Como $\Delta X \subseteq (f \times f)^{-1}\Delta Y$ e utilizando que $V(\mathcal{I}_{\Delta X}) = \Delta X$ e $V((f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y}) = (f \times f)^{-1}\Delta Y$ então

$$\begin{aligned} I(V((f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y})) &\subseteq I(V(\langle x_i - x'_i | i = 1, \dots, n \rangle)) = \sqrt{\langle x_i - x'_i | i = 1, \dots, n \rangle} \\ &= \langle x_i - x'_i | i = 1, \dots, n \rangle. \end{aligned}$$

Como $I(V((f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y})) = \sqrt{(f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y}}$ e $(f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y} \subseteq \sqrt{(f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y}}$ então concluímos $(f \times f)^*\mathcal{I}_{\Delta Y} \subseteq \mathcal{I}_{\Delta X}$.

Isto é, existe uma matriz $\alpha \in M_{p,n}(\mathcal{O}_{U \times U})$, satisfazendo a equação

$$f(x) - f(x') = \alpha(x, x')(x - x'). \quad (4.1)$$

Quando for necessário enfatizar que α é a matriz que satisfaz a equação [4.1](#) para f

iremos denotar α_f .

Observação 4.1. 1) Uma maneira de calcular a matriz α é do seguinte modo: denotemos $x^i = (x_1, \dots, x_{n-i}, x'_{n-i+1}, \dots, x'_n)$, para $i = 0, \dots, n$. Como $x^0 = x$ e $x^n = x'$ podemos considerar

$$f(x) - f(x') = f(x^0) - f(x^1) + f(x^1) - f(x^2) + f(x^2) + \dots - f(x^{n-1}) + f(x^{n-1}) - f(x^n),$$

Cada $x_i - x'_i$ divide $f(x^{i-1}) - f(x^i)$, podemos tomar as aplicações

$$\alpha_{ji}(x, x') = \frac{f_j(x^{i-1}) - f_j(x^i)}{x_i - x'_i}.$$

Então, $\alpha = (\alpha_{ji})$, para $1 \leq j \leq p$ e $1 \leq i \leq n$.

- 2) Como a matriz α depende do sistema de coordenadas nos abertos de $X \times X$, temos que α não é unicamente determinada.
- 3) Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ então $T(v - u) = Tv - Tu$ e então a matriz que determina T é a matriz α .

Exemplo 4.2. Considere a aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por $(x, y) \mapsto (x^2, y^2, x^3 + y^3 + xy)$. Vamos encontrar a matriz α de f .

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x', y') &= f(x, y) - f(x', y) + f(x', y) - f(x', y') \\ &= \frac{f(x, y) - f(x', y)}{x - x'}(x - x') + \frac{f(x', y) - f(x', y')}{y - y'}(y - y') \\ &= \left(\frac{f(x, y) - f(x', y)}{x - x'} \quad \frac{f(x', y) - f(x', y')}{y - y'} \right) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x^2 - x'^2}{x - x'} & 0 \\ 0 & \frac{y^2 - y'^2}{y - y'} \\ \frac{x^3 - x'^3 + (x - x')y}{x - x'} & \frac{y^3 - y'^3 + (y - y')x'}{y - y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + x' & 0 \\ 0 & y + y' \\ x^2 + xx' + x'^2 + y & y^2 + yy' + y'^2 + x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então, a matriz α de f é

$$\begin{pmatrix} x + x' & 0 \\ 0 & y + y' \\ x^2 + xx' + x'^2 + y & y^2 + yy' + y'^2 + x' \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.3 (Matriz α de $\omega_{D_{2n}}$). Vamos encontrar a matriz α de $\omega : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, onde $\omega(x, y) = (x^n + y^n, xy)$ é a aplicação órbita do grupo D_{2n} . Temos

$$\begin{aligned} \omega(x, y) - \omega(x', y) + \omega(x', y) - \omega(x', y') &= \frac{\omega(x, y) - \omega(x', y)}{x - x'}(x - x') + \frac{\omega(x', y) - \omega(x', y')}{y - y'}(y - y') \\ &= \left(\frac{\omega(x, y) - \omega(x', y)}{x - x'} \quad \frac{\omega(x', y) - \omega(x', y')}{y - y'} \right) \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x^n - x'^n}{x - x'} & \frac{y^n - y'^n}{y - y'} \\ \frac{(x - x')y}{x - x'} & \frac{(y - y')x'}{y - y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k} & \sum_{k=0}^n y^k (y')^{n-k} \\ y & x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, a matriz α de ω é

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k} & \sum_{k=0}^n y^k (y')^{n-k} \\ y & x' \end{pmatrix}.$$

Definição 4.4. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ cobertura de X e considere a decomposição $X \times X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times U_\alpha) \cup ((X \times X) \setminus \Delta X)$. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ o feixe de pontos duplos $\mathcal{I}^2(f)$ em $\mathcal{O}_{X \times X}$ é definido como: Para abertos da forma $U_\alpha \times U_\alpha$ e a matriz α satisfazendo [4.1](#)

$$\langle \text{menores } n \times n \text{ da matriz } \alpha \rangle + (f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y},$$

e no aberto $(X \times X) \setminus \Delta X$ definimos

$$(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y},$$

em que $(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y} := (f \times f)^* \langle y'_j - y_j \mid j = 1, \dots, p \rangle = \langle y'_j \circ f - y_j \circ f \mid j = 1, \dots, p \rangle$.

Observação 4.5. O feixe de ideais $\mathcal{I}^2(f)$ possui duas definições: uma para abertos ao longo da diagonal ΔX e outra no aberto $(X \times X) \setminus \Delta X$. Essa definição é feita a partir de como é definido o feixe de ideais $\mathcal{I}_{\Delta Y}$ ao longo da diagonal $\Delta Y \subseteq Y \times Y$. Todavia, ambos os feixes, na diagonal e fora dela, formam apenas um feixe de ideais que definimos como $\mathcal{I}^2(f)$.

A *priori* devemos mostrar que o ideal $\mathcal{I}^2(f)$ é bem definido em abertos na interseção de ambos os feixes. Esse processo técnico é chamado de *gluing sheaves* e o leitor poderá encontrar esse resultado feito em [\[NBPS17\]](#).

Exemplo 4.6 (O ideal $\mathcal{I}^2(\omega_{D_{2n}})$). Considerando $\omega : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ e e_1, e_2 coordenadas locais de \mathbb{C}^2 , com $(x, y) \mapsto (x^n + y^n, xy)$. Temos que

$$\det \alpha = \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k+1} - \sum_{k=0}^n y^{k+1} (y')^{n-k}$$

e

$$\begin{aligned} (\omega \times \omega)^* \mathcal{I}_{\Delta \mathbb{C}^2} &= \langle e_1 \circ \omega(x, y) - e_1 \circ \omega(x', y'), e_2 \circ \omega(x, y) - e_2 \circ \omega(x', y') \rangle \\ &= \langle x^n + y^n - x'^n + y'^n, xy - x'y' \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{I}^2(\omega) = \left\langle \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k+1} - \sum_{k=0}^n y^{k+1} (y')^{n-k}, x^n + y^n - x'^n + y'^n, xy - x'y' \right\rangle.$$

Definição 4.7. Dado $f : X \rightarrow Y$, temos que o espaço de pontos duplos de f é definido como o conjunto dos zeros de $\mathcal{I}^2(f)$ em $X \times X$, ou seja,

$$D^2(f) = V(\mathcal{I}^2(f)).$$

Exemplo 4.8 ($D^2(\omega_{D_6})$). Como visto no Exemplo 4.6 $\mathcal{I}(\omega_{D_{2n}})$ é dado por

$$\left\langle \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k+1} - \sum_{k=0}^n y^{k+1} (y')^{n-k}, x^n + y^n - x'^n + y'^n, xy - x'y' \right\rangle.$$

Fazendo $n = 3$ temos:

$$\langle (x')^4 + x(x')^3 + x^2(x')^2 + x^3(x') - (y(y')^3 + y^2(y')^2 + y^3y' + y^4), x^3 + y^3 - x'^3 + y'^3, xy - x'y' \rangle.$$

Então, $D^2(\omega_{D_6})$ é o conjunto solução determinado por:

$$\begin{aligned} (x')^4 + x(x')^3 + x^2(x')^2 + x^3(x') &= y(y')^3 + y^2(y')^2 + y^3y' + y^4, \\ x^3 + y^3 - x'^3 + y'^3 &= 0, \\ xy - x'y' &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.9 ($D^2(\omega_{Z_{2,2}})$). Temos que $\alpha_{\omega_{Z_{2,2}}}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} x + x' & 0 \\ 0 & y + y' \end{pmatrix}.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} D^2(\omega_{Z_{2,2}}) &= V(\langle (x + x')(y + y') \rangle + \langle x^2 - x'^2, y^2 - y'^2 \rangle) \\ &= V(\langle (x + x')(y + y') \rangle) \cap V(\langle x^2 - x'^2, y^2 - y'^2 \rangle). \end{aligned}$$

Então, $D^2(\omega_{Z_{2,2}})$ é definido pelas equações:

$$\begin{aligned} (x + x')(y + y') &= 0, \\ x^2 &= x'^2, \\ y^2 &= y'^2. \end{aligned}$$

Observação 4.10. Seja e_i um elemento da base canônica de \mathbb{C}^n . Então,

$$\alpha_{ji}(x, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha_{ji}(x, x + \lambda e_i) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f_j(x) - f_j(x + \lambda e_i)}{\lambda} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Portanto, $V(\mathcal{J}^2(f))$ é dado pelo pontos

- 1) $(x, x) \in X \times X$, onde f é singular em x e
- 2) $(x, x') \in X \times X \setminus \Delta(X)$ onde $f(x) = f(x')$.

Proposição 4.11. *Para qualquer $f : X \rightarrow Y$, com $n = \dim X$ e $p = \dim Y$, temos:*

- 1) *Como conjuntos, $D^2(f)$ consiste de pontos duplos estritos $(x, x') \in X \times X$, com $x \neq x'$ e $f(x) = f(x')$ e pontos singulares $(x, x) \in \Delta X$ tais que f é singular em x .*
- 2) *Se $D^2(f)$ é não vazio, então possui dimensão $\geq 2n - p$. E, se $\dim D^2(f) = 2n - p$, então $D^2(f)$ é um espaço Cohen-Macaulay.*
- 3) *Se f é estável, então $D^2(f)$ é o fecho dos pontos duplos estritos de f .*

Demonstração. O item 1) foi verificado na Observação 4.10. A demonstração dos demais itens pode ser encontrada em [NBPS17]. \square

Observação 4.12. Dado \mathbb{C}^p espaço vetorial e G grupo de reflexões agindo em \mathbb{C}^p . Considere ω a aplicação órbita definida por G . Utilizando a Observação 4.10 com ω , temos:

- 1') $(y, y) \in \Delta(\mathbb{C}^p)$, onde ω é singular em y . Pelo Lema 2.40, sabemos que ω é singular exatamente para os pontos $y \in \mathcal{A}$.
- 2') $(y, y') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \setminus \Delta(\mathbb{C}^p)$ tais que $\omega(y) = \omega(y')$. Como ω é uma aplicação órbita então $\omega(y) = \omega(y')$ ocorre se, e somente se, $y' = gy$, para algum $g \in G \setminus \{1\}$.

Isto é, $D^2(\omega)$ consiste dos pontos:

- 1) $(y, y) \in \Delta(\mathbb{C}^p)$ tal que $y \in \mathcal{A}$;
- 2) $(y, gy) \in (\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{C}^p$, para algum $g \in G \setminus \{1\}$.

Definição 4.13. Dado G qualquer grupo de reflexões agindo em \mathbb{C}^p . Para qualquer $g \in G \setminus \{1\}$, escrevemos $D_g = \{(y, gy) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p\}$.

Observação 4.14.

- 1) Considerando $y \in \mathbb{C}^p$, $g \in G \setminus \{1\}$ e $gy = y'$ temos que

$$D_g = V(gy - y').$$

Então, o espaço complexo $D_g = (D_g, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} / \langle gy - y' \rangle)$ é reduzido em qualquer ponto $(y, y') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, segue do fato do feixe de ideais $\langle gy - y' \rangle$ ser gerado por equações de grau 1. Então, é ideal radical.

2) Temos um resultado mais geral: D_g é regular. Ou seja, $D_{g,(y,y')} \cong \mathcal{O}_{n,(y,y')}$, para qualquer $(y, y') \in (\mathbb{C}^p)^2$. De fato, considerando qualquer aberto $U \times V \subseteq \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, contendo (y, y') . Temos que $Jac(\langle gy - y' \rangle)$ em $(\mathbb{C}^p)^2$ é diferente de 0. Então

$$\begin{aligned} Sing(D_g) &= Sing(V(\langle gy - y' \rangle)) \\ &= V(\langle gy - y' \rangle + Jac(\langle gy - y' \rangle)) \\ &= V(\langle gy - y' \rangle) \cap V(Jac(\langle gy - y' \rangle)) \\ &= V(\langle gy - y' \rangle) \cap \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Teorema 4.15. *Seja G um grupo de reflexões agindo em \mathbb{C}^p e ω a aplicação órbita definida por G . O espaço de pontos duplos $D^2(\omega)$ é um espaço complexo reduzido, com decomposição irredutível*

$$D^2(\omega) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} D_g. \quad (4.2)$$

Demonstração. $D^2(\omega)$ é um espaço complexo por definição. Mostremos primeiro a igualdade 4.2 como conjunto.

Pela Proposição 4.11 temos que $D^2(\omega)$ consiste de pontos duplos estritos $(y, y') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, com $y \neq y'$ e $\omega(y) = \omega(y')$ e pontos singulares $(y, y) \in \Delta \mathbb{C}^p$ tais que ω é singular em y .

Se $\mathbf{y} \in \{(y, y') \in (\mathbb{C}^p)^2 \setminus \Delta(\mathbb{C}^p) \mid \omega(y) = \omega(y')\}$ então $y' = gy$, para algum $g \in G \setminus \{1\}$. Portanto, $\mathbf{y} \in D_g$. Se $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbb{C}^p)$ com $y \in Sing(\omega)$ então, pelo Lema 2.40, $Sing(\omega) = \mathcal{A}$. Então $y \in C \in \mathcal{C}$, e pelo Lema 2.40 temos que existe $g \in G \setminus \{1\}$ com $Fix(g) = \langle C \rangle$, daí obtemos $(y, y) = (y, gy) \in D_g$.

Então, obtemos $D^2(\omega) \subseteq \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} D_g$.

Mostremos $D_g \subseteq D^2(\omega)$ para qualquer $g \in G$. Considere $\mathbf{y}_g = (y, gy) \in D_g$ para dado $y \in \mathbb{C}^p$. Caso $y \in C_B$, para algum $B \neq \emptyset$. Então, em particular, $y \in \langle C_B \rangle$ e, pela Proposição 2.22, existe $g \in G$ com $Fix(g) = \langle C_B \rangle$. Então, $gy = y$ e, portanto, $y \in Sing(\omega)$ e $\mathbf{y}_g = (y, y)$.

Caso $y \in C_\emptyset$, temos $gy = y'$ para qualquer $g \in G$ e, por definição de aplicação órbita, $\omega(y) = \omega(gy) = \omega(y')$.

Para todo $g \in G \setminus \{1\}$, D_g tem dim p . De fato, $D_g = \text{Im } T_g$, onde T_g é a aplicação linear e injetora dada por $T_g : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$, com $T_g(y) = (y, gy)$, então $\dim D_g = p$. Pela decomposição dada na equação 4.2 temos $\dim D^2(\omega) = p$ e pelo item 2) da Proposição 4.11, $D^2(\omega)$ é Cohen-Macaulay.

Mostraremos que $D^2(\omega)$ é genericamente reduzido, ou seja, que $D^2(\omega)$ é reduzido em um aberto denso de \mathbb{C}^p . Mostraremos que $D^2(\omega)$ é reduzido em $(y, y') \in D^2(\omega)$ com $y \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$. Pela caracterização de $D^2(\omega)$, se $y \notin \mathcal{A}$ então ω não é singular em y . Nesse caso, temos que o feixe de ideais $\mathcal{I}^2(\omega)$ é gerado em cada aberto coordenado por $s(y, y') = \omega(y) - \omega(y')$, pois $\mathcal{I}^2(\omega) = (\omega \times \omega)^* \mathcal{I}_{\Delta \mathbb{C}^p}$. Então, $ds_{(y,y')}(T_{(y,y')}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p)) = d\omega_y(T_y \mathbb{C}^p) + d\omega_{y'}(T_{y'} \mathbb{C}^p)$. Como ω é submersão em $\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$ então $ds_{(y,y')}$ é submersão.

Então, $ds_{(y,y')}$ tem posto máximo e, portanto, não é singular. Ou seja, obtemos que $D^2(\omega)$ é genericamente reduzido.

Como $D^2(\omega)$ é genericamente reduzido e Cohen-Macaulay, utilizando a Proposição 1.81, obtemos que $D^2(\omega)$ é reduzido. □

Exemplo 4.16. O espaço de pontos duplos da aplicação órbita $\omega_{Z_{m_1, \dots, m_p}}$ se decompõe em: dado $a_j \leq m_j$, para $1 \leq j \leq p$, temos

$$D_{i_{a_1, \dots, a_p}} = \{(y, y') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \mid y'_j = e^{\frac{2\pi i}{m_j} a_j} y_j\}.$$

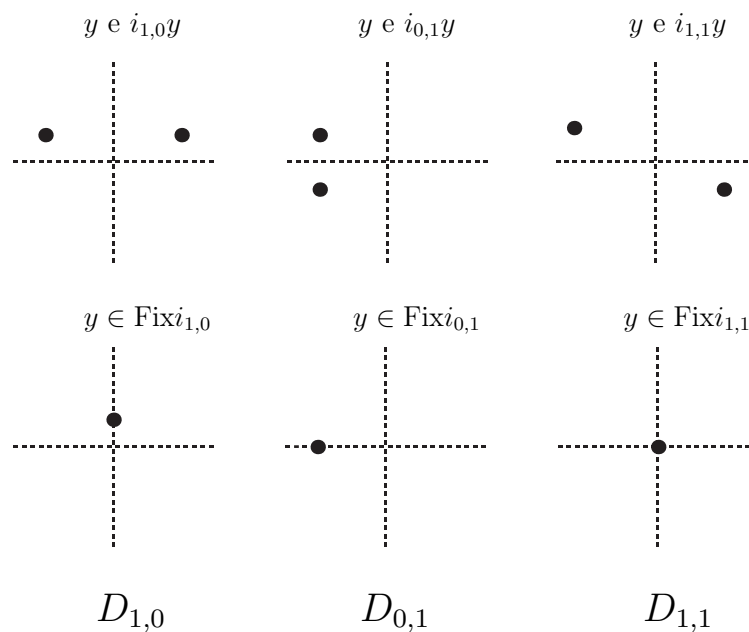


Figura 4.1: Decomposição de $D^2(\omega_{Z_{2,2}})$ em pontos regulares e singulares.

4.2 O espaço de pontos duplos $B^2(\omega)$

Começamos essa seção com algumas propriedades básicas sobre o *blowup*, cuja abordagem será da teoria de categorias. Porém, ressaltamos que iremos usar tal abordagem de acordo com o nosso contexto.

Introduzimos o espaço de pontos duplos $B^2(f)$ e conseguiremos dar uma decomposição para tal espaço, onde f é uma aplicação de reflexão, em termos de $B^2(\omega)$ e h .

Definição 4.17. Seja X espaço complexo. E é um divisor excepcional se para todo $x \in E$ existe uma vizinhança U de x tal que $E \cap U = V(\lambda) \cap U$, para algum $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ não divisor de 0.

Definição 4.18. Seja X variedade complexa e Z subvariedade de X . O *blowup* de X ao longo de Z é um morfismo satisfazendo

- 1) $b : Bl_Z X \rightarrow X$ tal que $b^{-1}(Z)$ é um divisor excepcional;
- 2) Para todo morfismo $\phi : P \rightarrow X$ tal que $\phi^{-1}(Z)$ é divisor excepcional existe um único morfismo $\tilde{\phi} : P \rightarrow Bl_Z X$ satisfazendo $\phi = b \circ \tilde{\phi}$.

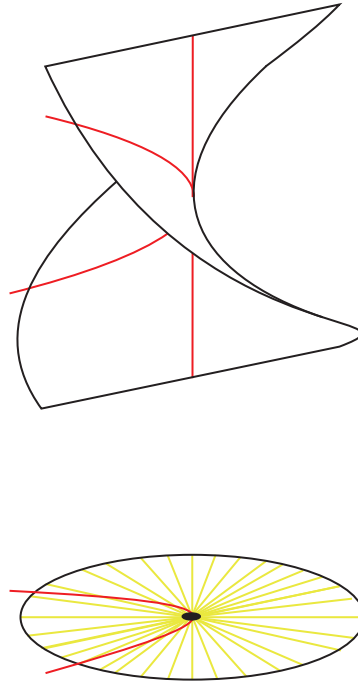


Figura 4.2: Ideia intuitiva do *Blowup* para uma curva ao longo de 0.

Proposição 4.19. *Em conformidade com o enunciado da definição 4.18, o blowup existe.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Fis06], §4.1. □

Proposição 4.20. *Em conformidade com a definição 4.18. Seja b o blowup de Z ao longo de X então*

$$b|_{Bl_Z X \setminus E} : Bl_Z X \setminus E \rightarrow X \setminus Z$$

é isomorfismo.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em 31.32.4 [Vak17]. □

Proposição 4.21. *Em conformidade com a definição 4.18. Seja b o blowup de Z ao longo de X se Z é espaço complexo regular então $Bl_Z X$ é regular.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Vak17], 22.3. □

Definição 4.22. *Seja Z um espaço complexo em \mathbb{C}^n e Y uma subvariedade fechada em Z e sejam $B = Bl_Y Z$ e $b : B \rightarrow Z$ a projeção. Se X é subespaço complexo de Z definimos a transformada estrita de X em B como*

$$\overline{(b^{-1}(X) \setminus E)} = \overline{(b^{-1}(X) \setminus b^{-1}(Y))}.$$

Lema 4.23. *Se $Y_1, Y_2 \subseteq Z$ são subespaços complexos fechados, e nenhuma componente irredutível de Y_2 está contida em Y_1 então $Bl_{Y_1 \cap Y_2} Y_2$ é a transformada estrita de Y_2 em $Bl_{Y_1} Z$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Vak17], 22.2.6. \square

Observação 4.24. Dado um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo K , o espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ é o conjunto de classes de equivalência em $V \setminus \{0\}$ sob a relação de equivalência \sim definida por: $x \sim y$ se houver um elemento $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda y$. Se V é um espaço vetorial topológico, isto é, V possui um produto interno que induz uma topologia, então o espaço quociente $\mathbb{P}(V)$ também é um espaço topológico com a topologia quociente. Temos que se $\dim_K V = n$ então $\dim_K \mathbb{P}(V) = n - 1$.

Denotaremos $\mathbb{P}(\mathbb{C}^p)$ por \mathbb{P}^{p-1} .

Observação 4.25. Dado Z um espaço complexo em \mathbb{C}^n . Seja o vetor $g = (s_1, \dots, s_n)$, onde $s_i \in \mathcal{O}_Z$. Denotaremos por $\langle g \rangle$ o feixe de ideais gerado por g . Dado $u \in \mathbb{C}^n$, onde $u \neq 0$ denotamos $u \wedge g = (g_j u_i - g_i u_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ o vetor com $g_j u_i - g_i u_j \in \mathcal{O}_{Z \times \mathbb{P}^{s-1}}$. Ou seja, $u \wedge g$ são todos os menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{pmatrix}.$$

Então, por abuso de notação $u \wedge g = 0$ significa que u e g são l.d.

Observemos ainda que se L é uma função homogênea com $L(u) = 0$ para $u \in \mathbb{P}^{s-1}$ e $(z, u) \in Z \times \mathbb{P}^{s-1}$ satisfaz $u \wedge g(z) = 0$ então $L(g(z)) = 0$. De fato, se L é homogênea então $L(\lambda u) = \lambda^d L(u)$, para algum $d \in \mathbb{Z}_+$, temos que $u \wedge g(z) = 0$ se, e somente se, $ut = g(z)$ para algum $t \in \mathbb{C}$. Então, $L(g(z)) = L(ut) = t^d L(u) = 0$, pois $L(u) = 0$.

Lema 4.26. *Sejam Z espaço complexo e Y uma subvariedade fechada de codimensão s em Z , e assumamos que o feixe de ideais definindo Y em Z é gerado por $g = (g_1, \dots, g_s)$. Então, o blowup de Z ao longo de Y é*

$$Bl_Y Z = \{(z, [u]) \in Z \times \mathbb{P}^{s-1} \mid u \wedge g = 0\}.$$

onde $b : Bl_Y Z \rightarrow Z$ é dada por $(z, [u]) \mapsto z$ e u é qualquer representante de $[u]$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Vak17], 22.3.7. \square

Proposição 4.27. *Seja X um espaço complexo. Então $X \times \mathbb{P}^p$, para algum p é um espaço complexo. Em particular, dados X variedade complexa e Z subvariedade de X temos que o blowup de Z ao longo de X é uma variedade complexa.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Fis06], §12. Segue da descrição do blowup dado pelo Lema 4.26. \square

Definição 4.28. Dado X uma variedade complexa. Escrevemos $b : B^2(X) \rightarrow X \times X$ para o *blowup* ao longo da diagonal ΔX e o divisor excepcional $E = b^{-1}(\Delta X)$. Em particular, $\dim(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p) = 2p$ e $\dim \Delta \mathbb{C}^p = p$. Como $\Delta \mathbb{C}^p = V(\langle x_1 - x'_1, \dots, x_p - x'_p \rangle)$ e utilizando o Lema 4.26 concluímos

$$B^2(\mathbb{C}^p) = \{(x, x', [u]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1} \mid u \wedge (x - x') = 0\}.$$

Onde $b : B^2(\mathbb{C}^p) \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ é definida por $(x, x', [u]) \mapsto (x, x')$.

Definição 4.29. Sejam X e Y variedades complexas. Dada aplicação $f : X \rightarrow Y$ e $b : B^2(X) \rightarrow X \times X$ o blowup de $X \times X$ ao longo de ΔX e considere $E = V(\mathcal{I}_E)$, onde $E = b^{-1}(\Delta X)$ é o divisor excepcional. Definimos o feixe de ideais $\mathcal{H}^2(f)$ em $\mathcal{O}_{B^2(X)}$ como

$$\mathcal{H}^2(f) = b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y} : \mathcal{I}_E,$$

e

$$B^2(f) = V(\mathcal{H}^2(f)) \subseteq B^2(X).$$

Observação 4.30. A caracterização de $\mathcal{H}^2(f)$ é apresentado em [San16] de um modo diferente ao que fizemos. Originalmente deveríamos utilizar o *gluing sheaves* para mostrar que tal feixe é bem definido dentro e fora da diagonal de $X \times X$. Porém, como mostraremos em 4.31 nossa caracterização é equivalente a apresentada em [San16].

Nosso objetivo é encontrar uma maneira simples de calcular $B^2(f) = V(\mathcal{H}^2(f))$.

Proposição 4.31. *Em conformidade com o enunciado da definição 4.29 e $z \in E$. Seja $U_\alpha \times U_\alpha$ vizinhança coordenada de $b(z)$. Então*

- 1) $B^2(f) \setminus E \cong D^2(f) \setminus \Delta X$; *isomorfismo de espaços complexos,*
- 2) $B^2(f)$ é isomorfo localmente a $\{(x, x', [u]) \in Bl_{\Delta U_\alpha} U_\alpha \times U_\alpha \mid \alpha_f(x, x')u = 0\}$.

Demonstração. 1) Seja $z \in B^2(f)$ tal que $b(z) \notin \Delta X$. Observando que $\mathcal{I}_{E,z} = \mathcal{O}_{B^2(X),z}$ e denotando $B^2(X) \setminus \Delta X = B$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{B^2(f) \setminus E, z} &\stackrel{(a)}{=} \frac{\mathcal{O}_{B,z}}{b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y, z} : \mathcal{I}_{E, z}} \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{\mathcal{O}_{B,z}}{b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y, z}} \\ &\stackrel{(c)}{\cong} \frac{\mathcal{O}_{X \times X \setminus \Delta X, b(z)}}{(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y, b(z)}} \\ &\stackrel{(d)}{\cong} \mathcal{O}_{D^2 \setminus \Delta X, b(z)} \end{aligned}$$

(a) Segue da definição de $B^2(f)$.

(b) Como $\mathcal{I}_{E,z} = \mathcal{O}_{B^2(X),z}$, pois $\mathcal{I}_{E,z}$ é o ideal que define o divisor excepcional e usando o item 3) da Proposição 1.27 obtemos

$$b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y, z} : \mathcal{I}_{E, z} = b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y, z}.$$

(c) Aplicando b^* e usando a Proposição 1.62. Observamos que $b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_E \cong (f \times f)^* \mathcal{I}_E$. De fato, temos que $D^2(f) \setminus \Delta X \subseteq X \times X$ e que $D^2(f) \setminus \Delta X \cong b^{-1}(D^2(f) \setminus \Delta X)$, pois b é isomorfismo fora da diagonal ΔX . Então, $V((f \times f)^* \mathcal{I}_E) = D^2(f) \setminus \Delta X \cong b^{-1}(D^2(f) \setminus \Delta X) = V(b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_E)$. Portanto, $b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_E \cong (f \times f)^* \mathcal{I}_E$.

(d) Por definição de $\mathcal{O}_{D^2(f)}$.

- 2) Temos que o elemento $b^*(f(x') - f(x))|_{W_i}$ é isomorfo ao elemento $f(x + \lambda a) - f(x)$, onde $f(x + \lambda a) - f(x) \in \langle \lambda \rangle$, pois $\frac{f(x + \lambda a) - f(x)}{\lambda} \lambda \in \langle \lambda \rangle$. Como $\mathcal{I}_{E|W_i} = \langle \lambda \rangle$ e usando na primeira igualdade o item 3) da Proposição 1.27. Então

$$\begin{aligned} b^*(f \times f)^* \mathcal{I}_{\Delta Y|W_i} : \mathcal{I}_{E|W_i} &= \left\langle \frac{f_j(x + \lambda a) - f_j(x)}{\lambda} \mid j = 1, \dots, p \right\rangle \\ &= \frac{\alpha_f(x + \lambda a, x)(x + \lambda a - x)}{\lambda} \\ &= \frac{\alpha_f(x + \lambda a, x)\lambda a}{\lambda} \\ &\cong \alpha_f(x, x')u \end{aligned}$$

□

Observação 4.32. Novamente como na Observação 4.10. Como conjunto $B^2(f)$ consiste de pontos duplos estritos $z = b^{-1}(x, x')$, com $(x, x') \in X \times X$ e $x \neq x'$ e $f(x) = f(x')$; e pontos singulares $(x, x, [u]) \in E$, tais que $[u] \in \mathbb{P}(\ker df_x)$.

Dado grupo de reflexão G agindo em \mathbb{C}^p e ω sua aplicação órbita. Temos como conjunto que $B^2(\omega)$ consiste de pontos duplos estritos $z = b^{-1}(x, gx)$, com $g \in G \setminus \{1\}$ com $x \notin \mathcal{A}$ e pontos singulares $(x, x, [u]) \in E$, tais que se $x \in C$ com $C \in \mathcal{C}$ e $u \in \mathbb{P}(\langle C^\perp \rangle)$.

Exemplo 4.33 ($B^2(\omega_{D_{2n}})$). Considere $\omega_{D_{2n}} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Pelo Exemplo 4.3 temos que a matriz α de $\omega_{D_{2n}}$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k} & \sum_{k=0}^n y^k (y')^{n-k} \\ y & x' \end{pmatrix}.$$

Pelo item 2) da Proposição 4.31 temos que $B^2(\omega_{D_{2n}})$ é isomorfo a solução de

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n x^k (x')^{n-k} \right) u_0 + \left(\sum_{k=0}^n y^k (y')^{n-k} \right) u_1 &= 0, \\ y u_0 + x' u_1 &= 0, \\ u_0 (y - y') - u_1 (x - x') &= 0. \end{aligned}$$

Para $n = 3$, temos

$$\begin{aligned} ((x')^3 + x(x')^2 + x^2(x') + x^3)u_0 + ((y')^3 + y(y')^2 + y^2(y') + y^3)u_1 &= 0, \\ yu_0 + x'u_1 &= 0, \\ u_0(y - y') - u_1(x - x') &= 0. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é obter uma decomposição de $B^2(\omega)$ assim como foi feito para $D^2(\omega)$, no Teorema 4.15. Para isso introduzimos o espaço B_g :

Definição 4.34. Para qualquer elemento $g \neq 1$ de um grupo de reflexões G agindo em \mathbb{C}^p , escrevemos $b_g : B_g \rightarrow D_g$ para o blowup de D_g ao longo de

$$D_g \cap \Delta \mathbb{C}^p = \{(y, y) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \mid y \in \text{Fix } g\}.$$

Portanto, $B_g = Bl_{D_g \cap \Delta(\mathbb{C}^p)} D_g = Bl_{\Delta(\text{Fix } g)} D_g$.

Proposição 4.35. Para qualquer elemento $g \neq 1$ de um grupo de reflexões G agindo em \mathbb{C}^p , escrevemos $b_g : B_g \rightarrow D_g$ para o blowup de D_g ao longo de $D_g \cap \Delta \mathbb{C}^p$. Temos

- 1) Para todo $g \in G \setminus \{1\}$, o espaço B_g é regular.
- 2) A função $b_g : B_g \rightarrow D_g$ é um isomorfismo se, e somente se, g é uma reflexão.
- 3) B_g mergulha em $B^2(\mathbb{C}^p)$ como a transformada estrita de D_g , que é precisamente o conjunto de pontos $(y, gy, [y - gy]) \in B^2(\mathbb{C}^p)$, com $y \notin \text{Fix } g$ e pontos $(y, y, [u]) \in B^2(\mathbb{C}^p)$, com $y \in \text{Fix } g$ e $[u] \in \mathbb{P}((\text{Fix } g)^\perp)$.

Demonstração. 1) Como $\mathcal{O}_{\Delta \text{Fix } g}$ é regular e usando a Proposição 4.21 obtemos que B_g é regular.

- 2) Seja g é uma reflexão então $\Delta \text{Fix } g$ é dado pela equação $y' - y$. Então, $\Delta \text{Fix } g$ é um divisor excepcional em D_g . Temos pela definição 4.18 que existe \tilde{b} satisfazendo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B_g & \xrightarrow{b} & D_g \\ & \swarrow \tilde{b} & \downarrow id \\ & & D_g \end{array}$$

onde $\tilde{b} \circ b = id$ e, de modo análogo, temos $b \circ \tilde{b} = id$.

- 3) Utilizando o Lema 4.23 temos que $B_g = \overline{b^{-1}(D_g) \setminus b^{-1}(\Delta \mathbb{C}^p)}$, onde $b : B^2(\mathbb{C}^p) \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$. É claro que B_g contém os pontos da forma $(y, gy, [y - gy]) \in B^2(\mathbb{C}^p)$ com $y \notin \text{Fix } g$. Usaremos o próximo argumento na demonstração da Proposição 4.37. Mostremos que

$$Z \cap E = \{(y, y, [v]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1} \mid y \in \text{Fix } g \text{ e } v \in (\text{Fix } g)^\perp\} \subseteq B_g.$$

De fato, primeiro observamos que a aplicação $(\text{Fix } g)^\perp \rightarrow (\text{Fix } g)^\perp$ dada por $u \mapsto u - gu$ é sobrejetora, pois é injetora. Logo, para qualquer $v \in (\text{Fix } g)^\perp$ existe $u \in (\text{Fix } g)^\perp$ com $u - gu = v$. Considere a sequência x_n de pontos em B_g dada por

$$\{(y + \frac{1}{n}u, y + \frac{1}{n}gu, [\frac{1}{n}v])\} = \{(y + \frac{1}{n}u, y + \frac{1}{n}gu, [v])\}.$$

Então, $x_n \rightarrow (y, y, [v]) \in Z \cap E$. Ou seja, $Z \cap E \subseteq B_g$. □

Definição 4.36. Escrevemos \mathcal{H}_g para o feixe de ideais definindo B_g em $B^2(\mathbb{C}^p)$.

Proposição 4.37. *Sejam L_1, \dots, L_p formas lineares linearmente independentes de \mathbb{C}^p em \mathbb{C} tais que*

$$\text{Fix } g = \{y \in \mathbb{C}^p \mid L_1(y) = \dots = L_r(y) = 0\}$$

e

$$(\text{Fix } g)^\perp = \{y \in \mathbb{C}^p \mid L_{r+1}(y) = \dots = L_p(y) = 0\}.$$

O espaço B_g é definido pelas equações

$$y' = gy \text{ e } v \text{ seja tal que } L_{r+1}(v) = \dots = L_p(v) = 0.$$

Demonstração. Pela Definição [4.34](#), B_g é a transformada estrita de D_g em $B^2(\mathbb{C}^p)$. Então, considere

$$B'_g \setminus E = \{(y, gy, [gy - y]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1} \mid y \notin \text{Fix } g\}$$

e

$$Z = \{(y, gy, [v]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1} \mid (y - gy) \wedge v = L_{r+1}(v) = \dots = L_p(v) = 0\}.$$

Mostremos que $B_g = \overline{B'_g \setminus E} = Z$. Dado $y - gy \in (\text{Fix } g)^\perp$ então, pela definição de Z , temos $(y, gy, [y - gy]) \in Z$ e portanto $B_g = \overline{B'_g \setminus E} \subseteq Z$, pois Z é fechado.

Temos trivialmente $Z \setminus E \subseteq B'_g \setminus E$. Mostremos que

$$Z \cap E = \{(y, y, [v]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1} \mid y \in \text{Fix } g \text{ e } v \in (\text{Fix } g)^\perp\} \subseteq B_g.$$

De fato, primeiro observamos que a aplicação $(\text{Fix } g)^\perp \rightarrow (\text{Fix } g)^\perp$ dada por $u \mapsto u - gu$ é sobrejetora, pois é injetora. Logo, para qualquer $v \in (\text{Fix } g)^\perp$ existe $u \in (\text{Fix } g)^\perp$ com $u - gu = v$. Considere a sequência x_n de pontos em B_g dada por

$$\{(y + \frac{1}{n}u, y + \frac{1}{n}gu, [\frac{1}{n}v])\} = \{(y + \frac{1}{n}u, y + \frac{1}{n}gu, [v])\}.$$

Então, $x_n \rightarrow (y, y, [v]) \in Z \cap E$. Ou seja, $Z \cap E \subseteq B_g$. □

Exemplo 4.38 (B_g para o grupo $Z_{2,2}$). Considere o grupo $Z_{2,2}$ agindo em \mathbb{C}^2 . Temos que $Z_{2,2}$ é dado pelos elementos $i_{1,0}(x, y) = (-x, y)$, $i_{0,1}(x, y) = (x, -y)$, $i_{1,1}(x, y) = (-x, -y)$ e $i_{0,0} = id_{\mathbb{C}^2}$, denotando $B_{i_{i,j}} = B_{i,j}$. Então, $B_{1,0}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2) = (-y_1, y_2) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{1,0})^\perp = \langle (1, 0) \rangle.$$

$B_{0,1}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2) = (y_1, -y_2) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{0,1})^\perp = \langle (0, 1) \rangle.$$

$B_{1,1}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2) = (-y_1, -y_2) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{0,0})^\perp = \mathbb{C}^2 \text{ tal que } v_0 y_2 = y_1 v_1.$$

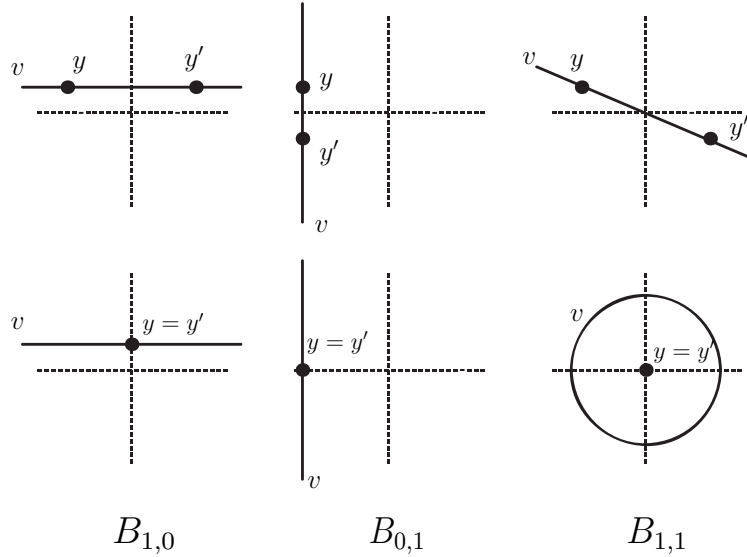


Figura 4.3: Decomposição de $B^2(\omega_{Z_{2,2}})$.

Exemplo 4.39. Seja $i_a := i_{a_1, \dots, a_p} \in Z_{m_1, \dots, m_p}$ e considere $\xi_j = e^{\frac{2\pi i}{m_j}}$. O espaço $B_a := B_{i_a}$ consiste dos pontos $(y, y', [v]) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1}$, satisfazendo

- 1) $y'_j = \xi_j y_j$, para $j = 1, \dots, p$,
- 2) $v \wedge ((\xi_1 - 1)y_1, \dots, (\xi_p - 1)y_p)$, onde “ \wedge ” é definido na Observação 4.25;
- 3) $v_i = 0$, para todo i tal que $\xi_i = 1$.

Exemplo 4.40 (B_g para o grupo D_6). Pelo Exemplo 2.8, temos que D_6 é dado pelos elementos:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, rs = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}, r^2 s = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix},$$

$$r^2 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}.$$

Então, B_s é definido pelas equações:

$$(y'_1, y'_2) = (y_2, y_1) \text{ e } v \in (\text{Fix } r)^\perp = \langle (1, -1) \rangle.$$

B_{rs} é definido pelas equações:

$$(y'_1, y'_2) = (e^{\frac{2\pi i}{3}} y_2, e^{-\frac{2\pi i}{3}} y_1) \text{ e } v \in (\text{Fix } rs)^\perp = \langle ((-1)^{\frac{2}{3}}, -1) \rangle.$$

B_{r^2s} é definido pelas equações:

$$(y'_1, y'_2) = (e^{-\frac{2\pi i}{3}} y_2, e^{\frac{2\pi i}{3}} y_1) \text{ e } v \in (\text{Fix } r^2s)^\perp = \langle (-i^{\frac{1}{3}}, -1) \rangle.$$

B_r é definido pelas equações:

$$(y'_1, y'_2) = (e^{\frac{2\pi i}{3}} y_1, e^{-\frac{2\pi i}{3}} y_2) \text{ e } v \in (\text{Fix } r)^\perp = \mathbb{C}^2, \text{ onde } v_0 y_2 - v_1 y_1 = 0.$$

B_{r^2} é definido pelas equações:

$$(y'_1, y'_2) = (e^{-\frac{2\pi i}{3}} y_1, e^{\frac{2\pi i}{3}} y_2) \text{ e } v \in (\text{Fix } r^2)^\perp = \mathbb{C}^2, \text{ onde } v_0 y_2 - v_1 y_1 = 0.$$

Com o uso da próxima Proposição conseguiremos uma decomposição para $B^2(\omega)$.

Proposição 4.41. *Para qualquer $f : X \rightarrow Y$, com $\dim X = n$ e $\dim Y = p$, temos:*

- 1) *Se $B^2(f) \neq \emptyset$ então $\dim B^2(f) \geq 2n - p$. Se $\dim B^2(f) = 2n - p$, então $B^2(f)$ é localmente uma interseção completa.*
- 2) *A restrição da aplicação $B^2(X) \rightarrow X \times X$ em $B^2(f)$ é um morfismo de espaço complexo $b : B^2(f) \rightarrow D^2(f)$. Temos que b é própria e sobrejetora, e é um isomorfismo fora da preimagem de $\{(x, x) \in X \times X \mid \text{corank}(f)_x \geq 2\}$.*
- 3) *Se f é estável então $B^2(f)$ é o fecho de seus pontos estritos. Em particular, $B^2(f)$ é regular de dimensão $2n - p$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [\[NBPS17\]](#). □

Teorema 4.42. *Seja $\omega : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ aplicação órbita para algum grupo de reflexões G agindo em \mathbb{C}^p . O espaço de pontos duplos $B^2(\omega)$ de uma aplicação órbita é um espaço complexo reduzido, com componentes irredutíveis*

$$B^2(\omega) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos a igualdade como conjuntos e para isso considere a Observação 4.32. Mostremos primeiro que $B_g \subseteq B^2(\omega)$, para qualquer $g \in G \setminus \{1\}$.

Pelo item 3) da Proposição 4.35 tomemos $y \notin \text{Fix } g$, então $(y, gy, [y - gy]) \in B_g$ como $\omega(y) = \omega(gy)$ com $y \neq gy$ e $(y - gy) \wedge (y - gy) = 0$ obtemos que $(y, gy, [y - gy])$ é um ponto estrito de $B^2(\omega)$. Agora, dado $y \in \text{Fix } g$ obtemos que o ponto $(y, y, [u])$ com $[u] \in \mathbb{P}((\text{Fix } g)^\perp)$ pertence a B_g utilizando o Lema 2.40 obtemos que $[u] \in \mathbb{P}(\ker d\omega_y)$ e então $(y, y, [u])$ é um ponto singular de $B^2(\omega)$.

Mostremos que $B^2(\omega) \subseteq \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g$. De fato, dado um ponto estrito $(y, y', [u])$ de $B^2(\omega)$ com $y \neq y'$ e $\omega(y) = \omega(y')$. Pelo Teorema 2.38 $\omega^{-1}(\omega(y)) = Gy'$, então tomando $g \in G \setminus \{1\}$ temos $\omega(y) = \omega(gy')$, com $y \notin \text{Fix}(g)$ e daí $(y, gy', [u]) \in B_g$. Agora, dado um ponto singular y , temos $[u] \in \mathbb{P}(\ker d\omega_y)$, como y é singular daí $y \in \text{Fix } g$ para algum $g \in G$ e pelo Lema 2.40 temos que $\ker d\omega_y = (\text{Fix } g)^\perp$. E concluímos a igualdade como conjuntos.

Mostremos que $B^2(\omega)$ é reduzido. Como cada B_g possui dimensão p , pois b_g é um isomorfismo fora de $\Delta(\text{Fix } g)$ e como $\Delta(\text{Fix } g) \subseteq D_g$ com $\dim D_g = p$ obtemos $\dim B_g = p$. Ocorre que $B^2(\omega)$ também possui dimensão p e então pelo item 2) da Proposição 4.41 obtemos que $B^2(\omega)$ é um espaço com interseção completa. Pela Proposição 1.83, interseção completa implica em Cohen-Macaulay.

Então, é suficiente mostrar que $B^2(\omega)$ é genericamente reduzido. Ou seja, é suficiente mostrar que $B^2(\omega)$ é reduzido nos pontos $(x, x', [u])$ com $x \in \mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}$. Mas isso já ocorre, pois pela Propriedade de *blowup* 4.20 os pontos $\{(x, gx, [x - gx]) \in (\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{P}^{p-1}\}$ é isomorfo a $\{(x, gx) \in (\mathbb{C}^p \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{C}^p\} \subseteq D^2(\omega)$ e em tal conjunto já sabemos pela demonstração do Teorema 4.15 que $D^2(\omega)$ é reduzido, concluindo então o resultado. \square

A partir do resultado obtido no Teorema 4.42 conseguiremos calcular $B^2(f)$ em que f é uma aplicação de reflexão.

Lema 4.43. *Dado X e Y variedades complexas. Todo mergulho $h : X \hookrightarrow Y$ induz um mergulho $\tilde{h} : B^2(X) \hookrightarrow B^2(Y)$ dado por: Fora do divisor excepcional E_X , temos*

$$\tilde{h} = b_Y^{-1} \circ (h \times h) \circ b_X,$$

onde b_X e b_Y são as projeções para os correspondentes *blowups*. Localmente no divisor excepcional E_X , \tilde{h} é definido por

$$(x, x', [u]) \mapsto (h(x), h(x'), [\alpha_h(x, x')u]).$$

Demonstração. A demonstração é feita utilizando o *gluing sheaves* e pode ser consultada em [San16]. \square

Proposição 4.44. *Seja $f = F \circ h : X \rightarrow Z$, para um mergulho $h : X \hookrightarrow Y$ e uma aplicação $F : Y \rightarrow Z$. Então, $B^2(f) = \tilde{h}^{-1}(B^2(F))$.*

Demonstração. Para mostrar que $B^2(f) = \tilde{h}^{-1}(B^2(F))$ é suficiente mostrar que $\mathcal{H}^2(f) = \tilde{h}^*(\mathcal{H}^2(F))$ em $B^2(X) \setminus E_X$ e em E_X . Observamos primeiro que

$$h(x) - h(x') = \alpha_h(x, x')(x - x') \text{ e } F(y) - F(y') = \alpha_F(y, y')(y - y').$$

E então, usando que $h(x) = y$ e $h(x') = y'$, temos:

$$f(x) - f(x') = \alpha_F(h(x), h(x')) \cdot (\alpha_h(x, x')(x - x')) = (\alpha_F(h(x), h(x')) \cdot \alpha_h(x, x'))(x - x').$$

Ou seja, $\alpha_f = \alpha_F(h(x), h(x')) \cdot \alpha_h(x, x')$. Então,

$$\tilde{h}^*(\mathcal{H}^2(F)) = \tilde{h}^*(\alpha_F(y, y')u) = (\alpha_F(h(x), h(x'))(\alpha_h(x, x')u)) = (\mathcal{H}^2(f)).$$

E em $B^2(X) \setminus E_X$, temos:

$$\begin{aligned} B^2(X) \setminus E_X &\cong D^2(f) \setminus \Delta X \\ &= ((f \times f)^{-1} \Delta Y) \setminus \Delta X \\ &= (h \times h)^{-1}((F \times F)^{-1} \Delta Y) \setminus \Delta X \\ &= (h \times h)^{-1}(D^2(F) \setminus \Delta X) \\ &\cong \tilde{h}^{-1}(B^2(F) \setminus E_X). \end{aligned}$$

□

Definição 4.45. Para qualquer $g \in G \setminus \{1\}$ e qualquer mergulho $h : X \hookrightarrow Y$, escrevemos

$$B_g(h) = \tilde{h}^{-1}(B_g) \text{ e } \mathcal{H}_g(h) = (\tilde{h})^* \mathcal{H}_g.$$

Corolário 4.46. Os pontos duplos para qualquer aplicação de reflexão f se decompõe como

$$B^2(f) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g(h).$$

Demonstração. Temos que $f = \omega \circ h$, para h mergulho. Então, pela Proposição 4.44 e o Teorema 4.42, temos:

$$B^2(f) = \tilde{h}^{-1} B^2(\omega) = \tilde{h}^{-1} \left(\bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g \right) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} \tilde{h}^{-1}(B_g) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g(h).$$

□

Observação 4.47. Seja $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ um mergulho e sejam L_1, \dots, L_p formas lineares de \mathbb{C}^p em \mathbb{C} de modo que $\text{Fix } g = \{y \in \mathbb{C}^p \mid L_1(y) = \dots = L_r(y) = 0\}$ e $(\text{Fix } g)^\perp = \{y \in \mathbb{C}^p \mid L_{r+1}(y) = \dots = L_p(y) = 0\}$ então $B_g(h)$ é dado pelas equações:

$$h(x) = gh(x') \text{ e } L_{r+1}(\alpha_h(u)) = 0, \dots, L_p(\alpha_h(u)) = 0.$$

E se h for transformação linear injetora então pela Observação 4.1 temos $\alpha_h = h$. Então,

$$h(x) = gh(x') \text{ e } L_{r+1}(h(u)) = 0, \dots, L_p(h(u)) = 0.$$

Exemplo 4.48. Vamos encontrar $B^2(f)$, em que $f = \omega_{Z_{2,2,1}} \circ h$, com $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1^2 x_2 + x_2)$. Primeiro, vamos encontrar os ramos de $B^2(\omega_{Z_{2,2,1}})$. Dado um elemento $i_{i,j,k} \in Z_{2,2,1}$ vamos denotar $B_{i_{i,j,k}}$ por $B_{i,j,k}$. Então, $B_{1,0,0}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2, y'_3) = (-y_1, y_2, y_3) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{1,0,0})^\perp = \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

$B_{0,1,0}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2, y'_3) = (y_1, -y_2, y_3) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{0,1,0})^\perp = \langle (0, 1, 0) \rangle.$$

$B_{1,1,0}$ é definido pelas equações

$$(y'_1, y'_2, y'_3) = (-y_1, -y_2, y_3) \text{ e } v \in (\text{Fix } i_{1,1,0})^\perp = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Repetindo o mesmo processo feito no Exemplo [4.3](#), obtemos

$$\alpha_h(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (x_1 + x'_1)x_2 & x'_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $B_{1,0,0}(h)$ é definido pelas equações:

$$(x_1, x_2, x_1^2 x_2 + x_2) = (-x'_1, x'_2, (-x'_1)^2 x'_2 + x'_2) \text{ e}$$

$$u_0 = v_0,$$

$$u_1 = 0,$$

$$(x_1 + x'_1)x_2 u_0 + (x'_1 + 1)u_1 = 0,$$

$$u_0(x_2 - x'_2) - u_1(x_1 - x'_1) = 0.$$

$B_{0,1,0}(h)$ é definido pelas equações:

$$(x_1, x_2, x_1^2 x_2 + x_2) = (x'_1, -x'_2, -(x'_1)^2 x'_2 - x'_2) \text{ e}$$

$$u_0 = 0,$$

$$u_1 = v_1,$$

$$(x_1 + x'_1)x_2 u_0 + (x'_1 + 1)u_1 = 0,$$

$$u_0(x_2 - x'_2) - u_1(x_1 - x'_1) = 0.$$

$B_{1,1,0}(h)$ é definido pelas equações:

$$(x_1, x_2, x_1^2 x_2 + x_2) = (-x'_1, -x'_2, -(-x'_1)^2 x'_2 - x'_2) \text{ e}$$

$$u_0 = v_0,$$

$$u_1 = v_1,$$

$$(x_1 + x'_1)x_2 u_0 + (x'_1 + 1)u_1 = 0,$$

$$u_0(x_2 - x'_2) - u_1(x_1 - x'_1) = 0.$$

Calculemos $B^2(f)$ pela definição: Temos

$$\alpha_f(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 & 0 \\ 0 & x_2 + x'_2 \\ (x_1 + x'_1)x_2 & x'_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $B^2(f)$ é dado pelos pontos $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, [u_0, u_1]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ satisfazendo a equação

$$(x_1 + x'_1)u_0 = 0,$$

$$(x_2 + x'_2)u_1 = 0,$$

$$((x_1 + x'_1)x_2)u_0 + (x'_1 + 1)u_1 = 0,$$

$$(x_2 - x'_2)u_0 - (x_1 - x'_1)u_1 = 0.$$

Capítulo 5

Obstruções para \mathcal{A} -finitude e aplicações de reflexão \mathcal{A} -finita

Nesse capítulo daremos uma resposta definitiva sobre a existência de germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ \mathcal{A} -finita com coposto $f \geq 2$ para $p < 2n - 1$. Conseguiremos fazer isso estudando o *Singular Locus* do espaço complexo $B^2(f)$.

Por fim, daremos condições para que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ seja \mathcal{A} -finito, nos casos em que $p = 2n$ e $p = 2n - 1$. Tais condições vão surgir naturalmente com as aplicações de gráfico de reflexão para aplicações lineares.

Ressaltamos que os resultados desse capítulo são demasiadamente técnicos e que envolvem pouca intuição, apesar das condições surgirem naturalmente nas construções que vão se seguir.

Para os resultados desse capítulo enunciaremos as seguintes definições:

Definição 5.1. Dizemos que um germe de uma aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é *essencial* se coposto $f = \text{posto } G$ e aplicações em que coposto ≤ 1 em todos os pontos são chamadas de *curvilíneas*.

Observação 5.2. Um germe de uma aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é *essencial* se $C^\perp \subseteq T_0Y$, para a face C passando pelo origem. De fato, pelo Lema 3.4 coposto $f = \dim(T_0Y \cap \langle C \rangle^\perp)$ e coposto $f = \text{posto } G = \dim C^\perp$ então $\dim(T_0Y \cap \langle C \rangle^\perp) = \dim \langle C \rangle^\perp$ o que implica que $\langle C \rangle^\perp \subseteq T_0Y$.

Definição 5.3. Seja $H : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^r$ qualquer aplicação e G um grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^p , com aplicação órbita ω . O gráfico refletido de H é a aplicação $(\omega, H) : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^{p+r}$, dado por

$$x \mapsto (\omega(x), H(x)).$$

Definição 5.4. Uma *fold map* é um germe de uma aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ da forma

$$x \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2, H(x)),$$

para alguma aplicação $H : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{p-n}, 0)$.

Exemplo 5.5. A aplicação *cross-cap* parametrizada $(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$ é um gráfico refletido de $H(x, y) = xy$, com $\omega(x, y) = (x, y^2)$. Portanto, é um *fold map*.

5.1 Singular Locus de $B^2(f)$ e \mathcal{A} -finitude

Consideremos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ aplicação de reflexão ou quasi-reflexão, para um determinado grupo de reflexões G . Nessa seção estudaremos a relação do *Singular locus* do espaço complexo $B^2(f)$ com a estabilidade de f .

Definição 5.6. Para qualquer grupo de reflexão G , escrevemos S_G para o conjunto singular de $B^2(\omega)$. Ou seja, $S_G = \text{Sing}(B^2(\omega)) \subseteq B^2(\mathbb{C}^p)$.

Proposição 5.7. Temos que $S_G = \bigcup_{g \neq g'} (B_g \cap B_{g'})$, com $g, g' \in G \setminus \{1\}$. S_G consiste dos pontos:

- 1) $(y, gy, [y - gy])$, com $y \in \mathcal{A} \setminus \text{Fix } g$,
- 2) (y, y, v) , $y \in \text{Fix } g \cap \text{Fix } g'$, $v \in \mathbb{P}((\text{Fix } g)^\perp \cap (\text{Fix } g')^\perp)$, com $g, g' \in G \setminus \{1\}$, $g' \neq g$.

Demonstração. Como $B^2(\omega)$ é composto pela união dos B_g sendo que cada um deles é regular, item 1) da Proposição 4.35, temos que a única possibilidade para que ocorra as singularidades é na interseção, ou seja, $S_G = \bigcup_{g \neq g'} (B_g \cap B_{g'})$.

Dado $y \in \mathbb{C}^p$. Se $y \in \mathcal{A} \setminus \text{Fix } g$, o estabilizador de G em y não é trivial. Então, existe $g' \neq g$ tal que $g'y = gy$. Portanto, temos $(y, gy, [y - gy]) \in B_{g'} \cap B_g$. Se $y \in \text{Fix } g$, para algum $g \in G$. Então, o item 2) é a expressão do ponto $(y, y, v) \in B_{g'} \cap B_g$. \square

Corolário 5.8. O espaço S_G contém os seguintes pontos:

- 1) (y, y, v) , com $y \in C_1$, $v \in \mathbb{P}(C_2^\perp)$, para duas faces diferentes $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, satisfazendo $C_1 \subseteq \langle C_2 \rangle$.
- 2) (y, y, v) , com $y \in H$, $v \in \mathbb{P}(H^\perp)$, onde H é o hiperplano de reflexão para alguma reflexão $r \in G$ com ordem ≥ 3 .

Demonstração.

- 1) Tomando $g_1, g_2 \in G$ com $\text{Fix } g_i = \langle C_i \rangle$ de modo que $C_1 \subseteq \langle C_2 \rangle$ no item 2) da Proposição 5.7 obtemos $y \in \text{Fix } g_1 \cap \text{Fix } g_2 = \text{Fix } g_1$ e $v \in \mathbb{P}((\text{Fix } g_1)^\perp \cap (\text{Fix } g_2)^\perp) \subseteq \mathbb{P}((\text{Fix } g_2)^\perp)$.
- 2) Se g é reflexão em G com ordem ≥ 3 então g^2 é uma reflexão e $\text{Fix } g = \text{Fix } g^2$. E o resultado segue diretamente do item 2) da Proposição 5.7. \square

Lema 5.9. *Sejam X uma variedade complexa de dimensão n e $f : X \rightarrow \mathbb{C}^p$ aplicação de reflexão estável. Então, os espaços $B_g(h)$ são espaços disjuntos de dimensão $2n - p$ e $\tilde{h}^{-1}(S_G) = \emptyset$.*

Demonstração. Como f é estável temos, pelo item 4) da Proposição 4.41, que $B^2(f)$ é regular. Como $B^2(f) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g(h)$ é suficiente mostrar que quaisquer dois ramos

$B_g(h)$ e $B_{g'}(h)$ não possuem componente irredutível em comum. Suponha que exista tal componente Z . Pelos itens 4) e 1) da Proposição 4.41 temos que Z contém pontos estritos da forma $b^{-1}(x, x')$ com $(h(x), h(x')) \in B_g \cap B_{g'}$ e daí $h(x') = gh(x)$ e $h(x') = g'h(x)$ com $h(x) \neq h(x')$ que implica que $gh(x) = g'h(x)$. Então, $g'^{-1}gh(x) = h(x)$ não pode ocorrer se $h(x) \notin \mathcal{A}$. Pois, pelo Corolário 2.25, o estabilizador de G em $h(x)$ é trivial.

Por outro lado, se $h(x) \in \mathcal{A}$ então obtemos que h não é injetora na órbita sobre \mathcal{A} . De fato, $\omega(h(x)) = \omega(g^{-1}h(x)) = \omega(h(x'))$, onde $h(x') \neq h(x)$ e então $f = \omega \circ h$ não é injetor em $h^{-1}(\mathcal{A})$ e portanto f , pelo Teorema 3.23, f não possui normal crossings e então, pelo Corolário 3.29, a estabilidade de f falha. O que não pode ocorrer, pois por hipótese f é estável.

Motremos que $\tilde{h}^{-1}(S_G) = \emptyset$. Como $B_g(h) = \tilde{h}^{-1}(B_g)$ e $S_G = \bigcup_{g \neq g'} (B_g \cap B_{g'})$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{-1}(S_G) &= \tilde{h}^{-1}\left(\bigcup_{g \neq g'} (B_g \cap B_{g'})\right) \\ &= \bigcup_{g \neq g'} \tilde{h}^{-1}(B_g \cap B_{g'}) \\ &= \bigcup_{g \neq g'} (B_g(h) \cap B_{g'}(h)) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Pois, já sabemos que $B_g(h) \cap B_{g'}(h) = \emptyset$. □

Teorema 5.10. *Não existe germe estável de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com $\text{Coposto} \geq 2$, e todas aplicações de reflexão essenciais estáveis de coposto 1 são fold maps.*

Demonstração. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação estável de reflexão de coposto 1 e essencial. Como f é essencial então $\text{posto } G = \text{coposto } f = 1$. Ou seja, temos que G é um grupo de reflexões que determina apenas um hiperplano e então G é um grupo de reflexões cíclico Z_m . Se $m \geq 3$, então pelo item 2) do Corolário 5.8 temos que $S_G \neq \emptyset$. De fato, tomando C_1 a face que passa pela origem então, pela definição de aplicação essencial e pelo Lema 3.4, $T_0Y \cap C_1^\perp \neq \emptyset$. Podemos tomar em S_G o vetor $(0, 0, v)$ pois $v \in \mathbb{P}(T_0Y \cap C_1^\perp) \subseteq \mathbb{P}(C_1^\perp)$. Então, $(0, 0, v) \in \text{Im } \tilde{h} \cap S_G$ e, pelo Lema 5.9, f não é estável. Portanto, $m = 2$ e f é uma fold map.

Considere $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de aplicação de reflexão com coposto ≥ 2 . Então, $\dim(T_0Y \cap C_1^\perp) \geq 2$. Como a codimensão de C_1 é pelo menos 2, temos que existe

uma face C_2 com $\dim C_2 = \dim C_1 + 1$ e $C_1 \subseteq \langle C_2 \rangle$. O que implica que $\dim(T_0Y \cap C_2^\perp) \geq 1$. Então, para qualquer $v \in \mathbb{P}(T_0Y \cap C_2^\perp) \subseteq \mathbb{P}(C_2^\perp)$, pelo item 2) do Corolário 5.8, temos um ponto da forma $(0, 0, v) \in \text{Im } \tilde{h} \cap S_G$ e, portanto, $\tilde{h}^{-1}(S_G) \neq \emptyset$. Pelo Lema 5.9 temos que f não é estável. \square

O próximo Teorema é o resultado esperado desse capítulo. Deve ficar claro ao leitor que o motivo da condição de $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com coposto $f \geq 2$ falhar em ser \mathcal{A} -finita com $p < 2n - 1$ é o fato de que podemos encontrar um ramo $B_g(h)$ de $B^2(f)$ de modo que $B_g(h)$ não está contida na fibra da origem (que pode ser dada por $\pi^{-1}(0)$ ou $\tilde{h}^{-1}(0, 0, [v])$). Essa ideia será essencial para as próximas seções, onde construiremos sob determinadas condições aplicações \mathcal{A} -finitas.

Teorema 5.11. *Para $p < 2n - 1$, não existe germe de aplicação de reflexão \mathcal{A} -finita $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com coposto $f \geq 2$ e todas as aplicações de reflexão essenciais \mathcal{A} -finita de coposto 1 são fold maps.*

Demonstração. Seja $\pi : B^2(f) \rightarrow \mathbb{C}^n$ a composição de $b : B^2(f) \rightarrow D^2(f)$ e a projeção de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, onde b é a aplicação definida pelo item 2) da Proposição 4.41. Se $\dim(\pi(\tilde{h}^{-1}(S_G))) > 0$ então nos pontos em que f é instável são não isolados. Então, f não é \mathcal{A} -finita.

Se f é um germe essencial, com coposto $f = 1$, de uma aplicação de reflexão de Z_m , com $m \geq 3$. Pelo item 2) do Corolário 5.8 temos $\tilde{h}^{-1}(S_G) \neq \emptyset$. Então, $\dim \tilde{h}^{-1}(S_G) \geq 2n - (p + 1) > 0$. De fato, como $\dim \text{Im } \tilde{h} = 2n$ e $\dim S_G = p - 1$ então $\dim(\text{Im } \tilde{h} \cap S_G)$ em $B^2(\mathbb{C}^p)$ é $\geq 2n + p - 1 - (2p) = 2n - p - 1 = 2n - (p + 1) > 0$. Como π é finita para aplicações curvilineares temos $\dim(\pi(\tilde{h}^{-1}(S_G))) > 0$ e, portanto, não há possibilidade para f ser estável apenas fora de 0. Portanto, f não é \mathcal{A} -finita. Concluimos, que $m = 2$ e f é uma aplicação fold map.

Se f é um germe de uma aplicação de reflexão com coposto $f \geq 2$ então π não é finita. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$ uma face contendo a origem, então $\dim(T_0Y \cap C_0^\perp) \geq 2$. Como $1 \leq 2n - p$, existe uma face $C \in \mathcal{C}$, que não passa pelo origem, de modo que $1 \leq \dim(T_0Y \cap C^\perp) \leq 2n - p$. Tomemos $g \in G$ de modo que $\text{Fix } g = \langle C \rangle$. Como $1 \leq \dim(T_0Y \cap C^\perp)$ obtemos que $B_g(h) \neq \emptyset$, pois podemos tomar $v \in \mathbb{P}(T_0Y \cap C^\perp) \subseteq \mathbb{P}(C^\perp)$. Então, $\dim B_g(h) \geq 2n - p$. De fato, $\tilde{h} : B^2(\mathbb{C}^n) \rightarrow B^2(\mathbb{C}^p)$ é um mergulho, como $\dim B^2(\mathbb{C}^n) = 2n$, $\dim B^2(\mathbb{C}^p) = 2p$ e $\dim B_g = p$ temos $\dim \text{Im } \tilde{h} \cap B_g \geq 2n + p - 2p = 2n - p$ em $B^2(\mathbb{C}^p)$. E concluimos que $\dim B_g(h) \geq 2n - p$.

Além disso, como $\tilde{h}^{-1}(0, 0, v) \not\subseteq \tilde{h}^{-1}(\{(y, y', [v]) \in B^2(\mathbb{C}^p) | y \in T_0Y \cap C^\perp\})$ e como $\dim(\tilde{h}^{-1}(\{(y, y', [v]) \in B^2(\mathbb{C}^p) | y \in T_0Y \cap C^\perp\})) \leq 2n - p$, pois \tilde{h} é mergulho. Obtemos que $\dim(\tilde{h}^{-1}(0, 0, v)) < 2n - p$. Então, $B_g(h)$ não pode estar contido em $\tilde{h}^{-1}(0, 0, v)$.

Por hipótese f é estável fora da origem. Segue pelo item 4) da Proposição 4.41 que $B_g(h)$ contém uma componente Z , com $\dim Z = 2n - p$, consistindo de pontos duplos estritos.

Seja $Z' = \pi(Z) \subseteq \mathbb{C}^n$. Como f é finita, apenas um número finito de pontos em Z' podem ser mandados em um mesmo ponto. Então, $\dim Z' = 2n - p$. Como C não contém a origem então $\mathcal{A} \setminus C$ contém a origem. Portanto, $h^{-1}(\mathcal{A} \setminus C)$ é um subespaço analítico de codimensão pelo menos 1 passando pela origem. Como $\dim Z' = 2n - p$ o espaço $W = Z' \cap h^{-1}(\mathcal{A} \setminus C)$ tem dimensão pelo menos 1. De fato, $\dim W \geq (2n - p) + (n - 1) - n \geq 2n - p - 1 > 0$ e então $\dim W \geq 1$.

Afirmamos que todos os pontos $z \in Z$ de modo que $\pi(z) \in W$ estão contidos em $\tilde{h}^{-1}(S_G)$. Essa afirmação implica que $\dim \pi(\tilde{h}^{-1}(S_G)) > 0$ e então teremos uma contradição com a estabilidade de f fora da origem.

Mostremos a afirmação: Seja $z \in Z$ um ponto qualquer com $\pi(z) = x \in \mathbb{C}^n$ e $h(x) \in \mathcal{A} \setminus C$.

Se $h(x) \notin \text{Fix } g$ então, pela Proposição 5.7, $\tilde{h}(z)$ é um ponto da forma $(y, gy, [y - gy])$ contido em S_G .

Se $h(x) \in \text{Fix } g = \langle C \rangle$, então $\tilde{h}(z) = (y, y, v)$ com $y = h(x)$ e $v \in \mathbb{P}(C^\perp)$. Por hipótese da afirmação $y = h(x) \notin C$, temos que existe uma face $C' \neq C$ tal que $y \in C' \subseteq \langle C \rangle$. Então, pelo item 1) do Corolário 5.8, temos que $\tilde{h}(z) \in S_G$. Então, obtemos o resultado da afirmação e concluímos o Teorema. \square

5.2 Critério para que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ seja \mathcal{A} -finita, com $p \geq 2n$.

Nosso principal objetivo nessa seção é dar condições para que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ seja \mathcal{A} -finito, com $p \geq 2n$.

Proposição 5.12. *Para $p \geq 2n$. Considere um germe de uma aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. f é \mathcal{A} -finita se, e somente se, $B^2(f)$ está contido na fibra da origem.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [San16]. \square

Corolário 5.13. *Para $p \geq 2n$, um germe de aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é \mathcal{A} -finita se, e somente se, todos $B_g(h)$ estão contidos na fibra da origem.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 5.12 e da decomposição, para aplicações de reflexão, $B^2(f) = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} B_g(h)$. \square

Definição 5.14 (Condição **C1**). Sejam $n, m \in \mathbb{Z}_+$ e $H \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ dizemos que:

- 1) H' é submatriz de H se obtemos H' excluindo k_1 linhas e k_2 colunas de H , com $0 \leq k_1 < n$ e $0 \leq k_2 < p$.
- 2) Dizemos que H satisfaz **C1** se toda submatriz de H possui posto máximo.

Definição 5.15 (Condição **C2**). Seja $H \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ e sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$ inteiros positivos. Dizemos que H possui a propriedade **C2** para m_i e r_j , com $1 \leq i, j \leq n$, se para quaisquer $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{C}$, satisfazendo

$$\xi_i^{m_i} = 1, \eta_i^{r_i} = 1$$

e

$$\det(H_{ij}(\xi_j - \eta_i)) = 0,$$

existem pelo menos n dos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ que são iguais a 1.

Proposição 5.16. *Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$ inteiros positivos e H uma matriz satisfazendo **C1** e **C2** para m_i e r_j , com $1 \leq i, j \leq n$. Então, o germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ dado por:*

$$x \mapsto (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, (Hx)_1^{r_1}, \dots, (Hx)_n^{r_n})$$

é \mathcal{A} -finito. Onde $(Hx)_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}x_j$.

Demonstração. A aplicação f é uma aplicação de reflexão dado pelo gráfico h de H e ω dada pelo grupo $G = Z_{m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n}$, cuja aplicação de reflexão é dada por $\omega : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ com

$$\omega(x) = (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, x_{n+1}^{r_1}, \dots, x_{2n}^{r_n}).$$

Pelo Corolário 5.13, é suficiente mostrar que para todo $i_a \in G \setminus \{1\}$, com $a = (a_1, \dots, a_{2n})$ o ramo dos pontos duplos $B_{i_a}(h)$ está contido na fibra da origem. Para $j = 1, \dots, n$ sejam

$$\xi_j = e^{\frac{2\pi i}{m_j} a_j} \text{ e } \eta_j = e^{\frac{2\pi i}{r_j} a_{n+j}}.$$

Pela Observação 4.47, as equações de $B_{i_a}(h)$ nas variáveis x, x' e u em $B^2(\mathbb{C}^n)$ são dadas por

$$\begin{aligned} x'_i &= \xi_i x_i, \\ (Hx')_i &= \eta_i (Hx)_i, \end{aligned}$$

pois essas são as equações definidas por $h(x') = i_a h(x)$. Se $\xi_i = 1$ obtemos que $\text{Fix } i_a = \langle e_i \rangle$ e então $(\text{Fix } i_a)^\perp = \langle (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{2n}) \rangle$, ou seja, $(\text{Fix } i_a)^\perp = \ker L_i$, onde $L_i : \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $L_i(y) = y_i$. Utilizando que $\alpha_h \in M_{2n,n}(\mathbb{Q})$ é definida por $\begin{pmatrix} id \\ H \end{pmatrix}$, obtemos $L_i(h(u)) = L_i(\alpha_h u) = u_i$. Então, $u_i = 0$. Observando que se $\eta_i = 1$ temos, de modo análogo ao caso $\xi_i = 1$, que $(Hu)_i = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \text{ se } \xi_i = 1, \\ (Hu)_i &= 0 \text{ se } \eta_i = 1. \end{aligned}$$

Substituindo $x'_i = \xi_i x_i$, temos

$$(H(\xi_1 x_1, \dots, \xi_n x_n)^T)_i = \eta_i(Hx)_i$$

e como

$$(H(\xi_1 x_1, \dots, \xi_n x_n)^T)_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \xi_j x_j \text{ e } \eta_i(Hx)_i = \eta_i \sum_{j=1}^n H_{ij} x_j.$$

Obtemos

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \xi_j x_j - \sum_{j=1}^n H_{ij} \eta_j x_j = 0 \text{ se, e somente se, } \sum_{j=1}^n H_{ij} (\xi_j - \eta_j) x_j = 0,$$

para todo i .

Ou seja, $Mx = 0$, com $x \in \mathbb{C}^n$ e $M = (H_{ij}(\xi_j - \eta_j))$. Mostremos que se $B_{i_a}(h)$ não está contido na fibra da origem então é vazio. De fato, se $B_{i_a}(h)$ não está contido na fibra da origem então $\det(M) = 0$, pois $Mx = 0$ possui solução não trivial e por **C2**, pelo menos n dos elementos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ são iguais a 1. Por hipótese, a matriz da aplicação H satisfaz **C1** então toda submatriz $n \times n$ de α_h possui posto n .

Então, devemos resolver o sistema $\alpha_h u = 0$. Tomando a submatriz S de α_h em que excluímos as linhas nas quais $u_i = 0$ ou $(Hu)_i = 0$ temos que resolver a equação da forma $Su = 0$. Como $\text{posto}(S) = n$, então a solução é trivial, a qual não existe para \mathbb{P}^{n-1} . Portanto, $B_{i_a}(h) = \emptyset$. \square

Veremos a seguir como encontrar uma maneira simples de validar a propriedade **C2** para uma dada matriz. Isso é feito com o seguinte Lema:

Lema 5.17. *Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$ inteiros positivos todos coprimos entre si e $H \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$. Se H satisfaz **C1** então H satisfaz **C2** para $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$.*

Para demonstrar o Lema [5.17](#) fixaremos notações e enunciaremos alguns resultados auxiliares. Para qualquer subconjunto $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ escrevemos $x^J = \prod_{i \in J} x_i$. Fixado um grau positivo $d \leq n$, escrevemos $S = \{J \subseteq \{1, \dots, n\} \mid \text{Card}(J) = d\}$. Observamos que um polinômio $p(x) = \sum_{J \in S} a_J x^J$, com todos $a_J \neq 0$, é um polinômio homogêneo de grau d da forma $x_{i_1} \cdots x_{i_d}$, com $i_1 < \dots < i_d$. Escrevemos também $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ para a extensão do corpo \mathbb{Q} sobre os elementos $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$. Dada uma matriz $M = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, vamos denotar por $M_{i,j}$ a submatriz de M obtida excluindo a i -ésima linha e j -ésima coluna de M .

Lema 5.18. *Sejam $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{C}$ e m_1, \dots, m_s inteiros positivos coprimos entre si tais que $\xi^{m_i} = 1$. Se $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ então $\xi_i \notin \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_s)$, onde $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_s) = \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_s)$.*

Lema 5.19. *Seja $p \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ da forma $p(x) = \sum_{J \subseteq S} a_J x^J$, com todos os $a_J \neq 0$. Se $p(\xi) = 0$, para algum $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, então existem pelo menos $n - d + 1$ coordenadas ξ_i , tais que $\xi_i \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_n)$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre d . Para $d = 1$, obtemos $p(\xi) = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$, se $p(\xi) = 0$ para todos $a_i \neq 0 \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned} a_1\xi_1 + \dots + a_i\xi_i + \dots + a_n\xi_n &= 0 \\ \frac{a_1}{a_i}\xi_1 + \dots + \xi_i + \dots + \frac{a_n}{a_i}\xi_n &= 0 \\ \xi_i &= - \left(\frac{a_1}{a_i}\xi_1 + \dots + \frac{a_{i-1}}{a_i}\xi_{i-1} + \frac{a_{i+1}}{a_i}\xi_{i+1} + \dots + \frac{a_n}{a_i}\xi_n \right). \end{aligned}$$

E então obtemos que $\xi_i \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$ para qualquer i .

Vamos assumir que o resultado é válido para os polinômios com grau $d-1$. Caso exista algum $\xi_i \notin \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$, então podemos dividir p por x_i e obter a decomposição $p = qx_i + r$, onde

$$q = \sum_{J \subseteq S} a_J x^{J \setminus \{i\}} \text{ e } r = \sum_{i \notin J \subseteq S} a_J x^J.$$

Da hipótese de que $\xi_i \notin \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$ e como $p(\xi_i) = 0$, obtemos a igualdade

$$0 = \xi_i q(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n) + r(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n),$$

temos que $q(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n) = 0$, pois caso contrário, $\xi_i \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$ uma vez que $\xi_i = q(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n) \cdot (r(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)^{-1})$, pois $q(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n), r(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n) \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$.

Como q é um polinômio homogêneo de grau $d-1$, com seus fatores correspondentes aos monômios nas variáveis $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n$ de grau $d-1$ não são todos nulos. Por hipótese de indução aplicada a q pelo menos $(n-1) - (d-1) + 1 = n-d+1$ dos elementos ξ_j , com $j \neq i$, estão contidos em $\mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_n)$, e assim obtemos o resultado. \square

Definição 5.20. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ denotamos por $A \bullet B$ a matriz dada por $(a_{ij} \cdot b_{ij})$.

Lema 5.21. *Sejam $H = (H_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ satisfazendo **C1** e $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbb{C}$ tais que $\xi_i^{m_i}$ e $\eta_i^{r_i}$ para $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$ todos inteiros positivos coprimos entre si. Se $M = (H_{ij}(\xi_j - \eta_i))$ satisfaz $\det(M) = 0$ então pelo menos $n+1$ dos elementos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ estão em \mathbb{Q} .*

Demonstração. Intercalando ξ_i por η_i , caso necessário, vamos assumir que r_1, \dots, r_n são todos não divisíveis por 2. Ou seja, caso η_i esteja em \mathbb{Q} então, necessariamente, deve ser 1. Isso nos permite separar η_1, \dots, η_n em $\eta_i = 1$ e $\eta_i \neq 1$. Após toda essa reordenação, vamos assumir que $\eta_1, \dots, \eta_k \notin \mathbb{Q}$ e $\eta_{k+1} = \dots = \eta_n = 1$. Temos que a matriz M é dada por $H \bullet A$, com

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 & \cdots & \xi_n - \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_k & \cdots & \xi_n - \eta_k \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o Teorema de Laplace para calcular o determinante de M com a primeira linha, obtemos que

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{1+1}(H_{11}(\xi_1 - \eta_1)\det(M_{11}) + \dots + (-1)^{1+n}(H_{1n}(\xi_n - \eta_1)\det(M_{1n})) \\ &= (-1)^{1+1}H_{11}\xi_1\det(M_{11}) + (-1)^{1+1}H_{11}(-\eta_1)\det(M_{11}) + \dots + (-1)^{1+n}H_{1n}\xi_n\det(M_{1n}) + \\ &\quad + (-1)^{1+n}H_{1n}(-\eta_1)\det(M_{1n}) \\ &= (-1)^{1+1}H_{11}(-\eta_1)\det(M_{11}) + \dots + (-1)^{1+n}H_{1n}(-\eta_1)\det(M_{1n}) + B^{(1)}. \end{aligned}$$

Onde, $B^{(1)} \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Ou seja, obtemos que

$$\det(M) = \det(H \bullet A^{(1)})(-\eta_1) + B^{(1)},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 - \eta_2 & \cdots & \xi_n - \eta_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_k & \cdots & \xi_n - \eta_k \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\eta_1 \notin \mathbb{Q}$, pelo Lema 5.18 segue que $\eta_1 \notin \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Obtemos que se $\det(M) = 0$ então $\det(M^{(1)}) = 0$, com $M^{(1)} = H \bullet A^{(1)}$. De fato, se $\det(M^{(1)}) \neq 0$ então da igualdade

$$\det(M) = \det(H \bullet A^{(1)})(-\eta_1) + B^{(1)} = 0$$

obtemos que $\frac{-1}{\det(M^{(1)})}B^{(1)} = \eta_1$ e daí $\eta_1 \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_2, \dots, \eta_n)$, o que contradiz o Lema 5.18. E, portanto, temos $\det(M^{(1)}) = 0$.

Aplicando o mesmo argumento para a matriz $M^{(1)}$ e $\eta_2 \notin \mathbb{Q}$, agora expandindo o determinante na segunda linha, e assim por diante concluímos que: A condição $\det(M) = 0$ implica que $\det(M^{(k)}) = 0$, para a matriz $M^{(k)} = H \bullet A^k$, com

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \end{pmatrix},$$

em que cada ξ_i repete $n - k$ vezes. Caso $k = n$, obtemos que $M^{(k)} = H$ e então obtemos um absurdo com o fato de que $\det(M) = 0$ implica que $\det(H) = 0$, que não ocorre pois $\det(H) \neq 0$ por hipótese.

Então, para $k < n$, tomemos $d = n - k \geq 1$. Para qualquer $J \in S$, seja a_J o determinante da submatriz $\tilde{H}_{k,k}$ de H de modo que $\tilde{H}_{k,k}$ é determinado retirando as $n - k$ linhas e escolhendo k colunas das n colunas de $M^{(k)}$. $M^{(k)}$ é dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} H_{1,1} & \cdots & H_{1,k-1} & H_{1,k} & \cdots & H_{1,n} \\ H_{2,1} & \cdots & H_{2,k-1} & H_{2,k} & \cdots & H_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k,1} & \cdots & H_{k,k-1} & H_{k,k} & \cdots & H_{k,n} \\ \hline H_{k+1,1}(\xi_1 - 1) & \cdots & H_{k+1,k-1}(\xi_{k-1} - 1) & H_{k+1,k}(\xi_k - 1) & \cdots & H_{k+1,n}(\xi_n - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1}(\xi_1 - 1) & \cdots & H_{n,k-1}(\xi_{k-1} - 1) & H_{k+1,n}(\xi_n - 1) & \cdots & H_{n,n}(\xi_n - 1) \end{array} \right)$$

Um exemplo de $\tilde{H}_{k,k}$ da matriz $M^{(k)}$ é

$$\begin{pmatrix} H_{1,k} & \cdots & H_{1,k} \\ H_{2,k} & \cdots & H_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k,k} & \cdots & H_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Então, pela definição de determinante, o $\det(M^k) = p(\xi_1 - 1, \dots, \xi_n - 1) = 0$, onde $p(x) = \sum_{J \in S} a_J x^J$. E, por hipótese, toda submatriz de H possui posto máximo isso implica que nenhum dos a_J , com $J \in S$, são iguais a 0. Como $\det(M^k) = 0$, então pelo Lema [5.19](#) segue que existem pelo menos $k + 1$ dos números ξ_i , tais que

$$\xi_i - 1 \in \mathbb{Q}(\xi_1 - 1, \dots, \widehat{\xi_i - 1}, \dots, \xi_n - 1)$$

ou, de modo equivalente, $\xi_i \in \mathbb{Q}(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_n)$. Pelo Lema [5.18](#), esses ξ_i estão em \mathbb{Q} e como, por escolha, $\eta_{k+1} = \dots = \eta_n = 1$, o resultado segue. \square

Demonstração Lema [5.17](#): Pelo Lema [5.21](#), temos que pelo menos $n + 1$ dos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ pertencem a \mathbb{Q} , e como

$$\xi_i^{m_i} = 1 \text{ e } \eta_i^{r_i} = 1,$$

com m_i, r_i todos coprimos entre si, então pelo menos um dos ξ_i, η_i é igual a -1 com $m_i = 2k$ ou $r_i = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, o que implica que os outros m_i, r_i são ímpares e então, necessariamente, $\xi_i = \eta_i = 1$, para pelo menos n dos $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{Q}$.

□

Corolário 5.22. *Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_n$ inteiros positivos coprimos entre si e $H \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ satisfazendo **C1** para m_i e r_j , com $1 \leq i, j \leq n$. Então, o germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ dado por:*

$$x \mapsto (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, (Hx)_1^{r_1}, \dots, (Hx)_n^{r_n})$$

é \mathcal{A} -finito. Onde $(Hx)_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}x_j$.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 5.16 e Lema 5.17

□

Exemplo 5.23. Dados $m_1, m_2, m_3, r_1, r_2, r_3$ inteiros positivos e todos coprimos entre si. Temos que os seguintes germes são \mathcal{A} -finitos:

$$\begin{aligned} x &\mapsto (x^{m_1}, x^{r_1}), \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, (x_1 + x_2)^{r_1}, (x_1 - x_2)^{r_2}), \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, x_3^{m_3}, (x_1 + x_2 + x_3)^{r_1}, (x_1 - x_2 + 2x_3)^{r_2}, (x_1 + 2x_2 - x_3)^{r_3}). \end{aligned}$$

5.3 Critério para que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ seja \mathcal{A} -finita.

Nosso principal objetivo nessa seção é dar condições para que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ seja \mathcal{A} -finito.

Proposição 5.24. *Um germe de uma aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é \mathcal{A} -finita se, e somente se, fora da fibra da origem todos os $B_g(h)$ são vazios ou curvas reduzidas sem interseções entre si.*

Demonstração. A demonstração é demasiadamente técnica e foge do nosso propósito e pode ser encontrada em [San16].

□

Definição 5.25 (Condição **C3**). *Seja $H \in M_{n-1,n}(\mathbb{C})$ e sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ inteiros positivos. Dizemos que H satisfaz **C3** para m_i e r_i se, para quaisquer $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$\xi_j^{m_j} = 1, \eta_i^{r_i} = 1$$

e

$$\text{posto}(H_{ij}(\xi_j - \eta_i)) < n - 1,$$

existem pelo menos n dos elementos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ que são iguais a 1.

Definição 5.26 (Condição **C4**). Sejam $H \in M_{n-1,n}(\mathbb{C})$ e $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ inteiros positivos. Dizemos que H satisfaz **C4** para m_i e r_i se, para quaisquer números complexos

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_{n-1},$$

satisfazendo

$$\xi_j^{m_j} = (\xi'_j)^{m_j} = 1, \eta_i^{m_i} = (\eta'_i)^{m_i} = 1,$$

ocorre que: Se a matriz $M \in M_{3n-2,n}(\mathbb{C})$, obtida concatenando a matriz com os elementos $(\xi_i - \xi'_i)_{1 \leq i \leq n}$ na diagonal e as matrizes $(H_{ij}(\xi_j - \eta_i))$ e $(H_{ij}(\xi'_j - \eta'_i))$, satisfaz

$$\text{posto}(M) < n,$$

então existem pelo menos n índices $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ e $1 \leq j_{s+1} < \dots < j_n \leq n-1$, tais que $\xi_{i_k} = 1$ ou $\xi'_{i_k} = 1$, e $\eta_{j_k} = 1$ ou $\eta'_{j_k} = 1$.

Proposição 5.27. Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ inteiros positivos e H uma matriz satisfazendo **C1**, **C3** e **C4** para m_i e r_j . Então o germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ dado por

$$x \mapsto (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, (Hx)_1^{r_1}, \dots, (Hx)_{n-1}^{r_{n-1}})$$

é \mathcal{A} -finito.

Demonstração. A aplicação f é uma aplicação de reflexão onde h é o gráfico da transformação linear $H : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ e

$$\omega : \mathbb{C}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1} \text{ é dada por } x \mapsto (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, x_{n+1}^{r_1}, \dots, x_{2n-1}^{r_{n-1}}),$$

para o grupo de reflexão G dado por $Z_{m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}}$.

Pelo Corolário 5.24 é suficiente verificar as seguintes condições:

- 1) Dado $i_a \in G \setminus \{1\}$, com $a = (a_1, \dots, a_{2n-1})$. Fora da fibra da origem, temos que $B_{i_a}(h)$ é vazio ou é uma curva reduzida.
- 2) A interseção de dois ramos $B_{i_a}(h)$, $B_{i_{a'}}(h)$ com $a \neq a'$ está contida na fibra da origem.

Mostremos primeiro o item 1): Argumentando como na demonstração da Proposição 5.16, e observando que

$$\alpha_h = \begin{pmatrix} id \\ H \end{pmatrix},$$

obtemos as equações:

$$\begin{aligned} x'_j &= \xi_j x_j, \text{ para } 1 \leq j \leq n; \\ (Hx')_i &= \eta_i (Hx)_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} u_j &= 0 \text{ se } \xi_j = 1, \text{ para } 1 \leq j \leq n; \\ (Hu)_i &= 0 \text{ se } \eta_i = 1, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Substituindo x'_j nas equações $(Hx')_i = \eta_i (Hx)_i$, para $1 \leq i \leq n-1$, obtemos $\sum_{j=1}^n H_{ij}(\xi_j - \eta_i)x_j = 0$. Ou seja, temos a equação

$$Mx = 0, \text{ onde } x \in \mathbb{C}^n \text{ e } M = (H_{ij}(\xi_j - \eta_i)).$$

Fora da fibra da origem, se $B_{i_a}(h)$ possui dimensão maior que 1. Então, coposto $M > 1$ e, portanto, posto $M < n-1$. Como M satisfaz **C3** obtemos que pelo menos n dos elementos

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \text{ são iguais a } 1.$$

Como na demonstração da Proposição [5.16](#) temos que resolver a equação $\alpha_h u = 0$ e obtemos um sistema da forma $Su = 0$, onde S é uma submatriz de α_h com $n-1$ linhas, n colunas e posto máximo. Então, a solução $Su = 0$ é satisfeita apenas para $u = 0$, que implica em $B_{i_a}(h) = \emptyset$.

Para mostrarmos o item 2), sejam

$$\xi_1 = e^{\frac{2\pi i}{m_1} a_1}, \dots, \xi_n = e^{\frac{2\pi i}{m_n} a_n}, \eta_1 = e^{\frac{2\pi i}{r_1} a_{n+1}}, \dots, \eta_{n-1} = e^{\frac{2\pi i}{r_{n-1}} a_{2n-1}}$$

e

$$\xi'_1 = e^{\frac{2\pi i}{m'_1} a'_1}, \dots, \xi'_n = e^{\frac{2\pi i}{m'_n} a'_n}, \eta'_1 = e^{\frac{2\pi i}{r'_1} a'_{n+1}}, \dots, \eta'_{n-1} = e^{\frac{2\pi i}{r'_{n-1}} a'_{2n-1}}.$$

Após substituirmos x' , um ponto no espaço $B_{i_a}(h) \cap B_{i_{a'}}(h)$ corresponde a um ponto $(x, [u]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, satisfazendo:

$$Mx = 0, \text{ onde } M = \begin{pmatrix} (\xi_j - \xi'_j) \\ H_{ij}(\xi_j - \eta_i) \\ H_{ij}(\xi'_j - \eta'_i) \end{pmatrix} \in M_{3n-2, n}(\mathbb{C}) \text{ e } x \in \mathbb{C}^n.$$

Se $B_{i_a}(h) \cap B_{i_{a'}}(h)$ não está contido na fibra da origem então a equação $Mx = 0$ possui uma solução não trivial e, portanto, posto $M < n$. De fato, $M : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{3n-2}$ e $n = \dim \ker M + \dim \text{Im } M$, como $\dim \ker M = 1$ daí $\dim \text{Im } M = n-1$. Como H satisfaz **C4**, temos que a equação $\alpha_h u$ não pode ser satisfeita para $B_{i_a}(h)$ e $B_{i_{a'}}(h)$. Pois temos que resolver a equação

$$\alpha_h u = v, \text{ para } [v] \in \mathbb{P}^{2n-2}.$$

Como H satisfaz **C4**, temos $\xi_j = 1$ ou $\xi'_j = 1$, para algum j e considerando o Exemplo 4.39. Se $\xi_j = 1$ daí $v_j = 0$ o que implica em $(\alpha_h u)_j = 0$ mas como $\xi'_j \neq 1$ então temos que $v_j \neq 0$, ou seja, $(\alpha_h u)_j \neq 0$. Caso $\xi'_j = 1$ o argumento é o mesmo. Obtemos então que, fora da fibra da origem, $B_{i_a}(h) \cap B_{i_{a'}}(h) \neq \emptyset$. \square

O próximo Lema, que é bastante técnico, nos dará uma maneira fácil de validar as propriedades **C3** e **C4** para uma dada matriz H .

Lema 5.28. *Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ inteiros positivos todos coprimos entre si, onde todos os r_j são ímpares e seja $H \in M_{n-1, n}(\mathbb{Q})$. Se H satisfaz **C1** então H satisfaz **C3** e **C4** para m_i e r_j .*

Demonstração. Mostremos que H satisfaz **C3**. Tomando $r_n = 1$ e adicionando uma nova linha com elementos em \mathbb{Q} em H obtendo uma matriz H' de modo que H' satisfaz **C1**. Assuma que $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{C}$, com $\xi_i^{m_i} = 1$ e $\eta_i^{r_i} = 1$, satisfazendo

$$\text{posto}(H_{ij}(\xi_j - \eta_j)) < n - 1,$$

e tomemos $\eta_n = 1$. Como $\text{posto}(H_{ij}(\xi_j - \eta_j)) < n - 1$, então todos os menores $(n-1) \times (n-1)$ de $H_{ij}(\xi_j - \eta_j)$ são zero e obtemos que $\det(H'_{ij}(\xi_j - \eta_i)) = 0$. Então, pelo Lema 5.21 pelo menos $n + 1$ dos números $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ são iguais a 1, isto é, pelo menos n dos elementos $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ são iguais a 1. Portanto, H satisfaz **C3**.

Mostremos que H satisfaz **C4** para os m_i . Dados $\xi_i, \xi'_i, \eta_i, \eta'_i$ como na definição 5.26, após uma reordenação, caso necessária, podemos assumir que

$$\xi_1 = \xi'_1, \dots, \xi_k = \xi'_k \text{ e } \xi_{k+1} \neq \xi'_{k+1}, \dots, \xi_n \neq \xi'_n, \text{ para algum } 0 \leq k \leq n.$$

Dividiremos então a demonstração nos casos $k = 0, 0 < k < n$ e $k = n$. Se $k = 0$, então a submatriz de M dada por $(\xi_i - \xi'_i)$ nas primeiras n linhas e n colunas de M possui posto $= n$. Portanto, $\text{posto } M \geq n$. Então, **C4** é satisfeita por vacuidade.

Se $0 < k < n$, então M é da forma

$$M = L \bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \xi_{k+1} - \xi'_{k+1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \xi_n - \xi'_n \\ \hline \xi_1 - \eta_1 & \cdots & \xi_k - \eta_1 & \xi_{k+1} - \eta_1 & \cdots & \xi_n - \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_k - \eta_{n-1} & \xi_{k+1} - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_n - \eta_{n-1} \end{array} \right)$$

onde $L = \begin{pmatrix} id \\ H \\ H \end{pmatrix}$. Como $\text{posto}(M) < n$ e, por hipótese, temos $k < n$ então todos os menores da seguinte matriz

$$M' = L' \bullet \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 & \cdots & \xi_k - \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_k - \eta_{n-1} \end{pmatrix},$$

para a correspondente submatriz L' de L , de tamanho k são zero. Reordenando as linhas de L' , podemos assumir que

$$\eta_1 \neq 1, \dots, \eta_l \neq 1 \text{ e } \eta_{l+1} = \dots = \eta_{n-1} = 1.$$

Seja L'' a submatriz superior $k \times k$ de L' . A matriz L'' satisfaz as hipóteses do Lema 5.21 trivialmente (onde no enunciado do Lema tomamos $n = k$) e a matriz $M'' = (L''_{ij}(\xi_j - \eta_i))$ satisfaz $\det(M'') = 0$, pois M'' é uma submatriz de M de tamanho $k \times k$ e o determinante de M'' é um menor de M de tamanho k . Se s é o número de elementos ξ_i , com $i \leq k$, que são iguais a 1 então é suficiente mostrar que $n \leq s + (n - 1 - l)$, ou seja, $l + 1 \leq s$. De fato, aplicando o Lema 5.21, temos que $k + 1$ dos elementos $\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_l, \eta_{l+1}, \dots, \eta_k$ são 1. Como apenas $k - l - 1$ dos η'_i s podem ser 1 temos que a equação $k - l - 1 + s = k + 1$, implica em $s = l + 2$. Portanto, $s > l + 1$.

Assuma $k = n$. A condição $\text{posto}(M) < n$ é equivalente a $\text{posto}(M') < n$, para a matriz

$$M' = L' \bullet \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 & \cdots & \xi_n - \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_n - \eta_{n-1} \\ \xi_1 - \eta'_1 & \cdots & \xi_n - \eta'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta'_{n-1} & \cdots & \xi_n - \eta'_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ onde } L' = \begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix}.$$

Pois, nesse caso a matriz dada por $(\xi_i - \xi'_i)_{1 \leq i \leq n}$ é identicamente nula. Como $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \neq (\xi'_1, \dots, \xi'_n, \eta'_1, \dots, \eta'_{n-1})$ e $\xi_j = \xi'_j$ para todos os j , segue que $\eta_i \neq \eta'_i$ para algum i . Vamos assumir que tal i seja 1. A condição $\text{posto}(M') < n$ implica em $\det(N) = 0$, onde

$$N = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{n-1} \\ H_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \xi_1 - \eta_1 & \cdots & \xi_n - \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_n - \eta_{n-1} \\ \xi_1 - \eta'_1 & \cdots & \xi_n - \eta'_1 \end{pmatrix},$$

onde H_i é a i -ésima linha da matriz H . Pode ser mostrado que a condição $\det(N) = 0$ implica que $\det(N') = 0$, com $N' = H' \bullet A'$, onde

$$H' = \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_{n-1} \\ H_1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 - \eta_2 & \cdots & \xi_n - \eta_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_{n-1} & \cdots & \xi_n - \eta_{n-1} \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_n - 1 \end{pmatrix}.$$

Como, por hipótese, todos r_i são ímpares, podemos reordenar as linhas de A' de modo que $\eta_2, \dots, \eta_k \notin \mathbb{Q}$ e $\eta_{k+1} = \dots = \eta_{n-1} = 1$. Ou seja,

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \xi_1 - \eta_2 & \cdots & \xi_n - \eta_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - \eta_k & \cdots & \xi_n - \eta_k \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1 - 1 & \cdots & \xi_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Seguindo exatamente os mesmos passos da demonstração do Lema 5.21, com A'' e H' sendo tomados como $A^{(1)}$ e H , respectivamente, obtemos o resultado. \square

Corolário 5.29. *Seja $H \in M_{n-1,n}(\mathbb{Q})$ satisfazendo **C1**. Sejam $m_1, \dots, m_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ inteiros positivos coprimos entre si, onde todos os r_j são ímpares. O germe da aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ dado por*

$$x \mapsto (x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, (Hx)_1^{r_1}, \dots, (Hx)_{n-1}^{r_{n-1}})$$

é \mathcal{A} -finito.

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 5.27 e do Lema 5.28. \square

Exemplo 5.30. Dados m_1, m_2, m_3, r_1, r_2 inteiros positivos coprimos entre si com r_1, r_2 ímpares. Temos que os seguintes germes de aplicações são \mathcal{A} -finito

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, (x_1 + x_2)^{r_1}), \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, x_3^{m_3}, (x_1 + x_2 + x_3)^{r_1}, (x_1 - x_2 + 2x_3)^{r_2}). \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [CL01] Flávio Ulhoa Coelho and Mary Lílian Lourenco, *Curso de álgebra linear, um vol. 34*, Edusp, 2001.
- [dB06] Javier Fernández de Bobadilla, *A reformulation of le's conjecture*, *Indagationes Mathematicae* **17** (2006), no. 3, 345–352.
- [DJP13] Theo De Jong and Gerhard Pfister, *Local analytic geometry: Basic theory and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [Ebe07] Wolfgang Ebeling, *Functions of several complex variables and their singularities*, vol. 83, American Mathematical Soc., 2007.
- [Fis06] Gerd Fischer, *Complex analytic geometry*, vol. 538, Springer, 2006.
- [Har13] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, vol. 52, Springer Science & Business Media, 2013.
- [LT09] Gustav I Lehrer and Donald E Taylor, *Unitary reflection groups*, vol. 20, Cambridge University Press, 2009.
- [Mat89] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*, vol. 8, Cambridge university press, 1989.
- [Mun74] James R Munkres, *Topology; a first course [by] james r. munkres*, Prentice-Hall, 1974.
- [NBPS17] Juan J Nuño-Ballesteros and Guillermo Peñafort-Sanchis, *Multiple point spaces of finite holomorphic maps*, *Quarterly Journal of Mathematics* **68** (2017), no. 2, 369–390.
- [Neu07] Mara D Neusel, *Invariant theory*, vol. 36, American Mathematical Soc., 2007.
- [Noe15] Emmy Noether, *Der endlichkeitssatz der invarianten endlicher gruppen*, *Mathematische Annalen* **77** (1915), no. 1, 89–92.
- [San16] GUILLERMO PEÑAFORT Sanchis, *Reflection maps*, arXiv preprint arXiv:1609.03222 (2016).

-
- [Ste64] Robert Steinberg, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Transactions of the American Mathematical Society **112** (1964), no. 3, 392–400.
- [Ten75] Barry R Tennison, *Sheaf theory*, vol. 21, Cambridge University Press, 1975.
- [Vak17] Ravi Vakil, *The rising sea: foundations of algebraic geometry*, preprint (2017).
- [Wal81] Charles TC Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bulletin of the London Mathematical Society **13** (1981), no. 6, 481–539.
- [Whi36] Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals of Mathematics (1936), 645–680.