

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

O Modelo de Regressão Potência-Normal Logística, Cauchy, Normal e Gumbel para resposta no intervalo unitário

Carlos Franklin Taco Pedraza

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Carlos Franklin Taco Pedraza

O Modelo de Regressão Potência-Normal Logística, Cauchy, Normal e Gumbel para resposta no intervalo unitário

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho

USP – São Carlos
Agosto de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P371m Pedraza, Carlos Franklin Taco
O Modelo de Regressão Potência-Normal Logística,
Cauchy, Normal e Gumbel para resposta no intervalo
unitário / Carlos Franklin Taco Pedraza; orientador
Vicente Garibay Cancho. -- São Carlos, 2020.
101 p.

Dissertação (Mestrado - Programa
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2020.

1. Distribuição Potência Normal. 2. Função
Quantílica. 3. Estimação de máxima verossimilhança. I.
Garibay Cancho, Vicente, orient. II. Título.

Carlos Franklin Taco Pedraza

The Power Normal Logistic, Cauchy, Normal and Gumbel
Regression for response in the unit interval

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP
and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master Interagency Program Graduate in Statistics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho

USP – São Carlos
August 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Carlos Franklin Taco Pedraza, realizada em 17/07/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Vicente Garibay Cancho (USP)

Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro (UFRPE)

Prof. Dr. Edwin Moises Marcos Ortega (ESALQ/USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

A meus pais Victoria e Francisco pelo amor, conselhos e liberdade que sempre me consentiram, sem vocês eu jamais teria conseguido. À Delia, minha irmã, à Dina e à Nely, minhas primas, que me acompanharam sempre transmitindo paz e tranquilidade. E à luz dos meus olhos, minha sobrinha Krys pela fofura das mensagens no WhatsApp.

Um agradecimento especial ao professor Vicente por ser meu orientador, sou muito grato pela confiança que ele me deu desde o primeiro dia, pelas motivações e ajudas ao longo da dissertação com as sugestões que foram muito importantes, e pela compreensão dos momentos quando eu sumia. Por tudo isso, que venha o doutorado!

Aos membros da banca, da qualificação e defesa, por todas as sugestões, críticas, correções, conselhos e direcionamentos para a dissertação.

Agradeço toda a equipe de professores do PIPGEs e funcionários da USP e UFSCar pelo excelente trabalho que realizam.

Também agradeço ao incondicional Pablo pelas muitas ajudas nos momentos difíceis, ao Oilson e ao Jardel que me mostraram o verdadeiro rosto do Brasil em todos os sentidos, sobre tudo, pelos momentos das gargalhadas nos finais de semana nas pizzarias, sorveterias e nos centros atacadistas da cidade. Também agradeço ao Fernando meu parceiro dos rolês aleatórios no Rio e São Paulo.

E finalmente agradeço a todos os contribuintes dos impostos estadual e federal, pois, sem eles não seria possível o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e a bolsa PAE.

*“Tucuy sonqoykuwan amaute yachachin, tucuy sonqykuwuan pachamanta yanapan.
Em Quéchua, O mestre que de coração compartilha seu conhecimento,
de coração e ajuda o mundo”
(Anônimo)*

RESUMO

PEDRAZA, C. F. T. **O Modelo de Regressão Potência-Normal Logística, Cauchy, Normal e Gumbel para resposta no intervalo unitário.** 2020. 101 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Neste trabalho é proposto uma nova classe de modelos estatístico para modelar dados limitados no intervalo contínuo $(0, 1)$. O novo modelo é a composição da distribuição potência-normal e o quantil de outra família de distribuições com o mesmo suporte. A nova proposta é uma generalização do modelo proposto por Johnson (Johnson (1949)). Além disso, a nova família é estendida para modelos de regressão como uma alternativa aos modelos de regressão com resposta no intervalo unitario. Também para a classe de modelos proposto, desenvolvemos procedimentos inferenciais desde a perspectiva clássica, baseada na teoria de verossimilhança. Especificamente é obtido as estimativas de máxima verossimilhança numericamente e estudamos as propriedades assintóticas via simulação estocástica e desenvolvemos procedimetos de teste de hipóteses para os parâmetros do modelo e um estudo de simulação é realizado para estudar o comportamento assintótico das estatísticas gradiente, wald, escore e razão de verossimilhança. Uma aplicação para dados reais para ilustrar o uso da nova família é considerada.

Palavras-chave: Distribuição Potência Normal, Função Quantílica, Estimação de máxima verossimilhança.

ABSTRACT

PEDRAZA, C. F. T. **The Power Normal Logistic, Cauchy, Normal and Gumbel Regression for response in the unit interval.** 2020. 101 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In this research a new statistical model is introduced to model data restricted in the continuous interval $(0, 1)$. The new model is the composition of the power-normal distribution and the quantile of another family of distributions with the same support. The new proposal is a generalization of the model proposed by Johnson (Johnson (1949)). In addition, the new family is extended to regression models as an alternative to the regression model with a unit interval response. Also for the proposed class of models, we developed inference procedures from the classical perspective, based on the likelihood theory. Specifically, the maximum likelihood estimates are obtained numerically and we study the asymptotic properties via stochastic simulation and we develop hypothesis testing procedures for the model parameters and a simulation study is performed to study the asymptotic behavior of the gradient, wald, score and likelihood ratio statistics. An application for real data to illustrate the use of the new family is considered.

Keywords: Power-Normal distribution, Quantile Function, Maximum likelihood estimation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A função de densidade da potência normal para alguns parâmetros	25
Figura 2 – A função de distribuição acumulada da potência normal para alguns parâmetros	26
Figura 3 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros. . .	30
Figura 4 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNC}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros. . .	31
Figura 5 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNN}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros. . .	32
Figura 6 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNG}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros. . .	33
Figura 7 – Coeficientes de assimetria das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG para alguns parâmetros.	36
Figura 8 – Ajustes dos dados nos modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B Johnson e Beta . .	61
Figura 9 – Boxplot da taxa de sobrevivência de pacientes com câncer colorretal por sexo (lado esquerdo) e por raça (lado direito)	82
Figura 10 – Ajustes dos dados nos modelos PNL e S_B Johnson	85
Figura 11 – Ajustes dos dados nos modelos PNC, PNN e PNG	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Funções quantílicas e suas derivadas	30
Tabela 2 – funções quantílicas	34
Tabela 3 – Média e variância da Distribuição PNL obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros	37
Tabela 4 – Média e variância da Distribuição PNC obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros	38
Tabela 5 – Média e variância da Distribuição PNN obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros	38
Tabela 6 – Média e variância da Distribuição PNG obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros	39
Tabela 7 – Resultados da simulação do modelo PNL com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$ com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$	44
Tabela 8 – Resultados da simulação do modelo PNL com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 50$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$	45
Tabela 9 – Resultados da simulação do modelo PNC com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$	46
Tabela 10 – Resultados da simulação do modelo PNC com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 50$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$	47
Tabela 11 – Resultados da simulação do modelo PNN com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$	48
Tabela 12 – Resultados da simulação do modelo PNN com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 5$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$	49
Tabela 13 – Resultados da simulação do modelo PNG com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$	50
Tabela 14 – Resultados da simulação do modelo PNG com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 5$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$	51
Tabela 15 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNL, para diferentes valores de δ e γ	55
Tabela 16 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNC, para diferentes valores de δ e γ	56
Tabela 17 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNN, para diferentes valores de δ e γ	57

Tabela 18 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNG, para diferentes valores de δ e γ	58
Tabela 19 – Medidas descritivas da taxa de incidência de Câncer Colorretal nos EUA . . .	59
Tabela 20 – Estimativas de máxima verossimilhança e erro padrão dos parâmetros dos modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B de Johnson e Beta para a taxa de incidência de câncer colorretal	59
Tabela 21 – Resultados do Teste de Kolmogorov Smirnov	60
Tabela 22 – Critérios de comparação dos modelos AIC e BIC para os modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B de Johnson, e Beta para a taxa de incidência de câncer colorretal.	60
Tabela 23 – Tabela de funções de ligação	65
Tabela 24 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNL com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = 2, \tau_1 = -2$ e $\alpha = 2$	71
Tabela 25 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNL com parâmetros $\beta_0 = 5, \beta_1 = -3, \tau_0 = 2, \tau_1 = 1$ e $\alpha = 0,5$	72
Tabela 26 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNC com parâmetros $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$	73
Tabela 27 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNC com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$	74
Tabela 28 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNN com parâmetros $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$	75
Tabela 29 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNN com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$	76
Tabela 30 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNG com parâmetros $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$	77
Tabela 31 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNG com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$	78
Tabela 32 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNL.	79
Tabela 33 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNC.	80
Tabela 34 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNN.	80
Tabela 35 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNG.	81
Tabela 36 – Medidas descritivas da taxa de sobrevivência das pessoas com câncer colorretal nos EUA	82
Tabela 37 – Critérios de comparação de modelos AIC e BIC com diferentes funções de ligação para os modelos PNL, PNC, PNN e PNG.	83

Tabela 38 – Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros dos modelos de regressão PNL e S_B Johnson	84
Tabela 39 – Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros dos modelos de regressão PNC, PNN e PNG	84
Tabela 40 – Critério AIC e BIC para os modelos ajustados.	85
Tabela 41 – Estimativa da mediana da taxa de sobrevivência e o intervalo de 95% de confiança para os seis pacientes hipotéticos com câncer colorretal - Modelo de regressão PNL	86

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Distribuição Potência Normal	24
1.2	Objetivos	26
1.3	Organização do Trabalho	27
2	NOVAS DISTRIBUIÇÕES DA FAMÍLIA POTÊNCIA NORMAL	29
2.1	Distribuição Potência Normal Logística, Cauchy, Normal e Gumbel	29
2.2	Inferência	39
2.2.1	<i>Estudo de simulação sem covariáveis dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG</i>	<i>41</i>
2.3	Estatísticas de Teste	52
2.3.1	<i>Estatísticas de teste sem covariável em modelos PNL, PNC, PNN e PNG</i>	<i>52</i>
2.3.2	<i>Estudo de simulação sem covariável em modelos PNL, PNC, PNN e PNG</i>	<i>54</i>
2.4	Aplicação	59
2.5	Conclusão	61
3	MODELO DE REGRESSÃO POTÊNCIA NORMAL LOGÍSTICA, CAUCHY, NORMAL E GUMBEL	63
3.1	Modelos de Regressão PNL, PNC, PNN e PNG Parametrizadas na Mediana	63
3.2	Inferência	65
3.2.1	<i>Função Escore</i>	<i>65</i>
3.2.2	<i>Estatísticas de Teste com covariáveis</i>	<i>67</i>
3.3	Simulações	68
3.3.1	<i>Estudo de simulação para os modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG com covariáveis</i>	<i>68</i>
3.3.2	<i>Estudo de simulação com covariável dos testes</i>	<i>79</i>
3.4	Aplicação	81
3.5	Conclusão	86
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS	87
4.1	Considerações finais	87

4.2	Sugestões para pesquisas futuras	87
	REFERÊNCIAS	89
APÊNDICE A	DEMONSTRAÇÕES DE PROPOSIÇÕES E ELEMEN- TOS DA FUNÇÃO ESCORE	93
A.1	Demonstrações	93
A.2	Elementos de informação observada	96
APÊNDICE B	FUNÇÃO ESCORE PARA O MODELO DE REGRES- SÃO E MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA . .	99
B.1	Função escore	99
B.2	Matriz de informação observada	100

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem havido um crescente interesse entre os estatísticos em desenvolver uma nova classe flexível de distribuições de probabilidade para fornecer modelos bem ajustados aos conjuntos de dados no intervalo $(0, 1)$. Tem-se visto progressos significativos para ampliar algumas distribuições bem conhecidas e aplicações bem-sucedidas em áreas como engenharia, meio ambiente, economia, ciências biomédicas. Para uma boa introdução e motivação, sugere-se a leitura de [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) e [Smithson e Shou \(2017\)](#). Um dos modelos mais utilizados para modelar essas características é o modelo beta [Krysicki \(1999\)](#). [Ferrari e Cribari-Neto \(2004\)](#) estenderam a família de distribuição beta para um modelo de regressão, assumindo distribuição beta para a variável resposta. Várias extensões do modelo de regressão beta podem ser encontrados na literatura como em [Simas, Barreto-Souza e Rocha \(2010\)](#), [Ospina e Ferrari \(2010\)](#), [Zuñiga, Valle e Ferrari \(2013\)](#), [Ospina e Ferrari \(2012\)](#)

Assim, modelos de regressão alternativos ao modelo de regressão beta foram propostos nos últimos anos. Por exemplo, [Qiu, Song e Tan \(2008\)](#) propuseram um modelo de regressão baseado na distribuição simplex, [Bayes, Bazán e Castro \(2017\)](#) introduziram o modelo de regressão quantílica paramétrica baseado na distribuição Kumaraswamy. [Lemonte e Bazán \(2016\)](#) propuseram um modelo de regressão baseado em uma classe mais geral de distribuições que inclui como caso especial a distribuição da Johnson S_B . Recentemente [Smithson e Shou \(2017\)](#) propuseram um modelo de regressão considerando uma família de distribuições aplicando a função de distribuição acumulada de uma distribuição sobre a função quantil de outra distribuição.

Neste dissertação, propõe-se uma nova classe de modelos de regressão para resposta limitada, considerando uma nova distribuição no intervalo de unitario aberto, introduzindo um novo parâmetro para fazer uma distribuição mais flexível, que controla a forma e a assimetria da distribuição. A nova distribuição é uma alternativa para estender a classe de distribuição de S_B de Johnson.

Para a formulação dessa distribuição, considere-se uma variável aleatória X com suporte

na reta real \mathbb{R} com a função de distribuição acumulada (f.d.a), $F_X(x)$ (distribuição basal) e considere-se a transformação a seguir

$$Y = G\left(\frac{X - \gamma}{\delta}\right), \quad (1.1)$$

em que $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $G(\cdot)$ é a f.d.a na forma padrão de uma variável aleatória com o mesmo suporte da variável aleatória X . Sob as mesmas condições acima, a variável aleatória X tem a seguinte representação estocástica

$$X = \gamma + \delta Q(y), \quad y \in (0, 1),$$

em que $Q(Y) = G^{-1}(\cdot)$ é a função quantil da f.d.a $G(\cdot)$. Portanto, a função densidade de probabilidade (f.d.p) da variável aleatória Y em (1.1) é dada por:

$$f_Y(y, \delta, \gamma) = \delta f_X(\gamma + \delta Q(y)) \left| \frac{dQ(y)}{dy} \right|, \quad y \in (0, 1), \quad (1.2)$$

em que $f_X(x) = dF_X(x)/dx$ é a f.d.p da variável aleatória X . Agora suponha-se em (1.1) a variável aleatória $X \sim N(0, 1)$ com f.d.a $\Phi(x)$, e considere-se a transformação $G(y) = 1/(1 + e^{-y})$ que representa a f.d.a da distribuição logística padrão. Logo de (1.2), obtém-se a distribuição de Johnson S_B Johnson (1949) com suporte limitado $(0, 1)$, cuja f.d.p bem dada por:

$$f_Y(y; \gamma, \delta) = \frac{\delta \phi(\gamma + \delta Q(y))}{y(1-y)}, \quad y \in (0, 1), \quad (1.3)$$

onde $\phi(\cdot)$ é a f.d.p da distribuição normal padrão, e

$$Q(y) = \log\left(\frac{y}{1-y}\right), \quad y \in (0, 1), \quad (1.4)$$

é a função quantil da distribuição logística padrão.

1.1 Distribuição Pôtença Normal

O modelo potência normal foi desenvolvido por Durrans (1992), baseado no modelo proposto por Lehmann (1953). O modelo de Lehmen é dado por:

$$f(z | \alpha) = \alpha f_0(z) \{F_0(z)\}^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Q},$$

em que $f_0(z)$ é uma f.d.p, F_0 a função de distribuição de $f_0(z)$ e α um número racional. O parâmetro α é o parâmetro de forma de $f(z)$. Pode-se perceber que para um α inteiro, $f(z | \alpha)$ representa a f.d.p do máximo para uma amostra de tamanho α com f.d.p dada por $f_0(z)$. Durrans (1992) generalizou essa distribuição para o caso em que α é estritamente positivo, ou seja, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, e denotou de gaussiana generalizada o modelo no qual $f_0(z) = \phi(z)$ e $F_0(z) = \Phi(z)$, conhecido como potência normal, cuja densidade é:

$$f(z | \alpha) = \alpha \phi(z) [\Phi(z)]^{\alpha-1}, \quad z \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Entanto, a f.d.a é dada por

$$F(z | \alpha) = [\Phi(z)]^\alpha, \quad z \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Note que quando $\alpha = 1$, a distribuição resultante é a normal padrão. As propriedades desse modelo foram estudadas adiante por [Gupta e Gupta \(2008\)](#) e [Pewsey \(2000\)](#). Ela tem algumas boas interpretações físicas quando α é um número inteiro, pode-se observar como a vida útil de um sistema em paralelo, veja [Gupta e Gupta \(2008\)](#) para uma revisão detalhada sobre esse assunto.

A distribuição potência normal é uma distribuição assimétrica, cujo suporte é toda a reta real. Além disso, a função de densidade potência normal é uma função de densidade unimodal, que é inclinada para a direita se $\alpha > 1$ e para a esquerda se $\alpha < 1$. Nas figuras 1 e 2 mostram-se a função de densidade de probabilidade da distribuição potência normal e a distribuição acumulada respectivamente, para alguns valores do parâmetro α . Além do mais, veja na figura 2 quando $\alpha \rightarrow 0$ assume o valor de 1 e toma aproximadamente o valor de 0 quando $\alpha \rightarrow \infty$. Nota-se como o parâmetro α afeta a localização, a dispersão, a curtose e a assimetria da distribuição.

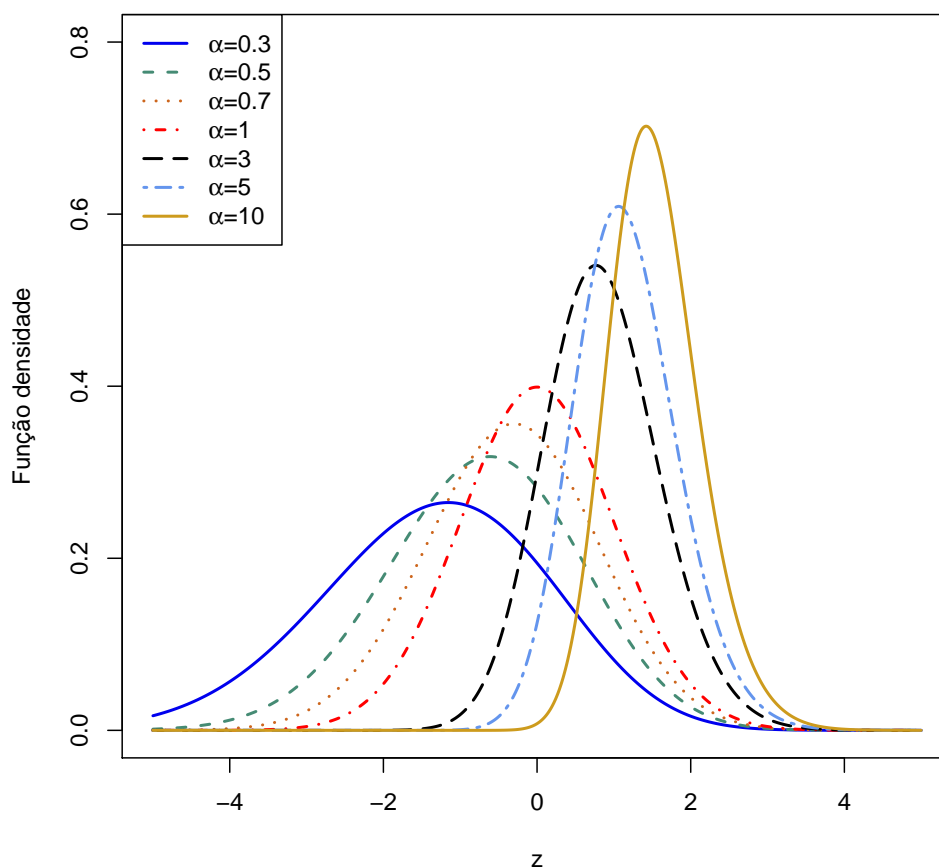


Figura 1 – A função de densidade da potência normal para alguns parâmetros

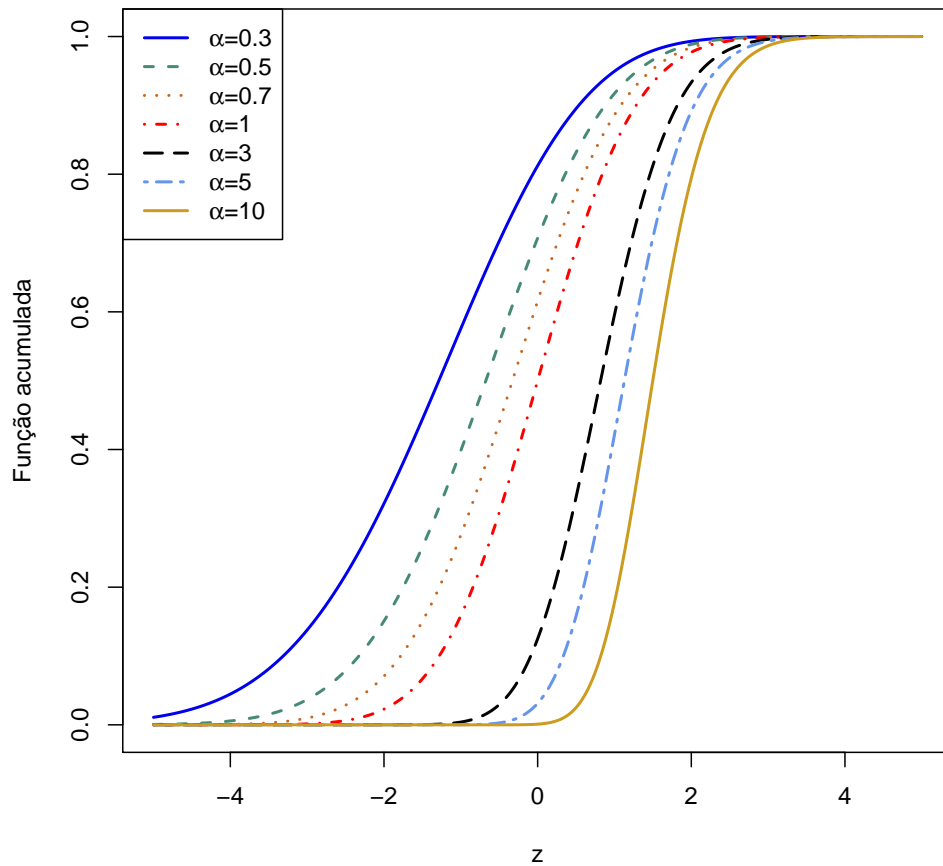


Figura 2 – A função de distribuição acumulada da potência normal para alguns parâmetros

1.2 Objetivos

Os objetivos específicos desta dissertação são:

- Propor uma nova família de distribuições para modelagem de dados no intervalo unitário $(0, 1)$;
- Estudar as propriedades estruturais da nova família de distribuição;
- Desenvolver procedimentos inferenciais sob a perspectiva clássica;
- Estender a nova família de distribuições proposta para modelos de regressão e desenvolver procedimentos inferenciais na perspectiva clássica;
- Fazer um estudo de simulação para estudar as propriedades assintóticas dos estimadores via máxima verossimilhança.

1.3 Organização do Trabalho

A dissertação se desenvolve como segue. No Capítulo 2, apresentamos quatro novos modelos chamados Potência Normal Logística (PNL), Potência Normal Cauchy (PNC), Potência Normal Normal (PNN) e Potência Normal Gumbel (PNG); apresenta-se suas função densidade de probabilidade, função de distribuição acumulada e momentos. Além disso, ilustra-se algumas formas que essas distribuições de probabilidade podem assumir para alguns valores específicos, assim mesmo é desenvolvido procedimentos inferencias baseados no método de máxima verossimilhança e apresenta-se também os testes gradiente, escore, Wald e da razão de verossimilhança e finalmente apresenta-se um estudo de simulação para a avaliação das propriedades assintóticas dos estimadores dos parâmetros do modelo proposto e apresenta-se também uma aplicação a um conjunto de dados de câncer colorretal. No Capítulo 3 apresenta-se uma extensão para um modelo de regressão logo sob uma abordagem clássica utiliza-se o método de máxima verossimilhança para a inferência sobre os parâmetros do modelo. Além disso, desenvolve-se o testes gradiente, escore, Wald e da razão de verossimilhança para avaliar a adequabilidade do modelo. E por último é apresentado uma aplicação a um conjunto de dados de câncer colorretal. E finalmente considerar algumas sugestões para trabalhos futuros.

NOVAS DISTRIBUIÇÕES DA FAMÍLIA POTÊNCIA NORMAL

Neste Capítulo é introduzido um novo modelo estatístico para dados no intervalo $(0, 1)$. O modelo proposto é uma composição da distribuição potência normal, e uma distribuição quantil padrão (logística, cauchy, normal e gumbel). São estudadas algumas propriedades dos modelos e são desenvolvidos procedimentos inferências via método de máxima verossimilhança. E no final deste Capítulo apresenta-se as estatísticas de teste para avaliação de uma hipótese simple nula entre os modelos propostos e o modelo de Johnson S_B , e uma aplicação a um conjunto de dados reais.

2.1 Distribuição Potência Normal Logística, Cauchy, Normal e Gumbel

Uma variável aleatória X é dita distribuição padrão potência normal (PN) proposta por [Gupta e Gupta \(2008\)](#), se X tem f.d.a $F_X(x; \alpha) = [\Phi(x)]^\alpha$, com $x \in \mathbb{R}$, e $\alpha > 0$. Quando $\alpha = 1$, coincide com a distribuição normal padrão. As novas distribuições da família são obtidas considerando a composição dessa distribuição como a distribuição basal (1.1) e as funções quantiles das distribuições logística padrão, cauchy padrão, normal padrão e gumbel padrão dadas na [Tabela 1](#). Dessa forma, a f.d.p da nova família de distribuição é dado por

$$f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = \alpha \delta \phi(\gamma + \delta Q(y)) [\Phi(\gamma + \delta Q(y))]^{\alpha-1} Q'(y), \quad y \in (0, 1), \quad (2.1)$$

em que $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. A seguir, apresenta-se as expressões para as novas funções densidade de probabilidade obtidas a partir da [Tabela 1](#). No decorrer da dissertação chamaremos as novas distribuições dadas em [2.2](#), [2.3](#), [2.4](#) e [2.5](#) de distribuição potência logística (PNL para abreviar), distribuição potência cauchy (PNC), distribuição potência normal (PNN) e distribuição potência

gumbel (PNG). Além do mais, a notação usada para tais distribuições como $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$, $Y \sim \text{PNC}(\alpha, \delta, \gamma)$, $Y \sim \text{PNN}(\alpha, \delta, \gamma)$ e $Y \sim \text{PNG}(\alpha, \delta, \gamma)$.

Tabela 1 – Funções quantílicas e suas derivadas

Distribuição	$Q(y)$	$Q'(y)$
Logística	$\log\left(\frac{y}{1-y}\right)$	$\frac{1}{y(1-y)}$
Cauchy	$\tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\pi \sec^2\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$
Normal	$\Phi^{-1}(y)$	$\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(y))}$
Gumbel	$-\log(-\log(y))$	$\frac{1}{y \log(1/y)}$

Proposição 1. (Distribuição Potência Normal Logístico (PNL).) Seja $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$, em que $Q(\cdot)$ corresponde ao quantil da distribuição logística padrão, então a f.d.p é dado por

$$f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = \frac{\alpha \delta \phi(\gamma + \delta \log(y/1-y)) [\Phi(\gamma + \delta \log(y/1-y))]^{\alpha-1}}{y(1-y)}, \quad (2.2)$$

em que $y \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Note-se que quando $\alpha = 1$ à distribuição PNL se reduce a distribuição Johnson S_B dada por 1.3.

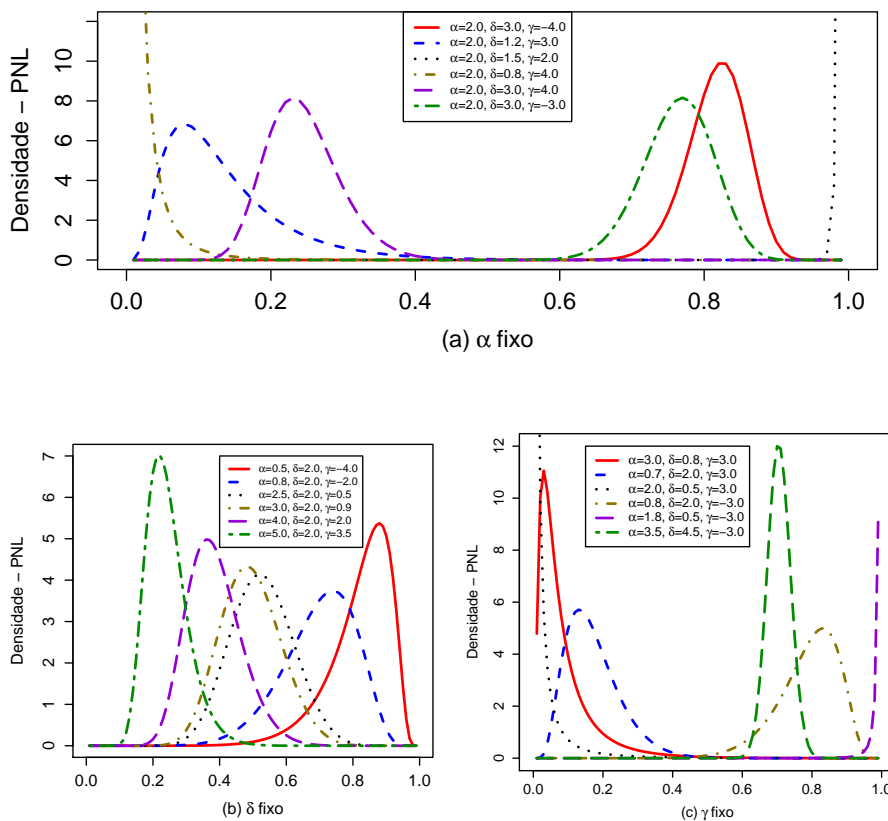


Figura 3 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros.

A figura 3 mostra gráficos de f.d.p de distribuição $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$ para várias configurações de parâmetros. Nota-se que as densidades podem assumir diferentes formas, a saber: unimodal, assimétrica, J e J invertido. Para assumir forma unimodal e assimétrica à direita basta $\gamma < 0$ com δ e α maiores a 1. Entretanto, toma a forma unimodal e assimétrica à esquerda se $\gamma > 0$ com δ e α maiores a 1. Para as forma J é necessário δ próximo a 0 e $\gamma > 0$; e J invertido se δ próximo a 0 e $\gamma < 0$ sendo que $\alpha > 0$. E será simétrica quando $\alpha \rightarrow 1$ e $\gamma \rightarrow 0$

Proposição 2. (Distribuição Potência Normal Cauchy (PNC).) Seja $Y \sim \text{PNC}(\alpha, \delta, \gamma)$, em que $Q(\cdot)$ corresponde ao quantil da distribuição cauchy padrão, então a f.d.p é dado por

$$f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = \pi \alpha \delta \phi(\gamma + \delta \tan(\pi(y - 0, 5))) [\Phi(\gamma + \delta \tan(\pi(y - 0, 5)))]^{\alpha-1} \sec^2(\pi(y - 0, 5)), \quad (2.3)$$

em que $y \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

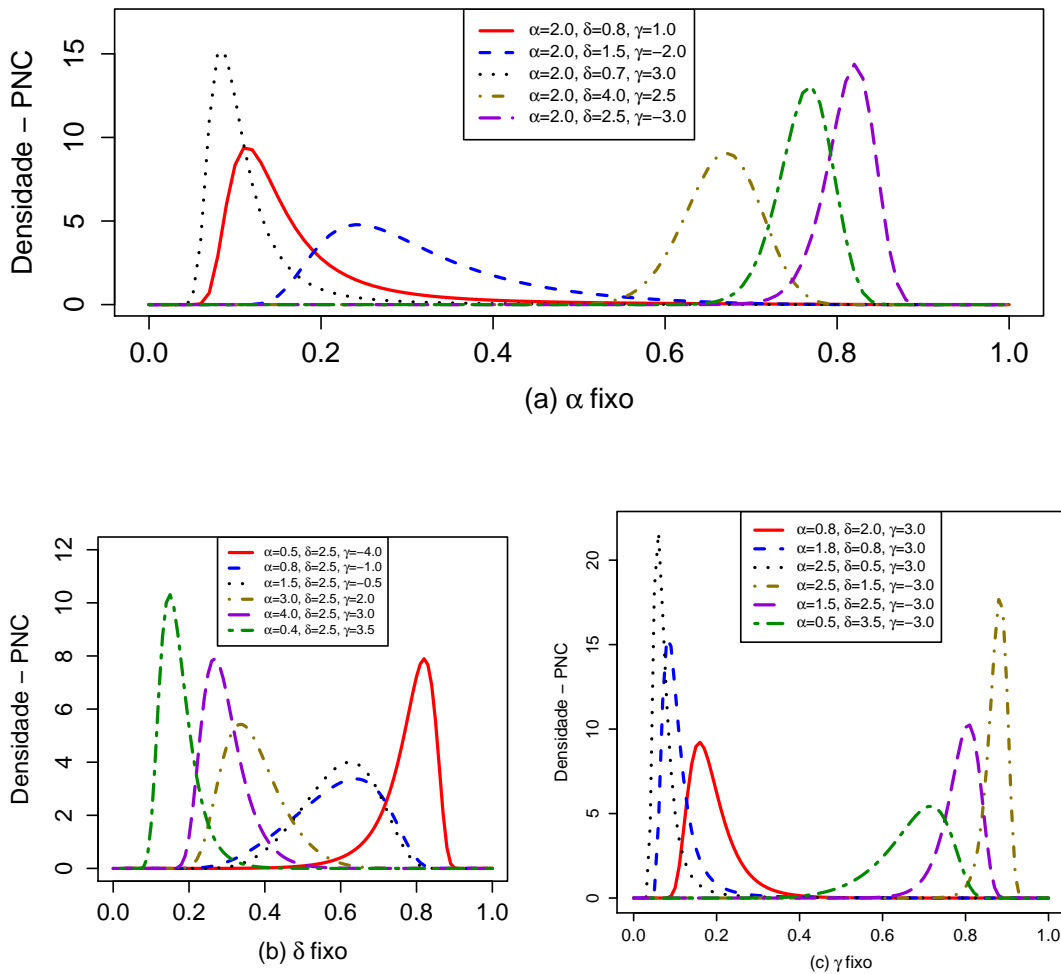


Figura 4 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNC}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros.

A figura 4 estão expressos os gráficos da f.d.p da distribuição PNC para algumas triplas de parâmetros. Assim como a distribuição PNL pode assumir as formas unimodal e assimétrica. Nesta distribuição não é possível obter as formas J e J invertido. Assim, quando $\gamma > 0$ é assimétrica unimodal à esquerda e $\gamma < 0$ é assimétrica unimodal à direita, em ambos os casos $\alpha > 0$ e $\delta > 0$. E é simétrica quando $\gamma \rightarrow 0$ com $\alpha \rightarrow 1$.

Proposição 3. (Distribuição Potência Normal Normal (PNN)) Seja $Y \sim \text{PNN}(\alpha, \delta, \gamma)$, em que $Q(\cdot)$ corresponde ao quantil da distribuição normal padrão, então a f.d.p é dado por

$$f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = \frac{\alpha \delta \phi(\gamma + \delta \Phi^{-1}(y)) [\Phi(\gamma + \delta \Phi^{-1}(y))]^{\alpha-1}}{\phi(\Phi^{-1}(y))}, \quad (2.4)$$

em que $y \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

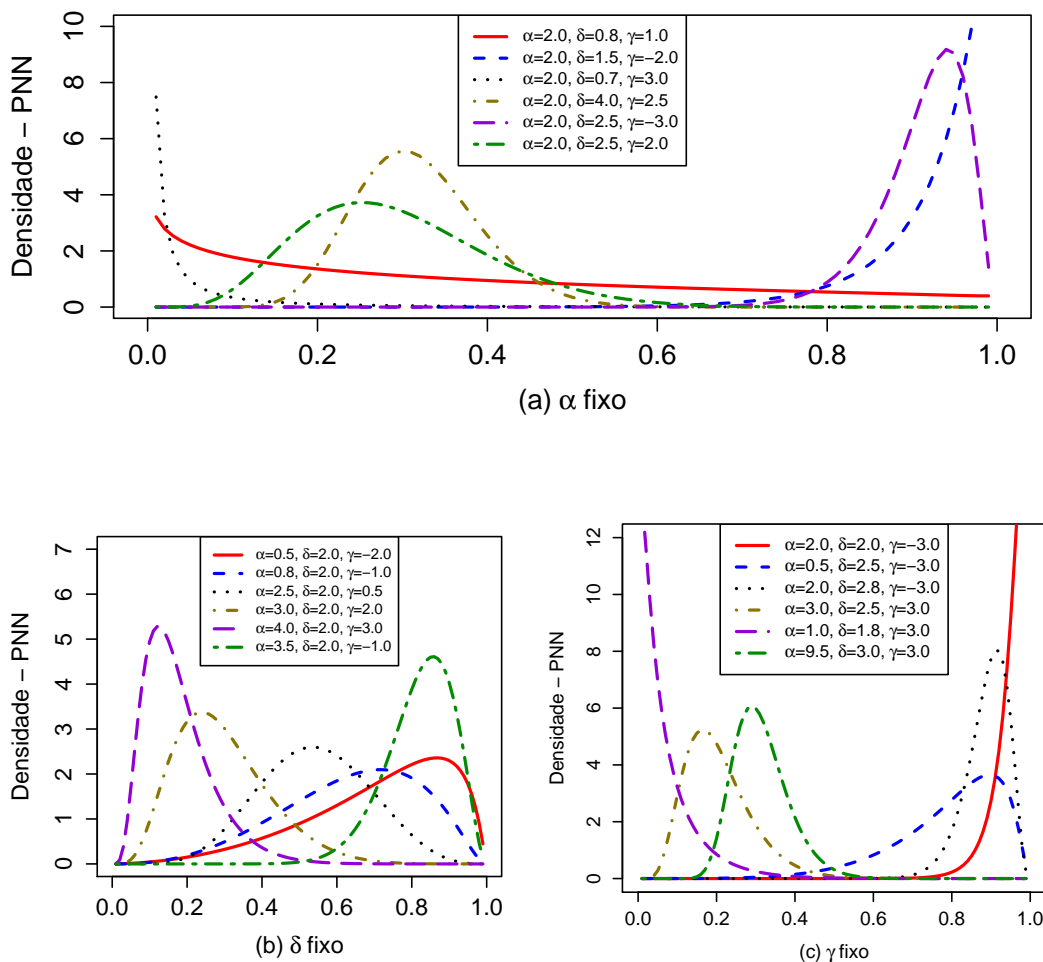


Figura 5 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNN}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros.

A figura 5 exibe gráficos da f.d.p da distribuição PNN para algumas triplas de parâmetros (α, δ, γ) . Se $\gamma \geq 0$ com $\delta \rightarrow 0$ e α livre assume forma J, e é J invertido se $\gamma < 0$. Não obstante

assume forma assimétrica unimodal à direita se $\gamma < 0$ com $\alpha > 0$ e $\delta > 1$; e é assimétrica unimodal à esquerda se $\gamma > 0$ sendo que $\alpha > 0$ e $\delta > 1$. E a distribuição será simétrica se $\gamma \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow 1$.

Proposição 4. (Distribuição Potência Normal Gumbel (PNG).) Seja $Y \sim \text{PNG}(\alpha, \delta, \gamma)$, em que $Q(\cdot)$ corresponde ao quantil da distribuição gumbel padrão, então a f.d.p é dado por

$$f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = \frac{\alpha \delta \phi(\gamma - \delta \log(-\log(y))) [\Phi(\gamma - \delta \log(-\log(y)))]^{\alpha-1}}{y \log(1/y)}, \quad (2.5)$$

em que $y \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$.

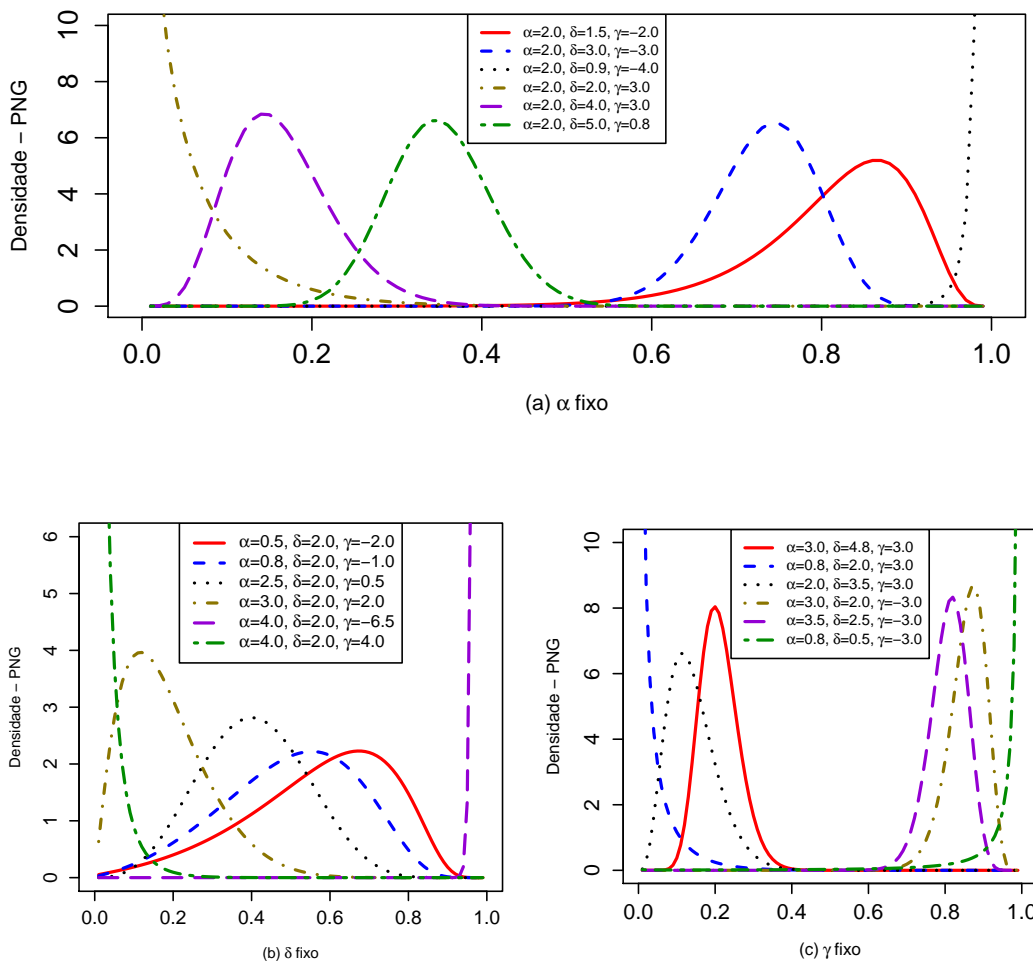


Figura 6 – Exemplos de curvas da f.d.p de $Y \sim \text{PNG}(\alpha, \delta, \gamma)$ para alguns parâmetros.

Analogamente às distribuições PNL e PNN a Figura 6 exibe as formas que assume a distribuição PNG para diferentes configurações dos tres parâmetros. Se $\gamma \geq 0$ com $\delta \rightarrow 0$ e $\alpha > 0$ temos forma J invertida. Assume a forma J quando $\gamma < 0$ com δ próximo a 0 e $\alpha > 0$. Entretanto, a distribuição PNG assume forma assimétrica unimodal à esquerda se $\gamma \geq 0$ com $\alpha > 0$

e $\delta > 1$; a mesma regra se $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ e $\delta > 1$ então a distribuição exibe uma forma assimétrica unimodal à direita.

Com base nos gráficos apresentados nas figuras 3, 4, 5, e 6, percebe-se que as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG são bastante flexíveis e são uma alternativa interessante, quando comparada a outras distribuições que têm o suporte limitado $(0, 1)$, para a análise de dados univariados.

Apresentam-se a seguir resultados das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG os quais estão no Apêndice A.1.

Proposição 5. Seja Y a variável aleatória que segue uma das distribuições 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5 então, f.d.a bem dada por

$$F_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) = [\Phi(\gamma + \delta Q(y))]^\alpha, \quad y \in (0, 1),$$

em que $Q(\cdot)$ segue da Tabela 1, $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Proposição 6. O r -ésimo momento da distribuição que segue 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5 bem dada por

$$E[Y^r] = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \gamma^k \delta^{r-k} \mu_{r-k}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

em que $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$\mu_k = \alpha \int_0^1 [G(\Phi^{-1}(u))]^k u^{\alpha-1} du, \quad (2.6)$$

com $G(\cdot)$ segue da Tabela 2 e $\mu_0 = 1$.

Tabela 2 – funções quantílicas

Distribuição	Função quantílica $G(u)$
Logística	$(1 + \exp(-u))^{-1}$
Cauchy	$\frac{1}{\pi} \arctan(u) + 0,5$
Normal	$\Phi(u)$
Gumbel	$\exp(-\exp(-u))$

em que $x_q(\alpha)$ é o q -ésimo quantil da distribuição potência normal, onde $0 < q < 1$. Embora os momentos não possuam uma forma fechada, eles existem devido ao suporte das distribuições PNL, PNC, PNN ou PNG e portanto a integral em (2.6) tem que ser computada numericamente usando *software* como o R.

Proposição 7. Seja Y a variável aleatória que segue uma das distribuições 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5. Então, o q -ésimo quantil é dada por

$$y_q = Q^{-1} \left(\frac{x_q(\alpha) - \gamma}{\delta} \right), \quad 0 < q < 1,$$

em que $Q^{-1}(\cdot)$ representa uma função quantílica dada na Tabela 2 e $x_q(\alpha)$ é o q -ésimo quantil da distribuição potência normal.

A partir da proposição 7, segue-se que as medianas das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG denotadas por ψ_{PNL} , ψ_{PNC} , ψ_{PNN} e ψ_{PNG} , respectivamente dadas por

$$\psi_{\text{PNL}} = \left\{ 1 + \exp \left(- \left(\frac{x_{0,5}(\alpha) - \gamma}{\delta} \right) \right) \right\}^{-1}; \quad (2.7a)$$

$$\psi_{\text{PNC}} = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x_{0,5}(\alpha) - \gamma}{\delta} \right) + 0,5; \quad (2.7b)$$

$$\psi_{\text{PNN}} = \Phi \left(\frac{x_{0,5}(\alpha) - \gamma}{\delta} \right); \quad (2.7c)$$

$$\psi_{\text{PNG}} = \exp \left(- \exp \left(- \left(\frac{x_{0,5}(\alpha) - \gamma}{\delta} \right) \right) \right). \quad (2.7d)$$

em que $x_{0,5}(\alpha)$ é a mediana da distribuição potência normal padrão. Além do mais, a proposição 1 é uma geração simples de pseudo-aleatório de distribuição PNL, ou seja, X é uma variável aleatória com distribuição potência normal que pode ser gerada por exemplo usando `powdist` pacote de R [Anyosa, Bazan e Lemonte \(2017\)](#), então a variável aleatória

$$Y = \left\{ 1 + \exp \left(- \frac{X - \gamma}{\delta} \right) \right\}^{-1},$$

tem a distribuição $\text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$. Ademais, a partir das proposições 1, 2, 3 e 4 podem-se obter as medidas da assimetria dos modelos usando o coeficiente quartílico de assimetria ou fórmula de Bowley [KENNEY e KEEPING \(1954\)](#), que é definido como

$$B = \frac{y_{0,75} + y_{0,25} - 2\psi}{y_{0,75} - y_{0,25}},$$

em que $y_{0,25}$ é o valor quartil inferior, ψ é o valor mediano e $y_{0,75}$ é o valor do quartil superior. O coeficiente quartílico B esta sempre compreendido no intervalo $[-1, +1]$. Quando $B = 0$ a distribuição é simétrica, se $0 < B < 1$ a distribuição é assimétrica à direita, e quando $-1 < B < 0$ a distribuição é assimétrica à esquerda.

Na [Figura 7](#) mostra a medida da assimetria para alguns parâmetros dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG; as figuras indicam que as distribuição são simétricas quando $\alpha \rightarrow 1$ e $\gamma \rightarrow 0$, portanto os parâmetros α e γ controlam a assimetria das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG.

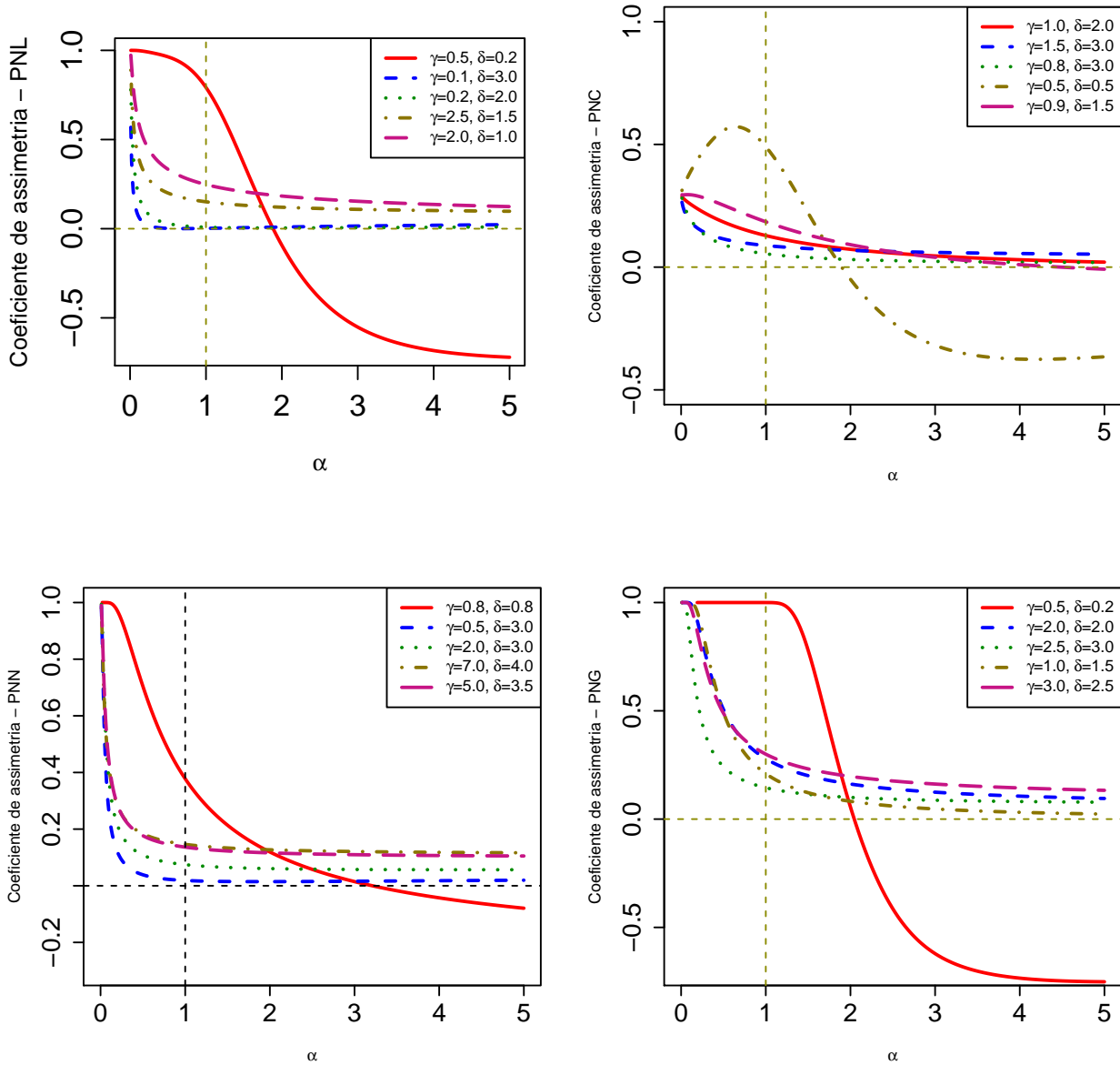


Figura 7 – Coeficientes de assimetria das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG para alguns parâmetros.

Proposição 8. Se Y segue uma das distribuições PNL, PNC, PNN ou PNG com $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$, então

- (i) A mediana das distribuições PNL, PNC e PNN é $\psi = 1/2$. Entretanto, se Y segue PNG a mediana é $1/e$.
- (ii) Se Y segue PNL a média de Y é $E(Y) = 1/2$.
- (iii) A f.d.p das distribuições PNL, PNC e PNN são simétricas em $(0, 1)$ e em torno à $E(Y) = \psi = 1/2$.

Proposição 9. Seja $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, \gamma)$. Então $1 - Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, -\gamma)$

A proposição 9 implica que a distribuição refletida do PNL também é um membro da família PNL. Devido a essas propriedades, a mediana de $1 - y$ é $1 - \psi$, em que ψ é mediana de Y .

As tabelas 3, 4, 5 e 6 são apresentados as médias e variâncias das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG respectivamente, para diferentes combinações de seus parâmetros, tais medidas foram obtidas numericamente usando a função *integrate* do *software* R (R Core Team, 2019); veja que para as quatro distribuições a primeira coluna de parâmetros é variado o parâmetro α e mantendo os demais parâmetros constantes, e os valores respectivos das médias e variâncias não variam muito. Agora na segunda coluna de parâmetros é variado o parâmetro δ mantendo os demais parâmetros constantes, esta variação do parâmetro δ influencia na variação da média consideravelmente. E na terceira coluna de parâmetros γ é variado e os demais parâmetros são mantidas constantes, observa-se que a variação do parâmetro γ , influencia principalmente no valor da variância. Desta forma, pode-se dizer que o parâmetro δ é o parâmetro que está relacionado com a locação do modelo, e o parâmetro γ está relacionado com a dispersão do modelo.

Tabela 3 – Média e variância da Distribuição PNL obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros

Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância
$\alpha = 1$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,3840	0,0125	$\gamma = 3$	0,1469	0,0062	$\gamma = 0,1$	0,5710	0,0171
$\delta = 2$			$\delta = 1,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 1,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4220	0,0010	$\gamma = 3$	0,2048	0,0057	$\gamma = 0,8$	0,4630	0,0166
$\delta = 2$			$\delta = 2$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4476	0,0096	$\gamma = 3$	0,2495	0,0048	$\gamma = 1,5$	0,3580	0,0138
$\delta = 2$			$\delta = 2,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4666	0,0088	$\gamma = 3$	0,2838	0,0048	$\gamma = 2$	0,2890	0,0122
$\delta = 2$			$\delta = 3$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 3$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4810	0,0086	$\gamma = 3$	0,3105	0,0032	$\gamma = 4$	0,1020	0,0028
$\delta = 2$			$\delta = 3,5$			$\delta = 1,5$		

Tabela 4 – Média e variância da Distribuição PNC obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros

Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância
$\alpha = 1$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,3711	0,0144	$\gamma = 3$	0,1680	0,0033	$\gamma = 0,1$	0,5792	0,0188
$\delta = 2$			$\delta = 1,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 1,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4113	0,0141	$\gamma = 3$	0,2074	0,0035	$\gamma = 0,8$	0,4582	0,0212
$\delta = 2$			$\delta = 2$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4393	0,0133	$\gamma = 3$	0,2411	0,0033	$\gamma = 1,5$	0,3567	0,0153
$\delta = 2$			$\delta = 2,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4612	0,0124	$\gamma = 3$	0,2679	0,0031	$\gamma = 2$	0,2896	0,0106
$\delta = 2$			$\delta = 3$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 3$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,4773	0,0115	$\gamma = 3$	0,2915	0,0027	$\gamma = 4$	0,1371	0,0013
$\delta = 2$			$\delta = 3,5$			$\delta = 1,5$		

Tabela 5 – Média e variância da Distribuição PNN obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros

Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância
$\alpha = 1$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,327	0,0271	$\gamma = 3$	0,0549	0,0507	$\gamma = 0,1$	0,606	0,0348
$\delta = 2$			$\delta = 1,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 1,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,382	0,0241	$\gamma = 3$	0,0998	0,0066	$\gamma = 0,8$	0,444	0,0369
$\delta = 2$			$\delta = 2$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,420	0,0226	$\gamma = 3$	0,144	0,0071	$\gamma = 1,5$	0,292	0,0287
$\delta = 2$			$\delta = 2,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,448	0,0213	$\gamma = 3$	0,183	0,0069	$\gamma = 2$	0,201	0,0205
$\delta = 2$			$\delta = 3$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 3$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,471	0,0192	$\gamma = 3$	0,217	0,0059	$\gamma = 4$	0,0228	0,0012
$\delta = 2$			$\delta = 3,5$			$\delta = 1,5$		

Tabela 6 – Média e variância da Distribuição PNG obtidas numericamente para diferentes valores dos parâmetros

Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância	Parâmetro	Média	Variância
$\alpha = 1$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,215	0,0206	$\gamma = 3$	0,0178	0,0019	$\gamma = 0,1$	0,469	0,031
$\delta = 2$			$\delta = 1,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 1,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,262	0,0198	$\gamma = 3$	0,0378	0,003	$\gamma = 0,8$	0,321	0,0306
$\delta = 2$			$\delta = 2$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,295	0,019	$\gamma = 3$	0,033	0,0038	$\gamma = 1,5$	0,185	0,0221
$\delta = 2$			$\delta = 2,5$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 2,5$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,321	0,018	$\gamma = 3$	0,0902	0,0042	$\gamma = 2$	0,111	0,0138
$\delta = 2$			$\delta = 3$			$\delta = 1,5$		
$\alpha = 3$			$\alpha = 1,2$			$\alpha = 2$		
$\gamma = 1$	0,342	0,016	$\gamma = 3$	0,116	0,0041	$\gamma = 4$	0,0039	0,0003
$\delta = 2$			$\delta = 3,5$			$\delta = 1,5$		

2.2 Inferência

Nesta seção, vamos abordar os procedimentos inferenciais para a estimação dos parâmetros via máxima verossimilhança para as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG.

Dada uma amostra aleatória Y_1, \dots, Y_n de uma distribuição PNL, PNC, PNN ou PNG com o vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)^\top$, e com f.d.p dada por 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5 respectivamente; a função de log-verossimilhança para $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)^\top$ dado $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ é escrita como

$$\ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \{ \log(\alpha\delta) + \log(\phi(\gamma + \delta Q(y_i))) + (\alpha - 1) \log(\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))) + \log(Q'(y_i)) \} \quad (2.8)$$

em que $Q(\cdot)$ é uma das funções quantílicas da Tabela 1 e $Q'(\cdot)$ é a derivada da distribuição quantílica logística, cauchy, normal ou gumbel segundo seja o caso dada na Tabela 2. A função escore é determinada a partir das primeiras derivadas da função log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})$ em relação a cada um dos parâmetros e são dadas pelas expressões seguintes

$$\mathbf{U}_\alpha = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}_\delta = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} + \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\gamma + \delta Q(y_i))}{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))} Q(y_i) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))} Q(y_i) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{U}_\gamma = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\gamma + \delta Q(y_i))}{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))} \quad (2.11)$$

As estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) de $\boldsymbol{\vartheta}$ são os valores que maximizam a função log-verossimilhança dada em (2.8), o que é equivalente a resolver o sistema de equações não lineares

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = 0.$$

Dessa maneira, resolvendo a equação $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \alpha} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = 0$, obtém-se uma expressão para $\hat{\alpha}$ dada por

$$\hat{\alpha} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(\Phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i)))} \quad (2.12)$$

Entanto, como não é possível encontrar uma expressão analítica fechada para $\hat{\gamma}$ e $\hat{\delta}$ então, de maneira análoga resolvendo as equações $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \gamma} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = 0$ e $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \delta} \Big|_{\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = 0$, obtemos as seguintes equações

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))}{\phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))} = (1 - \hat{\alpha}) \sum_{i=1}^n \frac{\phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))}{\Phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))} \quad (2.13)$$

$$\hat{\delta} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\phi'(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))}{\phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))} + (\hat{\alpha} - 1) \frac{\phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))}{\Phi(\hat{\gamma} + \hat{\delta}Q(y_i))} \right] Q(y_i)} \quad (2.14)$$

Entretanto, não conseguimos obter expressões fechadas para as EMV's dos parâmetros dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG. As estimativas de máxima verossimilhança são obtidas a partir da maximização da função log-verossimilhança por meio de algum método Newton-Raphson tal método aparece como subrotina do *software* R.

A inferência sobre os parâmetros são feitas usualmente por médio da normalidade assintótica dos EMV, segundo [Hinkley e Cox \(1974\)](#) sob as condições de regularidade usuais $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ e $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ são estimadores consistentes de $\boldsymbol{\vartheta}$ e $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$, respectivamente, em que $\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ é a matriz de informação de Fisher avaliada em $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ e definida como

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta}) = E \left[- \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}^\top} \right].$$

À medida que o tamanho da amostra cresce pode-se mostrar que

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \sim N_3(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1})$$

No entanto, a expressão $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ para as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG não apresenta forma fechada. Porém, [Efron e Hinkley \(1978\)](#) mostram que uma aproximação para $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ pode ser feita

utilizando a matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\vartheta}) = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\vartheta} \partial \boldsymbol{\vartheta}^\top}$ avaliada em $\boldsymbol{\vartheta} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, isto é

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha \partial \delta} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \delta^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \delta \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} \end{array} \right] \Big|_{\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})}$$

em que os elementos da matriz de informação observada estão apresentados no apêndice A.2. Por outra parte, considerando a normalidade assintótica dos EMV de $\boldsymbol{\vartheta}$, podemos construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros em estudo. Portanto,

$$(\hat{\vartheta}_j - z_{1-\zeta/2} \text{EP}(\hat{\vartheta}_j); \hat{\vartheta}_j + z_{1-\zeta/2} \text{EP}(\hat{\vartheta}_j)), \text{ para } j = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

são intervalos de confiança assintóticos de ϑ_j , para $j = 1, 2, 3$, com coeficientes de confiança $100(1 - \zeta)\%$. Sendo $\text{EP}(\hat{\vartheta}_j)$ é o erro padrão do EMV de ϑ_j obtida pela raiz quadrada do j -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz de informação observada avaliada em $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ e $z_{1-\zeta/2}$ é o quantil $1 - \zeta/2$ da distribuição normal padrão.

2.2.1 Estudo de simulação sem covariáveis dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG

Nesta seção, um estudo de simulação é desenvolvido para avaliar o desempenho das propriedades assintóticas das estimativas via máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG. Isso foi feito calculando a média, o desvio padrão (DP), as médias do erro padrão (MEP), o viés e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) e estas quantidades são definidas como segue

$$\text{Média} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\vartheta}_j^{(i)}; \quad (2.16a)$$

$$\text{MEP} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{EP}_j^{(i)}; \quad (2.16b)$$

$$\text{Viés} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\vartheta}_j^{(i)} - \vartheta_j); \quad (2.16c)$$

$$\text{REQM} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\vartheta}_j^{(i)} - \vartheta_j)^2}. \quad (2.16d)$$

Em que EP_j é o erro padrão correspondente à estimativa do parâmetro j , que é obtida calculando a raiz quadrada do j -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz de informação observada, para $j = 1, 2, 3$ e $\hat{\vartheta}_j^{(i)}$ é a estimativa de ϑ_j na i -ésima amostra para $\vartheta_j \in \boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)^\top$ e M é o número de simulações. E com o objetivo de avaliar a qualidade da estimação intervalar,

obtivemos a probabilidade de cobertura (PC) de 95% de confiança para os parâmetros em estudo os quais foram obtidos a partir da expressão 2.15.

A simulação sem covariáveis para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)$ dos modelos propostos PNL, PNC, PNN e PNG se considero os seguintes cenários $\vartheta = (\alpha, \delta, \gamma)$:

- Cenário 1: $\alpha = (2; 1; 0, 20)$ e fixando $\delta = 4$ e $\gamma = 2$.
- Cenário 2: $\alpha = (1, 5; 2, 5; 0, 50)$ e fixando $\delta = 3$ e $\gamma = -2$.

De maneira adicional consideramos tamanhos de amostra $n = (50, 100, 200, 400, 800)$ e levamos em conta $M = 1000$ simulações em todos os cenários. Para simular uma amostra aleatória sob os supostos dos modelos seguimos o seguinte procedimento:

- Fixemos os valores de n e $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)$
- Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ foram geradas variáveis aleatórias PNL, PNC, PNN ou PNG respectivamente dadas pelas expressões

$$y_i = \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(\frac{x_{q_i}^i(\alpha) - \gamma}{\delta}\right)\right)}, \quad \alpha > 0, \delta > 0 \text{ e } \gamma \in \mathbb{R};$$

$$y_i = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x_{q_i}^i(\alpha) - \gamma}{\delta}\right) + 0,5, \quad \alpha > 0, \delta > 0 \text{ e } \gamma \in \mathbb{R};$$

$$y_i = \Phi\left(\frac{x_{q_i}^i(\alpha) - \gamma}{\delta}\right), \quad \alpha > 0, \delta > 0 \text{ e } \gamma \in \mathbb{R};$$

$$y_i = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x_{q_i}^i(\alpha) - \gamma}{\delta}\right)\right)\right), \quad \alpha > 0, \delta > 0 \text{ e } \gamma \in \mathbb{R}.$$

em que $x_{q_i}^i(\alpha)$ foi gerada a partir da função quantílica normal padrão $N(0, 1)$ avaliada em $q_i^{1/\alpha}$, com $q_i \sim U(0, 1)$.

Os resultados são apresentados nas tabelas 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

- A Tabela 7 apresenta os resultados das simulações para o modelo PNL com parâmetros $\delta = 4$, $\gamma = 2$ e $\alpha = 2; 1; 0, 20$. Nota-se para as três configurações a medida que o tamanho da amostra aumenta, as EMVs são próximas aos valores verdadeiros dos parâmetros em média. Observe-se que em módulo o viés, e a raiz do erro quadrático médio são próximos de zero e tendem a diminuir a medida que o tamanho da amostra aumenta. Além do mais, a média dos erros padrões e os desvios padrões são aproximadamente iguais com o incremento do tamanho da amostra. Adicionalmente, o valor da probabilidade de cobertura é próxima ao valor de 95% para todos os casos. Entanto a Tabela 8 apresenta os resultados

da simulação do modelo PNL com parâmetros $\delta = 3$, $\gamma = -2$ com $\alpha = 1,5; 2,5$; e $0,50$. As interpretações dos resultados são análogas à Tabela 7.

- As Tabelas 9 e 10 apresentam os resultados de simulação para o modelo PNC com os parâmetros $\delta = 4$, $\gamma = 2$ e $\alpha = 2; 1; 0,20$ e $\delta = 3$, $\gamma = -2$ com $\alpha = 1,5; 2,5$; e $0,50$. Perceba-se que para os três cenários as EMVs são próxima aos valores reais dos parâmetros, a partir com uma amostra de tamanho 200 em relação ao parâmetro α entanto que para os parâmetros δ e γ com tamanho da amostra 100. Por outra parte, observe-se que em módulo o viés e a raiz do erro quadrático médio são próximos de zero e diminuem para amostras grandes. Adicionalmente, a média dos erros padrões e os desvios padrões são semelhantes com o incremento do tamanho da amostra. E finalmente o valor da probabilidade de cobertura é próxima ao valor de 95% para todos os parâmetros.
- As Tabelas 11 e 12 apresentam os resultados de simulação para o modelo PNN com os parâmetros $\delta = 4$, $\gamma = 2$ e $\alpha = 2; 1; 0,20$. Veja que as EMVs são próximas em media aos valores reais dos parâmetros a partir de uma amostra de tamaho 400 com relação ao α e para os outros parâmetros a partir de uma amostra de tamanho 100. Observe-se também que o viés e a raiz do erro quadrático médio tendem a zero para amostras grandes. Por outra parte, a média dos erros padrões e os desvios padrões são aproximadamente iguais à medida que o tamanho da amostra aumenta. E finalmente em relação à probabilidade de cobertura é próxima ao valor de 95%.
- Os resultados das simulações do modelo PNG nas tabelas 13 e 14 apresentam resultados análogos aos modelos PNL, PNC e PNN.

Em resumo, foi mostrado que os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos propostos possuem boas propriedades assintóticas.

Tabela 7 – Resultados da simulação do modelo PNL com parâmetros $\alpha = 2, 1, 0, 20$ com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$

n	Par.	$\alpha = 2$						$\alpha = 1$						$\alpha = 0, 20$						
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	
50	α	3,911	3,655	3,331	1,911	3,397	0,993	1,804	3,053	2,960	0,804	0,804	3,017	0,998	0,402	2,469	2,201	0,202	2,309	0,999
	δ	4,174	0,659	0,588	0,174	0,589	0,994	4,076	0,689	0,592	0,076	0,076	0,592	0,997	3,537	0,795	0,584	-0,463	0,596	0,978
	γ	2,196	1,129	0,980	0,196	0,999	0,997	2,240	0,913	0,843	0,240	0,240	0,876	0,992	2,345	0,756	0,661	0,345	0,746	0,947
100	α	2,569	1,780	1,803	0,569	1,819	0,984	1,144	1,506	1,479	0,144	0,144	1,484	0,996	0,215	1,482	1,256	0,015	1,258	0,995
	δ	4,101	0,408	0,414	0,101	0,414	0,991	4,134	0,426	0,423	0,134	0,134	0,424	0,984	4,092	0,560	0,463	0,092	0,463	0,970
	γ	2,085	0,616	0,598	0,085	0,603	1,000	2,087	0,483	0,461	0,087	0,087	0,469	0,993	2,145	0,446	0,416	0,145	0,440	0,953
200	α	2,137	1,036	1,064	0,137	1,065	0,968	1,002	0,937	0,950	0,002	0,002	0,950	0,974	0,186	0,961	0,903	-0,014	0,905	0,978
	δ	4,076	0,264	0,267	0,076	0,267	0,966	4,127	0,279	0,284	0,127	0,127	0,286	0,967	4,211	0,371	0,349	0,211	0,352	0,972
	γ	2,024	0,378	0,382	0,024	0,382	0,990	2,022	0,312	0,315	0,022	0,022	0,316	0,974	2,064	0,276	0,281	0,064	0,288	0,946
400	α	2,020	0,688	0,710	0,020	0,710	0,960	0,979	0,631	0,650	-0,021	-0,021	0,650	0,958	0,184	0,645	0,654	-0,016	0,659	0,969
	δ	4,054	0,181	0,188	0,054	0,188	0,953	4,082	0,191	0,199	0,082	0,082	0,200	0,949	4,177	0,249	0,256	0,177	0,260	0,963
	γ	2,001	0,256	0,262	0,001	0,262	0,965	2,000	0,213	0,217	0,000	0,000	0,217	0,962	2,025	0,178	0,179	0,025	0,180	0,954
800	α	2,036	0,474	0,488	0,036	0,489	0,955	1,003	0,436	0,452	0,003	0,003	0,452	0,948	0,193	0,438	0,463	-0,007	0,464	0,946
	δ	4,012	0,125	0,130	0,012	0,130	0,949	4,024	0,132	0,137	0,024	0,024	0,137	0,951	4,072	0,168	0,180	0,072	0,181	0,943
	γ	2,006	0,176	0,180	0,006	0,180	0,954	2,005	0,147	0,150	0,005	0,005	0,150	0,955	2,014	0,120	0,116	0,014	0,117	0,951

Tabela 8 – Resultados da simulação do modelo PNL com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 50$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$

n	Par.	$\alpha = 1, 5$						$\alpha = 2, 5$						$\alpha = 0, 50$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	2,749	3,412	3,217	1,249	3,272	0,994	5,658	3,918	3,789	3,158	3,874	0,989	0,864	2,636	2,587	0,364	2,643	0,997
	δ	3,130	0,688	0,596	0,130	0,597	0,994	3,116	0,650	0,592	0,116	0,593	0,991	2,951	0,739	0,596	-0,049	0,596	0,995
	γ	-2,836	5,258	4,268	-0,836	4,347	0,995	-2,824	4,952	4,695	-0,824	4,764	0,993	-2,449	4,866	3,600	-0,449	3,627	0,975
100	α	1,793	1,628	1,640	0,293	1,650	0,989	3,429	1,929	1,994	0,929	2,018	0,977	0,520	1,449	1,402	0,020	1,402	0,999
	δ	3,101	0,412	0,419	0,101	0,421	0,990	3,061	0,406	0,414	0,061	0,414	0,989	3,161	0,478	0,458	0,161	0,461	0,979
	γ	-2,475	2,578	2,792	-0,475	2,831	0,990	-2,389	2,608	2,857	-0,389	2,881	0,999	-2,628	2,983	2,918	-0,628	2,984	0,953
200	α	1,563	0,986	1,002	0,063	1,003	0,975	2,739	1,088	1,125	0,239	1,128	0,965	0,475	0,909	0,912	-0,025	0,913	0,977
	δ	3,068	0,269	0,271	0,068	0,272	0,970	3,047	0,261	0,264	0,047	0,264	0,968	3,141	0,308	0,313	0,141	0,316	0,967
	γ	-2,227	1,487	1,534	-0,227	1,550	0,969	-2,182	1,494	1,529	-0,182	1,539	0,974	-2,382	1,649	1,754	-0,382	1,794	0,955
400	α	1,495	0,660	0,680	-0,005	0,679	0,957	2,559	0,715	0,737	0,059	0,737	0,964	0,475	0,613	0,633	-0,025	0,635	0,955
	δ	3,048	0,184	0,192	0,048	0,192	0,949	3,032	0,179	0,186	0,032	0,186	0,953	3,093	0,209	0,219	0,093	0,221	0,951
	γ	-2,140	0,984	1,032	-0,140	1,041	0,958	-2,111	0,996	1,037	-0,111	1,042	0,960	-2,222	1,040	1,114	-0,222	1,136	0,961
800	α	1,517	0,455	0,470	0,017	0,470	0,951	2,560	0,492	0,506	0,060	0,506	0,954	0,494	0,422	0,441	-0,006	0,441	0,945
	δ	3,012	0,127	0,132	0,012	0,132	0,951	3,006	0,124	0,128	0,006	0,128	0,950	3,030	0,143	0,151	0,030	0,151	0,941
	γ	-2,047	0,667	0,697	-0,047	0,698	0,945	-2,035	0,679	0,705	-0,035	0,706	0,948	-2,081	0,686	0,730	-0,081	0,734	0,954

Tabela 9 – Resultados da simulação do modelo PNC com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$

n	Par.	$\alpha = 2$						$\alpha = 1$						$\alpha = 0, 20$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	4,454	3,699	3,748	2,454	3,831	0,988	1,691	3,048	2,702	0,691	2,752	0,999	0,402	2,463	2,194	0,202	2,302	0,999
	δ	4,134	0,659	0,598	0,134	0,598	0,989	4,103	0,692	0,592	0,103	0,593	0,999	3,538	0,794	0,584	-0,462	0,596	0,977
	γ	2,222	1,135	1,041	0,222	1,064	0,991	2,230	0,915	0,809	0,230	0,841	0,993	2,345	0,752	0,660	0,345	0,744	0,947
100	α	2,637	1,781	1,979	0,637	1,997	0,983	1,169	1,517	1,660	0,169	1,666	0,996	0,216	1,483	1,257	0,016	1,258	0,995
	δ	4,094	0,408	0,417	0,094	0,417	0,990	4,129	0,426	0,426	0,129	0,427	0,983	4,088	0,561	0,463	0,088	0,463	0,970
	γ	2,090	0,616	0,620	0,090	0,626	0,999	2,091	0,485	0,486	0,091	0,494	0,992	2,144	0,447	0,416	0,144	0,440	0,953
200	α	2,137	1,036	1,064	0,137	1,065	0,968	1,002	0,937	0,950	0,002	0,950	0,974	0,187	0,961	0,902	-0,013	0,904	0,978
	δ	4,076	0,264	0,267	0,076	0,267	0,966	4,127	0,279	0,284	0,127	0,286	0,967	4,208	0,371	0,348	0,208	0,352	0,972
	γ	2,024	0,378	0,382	0,024	0,382	0,990	2,022	0,312	0,315	0,022	0,316	0,974	2,064	0,276	0,281	0,064	0,288	0,946
400	α	2,020	0,688	0,710	0,020	0,710	0,960	0,979	0,631	0,650	-0,021	0,650	0,958	0,184	0,645	0,655	-0,016	0,660	0,968
	δ	4,054	0,181	0,188	0,054	0,188	0,953	4,082	0,191	0,199	0,082	0,200	0,949	4,175	0,249	0,257	0,175	0,260	0,963
	γ	2,001	0,256	0,262	0,001	0,262	0,965	2,001	0,213	0,217	0,001	0,217	0,962	2,026	0,178	0,179	0,026	0,181	0,953
800	α	2,036	0,474	0,488	0,036	0,489	0,955	1,003	0,436	0,452	0,003	0,452	0,948	0,193	0,438	0,463	-0,007	0,464	0,946
	δ	4,012	0,125	0,130	0,012	0,130	0,949	4,024	0,132	0,137	0,024	0,137	0,951	4,073	0,168	0,180	0,073	0,180	0,943
	γ	2,006	0,176	0,180	0,006	0,180	0,954	2,005	0,147	0,150	0,005	0,150	0,955	2,014	0,120	0,116	0,014	0,117	0,951

Tabela 10 – Resultados da simulação do modelo PNC com parâmetros $\alpha = 1, 5; 2, 5; 0, 50$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$

n	Par.	$\alpha = 1, 5$						$\alpha = 2, 5$						$\alpha = 0, 50$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	2,938	3,248	3,476	1,438	3,539	0,992	5,820	3,977	3,820	3,320	3,911	0,988	0,886	2,670	2,707	0,386	2,766	0,996
	δ	3,115	0,675	0,599	0,115	0,600	0,991	3,103	0,651	0,590	0,103	0,591	0,990	2,947	0,740	0,599	-0,053	0,599	0,994
	γ	-2,800	5,011	4,258	-0,800	4,331	0,993	-2,786	4,922	4,663	-0,786	4,727	0,993	-2,442	4,882	3,613	-0,442	3,639	0,974
100	α	1,790	1,630	1,642	0,290	1,650	0,989	3,529	1,954	2,142	1,029	2,168	0,977	0,519	1,450	1,402	0,019	1,402	0,999
	δ	3,102	0,413	0,420	0,102	0,421	0,990	3,053	0,406	0,414	0,053	0,415	0,990	3,163	0,478	0,458	0,163	0,461	0,979
	γ	-2,479	2,581	2,795	-0,479	2,834	0,990	-2,370	2,614	2,851	-0,370	2,874	0,998	-2,632	2,989	2,918	-0,632	2,984	0,953
200	α	1,563	0,986	1,002	0,063	1,003	0,975	2,738	1,087	1,125	0,238	1,128	0,965	0,475	0,909	0,912	-0,025	0,913	0,977
	δ	3,068	0,269	0,271	0,068	0,272	0,970	3,047	0,261	0,264	0,047	0,264	0,968	3,141	0,308	0,313	0,141	0,316	0,967
	γ	-2,227	1,487	1,534	-0,227	1,550	0,969	-2,182	1,494	1,529	-0,182	1,539	0,974	-2,382	1,649	1,754	-0,382	1,794	0,955
400	α	1,496	0,660	0,680	-0,004	0,680	0,957	2,559	0,715	0,737	0,059	0,737	0,964	0,475	0,613	0,634	-0,025	0,635	0,955
	δ	3,048	0,184	0,192	0,048	0,192	0,949	3,032	0,179	0,186	0,032	0,186	0,953	3,092	0,209	0,219	0,092	0,221	0,951
	γ	-2,140	0,984	1,032	-0,140	1,041	0,958	-2,111	0,996	1,037	-0,111	1,042	0,960	-2,222	1,039	1,115	-0,222	1,136	0,961
800	α	1,517	0,455	0,470	0,017	0,470	0,951	2,559	0,492	0,506	0,059	0,506	0,954	0,494	0,422	0,441	-0,006	0,441	0,945
	δ	3,012	0,127	0,132	0,012	0,132	0,951	3,006	0,124	0,128	0,006	0,128	0,950	3,030	0,143	0,151	0,030	0,151	0,941
	γ	-2,047	0,667	0,697	-0,047	0,698	0,945	-2,035	0,679	0,705	-0,035	0,706	0,948	-2,081	0,686	0,730	-0,081	0,734	0,954

Tabela 11 – Resultados da simulação do modelo PNN com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$

n	Par.	$\alpha = 2$						$\alpha = 1$						$\alpha = 0, 20$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	3,765	3,680	3,192	1,765	3,253	0,994	1,842	3,104	3,012	0,842	0,996	0,402	2,455	2,197	0,202	2,304	0,999	
	δ	4,181	0,661	0,587	0,181	0,588	0,997	4,067	0,690	0,594	0,067	0,996	3,539	0,794	0,584	-0,461	0,596	0,977	
	γ	2,188	1,134	0,960	0,188	0,977	0,998	2,244	0,921	0,852	0,244	0,990	2,346	0,753	0,660	0,346	0,745	0,947	
100	α	2,641	1,779	1,998	0,641	2,017	0,983	1,137	1,505	1,481	0,137	0,996	0,215	1,484	1,258	0,015	1,260	0,995	
	δ	4,094	0,407	0,417	0,094	0,417	0,990	4,141	0,427	0,424	0,141	0,984	4,092	0,562	0,464	0,092	0,464	0,970	
	γ	2,090	0,616	0,622	0,090	0,628	0,999	2,086	0,483	0,461	0,086	0,993	2,145	0,448	0,415	0,145	0,440	0,953	
200	α	2,137	1,036	1,064	0,137	1,065	0,968	1,002	0,937	0,950	0,002	0,974	0,187	0,961	0,902	-0,013	0,904	0,978	
	δ	4,076	0,264	0,267	0,076	0,267	0,966	4,127	0,279	0,284	0,127	0,967	4,208	0,371	0,348	0,208	0,352	0,972	
	γ	2,024	0,378	0,382	0,024	0,382	0,990	2,022	0,312	0,315	0,022	0,974	2,064	0,276	0,281	0,064	0,288	0,946	
400	α	2,020	0,688	0,710	0,020	0,710	0,960	0,979	0,631	0,650	-0,021	0,958	0,184	0,644	0,654	-0,016	0,659	0,968	
	δ	4,054	0,181	0,188	0,054	0,188	0,953	4,082	0,191	0,199	0,082	0,949	4,174	0,249	0,256	0,174	0,260	0,963	
	γ	2,001	0,256	0,262	0,001	0,262	0,965	2,000	0,213	0,217	0,000	0,962	2,026	0,178	0,179	0,026	0,181	0,953	
800	α	2,036	0,474	0,488	0,036	0,489	0,955	1,003	0,436	0,452	0,003	0,948	0,193	0,438	0,463	-0,007	0,464	0,946	
	δ	4,012	0,125	0,130	0,012	0,130	0,949	4,024	0,132	0,137	0,024	0,951	4,072	0,168	0,180	0,072	0,181	0,943	
	γ	2,006	0,176	0,180	0,006	0,180	0,954	2,005	0,147	0,150	0,005	0,955	2,014	0,120	0,116	0,014	0,117	0,951	

Tabela 12 – Resultados da simulação do modelo PNN com parâmetros $\alpha = 1, 5, 2, 5, 0, 5$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$

n	Par.	$\alpha = 1, 5$						$\alpha = 2, 5$						$\alpha = 0, 50$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	3,034	3,336	3,573	1,534	3,640	0,990	5,441	3,885	3,638	2,941	3,718	0,991	0,869	2,623	2,608	0,369	2,665	0,997
	δ	3,112	0,683	0,604	0,112	0,605	0,991	3,115	0,647	0,587	0,115	0,588	0,992	2,949	0,736	0,597	-0,051	0,597	0,995
	γ	-2,803	5,217	4,301	-0,803	4,373	0,992	-2,806	4,815	4,566	-0,806	4,634	0,994	-2,442	4,798	3,577	-0,442	3,602	0,975
100	α	1,790	1,629	1,642	0,289	1,651	0,989	3,441	1,938	1,994	0,941	2,018	0,977	0,522	1,448	1,396	0,022	1,396	0,999
	δ	3,102	0,413	0,420	0,102	0,421	0,991	3,058	0,406	0,413	0,058	0,413	0,990	3,158	0,477	0,455	0,158	0,458	0,979
	γ	-2,479	2,579	2,795	-0,478	2,835	0,990	-2,384	2,614	2,855	-0,384	2,879	0,999	-2,612	2,954	2,859	-0,612	2,922	0,953
200	α	1,563	0,985	1,002	0,063	1,003	0,975	2,738	1,086	1,125	0,238	1,128	0,965	0,475	0,909	0,912	-0,025	0,913	0,977
	δ	3,068	0,269	0,271	0,068	0,272	0,970	3,047	0,261	0,264	0,047	0,264	0,968	3,141	0,309	0,313	0,141	0,316	0,967
	γ	-2,227	1,486	1,534	-0,227	1,550	0,969	-2,182	1,494	1,529	-0,182	1,539	0,974	-2,382	1,649	1,754	-0,382	1,794	0,955
400	α	1,495	0,660	0,680	-0,005	0,679	0,957	2,559	0,716	0,737	0,059	0,737	0,964	0,475	0,613	0,633	-0,025	0,635	0,955
	δ	3,048	0,184	0,192	0,048	0,192	0,949	3,032	0,179	0,186	0,032	0,186	0,953	3,093	0,209	0,219	0,093	0,221	0,951
	γ	-2,140	0,984	1,032	-0,140	1,041	0,958	-2,111	0,996	1,037	-0,111	1,042	0,960	-2,222	1,039	1,114	-0,222	1,136	0,961
800	α	1,517	0,455	0,470	0,017	0,470	0,951	2,559	0,492	0,506	0,059	0,506	0,954	0,494	0,422	0,441	-0,006	0,441	0,945
	δ	3,012	0,127	0,132	0,012	0,132	0,951	3,006	0,124	0,128	0,006	0,128	0,950	3,030	0,143	0,151	0,030	0,151	0,941
	γ	-2,047	0,667	0,697	-0,047	0,698	0,945	-2,035	0,679	0,705	-0,035	0,706	0,948	-2,081	0,686	0,730	-0,081	0,734	0,954

Tabela 13 – Resultados da simulação do modelo PNG com parâmetros $\alpha = 2; 1; 0, 20$, com $\delta = 4$ e $\gamma = 2$

n	Par.	$\alpha = 2$						$\alpha = 1$						$\alpha = 0, 20$						
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	
50	α	4,152	3,640	3,517	2,152	3,591	0,990	1,842	3,028	3,050	0,842	0,842	3,109	0,996	0,392	2,459	2,038	0,192	2,146	1,000
	δ	4,152	0,658	0,592	0,152	0,593	0,993	4,074	0,690	0,597	0,074	0,074	0,597	0,996	3,543	0,794	0,579	-0,457	0,591	0,978
	γ	2,208	1,126	1,007	0,208	1,028	0,994	2,246	0,910	0,856	0,246	0,246	0,890	0,990	2,338	0,752	0,643	0,338	0,727	0,948
100	α	2,638	1,779	1,985	0,638	2,003	0,983	1,165	1,506	1,671	0,165	0,165	1,678	0,995	0,217	1,480	1,251	0,017	1,253	0,995
	δ	4,094	0,407	0,417	0,094	0,417	0,990	4,135	0,426	0,427	0,135	0,135	0,428	0,983	4,079	0,560	0,460	0,079	0,460	0,970
	γ	2,090	0,616	0,621	0,090	0,627	0,999	2,091	0,483	0,487	0,091	0,091	0,495	0,992	2,143	0,445	0,414	0,143	0,438	0,953
200	α	2,137	1,036	1,064	0,137	1,065	0,968	1,002	0,937	0,951	0,002	0,002	0,950	0,974	0,187	0,961	0,903	-0,013	0,905	0,978
	δ	4,076	0,264	0,267	0,076	0,267	0,966	4,127	0,279	0,284	0,127	0,127	0,286	0,967	4,209	0,371	0,349	0,209	0,352	0,972
	γ	2,024	0,378	0,382	0,024	0,382	0,990	2,022	0,312	0,315	0,022	0,022	0,316	0,974	2,064	0,276	0,281	0,064	0,288	0,946
400	α	2,020	0,688	0,710	0,020	0,710	0,960	0,979	0,631	0,650	-0,021	-0,021	0,650	0,958	0,184	0,645	0,654	-0,016	0,659	0,969
	δ	4,054	0,181	0,188	0,054	0,188	0,953	4,082	0,191	0,199	0,082	0,082	0,200	0,949	4,177	0,249	0,256	0,177	0,260	0,963
	γ	2,001	0,256	0,262	0,001	0,262	0,965	2,000	0,213	0,217	0,000	0,000	0,217	0,962	2,025	0,178	0,179	0,025	0,180	0,954
800	α	2,040	0,474	0,489	0,040	0,489	0,955	1,003	0,436	0,452	0,003	0,003	0,452	0,948	0,194	0,438	0,463	-0,006	0,463	0,946
	δ	4,010	0,125	0,130	0,010	0,130	0,949	4,024	0,132	0,137	0,024	0,024	0,137	0,951	4,071	0,168	0,179	0,071	0,180	0,943
	γ	2,007	0,176	0,181	0,007	0,181	0,954	2,005	0,147	0,150	0,005	0,005	0,150	0,955	2,014	0,120	0,116	0,014	0,117	0,951

Tabela 14 – Resultados da simulação do modelo PNG com parâmetros $\alpha = 1, 5, 2, 5, 0, 5$, com $\delta = 3$ e $\gamma = -2$

n	Par.	$\alpha = 1, 5$						$\alpha = 2, 5$						$\alpha = 0, 50$					
		Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	α	2,966	3,339	3,442	1,466	3,507	0,992	5,563	3,773	3,741	3,063	3,823	0,988	0,867	2,656	2,635	0,367	2,690	0,998
	δ	3,107	0,683	0,599	0,107	0,599	0,991	3,118	0,645	0,591	0,118	0,592	0,991	2,953	0,739	0,597	-0,047	0,597	0,995
	γ	-2,786	5,202	4,250	-0,786	4,320	0,993	-2,828	4,900	4,689	-0,828	4,760	0,993	-2,457	4,890	3,619	-0,457	3,646	0,975
100	α	1,838	1,633	1,823	0,338	1,834	0,988	3,377	1,923	1,925	0,877	1,948	0,977	0,520	1,449	1,402	0,020	1,402	0,999
	δ	3,096	0,413	0,423	0,096	0,424	0,990	3,064	0,407	0,412	0,064	0,412	0,990	3,162	0,478	0,458	0,162	0,461	0,979
	γ	-2,467	2,581	2,808	-0,467	2,845	0,989	-2,395	2,622	2,848	-0,395	2,874	0,999	-2,630	2,987	2,918	-0,630	2,984	0,953
200	α	1,563	0,985	1,002	0,063	1,003	0,975	2,738	1,087	1,125	0,238	1,128	0,965	0,475	0,909	0,912	-0,025	0,913	0,977
	δ	3,068	0,269	0,271	0,068	0,272	0,970	3,047	0,261	0,264	0,047	0,264	0,968	3,141	0,308	0,313	0,141	0,316	0,967
	γ	-2,227	1,486	1,534	-0,227	1,550	0,969	-2,182	1,494	1,529	-0,182	1,539	0,974	-2,382	1,649	1,754	-0,382	1,794	0,955
400	α	1,495	0,660	0,680	-0,005	0,679	0,957	2,559	0,716	0,737	0,059	0,737	0,964	0,475	0,613	0,634	-0,025	0,635	0,955
	δ	3,048	0,184	0,192	0,048	0,192	0,949	3,032	0,179	0,186	0,032	0,186	0,953	3,092	0,209	0,219	0,092	0,221	0,951
	γ	-2,140	0,984	1,032	-0,140	1,041	0,958	-2,111	0,996	1,037	-0,111	1,042	0,960	-2,221	1,039	1,115	-0,221	1,136	0,961
800	α	1,517	0,455	0,470	0,017	0,470	0,951	2,559	0,492	0,506	0,059	0,506	0,954	0,494	0,422	0,441	-0,006	0,441	0,945
	δ	3,012	0,127	0,132	0,012	0,132	0,951	3,006	0,124	0,128	0,006	0,128	0,950	3,030	0,143	0,151	0,030	0,151	0,941
	γ	-2,047	0,667	0,697	-0,047	0,698	0,945	-2,035	0,679	0,705	-0,035	0,706	0,948	-2,081	0,686	0,730	-0,081	0,734	0,954

2.3 Estatísticas de Teste

Na literatura que trata sob as estatísticas de teste usuais para modelos paramétricos são as estatísticas da razão de verossimilhança Wilks (1938), escore Rao (1948), Wald Wald (1943) e gradiente Terrell (2002). A formulação das estatísticas para o caso de uma hipótese nula simple são apresentadas a continuação.

Sejam $\ell(\boldsymbol{\vartheta})$, $\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta})$ e $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ a função de log verossimilhança, a função escore e a matriz de informação de Fisher para um vetor paramétrico $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k)^\top$ de dimensão k , respectivamente e seja $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}$ a inversa de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$. Considere a partição $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\vartheta}_1^\top, \boldsymbol{\vartheta}_2^\top)^\top$, em que as dimensões de $\boldsymbol{\vartheta}_1$ e $\boldsymbol{\vartheta}_2$ são $k - q$ e q , respectivamente. Suponha que o interesse esteja em testar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\vartheta}_2 = \boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)}$ versus a hipótese $H_1 : \boldsymbol{\vartheta}_2 \neq \boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)}$, em que $\boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)}$ é o vetor específico, e $\boldsymbol{\vartheta}_1$ um vetor de parâmetros de perturbação. A partir da partição de $\boldsymbol{\vartheta}$, temos as partições correspondentes

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}) = (\mathbf{U}_{\boldsymbol{\vartheta}_1}^\top, \mathbf{U}_{\boldsymbol{\vartheta}_2}^\top)^\top, \quad \mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{12} \\ \mathbf{I}_{21} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{11} & \mathbf{I}^{12} \\ \mathbf{I}^{21} & \mathbf{I}^{22} \end{bmatrix}.$$

As estatísticas comumente usadas para testar H_0 versus H_1 são razão de verossimilhança (S_{LR}), escore de Rao (S_R), gradiente (S_G) e Wald (S_W) que são definidas respectivamente pelas expressões

$$S_{LR} = 2[\ell(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}})]; \quad (2.17)$$

$$S_W = (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)})^\top \tilde{\mathbf{I}}^{22^{-1}} (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)}); \quad (2.18)$$

$$S_R = \tilde{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{\vartheta}_2}^\top \tilde{\mathbf{I}}^{22} \tilde{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{\vartheta}_2} \quad \text{e} \quad (2.19)$$

$$S_G = \tilde{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{\vartheta}_2}^\top (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_2^{(0)}). \quad (2.20)$$

nos quais $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1^\top, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2^\top)^\top$ e $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} = (\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_1^\top, \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}_2^{(0)\top})^\top$ são as estimativas de máxima verossimilhança irrestritas e restritas (isto é, em H_0) de $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\vartheta}_1^\top, \boldsymbol{\vartheta}_2^\top)^\top$, respectivamente, $\tilde{\mathbf{I}}^{22} = \mathbf{I}^{22}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$, $\tilde{\mathbf{I}}^{22} = \mathbf{I}^{22}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}})$ e $\tilde{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{\vartheta}_2} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\vartheta}_2}(\tilde{\boldsymbol{\vartheta}})$. Observe-se que a estatística de gradiente S_G tem uma forma muito simples e não envolve a matriz de informação, nem esperada e nem observada, ao contrário de S_W e S_R . Sob a hipótese nula H_0 , essas estatísticas têm uma distribuição assintótica χ_q^2 , em que q representa o número de restrições impostas por H_0 . A hipótese nula é rejeitada para um dado nível nominal, digamos ζ , se o valor observado da estatística de teste exceder o quantil $100(1 - \zeta)\%$ superior da distribuição χ_q^2 .

2.3.1 Estatísticas de teste sem covariável em modelos PNL, PNC, PNN e PNG

A seguir, vamos considerar os testes estatísticos S_{LR} , S_W , S_R e S_G em modelos PNL, PNC, PNN e PNG para testar uma hipótese nula simple $H_0 : \alpha = 1$ versus $H_1 : \alpha \neq 1$. Primeiro, vamos

considerar o caso independente e identicamente distribuídas. E no próximo Capítulo, o caso independente com estrutura de regressão será levado em consideração.

Dada uma amostra observada Y_1, \dots, Y_n de uma distribuição PNL, PNC, PNN ou PNG com o vetor de parâmetros de interesse $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)^\top$, e com f.d.p dada por 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5 respectivamente; a função de log-verossimilhança dada por 2.8, fornecem as componentes do vetor score $\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}) = (U_\alpha, U_\delta, U_\gamma)^\top$ que são 2.9, 2.10 e 2.11; por outra parte devido a que a a matriz de informação de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ não apresenta uma forma fechada então vamos usar $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}})$ que é a matriz de informação observada. Além do mais, os parâmetros δ e γ atuam como parâmetros de perturbação e $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} = (1, \tilde{\delta}, \tilde{\gamma})^\top$ representa a estimativa de $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha, \delta, \gamma)^\top$ sob a hipótese nula. As estatísticas S_{LR}, S_W, S_R e S_G definidas nas equações 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20 respectivamente para testar a hipótese nula $H_0 : \alpha = 1$ versus $H_1 : \alpha \neq 1$ são dadas pelas seguintes expressões

$$S_{LR} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\log \left(\frac{\hat{\alpha} \hat{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) + \log \left(\frac{\phi(\tilde{\gamma} + \hat{\delta} Q(y_i))}{\phi(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta} Q(y_i))} \right) \right);$$

$$S_G = \left(n + \sum_{i=1}^n \log \left(\Phi \left(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta} Q(y_i) \right) \right) \right) (\hat{\alpha} - 1);$$

$$S_R = \frac{\left(n + \sum_{i=1}^n \log \left(\Phi \left(\tilde{\gamma} + \tilde{\delta} Q(y_i) \right) \right) \right)^2}{n} \quad e$$

$$S_W = \left(\frac{\hat{\alpha} - 1}{EP(\hat{\alpha})} \right)^2.$$

Sob a hipótese $H_0 : \alpha = 1$ as estatísticas S_{LR}, S_W, S_R e S_G têm distribuição assintoticamente Qui-quadrado com um grau de liberdade (χ_1^2). A hipótese nula é rejeitada se o valor observado da estatística de teste exceder o quantil $100(1 - \zeta)\%$ superior da distribuição χ_1^2 . Por outra parte, fazendo $\alpha = 1$ nas equações 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 então temos

$$f_Y(y; 1, \gamma, \delta) = \frac{\delta \phi(\gamma + \delta \log(y/1 - y))}{y(1 - y)}; \quad (2.21a)$$

$$f_Y(y; 1, \gamma, \delta) = \pi \delta \phi(\gamma + \delta \tan(\pi(y - 0, 5))) \sec^2(\pi(y - 0, 5)); \quad (2.21b)$$

$$f_Y(y; 1, \gamma, \delta) = \frac{\delta \phi(\gamma + \delta \Phi^{-1}(y))}{\phi(\Phi^{-1}(y))}, \quad (2.21c)$$

$$f_Y(y; 1, \gamma, \delta) = \frac{\delta \phi(\gamma - \delta \log(-\log(y)))}{y \log(1/y)}. \quad (2.21d)$$

Dado que as equações 2.21a, 2.21b, 2.21c e 2.21d são casos particulares de 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 respectivamente, é dizer são modelos encaixados. A seguir vamos fazer estudos de simulação sem covariáveis para verificar esta afirmação.

2.3.2 Estudo de simulação sem covariável em modelos PNL, PNC, PNN e PNG

A seção a seguir apresentamos um estudo de simulação sem covariáveis com a finalidade de avaliar a performance da distribuição da estatística gradiente (S_G) com as distribuições das estatísticas da razão de verossimilhança (S_{LR}), escore (S_R) e Wald (S_W), para os modelos PNL, PNC, PNN e PNG, em testar as hipóteses: $H_0 : \alpha = 1$ contra $H_1 : \alpha \neq 1$, para amostras pequenas, moderadas e grandes. Neste caso, sem covariáveis, o estudo de simulação é baseado na estimação da taxa de rejeição das distribuições empíricas para as quatro estatísticas assumindo a hipótese nula.

Foram consideradas 10000 réplicas de Monte Carlo utilizadas na comparação do tamanho do teste e os níveis nominais dos testes foram $\eta = 1\%$, 5% e 10% . Esta configuração foi realizada em seis diferentes tamanhos de amostras $n = 30, 50, 100, 200, 400$ e 800 . Em cada caso, considera-se a variação de δ e γ . Os valores de δ e γ foram escolhidos para a geração de zeros. A implementação das simulações foi desenvolvida no *software* R (R Development Core Team, 2019) e os resultados da taxa de rejeição estão apresentados nas Tabelas 15, 16, 17 e 18. E observa-se que os valores das taxas de rejeição são aproximados ao valor nominal do teste na medida que aumenta o tamanho das amostras

A partir das Tabelas 15, 16, 17 e 18 representam os resultados das simulações para os modelos PNL, PNN, PNG e PNG respectivamente, observam-se que as taxas de rejeição nula do teste gradiente apresenta uma boa aproximação aos valores nominais para tamanhos amostrais ($n = 100, 200, 400$ e 800) comparados com os resultados dos testes usuais. À medida que aumenta o tamanho das amostras o teste gradiente é equivalente aos testes de escore, Wald e da razão de verossimilhança para testes de hipóteses em relação ao parâmetro de α . Note-se que as taxas do teste de razão de verossimilhança são superestimadas em alguns casos.

Tabela 15 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNL, para diferentes valores de δ e γ

n	$(\eta\%)$	$\gamma = -2$ e $\delta = 3$			$\gamma = 2$ e $\delta = 1,5$			$\gamma = 1,5$ e $\delta = 3$					
		S_{LR}	S_W	S_R	S_G	S_{LR}	S_W	S_R	S_G	S_{LR}	S_W	S_R	S_G
30	1	0,0027	0,0182	0,0047	0,0423	0,0012	0,0134	0,0033	0,0399	0,0015	0,0130	0,0030	0,0395
	5	0,0175	0,0191	0,0197	0,0734	0,0143	0,0137	0,0154	0,0715	0,0146	0,0135	0,0154	0,0716
	10	0,0452	0,0194	0,0463	0,1052	0,0429	0,0139	0,0402	0,1037	0,0434	0,0138	0,0412	0,1046
50	1	0,0033	0,0026	0,0070	0,0254	0,0024	0,0023	0,0061	0,0270	0,0028	0,0026	0,0066	0,0279
	5	0,0271	0,0030	0,0334	0,0595	0,0273	0,0027	0,0288	0,0608	0,0276	0,0030	0,0307	0,0623
	10	0,0695	0,0080	0,0752	0,1026	0,0677	0,0069	0,0697	0,1041	0,0708	0,0078	0,0728	0,1073
100	1	0,0059	0,0005	0,0136	0,0157	0,0052	0,0002	0,0103	0,0161	0,0057	0,0002	0,011	0,0174
	5	0,0474	0,0122	0,0558	0,0604	0,0455	0,0096	0,0493	0,0606	0,0469	0,0100	0,051	0,0623
	10	0,0991	0,0400	0,1117	0,1089	0,0938	0,0344	0,1043	0,1064	0,0964	0,0341	0,105	0,1103
200	1	0,0114	0,0049	0,0173	0,0153	0,0103	0,0040	0,0147	0,0143	0,0111	0,0041	0,0146	0,0160
	5	0,0597	0,0378	0,0675	0,0609	0,0562	0,0335	0,0620	0,0600	0,0563	0,0317	0,0603	0,0606
	10	0,1142	0,0881	0,1189	0,1188	0,1113	0,0821	0,1117	0,1185	0,1122	0,0811	0,1115	0,1167
400	1	0,0118	0,0102	0,0166	0,0119	0,0104	0,0077	0,0143	0,0122	0,0104	0,0076	0,0128	0,0123
	5	0,0532	0,0485	0,0605	0,0531	0,0498	0,0421	0,0543	0,0512	0,0497	0,0402	0,0523	0,0535
	10	0,1076	0,1015	0,1134	0,1088	0,1038	0,0957	0,1076	0,1072	0,1047	0,0931	0,1057	0,1072
800	1	0,0128	0,0126	0,0156	0,0120	0,0109	0,0098	0,0128	0,0109	0,0099	0,0084	0,0115	0,011
	5	0,0571	0,0569	0,0620	0,0558	0,0524	0,0495	0,0541	0,0505	0,0493	0,0464	0,0521	0,050
	10	0,1001	0,1099	0,1162	0,1097	0,1028	0,0996	0,1056	0,1022	0,0999	0,0958	0,1009	0,101

Tabela 16 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNC, para diferentes valores de δ e γ

n (η%)	$\gamma = -2$ e $\delta = 3$			$\gamma = 2$ e $\delta = 1,5$			$\gamma = 1,5$ e $\delta = 3$						
	S_{LR}	S_W	S_R	S_{LR}	S_W	S_R	S_{LR}	S_W	S_R				
30	1	0,0016	0,0159	0,0046	0,0401	0,0013	0,0116	0,0032	0,0360	0,0013	0,0123	0,0038	0,0370
	5	0,0155	0,0164	0,0185	0,0711	0,0124	0,0123	0,0147	0,0678	0,0134	0,0126	0,0156	0,0683
	10	0,0428	0,0165	0,0450	0,1027	0,0396	0,0130	0,0383	0,0990	0,0408	0,0129	0,0408	0,0999
50	1	0,0035	0,0031	0,0074	0,0257	0,0032	0,0019	0,0062	0,0250	0,0026	0,0023	0,0062	0,0254
	5	0,0271	0,0035	0,0338	0,0596	0,0257	0,0024	0,0303	0,0581	0,0267	0,0027	0,0317	0,0586
	10	0,0698	0,0084	0,0757	0,1030	0,0667	0,0071	0,0710	0,0995	0,0677	0,0074	0,0732	0,1007
100	1	0,0059	0,0006	0,0134	0,0156	0,0054	0,0005	0,0116	0,0147	0,0056	0,0005	0,0131	0,0151
	5	0,0473	0,0121	0,0556	0,0603	0,0446	0,0107	0,0518	0,0570	0,0462	0,0114	0,0547	0,0591
	10	0,0990	0,0398	0,1114	0,1088	0,0946	0,0370	0,1065	0,1048	0,0978	0,0390	0,1105	0,1076
200	1	0,0113	0,0048	0,0172	0,0152	0,0107	0,0048	0,0162	0,0143	0,0112	0,0049	0,0170	0,0151
	5	0,0599	0,0380	0,0677	0,0610	0,0582	0,0368	0,0660	0,0595	0,0593	0,0373	0,0671	0,0605
	10	0,1144	0,0885	0,1189	0,1190	0,1122	0,0865	0,1167	0,1170	0,1137	0,0877	0,1182	0,1183
400	1	0,0119	0,0103	0,0168	0,0120	0,0118	0,0102	0,0166	0,0119	0,0117	0,0101	0,0164	0,0117
	5	0,0535	0,0488	0,0607	0,0534	0,0531	0,0483	0,0603	0,0529	0,0531	0,0482	0,0602	0,0530
	10	0,1077	0,1015	0,1136	0,1090	0,1072	0,1011	0,1130	0,1083	0,1068	0,1007	0,1125	0,1081
800	1	0,0128	0,0126	0,0156	0,0120	0,0127	0,0125	0,0155	0,0119	0,0126	0,0124	0,0154	0,0118
	5	0,0572	0,0570	0,0621	0,0559	0,0571	0,0569	0,0619	0,0559	0,0570	0,0567	0,0617	0,0557
	10	0,1102	0,1101	0,1162	0,1098	0,1100	0,1096	0,1161	0,1096	0,1099	0,1094	0,1160	0,1095

Tabela 17 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNN, para diferentes valores de δ e γ

n	$(\eta\%)$	$\gamma = -2$ e $\delta = 3$			$\gamma = 2$ e $\delta = 1,5$			$\gamma = 1,5$ e $\delta = 3$					
		S_{LR}	S_W	S_R	S_G	S_{LR}	S_W	S_R	S_G	S_{LR}	S_W	S_R	S_G
30	1	0,0018	0,0149	0,0039	0,0392	0,0017	0,0140	0,0037	0,0385	0,0017	0,0132	0,0037	0,0380
	5	0,0146	0,0155	0,0181	0,0698	0,0141	0,0145	0,0176	0,0696	0,0138	0,0139	0,0168	0,0694
	10	0,0426	0,0156	0,0435	0,1015	0,0418	0,0149	0,0429	0,1011	0,0410	0,0143	0,0420	0,1008
50	1	0,0032	0,0029	0,0079	0,0254	0,0030	0,0025	0,0074	0,0252	0,0029	0,0020	0,0068	0,0250
	5	0,0275	0,0033	0,0340	0,0598	0,0269	0,0028	0,0331	0,0591	0,0265	0,0024	0,0320	0,0585
	10	0,0700	0,0083	0,0758	0,1034	0,0688	0,0078	0,0742	0,1022	0,0678	0,0073	0,0733	0,1010
100	1	0,0059	0,0004	0,0134	0,0157	0,0055	0,0003	0,0125	0,0149	0,0056	0,0003	0,0130	0,0151
	5	0,0472	0,0118	0,0556	0,0602	0,0458	0,0111	0,0531	0,0587	0,0461	0,0113	0,0548	0,0590
	10	0,0990	0,0395	0,1116	0,1088	0,0959	0,0378	0,1060	0,1063	0,0977	0,0389	0,1101	0,1075
200	1	0,0113	0,0049	0,0172	0,0152	0,0102	0,0048	0,0156	0,0138	0,0112	0,0049	0,0169	0,0151
	5	0,0599	0,0381	0,0677	0,0610	0,0572	0,0357	0,0652	0,0591	0,0594	0,0374	0,0672	0,0605
	10	0,1144	0,0885	0,1188	0,1190	0,1117	0,0865	0,1165	0,1166	0,1138	0,0878	0,1184	0,1184
400	1	0,0119	0,0103	0,0168	0,0120	0,0118	0,0104	0,0166	0,0120	0,0117	0,0101	0,0164	0,0117
	5	0,0535	0,0488	0,0608	0,0534	0,0534	0,0483	0,0601	0,0531	0,0529	0,0480	0,0600	0,0528
	10	0,1076	0,1016	0,1136	0,1088	0,1070	0,1008	0,1129	0,1080	0,1066	0,1005	0,1123	0,1079
800	1	0,0128	0,0126	0,0156	0,0120	0,0131	0,0129	0,0160	0,0123	0,0126	0,0124	0,0154	0,0118
	5	0,0570	0,0569	0,0620	0,0558	0,0575	0,0572	0,0623	0,0564	0,0568	0,0568	0,0618	0,0555
	10	0,1097	0,1094	0,1156	0,1092	0,1105	0,1107	0,1170	0,1102	0,1099	0,1095	0,1161	0,1095

Tabela 18 – Taxas de rejeição da hipótese $H_0 : \alpha = 1$, no modelo PNG, para diferentes valores de δ e γ

n (η%)	$\gamma = -2$ e $\delta = 3$			$\gamma = 2$ e $\delta = 1,5$			$\gamma = 1,5$ e $\delta = 3$						
	S_{LR}	S_W	S_R	S_{LR}	S_W	S_R	S_{LR}	S_W	S_R				
30	1	0,0016	0,0167	0,0043	0,0408	0,0014	0,0130	0,0035	0,0372	0,0011	0,0132	0,0040	0,0374
	5	0,0152	0,0169	0,0187	0,0718	0,0134	0,0135	0,0160	0,0689	0,0127	0,0141	0,0166	0,0689
	10	0,0444	0,0170	0,0450	0,1035	0,0403	0,0135	0,0402	0,1002	0,0407	0,0144	0,0417	0,1004
50	1	0,0033	0,0035	0,0073	0,0262	0,0029	0,0023	0,0064	0,0256	0,0032	0,0029	0,0065	0,0258
	5	0,0279	0,0038	0,0337	0,0602	0,0266	0,0027	0,0306	0,0590	0,0271	0,0032	0,0323	0,0592
	10	0,0704	0,0088	0,0758	0,1036	0,0676	0,0075	0,0718	0,1004	0,0681	0,0079	0,0737	0,1014
100	1	0,0061	0,0006	0,0137	0,0159	0,0053	0,0005	0,0115	0,0145	0,0055	0,0004	0,0130	0,0149
	5	0,0476	0,0121	0,0559	0,0605	0,0446	0,0107	0,0517	0,0570	0,0460	0,0113	0,0545	0,0589
	10	0,0993	0,0398	0,1117	0,1091	0,0948	0,0371	0,1066	0,1049	0,0976	0,0388	0,1102	0,1074
200	1	0,0114	0,0049	0,0173	0,0153	0,0106	0,0048	0,0162	0,0142	0,0112	0,0049	0,0169	0,0151
	5	0,0598	0,0378	0,0676	0,0610	0,0581	0,0367	0,0659	0,0594	0,0594	0,0375	0,0672	0,0605
	10	0,1143	0,0882	0,1189	0,1189	0,1121	0,0864	0,1167	0,1169	0,1138	0,0877	0,1182	0,1184
400	1	0,0119	0,0103	0,0168	0,0120	0,0119	0,0103	0,0167	0,012	0,0117	0,0100	0,0163	0,0117
	5	0,0537	0,0489	0,0609	0,0535	0,0532	0,0484	0,0604	0,053	0,0530	0,0481	0,0602	0,0529
	10	0,1078	0,1016	0,1136	0,1091	0,1072	0,1011	0,1129	0,108	0,1069	0,1008	0,1126	0,1082
800	1	0,0128	0,0126	0,0156	0,0120	0,0127	0,0125	0,0155	0,0119	0,0126	0,0124	0,0154	0,0118
	5	0,0571	0,0569	0,0620	0,0559	0,0569	0,0568	0,0618	0,0558	0,0569	0,0568	0,0618	0,0556
	10	0,1101	0,1096	0,1159	0,1097	0,1100	0,1096	0,1159	0,1096	0,1100	0,1096	0,1159	0,1096

2.4 Aplicação

Nesta seção ilustra-se a utilização dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG para ajustar dados limitados no intervalo $(0, 1)$. Para isso foi considerado o conjunto de dados introduzidos por Siegel, DeSantis e Jemal (2014), que trata de dados de câncer colorretal nos Estados Unidos Americanos (EUA) entre os anos 2006 e 2010. Dos dados considerou-se a taxa de incidência de câncer colorretal como a variável de interesse (Y), em que essa taxa de incidência foi calculada pelos autores por 100000 habitantes, isto é

$$\text{Taxa de incidência} = \frac{\text{número de casos de incidência de câncer colorretal}}{100000 \text{ habitantes}}$$

Na Tabela 19 são apresentados as medidas descritivas da taxa de incidência de câncer colorretal nos EUA, e pode-se ver que a taxa de incidência tem uma distribuição não simétrica com certa assimetria à direita, isto também é conferido pelo histograma na Figura 8

Tabela 19 – Medidas descritivas da taxa de incidência de Câncer Colorretal nos EUA

Mínimo	1 Quartil	Mediana	Média	3 Quartil	Máximo
0,240	0,385	0,460	0,469	0,540	0,766

Em virtude que os dados pertencem ao intervalo $(0, 1)$, assumiu-se que Y segue uma das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG. Os parâmetros foram estimados para cada uma delas pelo método de máxima verossimilhança.

A partir das expressões 2.12, 2.13 e 2.14, obtém-se as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros dos modelos propostos, os quais são mostrados na Tabela 20 conjuntamente com o erro padrão. E com a finalidade de comparar tais modelos, os dados também foram ajustados com os modelos S_B de Johnson e Beta.

Tabela 20 – Estimativas de máxima verossimilhança e erro padrão dos parâmetros dos modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B de Johnson e Beta para a taxa de incidência de câncer colorretal

		Modelos					
	Parâmetro	PNL	PNC	PNN	PNG	S_B Johnson	Beta
EMV	α	12,974	14,985	13,258	13,055		
	γ	1,827	1,881	1,836	1,167	0,269	8,950
	δ	1,204	1,380	1,939	1,747	2,125	10,092
EP	α	6,584	10,638	8,162	6,634		
	δ	0,232	0,316	0,280	0,288	0,841	0,068
	γ	0,121	0,181	0,226	0,170	0,951	0,101

Além disso, foram feitas testes de Aderência (teste de Kolmogorov Smirnov) com o objetivo de verificar se os dados da amostra se ajustam bem aos modelos PNL, PNC, PNN e PNG. Para as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG, a hipótese nula do teste de distribuições contínuas Kolmogorov Smirnov é H_0 : o conjunto de dados segue a distribuição correspondente e a hipótese

alternativa é H_1 : a distribuição da população da qual a amostra é escolhida não segue a distribuição PNL, PNC, PNN ou PNG. A seguir apresentam-se a estatística de Kolmogorov–Smirnov (D) e o valor p respectivo a cada uma das distribuições

Tabela 21 – Resultados do Teste de Kolmogorov Smirnov

Modelo	D	valor p
PNL	0,034	0,952
PNC	0,046	0,719
PNN	0,035	0,939
PNG	0,078	0,620

A partir da Tabela 21 os valores da estatística de Kolmogorov-Smirnov D são pequenos e os valores de $p > 0,05$, portanto, não podemos recusar a hipótese nula. Portanto, o conjunto de dados da amostra seguem cada uma das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG.

Por outra parte, para comparar os modelos ajustados, utilizamos os critérios de informação de Akaike (AIC) (BOZDOGAN (1987)), e o Critério Bayesiano de Schwarz (BIC) (SCHWARZ (1978)) apresentados na tabela 22, indicam que o modelo PNL ajusta melhor os dados, como ilustra a Figura 8.

Tabela 22 – Critérios de comparação dos modelos AIC e BIC para os modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B de Johnson, e Beta para a taxa de incidência de câncer colorretal.

Modelo	Critérios	
	AIC	BIC
PNL	-346,709	-336,529
PNC	-346,434	-336,254
PNN	-346,356	-336,175
PNG	-344,143	-333,962
S_B Johnson	-338,787	-331,999
Beta	-338,003	-331,216

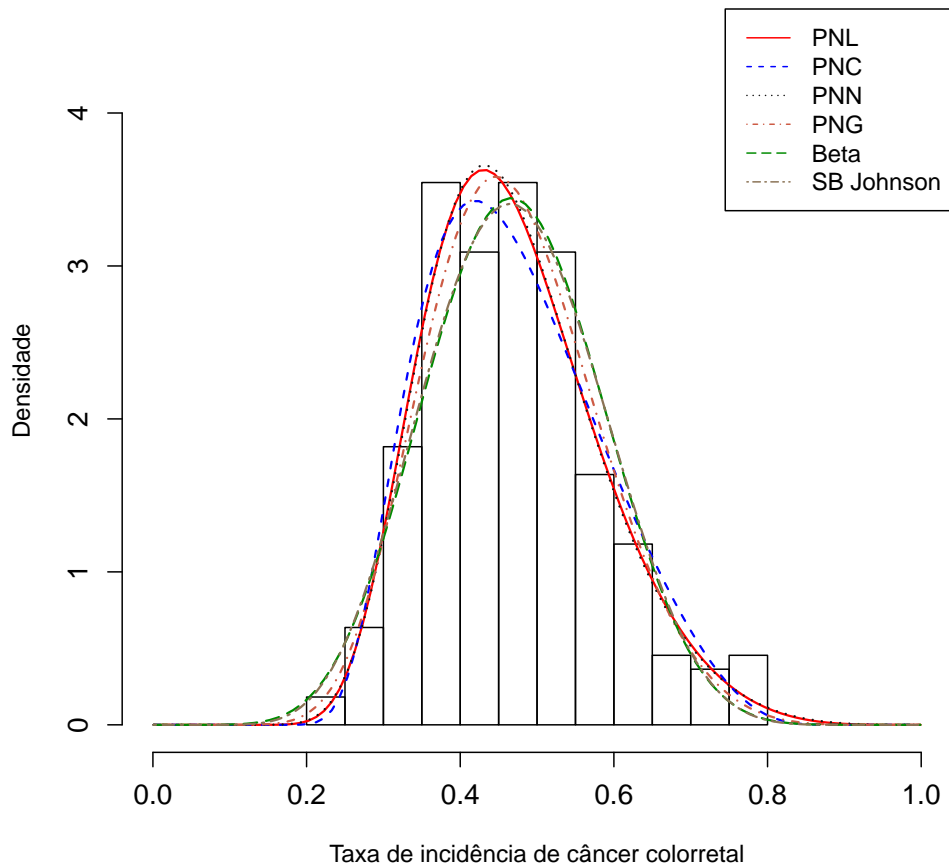


Figura 8 – Ajustes dos dados nos modelos PNL, PNC, PNN, PNG, S_B Johnson e Beta

2.5 Conclusão

Neste Capítulo foi introduzido uma família de modelos estatísticos para modelagem de dados no intervalo $(0, 1)$, que foram denominadas de modelo PNL, PNC, PNN e PNG. Estes modelos foram baseados a partir de uma composição das distribuições potência normal e logística padrão, cauchy padrão, normal padrão e gumbel padrão. Para os modelos propostos foram estudadas as suas propriedades, e foram feitas as estimações dos parâmetros dos modelos pelo método de máxima verossimilhança e apresentam-se também as estatísticas de teste para os modelos PNL, PNC, PNN e PNG. E, por último, um conjunto de dados reais de câncer colorretal foi ajustado com vários modelos notando que o modelo proposto PNL é o que melhor ajusta esse conjunto de dados.

MODELO DE REGRESSÃO POTÊNCIA NORMAL LOGÍSTICA, CAUCHY, NORMAL E GUMBEL

Neste Capítulo, os modelos PNL, PNC, PNN e PNG são estendidos para um modelo de regressão. São desenvolvidos procedimentos inferenciais baseados na teoria de máxima verossimilhança e também são avaliadas as propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança por meio de um estudo de simulação. Além disso, apresenta-se os testes de gradiente, escore, Wald e da razão de verossimilhança. Por fim, é apresentada uma aplicação a um conjunto de dados de câncer colorretal.

3.1 Modelos de Regressão PNL, PNC, PNN e PNG Parametrizadas na Mediana

Os modelos de regressão são tipicamente construídos para modelar a média de uma distribuição. No entanto, a falta de uma expressão simples para a média das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG inibem a construção de um modelo de regressão para as distribuições mencionadas. Por outro lado, as medianas destas distribuições têm uma forma simples. Conseqüentemente, a fim de obter uma estrutura de regressão para as medianas das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG dadas respectivamente pelas expressões 2.7a, 2.7b, 2.7c e 2.7d são feitas através do parâmetro de dispersão. Para esse fim, as funções de densidade de probabilidade em 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 são reparametrizadas nas suas medianas correspondentes. Observe-se que a partir das medianas 2.7a, 2.7b, 2.7c e 2.7d obtem-se a seguinte relação

$$\gamma = x_{0,5}(\alpha) - \delta Q(\psi), \quad (3.1)$$

em que $Q(\cdot)$ e ψ representam o quantil e a mediana correspondente às distribuições PNL, PNC, PNN e PNG dadas na Tabela 1. Ora substituindo a expressão 3.1 nas equações 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 obtemos as funções de densidade reparametrizadas na mediana. Assim, uma variável aleatória $Y \sim \text{PNL}(\alpha, \psi_{\text{PNL}}, \delta)$ com f.d.p reparametrizada dada por

$$f_Y(y; \alpha, \psi_{\text{PNL}}, \delta) = \frac{\alpha\delta}{y(1-y)} \phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNL}})] + x_{0,5}(\alpha)) [\Phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNL}})] + x_{0,5}(\alpha))]^{\alpha-1}, \quad (3.2)$$

em que $\alpha > 0$, $\psi_{\text{PNL}} \in (0, 1)$, e $\delta > 0$. Entanto que $Y \sim \text{PNC}(\alpha, \psi_{\text{PNC}}, \delta)$ cuja f.d.p é

$$f_Y(y; \alpha, \psi_{\text{PNC}}, \delta) = \alpha\delta\phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNC}})] + x_{0,5}(\alpha)) [\Phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNC}})] + x_{0,5}(\alpha))]^{\alpha-1} \pi \sec^2(\pi(y - \frac{1}{2})), \quad (3.3)$$

com $\alpha > 0$, $\psi_{\text{PNC}} \in (0, 1)$, e $\delta > 0$. Por sua vez $Y \sim \text{PNN}(\alpha, \psi_{\text{PNN}}, \delta)$ com f.d.p dada por

$$f_Y(y; \alpha, \psi_{\text{PNN}}, \delta) = \frac{\alpha\delta}{\phi(\Phi^{-1}(y))} \phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNN}})] + x_{0,5}(\alpha)) [\Phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNN}})] + x_{0,5}(\alpha))]^{\alpha-1}, \quad (3.4)$$

em que $\alpha > 0$, $\psi_{\text{PNN}} \in (0, 1)$, e $\delta > 0$. E finalmente, $Y \sim \text{PNG}(\alpha, \psi_{\text{PNG}}, \delta)$, sendo que a f.d.p é

$$f_Y(y; \alpha, \psi_{\text{PNG}}, \delta) = \frac{\alpha\delta}{y \log(1/y)} \phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNG}})] + x_{0,5}(\alpha)) [\Phi(\delta[Q(y) - Q(\psi_{\text{PNG}})] + x_{0,5}(\alpha))]^{\alpha-1}, \quad (3.5)$$

sendo que $\alpha > 0$, $\psi_{\text{PNG}} \in (0, 1)$, e $\delta > 0$.

As f.d.p em (3.2), (3.3) e (3.4) podem exibir formas bastante diferentes, dependendo dos valores dos parâmetros α , ψ e δ . Em particular, pode ser simétrico (quando $\alpha = 1$ e $\psi = 1/2$) ou assimétrico (quando $\alpha \neq 1$ e $\psi \neq 1/2$), entre muitas outras. Além disso, observa-se que a dispersão da distribuição para α e ψ fixos, diminui (aumenta) à medida que δ aumenta (diminui); isto é, o parâmetro δ pode ser considerado como um parâmetro de dispersão. Para formular um novo modelo de regressão para a resposta limitada, considere $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ um vetor que contém n realizações de interesse (ou variável resposta), em que cada Y_i segue uma das f.d.p PNL, PNC, PNN ou PNG com parâmetros $(\alpha, \psi_i, \delta_i)$ com mediana ψ_i e dispersão δ_i , para $i = 1, \dots, n$. Definimos os modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG assumindo que o parâmetro da mediana e da dispersão das distribuição PNL, PNC, PNN e PNG satisfazem a seguinte relação funcional:

$$\eta_{1i} = d_1(\psi_i) = \mathbf{w}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \text{e} \quad \eta_{2i} = d_2(\delta_i) = \mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\tau},$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^\top$ são os vetores dos parâmetros desconhecidos da regressão com $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, e $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^q$ tal que $p + q < n$, η_{1i} e η_{2i} são preditores lineares e $\mathbf{w}_i = (w_{1i}, \dots, w_{pi})^\top$ e $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, \dots, z_{qi})^\top$ são as observações das covariáveis de ordem $p \times 1$ e $q \times 1$, respectivamente. Além disso, assumamos que as matrizes $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)^\top$ e $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)^\top$ tem posto p e q respectivamente. Por outra parte, sejam as funções de ligação para a mediana $d_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e a função de ligação para o parâmetro de dispersão $d_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ambas funções de ligação são estritamente monótonas e duas vezes diferenciável. A tabela a seguir são apresentadas algumas das funções de ligação para a mediana e para a dispersão.

Tabela 23 – Tabela de funções de ligação

Ligação para a mediana		Ligação para a dispersão	
Logito	$d_1(\boldsymbol{\psi}) = \log\left(\frac{\boldsymbol{\psi}}{1-\boldsymbol{\psi}}\right)$	Logarítmica	$d_2(\boldsymbol{\delta}) = \log(\boldsymbol{\delta})$
Probit	$d_1(\boldsymbol{\psi}) = \Phi^{-1}(\boldsymbol{\psi})$	Raiz quadrada	$d_2(\boldsymbol{\delta}) = \sqrt{\boldsymbol{\delta}}$
Complemento log-log	$d_1(\boldsymbol{\psi}) = \log[-\log(1-\boldsymbol{\psi})]$	Identidade	$d_2(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\delta}$
Log-log	$d_1(\boldsymbol{\psi}) = \log[-\log(\boldsymbol{\psi})]$		
Cauchy	$d_1(\boldsymbol{\psi}) = \tan[\pi(\boldsymbol{\psi} - 0,5)]$		

3.2 Inferência

Dado que $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\tau}$ e α são os parâmetros desconhecidos, o interesse é a estimação simultânea dos parâmetros em questão. A função log-verossimilhança para este modelo de regressão, tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\vartheta}) = \ell(y; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha) = \sum_{i=1}^n \ell_i(y_i; \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha), \quad (3.6)$$

em que $\ell_i(y_i; \boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha) = \log(\alpha \boldsymbol{\delta}_i) + \log(\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))) + (\alpha - 1) \log(\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))) + \log Q'(y_i)$, e sendo que cada $P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha) = \boldsymbol{\delta}_i [Q(y_i) - Q(\boldsymbol{\psi}_i)] + x_{0,5}(\alpha)$ com $\boldsymbol{\psi}_i = d_1^{-1}(\eta_{1i})$ e $\boldsymbol{\delta}_i = d_2^{-1}(\eta_{2i})$, são funções de $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\tau}$, respectivamente e $\boldsymbol{\psi}_i$ representa a mediana de uma das distribuições PNL, PNC, PNN ou PNG ($\boldsymbol{\psi}_{\text{PNL}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\text{PNC}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\text{PNN}}$ ou $\boldsymbol{\psi}_{\text{PNG}}$). Os estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\vartheta}$ são obtidas ao maximizar a função log-verossimilhança.

3.2.1 Função Escore

A função escore, definida como a derivada da função de log-verossimilhança com respeito a cada um dos parâmetros do modelo $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$, pode ser obtida a partir da expressão 3.6

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha) = (\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)^\top, \mathbf{U}_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)^\top, \mathbf{U}_{\alpha}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)^\top)^\top,$$

com dimensão $(p + q + 1)$ cujos elementos são apresentados no Apêndice B.1. Dessa forma, as componentes da função escore, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$ têm a forma

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \beta_r} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} \right] \frac{\boldsymbol{\delta}_i}{\boldsymbol{\psi}_i(1 - \boldsymbol{\psi}_i)} \frac{\mathbf{w}_{ir}}{d_1(\boldsymbol{\psi}_i)},$$

para $r = 1, \dots, p$ e que matricialmente é dada por

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha) = \mathbf{W}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\Psi}^*, \quad (3.7)$$

em que \mathbf{W} é a matriz modelo em relação a $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{B} = \text{diag}\{B_i\}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\boldsymbol{\delta}_i\}$, $\mathbf{T}_1 = \text{diag}\{1/d_1(\boldsymbol{\psi}_i)\}$, $\boldsymbol{\Psi}^* = (-\boldsymbol{\psi}_1^*, \dots, -\boldsymbol{\psi}_n^*)^\top$, sendo que cada $B_i = \frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}$, $\boldsymbol{\psi}_i^* = Q'(\boldsymbol{\psi}_i) = \frac{1}{\boldsymbol{\psi}_i(1 - \boldsymbol{\psi}_i)}$.

Analogamente as componentes do vetor $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$ têm a forma

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \tau_R} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\delta_i} + \left[\frac{\phi'(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))}{\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))} \right] \right\} \log \left(\frac{y_i(1 - \psi_i)}{(1 - y_i)\psi_i} \right) \frac{z_{iR}}{d_2(\delta_i)},$$

para $R = 1, \dots, q$. e que matricialmente é dada por

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha) = \mathbf{Z}^{\top} \mathbf{T}_2 \boldsymbol{\delta}^*, \quad (3.8)$$

em que \mathbf{Z} é a matriz modelo em relação a $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{T}_2 = \text{diag}\{1/d_2(\delta_i)\}$, $\boldsymbol{\delta}^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_n^*)^{\top}$, sendo que cada $\delta_i^* = 1/\delta_i + B_i(Q(y_i) - Q(\psi_i))$. E finalmente, a componente do vetor escore em relação ao parâmetro α é

$$\mathbf{U}_{\alpha}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha) = \text{tr}\{\mathbf{M}\} \quad (3.9)$$

em que, $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1, \dots, m_n\}$; com $\text{tr}\{\cdot\}$ é o operador traço da matriz com $m_i = \frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \alpha}$. Então,

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\alpha} + B_i x'_{0,5}(\alpha) \right\},$$

sendo que $x'_{0,5}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\phi(0, 5^{1/\alpha}) 0, 5^{1/\alpha} \log 2}$.

Os estimadores de máximo verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ e $\hat{\alpha}$, respectivamente, podem-se obtidas simultaneamente resolvendo o sistema de equações não lineares

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) = \mathbf{0}_p; \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) = \mathbf{0}_q; \quad (3.10b)$$

$$\mathbf{U}_{\alpha}(\hat{\alpha}) = 0. \quad (3.10c)$$

No entanto, as equações 3.10a, 3.10b e 3.10c não têm soluções explícitas, mas podem ser resolvidas usando o algoritmo de Newton Raphson e, assim, podem-se obter as EMV dos parâmetros dos modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG. Além disso, sob certas condições de regularidade, para n suficientemente grande, tem-se que $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ segue uma distribuição assintótica normal, isto é

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \sim N_{p+q+1}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})^{-1}),$$

em que $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ é a matriz de informação de Fisher a qual não é fácil a ser determinada mas Efron e Hinkley (1978) mostram que uma aproximação para $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$ pode ser feita utilizando a matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$ de ordem $(p + q + 1)$, avaliada em $\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}$, isto é

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\tau}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}\alpha} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\tau}}^{\top} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}\alpha} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\beta}\alpha}^{\top} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\tau}\alpha}^{\top} & \mathbf{J}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\alpha})} \quad (3.11)$$

em que cada componente é apresentada no apêndice B.2. Pela normalidade assintótica dos EMV, é possível construir intervalos e regiões de confiança assintóticos de $100(1 - \zeta)\%$ de confiança

para os parâmetros dos modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG. Portanto, os intervalos de confiança assintóticos serão,

$$\widehat{\beta}_r \pm z_{1-\zeta/2} \text{EP}(\widehat{\beta}_r), \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, p \quad (3.12a)$$

$$\widehat{\tau}_R \pm z_{1-\zeta/2} \text{EP}(\widehat{\tau}_R), \quad \text{para } R = 1, 2, \dots, q \quad (3.12b)$$

$$\widehat{\alpha} \pm z_{1-\zeta/2} \text{EP}(\widehat{\alpha}) \quad (3.12c)$$

para β_r , τ_R e α , respectivamente, com cobertura assintótica de $100(1 - \zeta)\%$. Sendo que $\text{EP}(\cdot)$ representa a raiz quadrada do elemento da diagonal de $-\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\alpha})^{-1}$ correspondente a cada parâmetro (isto é, o erro padrão assintótico), e $z_{1-\zeta/2}$ denota o quantil $(1 - \zeta/2)$ da distribuição normal padrão.

3.2.2 Estatísticas de Teste com covariáveis

A seguir, consideraremos os testes baseados nas estatísticas S_{LR} , S_W , S_R e S_G para as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG para testar a hipótese simples $H_0 : \alpha = 1$ versus $H_1 : \alpha \neq 1$, para amostras pequenas, moderadas e grandes considerando o caso com a estrutura de regressão.

Assuma-se que as variáveis aleatórias Y_1, \dots, Y_n sejam independentes e cada Y_i segue uma das f.d.p PNL, PNC, PNN ou PNG definidas em 3.2, 3.3, 3.4 ou 3.5 com parâmetros $(\alpha, \psi_i, \delta_i)$ para $i = 1, \dots, n$ (em que ψ_i representa a mediana segundo seja o caso). Entanto, para introduzir uma estrutura de regressão nesta classe de modelos, assume-se que

$$d_1(\psi_i) = \eta_{1i} = \mathbf{w}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \text{e} \quad d_2(\delta_i) = \eta_{2i} = \mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\tau}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ e $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_q)^\top$ são os vetores dos parâmetros desconhecidos da regressão com $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, e $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^q$ tal que $p + q < n$, η_{1i} e η_{2i} são preditores lineares e $\mathbf{w}_i = (w_{1i}, \dots, w_{pi})^\top$ e $\mathbf{z}_i = (z_{1i}, \dots, z_{qi})^\top$ são as observações das covariáveis de ordem $p \times 1$ e $q \times 1$, respectivamente. Além do mais, as funções de ligação d_1 e d_2 , são contínuas, invertíveis e duas vezes diferenciáveis, que vinculam as covariáveis aos parâmetros ψ_i e δ_i . E o parâmetro α assumirá o valor de 1, e é o mesmo para todas as observações.

A função log-verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \alpha)^\top$, toma a forma da equação (3.6), porém as expressões (3.7) a (3.9), foram determinadas as componentes da função escore do modelo. Para a formulação das estatísticas usuais como o teste da razão de verossimilhança, gradiente, Wald e escore, primeiro considere $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\alpha})^\top$ e $\widetilde{\boldsymbol{\vartheta}} = (\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\tau}}, 1)^\top$, que são as estimativas de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\vartheta}$ sob o espaço paramétrico completo e sob a hipótese nula H_0 , respectivamente.

Com as expressões dadas em (2.17), (2.18) e (2.20) que fornecem as estatísticas de razão de verossimilhança, Wald e gradiente respectivamente. Entretanto, para a estatística escore, há uma alternativa definida por Peng e Xu (2012) dada pela seguinte expressão

$$S_R = \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \alpha} \right)^2 / \left(-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \alpha^2} - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^\top \right) \Big|_{\widehat{\boldsymbol{\vartheta}} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}, \widehat{\alpha})}$$

em que $A = (-\mathbf{J}_{\beta\alpha}, -\mathbf{J}_{\tau\alpha})$ e $B = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_{\beta\beta} & -\mathbf{J}_{\beta\tau} \\ -\mathbf{J}_{\beta\tau}^\top & -\mathbf{J}_{\tau\tau} \end{bmatrix}$. As estatísticas da razão de verossimilhança, e gradiente são dadas respectivamente, por

$$S_{LR} = 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \log(\hat{\alpha}) + \log\left(\frac{\hat{\delta}_i}{\tilde{\delta}_i}\right) + \log\left(\frac{\phi(P_i(\hat{\psi}_i, \hat{\delta}_i, \hat{\alpha}))}{\phi(P_i(\tilde{\psi}_i, \tilde{\delta}_i, 1))}\right) + (\hat{\alpha} - 1) \log\left(P_i(\hat{\psi}_i, \hat{\delta}_i, \hat{\alpha})\right) \right\}$$

$$S_W = \left(\frac{\hat{\alpha} - 1}{EP(\hat{\alpha})}\right)^2$$

$$S_G = \left(n + \sum_{i=1}^n \log(\phi(P_i(\tilde{\psi}_i, \tilde{\delta}_i, 1))\Phi(P_i(\tilde{\psi}_i, \tilde{\delta}_i, 1)))\right) (\hat{\alpha} - 1)$$

em que

$$P_i(\hat{\psi}_i, \hat{\delta}_i, \hat{\alpha}) = \hat{\delta}_i [Q(y_i) - Q(\hat{\psi}_i)] + x_{0.5}(\alpha) \quad e$$

$$P_i(\tilde{\psi}_i, \tilde{\delta}_i, 1) = \tilde{\delta}_i [Q(y_i) - Q(\tilde{\psi}_i)].$$

3.3 Simulações

3.3.1 Estudo de simulação para os modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG com covariáveis

Nesta seção, é realizado um estudo de simulação para avaliar o desempenho dos modelos PNL, PNC, PNN e PNG com covariáveis. São calculadas a média, o desvio padrão (DP), as médias do erro padrão (MEP), o viés e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) os quais foram calculados a partir das expressões dadas em 2.16a, 2.16b, 2.16c e 2.16d. E com o objetivo de avaliar a qualidade da estimação intervalar, obtivemos a probabilidade de cobertura (PC) de 95% de confiança para os parâmetros em estudo os quais foram obtidos a partir das expressões 3.12a, 3.12b e 3.12c.

A simulação com covariáveis da variável resposta Y_i com parâmetros $(\alpha, \delta_i, \gamma_i)$ dos modelos propostos PNL, PNC, PNN e PNG se considero os seguintes cenários

- Cenário 1: $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = 2, \tau_1 = -2$ e $\alpha = 2$
- Cenário 2: $\beta_0 = 5, \beta_1 = -3, \tau_0 = 2, \tau_1 = 1$ e $\alpha = 0,5$
- Cenário 3: $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$
- Cenário 4: $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$

De maneira adicional consideramos tamanhos de amostra $n = (50, 100, 200, 400, 800)$ e levamos em conta $M = 1000$ simulações em todos os cenários. Para simular uma amostra aleatória sob os supostos dos modelos seguimos o seguinte procedimento:

Primeiro definem-se valores específicos para $\alpha > 0$ e para os coeficientes da covariável neste caso $\beta_0, \beta_1, \tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}$. Além do mais, para cada cenário uma amostra é gerada usando o seguinte procedimento:

- i. A covariável x_i é gerada, em que x_i segue uma distribuição de uniforme $U(0, 1)$, para $i = 1, 2, \dots, n$;
- ii. o parâmetro δ_i foi gerado a partir da transformação $\exp(\tau_0 + \tau_1 x_i)$ (o qual garante o fato que $\delta_i > 0$);
- iii. entando, e levando em conta a reparametrização na mediana, o parâmetro $\gamma_i \in \mathbb{R}$ foi gerado como mostrado abaixo

$$\text{Se } Y_i \sim \text{PNL}(\alpha, \delta_i, \gamma_i) \quad \text{então} \quad \gamma_i = x_{0,5}(\alpha) - \delta_i Q\left(\frac{1}{1 + \exp(-(\beta_0 + \beta_1 x_i))}\right)$$

$$\text{Se } Y_i \sim \text{PNC}(\alpha, \delta_i, \gamma_i) \quad \text{então} \quad \gamma_i = x_{0,5}(\alpha) - \delta_i Q\left(\frac{1}{\pi} \arctan(\beta_0 + \beta_1 x_i) + 0,5\right)$$

$$\text{Se } Y_i \sim \text{PNN}(\alpha, \delta_i, \gamma_i) \quad \text{então} \quad \gamma_i = x_{0,5}(\alpha) - \delta_i Q(\Phi(\beta_0 + \beta_1 x_i))$$

$$\text{Se } Y_i \sim \text{PNG}(\alpha, \delta_i, \gamma_i) \quad \text{então} \quad \gamma_i = x_{0,5}(\alpha) - \delta_i Q(\exp(-\exp(-(\beta_0 + \beta_1 x_i))))$$

em que $Q(\cdot)$ representa a função quantílica correspondente dada na Tabela 1. Os resultados são discutidos a seguir:

- A Tabela 24 apresenta os resultados da simulação do modelo PNL, considerando o cenário 1. Pode-se observar que as EMVs se aproximam dos verdadeiros valores dos parâmetros, e assim tornando um viés muito pequeno a medida que o tamanho da amostra aumenta. O erro padrão, o desvio padrão e a raiz do erro quadrático médio das estimativas se aproximam de zero quando o tamanho da amostra aumenta. E a probabilidade de cobertura captura melhor a proporção das amostras que contém o verdadeiro valor do parâmetro isto é ao redor de 95%.
- A Tabela 25 apresenta-se os resultados da simulação considerando $\beta_0 = 5, \beta_1 = -3, \tau_0 = 2, \tau_1 = 1$ e $\alpha = 0,5$. Para esta combinação de parâmetros os resultados são similares ao item anterior notando que apresenta melhores resultados a partir de amostras de tamanho 100.
- A Tabela 26 apresenta-se os resultados da simulação considerando $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$ para o modelo PNC. Observe-se que as estimativas para o parâmetro α são boas a partir do tamanho da amostra $n = 200$, e em relação aos outros parâmetros se aproximam aos valores reais com tamanho de amostra pequenas. Entanto que o viés tende a zero a medida que o tamanho da amostra seja grande. Note-se também que a probabilidade de cobertura para todos os parâmetros está em torno a 95%.
- A Tabela 27 $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$. As interpretações são análogas à Tabela 26, com a diferença que as estimativas de α são boas para amostras grandes.

- A Tabela 28 para a configuração de $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 4$, $\tau_0 = 2$, $\tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$ para o modelo PNN o desempenho das estimativas dos parâmetros são boas e o viés em módulo torna-se zero para amostras pequenas. Porém a probabilidade de cobertura não atinge ao 95% exceto para o parâmetro τ_1 . A Tabela 29 apresenta o cenário $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -4$, $\tau_0 = -2$, $\tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$ para o modelo PNN, pode-se perceber que para valores $\alpha > 1$ as estimativas não são boas. Portanto para a combinação de valores do cenário em questão não são os adequados.
- A Tabela 30 com valores $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 4$, $\tau_0 = 2$, $\tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$ para o modelo PNG apresentam boas aproximações dos valores reais a partir de tamanho de amostras pequenas, Em relação ao viés e ao erro padrão vão-se tornando zero com o incremento da amostra e a probabilidade de cobertura está em torno a 95% só para os parâmetros α e τ_1 . Analogamente à Tabela 29 quando α assume valores maiores a 1 não apresentam boas propriedades.

Tabela 24 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNL com parâmetros $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -4$, $\tau_0 = 2$, $\tau_1 = -2$ e $\alpha = 2$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	2,001	0,048	0,050	0,001	0,050	0,936
	β_1	-4,009	0,158	0,166	-0,009	0,167	0,925
	τ_0	2,005	0,745	0,634	0,005	0,633	0,983
	τ_1	-2,008	0,389	0,405	-0,008	0,405	0,945
	α	5,977	4,048	3,938	1,095	4,085	0,986
100	β_0	2,001	0,033	0,036	0,001	0,036	0,925
	β_1	-4,000	0,110	0,115	-0,000	0,115	0,935
	τ_0	2,064	0,453	0,453	0,064	0,458	0,988
	τ_1	-2,023	0,259	0,265	-0,023	0,266	0,953
	α	2,491	1,866	2,006	0,220	2,017	0,987
200	β_0	1,999	0,024	0,024	-0,001	0,024	0,941
	β_1	-3,997	0,078	0,078	0,003	0,078	0,949
	τ_0	2,032	0,285	0,298	0,032	0,300	0,962
	τ_1	-2,014	0,179	0,195	-0,014	0,195	0,925
	α	2,146	1,076	1,153	0,070	1,155	0,964
400	β_0	2,000	0,017	0,018	-0,000	0,018	0,938
	β_1	-3,999	0,055	0,057	0,001	0,057	0,943
	τ_0	2,015	0,193	0,193	0,015	0,194	0,955
	τ_1	-2,006	0,125	0,128	-0,006	0,128	0,951
	α	2,050	0,694	0,697	0,025	0,698	0,969
800	β_0	2,000	0,012	0,012	-0,000	0,012	0,955
	β_1	-4,001	0,039	0,037	-0,001	0,037	0,954
	τ_0	2,003	0,133	0,138	0,003	0,137	0,942
	τ_1	-1,999	0,088	0,092	0,001	0,092	0,937
	α	2,052	0,478	0,497	0,026	0,498	0,947

Tabela 25 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNL com parâmetros $\beta_0 = 5$, $\beta_1 = -3$, $\tau_0 = 2$, $\tau_1 = 1$ e $\alpha = 0,5$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	4,999	0,038	0,040	-0,001	0,040	0,927
	β_1	-3,002	0,052	0,056	-0,002	0,056	0,923
	τ_0	1,921	0,847	0,638	-0,079	0,643	0,991
	τ_1	1,042	0,385	0,398	0,042	0,400	0,946
	α	1,080	3,143	2,644	0,770	2,753	0,999
100	β_0	5,001	0,026	0,027	0,001	0,027	0,939
	β_1	-3,001	0,036	0,038	-0,001	0,038	0,938
	τ_0	2,062	0,518	0,467	0,062	0,471	0,984
	τ_1	1,002	0,256	0,254	0,002	0,253	0,953
	α	0,506	1,502	1,380	0,013	1,380	1,000
200	β_0	5,000	0,019	0,019	0,000	0,019	0,936
	β_1	-3,000	0,026	0,026	0,000	0,026	0,947
	τ_0	2,061	0,336	0,350	0,061	0,355	0,962
	τ_1	0,997	0,176	0,189	-0,003	0,189	0,930
	α	0,457	0,948	0,988	-0,088	0,992	0,986
400	β_0	5,000	0,013	0,014	0,000	0,014	0,937
	β_1	-3,000	0,018	0,019	-0,000	0,019	0,947
	τ_0	2,027	0,219	0,225	0,027	0,227	0,960
	τ_1	0,998	0,122	0,124	-0,002	0,124	0,951
	α	0,478	0,617	0,624	-0,045	0,626	0,963
800	β_0	5,000	0,009	0,010	-0,000	0,010	0,938
	β_1	-3,000	0,013	0,013	-0,000	0,013	0,936
	τ_0	2,014	0,151	0,159	0,014	0,160	0,937
	τ_1	1,000	0,086	0,089	0,000	0,089	0,940
	α	0,486	0,425	0,451	-0,026	0,452	0,935

Tabela 26 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNC com parâmetros $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 4$, $\tau_0 = 2$, $\tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	3,020	0,017	0,018	0,020	0,018	0,926
	β_1	4,030	0,020	0,022	0,030	0,022	0,922
	τ_0	1,917	0,783	0,617	-0,083	0,622	0,989
	τ_1	2,549	0,387	0,394	0,049	0,397	0,948
	α	2,435	3,400	3,243	1,535	3,391	0,993
100	β_0	3,000	0,012	0,013	0,000	0,013	0,935
	β_1	4,002	0,014	0,015	0,002	0,015	0,932
	τ_0	2,057	0,493	0,479	0,057	0,482	0,982
	τ_1	2,518	0,257	0,265	0,189	0,266	0,947
	α	0,952	1,601	1,548	0,052	1,549	0,995
200	β_0	2,999	0,008	0,009	-0,000	0,009	0,929
	β_1	4,001	0,010	0,011	0,001	0,011	0,923
	τ_0	2,036	0,303	0,312	0,036	0,314	0,956
	τ_1	2,502	0,176	0,173	0,002	0,173	0,951
	α	0,885	0,951	0,991	-0,014	0,990	0,971
400	β_0	2,999	0,006	0,007	-0,000	0,007	0,911
	β_1	4,000	0,007	0,008	0,000	0,008	0,907
	τ_0	2,009	0,203	0,197	0,009	0,197	0,961
	τ_1	2,494	0,123	0,128	-0,005	0,128	0,940
	α	0,894	0,630	0,612	-0,005	0,612	0,969
800	β_0	2,999	0,004	0,005	-0,000	0,005	0,887
	β_1	4,000	0,005	0,006	0,000	0,006	0,890
	τ_0	1,998	0,140	0,140	-0,001	0,140	0,949
	τ_1	2,494	0,086	0,087	-0,005	0,087	0,946
	α	0,907	0,434	0,420	0,007	0,420	0,956

Tabela 27 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNC com parâmetros $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -4$, $\tau_0 = -2$, $\tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	1,997	0,787	0,814	-0,003	0,813	0,927
	β_1	-4,016	0,967	1,018	-0,016	1,018	0,925
	τ_0	-2,015	0,730	0,631	-0,015	0,631	0,978
	τ_1	2,075	0,394	0,405	0,075	0,412	0,942
	α	13,632	4,713	4,339	9,632	4,507	0,973
100	β_0	2,015	0,556	0,564	0,015	0,564	0,949
	β_1	-4,020	0,684	0,696	-0,020	0,696	0,945
	τ_0	-1,976	0,444	0,447	0,024	0,447	0,986
	τ_1	2,016	0,262	0,265	0,016	0,265	0,946
	α	6,358	2,304	2,660	2,358	2,699	0,970
200	β_0	1,989	0,394	0,403	-0,011	0,403	0,942
	β_1	-3,981	0,485	0,489	0,019	0,489	0,940
	τ_0	-1,988	0,281	0,291	0,012	0,291	0,967
	τ_1	2,005	0,180	0,194	0,005	0,194	0,929
	α	4,694	1,269	1,333	0,694	1,342	0,956
400	β_0	2,001	0,278	0,283	0,001	0,283	0,951
	β_1	-4,003	0,342	0,346	-0,003	0,346	0,953
	τ_0	-1,997	0,190	0,190	0,003	0,190	0,953
	τ_1	2,004	0,125	0,128	0,004	0,128	0,946
	α	4,296	0,798	0,799	0,296	0,802	0,970
	β_0	1,997	0,196	0,199	-0,003	0,199	0,949
	β_1	-3,999	0,242	0,246	0,001	0,246	0,952
	τ_0	-2,002	0,131	0,134	-0,002	0,134	0,949
	τ_1	2,005	0,088	0,092	0,005	0,092	0,932
	α	4,196	0,544	0,567	0,196	0,569	0,953

Tabela 28 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNN com parâmetros $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2,5$ e $\alpha = 0,9$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	3,001	0,017	0,017	0,001	0,017	0,928
	β_1	4,002	0,020	0,021	0,002	0,021	0,926
	τ_0	1,971	0,798	0,378	-0,029	0,379	0,995
	τ_1	2,569	0,393	0,390	0,066	0,395	0,952
	α	1,247	2,820	1,799	0,347	1,827	0,999
100	β_0	3,000	0,011	0,012	0,000	0,012	0,938
	β_1	4,002	0,014	0,015	0,002	0,015	0,929
	τ_0	2,018	0,467	0,314	0,018	0,315	0,990
	τ_1	2,521	0,257	0,264	0,021	0,265	0,945
	α	0,950	1,498	1,032	0,050	1,033	0,998
200	β_0	2,999	0,008	0,009	-0,001	0,009	0,929
	β_1	4,001	0,010	0,010	0,001	0,011	0,923
	τ_0	2,000	0,295	0,183	0,000	0,183	0,981
	τ_1	2,506	0,176	0,169	0,006	0,169	0,955
	α	0,925	0,923	0,543	0,025	0,543	0,988
400	β_0	2,999	0,006	0,007	-0,001	0,007	0,910
	β_1	4,000	0,007	0,008	0,000	0,008	0,905
	τ_0	1,993	0,200	0,099	-0,007	0,100	0,987
	τ_1	2,500	0,123	0,123	0,000	0,123	0,937
	α	0,904	0,619	0,253	0,004	0,253	0,992
800	β_0	2,999	0,004	0,005	-0,001	0,005	0,905
	β_1	4,000	0,005	0,006	0,000	0,006	0,900
	τ_0	1,995	0,140	0,065	-0,005	0,065	0,989
	τ_1	2,494	0,087	0,080	-0,006	0,080	0,945
	α	0,900	0,431	0,157	0,000	0,157	0,989

Tabela 29 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNN com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	1,821	0,774	0,815	-0,179	0,834	0,919
	β_1	-3,790	0,961	1,014	0,210	1,035	0,923
	τ_0	-1,816	0,774	0,648	0,184	0,674	0,981
	τ_1	1,932	0,406	0,405	-0,068	0,410	0,951
	α	7,783	4,380	4,016	3,783	4,069	0,978
100	β_0	1,849	0,542	0,559	-0,151	0,578	0,932
	β_1	-3,798	0,674	0,689	0,202	0,717	0,932
	τ_0	-1,719	0,484	0,467	0,281	0,545	0,962
	τ_1	1,869	0,272	0,264	-0,131	0,295	0,942
	α	3,018	2,037	2,185	-0,982	2,202	0,943
200	β_0	1,825	0,384	0,398	-0,175	0,434	0,920
	β_1	-3,760	0,477	0,483	0,240	0,539	0,916
	τ_0	-1,726	0,308	0,313	0,274	0,416	0,868
	τ_1	1,856	0,188	0,193	-0,144	0,240	0,874
	α	2,398	1,144	1,217	-1,602	1,320	0,887
400	β_0	1,835	0,271	0,275	-0,165	0,321	0,897
	β_1	-3,781	0,337	0,337	0,219	0,402	0,900
	τ_0	-1,753	0,207	0,200	0,247	0,318	0,806
	τ_1	1,859	0,131	0,128	-0,141	0,190	0,819
	α	2,365	0,737	0,731	-1,635	0,904	0,842
800	β_0	1,831	0,191	0,196	-0,169	0,259	0,858
	β_1	-3,776	0,238	0,242	0,223	0,329	0,843
	τ_0	-1,756	0,144	0,141	0,244	0,281	0,611
	τ_1	1,858	0,092	0,091	-0,142	0,168	0,670
	α	2,318	0,505	0,512	-1,682	0,748	0,768

Tabela 30 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNG com parâmetros $\beta_0 = 3, \beta_1 = 4, \tau_0 = 2, \tau_1 = 2.5$ e $\alpha = 0,9$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	2,997	0,017	0,018	-0,003	0,019	0,930
	β_1	4,005	0,021	0,022	0,005	0,023	0,923
	τ_0	1,967	0,767	0,613	-0,033	0,613	0,995
	τ_1	2,523	0,391	0,405	0,023	0,406	0,945
	α	1,666	3,110	2,620	0,766	2,690	0,998
100	β_0	2,999	0,012	0,013	-0,001	0,013	0,923
	β_1	4,002	0,014	0,016	0,002	0,016	0,911
	τ_0	2,068	0,483	0,472	0,068	0,477	0,993
	τ_1	2,525	0,257	0,265	0,025	0,266	0,938
	α	0,843	1,540	1,470	-0,057	1,471	0,997
200	β_0	2,999	0,008	0,008	-0,000	0,008	0,936
	β_1	4,001	0,010	0,010	0,001	0,010	0,929
	τ_0	2,006	0,300	0,301	0,006	0,301	0,968
	τ_1	2,511	0,178	0,182	0,011	0,183	0,939
	α	0,947	0,950	0,926	0,047	0,927	0,971
400	β_0	3,000	0,006	0,006	0,000	0,006	0,937
	β_1	4,000	0,007	0,007	0,000	0,007	0,936
	τ_0	2,011	0,203	0,211	0,011	0,211	0,959
	τ_1	2,514	0,123	0,125	0,014	0,125	0,947
	α	0,892	0,631	0,656	-0,008	0,655	0,960
800	β_0	3,001	0,004	0,004	0,001	0,004	0,928
	β_1	4,001	0,005	0,005	0,001	0,005	0,921
	τ_0	1,989	0,140	0,155	-0,011	0,156	0,912
	τ_1	2,516	0,087	0,086	0,016	0,087	0,942
	α	0,943	0,438	0,492	0,043	0,494	0,945

Tabela 31 – Resultados baseados em 1000 simulações do modelo de regressão PNG com parâmetros $\beta_0 = 2, \beta_1 = -4, \tau_0 = -2, \tau_1 = 2$ e $\alpha = 4$

n	Parâmetro	Média	MEP	DP	Viés	REQM	PC
50	β_0	2,039	0,784	0,808	0,039	0,808	0,922
	β_1	-4,069	0,965	1,009	-0,069	1,011	0,926
	τ_0	-2,018	0,728	0,633	-0,018	0,633	0,969
	τ_1	2,022	0,395	0,394	0,022	0,394	0,949
	α	18,391	4,917	4,680	14,391	4,920	0,969
100	β_0	2,037	0,551	0,566	0,037	0,566	0,944
	β_1	-4,053	0,680	0,697	-0,053	0,699	0,938
	τ_0	-1,998	0,449	0,443	0,002	0,442	0,986
	τ_1	1,965	0,265	0,261	-0,035	0,263	0,954
	α	8,848	2,624	2,809	4,848	2,917	0,979
200	β_0	2,013	0,390	0,404	0,013	0,404	0,933
	β_1	-4,018	0,481	0,487	-0,019	0,488	0,939
	τ_0	-2,010	0,283	0,293	-0,010	0,294	0,969
	τ_1	1,948	0,183	0,189	-0,052	0,196	0,928
	α	6,472	1,406	1,549	2,472	1,621	0,977
400	β_0	2,027	0,275	0,282	0,027	0,283	0,947
	β_1	-4,042	0,340	0,344	-0,042	0,346	0,952
	τ_0	-2,019	0,190	0,188	-0,019	0,189	0,960
	τ_1	1,945	0,128	0,125	-0,055	0,136	0,934
	α	5,763	0,874	0,852	1,763	0,926	0,983
800	β_0	2,023	0,194	0,198	0,023	0,199	0,951
	β_1	-4,038	0,240	0,244	-0,038	0,247	0,939
	τ_0	-2,020	0,132	0,135	-0,020	0,137	0,944
	τ_1	1,947	0,090	0,088	-0,053	0,103	0,914
	α	5,523	0,593	0,605	1,523	0,685	0,956

3.3.2 Estudo de simulação com covariável dos testes

Para avaliar o desempenho da estatística gradiente (S_G) com a estatística da razão de verossimilhança (S_{LR}), escore (S_R) e Wald (S_W) foram simulados valores dos modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG da seção (3.2.2) com parâmetros

$$\alpha = 1$$

$$\delta_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

$$\gamma_i = x_{0,5}(\alpha) - \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i) Q(r) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

em que $r = \exp(-(\tau_0 + \tau_1)x_i)$ e $Q(\cdot)$ representa a função quantílica correspondente às distribuições PNL, PNC, PNN e PNG dadas na Tabela 1; e foram considerados os valores de $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = -4$, $\tau_0 = 2$ e $\tau_1 = -2$ e a covariável x_i foi gerada de uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. A avaliação é em termos da estimação das taxas de rejeição nula, e comparação da distribuição empírica das estatística gradiente com a distribuição teórica. O estudo é baseado em 10000 amostras de Monte Carlo de tamanhos $n = 30, 50, 100, 200, 400$ e 800 dos modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG com $\alpha = 1$.

Tabela 32 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNL.

n (%)		S_G	S_{LR}	S_R	S_W
30	1	0,0446	0,0012	0,0054	0,0289
	5	0,0821	0,0117	0,0167	0,0300
	10	0,1174	0,0362	0,0374	0,0304
50	1	0,0351	0,0032	0,0032	0,0066
	5	0,0727	0,0280	0,0236	0,0067
	10	0,1113	0,0692	0,0670	0,0078
100	1	0,0211	0,0070	0,013	0,0006
	5	0,0655	0,0474	0,053	0,0067
	10	0,1157	0,0995	0,105	0,0264
200	1	0,0175	0,0101	0,0147	0,0027
	5	0,0658	0,0596	0,0630	0,0279
	10	0,1209	0,1148	0,1192	0,0817
400	1	0,0137	0,0110	0,0117	0,0071
	5	0,0565	0,0518	0,0528	0,0414
	10	0,1084	0,1062	0,1078	0,0945
800	1	0,0107	0,0105	0,0113	0,0080
	5	0,0521	0,0515	0,0515	0,0465
	10	0,1009	0,1001	0,1011	0,0953

As Tabelas 32, 33, 34 e 35 são apresentados as taxas de rejeição nula para os valores nominais de 1%, 5% e 10% para os modelos PNL, PNC, PNN e PNG respectivamente, em que as taxas de rejeição empíricas dos teste gradiente e razão verossimilhança apresentam melhores aproximações aos valores nominais comparadas com os outros testes a partir de amostras com

tamanho $n = 100$, entanto que estão subestimando os níveis nominais para tamanho menores. Porém em todos os casos à medida que aumenta o tamanho amostral se tornam equivalentes.

Tabela 33 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNC.

n (%)		S_G	S_{LR}	S_R	S_W
30	1	0,0448	0,0004	0,0049	0,0292
	5	0,0828	0,0101	0,0146	0,0297
	10	0,1182	0,0350	0,0368	0,0301
50	1	0,0350	0,0023	0,0033	0,0063
	5	0,0725	0,0275	0,0228	0,0066
	10	0,1110	0,0690	0,0664	0,0075
100	1	0,0209	0,0068	0,0129	0,0004
	5	0,0654	0,0473	0,0527	0,0066
	10	0,1156	0,0994	0,1046	0,0262
200	1	0,0175	0,0101	0,0148	0,0027
	5	0,0658	0,0596	0,0632	0,0279
	10	0,1209	0,1148	0,1192	0,0817
400	1	0,0137	0,0110	0,0117	0,0071
	5	0,0565	0,0518	0,0528	0,0414
	10	0,1084	0,1062	0,1077	0,0945
800	1	0,0107	0,0105	0,0113	0,0080
	5	0,0521	0,0515	0,0515	0,0465
	10	0,1009	0,1001	0,1012	0,0952

Tabela 34 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNN.

n (%)		S_G	S_{LR}	S_R	S_W
30	1	0,0465	0,0005	0,0049	0,0291
	5	0,0831	0,0105	0,0147	0,0303
	10	0,1183	0,0374	0,0361	0,0306
50	1	0,0351	0,0022	0,0034	0,0059
	5	0,0726	0,0277	0,0230	0,0061
	10	0,1112	0,0691	0,0665	0,0070
100	1	0,0207	0,0066	0,0127	0,0002
	5	0,0653	0,0472	0,0529	0,0063
	10	0,1155	0,0993	0,1045	0,0260
200	1	0,0175	0,0101	0,0148	0,0027
	5	0,0658	0,0596	0,0632	0,0279
	10	0,1209	0,1148	0,1192	0,0817
400	1	0,0137	0,0110	0,0117	0,0071
	5	0,0565	0,0518	0,0528	0,0414
	10	0,1084	0,1062	0,1078	0,0944
800	1	0,0107	0,0105	0,0113	0,0080
	5	0,0521	0,0515	0,0515	0,0465
	10	0,1009	0,1001	0,1011	0,0952

Tabela 35 – Taxas de rejeição da hipótese para testar $H_0 : \alpha = 1$ no modelo de regressão PNG.

n (%)		S_G	S_{LR}	S_R	S_W
30	1	0,0443	0,0004	0,0048	0,0294
	5	0,0825	0,0102	0,0148	0,0291
	10	0,1172	0,0340	0,0308	0,0311
50	1	0,0350	0,0023	0,0033	0,0063
	5	0,0725	0,0275	0,0228	0,0066
	10	0,1110	0,0690	0,0664	0,0075
100	1	0,0209	0,0068	0,0129	0,0004
	5	0,0654	0,0473	0,0527	0,0066
	10	0,1156	0,0994	0,1046	0,0262
200	1	0,0175	0,0101	0,0148	0,0027
	5	0,0658	0,0596	0,0632	0,0279
	10	0,1209	0,1148	0,1192	0,0817
400	1	0,0135	0,0113	0,0114	0,0078
	5	0,0565	0,0518	0,0528	0,0414
	10	0,1084	0,1062	0,1077	0,0945
800	1	0,0106	0,0107	0,0123	0,0080
	5	0,0523	0,0512	0,0510	0,0463
	10	0,1009	0,1001	0,1012	0,0952

3.4 Aplicação

Nesta seção, mostraremos uma aplicação conveniente dos modelos de regressão PNL, PNC, PNC e PNG descritos na seção 3.1, a um conjunto de dados com estatísticas de câncer colorretal nos Estados Unidos entre os anos de 2006 a 2010, introduzido por [Siegel, DeSantis e Jemal \(2014\)](#).

O câncer colorretal é o terceiro tipo de câncer mais comum nos Estados Unidos entre homens e mulheres e é também a terceira causa de morte por câncer em ambos os sexos. As estimativas do Instituto Nacional do Câncer (INC) para 2017 foram de 135 mil novos casos nos EUA, 8% do total de novos casos de câncer para aquele ano. O INC também informou que o número estimado de mortes para 2017 foi cerca de 50 mil, 8,4% de todas as mortes por câncer. A melhoria na tecnologia para detectar o câncer, o avanço nas técnicas de tratamento e a diminuição da exposição a fatores de risco (como tabagismo e consumo de carne vermelha) contribuíram para a redução da mortalidade por câncer colorretal de sete décadas atrás foi a primeira causa de morte por câncer nos EUA.

Considerando o conjunto de dados de mortalidade no nível estadual de [Siegel, DeSantis e Jemal \(2014\)](#) que são separados por três grupos de Raça e grupos de Sexo; nós nos concentramos na taxa de não mortalidade como resposta variável aos 50 estados onde a informação está disponível. Depois de deletar 80 casos com dados incompletos, temos um subconjunto de

$n = 220$ observações. Nosso objetivo é avaliar se existem diferenças significativas na taxa de sobrevivência entre grupos de homens e mulheres nos estados, bem como entre a taxa de sobrevivência entre os grupos raciais. Para este propósito, as seguintes variáveis são consideradas:

- y_i : taxa de sobrevivência; $i = 1, \dots, 220$;
- x_{1i} : sexo (homem=0, mulher=1);
- x_{2i} : raça (não hispânico branco, não hispânico negro, hispânico).

Em que a taxa de sobrevivência é definida como o complemento da taxa de mortalidade, em que a taxa de mortalidade é definida pelos autores como:

$$\text{Taxa de mortalidade} = \frac{\text{número de casos de mortalidade de câncer colorretal}}{100000 \text{ habitantes}},$$

Portanto, a taxa de sobrevivência é dada por $1 - \text{taxa de mortalidade}$. Na tabela 36 são apresentadas as medidas descritivas da taxa de sobrevivência de câncer colorretal.

Tabela 36 – Medidas descritivas da taxa de sobrevivência das pessoas com câncer colorretal nos EUA

Mínimo	1 Quartil	Mediana	Média	3 Quartil	Máximo
0,6280	0,7880	0,8230	0,8185	0,8670	0,9530

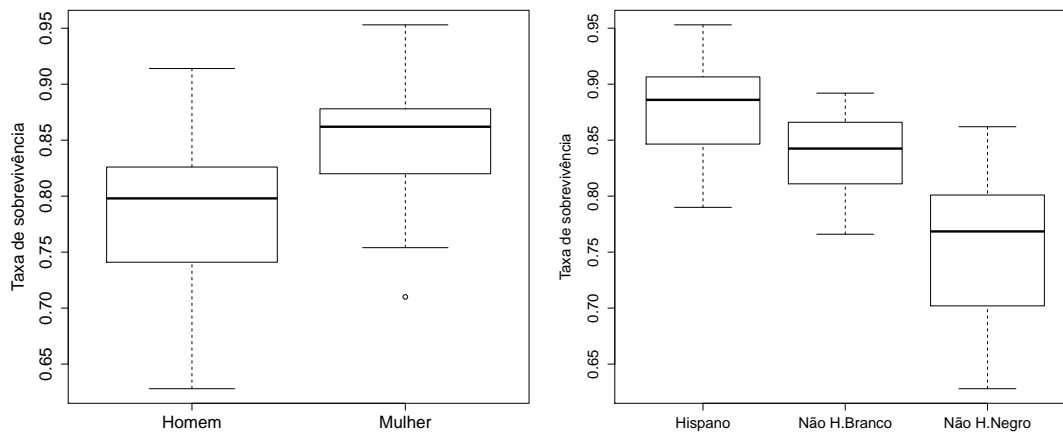


Figura 9 – Boxplot da taxa de sobrevivência de pacientes com câncer colorretal por sexo (lado esquerdo) e por raça (lado direito)

A figura 9 mostra os box-plots da taxa de não incidência entre os grupos estudados por sexo (o painel da esquerda) e raça (o painel da direita). Podemos verificar que a variável resposta é diferente considerando essas covariáveis e então ajustamos o modelo de regressão descrito na seção 3.2 para identificar o efeito dessas covariáveis. Assim, para este conjunto de dados, ajustamos o modelo de regressão com todas as covariáveis na mediana (ψ) da taxa

de sobrevivência e no parâmetro de dispersão correspondente (δ), embora outras funções de ligação possam ser usadas, consideramos a função de ligação logístico para mediana e a função de ligação logarítmico para dispersão, ou seja,

$$\log\left(\frac{\psi_i}{1-\psi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_{2_1} x_{2_1} + \beta_{2_2} x_{2_2}, \text{ e}$$

$$\log(\delta_i) = \tau_0 + \tau_1 x_{1i} + \tau_{2_1} x_{2_1} + \tau_{2_2} x_{2_2}, \quad i = 1, \dots, 220.$$

em que variáveis fictícias são definidas para o grupo de covariáveis de raça, considerando

$$x_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{se mulher} \\ 0, & \text{se homem} \end{cases}$$

$$x_{2_1} = \begin{cases} 1, & \text{se não hispânico branco;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e } x_{2_2} = \begin{cases} 1, & \text{se não hispânico negro;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto de dados foram ajustados com o modelo PNL com todas as funções de ligação mencionadas na Tabela 23, e usando os critérios AIC (BOZDOGAN (1987)) e BIC (WATANABE (2013)), na Tabela 37. são apresentados os valores destes critérios. Segundo os critérios, o melhor ajuste para o modelo PNL é com a ligação log-log por sua vez para o modelo PNC é a ligação logística e para os modelos PNN e PNG é a ligação cauchy.

Tabela 37 – Critérios de comparação de modelos AIC e BIC com diferentes funções de ligação para os modelos PNL, PNC, PNN e PNG.

Função Ligação	PNL		PNC		PNN		PNG	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
Logístico	-995,99	-965,45	-994,02	-963,48	-908,75	-878,20	-870,20	-839,65
Cauchy	-992,02	-961,48	-988,41	-957,86	-950,89	-920,35	-949,29	-918,75
Probit	-994,15	-963,60	-991,81	-961,27	-781,51	-750,97	-825,50	-794,95
Log-log	-997,19	-966,64	-828,57	-798,03	-804,98	-774,44	-928,50	-897,96
C-Log-log	-990,69	-960,14	-859,72	-829,17	-866,96	-836,42	-879,46	-848,91

Além disso, com a finalidade de comparar modelos, os dados foram ajustados com o modelo de regressão PNL, PNC, PNN, PNG e S_B de Johnson (com função de ligação log-log). Na Tabelas 38 e 39 são apresentados as estimativas de máxima verossimilhança e seu respectivo erro padrão dos parâmetros dos modelos ajustados. Veja-se que todos os parâmetros são significativos para ambos modelos. É dizer que o efeito do sexo e da raça dos pacientes com câncer colorretal são significativos na taxa de sobrevivência mediana. Portanto a mediana da taxa de sobrevivência difere entre homens e mulheres, assim como também difere entre pacientes de origem não-hispânico branco, não-hispânico negro e hispânico. Analogamente, o efeito das covariáveis sexo e raça do paciente com câncer colorretal são significativos na dispersão do modelo. Isto indica que existem diferenças significativas na dispersão entre os pacientes homens e mulheres, e entre os pacientes de origem hispânico e os outros dois de origem não-hispânico.

Tabela 38 – Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros dos modelos de regressão PNL e S_B Johnson

Par.	PNL			S_B Johnson		
	EMV	EP	P-valor	EMV	EP	P-valor
β_0	0,649	0,0174	0,00e+00	0,663	0,0180	0,00e+00
β_1	0,202	0,0106	0,00e+00	0,198	0,0111	0,00e+00
β_{2_1}	-0,157	0,0164	0,00e+00	-0,164	0,0171	0,00e+00
β_{2_2}	-0,398	0,0211	0,00e+00	-0,397	0,0211	0,00e+00
τ_0	0,347	0,2743	2,06e-01	1,067	0,1172	0,00e+00
τ_1	0,300	0,1047	4,21e-03	0,362	0,1000	2,96e-04
τ_{2_1}	0,797	0,1318	1,46e-09	0,825	0,1255	4,83e-11
τ_{2_2}	0,189	0,1417	1,81e-01	0,265	0,1329	4,61e-02
α	4,053	2,1300	5,71e-02			

Tabela 39 – Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros dos modelos de regressão PNC, PNN e PNG

Par.	PNC			PNN			PNG		
	EMV	EP	P-valor	EMV	EP	P-valor	EMV	EP	P-valor
β_0	2,301	0,155	0,00e+00	1,6859	0,2054	2,22e-16	1,970	0,1763	0,00e+00
β_1	0,687	0,039	0,00e+00	0,6978	0,0381	0,00e+00	0,772	0,0401	0,00e+00
β_{2_1}	-0,766	0,157	1,13e-06	-0,1717	0,2155	4,26e-01	-0,495	0,1782	5,46e-03
β_{2_2}	-1,528	0,158	0,00e+00	-0,9354	0,2136	1,19e-05	-1,196	0,1802	3,25e-11
τ_0	0,163	0,176	3,55e-01	1,4468	0,2246	1,18e-10	0,918	0,2101	1,24e-05
τ_1	-0,123	0,101	2,20e-01	0,2263	0,1004	2,41e-02	0,293	0,1091	7,16e-03
τ_{2_1}	1,350	0,144	0,00e+00	1,1281	0,2407	2,78e-06	1,289	0,1817	1,31e-12
τ_{2_2}	1,480	0,141	0,00e+00	0,5010	0,2534	4,80e-02	0,787	0,1918	4,02e-05
α	0,628	0,506	3,58e-01	1,099	0,9005	9,16e-01	0,507	0,4111	1,84e-01

Na Tabela 40 apresenta-se os critérios de comparação de modelos, observa-se que o modelo que ajusta melhor os dados é o modelo PNL por apresentar menores valores dos critérios.

Para testarmos o modelo de regressão PNL considerou-se o teste da razão de verossimilhança, em que testamos $H_0 : \tau_i = 0$ versus $H_1 : \tau_i \neq 0$, para $i = 1, 2, 3$. A estatística do teste de razão de verossimilhança resultou 12,407 com 3 graus de liberdade e um p -valor igual a 0,002, que leva a rejeitar a hipótese nula e considerar o modelo heterocedástico para o ajuste dos dados em estudo.

Entanto, para a adequabilidade do modelo com as estimativas de máxima verossimilhança foi obtido o resíduo quantil aleatorizado DUNN e SMYTH (1996), para os modelos de regressão PNL e o modelo de regressão S_B de Johnson. AS figuraS 10 e 11 mostram que o QQ-plot do resíduo quantil aleatorizado para os modelos PNL, S_B Johnson, PNC, PNN e PNG em que esses resíduos se distribuem aproximadamente com a distribuição normal para todos os modelos indicando assim a adequabilidade dos modelos. Mas, da Figura 10, nota-se que o modelo PNL se ajusta melhor aos dados.

Tabela 40 – Critério AIC e BIC para os modelos ajustados.

Modelo	Critérios	
	AIC	BIC
PNL	-997,187	-966,644
PNC	-936,162	-909,015
PNN	-987,167	-960,018
PNG	-981,963	-954,814
S_B Johnson	-986,620	-959,471

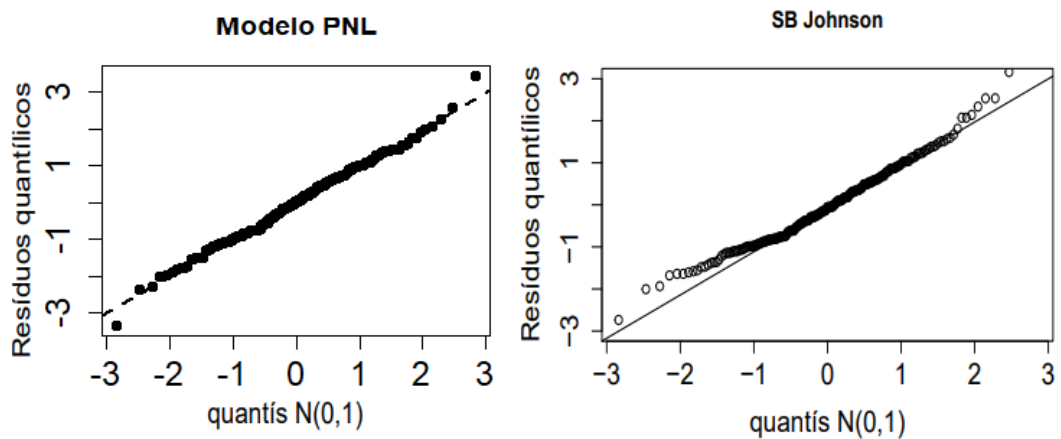
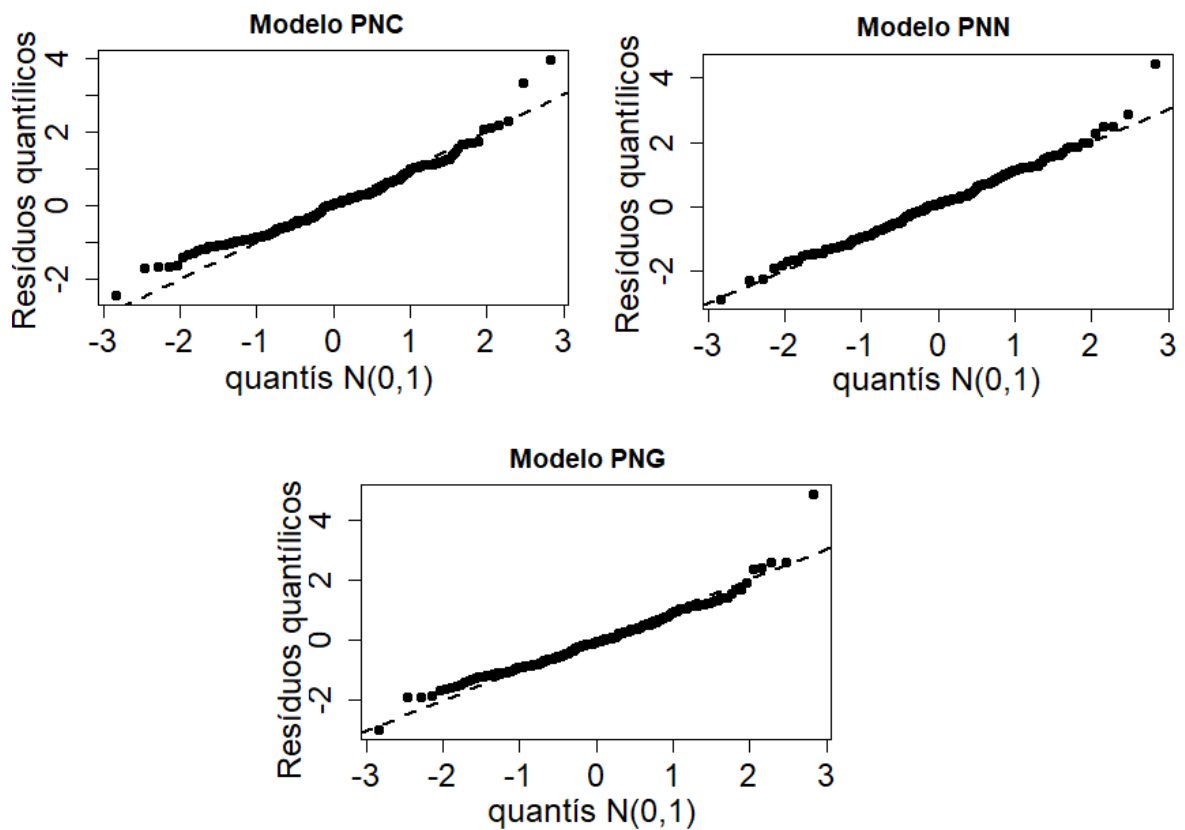
Figura 10 – Ajustes dos dados nos modelos PNL e S_B Johnson

Figura 11 – Ajustes dos dados nos modelos PNC, PNN e PNG

Portanto, conclui-se que o modelo PNL é adequado para modelar estes dados. Logo, pode-se estimar a taxa de sobrevivência mediana e o respectivo intervalo de 95% de confiança dos pacientes com câncer colorretal para seis casos hipotéticos de pacientes A, B, C, D, E e F com características (covariáveis) dadas na Tabela 41.

Da Tabela 41 pode-se dizer, por exemplo, que para o caso B, o paciente de sexo feminino e de origem hispânico tem uma taxa de sobrevivência da doença de 0,902, enquanto que para o caso E pacientes de sexo masculino e de origem não-hispânico negro têm uma taxa de sobrevivência de 0,712. Portanto, pode-se concluir que as mulheres de origem hispânico que dos EUA tem a maior taxa de sobrevivência de câncer colorretal enquanto que os homens de origem não-hispânicos negro dos EUA tem a menor taxa de sobrevivência de câncer colorretal. Concluindo com isso que as variáveis sexo e raça influenciam na taxa de sobrevivência do paciente com câncer colorretal nos EUA.

Tabela 41 – Estimativa da mediana da taxa de sobrevivência e o intervalo de 95% de confiança para os seis pacientes hipotéticos com câncer colorretal - Modelo de regressão PNL

Paciente	Sexo	Raça	Taxa de Sobrevivência	
			EMV	95% Int. de confiança
A	Homem	Hispânico	0,858	(0,853; 0,862)
B	Mulher	Hispânico	0,902	(0,899; 0,905)
C	Homem	não-Hispânico branco	0,806	(0,803; 0,808)
D	Mulher	não-Hispânico branco	0,865	(0,863; 0,866)
E	Homem	não-Hispânico negro	0,712	(0,707; 0,718)
F	Mulher	não-Hispânico negro	0,796	(0,793; 0,800)

3.5 Conclusão

Neste Capítulo, foi desenvolvido os modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG fazendo uma reparametrização do modelo na mediana da variável resposta. O modelo de regressão foi construído como nos modelos lineares generalizados, na qual a mediana e o parâmetro de dispersão estão relacionados com as covariáveis conhecidas e parâmetros desconhecidos da regressão por meio de uma função de ligação. Inferências do modelo de regressão foram feitas pelo método de máxima verossimilhança. Também foram feitos estudos de simulação dos modelos de regressão PNL, PNC, PNN e PNG para avaliar as propriedades dos EMV, em que verificou-se que eles possuem boas propriedades assintóticas, e também foi feito um estudo das estatísticas gradiente, wald, score e razão de verossimilhança. E finalmente foi feita uma aplicação com dados reais a um conjunto de dados de pacientes com câncer colorretal dos EUA e foi ajustado com todos modelos de regressão. Observou-se que ambos modelos ajustam bem os dados, porém o melhor modelo dentre os quatro conferidos pela análise do resíduo quantil aleatorizado e os critérios de seleção de modelos é o modelo PNL. Portanto, o modelo proposto é adequado para fazer inferências da taxa de sobrevivência dos pacientes com câncer colorretal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS

4.1 Considerações finais

Uma nova família de distribuições para dados no intervalo $(0, 1)$ é proposta nesta dissertação denominados distribuição potência logística (PNL para abreviar), distribuição potência cauchy (PNC), distribuição potência normal (PNN) e distribuição potência gumbel (PNG). No Capítulo 2, estudamos algumas propriedades e foram desenvolvidos os procedimentos inferenciais via máxima verossimilhança e também foram apresentados os testes sem covariáveis, gradiente, escore, Wald e da razão de verossimilhança; e mediante estudos de simulação foram verificadas as propriedades assintóticas e finalmente o ajuste dos modelos PNL, PNG, PNN e PNG aos dados de câncer colorretal nos Estados Unidos ilustra a utilidade dos modelos. No Capítulo 3, a nova família de distribuições foi estendida para modelos de regressão relacionadas com a mediana da variável resposta. Analogamente ao Capítulo 2, foram desenvolvidos os procedimentos inferências via máxima verossimilhança, os testes gradiente, escore, Wald e da razão de verossimilhança com covariáveis; e por meio de estudos de simulação foram verificadas as propriedades assintóticas e na parte final do capítulo os modelos foram avaliados a dados reais.

4.2 Sugestões para pesquisas futuras

- Estender os modelos propostos para casos multivariados.
- Estudar para os modelos propostos a análise de diagnóstico clássico e bayesiano.
- Estudar os modelos PNL, PNC, PNN e PNG como variável resposta para os modelos Gamlss.

REFERÊNCIAS

- ANYOSA; BAZAN; LEMONTE. **Power and Reserval Power Distributions**. 2017. Citado na página 35.
- BAYES, C.; BAZÁN, J. L.; CASTRO, M. de. A quantile parametric mixed regression model for bounded response variables. **Statistics and its interface**, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 483–493, 2017. Citado na página 23.
- BOZDOGAN, H. Model selection and akaike's information criterion (aic). **The general theory and its analytical extensions. Psychometrika**, Psychometrika, Springer, v. 52, n. 3, p. 345–370, 1987. Citado nas páginas 60 e 83.
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. Problems of inference for azzalini's skew-normal distribution. **Journal of Computational and Graphical Statistics, Taylor Francis**, v. 80, n. 3, p. 236–244, 1996. Citado na página 84.
- DURRANS, S. Distribution of fractional order statistics in hydrology. **Water Resources Research**, v. 28, n. 1, p. 1649–1655, 1992. Citado na página 24.
- EFRON; HINKLEY. **Assesing the accuracy of the maximum likelihood estimator observed versus expected Fisher information: Biometrika**. 1978. Citado nas páginas 40 e 66.
- FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. **Journal of Applied Statistics, Taylor & Francis**, v. 31, n. 7, p. 799–815, 2004. Citado na página 23.
- GUPTA, R. D.; GUPTA, R. C. Analyzing skewed data by power normal model. **Test**, Springer, v. 17, n. 1, p. 197–210, 2008. Citado nas páginas 25 e 29.
- HINKLEY; COX. **Theoretical statistics : Chapman and Hall/CRC**. 1974. Citado na página 40.
- JOHNSON, N. L. Systems of frequency curves generated by methods of translation. **Biometrika, JSTOR**, v. 36, n. 1/2, p. 149–176, 1949. Citado nas páginas 11, 13 e 24.
- KENNEY, J. F.; KEEPING, E. S. Mathematics of statistics-part one. **Van Nostrand Company Inc, D. Van Nostrand Company**, v. 1, n. 1, p. 31, 1954. Citado na página 35.
- KRYSICKI, W. On some new properties of the beta distribution. **Statistics probability letters, Elsevier**, v. 42, n. 2, p. 131–137, 1999. Citado na página 23.
- LEHMANN, E. The power of rank tests. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 24, n. 1, p. 23–43, 1953. Citado na página 24.
- LEMONTE, A. J.; BAZÁN, J. L. New class of johnson sb distributions and its associated regression model for rates and proportions. **Biometrical Journal, Wiley Online Library**, v. 41, p. 727–746, 2016. Citado na página 23.

- OSPINA, R.; FERRARI, S. L. A general class of zero-or-one inflated beta regression models. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1609–1623, 2012. Citado na página 23.
- OSPINA, S.; FERRARI, S. Inflated beta distributions. **Statistical Papers, Springer**, v. 51, n. 1, p. 111, 2010. Citado na página 23.
- PENG, Y.; XU, J. An extended cure model and model selection. **Lifetime Data Anal**, Lifetime Data Anal, v. 18, n. 1, p. 215–233, 2012. Citado na página 67.
- PEWSEY, A. Problems of inference for azzalini's skew-normal distribution. **Journal of Applied Statistics**, v. 27, n. 1, p. 859–870, 2000. Citado na página 25.
- QIU; SONG, P.; TAN, M. Simplex mixed-effects models for longitudinal proportional data. **Scandinavian Journal of Statistics**, JSTOR, v. 35, n. 4, p. 577–596, 2008. Citado na página 23.
- RAO, C. Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 1, n. 2, p. 50–57, 1948. Citado na página 52.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics, Institute of Mathematical Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. Citado na página 60.
- SIEGEL, R.; DESANTIS, C.; JEMAL, A. Colorectal cancer statistics, 2014. **CA: A Cancer Journal for Clinicians**, Wiley Online Library, v. 64, n. 2, p. 104–117, 2014. Citado nas páginas 59 e 81.
- SIMAS, A.; BARRETO-SOUZA, W.; ROCHA, A. Improved estimators for a general class of beta regression models. **Computational Statistics & Data Analysis, Elsevier**, v. 54, n. 2, p. 348–366, 2010. Citado na página 23.
- SMITHSON, M.; SHOU, Y. Cdf-quantile distributions for modelling random variables on the unit interval. **British Journal of Mathematical and Statistical Psychology**, Wiley Online Library, v. 70, n. 3, p. 412–438, 2017. Citado na página 23.
- TERRELL. The gradient statistic. **Computing Science and Statistics**, Elsevier, v. 82, n. 4, p. 206–215, 2002. Citado na página 52.
- WALD. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. **Transactions of the American Mathematical Society**, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 426–482, 1943. Citado na página 52.
- WATANABE, S. A. A widely applicable bayesian information criterion. **Journal of Machine Learning Research**, Journal of Machine Learning Research, v. 14, n. 1, p. 867–897, 2013. Citado na página 83.
- WILKS. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. **Ann. Math. Statist**, Ann. Math. Statist., v. 82, n. 4, p. 60–62, 1938. Citado na página 52.
- ZUñIGA j.i figueroa; VALLE r.b arellano; FERRARI s.l. Mixed beta regression: A bayesian perspective. **Computational Statistics & Data Analysis, Elsevier**, v. 61, n. 1, p. 137–147, 2013. Citado na página 23.

DEMONSTRAÇÕES DE PROPOSIÇÕES E ELEMENTOS DA FUNÇÃO ESCORE

A.1 Demonstrações

Demonstração. Proposição 5

$$\begin{aligned} F_Y(y; \alpha, \delta, \gamma) &= \int_0^y f_Y(x; \alpha, \gamma, \delta) dx \quad y \in [0, 1] \\ &= \int_0^y \alpha \delta \phi(\gamma + \delta Q(x)) [\Phi(\gamma + \delta Q(x))]^{\alpha-1} Q'(x) dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \delta + \gamma Q(x)$, a integral acima reduz para

$$\int_{-\infty}^{\delta + \gamma Q(y)} \alpha \phi(u) [\Phi(u)]^{\alpha-1} du = [\Phi(\delta + \gamma Q(y))]^\alpha.$$

□

Demonstração. Proposição 6

Vamos mostrar que os momentos das distribuições PNL, PNC, PNN e PNG existem

$$\mu'_r = E(Y^r) = \int_0^1 y^r f_Y(y; \alpha, \gamma, \delta) dy = \int_0^1 y^r \alpha \delta \phi(\gamma + \delta Q(y)) [\Phi(\gamma + \delta Q(y))]^{\alpha-1} Q'(y) dy$$

em que $Q(\cdot)$ representa o quantil dada na [Tabela 1](#). Por outra parte, seja $u = \gamma + \delta Q(y)$ então tem-se $y = Q^{-1}\left(-\left(\frac{u-\gamma}{\delta}\right)\right)$ dada na [Tabela 2](#). Então, a integral acima pode ser reduzida para

$$\int_0^1 y^r \alpha \delta \phi(\gamma + \delta Q(y)) [\Phi(\gamma + \delta Q(y))]^{\alpha-1} Q'(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(Q^{-1}\left(-\frac{u-\gamma}{\delta}\right) \right)^r \alpha \phi(u) [\Phi(u)]^{\alpha-1} du.$$

Note que o domínio de todas as funções $Q^{-1}(\cdot)$ estão no intervalo $(0, 1)$, logo pode-se afirmar que $Q^{-1}\left(-\left(\frac{u-\gamma}{\delta}\right)\right) \in (0, 1)$ e, portanto

$$\int_{\mathbb{R}} \left(Q^{-1}\left(-\left(\frac{u-\gamma}{\delta}\right)\right) \right)^r \alpha \phi(u) [\Phi(u)]^{\alpha-1} du < \int_{\mathbb{R}} \alpha \phi(u) [\Phi(u)]^{\alpha-1} du = 1 < \infty.$$

Logo, o resultado é válido.

□

Demonstração. Proposição 7

O resultado segue imediatamente da proposição 1

$$\begin{aligned} [\Phi(\gamma + \delta Q(y_q))]^\alpha &= q, \quad \text{para } q \in (0, 1) \Rightarrow \\ \Phi(\gamma + \delta Q(y_q)) &= q^{1/\alpha} \Rightarrow \\ Q(y_q) &= \frac{\Phi^{-1}(q^{1/\alpha}) - \gamma}{\delta} \quad \text{em que } \Phi^{-1}(q^{1/\alpha}) = x_q(\alpha) \Rightarrow \\ y_q &= Q^{-1}\left(\frac{x_q(\alpha) - \gamma}{\delta}\right). \end{aligned}$$

□

Demonstração. Proposição 8

Para provar o resultado do item (i), segue da definição da mediana, isto é, $\Phi(\delta Q(y)) = \frac{1}{2}$ então $\Phi^{-1}(1/2) = \delta Q(y)$, portanto $Q(y) = 0, \forall y \in (0, 1)$. Logo, para as distribuições PNL, PNC, PNN e PNG com $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$, as medianas são respectivamente,

- Logística: $\log\left(\frac{y}{1-y}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.
- Cauchy: $\tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, o qual é verdadeiro se $y = \frac{1}{2} + k$, porém $y \in (0, 1)$ então $k=0$. Portanto, $y = \frac{1}{2}$.
- Normal: $\Phi^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow y = \Phi(0)$, então $y = \frac{1}{2}$.
- Gumbel: $-\log(-\log(y)) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}$.

Para provar o item (ii) note que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{\alpha \delta \phi(\gamma + \delta Q(y)) [\Phi(\gamma + \delta Q(y))]^{\alpha-1}}{y(1-y)} dy.$$

Mas, quando $\alpha = 1$ and $\gamma = 0$.

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{\delta \phi(\delta Q(y))}{y(1-y)} dy$$

Fazendo a mudança de variável $r = \delta Q(y)$, a integral acima reduz para

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(r)}{1 + \exp(-r/\delta)} dr \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\phi(r)}{1 + \exp(-r/\delta)} dr + \int_0^{\infty} \frac{\phi(r)}{1 + \exp(-r/\delta)} dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\phi(r)}{1 + \exp(r/\delta)} dr + \int_0^{\infty} \frac{\phi(r)}{1 + \exp(-r/\delta)} dr \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \exp(r/\delta)} + \frac{1}{1 + \exp(-r/\delta)} \right) \phi(r) dr \\ &= \int_0^{\infty} \phi(r) dr = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, o resultado (ii) é válido.

Para provar o item (iii), temos que mostrar que $f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta) = f(1/2 + \varepsilon; 1, 0, \delta)$, em que $1/2 \pm \varepsilon \in (0, 1)$.

Primeiro, para o caso da PNL note que

$$f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta) = \frac{\delta}{(1/2 - \varepsilon)(1/2 + \varepsilon)} \phi \left(\delta \log \left(\frac{1/2 - \varepsilon}{1/2 + \varepsilon} \right) \right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f(1/2 + \varepsilon; 1, 0, \delta) &= \frac{\delta}{(1/2 + \varepsilon)(1/2 - \varepsilon)} \phi \left(-\delta \log \left(\frac{1/2 + \varepsilon}{1/2 - \varepsilon} \right) \right) \\ &= \frac{\delta}{(1/2 + \varepsilon)(1/2 - \varepsilon)} \phi \left(\delta \log \left(\frac{1/2 - \varepsilon}{1/2 + \varepsilon} \right) \right) \\ &= f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta). \end{aligned}$$

Entanto, para o caso PNC tem-se

$$\begin{aligned} f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta) &= \delta \phi(\pi(1/2 - \varepsilon - 1/2)) \pi \sec^2(\pi(1/2 - \varepsilon - 1/2)); \\ &= \delta \phi(\delta \tan(\pi(-\varepsilon))) \pi \sec^2(\pi(-\varepsilon)). \end{aligned}$$

Por outra parte,

$$\begin{aligned} f(1/2 + \varepsilon; 1, 0, \delta) &= \delta \phi(\delta \tan(\pi(1/2 - \varepsilon - 1/2))) \pi \sec^2(\pi(1/2 + \varepsilon - 1/2)) \\ &= \delta \phi(\delta \tan(\pi(\varepsilon))) \pi \sec^2(\pi(\varepsilon)) \\ &= \delta \phi(-\delta \tan(\pi(\varepsilon))) \pi \sec^2(\pi(\varepsilon)) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} &= \delta \phi(\delta \tan(\pi(-\varepsilon))) \pi \sec^2(\pi(-\varepsilon)) \\ &= f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta). \end{aligned} \tag{A.2}$$

em que (A.1) segue do fato que $\phi(x) = \phi(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e (A.2) $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\sec(x) = \sec(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

E para o caso da PNN

$$\begin{aligned} f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta) &= \frac{\delta \phi(\delta \Phi^{-1}(y))}{\phi(\Phi^{-1}(1/2 - \varepsilon))} \\ &= \frac{\delta \phi(\sqrt{2} \delta \operatorname{erf}^{-1}(2(1/2 - \varepsilon) - 1))}{\phi(\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2(1/2 - \varepsilon) - 1))} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$= \frac{\delta \phi(\sqrt{2} \delta \operatorname{erf}^{-1}(-2\varepsilon))}{\phi(\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(-2\varepsilon))} \tag{A.4}$$

$$= \frac{\delta \phi(\sqrt{2} \delta \operatorname{erf}^{-1}(2\varepsilon))}{\phi(\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2\varepsilon))}. \tag{A.5}$$

em que (A.3) é verdade porque $\Phi^{-1}(p) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1) \forall p \in (0, 1)$, (A.4) segue do fato que $\phi(-x) = \phi(x) \forall x \in \mathbb{R}$ e (A.5) devido a que $\operatorname{erf}^{-1}(x) = -\operatorname{erf}^{-1}(-x)$; sendo que $\operatorname{erf}^{-1}(\cdot)$

representa a função inversa da função error definida por $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

$$\begin{aligned}
 f(1/2 + \varepsilon; 1, 0, \delta) &= \frac{\delta \phi(\delta \Phi^{-1}(1/2 + \varepsilon))}{\phi(\Phi^{-1}(1/2 + \varepsilon))} \\
 &= \frac{\delta \phi(\sqrt{2} \delta \text{erf}^{-1}(2(1/2 + \varepsilon) - 1))}{\phi(\sqrt{2} \text{erf}^{-1}(2(1/2 + \varepsilon) - 1))} \\
 &= \frac{\delta \phi(\sqrt{2} \delta \text{erf}^{-1}(2\varepsilon))}{\phi(\sqrt{2} \text{erf}^{-1}(2\varepsilon))} \\
 &= f(1/2 - \varepsilon; 1, 0, \delta).
 \end{aligned}$$

□

Demonstração. Proposição 9

Seja $Z = 1 - Y$. Denote por $f_Z(z)$ o pdf de Z . Segue que

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= f(1 - z; \alpha, \gamma, \delta) \\
 &= \frac{\alpha \delta}{(1 - z)^z} \phi(\gamma + \delta Q(1 - z)) [\Phi(\gamma + \delta Q(1 - z))]^{\alpha - 1} \\
 &= \frac{\alpha \delta}{z(1 - z)} \phi\left(\gamma + \delta \log\left(\frac{z}{1 - z}\right)\right) \left[\Phi\left(\gamma + \delta \log\left(\frac{z}{1 - z}\right)\right)\right]^{\alpha - 1} \\
 &= \frac{\alpha \delta}{z(1 - z)} \phi\left(-\gamma + \delta \log\left(\frac{1 - z}{z}\right)\right) \left[\Phi\left(-\gamma + \delta \log\left(\frac{1 - z}{z}\right)\right)\right]^{\alpha - 1}.
 \end{aligned}$$

Note que, $\phi\left(\gamma - \delta \log\left(\frac{z}{1 - z}\right)\right) = \phi\left(-\gamma + \delta \log\left(\frac{1 - z}{z}\right)\right)$.

Portanto, $Z = 1 - Y \sim \text{PNL}(\alpha, \delta, -\gamma)$.

□

A.2 Elementos de informação observada

$$-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} \quad (\text{A.6})$$

$$-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha \partial \delta} = -\sum_{i=1}^n \frac{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))} Q(y_i) \quad (\text{A.7})$$

$$-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \alpha \partial \gamma} = -\sum_{i=1}^n \frac{\phi(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi(\gamma + \delta Q(y_i))} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} &= -\sum_{i=1}^n \frac{\phi''(\gamma + \delta Q(y_i)) \phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - (\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)))^2}{\phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))} \\
 &\quad - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)) \Phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - \phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))}
 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})}{\partial \delta \partial \gamma} &= -\sum_{i=1}^n \frac{\phi''(\gamma + \delta Q(y_i)) \phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - (\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)))^2}{\phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))} Q(y_i) \quad (\text{A.10}) \\
&\quad -(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)) \Phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - \phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))} Q(y_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})}{\partial \delta^2} &= \frac{n}{\delta^2} \quad (\text{A.11}) \\
&\quad -\sum_{i=1}^n \frac{\phi''(\gamma + \delta Q^2(y_i)) \phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - (\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)))^2}{\phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))} Q^2(y_i) \\
&\quad -(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{\phi'(\gamma + \delta Q(y_i)) \Phi(\gamma + \delta Q(y_i)) - \phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))}{\Phi^2(\gamma + \delta Q(y_i))} Q^2(y_i)
\end{aligned}$$

FUNÇÃO ESCORE PARA O MODELO DE REGRESSÃO E MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA

B.1 Função escore

A função escore e a matriz de informação observada para $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$.

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \beta_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\psi}_i} \frac{d\boldsymbol{\psi}_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\psi}_i} \frac{d\boldsymbol{\psi}_i}{d\eta_{1i}} \mathbf{w}_{ir} \quad \text{for } r = 1, \dots, p.$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \tau_R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\delta}_i} \frac{d\boldsymbol{\delta}_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_R} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\delta}_i} \frac{d\boldsymbol{\delta}_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{z}_{iR} \quad \text{for } R = 1, \dots, q.$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \alpha}$$

em que

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\psi}_i} = - \left[\frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} \right] \boldsymbol{\delta}_i Q'(\boldsymbol{\psi}_i) = -B_i \boldsymbol{\delta}_i Q'(\boldsymbol{\psi}_i)$$

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\delta}_i} = \frac{1}{\boldsymbol{\delta}_i} + \left[\frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} \right] (Q(y_i) - Q(\boldsymbol{\psi}_i)) = \boldsymbol{\delta}_i^*$$

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} + \left[\frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} \right] x'_{0,5}(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + B_i x'_{0,5}(\alpha)$$

sendo

$$B_i = \frac{\phi'(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} + (\alpha - 1) \frac{\phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\delta}_i, \alpha))} \quad \text{e} \quad x'_{0,5}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\phi(0, 5^{1/\alpha}) 0,5^{1/\alpha} \log 2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \beta_r} &= - \sum_{i=1}^n B_i \delta_i Q'(\psi_i) \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \mathbf{w}_{ir}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \tau_R} &= \sum_{i=1}^n \delta_i^* (Q(y_i) - Q(\psi_i)) \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{z}_{iR} \quad e \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha} + B_i x'_{0,5}(\alpha) \right).\end{aligned}$$

B.2 Matriz de informação observada

As segundas derivadas de $\ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)$ em relação ao $\boldsymbol{\beta}'$ s, $\boldsymbol{\tau}'$ s e α bem dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \beta_s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \psi_i} \left(\frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \mathbf{w}_{is} \right) \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_s} \mathbf{w}_{ir} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i^2} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} + \frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i} \frac{\partial}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \right) \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \mathbf{w}_{ir} \mathbf{w}_{is}, \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \tau_R \partial \tau_S} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{z}_{iS} \right) \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_S} \mathbf{z}_{iR} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \delta_i^2} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} + \frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \delta_i} \frac{\partial}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \right) \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{z}_{iR} \mathbf{z}_{iS} \quad e \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \alpha^2}.\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} = - \frac{\ddot{d}_1(\psi_i)}{\dot{d}_1(\psi_i)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} = - \frac{\ddot{d}_2(\delta_i)}{\dot{d}_2(\delta_i)^2}.$$

Portanto, as expressões seriam como segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \psi_i^2} &= [(E_i + (\alpha - 1)F_i)(Q'(\psi_i)^2)\delta_i - B_i Q''(\psi_i)] \delta_i, \\ \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \delta_i^2} &= - \frac{1}{\delta_i^2} + (E_i + (\alpha - 1)F_i)(Q(y_i) - Q(\psi_i))^2 \quad e \quad e \\ \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha^2} &= - \frac{1}{\alpha^2} + B_i x''_{0,5}(\alpha) + \left[(E_i + (\alpha - 1)F_i) x'_{0,5}(\alpha) + \frac{\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))} \right] x'_{0,5}(\alpha),\end{aligned}$$

em que

$$E_i = \frac{\phi''(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)) - (\phi'(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)))^2}{(\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)))^2},$$

$$F_i = \frac{\phi'(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)) - (\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)))^2}{(\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)))^2} \quad e$$

$$x''_{0,5}(\alpha) = \frac{1}{\log 2} \left[\frac{(2\alpha - \log 2)\phi(0, 5^{1/\alpha}) - \phi'(0, 5^{1/\alpha})0, 5^{1/\alpha} \log 2}{\phi^2(0, 5^{1/\alpha})0, 5^{1/\alpha}} \right].$$

Adicionalmente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \beta_r \partial \tau_S} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_r} \right) \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_S} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i} \right) \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_r} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_S} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \delta_i \partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{w}_{ir} \mathbf{z}_{iS} \quad \text{para } r = 1, \dots, p \text{ e } S = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha \partial \beta_r} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ell_i(\psi_i, \delta_i, \alpha)}{\partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \frac{\partial \eta_{1i}}{\partial \beta_r} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \psi_i} \frac{d\psi_i}{d\eta_{1i}} \mathbf{w}_{ir}, \quad r = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}, \alpha)}{\partial \alpha \partial \tau_R} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_R} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \frac{\partial \eta_{2i}}{\partial \tau_R} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{d\eta_{2i}} \mathbf{z}_{iR}, \quad R = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

sendo que,

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \delta_i \partial \psi_i} = -(B_i + (E_i + (\alpha - 1)F_i)(Q(y_i) - Q(\psi_i))) Q'(\psi_i),$$

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \psi_i} = - \left(E_i + \frac{\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))} + F_i \right) Q'(\psi_i) x'_{0,5}(\alpha) \quad e$$

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\alpha, \psi_i, \delta_i)}{\partial \alpha \partial \delta_i} = \left(E_i + \frac{\phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))}{\Phi(P_i(\psi_i, \delta_i, \alpha))} + F_i \right) (Q(y_i) - Q(\psi_i)) x'_{0,5}(\alpha).$$

