Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

# Fluxo de Curvatura Média e Self-Shrinkers

**Autor:** *Mannaim Gennaro Vitti*

**Orientador:** *Alexandre Paiva Barreto*

**Curso:** Mestrado em Matemática

São Carlos, 4 de setembro de 2020.

# Fluxo de Curvatura Média e Self-Shrinkers


**Autor:** *Mannaim Gennaro Vitti*

**Orientador:** *Alexandre Paiva Barreto*


**Curso:** Mestrado em Matemática


**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática


São Carlos, 4 de setembro de 2020.

Mannaim Gennaro Vitti (Aluno)

Alexandre Paiva Barreto
(Orientador)

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Folha de Aprovação**

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Mannaim Gennaro Vitti, realizada em 12/06/2020.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto (UFSCar)

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto (UFF)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Ao bom selvagem, que em toda esquina habita.

**José**

E agora, José?
A festa acabou,
a luz apagou,
o povo sumiu,
a noite esfriou,
e agora, José?
e agora, você?
você que é sem nome,
que zomba dos outros,
você que faz versos,
que ama, protesta?
e agora, José?

Está sem mulher,
está sem discurso,
está sem carinho,
já não pode beber,
já não pode fumar,
cuspir já não pode,
a noite esfriou,
o dia não veio,
o bonde não veio,
o riso não veio,
não veio a utopia
e tudo acabou
e tudo fugiu
e tudo mofou,
e agora, José?

E agora, José?
Sua doce palavra,
seu instante de febre,
sua gula e jejum,
sua biblioteca,
sua lavra de ouro,
seu terno de vidro,
sua incoerência,
seu ódio — e agora?

Com a chave na mão
quer abrir a porta,
não existe porta;
quer morrer no mar,
mas o mar secou;
quer ir para Minas,
Minas não há mais.
José, e agora?

Se você gritasse,
se você gemesse,
se você tocasse
a valsa vienense,
se você dormisse,
se você cansasse,
se você morresse...
Mas você não morre,
você é duro, José!

Sozinho no escuro
qual bicho-do-mato,
sem teogonia,
sem parede nua
para se encostar,
sem cavalo preto
que fuja a galope,
você marcha, José!
José, para onde?

— Carlos Drummond de Andrade in José

# Agradecimentos

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento deste projeto por meio de uma bolsa de estudos concedida através do programa PICME. Agradeço aos meu pais, Moisés Jacob Vitti e Rosmeire dos Santos Vitti, por não me negarem a dúvida. As minhas irmãs, Paula e Edvânia, por não me detestarem. A minha avó Isabel, por levantar uma pena ou prédio. Agradeço ao orientador Alexandre Paiva Barreto, por me guiar nesta empreitada, pela dedicação, pela paciência e profundidade, apesar de ser vascaíno. A professora Lynnyngs, que me introduziu ao mundo da matemática. Ao professor José Ruidival, que, com suas discussões, me fez buscar clareza e objetivo, além de mostrar a beleza matemática. Ao professor Rafael Barostichi, que me guiou na transição entre graduação e pós-graduação. E claro, aos colegas de martírio.

# Resumo

O Fluxo de curvatura média é um fluxo geométrico que nada mais é do que evoluir uma hipersuperfície na direção do seu campo normal com velocidade igual a sua curvatura média em cada ponto. Uma pergunta comum, sendo o fluxo uma evolução, é se o mesmo torna-se singular (seja por perder suavidade ou mesmo por degenerar-se). Veremos que isso ocorre com certa naturalidade para este fluxo. Sendo assim, outra questão natural é o comportamento assintótico da evolução, isto é, qual é a "forma"das hipersuperfícies que compõe o fluxo quando ele está próximo de se tornar singular. Em seu artigo, de 1990, Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow, Gerhard Huisken demonstrou sua fórmula da monotonia, mais precisamente,

**Teorema 0.1** (Fórmula da monotonia de Huisken)**.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média, $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau > 0$. Então:*

$$\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}} d\mu_t = -\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}} \left(H + \frac{\langle x-x_0, N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t,$$

*para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$.*

A partir dessa fórmula, Huisken , sob certas hipóteses, concluiu que os Self-Shrinkers, isto é, hipersuperfícies que satisfazem a equação

$$H + \langle \cdot, N\rangle = 0,$$

para todos seus pontos, em que $H$ é a curvatura média e $N$ é o campo normal, são as que modelam o comportamento assintótico do fluxo. Nessa dissertação serão abordados todas estas questões, além da existência e unicidade para o Fluxo de curvatura média como também classificaremos os Self-Shrinkers mergulhados em $\mathbb{R}^3$ que possuem norma da Segunda forma fundamental constante.

# Sumário

**Introdução** **xiii**

**1 Preliminares** **1**

1.1 Notação . . . 1

1.2 Operadores diferenciais em variedades Riemannianas . . . 2

1.3 Tensores em variedades Riemannianas . . . 8

1.4 Imersões isométricas no espaço Euclidiano . . . 10

**2 Fluxo de curvatura média** **25**

2.1 Invariância geométrica por perturbações tangentes . . . 26

2.2 Teorema de existência e unicidade . . . 34

**3 A Segunda forma fundamental e soluções máximas** **39**

3.1 Princípio do máximo . . . 39

3.2 Princípio da comparação . . . 45

3.3 Equações de evolução do Fluxo de curvatura média . . . 49

3.4 Solução maximal . . . 55

**4 Análise de singularidades do tipo I** **63**

4.1 Fórmula da monotonia de Huisken . . . 64

4.2 Fluxo de curvatura média redimensionado . . . 72

4.3 Self-Shrinkers . . . 79

**5 Operador Ornstein–Uhlenbeck e aplicações** **87**

5.1 O operador $\mathcal{L}$ . . . 87

5.2 Teoremas de classificação de Self-Shrinkers . . . 96

# Introdução

O Fluxo de curvatura média aparece na literatura, por volta dos anos 50, na modelagem de fronteiras de grãos que se formam durante a cristalização em processos de fundição. Posteriormente, um fluxo análogo a esse foi empregado na Teoria da relatividade geral por Huisken e Ilmanen na demonstração da desigualdade de Penrose. Mais recentemente fluxos geométricos têm sido empregados no estudo de Buracos negros. Esses fluxos geométricos são estudados no campo da Análise Geométrica, área na qual estamos nos introduzindo por meio desta dissertação. O Fluxo de curvatura média é um fluxo geométrico que nada mais é do que evoluir uma hipersuperfície na direção do seu campo normal com velocidade igual a sua curvatura média em cada ponto. Veremos que tal fluxo torna-se singular com certa frequência e estudaremos o comportamento assintótico do mesmo.

O primeiro capítulo será dedicado a uma pequena revisão sobre imersões isométricas no espaço Euclidiano e a definição dos Operadores diferenciais clássicos, porém em variedades Riemannianas. No segundo capítulo definimos o Fluxo de curvatura média, mostramos que o mesmo é invariante por perturbações tangentes e garantimos a existência e unicidade dele para pequenos intervalos de tempo. No terceiro capítulo demonstramos uma ferramenta, o Princípio do máximo, que nos servirá para concluir que o fluxo, de uma hipersuperfície compacta, tornar-se singular depende do crescimento, durante a evolução, da Norma da segunda forma fundamental. O quarto capítulo será dedicado a demonstração da Fórmula da monotonia de Huisken e a partir dela a obtenção do resultado que garante que as hipersuperfícies que modelam o comportamento assintótico do Fluxo de curvatura média são os Self-Shrinkers. Por fim, o último capítulo é dedicado a aplicar o Operador Ornstein–Uhlenbeck para classificar os Self-Shrinkers mergulhados em $\mathbb{R}^3$ que possuem norma da Segunda forma fundamental constante.

# Capítulo 1

# Preliminares

Assumiremos, por parte do leitor, o conhecimento da teoria de variedades Riemannianas. Para um melhor entendimento indicamos a referência [6], em especial o capítulo de Imersões isométricas. Antes de iniciarmos nossa discussão vamos definir os Operadores diferenciais em variedades Riemannianas, que são generalizações dos Operadores clássicos no espaço Euclidiano. Também vamos enunciar alguns resultados e definições clássicas de Geometria diferencial, em especial, a Segunda forma fundamental, a Curvatura média, a Norma da segunda forma fundamental e a Medida induzida, que são grandezas definidas de uma forma mais geral, mas como iremos lidar somente com hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ iremos defini-las por meio de suas cartas. Sendo assim, este capítulo tem caráter de revisão.

## 1.1 Notação

Separamos essa seção para facilitar a consulta da notação que utilizaremos ao longo do texto. Os principais objetos que iremos tratar ao longo dessa dissertação são hipersuperfícies $n$-dimensionais, completas e imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, pares da forma $(M, \varphi)$ em que $M$ é variedade, suave e sem bordo, de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão suave. Por simplicidade iremos nos referir a tais entes $M$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente por variedade de dimensão $n$ e hipersuperfície (Observe que $M$ recebe naturalmente uma métrica Riemanniana via pullback, e consequentemente, $\varphi$ se torna imersão isométrica). Também iremos preservar, em certo sentido, a noção de derivada direcional. Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Dado $p \in M$ e $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset T_pM$ sabemos que existe aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e difeomorfismo (sobre a imagem) $\psi : U \to M$ tal que $\psi(0) = p$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0) = E_i$. Denotaremos $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) := d\varphi_p(E_i)$. Observe que ,

$$d\varphi_p(E_i) = d\varphi_p\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi \circ \psi\right)(0),$$

ou seja, preservamos a noção de derivar em uma direção. De maneira análoga, dada função $f : M \to \mathbb{R}$ denotaremos $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := df_p(E_i)$ e como feito anteriormente,

$$df_p(E_i) = df_p\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \circ \psi\right)(0).$$

Por fim, em vista do discutido acima, reservaremos a notação $\{E_1, \ldots, E_n\}$ para representar os campos coordenados $\{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}\}$ obtidos em uma carta.

## 1.2 Operadores diferenciais em variedades Riemannianas

Definiremos, de maneira sucinta, alguns operadores que serão importantes no decorrer do texto. Também demonstraremos algumas de suas propriedades. Ao final da seção enunciaremos, sem demonstração, duas formas do Teorema da Divergência.

**Definição 1.1** (Gradiente)**.** Seja $M$ uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave. Denominamos gradiente da função $f$, e denotamos por $\nabla f$, o único campo de vetores em $M$ definido por:

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = df_p(v),$$

para todo $p \in M$ e para todo $v \in T_pM$.

**Proposição 1.2.** *Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves. Valem:*

*i)* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

*ii)* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

*iii)* $\nabla(h \circ f)(p) = h'\big(f(p)\big)\nabla f(p)$, *para todo* $p \in M$.

**Demonstração:**

*i)* Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}\langle \nabla\big(f + g\big)(p), v\rangle &= d\big(f + g\big)_p(v)\\ &= df_p(v) + dg_p(v)\\ &= \langle \nabla f(p), v\rangle + \langle \nabla g(p), v\rangle\\ &= \langle \nabla f(p) + \nabla g(p), v\rangle.\end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo $v \in T_pM$, temos:

$$\nabla\big(f + g\big)(p) = \nabla f(p) + \nabla g(p),$$

para todo $p \in M$.

*ii)* Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}\langle \nabla\big(fg\big)(p), v\rangle &= d\big(fg)_p(v)\\ &= g(p)df_p(v) + f(p)dg_p(v)\\ &= g(p)\langle \nabla f(p), v\rangle + f(p)\langle \nabla g(p), v\rangle\\ &= \langle g(p)\nabla f(p) + f(p)\nabla g(p), v\rangle.\end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo $v \in T_pM$, temos:

$$\nabla\big(fg\big)(p) = g(p)\nabla f(p) + f(p)\nabla g(p),$$

para todo $p \in M$.

*iii)* Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}\langle \nabla(h\circ f)(p), v\rangle &= d\big(h\circ f\big)_p\\ &= h'\big(f(p)\big)df_p(v)\\ &= h'\big(f(p)\big)\langle \nabla f(p), v\rangle\\ &= \langle h'\big(f(p)\big)\nabla f(p), v\rangle.\end{aligned}$$

Como a igualdade acima vale para todo $v \in T_pM$, temos:

$$\nabla(h\circ f)(p) = h'\big(f(p)\big)\nabla f(p),$$

para todo $p \in M$. □

**Definição 1.3** (Hessiana)**.** Seja $M$ uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave. A Hessiana de $f$ em $p \in M$ é a aplicação $\mathrm{Hess} f_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$\mathrm{Hess} f_p(v,w) = \langle \nabla_v \nabla f, w\rangle,$$

para todo $v, w \in T_pM$.

**Definição 1.4** (Laplaciano)**.** Seja M variedade Riemanniana de dimensão $n$ e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave. O Laplaciano de $f$ é a aplicação $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f_p(e_i, e_i),$$

para todo $p \in M$, em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_pM$.

**Observação:** É possível mostrar que $\Delta f(p)$ não depende da base ortonormal, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, escolhida de $T_pM$.

O próximo Lema nos auxiliará na conversão de objetos definidos por meio de bases ortonormais de $T_pM$ (como o Laplaciano) em bases dadas pelos campos coordenados (nas cartas).

**Lema 1.5.** *Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$. Considere $p \in M$ e $c = (c_{ij})$ a matriz de mudança de uma base ortonormal, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, de $T_pM$ para a base obtida pelos campos coordenados, ou seja,*

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} E_k(p), \quad \text{para todo} \;\; i = 1, \ldots, n.$$

*Então $cc^t = g^{-1}$, em que $c^t$ é a transposta de $c$ e $g^{-1}$ é a inversa da matriz dos coeficientes da métrica em $p \in M$.*

**Demonstração:** Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Temos,

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} E_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} E_l \right\rangle (p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj} \langle E_k, E_l \rangle (p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj} g_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} (gc)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c^t_{ik} (gc)_{kj} \\
&= (c^t gc)_{ij},
\end{aligned}$$

ou seja, $I = c^t gc$. Consequentemente $c = cc^t gc$ e portanto $cc^t = g^{-1}$. □

**Proposição 1.6.** *Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$ e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave. O Laplaciano de $f$ em $p \in M$ é dado por:*

$$\Delta f(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \mathrm{Hess} f_p(E_i, E_j)(p),$$

*em que $(g^{ij}(p))$ é a inversa da matriz dos coeficientes da métrica em $p \in M$.*

**Demonstração:** Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_pM$. Fazendo a mudança de base como no Lema 1.5, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f_p(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\sum_{k=1}^{n} c_{ki} E_k} \nabla f, \sum_{l=1}^{n} c_{li} E_l \right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \nabla_{E_k} \nabla f, \sum_{l=1}^{n} c_{li} E_l \right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} \langle \nabla_{E_k} \nabla f, E_l \rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} \mathrm{Hess} f_p(E_k, E_l)(p),
\end{aligned}
$$

e tomando $\mathrm{Hess} f_p(E_k, E_l)(p) = b_{kl}$,

$$
\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} b_{kl} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} (bc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c^t_{ik} (bc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c^t bc)_{ii} \\
&= tr(c^t bc),
\end{aligned}
$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes vale que $tr(c^t bc) = tr(c^t cb)$, concluindo pelo Lema 1.5,

$$
\Delta f(p) = tr(g^{-1} b) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) b_{ij}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \mathrm{Hess} f_p(E_i, E_j)(p).
$$

□

**Definição 1.7** (Divergência)**.** Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$ e $X$ campo de vetores suave em $M$. A Divergência de $X$ é a aplicação $\mathrm{div}\big(X\big) : M \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$
\mathrm{div}\big(X\big)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle (p),
$$

para todo $p \in M$, em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_pM$.

**Observação:** É possível demonstrar que $\mathrm{div}\big(X\big)(p)$ não depende da base ortonormal, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, escolhida de $T_pM$.

**Proposição 1.8.** *Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$ e $X$ Campo de vetores suave em $M$. A Divergência de $X$ é dada por:*

$$\operatorname{div}\big(X\big)(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \left\langle \nabla_{E_i} X, E_j \right\rangle (p),$$

*em que $(g^{ij}(p))$ é a inversa da matriz dos coeficientes da métrica em $p \in M$.*

**Demonstração:** Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_pM$. Fazendo a mudança de base como no Lema 1.5,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(X\big)(p) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} X, e_i \right\rangle (p) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\sum_{k=1}^{n} c_{ki} E_k} X, \sum_{l=1}^{n} c_{li} E_l \right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \nabla_{E_k} X, \sum_{l=1}^{n} c_{li} E_l \right\rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} \left\langle \nabla_{E_k} X, E_l \right\rangle (p),
\end{aligned}$$

e tomando $\left\langle \nabla_{E_k} X, E_l \right\rangle (p) = b_{kl}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(X\big)(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} b_{kl} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} (bc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c^t_{ik} (bc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c^t bc)_{ii} \\
&= tr(c^t bc),
\end{aligned}$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes vale que $tr(c^t bc) = tr(c^t cb)$, concluindo pelo Lema 1.5,

$$\operatorname{div}\big(X\big)(p) = tr(g^{-1} b) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) b_{ij}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \left\langle \nabla_{E_i} X, E_j \right\rangle (p).$$

$\square$

**Proposição 1.9.** *Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$, $X, Y$ Campos de vetores suaves em $M$ e $f : M \to \mathbb{R}$ função suave. Então:*

*i)* $\operatorname{div}\big(X + Y\big) = \operatorname{div}\big(X\big) + \operatorname{div}\big(Y\big)$.

*ii)* $\operatorname{div}\big(fX\big) = f\operatorname{div}\big(X\big) + \langle \nabla f, X \rangle$.

**Demonstração:**

*i)* Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(X+Y\big)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(X+Y), e_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle(p) \\
&= \operatorname{div}\big(X\big)(p) + \operatorname{div}\big(Y\big)(p).
\end{aligned}$$

*ii)* Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\big(fX\big)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\big(fX\big), e_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f\nabla_{e_i} X + e_i\big(f\big)X, e_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f\nabla_{e_i} X, e_i\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i\big(f\big)X, e_i\rangle(p) \\
&= f(p)\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n} e_i\big(f\big)(p)\langle X, e_i\rangle(p) \\
&= f(p)\operatorname{div}\big(X\big)(p) + \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i\big(f\big)e_i\rangle(p) \\
&= f(p)\operatorname{div}\big(X\big)(p) + \Big\langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i\big(f\big)e_i\Big\rangle(p) \\
&= f(p)\operatorname{div}\big(X\big)(p) + \big\langle X, \nabla f\big\rangle(p).
\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.10.** *Seja $M$ variedade Riemanniana de dimensão $n$ e $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções suaves. Valem:*

*i)* $\Delta f = \operatorname{div}\big(\nabla f\big)$.

*ii)* $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

**Demonstração:**

*i)* Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess} f_p(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle(p) \\
&= \operatorname{div}\big(\nabla f\big)(p).
\end{aligned}$$

*ii*) Usando *i*) e a Proposição 1.9, obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \mathrm{div}\Big(\nabla(fg)\Big)\\ &= \mathrm{div}\Big(g\nabla f + f\nabla g\Big)\\ &= \mathrm{div}\Big(g\nabla f\Big) + \mathrm{div}\Big(f\nabla g\Big)\\ &= g\mathrm{div}\Big(\nabla f\Big) + \langle\nabla g, \nabla f\rangle + f\mathrm{div}\Big(\nabla g\Big) + \langle\nabla f, \nabla g\rangle\\ &= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

□

Os próximos Teoremas da divergência serão apenas enunciados. Para uma demonstração ver a referência [8].

**Proposição 1.11** (Teorema da Divergência)**.** *Seja $X$ um campo vetorial definido em um domínio compacto $M$ com fronteira regular suave. Então:*

$$\int_M \mathrm{div}\big(X\big) = \int_{\partial M} \big\langle X, \nu\big\rangle, \tag{1.1}$$

*em que $\nu$ é campo unitário normal a $\partial M$ apontando para fora de $M$.*

**Proposição 1.12** (Teorema da Divergência sem fronteira)**.** *Seja $X$ um campo vetorial definido em um domínio compacto $M$ tal que $\partial M = \emptyset$. Então:*

$$\int_M \mathrm{div}\big(X\big) = 0. \tag{1.2}$$

## 1.3 Tensores em variedades Riemannianas

Tensores são entidades definidas de forma mais geral que a apresentada aqui. Para nossos propósitos é suficiente considerar um Tensor como uma aplicação multilinear que associa vetores tangentes a $M$ a escalares em $\mathbb{R}$. Mais precisamente:

**Definição 1.13.** Um Tensor de ordem $r$ é uma aplicação $\mathcal{T} : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r \text{ fatores}} \to \mathbb{R}$ multilinear sobre $\mathbb{R}$.

Definimos um Campo de tensores como uma aplicação multilinear que associa Campos (suaves) em $M$ a funções de $C^\infty(M)$. Mais precisamente:

**Definição 1.14** (Campo de tensores)**.** Um Campo de tensores de ordem $r$ é uma aplicação $T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \to C^\infty(M)$ multilinear sobre $C^\infty(M)$.

**Observação:** É possível mostrar que um Campo de tensores $T$ de ordem $r$ é uma noção pontual, isto é, dado $p \in M$ e Campos $X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$ tais que $X_i(p) = Y_i(p)$ para todo $i = 1, \ldots, r$, temos $T(X_1, \ldots, X_r)(p) = T(Y_1, \ldots, Y_r)(p)$. Em outras palavras, o valor do Campo de tensores $T$ em $p$ depende somente dos Campos $X_i$ em $p$. Mais ainda, definindo $\mathcal{T}_p(z_1, \ldots, z_r) = T(Z_1, \ldots, Z_r)(p)$ em que $Z_i(p) = z_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$ obtemos que $\mathcal{T}_p$ é Tensor de ordem $r$. Resumindo, dado um Campo de Tensores $T$ associa-se a ele uma família de tensores $\{\mathcal{T}_p\}_{p \in M}$. Reciprocamente, dada uma família de tensores $\{\mathcal{T}_p\}_{p \in M}$ associa-se de maneira natural um Campo de tensores $T$.
Ao longo do texto, quando não houver confusão, iremos nos referir a um Campo de tensores simplesmente por Tensor.

**Definição 1.15.** Seja $T$ um Campo de tensores de ordem $r$. A norma de $T$ é a função $|T| : M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$|T|^2(p) = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \mathcal{T}_p(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})^2,$$

em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de $T_pM$ e $\mathcal{T}_p$ é como na observação anterior.
**Observação:** É possível mostrar que $|T|^2(p)$ não depende da base ortonormal, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, escolhida.

O (Campo de tensores) Tensor Curvatura $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$, em que,

$$R(X, Y, Z, W) = \left\langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W \right\rangle,$$

e o (Campo de tensores) Tensor Métrico $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$, em que,

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle,$$

são dois exemplos clássicos de Campos de tensores. Como os Campos de tensores são entidades definidas a partir de Campos (suaves) em $M$, podemos definir uma derivada fazendo uso da conexão existente em tal variedade Riemanniana.

**Definição 1.16** (Derivada tensorial)**.** Seja $T$ um Campo de tensores de ordem $r$. A derivada covariante $\nabla T$ de $T$ é um Campo de tensores de ordem $r + 1$ definido por,

$$\nabla T(X_1, \ldots, X_r, W) = W(T(X_1, \ldots, X_r)) - T(\nabla_W X_1, \ldots, X_r) - \cdots - T(X_1, \ldots, \nabla_W X_r),$$

em que $X_1, \ldots, X_r, W \in \mathcal{X}(M)$. Iremos nos referir a derivada covariante de $T$ na direção de $W$, denotado por $\nabla_W T$, como o Campo de tensores de ordem $r$ definido por,

$$\nabla_W T(X_1, \ldots, X_r) = \nabla T(X_1, \ldots, X_r, W).$$

## 1.4 Imersões isométricas no espaço Euclidiano

Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Consideremos $\overline{\nabla}$ a derivação (conexão) em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $N$ o campo normal a hipersuperfície. Dado $p \in M$ e Campos $X$ e $Y$ em uma vizinhança de $p$, é possível mostrar (ver a referência [6]) que a aplicação $B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T$, em que $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são, respectivamente, extensões de $d\varphi\,(X)$ e $d\varphi\,(Y)$, é bem definida, bilinear e simétrica (sobre $C^\infty(M)$) e que $B(X,Y)(p)$ depende somente de $X(p)$ e $Y(p)$. Sendo assim, definimos a Segunda forma fundamental como a aplicação $\mathcal{A}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definida por,

$$\mathcal{A}_p(x,y) = \langle B(X,Y), N\rangle\,(p),$$

em que $X$ e $Y$ são, respectivamente, extensões locais de $x$ e $y$. Como a aplicação $B$ é bilinear e simétrica, a Segunda forma fundamental é uma forma bilinear simétrica, e consequentemente, existe matriz autoadjunta $\mathcal{S}$ (aplicação de Weingarten ou Operador forma) de maneira que,

$$\mathcal{A}_p(x,y) = \langle \mathcal{S}x, y\rangle \quad \text{para todo} \quad x, y \in T_pM. \tag{1.3}$$

Podemos caracterizar a aplicação de Weingarten da seguinte maneira,

$$\mathcal{S}x = -d\varphi_p^{-1}\left[\left(\overline{\nabla}_{d\varphi_p(x)}N\right)\right] \quad \text{para todo} \quad x \in T_pM, \tag{1.4}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{S}x, y\rangle &= \langle B(X,Y), N\rangle\,(p) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T, N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\right\rangle(p) \\
&= \left(\overline{X}\left\langle \overline{Y}, N\right\rangle\right)(p) - \left\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}N\right\rangle(p) \\
&= -\left\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{N}\right\rangle(p) \\
&= -\left\langle d\varphi_p(y), \overline{\nabla}_{d\varphi_p(x)}N\right\rangle, \\
&= \left\langle y, -d\varphi_p^{-1}\left[\left(\overline{\nabla}_{d\varphi_p(x)}N\right)\right]\right\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in T_pM$.

**Observação:**Note que $\overline{\nabla}_{d\varphi_p(x)}N \in d\varphi_p\,(T_pM)$ pois $0 = d\varphi_p(x)\,\langle N, N\rangle = 2\left\langle \overline{\nabla}_{d\varphi_p(x)}N, N\right\rangle$.

Como estamos no caso de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos determinar os coeficientes da matriz $\mathcal{S}$ de maneira simples. No decorrer do texto iremos nos referir a Segunda forma fundamental pela sua expressão dada em cartas , isto é, pela seguinte Proposição,

**Proposição 1.17** (Segunda forma fundamental)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. A Segunda forma fundamental é a forma bilinear simétrica definida pela matriz $h = (h_{ij})$ em que para todo $p \in M$,*

$$h_{ij}(p) = \left\langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right\rangle, \tag{1.5}$$

*onde $N(p)$ é o vetor normal.*

**Demonstração:**
Sejam $\{E_1, \ldots, E_n\}$ os campos coordenados em uma vizinhança de $p \in M$. Seja $h = (h_{ij})$ a matriz da forma bilinear dada na base $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ de $T_pM$. Temos:

$$\begin{aligned} h_{ij}(p) &= \mathcal{A}_p(E_i, E_j) \\ &= \langle B(E_i, E_j), N \rangle (p) \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{E_i}} \overline{E_j} - \left( \overline{\nabla}_{\overline{E_i}} \overline{E_j} \right)^T, N \right\rangle (p) \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{E_i}} \overline{E_j}, N \right\rangle (p) \\ &= \overline{E_i} \left\langle \overline{E_j}, N \right\rangle (p) - \left\langle \overline{E_j}, \overline{\nabla}_{\overline{E_i}} N \right\rangle (p) \\ &= - \left\langle \overline{E_j}, \overline{\nabla}_{\overline{E_i}} N \right\rangle (p) \\ &= - \left\langle d\varphi_p(E_j), \frac{\partial N}{\partial x_i}(p) \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p), \frac{\partial N}{\partial x_i}(p) \right\rangle, \end{aligned} \tag{1.6}$$

mas como $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p), N(p) \right\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, N \right\rangle \right) (p) \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j}(p), N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p), \frac{\partial N}{\partial x_i}(p) \right\rangle \end{aligned}$$

isto é,

$$- \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p), \frac{\partial N}{\partial x_i}(p) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j}(p), N(p) \right\rangle. \tag{1.7}$$

Então substituindo (1.7) em (1.6) concluímos a demonstração. □

Também podemos reescrever a relação entre a conexão (derivação) ambiente, isto é, em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a a conexão induzida em $M$. Em outras palavras ela nos diz que (cometendo abuso de notação) $\nabla = \overline{\nabla} - B$, isto é, a conexão induzida em $M$ é dada pela derivação ambiente projetada sobre o espaço tangente. Também é possível reescrever a derivação do campo normal em todas as direções. Sumarizamos isso na seguinte Proposição:

**Proposição 1.18** (Relações de Gauss-Weingarten)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então valem:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i x_j}(p) &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)\frac{\partial\varphi}{x_k}(p) + h_{ij}(p)N(p) \\ \frac{\partial N}{\partial x_j}(p) &= -\sum_{l,s=1}^{n} h_{jl}(p)g^{ls}(p)\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}(p) \end{aligned} \tag{1.8}$$

*para todo $p \in M$.*

**Demonstração:**
Sejam $\{E_1, \ldots, E_n\}$ os campos coordenados em uma vizinhança de $p \in M$. Sabemos que,

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)E_k(p),$$

logo,

$$\begin{aligned} d\varphi_p\left(\nabla_{E_i}E_j(p)\right) &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)d\varphi_p\left(E_k(p)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(p). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\varphi_p\left(\nabla_{E_i}E_j(p)\right) &= \left(\overline{\nabla}_{\overline{E_i}}\overline{E_j}\right)^T(p) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{E_i}}\overline{E_j}(p) + \left(\overline{\nabla}_{\overline{E_i}}\overline{E_j}\right)^T(p) - \overline{\nabla}_{\overline{E_i}}\overline{E_j}(p) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{E_i}}\overline{E_j}(p) - B(E_i, E_j)(p) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{E_i(p)}}\overline{E_j} - B(E_i, E_j)(p) \\ &= \overline{\nabla}_{d\varphi_p(E_i(p))}\overline{E_j} - B(E_i, E_j)(p) \\ &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(p)}\overline{E_j} - B(E_i, E_j)(p) \\ &= d\overline{E_j}_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(p)\right) - B(E_i, E_j)(p) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(p) - B(E_i, E_j)(p), \end{aligned}$$

que comparando com a equação em (1.9),

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(p) - B(E_i, E_j)(p). \tag{1.10}$$

Como $B(E_i, E_j)(p)$ é paralelo a $N(p)$, temos

$$B(E_i, E_j)(p) = \langle B(E_i, E_j), N\rangle(p)N(p) = \mathcal{A}_p(E_i, E_j)N(p) = h_{ij}(p)N(p),$$

consequentemente de (1.10),

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(p) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - h_{ij}(p) N(p). \tag{1.11}$$

Para obtermos a segunda equação do enunciado observemos que $\langle N, N \rangle (p) = 1$, logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle N, N \rangle \right)(p) = 2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j}, N \right\rangle (p),$$

e assim a derivada direcional do campo normal é tangente, isto é,

$$\frac{\partial N}{\partial x_j}(p) = \sum_{s=1}^{n} \beta_s(p) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}(p), \tag{1.12}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle (p) &= \sum_{s=1}^{n} \beta_s(p) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle (p) \\ &= \sum_{s=1}^{n} \beta_s(p) g_{si}(p), \end{aligned}$$

e usando a matriz inversa $(g^{ij})(p)$, obtemos

$$\beta_s(p) = \sum_{l=1}^{n} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right\rangle (p) g^{ls}(p). \tag{1.13}$$

Substituindo (1.13) em (1.12),

$$\frac{\partial N}{\partial x_j}(p) = \sum_{l,s=1}^{n} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right\rangle (p) g^{ls}(p) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}(p),$$

e procedendo como em (1.6) obtemos $\displaystyle\frac{\partial N}{\partial x_j}(p) = -\sum_{l,s=1}^{n} h_{jl}(p) g^{ls}(p) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}(p).$ $\square$

A Curvatura média em $p \in M$ é, geralmente, definida como o traço da aplicação $\mathcal{S}$, isto é, $H(p) = tr(\mathcal{S})$. Pelo Lema 1.5, podemos calcular a Curvatura média dada em cartas da seguinte maneira:

**Proposição 1.19** (Curvatura média)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Para todo $p \in M$, a Curvatura média é dada por:*

$$H(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) h_{ij}(p), \tag{1.14}$$

*em que $\big(g^{ij}(p)\big)$ é a inversa da matriz dos coeficientes da métrica $\big(g_{ij}(p)\big)$.*

**Demonstração:** Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. A Curvatura média em cada $p \in M$ é definida como o traço da matriz $\mathcal{S}$ dada em (1.3). Dada uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_pM$ é fácil de calcular a matriz $\mathcal{S}$ e consequentemente seu traço, isto é, $tr(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{S}e_i, e_i \rangle$. Seja $h = (h_{ij})$ como em (1.6). Fazendo a mudança de base como no Lema 1.5,

$$\begin{aligned}
H(p) = tr(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathcal{S}e_i, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} \langle \mathcal{S}E_k, E_l \rangle (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} \mathcal{A}_p (E_k(p), E_l(p)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{li} h_{kl}(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} (hc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c^t_{ik} (hc)_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c^t hc)_{ii} \\
&= tr(c^t hc),
\end{aligned}$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes vale que $tr(c^t hc) = tr(cc^t h)$, concluindo pelo Lema 1.5

$$H(p) = tr(g^{-1}h) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) h_{ij}(p).$$

$\square$

**Observação:** Apesar da definição da Curvatura média, $H$ é nada mais do que a soma dos autovalores da matriz $\mathcal{S}$ associada a Segunda forma fundamental, isto é, $H(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Observemos que a Segunda forma fundamental foi definida em $T_pM$ mas podemos definir um Campo de tensores de ordem 2 associado a ela. Definiremos o (Campo de tensores) Tensor Segunda forma fundamental $A$ como sendo uma aplicação bilinear (sobre $C^\infty(M)$) que leva campos em $M$ em funções suaves em $M$. Mais precisamente $A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ em que,

$$A(X, Y) = \langle B(X, Y), N \rangle .$$

A relação entre o (Campo de tensores) Tensor Segunda forma fundamental e a Segunda forma fundamental fica estabelecida observando que $A(X,Y)(p) = \langle B(X,Y), N\rangle(p) = \mathcal{A}_p(x,y)$. De maneira análoga a feita para a Curvatura média podemos calcular a norma do (Campo de tensores) Tensor Segunda forma fundamental dado em cartas da seguinte maneira:

**Proposição 1.20** (Norma da Segunda forma fundamental)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Para todo $p \in M$ a norma da (Tensor) Segunda forma fundamental é dada por:*

$$|A|^2(p) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}(p)g^{kl}(p)h_{ik}(p)h_{jl}(p). \tag{1.15}$$

**Demonstração:**

Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. Pela definição de norma de Campo de tensores e fazendo a mudança de base como no Lema 1.5,

$$\begin{aligned}
|A|^2(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i,e_j)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\mathcal{A}_p\left(E_k(p),E_l(p)\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj}h_{kl}(p)\right]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ki}(hc)_{kj}\right]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} c^t_{ik}(hc)_{kj}\right]^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (c^thc)_{ij}(c^thc)_{ij} \\
&= tr\left(c^thc(c^thc)^t\right) \\
&= tr\left(c^thc(hc)^t(c^t)^t\right) \\
&= tr\left(c^thcc^th^tc\right),
\end{aligned}$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes concluímos pelo Lema 1.5

$$|A|^2(p) = tr\left(g^{-1}hg^{-1}h\right) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}(p)g^{kl}(p)h_{ik}(p)h_{jl}(p).$$

□

**Observação:** Apesar da definição da norma da Segunda forma fundamental, $|A|^2$ é nada mais do que a soma dos quadrados dos autovalores da matriz $\mathcal{S}$ associada a Segunda forma fundamental, isto é, $|A|^2(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

**Proposição 1.21.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então,*

$$|\mathcal{A}_p(x,y)| \leq n^2 |A|(p)||x|| \cdot ||y||,$$

*para todo $p \in M$ e todo $x, y \in T_pM$, em que $\mathcal{A}_p$ é dado em* (1.3).

**Demonstração:** Sejam $x, y \in T_pM$. Temos,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_p(x,y)| &= \left|\mathcal{A}_p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)\right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_i|\,|\beta_j|\,|\mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} ||x|| \cdot ||y||\,|\mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)| \\
&= ||x|| \cdot ||y|| \sum_{i,j=1}^{n} |\mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)| \\
&= ||x|| \cdot ||y|| \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\mathcal{A}_p\left(e_i, e_j\right)^2} \\
&\leq ||x|| \cdot ||y|| \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{|A|^2(p)} \\
&= ||x|| \cdot ||y|| \sum_{i,j=1}^{n} |A|(p) \\
&= ||x|| \cdot ||y|| n^2 |A|(p).
\end{aligned}$$

□

A derivada covariante do (Campo de tensores) Tensor Segunda forma fundamental é a aplicação trilinear $\nabla A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ em que,

$$\nabla A(X,Y,Z) = Z(A(X,Y)) - A(\nabla_Z X, Y) - A(X, \nabla_Z Y).$$

Como $A$ é simétrico $\nabla A$ é simétrica nas duas primeiras entradas. Fazendo uso da Equação de Codazzi (Proposição 3.4 de [6]) obtemos que $\nabla A$ será simétrica em suas três entradas. Mais precisamente obtemos a seguinte Proposição,

**Proposição 1.22** (Equações de Codazzi)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ valem:*

$$\nabla A(Y, X, Z) = \nabla A(X, Y, Z) = \nabla A(Z, Y, X). \tag{1.16}$$

**Demonstração:**
Pela Equação de Codazzi (Proposição 3.4 de [6]) temos,

$$\tilde{R}(\overline{Z}, \overline{X}, \overline{Y}, N) = \nabla A(Z, Y, X) - \nabla A(X, Y, Z), \tag{1.17}$$

em que $\tilde{R}$ é o Tensor Curvatura em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $N$ é o Campo normal a $\varphi(M)$. Como $\tilde{R} \equiv 0$ obtemos,

$$\nabla A(X, Y, Z) = \nabla A(Z, Y, X). \tag{1.18}$$

Como $\nabla A$ é simétrico nas duas primeiras entradas obtemos que $\nabla A$ é simétrico em suas três entradas. $\square$

**Observação:** Normalmente utilizam-se as seguinte notações,

$$\begin{aligned}
\nabla A(E_i, E_j, E_k) &= \nabla_{E_k} A(E_i, E_j), \\
\nabla A(E_i, E_j, E_k) &= (\nabla_{E_k} A)_{ij}\,, \\
\nabla A(E_i, E_j, E_k) &= \nabla_k A_{ij}, \\
\nabla A(E_i, E_j, E_k) &= (\nabla_k h)_{ij}\,, \\
\nabla A(E_i, E_j, E_k) &= \nabla_k h_{ij}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

As Equações de Codazzi garantem que os índices $i, j, k$ podem ser permutados livremente na derivação do Tensor Segunda forma fundamental.

**Proposição 1.23.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então*

$$|\nabla |A|(p)|^2 \leq |\nabla A|^2(p)$$

*para todo $p \in M$.*

**Demonstração:** Sejam $p \in M$ e $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ campos ortonormais ao redor de $p$ tais que $\nabla_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j(p) = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Denotaremos $A_{ij} = A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ e $A_{ijk} = \nabla A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k)$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$. Temos,

$$\tilde{e}_k \left(|A|^2\right)(p) = \tilde{e}_k \left( \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 \right)(p) = 2 \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(p) A_{ijk}(p),$$

logo, por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\tilde{e}_k\left(|A|^2\right)(p) &\leq 2\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2(p)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ijk}^2(p)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2|A|(p)|\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ijk}^2(p)\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned}\left|\nabla|A|^2(p)\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left\langle\nabla|A|^2,\tilde{e}_k\right\rangle^2(p)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\tilde{e}_k\left(|A|^2\right)(p)\right]^2\\ &\leq 4|A|^2(p)|\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}^2(p)\\ &= 4|A|^2(p)|\nabla A|^2(p).\end{aligned}\tag{1.20}$$

Por outro lado,

$$\nabla|A|^2(p) = 2|A|(p)\nabla|A|(p),$$

então

$$\left|\nabla|A|^2(p)\right|^2 = 4|A|^2(p)\left|\nabla|A|(p)\right|^2.\tag{1.21}$$

Assim, de (1.20) e (1.21), concluímos

$$|\nabla|A|(p)|^2 \leq |\nabla A|^2(p).$$

Como podemos repetir os passos para todo $p \in M$ terminamos a demonstração. □

**Lema 1.24.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então vale:*

$$tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p) = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{n} g^{kl}(p)h_{ik}(p)g^{rj}(p)h_{jl}(p)g^{is}(p)h_{sr}(p),$$

*para todo $p \in M$, em que $\mathcal{S}$ é dado em* (1.3).

**Demonstração:** Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$ e defina $\mathcal{A}_p(e_i,e_j) = a_{ij}$ para todo $i,j = 1,\ldots,n$. Em uma base ortonormal sabemos que é fácil calcular o traço de $\mathcal{S}^3$, isto é, $tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\mathcal{S}^3 e_i, e_i\right\rangle$. Temos,

$$tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\mathcal{S}^3 e_i, e_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\mathcal{S}^2\left(\mathcal{S}e_i\right), e_i\right\rangle,$$

mas,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}^2\left(\mathcal{S}e_i\right), e_i\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}^2\left(\sum_{j=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}e_i, e_j\right\rangle e_j\right), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}^2\left(\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}_p(e_i, e_j)e_j\right), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}^2\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\right), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left\langle \mathcal{S}^2e_j, e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left\langle \mathcal{S}\left(\mathcal{S}e_j\right), e_i\right\rangle \qquad (1.22)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left\langle \mathcal{S}\left(\sum_{k=1}^{n}\left\langle \mathcal{S}e_j, e_k\right\rangle e_k\right), e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\left\langle \mathcal{S}e_k, e_i\right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}a_{ij}a_{jk}\mathcal{A}_p(e_k, e_i) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}a_{ij}a_{jk}a_{ki}.
\end{aligned}
$$

Porém, fazendo novamente a mudança de base como no Lema 1.5,

$$
\begin{aligned}
a_{ij} =& \mathcal{A}_p(e_i, e_j) \\
=& \mathcal{A}_p\left(\sum_{r=1}^{n}c_{ri}E_r(p), \sum_{l=1}^{n}c_{lj}E_l(p)\right) \\
=& \sum_{r=1}^{n}c_{ri}\sum_{l=1}^{n}c_{lj}\mathcal{A}_p\left(E_r(p), E_l(p)\right) \\
=& \sum_{r=1}^{n}c_{ri}\sum_{l=1}^{n}c_{lj}h_{rl}(p) \\
=& \sum_{r=1}^{n}c_{ri}(hc)_{rj} \\
=& \sum_{r=1}^{n}c^t_{ir}(hc)_{rj} \\
=& \sum_{r,l=1}^{n}(c^thc)_{ij},
\end{aligned}
$$

e substituindo em (1.22),

$$
\begin{aligned}
tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathcal{S}^2\left(\mathcal{S}e_i\right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} (c^t hc)_{ij}(c^t hc)_{jk}(c^t hc)_{ki} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (c^t hc)_{ij} \sum_{k=1}^{n} (c^t hc)_{jk}(c^t hc)_{ki} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (c^t hc)_{ij}(c^t hcc^t hc)_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c^t hc)_{ij}(c^t hcc^t hc)_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c^t hcc^t hcc^t hc)_{ii} \\
&= tr(c^t hcc^t hcc^t hc),
\end{aligned}
$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes concluímos pelo Lema 1.5

$$
\begin{aligned}
tr(c^t hcc^t hcc^t hc) &= tr(cc^t hcc^t hcc^t h) \\
&= tr(g^{-1}hg^{-1}hg^{-1}h) \\
&= \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{n} g^{kl}(p)h_{ik}(p)g^{rj}(p)h_{jl}(p)g^{is}(p)h_{sr}(p).
\end{aligned}
$$

□

**Proposição 1.25** (Fórmula de Simons)**.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e também $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então dado $p \in M$ valem:*

*i)* $\Delta|A|^2(p) = 2|\nabla A|^2(p) - 2|A|^4(p) + 2\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i, e_j)\mathrm{Hess}H_p(e_i, e_j) + 2H(p)tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p),$
*em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de $T_pM$.*

*ii)* $\Delta|A|^2(p) = \left[2|\nabla A|^2 - 2|A|^4 + 2\sum_{i,j,s,r=1}^{n} g^{is}g^{rj}h_{sj}HessH(E_i, E_r) + 2Htr\left(\mathcal{S}^3\right)\right](p).$

**Demonstração:**

*i)* Sejam $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ campos ortonormais em uma vizinhança de $p \in M$ tais que $\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j(p) = 0$ e $\tilde{e}_i(p) = e_i$ para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Temos, pela definição de Laplaciano

$$\Delta|A|^2(p) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nabla_{\tilde{e}_k}\nabla|A|^2, \tilde{e}_k \right\rangle(p),$$

mas,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\langle \nabla_{\tilde{e}_k} \nabla |A|^2, \tilde{e}_k \right\rangle (p) &= \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( \left\langle \nabla |A|^2, \tilde{e}_k \right\rangle \right) (p) - \left\langle \nabla |A|^2, \nabla_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_i \right\rangle (p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( \left\langle \nabla |A|^2, \tilde{e}_k \right\rangle \right) (p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( \tilde{e}_k \left( |A|^2 \right) \right) (p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( \tilde{e}_k \left( \sum_{i,j=1}^{n} A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)^2 \right) \right) (p) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( \tilde{e}_k \left( A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)^2 \right) \right) (p) \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \tilde{e}_k \left( A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \tilde{e}_k \left( A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \right) \right) (p) \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[ \left( \tilde{e}_k \left( A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \right) \right)^2 (p) + A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)(p) \tilde{e}_k \left( \tilde{e}_k \left( A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \right) \right) (p) \right].
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Defina $A_{ij}(p) = A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)(p)$, $A_{ijk}(p) = \tilde{e}_k \left( A_{ij} \right) (p)$ e $A_{ijkk}(p) = \tilde{e}_k \left( A_{ijk} \right) (p)$ e observe que são funções bem definidas visto que são entidades tensoriais, isto é, seus valores em $p$ só dependem dos valores do campo em $p$, portanto

$$
\Delta |A|^2 = 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}^2 + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij} A_{ijkk}. \tag{1.24}
$$

Por outro lado,

$$
\nabla A \left( \tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k \right) (p) = A_{ijk}(p),
$$

portanto,

$$
|\nabla A|^2(p) = \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk}^2(p)
$$

e consequentemente de (1.24),

$$
\Delta |A|^2 = 2 |\nabla A|^2 + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij} A_{ijkk}. \tag{1.25}
$$

Como $\nabla A$ é um Campo de tensores faz sentido tomar sua derivada $\nabla \left( \nabla A \right)$, a qual denotaremos $\nabla^2 A$. Temos,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_k)(p) = {} & \tilde{e}_k \left( \nabla A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k) \right) (p) - \nabla A(\nabla_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k)(p) \\
& - \nabla A(\tilde{e}_i, \nabla_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_j, \tilde{e}_k)(p) - \nabla A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \nabla_{\tilde{e}_k} \tilde{e}_k)(p),
\end{aligned}
$$

logo,

$$\nabla^2 A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_k)(p) = \tilde{e}_k \left(\nabla A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k)\right)(p) = \tilde{e}_k \left(A_{ijk}\right)(p) = A_{ijkk}(p). \tag{1.26}$$

Por outro lado, como $\nabla A$ é simetrico em suas três entradas, $\nabla^2 A$ herdará a simetria em suas três primeiras entradas e assim,

$$\begin{aligned}
A_{ijkk}(p) - A_{kkji}(p) &= \nabla^2 A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_k)(p) - \nabla^2 A(\tilde{e}_k, \tilde{e}_k, \tilde{e}_j, \tilde{e}_i)(p) \\
&= \nabla^2 A(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_i, \tilde{e}_k)(p) - \nabla^2 A(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_k, \tilde{e}_i)(p) \\
&= A\left(\nabla_{\tilde{e}_i}\nabla_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_j - \nabla_{\tilde{e}_k}\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j, \tilde{e}_k\right)(p) + A\left(\nabla_{\tilde{e}_i}\nabla_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k - \nabla_{\tilde{e}_k}\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_k, \tilde{e}_j\right)(p) \\
&= A\left(\sum_{l=1}^{n} \langle \nabla_{\tilde{e}_i}\nabla_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_j - \nabla_{\tilde{e}_k}\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j, \tilde{e}_l\rangle \tilde{e}_l, \tilde{e}_k\right)(p) \\
&+ A\left(\sum_{l=1}^{n} \langle \nabla_{\tilde{e}_i}\nabla_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_k - \nabla_{\tilde{e}_k}\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_k, \tilde{e}_l\rangle \tilde{e}_l, \tilde{e}_j\right)(p) \\
&= \sum_{l=1}^{n} R\left(\tilde{e}_k, \tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_l\right)(p) A\left(\tilde{e}_l, \tilde{e}_k\right)(p) + \sum_{l=1}^{n} R\left(\tilde{e}_k, \tilde{e}_i, \tilde{e}_k, \tilde{e}_l\right)(p) A\left(\tilde{e}_l, \tilde{e}_j\right)(p).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Fazendo como na demonstração das Equações de Codazzi, temos pela Equação de Gauss (Proposição 3.1 de [6])

$$\begin{aligned}
R\left(\tilde{e}_k, \tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_l\right)(p) &= \langle B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_l), B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_j)\rangle(p) - \langle B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l), B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\rangle(p) \\
&= \langle \langle B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_l), N\rangle N, \langle B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_j), N\rangle N\rangle(p) - \langle \langle B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l), N\rangle N, \langle B(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), N\rangle N\rangle(p) \\
&= \langle A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_l)N, A(\tilde{e}_k, \tilde{e}_j)N\rangle(p) - \langle A(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l)N, A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)N\rangle(p) \\
&= A_{il}(p)A_{kj}(p) - A_{kl}(p)A_{ij}(p),
\end{aligned}$$

que substituindo em (1.27),

$$\begin{aligned}
A_{ijkk}(p) = A_{kkji}(p) &+ \sum_{l=1}^{n} A_{il}(p)A_{kj}(p)A_{lk}(p) - \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(p)A_{ij}(p)A_{lk}(p) \\
&+ \sum_{l=1}^{n} A_{il}(p)A_{kk}(p)A_{lj}(p) - \sum_{l=1}^{n} A_{kl}(p)A_{ik}(p)A_{lj}(p),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij}(p)A_{ijkk}(p) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij}(p)A_{kkji}(p) + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{il}(p)A_{kj}(p)A_{lk}(p) \\
&- \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{kl}(p)A_{ij}(p)A_{lk}(p) + \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{il}(p)A_{kk}(p)A_{lj}(p) \\
&- \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{kl}(p)A_{ik}(p)A_{lj}(p)
\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij}(p)A_{ijkk}(p) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ij}(p)A_{kkji}(p) - \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{kl}(p)A_{ij}(p)A_{lk}(p) \\
&+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{il}(p)A_{kk}(p)A_{lj}(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(p)\sum_{k=1}^{n} A_{kkji}(p) - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2(p)\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}^2(p) \\
&+ \sum_{k=1}^{n} A_{kk}(p)\sum_{i,j,l=1}^{n} A_{ij}(p)A_{il}(p)A_{lj}(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} A(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j)(p)\tilde{e}_i\left(\tilde{e}_j\left(\sum_{k=1}^{n} A_{kk}\right)\right)(p) - |A|^2(p)|A|^2(p) \\
&+ tr(\mathcal{S})(p)tr(\mathcal{S}^3)(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i,e_j)\tilde{e}_i\left(\tilde{e}_j\left(H\right)\right)(p) - |A|^4(p) + H(p)tr(\mathcal{S}^3)(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i,e_j)\tilde{e}_i\left\langle \tilde{e}_j,\nabla H\right\rangle(p) - |A|^4(p) + H(p)tr(\mathcal{S}^3)(p) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i,e_j)\left\langle \tilde{e}_j,\nabla_{\tilde{e}_i}\nabla H\right\rangle(p) - |A|^4(p) + H(p)tr(\mathcal{S}^3)(p),
\end{aligned}
$$

e de (1.25) terminamos.

*ii)* Denotaremos, dada uma matriz $P$, $(P)_{rs}$ como o coeficiente $rs$ da matriz $P$. Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. Fazendo a mudança de base como no Lema 1.5 temos,

$$\mathcal{A}_p(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{lj}h_{kl} = (c^t hc)_{ij},$$

e semelhantemente, tomando $b_{kl} = \mathrm{Hess}H_p(E_k,E_l)$,

$$\mathrm{Hess}H_p(e_i,e_j) = (c^t bc)_{ij}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i,e_j)\mathrm{Hess}H_p(e_i,e_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} (c^t hc)_{ij}(c^t bc)_{ij} \\
&= tr\left(c^t hc(c^t bc)^t\right) \\
&= tr\left(c^t hc(bc)^t(c^t)^t\right) \\
&= tr\left(c^t hcc^t b^t c\right),
\end{aligned}
$$

e como a função traço comuta o produto de matrizes concluímos pelo Lema 1.5,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{A}_p(e_i, e_j)\mathrm{Hess}H_p(e_i, e_j) &= tr\left(c^t hcc^t b^t c\right) \\
&= tr\left(cc^t hcc^t b^t\right) \\
&= tr\left(g^{-1} h g^{-1} b^t\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (g^{-1}h)_{ij}(g^{-1}b^t)_{ij} \\
&= \sum_{i,j,s,r=1}^{n} g^{is}(p)h_{sj}(p)g^{rj}(p)\mathrm{Hess}H_p(E_i, E_r),
\end{aligned}
$$

e usando o item $i)$ concluímos a demonstração.

□

**Definição 1.26** (Medida da hipersuperfície)**.** Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. A medida induzida será dada por $\mu = \sqrt{\det(g_{ij})}L^n$, em que $L^n$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ (Ver a referência [8]).

**Lema 1.27.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então*

$$H^2(p) \leq n|A|^2(p),$$

*para todo $p \in M$.*

**Demonstração:**
Para todo $p \in M$ sabemos que existe uma "boa"base do espaço tangente de maneira que podemos escrever $H(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p)$ e $|A|^2(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(p)$, em que $\lambda_i(p)$ são as curvaturas principais determinadas nessa base. Sabemos que vale $\langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) para quaisquer vetores $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Tomando $x = \big(\lambda_1(p), \lambda_2(p), \ldots, \lambda_n(p)\big)$ e $y = \big(1, 1, \ldots, 1\big)$ obtemos:

$$H^2(p) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p)\Big)^2 = \langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(p)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} 1\Big) = n|A|^2(p),$$

para todo $p \in M$. □

# Capítulo 2

# Fluxo de curvatura média

Neste capítulo, nos ocuparemos em definir o Fluxo de curvatura média e algumas de suas propriedades. Vamos fornecer alguns exemplos, mostraremos que o Fluxo de curvatura média é invariante por perturbações tangentes, iremos recaracterizar o Fluxo de curvatura média e por fim garantiremos a existência e unicidade do mesmo para pequenos intervalos de tempo.

**Definição 2.1.** (Reparametrização estacionária) Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e também $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Se $\psi : M \times [0,T) \to M$ é família de reparametrizações (difeomorfismos) de $M$ dizemos que $\psi$ é estacionária se $\psi_0 = Id_M$.

Agora podemos iniciar nosso tópico de interesse. O Fluxo de curvatura média é uma família de hipersuperfícies de tal forma que dada uma hipersuperficie, dessa família, seus pontos se movem na direção normal com velocidade escalar igual a curvatura média em tal hipersupercie. Mais precisamente:

**Definição 2.2** (Fluxo de curvatura média)**.** Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e também $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície. O Fluxo de curvatura média de $\varphi_0$ é uma família suave de hipersuperfícies $\varphi_t : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ para $t \in [0,T)$ de maneira que definindo $\varphi(p,t) := \varphi_t(p)$ a aplicação $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma solução suave do seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(p,t) = & H(p,t)N(p,t) \\ \varphi(p,0) = & \varphi_0(p), \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $H(p,t)$ e $N(p,t)$ são respectivamente a curvatura média e o vetor normal unitário a hipersuperfície $\varphi_t$ no ponto $p \in M$.

**Observação:** Mesmo que o vetor normal unitário é definido a menos de sinal, o campo $H(p,t)N(p,t)$ é independente de tal escolha.

## 2.1 Invariância geométrica por perturbações tangentes

Uma primeira observação que podemos fazer a respeito do Fluxo de curvatura média é que o mesmo é invariante por perturbações tangentes, isto é, se em cada ponto de uma hipersuperfície da evolução somarmos velocidades tangentes o fluxo pode ser reparametrizado localmente de forma a satisfazer a equação (2.1). Mais precisamente:

**Proposição 2.3** (Invariância geométrica por perturbações tangentes). *Seja $M$ variedade de dimensão $n$. Seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma família suave de imersões que satisfaz o sistema de equações diferenciais parciais,*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t) = & H(p,t)N(p,t) + X(p,t) \\ \varphi(p,0) = & \varphi_0(p), \end{cases}$$

*em que $X$ é um campo de vetores suaves e tangentes a $\varphi_t(M)$ em $p$, para todo $t \in M$. Então existe, localmente, para todo par $(p,t) \in M \times [0,T)$ uma família suave de reparametrizações das aplicações $\varphi_t$ satisfazendo o sistema (2.1).*
*No caso em que $M$ é compacto tal família pode ser escolhida unicamente por reparametrizações globais de forma a ser estacionária, e reciprocamente , se uma família suave de hipersuperfícies $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser globalmente reparametrizada para $t \geq 0$ de maneira que satisfaça o sistema (2.1), então a aplicação $\varphi$ satisfaz o sistema acima para algum campo de vetores suaves e tangentes a $\varphi_t(M)$ em $p$, para todo $t \in M$. Em particular, se essa família de reparametrizações, $\psi_t$, for estacionária, então tal família é única.*

**Demonstração:** Faremos a demonstração para o caso em que $M$ é compacta.
Pela hipótese de tangência, o campo vetorial em M, dependente do tempo, definido por $Y(q,t) = -[d\varphi_t]^{-1}(X(q,t))$ é globalmente definido e suave. Seja $\psi : M \times [0,T) \to M$ uma família suave de difeomorfismos de $M$ tal que,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(p,t) = & Y(\psi(p,t),t) \\ \psi(p,0) = p. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias na variedade compacta $M$, essa família de difeomorfismos existe é unica e suave. Considerando as reparametrizações $\tilde{\varphi}(p,t) = \varphi(\psi(p,t),t)$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p,t) =& \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\psi(p,t),t) + d\varphi_t(\psi(p,t)) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}(p,t) \right) \\ =& H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) + X(\psi(p,t),t) + d\varphi_t(\psi(p,t)) \left( Y(\psi(p,t),t) \right) \\ =& H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) + X(\psi(p,t),t) + d\varphi_t(\psi(p,t) \left( -[d\varphi_t]^{-1}(X(\psi(p,t),t)) \right) \\ =& H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) + X(\psi(p,t),t) - X(\psi(p,t),t) \\ =& H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) = \tilde{H}(p,t)\tilde{N}(p,t). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\tilde{\varphi}$ satisfaz o sistema (2.1) e $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0$. Reciprocamente, se existe uma família de reparametrizações $\psi(p,t)$ tal que $\tilde{\varphi}(p,t) = \varphi(\psi(p,t),t)$ satisfaz o sistema (2.1), então,

$$\begin{aligned} H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) &= \tilde{H}(p,t)\tilde{N}(p,t) \\ &= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p,t) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\psi(p,t),t) + d\varphi_t(\psi(p,t))\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(p,t)\right), \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\psi(p,t),t) = H(\psi(p,t),t)N(\psi(p,t),t) - d\varphi_t(\psi(p,t))\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(p,t)\right),$$

ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(q,t) = H(q,t)N(q,t) - d\varphi_t(q)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}(q),t)\right).$$

Defina $X(q,t) = -d\varphi_t(q)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}(q),t)\right)$. Em particular, se $\psi(p,0) = p$ para todo $p \in M$, então

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(p,t) = & -[d\varphi_t]^{-1}(X(\psi(p,t),t)) \\ \psi(p,0) = p, \end{cases}$$

e daí, concluímos novamente pelo Teorema de existência e unicidade que tal família é única. Assim finalizamos nossa demonstração. $\square$

Analisando a Proposição 2.3 podemos, localmente, negligenciar velocidades tangenciais e assim concluir que, localmente, o fluxo se caracteriza exclusivamente pela velocidade na direção normal. Mais precisamente, podemos enunciar o seguinte Corolário,

**Corolário 2.4.** *Se uma família suave de hipersuperfícies $\varphi_t$ é tal que*

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, N \right\rangle (p,t) = H(p,t), \tag{2.3}$$

*então ela pode ser localmente reparametrizada de forma a satisfazer o sistema* (2.1). *Se $M$ é compacta, então podemos fazer isso de maneira única por reparametrizações globais de maneira estacionária.*

**Observação:** Em vista do Corolário 2.4, continuaremos a nos referir a família suave de imersões $\varphi_t : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ por Fluxo de curvatura média se localmente em todo ponto $(p,t) \in M \times [0,T)$ existir uma família de reparametrizações $\psi_t$ tal que $\varphi$ satisfaça o sistema (2.1).

Agora faremos alguns exemplos de Fluxo de curvatura média.

**Exemplo 2.1** Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima. Por definição de hipersuperfície mínima $H \equiv 0$ e assim o fluxo $\varphi(p,t) = \varphi_0(p)$ satisfaz o sistema (2.1).

**Exemplo 2.2** (Fluxo da esfera) Seja $\iota : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ a imersão usual de $S^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. A "intuição"nos diz que uma evolução pela curvatura média da esfera de raio $R_0$ seria contrai-lá à origem de maneira uniforme. De fato, seja $\varphi(p,t) = R(t)\iota(p)$, com $R(0) = R_0$. Encontremos a condição para que $\varphi$ seja fluxo de curvatura média. Temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t) = \frac{dR}{dt}(t)\iota(p) \quad \text{e} \quad H(p,t)N(p,t) = -\frac{n}{R(t)}\iota(p).$$

Logo,

$$\frac{dR}{dt}(t) = -\frac{n}{R(t)}.$$

Resolvendo essa equação diferencial ordinária obtemos que $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2nt}$. Portanto $\varphi(p,t) = \sqrt{R_0^2 - 2nt}\iota(p)$ é Fluxo pela curvatura média e está de acordo com a nossa "intuição". Posteriormente veremos que essa é a única evolução da esfera de raio $R_0$, pois demonstraremos o Teorema de existência e unicidade para este fluxo. Observemos também que essa evolução tem tempo maximal, isto é, para $T = \frac{R_0^2}{2n}$ a evolução se contraiu à origem e portanto se tornou singular. Sua norma da Segunda forma fundamental é,

$$|A|^2(p,t) = \sum_1^n \frac{1}{R(t)^2} = \frac{n}{R(t)^2} = \frac{n}{R_0^2 - 2nt} = \frac{1}{2(\frac{R_0^2}{2n} - t)} = \frac{1}{2(T-t)}.$$

Logo $|A|^2(p,t) = \frac{1}{2(T-t)}$ e assim $|A|(p,t) \to \infty$ quando $t \to T$.

**Exemplo 2.3** (Fluxo do cilindro) Seja $\tilde{\varphi} : S^m \times \mathbb{R}^{n-m} \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definido por $\tilde{\varphi}(p,v,t) = (\varphi(p,t), v)$, em que $\varphi$ é definido como no Exemplo 2.2 (para dimensão $m$). Encontremos a condição para que $\tilde{\varphi}$ seja Fluxo de curvatura média. Temos:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p,v,t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), 0\right) = \left(\frac{dR}{dt}(t)\iota(p), 0\right),$$

e,

$$\tilde{H}(p,v,t)\tilde{N}(p,v,t) = H(p,t)\big(N(p,t),0\big) = \left(-\frac{m}{R(t)}\iota(p), 0\right).$$

Logo,

$$\frac{dR}{dt}(t) = -\frac{m}{R(t)}.$$

Portanto, como calculado no Exemplo 2.2, obtemos que $R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2mt}$, $T_{max} = \frac{R_0^2}{2m}$, $|A|^2(p,t) = \frac{1}{2(T_{max}-t)}$ e em $T_{max}$ a evolução se contraiu ao subespaço $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-m}$. Como no exemplo anterior, pelo Teorema de existência e unicidade comprovaremos que esse fluxo, de uma hipersuperfície inicial sendo um cilindro de raio $R_0$, é único.

**Exemplo 2.4** O Exemplo 2.3 pode ser generalizado, isto é, seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{m+1}$ Fluxo de curvatura média. Então a aplicação $\tilde{\varphi} : M \times \mathbb{R}^{n-m} \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$, definida por $\tilde{\varphi}(p,v,t) = (\varphi(p,t), v)$, é Fluxo de curvatura média. De fato:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(p,v,t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), 0\right) = \big(H(p,t)N(p,t), 0\big) = H(p,t)\big(N(p,t),0\big) = \tilde{H}(p,v,t)\tilde{N}(p,v,t).$$

**Exemplo 2.5** (Self-Shrinker) Seja $M$ variedade $n$ dimensional e $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície tal que,

$$H(p) = -\langle \varphi(p), N(p) \rangle,$$

para todo $p \in M$. Tais hipersuperfícies chamamos de Self-Shrinker. Se definirmos $\varphi(p,t) = \sqrt{1-2t}\varphi_0(p)$ para $t < \frac{1}{2}$ e $\varphi(p,0) = \varphi_0(p)$ concluímos que $\varphi$ é localmente Fluxo de curvatura média. De fato,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t) = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}}\varphi_0(p).$$

Como $\varphi$ é homotetia, vale que

$$N(p,t) = N(p,0) \quad \text{para todo} \quad t < \frac{1}{2}$$
$$H(p,t) = \frac{H(p,0)}{\sqrt{1-2t}} \quad \text{para todo} \quad t < \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, N \right\rangle (p,t) = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \langle \varphi_0(p), N(p,0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} H(p,0) = H(p,t).$$

**Exemplo 2.6** Os únicos cilindros generalizados, $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para todo $k = 0, \ldots, n$, de $\mathbb{R}^{n+1}$ que são Self-Shrinkers são, a menos de rotação, os centrados na origem e com $r = \sqrt{k}$. De fato, seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um Self-Shrinker tal que $\varphi(M)$ é um cilindro generalizado.
Para $k = 0$, isto é, um plano, tome $\varphi(\tilde{p})$ o ponto mais próximo da origem. Neste caso,

$$\varphi(\tilde{p}) = RN(\tilde{p}) \quad \text{para algum} \quad R \geq 0,$$

pois $\varphi(\tilde{p})$ é ortogonal ao plano $\varphi(M)$. Por ser Self-Shrinker temos,

$$0 = H(\tilde{p}) = -\langle \varphi(\tilde{p}), N(\tilde{p}) \rangle = -R.$$

Logo $\varphi(\tilde{p}) = 0$ e portanto o plano $\varphi(M)$ passa pela origem. Consequentemente $\varphi(M)$ é a menos de rotação o plano $\mathbb{R}^n$.

Para $k = n$, isto é, uma esfera de raio $r$, seja $\tilde{p}$ seu centro. Temos,

$$\begin{aligned}
-\frac{n}{r} &= H(p) \\
&= -\langle \varphi(p), N(p) \rangle \\
&= -\langle \varphi(p) - \tilde{p}, N(p) \rangle - \langle \tilde{p}, N(p) \rangle \\
&= -\left\langle \varphi(p) - \tilde{p}, \frac{\varphi(p) - \tilde{p}}{|\varphi(p) - \tilde{p}|} \right\rangle - \langle \tilde{p}, N(p) \rangle \\
&= -|\varphi(p) - \tilde{p}| - \langle \tilde{p}, N(p) \rangle \\
&= -r - \langle \tilde{p}, N(p) \rangle ,
\end{aligned}$$

logo,

$$\langle \tilde{p}, N(p) \rangle = \frac{n - r^2}{r}. \tag{2.4}$$

De (2.4) obtemos que $\langle \tilde{p}, N(p) \rangle$ é constante, portanto $\tilde{p} = 0$ (caso contrário não seria constante). Assim a esfera $\varphi(M)$ é centrada na origem. Novamente de (2.4) temos $0 = \dfrac{n - r^2}{r}$ e então $r = \sqrt{n}$. Consequentemente $\varphi(M)$ é a menos de rotação a esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$. Por fim, o caso para $0 < k < n$ , isto é, os cilindros, é análogo ao caso para $k = n$.

Os Exemplos 2.2 e 2.3 acima, isto é, a contração de esferas e cilindros, são casos particulares de fluxos que se contraem por homotetia. A Proposição seguinte engloba estes casos.

**Proposição 2.5.** *Seja $M$ variedade de dimensão $n$ e $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície que satisfaz, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e algum $\lambda > 0$,*

$$H(p) + \lambda \langle \varphi_0(p) - x_0, N_0(p) \rangle = 0.$$

*Então existe localmente Fluxo de curvatura média $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ que se contrai por homotetia de maneira que $\varphi(p, 0) = \varphi_0(p)$. Reciprocamente, se $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ é localmente Fluxo de curvatura média que se contrai por homotetia ao redor de algum $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ em um intervalo de tempo maximal então $H \equiv 0$ ou,*

$$H(p, t) + \frac{\langle \varphi(p, t) - x_0, N(p, t) \rangle}{2(T - t)} = 0$$

*para todo $p \in M$ e todo $t \in [0, T)$.*

**Demonstração:** Suponha que existem $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\lambda > 0$ tal que,

$$H(p) + \lambda \langle \varphi_0(p) - x_0, N_0(p) \rangle = 0.$$

Defina, o fluxo por homotetia, $\varphi(p, t) = x_0 + \sqrt{1 - 2\lambda t}\big(\varphi_0(p) - x_0\big)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle =& \left\langle (\varphi_0(p) - x_0) \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-2\lambda t}\right), N(p,t) \right\rangle \\
=& \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-2\lambda t}\right) \langle \varphi_0(p) - x_0, N(p,t) \rangle \\
=& \frac{-2\lambda}{2\sqrt{1-2\lambda t}} \langle \varphi_0(p) - x_0, N(p,t) \rangle \\
=& -\lambda \frac{\langle \varphi_0(p) - x_0, N(p,t) \rangle}{\sqrt{1-2\lambda t}}.
\end{aligned}$$

Como o fluxo é por homotetia temos $N(p,t) = N(p,0)$ e $H(p,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda t}} H(p,0)$. Logo,

$$-\lambda \frac{\langle \varphi_0(p) - x_0, N(p,t) \rangle}{\sqrt{1-2\lambda t}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda t}} H(p,0) = H(p,t).$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = H(p,t).$$

Pelo Corolário 2.4, $\varphi$ é localmente Fluxo de curvatura média de $\varphi_0$.

Reciprocamente, se $\varphi$ é localmente Fluxo de curvatura média que se contrai por homotetia ao redor de algum $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ em um intervalo de tempo maximal, isto é,

$$\varphi(p,t) = x_0 + f(t)\left(\varphi_0(p) - x_0\right)$$

para alguma função suave $f : [0,T) \to \mathbb{R}$, com $f(0) = 1$, $\lim_{t\to T} f(t) = 0$ e $f'(t) \leq 0$, e também $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = H(p,t)$, então:

$$\begin{aligned}
H(p,0) &= f(t) H(p,t) \\
&= f(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle \\
&= f(t) f'(t) \langle \varphi_0(p) - x_0, N(p,t) \rangle \\
&= f'(t) \langle f(t)\left(\varphi_0(p) - x_0\right), N(p,t) \rangle \\
&= f'(t) \langle \varphi(p,t) - x_0, N(p,t) \rangle.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Se $H(\tilde{p},0) \neq 0$ para algum $\tilde{p} \in M$ (caso contrário $H \equiv 0$ e concluímos a afirmação), e como $N(p,t) = N(p,0)$ para todo $p \in M$, obtemos da primeira e terceira linha de (2.5)

$$\begin{aligned}
f(t) f'(t) &= \frac{H(\tilde{p},0)}{\langle \varphi_0(\tilde{p}) - x_0, N(\tilde{p},t) \rangle} \\
&= \frac{H(\tilde{p},0)}{\langle \varphi_0(\tilde{p}) - x_0, N(\tilde{p},0) \rangle},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T)$. Tome $C = \frac{H(\tilde{\tilde{p}},0)}{\langle \varphi_0(\tilde{p}) - x_0, N(p,0) \rangle}$. Portanto $f(t)f'(t) = C$ e consequentemente, resolvendo essa EDO pelo método de variáveis separáveis, $f(t) = \sqrt{2Ct+1}$.

Como $\lim_{t\to T} f(t) = 0$, temos

$$0 = \lim_{t\to T} f(t) = \lim_{t\to T} \sqrt{2Ct+1} = \sqrt{2CT+1},$$

ou seja,

$$2C = -\frac{1}{T}. \tag{2.6}$$

Assim, $f(t) = \sqrt{1 - \frac{t}{T}}$. Pela primeira e pela última linha de (2.5) obtemos,

$$f(t)H(p,t) = f'(t) \langle \varphi(p,t) - x_0, N(p,t) \rangle ,$$

isto é,

$$\sqrt{1 - \frac{t}{T}} H(p,t) = -\frac{1}{T} \frac{\langle \varphi(p,t) - x_0, N(p,t) \rangle}{2\sqrt{1-\frac{t}{T}}},$$

e então,

$$\frac{2}{T}(T-t)H(p,t) + \frac{1}{T} \langle \varphi(p,t) - x_0, N(p,t) \rangle = 0,$$

por fim,

$$H(p,t) + \frac{\langle \varphi(p,t) - x_0, N(p,t) \rangle}{2(T-t)} = 0,$$

e assim concluímos a demonstração. □

Um outro exemplo de família de hipersuperfícies que evolui pela curvatura média são os fluxos gerados por translação, isto é, hipersuperfícies que durante a evolução não mudam sua "forma", apenas se movem em uma direção fixada com velocidade constante. Mais precisamente,

**Proposição 2.6.** *Sejam $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície tal que*

$$H(p) = \langle v, N(p) \rangle , \tag{2.7}$$

*para todo $p \in M$. Então existe localmente Fluxo de curvatura média $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ por translação com velocidade constante $v$ tal que $\varphi(p,0) = \varphi_0(p)$.*
*Reciprocamente, se $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ é localmente Fluxo de curvatura média por translação então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, que é a velocidade da evolução, de maneira que $H(p,t) = \langle v, N(p,t) \rangle$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$.*

**Demonstração:** Seja $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que,

$$H(p) = \langle v, N(p) \rangle \quad \text{para todo } \; p \in M.$$

Defina, o fluxo por translação, $\varphi(p,t) = \varphi_0(p) + tv$. Assim, como $N(p,t) = N(p,0)$ e $H(p,t) = H(p,0)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = \langle v, N(p,t) \rangle = \langle v, N(p,0) \rangle = H(p,0) = H(p,t).$$

Portanto $\varphi$ é localmente Fluxo de curvatura média por translação com velocidade constante $v$ e tal que $\varphi(p,0) = \varphi_0(p)$.
Reciprocamente, se $\varphi$ é localmente Fluxo de curvatura média por translação, isto é,

$$\varphi(p,t) = \varphi_0(p) + w(t),$$

para alguma função suave $w : [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ com $w(0) = 0$ e $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = H(p,t)$, então

$$H(p,0) = H(p,t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = \langle w'(t), N(p,t) \rangle .$$

Assim, como $H(p,t)$ é constante em $t$,

$$0 = \frac{\partial H}{\partial t}(p,t) = \frac{\partial}{\partial t} \langle w'(t), N(p,t) \rangle = \langle w''(t), N(p,t) \rangle + \left\langle w'(t), \frac{\partial N}{\partial t}(p,t) \right\rangle ,$$

portanto, como $N(p,t)$ é constante em $t$, temos

$$0 = \langle w''(t), N(p,0) \rangle , \tag{2.8}$$

para todo $p \in M$. Seja $S = \{N(p,0) | p \in M\}$. Suponha que o gerado $[S] = \mathbb{R}^{n+1}$. Então de (2.8) temos $w''(t) = 0$ para todo $t \in [0,T)$, portanto $w'(t)$ é constante. Tome $v = w'(t)$ e a afirmação está provada. Se o gerado $[S] \neq \mathbb{R}^{n+1}$, tome $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ subespaço, não nulo, de maior dimensão, que é comum a todos os espaços tangentes $T_{\varphi_0(p)}\varphi_0(M)$ (tal subespaço $L$ existe pois caso contrário $[S] = \mathbb{R}^{n+1}$). Decomponha $w(t) = l(t) + z(t)$, em que $l(t) \in L$ e $z(t) \in L^{\perp}$ para todo $t \in [0,T)$. Como $l(t) \in L$ para todo $t \in [0,T)$ obtemos que $l'(t) \in L$ para todo $t \in [0,T)$, pois caso contrário existiria $\tilde{t} \notin [0,T)$ tal que $l'(t) \notin L$ implicando que $l(t) \notin L$ para todo $t$ em uma vizinhança de $\tilde{t}$. De mesma maneira concluímos que $l''(t) \in L$ para todo $t \in [0,T)$ e $z'(t), z''(t) \in L^{\perp}$ para todo $t \in [0,T)$. Portanto, como anteriormente,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w''(t), N(p,0) \rangle \\ &= \langle l''(t) + z''(t), N(p,0) \rangle \\ &= \langle l''(t), N(p,0) \rangle + \langle z''(t), N(p,0) \rangle . \end{aligned}$$

Como $L \perp [S]$ então $\langle l''(t), N(p,0) \rangle = 0$. Assim,

$$0 = \langle z''(t), N(p,0) \rangle, \quad \text{para todo} \ \ p \in M. \tag{2.9}$$

Como $L^{\perp} \subset [S]$, de (2.9) obtemos que $z''(t) = 0$ para todo $t \in [0,T)$. Assim, $z'(t)$ é constante. Definindo $v = z'(t)$ concluímos,

$$H(p,t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = \langle w'(t), N(p,t)\rangle = \langle l'(t) + v, N(p,t)\rangle = \langle v, N(p,t)\rangle \,.$$

Como $0 = w(0) = l(0) + z(0)$ e $l(0) \perp z(0)$ obtemos $0 = l(0) = z(0)$. Pela invariância do Fluxo por perturbações tangentes sabemos que o fluxo $\tilde{\varphi}(p,t) = \varphi_0(p) + vt$ coincide com o fluxo $\varphi(p,t) = \varphi_0(p) + l(t) + vt$ (como conjuntos) pois $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = v$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = l'(t) + v$ e $l'(t) \in L \subset T_{\varphi_0(p)}\varphi_0(M)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Assim terminamos a demonstração. $\square$

## 2.2 Teorema de existência e unicidade

O Teorema a seguir irá nos garantir a existência e unicidade do Fluxo de curvatura média, para pequenos intervalos de tempo positivos, dada uma hipersuperfície compacta. A ideia da demonstração é construir uma pequena perturbação da hipersuperfície na direção do campo normal e ver quais as condições para que essa perturbação seja solução do Fluxo de curvatura média. Veremos que a condição, para essa perturbação ser solução do Fluxo de curvatura média, será que a função que determina a perturbação na direção normal seja solução de uma equação diferencial parcial do tipo parabólica, que como veremos, possui solução única.

**Teorema 2.7.** *Sejam $M$ variedade compacta de dimensão $n$ e $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então existe única solução suave do sistema:*

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(p,t) = & H(p,t)N(p,t) \\ \varphi(p,0) = & \varphi_0(p), \end{cases}$$

*para algum intervalo de tempo positivo. Mais ainda, a solução depende continuamente da imersão $\varphi_0$ em $C^\infty$.*

**Demonstração:**
No momento faremos a demonstração para o caso local, considerando $M$ aberto Riemanniano. Como estamos interessados na existência de solução suave $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ local e em vista do Corolário 2.4 consideraremos o problema abaixo,

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = & H(p,t) \\ \varphi(p,0) = & \varphi_0(p). \end{cases} \tag{2.10}$$

Consideremos a vizinhança tubular $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | d\big(z, \varphi_0(M)\big) < \varepsilon\}$ em que a aplicação $\psi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega_\varepsilon$ definida por $\psi(p,s) = \varphi_0(p) + sN_0(p)$ é um difeomorfismo. Tal vizinhança $\Omega_\varepsilon$ existe para $\varepsilon$ suficientemente pequeno.
Qualquer pequena deformação de $\varphi_0(M)$ em $\Omega_\varepsilon$ pode ser representada como gráfico de uma função $f$ definida em $\varphi_0(M)$. Reciprocamente, para qualquer função $f : M \to (-\varepsilon, \varepsilon)$, podemos associar uma hipersuperfície $M_f \subset \Omega_\varepsilon$ definida por $\varphi(p) = \varphi_0(p) + f(p)N_0(p)$.

Por outra lado, seja $f$ uma função suave, dependente do tempo, de modo que $\varphi(p,t) = \varphi_0(p) + f(p,t)N_0(p)$ satisfaça o sistema de equações diferenciais parciais em (2.10). Pela Proposição 1.18 vale, $\frac{\partial N_0}{\partial x_m}(p) = -\sum_{l,s} h_{ml}(p,0)g^{ls}(p,0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s}(p)$. Assim,

$$g_{ij}(p,t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p,t) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)N_0(p) + f(p,t)\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)N_0(p) + f(p,t)\frac{\partial N_0}{\partial x_j}(p) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)N_0(p) - f(p,t)\sum_{l,s} h_{il}(p,0)g^{ls}(p,0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)N_0(p) \right.$$
$$\left. -f(p,t)\sum_{r,k} h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}(p) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(p) \right\rangle - f(p,t)\sum_{r,k} h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)\left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}(p) \right\rangle + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)$$
$$-f(p,t)\sum_{l,s} h_{il}(p,0)g^{ls}(p,0)\left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s}(p) \right\rangle$$
$$+f^2(p,t)\sum_{l,s,r,k} h_{il}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{ls}(p,0)g^{rk}(p,0)\left\langle \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s}(p), \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_k}(p) \right\rangle$$

$$= g_{ij}(p,0) - f(p,t)\sum_{r,k} h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)g_{ik}(p,0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)$$
$$-f(p,t)\sum_{l,s} h_{il}(p,0)g^{ls}(p,0)g_{js}(p,0) + f^2(p,t)\sum_{l,s,r,k} h_{il}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{ls}(p,0)g^{rk}(p,0)g_{sk}(p,0)$$

$$= g_{ij}(p,0) - f(p,t)\sum_{r} h_{jr}(p,0)\sum_{k} g^{rk}(p,0)g_{ik}(p,0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)$$
$$-f(p,t)\sum_{l} h_{il}(p,0)\sum_{s} g^{ls}(p,0)g_{js}(p,0) + f^2(p,t)\sum_{l,r,k} h_{il}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)\sum_{s} g^{ls}(p,0)g_{sk}(p,0)$$

$$= g_{ij}(p,0) - f(p,t)\sum_{r} h_{jr}(p,0)\delta_{ri} + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)$$
$$-f(p,t)\sum_{l} h_{il}(p,0)\delta_{lj} + f^2(p,t)\sum_{l,r,k} h_{il}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)\delta_{lk}$$

$$= g_{ij}(p,0) - f(p,t)h_{ji}(p,0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)$$
$$-f(p,t)h_{ij}(p,0) + f^2(p,t)\sum_{r,k} h_{ik}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0)$$

$$= g_{ij}(p,0) - 2f(p,t)h_{ji}(p,0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t) + f^2(p,t)\sum_{r,k} h_{ik}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0).$$

Portanto,

$$g_{ij}(p,t) = g_{ij}(p,0) - 2f(p,t)h_{ji}(p,0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t) + f^2(p,t)\sum_{r,k} h_{ik}(p,0)h_{jr}(p,0)g^{rk}(p,0). \tag{2.11}$$

Tomando, em (2.11), $t = 0$ e $i = j$,

$$2f(p,0)h_{ii}(p,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,0)\right)^2 + f^2(p,0)\sum_{r,k} h_{ik}(p,0)h_{ir}(p,0)g^{rk}(p,0). \tag{2.12}$$

Como queremos $\varphi(p,0) = \varphi_0(p)$ então $f(p,0) = 0$ para todo $p \in M$. Assim, de (2.12) , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,0) = 0$ para todo $p \in M$.

O espaço tangente a cada hipersuperfície $\varphi_t$ é dado pelos vetores,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)N_0(p) - f(p,t)\sum_{l,s} h_{il}(p,0)g^{ls}(p,0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_s}(p).$$

Assim, o vetor normal em cada instante é,

$$\begin{aligned} N(p,t) &= \frac{N_0(p) - \sum_{i,j}\left\langle N_0(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t)\right\rangle g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p,t)}{\left|N_0(p) - \sum_{i,j}\left\langle N_0(p), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t)\right\rangle g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p,t)\right|} \\ &= \frac{N_0(p) - \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p,t)}{\left|N_0(p) - \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p,t)\right|}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Observemos que o vetor normal e os coeficientes da métrica (e consequentemente sua inversa) dependem somente das derivadas espaciais de primeira ordem da função $f$. Mais ainda, como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p,0) = 0$ e $M$ é compacto, por continuidade obtemos que o denominador em (2.13) é uniformemente limitado e "distante"de zero, isto é, $N(p,t)$ é não nulo. Agora determinemos a os coeficientes da Segunda forma fundamental,

$$h_{ij}(p,t) = \left\langle N(p,t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(p,t)\right\rangle = \left\langle N(p,t), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)(p,t)\right\rangle$$

$$\begin{aligned} = \Bigg\langle N(p,t), \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_j}(p,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p,t)N_0(p) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(p,t)\frac{\partial N_0}{\partial x_i}(p) \\ + \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\frac{\partial N_0}{\partial x_j}(p) + f(p,t)\frac{\partial^2 N_0}{\partial x_i \partial x_j}(p)\Bigg\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p,t)\langle N(p,t), N_0(p)\rangle + \langle N(p,t), E_iE_j\varphi_0(p)\rangle + \langle \nabla f(p,t), E_j\rangle \langle N(p,t), E_iN_0(p)\rangle \\ + \langle \nabla f(p,t), E_i\rangle \langle N(p,t), E_jN_0(p)\rangle + f(p,t)\langle N(p,t), E_iE_jN_0(p)\rangle \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p,t)\langle N(p,t), N_0(p)\rangle + T_{(p,f(p,t),\nabla f(p,t))}(E_i, E_j), \end{aligned}$$

e como anteriormente obtemos que os coeficientes da métrica também dependem somente das derivadas espaciais de primeira ordem da função $f$. Procedendo como na demonstração da Proposição 1.19 obtemos

$$\sum_{i,j} g^{ij}(p,t) T_{(p,f(p,t),\nabla f(p,t))}(E_i, E_j) = tr\left(T_{(p,f(p,t),\nabla f(p,t))}\right). \tag{2.14}$$

Tomando $P$ função suave tal que $P\left(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\right) = tr\left(T_{(p,f(p,t),\nabla f(p,t))}\right)$ podemos, em uma vizinhança normal $p \in M$ com respeito a métrica $g(t)$, calcular a curvatura média obtendo:

$$\begin{aligned}
H(p,t) &= \sum_{i,j} g^{ij}(p,t) h_{ij}(p,t) \\
&= \sum_{i,j} \langle N(p,t), N_0(p)\rangle\, g^{ij}(p,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) + \sum_{i,j} g^{ij}(p,t) T_{(p,f(p,t),\nabla f(p,t))}(E_i, E_j) \\
&= \langle N(p,t), N_0(p)\rangle\, \Delta_{g_t} f + P\left(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\right),
\end{aligned}$$

em que $P$ é uma função suave. Observe que como a métrica $g_t$ só depende de $f$ em $t$ então $\Delta_{g_t}$ também depende somente de $f$ em $t$, isto é, dada família $f_t$ definimos $g_t$ e consequentemente definimos $\Delta_{g_t}$. Com todos os cálculos acima podemos escrever uma equação diferencial para a função $f$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) \langle N(p,t), N_0(p,t)\rangle &= \left\langle N(p,t), \frac{\partial f}{\partial t}(p,t) N_0(p,t) \right\rangle \\
&= \left\langle N(p,t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t) \right\rangle \\
&= H(p,t) \\
&= \langle N(p,t), N_0(p)\rangle\, \Delta_{g_t} f + P\left(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pelo discutido anteriormente podemos assumir $\langle N(p,t), N_0(p)\rangle \neq 0$. Portanto, dividindo ambos os lados em (2.15) por $\langle N(p,t), N_0(p)\rangle$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) &= \Delta_{g_t} f + \frac{P\big(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\big)}{\langle N(p,t), N_0(p)\rangle} \\
&= \Delta_{g_t} f + Q\big(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\big).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Desta forma, se $f : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ é solução da seguinte equação diferencial parcial,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(p,t) = & \Delta_{g_t} f + Q\big(p, f(p,t), \nabla f(p,t)\big) \\ f(p,0) = 0, & \end{cases} \tag{2.17}$$

então $\varphi(p,t) = \varphi_0(p) + f(p,t)N_0(p)$ é solução de:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t), N(p,t) \right\rangle = & H(p,t) \\ \qquad \varphi(p,0) = & \varphi_0(p), \end{cases}$$

e pelo Corolário 2.4 é Fluxo pela curvatura média para a hipersuperfície $\varphi_0$ em um intervalo de tempo positivo. Reciprocamente se $\varphi$ é Fluxo de curvatura média de $\varphi_0$, então para $t$ suficientemente pequeno, $\varphi_t$ é mergulhado na vizinhança tubular $\Omega_\varepsilon$ de $\varphi_0(M)$. Defina $f(p,t) = \pi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\Big[\psi^{-1}\big(\varphi(p,t)\big)\Big]$, em que $\pi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ é a projeção do segundo fator de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\psi$ é o difeomorfismo definido no ínicio da demonstração . Desta forma, $f$ é suave, $f(p,0) = 0$ e pelos cálculos anteriores satisfaz a equação diferencial parcial explicitada acima.

Esta equação diferencial parcial é uma equação do tipo parabólica estritamente quasi-linear , é não degenerada (em certo sentido), e portanto podemos aplicar a teoria de EDP's parabólicas quasilineares. Na referência [3] (Teorema 7.15) pode ser encontrado a prova de um teorema de existência, unicidade e dependência continua para uma classe de problemas que inclui o nosso. Portanto podemos usar a única solução da equação diferencial parcial para a função $f$ e restringir $t$ de forma que $\varphi_t$ sejam imersões. Por meio do Corolário 2.4 obtemos reparametrizações globais da família de hipersuperfícies $\varphi_t$ de maneira única tornando-as Fluxo de curvatura média. Como a aplicação $\varphi_t = \varphi_0 + f_t N_0$ é injetora, desde que as hipersuperfícies estejam em $\Omega_\varepsilon$, a existência, unicidade, suavidade e dependência contínua dos dados iniciais segue do resultado que usamos de EDP's quasilineares parabólicas.

Agora consideremos o caso em que $M$ seja variedade compacta de dimensão $n$. Como $M$ é compacta podemos cobri-la por um conjunto finito de abertos riemannianos. Sejam $U_1, \cdots, U_k$ tais abertos. Pelo que acabamos de mostrar, cada um dos abertos $U_i$ possui tempo $T_i$ de existência do fluxo nesse aberto. Tomando $T = \min\{T_1, \cdots, T_k\}$ podemos definir o fluxo em $M$ como sendo o fluxo em cada um dos abertos $U_i$ restritos ao tempo $T$. Por fim resta mostrar que esse fluxo esta bem definido. Para isso consideremos dois abertos $U_i$ e $U_j$ e seus respectivos fluxos $\varphi_i$ e $\varphi_j$ . Como $U_i \cap U_j$ é aberto, então existe fluxo $\varphi_{ij}$ nele, que por sua unicidade corresponde ao fluxos $\varphi_i$ e $\varphi_j$ restritos a essa interseção, isto é, $\varphi_i\Big|_{U_i \cap U_j} \equiv \varphi_{ij} \equiv \varphi_j\Big|_{U_i \cap U_j}$, e portanto o fluxo em $M$ esta bem definido e é único. $\square$

# Capítulo 3

# A Segunda forma fundamental e soluções máximas

Neste capítulo nos dedicaremos ao estudo de propriedades ditas geométricas para o fluxo bem como a ocorrência de singularidades para o mesmo. Inicialmente demonstraremos o Princípio do máximo (mínimo) que nos servirá de ferramenta primordial durante toda a seção e ao final concluíremos um de nossos principais Teoremas, o qual nos garantirá que o Fluxo de curvatura média para uma hipersuperfície compacta inicial se torna singular somente se a norma da Segunda forma fundamental "explodir"em tempo finito. Iniciaremos enunciando algumas definições de suma importância.

## 3.1 Princípio do máximo

**Definição 3.1** (Funções $u_{max}$ e $u_{min}$)**.** Seja $u : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ uma função $C^1$ tal que $\{u_t\}$ é família de funções limitadas superiormente. Definimos $u_{max}(t) := \sup_{p\in M} u(p,t)$. Analogamente definimos $u_{min}(t)$.

**Definição 3.2** (Funções Hamilton maximal e Hamilton minimal)**.** Seja $u : M\times[0,T) \to \mathbb{R}$ uma função $C^1$ tal que $\{u_t\}$ é família de funções limitadas superiormente (inferiormente). Se para todo tempo $t$ existem $\delta > 0$ e um subconjunto compacto $K \subset M$ de maneira que se $\tilde{t} \in (t-\delta, t+\delta)$ valer $u_{max}(\tilde{t}) = u(q,\tilde{t})$ $\big(u_{min}(\tilde{t}) = u(q,\tilde{t})\big)$ em pelo menos um ponto $q \in K$ chamamos $u$ de Função Hamilton maximal (Hamilton minimal).

**Observação:** Note que, no caso em que $M$ é variedade compacta, a função $u$ é automaticamente Função Hamilton maximal e Função Hamilton minimal.

Agora enunciaremos, sem demonstração, o Teorema de Rademacher, que será utilizado no Truque de Hamilton e por extensão no Princípio do Máximo (Mínimo). Para uma demonstração ver a referência [12].

**Teorema 3.3** (Rademacher)**.** *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ função localmente Lipschitz. Então $f$ é diferenciável em quase todo ponto de $I$, isto é, o conjunto de pontos em que $f$ não é diferenciável tem medida nula.*

**Lema 3.4** (Truque de Hamilton)**.** *Seja $u : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ uma Função Hamilton maximal (Hamilton minimal). Então $u_{max}$ ($u_{min}$) é função contínua, diferenciável em quase todo ponto em $(0,T)$ e em todo tempo $t \in (0,T)$ que $u_{max}$ ($u_{min}$) for diferenciável, temos:*

$$\frac{du_{max}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(q,t), \quad \left(\frac{du_{min}}{dt}(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(q,t)\right)$$

*em que $q \in M$ é qualquer ponto no qual $u(\cdot,t)$ atinge seu máximo (mínimo).*

**Demonstração:** Fixando $t \in (0,T)$, nós temos $\delta > 0$ e $K$ (como nas hipóteses). Tome $0 < \delta_0 < \delta$. Consequentemente , como $u$ é $C^1$, $u$ é Lipschitz em $K \times [t-\delta_0, t+\delta_0]$. Seja $C$ sua constante de Lipschitz. Tomemos $0 < \varepsilon < \delta_0$. Desta maneira:

$$\begin{aligned} |u(q,t+\varepsilon) - u(q,t)| &\leq Cd\left((q,t+\varepsilon),(q,t)\right) \\ &= C\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(q,t+\varepsilon) - u(q,t) \leq C\varepsilon, \quad \text{e,} \quad u(q,t) - u(q,t+\varepsilon) \leq C\varepsilon. \tag{3.1}$$

Seja $p \in K \subset M$ tal que $u(\cdot, t+\varepsilon)$ atinge seu máximo (existe por hipótese). Da primeira desigualdade em (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned} u_{max}(t+\varepsilon) &= u(p,t+\varepsilon) \\ &\leq u(p,t) + C\varepsilon \\ &\leq u_{max}(t) + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{u_{max}(t+\varepsilon) - u_{max}(t)}{\varepsilon} \leq C. \tag{3.2}$$

Repetindo o mesmo argumento, isto é, seja $\tilde{p} \in K \subset M$ tal que $u(\cdot,t)$ atinge seu máximo (existe por hipótese). Da segunda desigualdade em (3.1):

$$\begin{aligned} u_{max}(t) &= u(\tilde{p},t) \\ &\leq u(\tilde{p},t+\varepsilon) + C\varepsilon \\ &\leq u_{max}(t+\varepsilon) + C\varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{u_{max}(t) - u_{max}(t+\varepsilon)}{\varepsilon} \leq C. \tag{3.3}$$

Assim, para $0 < \varepsilon < \delta_0$, de (3.2) e (3.3) obtemos:

$$\left|\frac{u_{max}(t+\varepsilon) - u_{max}(t)}{\varepsilon}\right| \leq C.$$

Repetindo o que fizemos acima mas para $-\delta_0 < \varepsilon < 0$, concluímos que $u_{max}$ é localmente Lipschitz em $(0,T)$ e consequentemente contínua e, pelo Teorema 3.3, diferenciável em quase todo ponto de $(0,T)$.

Consideremos $\tilde{t}$ um desses pontos em que $u_{max}$ é diferenciável. Seja $q \in K \subset M$ tal que $u(\cdot,\tilde{t})$ atinge seu máximo. Aplicando o Teorema do valor médio a segunda variável da função $u$, para todo $0 < \varepsilon < \delta_0$, obtemos que para algum $\alpha \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$,

$$u(q,\tilde{t}+\varepsilon) = u(q,\tilde{t}) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(q,\alpha),$$

assim,

$$\begin{aligned} u_{max}(\tilde{t}+\varepsilon) &\geq u(q,\tilde{t}+\varepsilon) \\ &= u(q,\tilde{t}) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(q,\alpha) \\ &= u_{max}(\tilde{t}) + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(q,\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, como $\varepsilon > 0$ da desigualdade acima obtemos:

$$\frac{u_{max}(\tilde{t}+\varepsilon) - u_{max}(\tilde{t})}{\varepsilon} \geq \frac{\partial u}{\partial t}(q,\alpha).$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ na desigualdade acima encontramos,

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}^+) \geq \frac{\partial u}{\partial t}(q,\tilde{t}).$$

Como $u_{max}$ é diferenciável em $\tilde{t}$ então $\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}^+) = \frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t})$ (se o limite existe, o limite lateral coincide com o mesmo). Logo,

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) \geq \frac{\partial u}{\partial t}(q,\tilde{t}). \tag{3.4}$$

Repetindo o que fizemos acima mas para $-\delta_0 < \varepsilon < 0$, obtemos:

$$\frac{u_{max}(\tilde{t}+\varepsilon) - u_{max}(\tilde{t})}{\varepsilon} \leq \frac{\partial u}{\partial t}(q,\alpha).$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ na desigualdade acima encontramos,

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}^-) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(q,\tilde{t}).$$

Como $u_{max}$ é diferenciável em $\tilde{t}$ então $\dfrac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}^{-}) = \dfrac{du_{max}}{dt}(\tilde{t})$. Logo,

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(q, \tilde{t}). \tag{3.5}$$

Assim, de (3.4) e de (3.5) concluímos que:

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) = \frac{\partial u}{\partial t}(q, \tilde{t}).$$

O caso para $u_{min}$ é análogo. □

**Teorema 3.5** (Princípio do máximo). *Seja $g_t$, para $t \in [0, T)$, uma família de métricas riemannianas em uma variedade $M$. Considere $u : M \times [0, T) \to \mathbb{R}$ função de Hamilton maximal e suave satisfazendo:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(p, t) \leq \Delta_{g(t)} u(p, t) + \langle X\left(p, u(p, t), \nabla u(p, t), t\right), \nabla u(p, t)\rangle + b\left(u(p, t)\right),$$

*em que $X$ é um campo vetorial contínuo e $b$ é localmente Lipschitz. Então $u_{max}$ é diferenciável em quase todo ponto em $(0, T)$ e em todo tempo $t \in (0, T)$ que $u_{max}$ for diferenciável, temos:*

$$\frac{du_{max}}{dt}(t) \leq b\big(u_{max}(t)\big).$$

*Se $h : [0, T') \to \mathbb{R}$ é uma solução da seguinte equação diferencial ordinária,*

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt}(t) = & b\big(h(t)\big) \\ h(0) = & u_{max}(0), \end{cases} \tag{3.6}$$

*para $T' \leq T$, então $u(p, t) \leq h(t)$ em $M \times [0, T')$.*

**Demonstração:** Pelo Truque de Hamilton temos que a função $u_{max}$ é diferenciável em quase todo ponto de $(0, T)$. Seja $\tilde{t}$ um desses pontos e considere $p \in K \subset M$ tal que $u(p, \tilde{t}) = u_{max}(\tilde{t})$ (existe por hipótese). Assim, pelo Truque de Hamilton e da hipótese, temos:

$$\begin{aligned} \frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) &= \frac{\partial u}{\partial t}(p, \tilde{t}) \\ &\leq \Delta_{g(\tilde{t})} u(p, \tilde{t}) + \langle X\big(p, u(p, \tilde{t}), \nabla u(p, \tilde{t}), \tilde{t}\big), \nabla u(p, \tilde{t})\rangle + b\big(u(p, \tilde{t})\big). \end{aligned}$$

Como $p$ é ponto de máximo global da função $u_{\tilde{t}}$ então $\Delta_{g(\tilde{t})} u(p, \tilde{t}) = \Delta_{g(\tilde{t})} u_{\tilde{t}}(p) \leq 0$ e $\nabla u(p, \tilde{t}) = \nabla u_{\tilde{t}}(p) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) &= \frac{\partial u}{\partial t}(p, \tilde{t}) \\ &\leq b\big(u(p, \tilde{t})\big) \\ &= b\big(u_{max}(\tilde{t})\big), \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{du_{max}}{dt}(\tilde{t}) \leq b\big(u_{max}(\tilde{t})\big). \tag{3.7}$$

Consideremos agora, dado $\varepsilon > 0$, $h_\varepsilon : [0, T'') \to \mathbb{R}$ solução maximal da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \frac{dh_\varepsilon}{dt}(t) = & b\big(h_\varepsilon(t)\big) \\ h_\varepsilon(0) = & u_{max}(0) + \varepsilon. \end{cases} \tag{3.8}$$

Desta maneira obtemos uma família de funções $\{h_\varepsilon\}$. Como a função $b$ é localmente Lipschitz, e pela dependência contínua das condições iniciais da EDO (3.6), obtemos, para qualquer $\delta > 0$, que $h_\varepsilon$ converge uniformemente a $h$ em $[0, T' - \delta]$ quando $\varepsilon \to 0$. Mostremos que $u_{max}(t) \leq h_\varepsilon(t)$ em $[0, T' - \delta]$. Suponhamos que exista $t$ de maneira que $u_{max}(t) > h_\varepsilon(t)$. Tome $\bar{t} = \inf\{t | u_{max}(t) \geq h_\varepsilon(t)\}$.

**Afirmação:** $\bar{t} > 0$ e $u_{max}(\bar{t}) = h_\varepsilon(\bar{t})$.

De fato, se $\bar{t} = 0$ existiria sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to 0$ e $u_{max}(t_n) \geq h_\varepsilon(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pela definição de ínfimo). Consequentemente, por continuidade,

$$u_{max}(0) = \lim_{n\to\infty} u_{max}(t_n) \geq \lim_{n\to\infty} h_\varepsilon(t_n) = h_\varepsilon(0),$$

ou seja, uma contradição com o fato de que $h_\varepsilon(0) = u_{max}(0) + \varepsilon$. Logo $\bar{t} > 0$.

Se $u_{max}(\bar{t}) > h_\varepsilon(\bar{t})$, tome $\alpha$ tal que,

$$u_{max}(\bar{t}) > \alpha > h_\varepsilon(\bar{t}).$$

Por continuidade existe $\bar{\delta} > 0$ de maneira que

$$u_{max}(t) > \alpha > h_\varepsilon(t),$$

para todo $t \in (\bar{t} - \bar{\delta}, \bar{t} + \bar{\delta})$, ou seja, $u_{max}(t) > h_\varepsilon(t)$ para todo $t \in (\bar{t} - \bar{\delta}, \bar{t} + \bar{\delta})$, uma contradição com o fato de $\bar{t}$ ser o ínfimo do conjunto $\{t | u_{max}(t) \geq h_\varepsilon(t)\}$. Assim concluímos a afirmação.

Seja $H_\varepsilon : [0, \bar{t}] \to \mathbb{R}$ definida por $H_\varepsilon(t) := h_\varepsilon(t) - u_{max}(t)$. Note que $H_\varepsilon(0) = \varepsilon > 0$, $H_\varepsilon(t) > 0$ para $t \in (0, \bar{t})$ e $H_\varepsilon(\bar{t}) = 0$ .

Para cada $t' \in [0, \bar{t})$ em que $u_{max}$ é diferenciável (existe pelo início da demonstração), de (3.7) e (3.8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{dH_\varepsilon}{dt}(t') &= \frac{dh_\varepsilon}{dt}(t') - \frac{du_{max}}{dt}(t') \\ &\geq b\big(h_\varepsilon(t')\big) - b\big(u_{max}(t')\big) \\ &\geq -C\big(h_\varepsilon(t') - u_{max}(t')\big) \\ &= -CH_\varepsilon(t'), \end{aligned}$$

em que $C > 0$ é uma constante (local) de Lipschitz para a função $b$. Assim:

$$\frac{d}{dt}\big(\ln H_\varepsilon\big)(t') = \frac{\frac{dH_\varepsilon}{dt}(t')}{H_\varepsilon(t')} \geq -C.$$

Como a desigualdade vale em quase todo ponto $t' \in [0, \bar{t})$ podemos integrar via Lebesgue:

$$\ln H_\varepsilon(t') - \ln H_\varepsilon(0) = \int_0^{t'} \frac{d}{ds}\big(\ln H_\varepsilon\big)(s)ds \geq \int_0^{t'} -Cds = -Ct'.$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{H_\varepsilon(t')}{H_\varepsilon(0)}\right) \geq -Ct'. \tag{3.9}$$

Tomando a exponencial em (3.9) obtemos,

$$H_\varepsilon(t') \geq H_\varepsilon(0)e^{-Ct'} = \varepsilon e^{-Ct'},$$

e tomando o limite quando $t' \to \bar{t}$ obtemos,

$$H_\varepsilon(\bar{t}) = \lim_{t'\to\bar{t}} H_\varepsilon(t') \geq \lim_{t'\to\bar{t}} \varepsilon e^{-Ct'} = \varepsilon e^{-C\bar{t}} > 0,$$

uma contradição com o fato de que $H_\varepsilon(\bar{t}) = 0$. Consequentemente $u_{max}(t) \leq h_\varepsilon(t)$ para todo $t \in [0, T' - \delta]$. Tomando $\varepsilon \to 0$, $u_{max}(t) \leq h(t)$ para todo $t \in [0, T' - \delta]$. Como $\delta > 0$ é arbitrário e $u(p,t) \leq u_{max}(t) \leq h(t)$, concluímos que $u(p,t) \leq h(t)$ em $M \times [0, T')$. □

Para facilitar a consulta, enunciaremos o Princípio do mínimo. Sua demonstração é análoga a do Princípio do máximo.

**Teorema 3.6** (Princípio do mínimo)**.** *Seja $g_t$, para $t \in [0,T)$, uma família de métricas riemannianas em uma variedade $M$. Considere $u : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ função de Hamilton minimal e suave satisfazendo:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(p,t) \geq \Delta_{g(t)} u(p,t) + \big\langle X\left(p, u(p,t), \nabla u(p,t), t\right), \nabla u(p,t)\big\rangle + b\big(u(p,t)\big),$$

*em que $X$ é um campo vetorial contínuo e $b$ é localmente Lipschitz. Então $u_{min}$ é diferenciável em quase todo ponto em $(0,T)$ e em todo tempo $t \in (0,T)$ que $u_{max}$ for diferenciável, temos:*

$$\frac{du_{min}}{dt}(t) \geq b\big(u_{min}(t)\big).$$

*Se $h : [0,T') \to \mathbb{R}$ é uma solução da seguinte equação diferencial ordinária,*

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt}(t) = & b\big(h(t)\big) \\ h(0) = & u_{min}(0), \end{cases}$$

*para $T' \leq T$, então $u(p,t) \geq h(t)$ em $M \times [0,T')$.*

## 3.2 Princípio da comparação

O próximo Teorema será de grande importância, mas iremos enunciá-lo sem demonstração. Sua demonstração é feita observando-se que podemos aplicar o Princípio do mínimo para concluir que a derivada da distância entre as hipersuperfícies de dois Fluxos de curvatura média é não negativa (para mais detalhes ver o Teorema 2.2.1 da referência [1]).

**Teorema 3.7** (Princípio da comparação para o Fluxo de curvatura média)**.** *Sejam* $\varphi : M_1 \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $\psi : M_2 \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *Fluxos de curvatura média. Se* $M_1$ *é compacto então a distância entre as hipersuperfícies* $\varphi_t$ *e* $\psi_t$ *é não decrescente durante a evolução.*

**Corolário 3.8.** *Sejam* $\varphi : M_1 \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $\psi : M_2 \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *Fluxos de curvatura média. Se* $M_1$ *é compacta,* $M_2$ *é mergulhada e* $\varphi_0(M_1)$ *não intersecta* $\psi_0(M_2)$ *então, para todo* $t \in [0, T)$*,* $\varphi_t(M_1)$ *não intersecta* $\psi_t(M_2)$*, isto é, essas hipersuperfícies mantém tal propriedade durante toda a evolução.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.7 a distância entre as hipersuperfícies $\varphi_t(M_1)$ e $\psi_t(M_2)$ é não decrescente durante a evolução. Como a distância é inicialmente positiva obtemos que durante toda a evolução a distância se mantém positiva, consequentemente, $\varphi_t(M_1)$ não intersecta $\psi_t(M_2)$ durante toda a evolução, concluindo a demonstração. □

Quando consideramos uma hipersuperfície inicial sendo compacta podemos estimar o tempo de existência de seu fluxo utilizando o resultado anterior. Basta colocar a hipersuperfície inicial no interior de uma esfera e então tomar o fluxo de ambas. Como visto anteriormente, o fluxo da esfera se degenera em tempo finito e consequentemente o fluxo da outra, em seu interior inicialmente, tem tempo finito. Mais precisamente:

**Corolário 3.9.** *Seja* $M$ *variedade compacta e* $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *seu Fluxo de curvatura média. Então:*

*i) Existem* $R > 0$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tal que* $\varphi_t(M)$ *está contida em* $B_R(x_0)$ *para todo* $t \in [0, T)$*. Mais ainda* $T \leq \frac{R^2}{2n}$*, isto é, o fluxo desenvolve singularidade em tempo finito.*

*ii)* $T_{max} \leq \frac{\left(diam \varphi_0(M)\right)^2}{2n}$*, em que* $T_{max}$ *é o tempo maximal de existência suave do fluxo.*

**Demonstração:**

*i)* Como $M$ é compacto e $\varphi$ é contínua então $\varphi_0(M) = \varphi(M, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é compacto. Assim, existem $R > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_0(M)$ está contido na bola $B_R(x_0)$. Do Corolário 3.8 concluímos que $\varphi_t(M) \subset B_R(x_0)$ (compare com a fronteira que é uma esfera) para todo $t \in [0, T)$. Do Exemplo 2.2 (considerando a translação a $x_0$) temos que $\partial(B_R(x_0))$ flui pela curvatura média mantendo-se uma esfera em que seu raio é dado por $R(t) = \sqrt{R^2 - 2nt}$ e então $\partial(B_R(x_0))$ se contrai a $x_0$ quando $t = \frac{R^2}{2n}$. Do Corolário 3.8 obtemos $\varphi_t(M)$ está contido na bola $B_{R(t)}(x_0)$ para todo $t \in [0, T)$ e então $T \leq \frac{R^2}{2n}$. Por fim, como $T < \infty$, o fluxo se torna singular.

$ii)$ Baseando-se na demonstração do item $i)$ basta observar que considerando o raio $R = diam\varphi_0(M) + \varepsilon$ temos $\varphi_0(M) \subset B_R(x)$ para qualquer $x \in \varphi_0(M)$. Consequentemente $T_{max} \leq \frac{\left(diam\varphi_0(M)+\varepsilon\right)^2}{2n}$. Assim, tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, concluímos a demonstração. $\square$

O próximo resultado irá nos garantir, para uma hipersuperfície inicial compacta, a existência de conjunto limite para seu fluxo de curvatura média e uma forma de caracterizar seus pontos.

**Proposição 3.10** (Conjunto S)**.** *Seja $M$ variedade compacta e $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ seu Fluxo de curvatura média. Defina $S$ como o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que existe sequência de pares $(p_i, t_i) \in M \times [0, T)$ de maneira que $t_i \to T$ e $\varphi(p_i, t_i) \to x$. Então:*

*i) $S$ é fechado e limitado.*

*ii) $x \in S$ se, e somente se, para todo $t \in [0, T)$ a bola fechada de raio $\sqrt{2n(T-t)}$ e centro $x$ intersecta $\varphi_t(M)$.*

**Demonstração:**

$i)$ Mostremos que $S = \overline{S}$. Por definição de fecho, $S \subset \overline{S}$. Considere $x \in \overline{S}$. Então existe sequência $x_n \in S$ tal que $x_n \to x$. Pela definição do conjunto $S$, para cada $x_n$ existe sequência de pares $(p_i^n, t_i^n)$ tal que $\varphi(p_i^n, t_i^n) \to x_n$ e $t_i^n \to T$ quando $i \to \infty$. Então defina a sequência de pares $(q_j, t_j) = (p_{N_j}^j, t_{N_j}^j)$ em que $N_j$ é escolhido de maneira estritamente crescente e de forma que $|\varphi(p_{N_j}^j, t_{N_j}^j) - x_j| < \frac{1}{j}$ e $|t_{N_j}^j - T| < \frac{1}{j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que

$$\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x - x_j| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $j \geq N$. Logo,

$$\begin{aligned}
|x - \varphi(q_j, t_j)| &= |x - \varphi(p_{N_j}^j, t_{N_j}^j)| \\
&\leq |x - x_j| + |x_j - \varphi(p_{N_j}^j, t_{N_j}^j)| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $j \geq N$. Então $\varphi(q_j, t_j) \to x$ e $t_j \to T$, portanto $x \in S$. Consequentemente, $\overline{S} \subset S$, e assim concluímos que $S$ é fechado.

Como $M$ é compacto existem, pelo Corolário 3.9, $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $R > 0$ de maneira que

$\varphi\big(M \times [0,T)\big) \subset B_R(x_0)$. Logo, $\overline{\varphi\big(M \times [0,T)\big)} \subset \overline{B_R(x_0)}$, e portanto $S \subset \overline{B_R(x_0)}$, pois $S \subset \overline{\varphi\big(M \times [0,T)\big)}$.

*ii)* Se para todo $t \in [0,T)$ a bola fechada de raio $\sqrt{2n(T-t)}$ e centro $x$ intersecta $\varphi_t(M)$, em algum ponto $x_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, tome $p_t \in M$ tal que $\varphi(p_t,t) = x_t$. Assim, como $x_t \to x$, $\varphi(p_t,t) \to x$ e portanto $x \in S$. Reciprocamente, suponha que $x \in S$ e defina $u(p,t) = ||\varphi(p,t) - x||$. Pelo truque de Hamilton, em um tempo diferenciável $\tilde{t}$ tal que $u_{min}(\tilde{t}) \neq 0$, temos:

$$\frac{du_{min}}{dt}(\tilde{t}) = \frac{\partial}{\partial t}||\varphi(q,\tilde{t}) - x||, \tag{3.10}$$

para qualquer ponto $q \in M$ em que $u(\cdot,\tilde{t})$ atinge o mínimo. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}||\varphi(q,t) - x|| &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\langle \varphi(q,t) - x, \varphi(q,t) - x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle \varphi(q,t) - x, \varphi(q,t) - x\rangle\right)}{2\left(\langle \varphi(q,t) - x, \varphi(q,t) - x\rangle\right)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

que aplicando em $\tilde{t}$,

$$\begin{aligned} &= \frac{2\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(q,\tilde{t}), \varphi(q,\tilde{t}) - x\right\rangle}{2||\varphi(q,\tilde{t}) - x||} \\ &= \frac{\left\langle H(q,\tilde{t})N(q,\tilde{t}), \varphi(q,\tilde{t}) - x\right\rangle}{||\varphi(q,\tilde{t}) - x||} \\ &= \frac{H(q,\tilde{t})\left\langle N(q,\tilde{t}), \varphi(q,\tilde{t}) - x\right\rangle}{||\varphi(q,\tilde{t}) - x||},\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t}||\varphi(q,\tilde{t}) - x|| = H(q,\tilde{t})\left\langle N(q,\tilde{t}), \frac{\varphi(q,\tilde{t}) - x}{||\varphi(q,\tilde{t}) - x||}\right\rangle. \tag{3.11}$$

A hipersuperfície $\varphi_{\tilde{t}}(M)$ intersecta apenas a fronteira da bola fechada $\overline{B}_{u_{min}(\tilde{t})}(x)$ e $\frac{\varphi(q,\tilde{t})-x}{||\varphi(q,\tilde{t})-x||}$ é paralelo a $N(q,\tilde{t})$ , pois $u_{min}(\tilde{t})$ é o mínimo da distância entre $x$ e $\varphi_{\tilde{t}}$. Assim, suponhamos que $N(q,\tilde{t})$ e $\frac{\varphi(q,\tilde{t})-x}{||\varphi(q,\tilde{t})-x||}$ tem a mesma direção. Comparando com a curvatura média da esfera $\partial(\overline{B}_{u_{min}(\tilde{t})}(x))$ obtemos:

$$\begin{aligned} H(q,\tilde{t})\left\langle N(q,\tilde{t}), \frac{\varphi(q,\tilde{t}) - x}{||\varphi(q,\tilde{t}) - x||}\right\rangle &= H(q,\tilde{t}) \\ &\geq H_{\partial(\overline{B}_{u_{min}(\tilde{t})}(x))} \text{ (comp. com as curv. princ.)} \\ &= \frac{-n}{u_{min}(\tilde{t})},\end{aligned}$$

isto é,

$$H(q,\tilde{t})\left\langle N(q,\tilde{t}), \frac{\varphi(q,\tilde{t}) - x}{||\varphi(q,\tilde{t}) - x||}\right\rangle \geq \frac{-n}{u_{min}(\tilde{t})}. \tag{3.12}$$

Procedendo de maneira análoga, no caso em que $N(q,\tilde{t})$ e $\frac{\varphi(q,\tilde{t})-x}{||\varphi(q,\tilde{t})-x||}$ tem a direção contrária, obtemos a mesma desigualdade de (3.12). Então de (3.10), (3.11) e (3.12) concluímos que para quase todo ponto diferenciável $\tilde{t} \in [0,T)$ em que $u_{min}(\tilde{t}) \neq 0$, temos:

$$\frac{du_{min}}{dt}(\tilde{t}) \geq \frac{-n}{u_{min}(\tilde{t})}. \tag{3.13}$$

Podemos reescrever a desigualdade diferencial acima da seguinte maneira:

$$u_{min}(\tilde{t})\frac{du_{min}}{dt}(\tilde{t}) \geq -n,$$

e então,

$$\frac{1}{2}\frac{d\,(u_{min}^2)}{dt}(\tilde{t}) \geq -n,$$

ou seja,

$$\frac{d\,(u_{min}^2)}{dt}(\tilde{t}) \geq -2n.$$

Integrando via Lebesgue em $[\tilde{t}, t] \subset [0,T)$:

$$u_{min}(\tilde{t})^2 - u_{min}(t)^2 = \int_t^{\tilde{t}} \frac{d\,(u_{min}^2)}{ds} ds \geq \int_t^{\tilde{t}} -2n\ ds = -2n(\tilde{t}-t).$$

Assim,

$$u_{min}(t)^2 - u_{min}(\tilde{t})^2 \leq 2n(\tilde{t}-t). \tag{3.14}$$

Como $x \in S$, existe sequência de pares $(p_i, t_i) \in M \times [0,T)$ de maneira que $t_i \to T$ e $\varphi(p_i,t_i) \to x$. Portanto, $u_{min}(t_i)^2 \to 0$ quando $i \to \infty$. Da desigualdade em (3.14) concluímos que:

$$\begin{aligned} u_{min}(t)^2 &= \lim_{i\to\infty} u_{min}(t)^2 - u_{min}(t_i)^2 \\ &\leq \lim_{i\to\infty} 2n(t_i - t) \\ &= 2n(T-t). \end{aligned}$$

Logo,

$$u_{min}(t) \leq \sqrt{2n(T-t)}, \tag{3.15}$$

concluindo que para todo $t \in [0,T)$ a bola fechada de raio $\sqrt{2n(T-t)}$ e centro $x$ intersecta $\varphi_t(M)$.

□

A Proposição seguinte, a título de observação, será apenas enunciada. Para uma demonstração ver a Proposição 2.2.7 da referência [1].

**Proposição 3.11.** *Seja $\varphi_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Se $\varphi_0(M)$ é compacta e mergulhada então seu Fluxo de curvatura média permanece mergulhado durante a evolução.*

## 3.3 Equações de evolução do Fluxo de curvatura média

Dado um Fluxo de curvatura média podemos obter equações para a evolução de grandezas geométricas das hipersuperfícies que o compõem. Alguns exemplos seguem na Proposição seguinte.

**Proposição 3.12.** *Seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Então valem as seguintes equações:*

*i)* $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t) = -2H(p,t)h_{ij}(p,t).$

*ii)* $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial t}(p,t) = 2H(p,t)\displaystyle\sum_{l,s} h_{sl}(p,t)g^{is}(p,t)g^{lj}(p,t).$

*iii)* $\dfrac{\partial N}{\partial t}(p,t) = -d\varphi_{(p,t)}\left(\nabla H(p,t)\right).$

*iv)* $\dfrac{\partial h_{ij}}{\partial t}(p,t) = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) - \displaystyle\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\dfrac{\partial H}{\partial x_k}(p,t) - H(p,t)\displaystyle\sum_{l,s} h_{jl}(p,t)g^{ls}(p,t)h_{is}(p,t).$

*v)* $\dfrac{\partial \mu}{\partial t}(p,t) = -H^2(p,t)\mu(p,t).$

*vi)* $\dfrac{\partial H}{\partial t}(p,t) = \Delta H(p,t) + H(p,t)|A|^2(p,t).$

*vii)* $\dfrac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) = \Delta|A|^2(p,t) - 2|\nabla A|^2(p,t) + 2|A|^4(p,t).$

**Demonstração:**

*i)* Pela definição dos coeficientes da métrica temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\right\rangle (p,t) \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right\rangle (p,t) \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(HN), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}(HN)\right\rangle (p,t) \qquad (3.16) \\
&= \left\langle \frac{\partial H}{\partial x_i}N + H\frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial x_j}N + H\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) \\
&= H(p,t)\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + H(p,t)\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) \\
&= H(p,t)\left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j}\right\rangle (p,t)\right].
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 1.18,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle (p,t) &= -\sum_{l,s} h_{il}(p,t) g^{ls}(p,t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle (p,t) \\
&= -\sum_{l,s} h_{il}(p,t) g^{ls}(p,t) g_{sj}(p,t) \\
&= -\sum_{l} h_{il}(p,t) \sum_{s} g^{ls}(p,t) g_{sj}(p,t) \\
&= -\sum_{l} h_{il}(p,t) \delta_{lj} \\
&= -h_{ij}(p,t),
\end{aligned}$$

e analogamente $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle (p,t) = -h_{ji}(p,t)$. Substituindo em (3.16),

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t) = -2H(p,t) h_{ij}(p,t).$$

*ii*) Sabemos que $\sum_s g_{is}(p,t) g^{sj}(p,t) = \delta_{ij}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\delta_{ij}) \\
&= \sum_s \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{is} g^{sj} \right) (p,t) \\
&= \sum_s \left[ \frac{\partial g_{is}}{\partial t}(p,t) g^{sj}(p,t) + \frac{\partial g^{sj}}{\partial t}(p,t) g_{is}(p,t) \right],
\end{aligned}$$

e então pelo item *i*),

$$\sum_s \frac{\partial g^{sj}}{\partial t}(p,t) g_{is}(p,t) = 2H(p,t) \sum_s h_{is}(p,t) g^{sj}(p,t). \tag{3.17}$$

A partir de (3.17) podemos escrever a igualdade para o produto de matrizes,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( g_{ij} \right)(p,t) \left( g^{ij} \right)(p,t) = 2H(p,t)(h_{ij})(p,t)(g^{ij})(p,t),$$

e multiplicando à esquerda pela matriz $\left( g^{ij} \right)(p,t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( g^{ij} \right)(p,t) = 2H(p,t) \left( g^{ij} \right)(p,t)(h_{ij})(p,t) \left( g^{ij} \right)(p,t),$$

e consequentemente,

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}(p,t) = 2H(p,t) \sum_{l,s} h_{sl}(p,t) g^{is}(p,t) g^{lj}(p,t).$$

*iii)* Sabemos que $\langle N, N\rangle (p,t) = 1$. Logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\langle N, N\rangle (p,t) = 2\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N\right\rangle (p,t),$$

e portanto $\frac{\partial N}{\partial t}$ é vetor tangente, isto é,

$$\frac{\partial N}{\partial t}(p,t) = \sum_{i,j}\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle (p,t) g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t). \tag{3.18}$$

Por outro lado, como $\left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) = 0$, temos,

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\right\rangle (p,t)\\
&= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right\rangle (p,t)\\
&= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}(HN)\right\rangle (p,t)\\
&= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) + \frac{\partial H}{\partial x_i}(p,t) + H(p,t)\left\langle N, \frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle (p,t),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(p,t) - H(p,t)\left\langle N, \frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle (p,t). \tag{3.19}$$

Pela Proposição 1.18 obtemos $\left\langle N, \frac{\partial N}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) = 0$, que substituindo em (3.19),

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle (p,t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(p,t). \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.18),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t}(p,t) &= -\sum_{i,j}\frac{\partial H}{\partial x_j}(p,t) g^{ij}(p,t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p,t)\\
&= -d\varphi_{(p,t)}\left(\nabla H(p,t)\right).
\end{aligned}$$

*iv)* Pela Proposição 1.17 sabemos que $h_{ij}(p,t) = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t)$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}(p,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t) &= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right\rangle (p,t)\\
&= \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t) + \left\langle N, \frac{\partial^2 (HN)}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (HN)}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial (HN)}{\partial x_j}\right)(p,t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j} N + H\frac{\partial N}{\partial x_j}\right)(p,t) \\
&= \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} N + \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial N}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial x_j} + H\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial N}{\partial x_j}\right)\right](p,t),
\end{aligned}
$$

e pela Proposição 1.18,

$$
\frac{\partial^2 (HN)}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} N - \sum_{l,s}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j} h_{il} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + \frac{\partial H}{\partial x_i} h_{jl} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + H\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{jl} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right)\right)\right](p,t),
$$

logo,

$$
\left\langle N, \frac{\partial^2 (HN)}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) - H(p,t)\sum_{l,s}\left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{jl} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right)\right\rangle (p,t). \tag{3.22}
$$

Pelo item *iii*) e pela Proposição 1.18

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\rangle (p,t) &= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\left\langle d\varphi(\nabla H), \frac{\partial \varphi}{x_k}\right\rangle (p,t) - h_{ij}(p,t)\left\langle d\varphi(\nabla H), N\right\rangle (p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\left\langle d\varphi(\nabla H), \frac{\partial \varphi}{x_k}\right\rangle (p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\left\langle \sum_{l,s}\frac{\partial H}{\partial x_l} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle (p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\sum_{l,s}\frac{\partial H}{\partial x_l}(p,t) g^{ls}(p,t)\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle (p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\sum_{l,s}\frac{\partial H}{\partial x_l}(p,t) g^{ls}(p,t) g_{sk}(p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\sum_{l}\frac{\partial H}{\partial x_l}(p,t)\sum_s g^{ls}(p,t) g_{sk}(p,t) \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\sum_{l}\frac{\partial H}{\partial x_l}(p,t)\delta_{lk} \\
&= -\sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\frac{\partial H}{\partial x_k}(p,t).
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21),

$$
\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}(p,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(p,t) - \sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\frac{\partial H}{\partial x_k}(p,t) - H(p,t)\sum_{l,s}\left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{jl} g^{ls}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\right)\right\rangle (p,t). \tag{3.24}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\sum_{l,s}\left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{jl}g^{ls}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right)\right\rangle(p,t) &= \sum_{l,s}\left[h_{jl}g^{ls}\left\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_s}\right\rangle + \left\langle N, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{jl}g^{ls}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right\rangle\right](p,t)\\
&= \sum_{l,s} h_{jl}(p,t)g^{ls}(p,t)\left\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_s}\right\rangle(p,t)\\
&= \sum_{l,s} h_{jl}(p,t)g^{ls}(p,t)h_{is}(p,t),
\end{aligned}
$$

que substituindo em (3.24),

$$
\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}(p,t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}(p,t) - \sum_k \Gamma_{ij}^k(p,t)\frac{\partial H}{\partial x_k}(p,t) - H(p,t)\sum_{l,s} h_{jl}(p,t)g^{ls}(p,t)h_{is}(p,t).
$$

$v)$ Precisaremos derivar o determinante da matriz dos coeficientes da métrica, isto é, derivar na variável $t$ o determinante das matrizes $(g_{ij}(p,t))$. Para isso utilizaremos a Fórmula de Jacobi, isto é, $\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \operatorname{tr}\left[\operatorname{adj}(A(t))\frac{dA}{dt}(t)\right]$, em que tr é a função traço e adj é a matriz adjunta. Temos, observando a definição de medida (Definição 1.26),

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mu}{\partial t}(p,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right)(p,t)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(p,t))}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\det(g_{ij})\right)(p,t)\\
&= \frac{1}{2\mu(p,t)}\operatorname{tr}\left[\operatorname{adj}\left(g_{ij}(p,t)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{ij}\right)(p,t)\right]\\
&= \frac{\det\left(g_{ij}(p,t)\right)}{2\mu(p,t)}\operatorname{tr}\left[\left(g^{ij}(p,t)\right)\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t)\right)\right]\\
&= \frac{\mu^2(p,t)}{2\mu(p,t)}\operatorname{tr}\left[\left(g^{ij}(p,t)\right)\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t)\right)\right]\\
&= \frac{\mu(p,t)}{2}\operatorname{tr}\left[\left(g^{ij}(p,t)\right)\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t)\right)\right]
\end{aligned}
$$

consequentemente, pelo item $i)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mu}{\partial t}(p,t) &= \frac{\mu(p,t)}{2}\operatorname{tr}\left[\left(g^{ij}(p,t)\right)\left(-2H(p,t)h_{ij}(p,t)\right)\right]\\
&= -H(p,t)\mu(p,t)\operatorname{tr}\left[\left(g^{ij}(p,t)\right)\left(h_{ij}(p,t)\right)\right]\\
&= -H(p,t)\mu(p,t)\operatorname{tr}\left[\left(\sum_k g^{ik}(p,t)h_{jk}(p,t)\right)\right]\\
&= -H(p,t)\mu(p,t)\sum_i\sum_k g^{ik}(p,t)h_{ik}(p,t)\\
&= -H^2(p,t)\mu(p,t).
\end{aligned}
$$

$vi)$ Pela definição da Curvatura média em um sistema de coordenadas temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t}(p,t) &= \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}h_{ij}\right)(p,t)\\ &= \sum_{i,j}\left[g^{ij}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}+h_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}\right](p,t),\end{aligned}$$

consequentemente pelos itens $ii)$ e $iv)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t}(p,t) &= \sum_{i,j}\left[g^{ij}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial H}{\partial x_k}-H\sum_{l,s}h_{jl}g^{ls}h_{is}\right)+2Hh_{ij}\sum_{l,s}h_{sl}g^{is}g^{lj}\right](p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)-H\sum_{i,j,l,s}g^{ij}h_{jl}g^{ls}h_{is}+2H\sum_{i,j,l,s}h_{ij}h_{sl}g^{is}g^{lj}\right](p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)-\sum_k\Gamma_{ij}^k\left\langle\nabla H,E_k\right\rangle\right)-H|A|^2+2H|A|^2\right](p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left\langle\nabla H,E_j\right\rangle-\left\langle\nabla H,\sum_k\Gamma_{ij}^kE_k\right\rangle\right)+H|A|^2\right](p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j}g^{ij}\left(E_i\left\langle\nabla H,E_j\right\rangle-\left\langle\nabla H,\nabla_{E_i}E_j\right\rangle\right)+H|A|^2\right](p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j}g^{ij}\left\langle\nabla_{E_i}\nabla H,E_j\right\rangle+H|A|^2\right](p,t)\\ &= \Delta H(p,t)+H(p,t)|A|^2(p,t).\end{aligned} \tag{3.25}$$

$vii)$ Pela definição da norma da Segunda forma fundamental temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial|A|^2}{\partial t}(p,t) &= \sum_{i,j,k,l}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}g^{kl}h_{ik}h_{jl}\right)(p,t)\\ &= \left[\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}g^{kl}h_{ik}h_{jl}+\sum_{i,j,k,l}g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial t}h_{ik}h_{jl}+\sum_{i,j,k,l}g^{ij}g^{kl}\frac{\partial h_{ik}}{\partial}h_{jl}+\sum_{i,j,k,l}g^{ij}g^{kl}h_{ik}\frac{\partial h_{jl}}{\partial t}\right](p,t)\\ &= \left[2\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t}g^{kl}h_{ik}h_{jl}+2\sum_{i,j,k,l}g^{ij}g^{kl}h_{ik}\frac{\partial h_{jl}}{\partial t}\right](p,t)\end{aligned}$$

consequentemente pelos itens $ii)$ e $iv)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial|A|^2}{\partial t}(p,t) = &\left[4H\sum_{i,j,k,l}g^{kl}h_{ik}h_{jl}\sum_{r,s}h_{sr}g^{is}g^{rj}\right](p,t)\\ &+\left[2\sum_{i,j,k,l}g^{ij}g^{kl}h_{ik}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_l}-\sum_m\Gamma_{jl}^m\frac{\partial H}{\partial x_m}-H\sum_{r,s}h_{lr}g^{rs}h_{js}\right)\right](p,t)\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) = \left[2H\sum_{i,j,k,l,r,s} g^{kl}h_{ik}h_{jl}h_{sr}g^{is}g^{rj} + 2\sum_{i,j,k,l} g^{ij}g^{kl}h_{ik}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_l} - \sum_m \Gamma_{jl}^m \frac{\partial H}{\partial x_m}\right)\right](p,t),$$

e pelo Lema 1.24 e do fato que $\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_l} - \sum_m \Gamma_{jl}^m \frac{\partial H}{\partial x_m} = \left\langle \nabla_{E_j}\nabla H, E_l\right\rangle$ (ver (3.25)) obtemos,

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) = \left[2Htr\left(\mathcal{S}^3\right) + 2\sum_{i,j,k,l} g^{ij}g^{kl}h_{ik}\left\langle \nabla_{E_j}\nabla H, E_l\right\rangle\right](p,t).$$

Usando a fórmula de Simons (Proposição 1.25) concluímos a demonstração. □

## 3.4 Solução maximal

Nesta seção mostraremos que o tempo maximal de existência suave do Fluxo de curvatura média de uma hipersuperfície compacta depende do crescimento, na variável temporal, da norma da Segunda forma fundamental.

**Proposição 3.13.** *Seja $M$ compacta, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média e $H_{min}(0) \geq 0$. Então:*

*i) $H_{min}(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T)$.*

*ii) $H_{min}(t)$ é não decrescente em $[0,T)$.*

**Demonstração:**

*i)* Como $M$ é compacta a função $H(p,t)$ é Hamilton minimal. Pelo Truque de Hamilton $H_{min}(t)$ é contínua. Suponhamos que a afirmação é falsa. Existem $t_0, t_1 \in [0,T)$ tal que $H_{min}(t_0) = 0$ e $H_{min}(t) < 0$ para todo $t \in (t_0,t_1)$. Da Proposição 3.12 e do Lema 1.27 temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p,t) \geq \Delta H(p,t) + \frac{1}{n}H^3(p,t).$$

Assim, pelo Princípio do míniimo (tomando $X \equiv 0$ e $b(x) = \frac{1}{n}x^3$) vale:

$$\frac{dH_{min}}{dt}(t) \geq \frac{1}{n}H_{min}^3(t),$$

para quase todo tempo $t \in [0,T)$. Como $H_{min}(t)$ é estritamente negativo em $(t_0,t_1)$, obtemos

$$\frac{1}{H_{min}^3(t)}\frac{dH_{min}}{dt}(t) \leq \frac{1}{n},$$

para quase todo $t \in (t_0,t_1)$.

Tome $x_0 \in (-\infty,0)$ e seja $G : (-\infty,0) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{u^3}du$.

Logo, $\frac{dG}{dx}(x) = \frac{1}{x^3}$. Aplicando em $H_{min}(t)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d(G \circ H_{min})}{dt}(t) &= \frac{dG}{dx}\big(H_{min}(t)\big)\frac{dH_{min}}{dt}(t) \\ &= \frac{1}{H^3_{min}(t)}\frac{dH_{min}}{dt}(t) \\ &\leq \frac{1}{n},\end{aligned} \tag{3.26}$$

para quase todo $t \in [0, T)$.

Integrando, a desigualdade em 3.26, via Lebesgue no intervalo $[s, \tilde{s}] \subset (t_0, t_1)$, obtemos:

$$\begin{aligned}G\big(H_{min}(\tilde{s})\big) - G\big(H_{min}(s)\big) &= \int_s^{\tilde{s}} \frac{d(G \circ H_{min})}{dt} dt \\ &\leq \int_s^{\tilde{s}} \frac{1}{n} dt = \frac{\tilde{s} - s}{n}.\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}G\big(H_{min}(\tilde{s})\big) - G\big(H_{min}(s)\big) &= \int_{H_{min}(s)}^{H_{min}(\tilde{s})} \frac{1}{u^3} du \\ &= -\frac{1}{2H^2_{min}(\tilde{s})} + \frac{1}{2H^2_{min}(s)},\end{aligned}$$

temos,

$$-\frac{1}{2H^2_{min}(\tilde{s})} + \frac{1}{2H^2_{min}(s)} \leq \frac{\tilde{s} - s}{n}$$

e portanto,

$$\frac{1}{2H^2_{min}(s)} \leq \frac{\tilde{s} - s}{n} + \frac{1}{2H^2_{min}(\tilde{s})},$$

para todo $t_0 < s < \tilde{s} < t_1$. Na desigualdade acima, tomando $s \to t_0^+$, concluímos uma contradição pois o lado esquerdo tende a $+\infty$ e o lado direito fica limitado. Sendo assim, $H_{min}(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T)$.

$ii)$ Da Proposição 3.12 e do Lema 1.27 temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p, t) \geq \Delta H(p, t) + \frac{1}{n} H^3(p, t).$$

Assim, pelo Princípio do mínimo (tomando $X \equiv 0$ e $b(x) = \frac{1}{n}x^3$), vale:

$$\frac{dH_{min}}{dt}(t) \geq \frac{1}{n} H^3_{min}(t),$$

para quase todo tempo $t \in [0, T)$. Assim, pelo item $i)$, $H^3_{min}(t) \geq 0$, e portanto:

$$\frac{dH_{min}}{dt}(t) \geq 0.$$

Assim concluímos a demonstração. □

**Corolário 3.14.** *Seja $M$ compacta, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média e $H(p,0) \geq 0$ para todo $p \in M$. Então $H(p,t) \geq 0$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$.*

**Demonstração:** Como $H(p,0) \geq 0$ para todo $p \in M$, então $H_{min}(0) \geq 0$. Pelo item *i)* da Proposição 3.13 sabemos que $H_{min}(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,T)$. Como $H(p,t) \geq H_{min}(t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$, concluímos a afirmação. □

**Proposição 3.15.** *Seja $M$ compacta, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média, $\alpha > 0$ e $0 < |A|(p,0) \leq \alpha H(p,0)$ para todo $p \in M$. Então $0 < |A|(p,t) \leq \alpha H(p,t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$.*

**Demonstração:** Mostremos primeiro que $|A|(p,t) > 0$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Observe que por hipótese $H(p,0) > 0$ para todo $p \in M$ e portanto $H_{min}(0) > 0$. Pelo item *ii)* da Proposição 3.13 concluímos que $0 < H_{min}(0) \leq H_{min}(t) \leq H(p,t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Por fim basta aplicar o Lema 1.27 (para cada $t$ fixado) e concluímos que $|A|(p,t) > 0$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Mostremos agora a desigualdade restante. Pela Proposição 3.12 temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(p,t) = \Delta H(p,t) + H(p,t)|A|^2(p,t),$$

e

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) = \Delta |A|^2(p,t) - 2|\nabla A|^2(p,t) + 2|A|^4(p,t).$$

Defina a função $f(p,t) = |A|(p,t) - \alpha H(p,t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) &= \left[\frac{\partial |A|}{\partial t} - \alpha \frac{\partial H}{\partial t}\right](p,t) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t}\Big((|A|^2)^{\frac{1}{2}}\Big) - \alpha \frac{\partial H}{\partial t}\right](p,t) \\
&= \left[\frac{1}{2|A|}\frac{\partial |A|^2}{\partial t} - \alpha \frac{\partial H}{\partial t}\right](p,t) \\
&= \left[\frac{1}{2|A|}\Big(\Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4\Big) - \alpha\Big(\Delta H + H|A|^2\Big)\right](p,t).
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.10 obtemos $\Delta |A|^2(p,t) = \left[2|A|\Delta|A| + 2\big|\nabla|A|\big|^2\right](p,t)$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) &= \left[\Delta|A| + |A|^3 + \frac{1}{2|A|}\big(2\big|\nabla|A|\big|^2 - 2|\nabla A|^2\big) - \alpha\Big(\Delta H + H|A|^2\Big)\right](p,t) \\
&= \left[\Big(\Delta|A| - \alpha\Delta H\Big) + |A|^2\Big(|A| - \alpha H\Big) + \frac{1}{2|A|}\big(2\big|\nabla|A|\big|^2 - 2|\nabla A|^2\big)\right](p,t) \\
&= \left[\Delta f + |A|^2 f + \frac{1}{|A|}\big(\big|\nabla|A|\big|^2 - |\nabla A|^2\big)\right](p,t),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Como pela Proposição 1.23 $\big|\nabla|A|\big|^2(p,t) - |\nabla A|^2(p,t) \le 0$ obtemos de (3.27)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) \le \Delta f(p,t) + |A|^2(p,t) f(p,t), \tag{3.28}$$

para todo $p \in M$ e para todo $t \in [0,T)$. Para cada $T' < T$ tome $C_{T'}$ o máximo de $|A|^2$ em $M \times [0,T']$. Da desigualdade em (3.28) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(p,t) \le \Delta f(p,t) + C_{T'} f(p,t),$$

para todo $p \in M$ e para todo $t \in [0,T']$. Pelo Princípio do máximo vale que

$$\frac{df_{max}}{dt}(t) \le C_{T'} f_{max}(t),$$

para quase todo tempo $t \in [0,T']$. Como $f_{max}(0) \le 0$, concluímos (de maneira análoga a demonstração do item $i$) da Proposição 3.13) que $f_{max}(t) \le 0$ em todo tempo $t \in [0,T']$. Assim, do fato de $f(p,t) \le f_{max}(t)$, obtemos que $f(p,t) \le 0$ em $M \times [0,T']$. Como $T'$ é arbitrário, concluímos que $|A|(p,t) - \alpha H(p,t) \le 0$ em $M \times [0,T)$, e assim terminamos a demonstração. □

**Corolário 3.16.** *Seja $M$ compacta e $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Se $H(p,0) > 0$ para todo $p \in M$ então existe $\beta > 0$ de maneira que*

$$\beta|A|^2(p,t) \le H^2(p,t) \le n|A|^2(p,t),$$

*para todo par $(p,t) \in M \times [0,T)$.*

**Demonstração:**
Como $H(p,0) > 0$ para todo $p \in M$, do Lema 1.27 obtemos $A(p,0) > 0$ para todo $p \in M$. Também, como $M$ é compacta, existe $\gamma > 0$ tal que $\gamma|A|_{max}(0) \le H_{min}(0)$ e portanto vale $0 < \gamma|A(p,0)| \le H(p,0)$ para todo $p \in M$. Da Proposição 3.15 obtemos que $0 < \gamma|A(p,t)| \le H(p,t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Logo $\gamma^2|A(p,t)|^2 \le H^2(p,t)$ para todo $p \in M$ e todo $t \in [0,T)$. Tomando $\beta = \gamma^2$ e fazendo uso do Lema 1.27 concluímos

$$\beta|A|^2(p,t) \le H^2(p,t) \le n|A|^2(p,t),$$

para todo par $(p,t) \in M \times [0,T)$. □

Como consequência do Corolário 3.16 obtemos o seguinte resultado.

**Corolário 3.17.** *Seja $M$ compacta e $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Se $H(p,0) > 0$ para todo $p \in M$ então $|A|(p,t)$ é limitada se, e somente se, $H(p,t)$ é limitada.*

**Proposição 3.18.** *Seja $M$ compacta e $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Se $|A|(p,t)$ é não limitada, temos:*

*i)* $max_{p\in M}|A|(\cdot,t) \geq \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}}$ *para todo $t \in [0,T)$.*

*ii)* $\lim_{t\to T} max_{p\in M}|A|(\cdot,t) = +\infty$.

**Demonstração:**

$i)$ Pela Proposição 3.12 temos:

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) = \Delta |A|^2(p,t) - 2|\nabla A|^2(p,t) + 2|A|^4(p,t).$$

Como $-2|\nabla A|^2(p,t) \leq 0$, obtemos:

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial t}(p,t) \leq \Delta |A|^2(p,t) + 2|A|^4(p,t).$$

Pelo Princípio do máximo concluímos que,

$$\frac{d|A|^2_{max}}{dt}(t) \leq 2|A|^4_{max}(t), \tag{3.29}$$

para quase todo tempo $t \in [0,T)$.
**Afirmação:** $|A|_{max}(t) > 0$ para todo $t \in [0,T)$.
De fato, se existe $\tilde{t}$ tal que $|A|_{max}(\tilde{t}) = 0$ então, como $0 \leq |A|(p,\tilde{t}) \leq |A|_{max}(\tilde{t})$ para todo $p \in M$, $|A|(p,\tilde{t}) = 0$ para todo $p \in M$. Consequentemente nossa evolução é estacionária para $t > \tilde{t}$ pois a curvatura média é nula. Assim $|A|(p,t) = 0$ para todo $t > \tilde{t}$ e todo $p \in M$ e portanto $|A|(p,t)$ é limitada quando $t \to T$, uma contradição. Assim terminamos a demonstração da afirmação (alternativamente poderíamos demonstrar observando que como $M$ é compacta cada hipersuperfície $\varphi_t(M)$ possui ponto elíptico).

Usando a desigualdade diferencial (3.29) e a afirmação obtemos,

$$\frac{1}{|A|^4_{max}(t)}\frac{d|A|^2_{max}}{dt}(t) \leq 2, \tag{3.30}$$

para quase todo tempo $t \in [0,T)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}(1) &= \frac{d}{dt}\left(|A|^2_{max}\frac{1}{|A|^2_{max}}\right)(t) \\ &= \frac{1}{|A|^2_{max}(t)}\frac{d|A|^2_{max}}{dt}(t) + |A|^2_{max}(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|A|^2_{max}}\right)(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|A|^2_{max}}\right)(t) = \frac{1}{|A|^4_{max}(t)}\frac{d|A|^2_{max}}{dt}(t).$$

Usando a desigualdade diferencial (3.30) obteremos:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|A|^2_{max}}\right)(t) \leq 2,$$

para quase todo tempo $t \in [0, T)$. Integrando via Lebesgue em $[s, \tilde{s}] \subset [0, T)$ temos,

$$\frac{1}{|A|^2_{max}(s)} - \frac{1}{|A|^2_{max}(\tilde{s})} = -\int_s^{\tilde{s}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|A|^2_{max}}\right) dt \leq 2\int_s^{\tilde{s}} dt = 2(\tilde{s} - s), \tag{3.31}$$

Como por hipótese $|A|$ é não limitada quando $t \to T$, então $|A|^2_{max}$ é não limitada quando $t \to T$. Assim, tomando $\tilde{s} \to T$ na desigualdade diferencial (3.31), obtemos:

$$\frac{1}{|A|^2_{max}(s)} \leq 2(T - s),$$

para todo tempo $s \in [0, T)$. (Note que $T < +\infty$ pois $M$ é compacta)

*ii*) Basta tomar o limite no item *i*). □

O próximo Lema, de suma importância ao nosso último Teorema, será apenas enunciado, visto que sua demonstração é demasiadamente técnica.

**Lema 3.19.** *Seja $M$ compacta e $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Se $|A|(p, t)$ é limitada em $M \times [0, T)$ e as imersões suaves $\{\varphi_t\}$ convergem para uma aplicação contínua $\varphi_T : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\varphi_t \to \varphi_T$ quando $t \to T$, então $\varphi_T$ é imersão suave.*

A estratégia da demonstração do Lema 3.19 é a seguinte. Primeiro observa-se que a limitação $|A| < +\infty$ implica na limitação $|\nabla^k A| < D_k$ durante toda a evolução, em que $\nabla^k A$ são as sucessivas derivadas do tensor $A$. Procedendo por indução sobre as relações de Gauss-Weingarten (Proposição 1.18) conclui-se a limitação $|\partial^k \varphi| < C_k$ durante toda a evolução. Por fim, pelo Teorema de Arzèla-Ascoli obtém-se o resultado. (Os detalhes estão contidos na demonstração da Proposição 2.4.9 da referência [1])

Nosso último resultado irá relacionar a norma da Segunda forma fundamental com a existência de singularidades para o Fluxo de curvatura média para uma hipersuperfície compacta. O Teorema nos garante que o fluxo se tornará singular, isto é, não suave, se, e somente se, a norma da Segunda forma fundamental explodir em tempo finito.

**Teorema 3.20.** *Seja $M$ compacta e $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média. Se $|A|(p, t)$ é limitada em $M \times [0, T)$ então $T$ não é tempo singular para o fluxo.*

**Demonstração:** Suponhamos que $T$ seja tempo singular. Pelo Lema 1.27 temos que $|H(p, t)|$ é limitado. Seja $C > 0$ tal que $|H(p, t)| \leq C$ para todo par $(p, t) \in M \times [0, T)$. Assim, para todo $s, \tilde{s} \in [0, T)$,

$$|\varphi(p, \tilde{s}) - \varphi(p, s)| = \left|\int_s^{\tilde{s}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) dt\right| = \left|\int_s^{\tilde{s}} H(p, t)N(p, t) dt\right| \leq \int_s^{\tilde{s}} |H(p, t)| dt \leq C\int_s^{\tilde{s}} dt = C(\tilde{s} - s),$$

Logo,

$$||\varphi_{\tilde{s}} - \varphi_s||_\infty \leq C(\tilde{s} - s),$$

para todo $s, \tilde{s} \in [0, T)$, em que $|| \cdot ||_\infty$ é a norma do supremo. Tome $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $[0, T)$ de maneira que $s_n \to T$. Vale então:

$$||\varphi_{s_n} - \varphi_{s_m}||_\infty \leq C|s_n - s_m|, \tag{3.32}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Como $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy. Da desigualdade (3.32) concluímos que $\{\varphi_{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $C(M, \mathbb{R}^{n+1})$. Como $C(M, \mathbb{R}^{n+1})$ é completo existe $\varphi_T \in C(M, \mathbb{R}^{n+1})$ de maneira que $\varphi_{s_n} \to \varphi_T$. Logo, para todo $s \in [0, T)$

$$||\varphi_T - \varphi_s||_\infty = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_{s_n} - \varphi_s||_\infty \leq \lim_{n\to\infty} C(s_n - s) = C(T - s),$$

Da desigualdade acima concluímos que $\varphi_t$ converge uniformemente, quando $t \to T$, para uma função contínua $\varphi_T : M \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Agora analisemos a família de métricas associadas ao Fluxo de curvatura média. Para isso, tome $0 \neq v = \sum_i v_i E_i \in T_pM$. Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\ln |v|^2_{g(t)}\right) &= \frac{1}{|v|^2_{g(t)}} \frac{d}{dt}\left(|v|^2_{g(t)}\right) \\
&= \frac{1}{|v|^2_{g(t)}} \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j} v_i v_j g_{ij}(p,t)\right) \\
&= \frac{\sum_{i,j} v_i v_j \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t)}{|v|^2_{g(t)}}.
\end{aligned}$$

Da Proposição 3.12 vale que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(p,t) = -2H(p,t)h_{ij}(p,t)$, assim da igualdade anterior,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}\left(\ln |v|^2_{g(t)}\right)\right| &= \left|\frac{-2H(p,t)\sum_{i,j} v_i v_j h_{ij}(p,t)}{|v|^2_{g(t)}}\right| \\
&= \left|\frac{-2H(p,t)\sum_{i,j} v_i v_j \mathcal{A}_p(E_i, E_j)(t)}{|v|^2_{g(t)}}\right| \\
&= \left|\frac{2H(p,t)\mathcal{A}_p(v,v)(t)}{|v|^2_{g(t)}}\right| \\
&= \frac{2\,|H(p,t)|\,|\mathcal{A}_p(v,v)(t)|}{|v|^2_{g(t)}} \\
&\leq \frac{2C\,|\mathcal{A}_p(v,v)(t)|}{|v|^2_{g(t)}},
\end{aligned}$$

e pela Proposição 1.21 vale $|\mathcal{A}_p(v,v)(t)| \leq n^2|A|(p,t)|v|^2_{g(t)}$, logo,

$$\left|\frac{d}{dt}\left(\ln|v|^2_{g(t)}\right)\right| \leq 2Cn^2|A|(p,t) < +\infty.$$

Sendo assim, tome $D > 0$ tal que $\left|\frac{d}{dt}\left(\ln|v|^2_{g(t)}\right)\right| \leq D$. Então, para todo $0 \leq t \leq s < T$,

$$\begin{aligned}
\left|\ln\frac{|v|^2_{g(s)}}{|v|^2_{g(t)}}\right| &= \left|\ln|v|^2_{g(s)} - \ln|v|^2_{g(t)}\right| \\
&= \left|\int_t^s \frac{d}{d\xi}\left(\ln|v|^2_{g(\xi)}\right)d\xi\right| \\
&\leq \int_t^s \left|\frac{d}{d\xi}\left(\ln|v|^2_{g(\xi)}\right)\right| d\xi \\
&\leq D\int_t^s d\xi \\
&\leq D(s-t).
\end{aligned}$$

Utilizando essa desigualdade e procedendo de maneira análoga ao feito anteriormente concluímos que $|\cdot|_{g(t)}$ converge uniformemente a uma norma $|\cdot|_{g(T)}$ quando $t \to T$. Mais ainda, todas as métricas $g(t)$ são equivalentes. De fato,

$$-D(s-t) \leq \ln\frac{|v|^2_{g(s)}}{|v|^2_{g(t)}} \leq D(s-t),$$

logo,

$$e^{-D(s-t)}|v|^2_{g(t)} \leq |v|^2_{g(s)} \leq e^{D(s-t)}|v|^2_{g(t)}.$$

Para finalizar, como a identidade do paralelogramo pode ser passada ao limite, concluímos pela identidade de polarização que $|\cdot|_{g(T)}$ induz uma métrica $g(T)$ que será equivalente as métricas $g(t)$. Portanto pelo Lema 3.19 concluímos que $\varphi_T$ é hipersuperfície, e assim sendo podemos aplicar o Teorema de existência e unicidade para o Fluxo de curvatura média a $\varphi_T$ e estender a solução do fluxo, contrariando a hipótese de $T$ ser singular. Portanto $T$ é tempo não singular. $\square$

# Capítulo 4

# Análise de singularidades do tipo I

Neste capítulo nos dedicaremos a estudar a fórmula da monotonia demonstrada por Huisken. Fazendo uso dessa fórmula demonstraremos que um certo tipo de singularidade para o Fluxo de curvatura média, que definiremos a seguir, é modelado (em certo sentido) pelas hipersuperfícies chamadas Self-Shrinker (Exemplo 2.5). Anteriormente, na Proposição 3.18, mostramos que o máximo da norma da Segunda forma fundamental para o Fluxo da curvatura média de uma variedade compacta $M$ "explode em" seu tempo maximal, $T$, com a seguinte estimativa,

$$\frac{1}{\sqrt{2(T-t)}} \leq \max_{p\in M} |A|(p,t) \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T). \tag{4.1}$$

Sendo assim, vamos definir dois tipos de singularidade. Nesta dissertação vamos discutir apenas as singularidades do tipo $I$.

**Definição 4.1** (Singularidade)**.** Seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média de uma hipersuperfície compacta $n-$dimensional no intervalo maximal de existência $[0,T)$. Se existe constante $C > 1$ tal que vale a seguinte estimativa,

$$\max_{p\in M} |A)|(p,t) \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}} \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T), \tag{4.2}$$

então dizemos que o fluxo desenvolve em $T$ *singularidade do tipo I.*
Se tal constante não existe, isto é,

$$\lim_{t\to T} \sup \max_{p\in M} |A(p,t)| \sqrt{(T-t)} = +\infty, \tag{4.3}$$

então dizemos que o fluxo desenvolve em $T$ *singularidade do tipo II.*

## 4.1 Fórmula da monotonia de Huisken

Nesta seção nos ocuparemos em demonstrar a Fórmula da monotonia de Huisken. Para isso decidimos fazê-la por meio de Lemas mais gerais pois acreditamos que esse caminho nos evidência de forma clara a estratégia envolvida na demonstração da fórmula, porém é possível fazê-lo nos moldes de Huisken no artigo [5], isto é, por meio do cálculo direto. Os próximos Lemas irão garantir uma maneira de calcular derivadas de integrais de funções sobre o fluxo e também qual a forma do Laplaciano sobre o fluxo.

**Lema 4.2.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média e $f : \mathbb{R}^{n+1} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ função suave. Por simplicidade denotaremos, neste capítulo, a integral $\int_M f\big(\varphi(p,t),t\big)du_t$ por $\int_M f du_t$. Então:*

$$\frac{d}{dt}\int_M f d\mu_t = \int_M \frac{\partial f}{\partial t} - H^2 f + H\left\langle \nabla f, N\right\rangle d\mu_t \tag{4.4}$$

**Demonstração:** Pela Proposição 3.12 vale $\frac{\partial}{\partial t}(\mu_t) = -H^2\mu_t$. Assim, pela regra do produto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left[f\left(\varphi(p,t),t\right)\mu_t\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\left[f\left(\varphi(p,t),t\right)\right]\mu_t + f\left(\varphi(p,t),t\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_t\right)\\
&= \left\langle \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t}\right), \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(p,t),t\right)\right\rangle \mu_t - f\left(\varphi(p,t),t\right)H^2(p,t)\mu_t\\
&= \left[\left\langle \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p,t),1\right)\right\rangle - f\left(\varphi(p,t),t\right)H^2(p,t)\right]\mu_t\\
&= \left[\left\langle \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t}\right), \left(H(p,t)N(p,t),1\right)\right\rangle - f\left(\varphi(p,t),t\right)H^2(p,t)\right]\mu_t\\
&= \left[H(p,t)\left\langle \nabla f, N(p,t)\right\rangle + \frac{\partial f}{\partial t} - f\left(\varphi(p,t),t\right)H^2(p,t)\right]\mu_t,
\end{aligned}$$

ou seja, escrevendo de maneira simplificada obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\mu_t) = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} - H^2 f + H\langle \nabla f, N\rangle\Big)\mu_t. \tag{4.5}$$

De (4.5),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M f d\mu_t &= \frac{d}{dt}\int_M f\mu_t dL^n\\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial t}(f\mu_t)dL^n\\
&= \int_M \left(\frac{\partial f}{\partial t} - H^2 f + H\langle \nabla f, N\rangle\right)\mu_t dL^n\\
&= \int_M \frac{\partial f}{\partial t} - H^2 f + H\langle \nabla f, N\rangle d\mu_t.
\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 4.3.** *Sejam $M$ variedade Riemanniana $n$-dimensional, $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície, $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto contendo $\psi(M)$ e $u : V \to \mathbb{R}$ função suave. Então*

$$\Delta\tilde{u}(p) = \left(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u\right)(\psi(p)) - \mathrm{Hess} u_{\psi(p)}(N(p), N(p)) + H(p)\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p),$$

*para todo $p \in M$.*

**Demonstração:** Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p$ de maneira que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Defina $\tilde{u} = u \circ \psi$. Vale

$$\Delta\tilde{u}(p) = \sum_i E_i\left(E_i(u \circ \psi)\right)(p). \tag{4.6}$$

Tome $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = E_i$. Então

$$E_i(u \circ \psi)(p) = \frac{d}{dt}(u \circ \psi \circ c)\Big|_{t=0} = \left\langle (\nabla u)(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\rangle(p). \tag{4.7}$$

De (4.7),

$$\begin{aligned}
E_i\left(E_i(u \circ \psi)\right)(p) &= E_i\left(\left\langle (\nabla u)(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\rangle\right)(p) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\left\langle (\nabla u) \circ \psi \circ c, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \circ c\right\rangle\right)\Big|_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}\left((\nabla u) \circ \psi \circ c\right)\Big|_{t=0}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(p)\right\rangle + \left\langle (\nabla u)\left(\psi(p)\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \circ c\right)\Big|_{t=0}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial(\nabla u)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\rangle(p) + \left\langle (\nabla u)(\psi), \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}\right\rangle(p).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Pela Proposição 1.18 temos,

$$\begin{aligned}
\left\langle (\nabla u)(\psi), \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}\right\rangle(p) &= \left\langle (\nabla u)(\psi), \sum_k \Gamma_{ii}^k \frac{\partial \psi}{x_k} + h_{ii} N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle (\nabla u)(\psi), \sum_k \Gamma_{ii}^k \frac{\partial \psi}{x_k}\right\rangle(p) + h_{ii}\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle (\nabla u)(\psi), \overline{\nabla}_{\frac{\partial \psi}{x_i}} \frac{\partial \psi}{x_i}\right\rangle(p) + h_{ii}\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle (\nabla u)(\psi), 0\right\rangle(p) + h_{ii}\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p) \\
&= h_{ii}(p)\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em (4.8) obtemos,

$$\sum_i E_i\left(E_i(u \circ \psi)\right)(p) = \sum_i \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\rangle(p) + H(p)\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p)$$

isto é, de (4.6),

$$\Delta\tilde{u}(p) = \sum_i \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle(p) + H(p)\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p). \tag{4.10}$$

Pelo Corolário 1.10 e pela definição de Divergente e Hessiana temos,

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u\right)(\psi(p)) &= \operatorname{div}(\nabla u)(\psi(p)) \\
&= \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_{n+1}}(\psi), N \right\rangle(p) + \sum_i \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle(p) \\
&= \operatorname{Hess}u_{\psi(p)}(N(p), N(p)) + \sum_i \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle(p)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_i^n \left\langle \frac{\partial\left(\nabla u\right)}{\partial x_i}(\psi), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle(p) = \left(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u\right)(\psi(p)) - \operatorname{Hess}u_{\psi(p)}(N(p), N(p)). \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) em (4.10)

$$\Delta\tilde{u}(p) = \left(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u\right)(\psi(p)) - \operatorname{Hess}u_{\psi(p)}(N, N) + H(p)\left\langle (\nabla u)(\psi), N\right\rangle(p).$$

Como podemos repetir o processo para todo $p \in M$ concluímos a demonstração. $\square$

O próximo Lema irá nos garantir uma maneira de calcular, como anteriormente, a derivada de integrais de funções sobre o fluxo porém no caso particular em que tais funções forem soluções positivas da Equação do Calor reversa. Vejamos:

**Lema 4.4.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média e $u : \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \tau) \to \mathbb{R}$ função suave, estritamente positiva, e tal que $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u$. Então:*

$$\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t = -\int_M \left(H - \frac{\langle \nabla u, N\rangle}{u}\right)^2 u d\mu_t + \int_M \frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} - Hessu(N, N) d\mu_t,$$

*para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$.*

**Demonstração:** Da hipótese que $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u$ temos,

$$\int_M \frac{\partial u}{\partial t} - H^2 u + H\left\langle \nabla u, N\right\rangle d\mu_t = \int_M -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u - H^2 u + H\left\langle \nabla u, N\right\rangle d\mu_t. \tag{4.12}$$

De (4.12) e pelo Lema 4.3,

$$\int_M \frac{\partial u}{\partial t} - H^2 u + H\left\langle \nabla u, N\right\rangle d\mu_t = -\int_M \Delta u d\mu_t - \int_M \operatorname{Hess}u(N, N) + H^2 u - 2H\left\langle \nabla u, N\right\rangle d\mu_t$$

isto é, pelo Lema 4.2,

$$\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t = -\int_M \Delta u d\mu_t - \int_M \mathrm{Hess}u(N,N) + H^2 u - 2H\langle \nabla u, N\rangle d\mu_t \tag{4.13}$$

Pelo Corolário 1.10 e pelo Teorema da divergência (Teorema 1.12),

$$\int_M \Delta u d\mu_t = \int_M \mathrm{div}(\nabla u) d\mu_t = 0. \tag{4.14}$$

Assim, de (4.13) e (4.14),

$$\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t = -\int_M \mathrm{Hess}u(N,N) d\mu_t - \int_M H^2 u - 2H\langle \nabla u, N\rangle d\mu_t. \tag{4.15}$$

Como por hipótese $u$ é estritamente positivo,

$$\begin{aligned}
-\int_M H^2 u - 2H\langle \nabla u, N\rangle d\mu_t &= -\int_M \left(H^2 - 2H\frac{\left|(\nabla u)^N\right|}{u}\right) u d\mu_t \\
&= -\int_M \left(H - \frac{\left|(\nabla u)^N\right|}{u}\right)^2 u d\mu_t + \int_M \frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} d\mu_t \\
&= -\int_M \left(H - \frac{\langle \nabla u, N\rangle}{u}\right)^2 u d\mu_t + \int_M \frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} d\mu_t,
\end{aligned}$$

e de (4.15) concluímos,

$$\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t = -\int_M \left(H - \frac{\langle \nabla u, N\rangle}{u}\right)^2 u d\mu_t + \int_M \frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} - \mathrm{Hess}u(N,N) d\mu_t.$$

□

**Proposição 4.5.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média e $u : \mathbb{R}^{n+1} \times [0,\tau) \to \mathbb{R}$ função suave, estritamente positiva, e tal que $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} u$. Então:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau - t)}\int_M u d\mu_t\right] &= -\sqrt{4\pi(\tau - t)}\int_M \left(H - \langle \nabla(\ln u), N\rangle\right)^2 u d\mu_t \\
&\quad + \sqrt{4\pi(\tau - t)}\int_M \left(\frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} - Hess u(N,N) - \frac{u}{2(\tau - t)}\right) d\mu_t,
\end{aligned}$$

*para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$.*

**Demonstração:** Pela regra do produto temos,

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau - t)}\int_M u d\mu_t\right] = \sqrt{4\pi(\tau - t)}\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t + \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4\pi(\tau - t)}\right)\int_M u d\mu_t. \tag{4.16}$$

Mas,

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{4\pi(\tau-t)}\right) = -\frac{4\pi}{2\sqrt{4\pi(\tau-t)}} = -\frac{4\pi\sqrt{4\pi(\tau-t)}}{2\sqrt{4\pi(\tau-t)}\sqrt{4\pi(\tau-t)}} = -\frac{\sqrt{4\pi(\tau-t)}}{2(\tau-t)},$$

isto é, de (4.16),

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M u d\mu_t\right] = \sqrt{4\pi(\tau-t)}\left[\frac{d}{dt}\int_M u d\mu_t + \int_M -\frac{u}{2(\tau-t)}d\mu_t\right]. \tag{4.17}$$

De (4.17), pelo Lema 4.4 e do fato $\nabla\big(\ln u\big) = \frac{\nabla u}{u}$ concluímos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M u d\mu_t\right] =& -\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \left(H - \langle \nabla\left(\ln u\right), N\rangle\right)^2 u d\mu_t \\ &+ \sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \left(\frac{\left|(\nabla u)^N\right|^2}{u} - \text{Hess}u(N,N) - \frac{u}{2(\tau-t)}\right) d\mu_t.\end{aligned}$$

□

O próximo Teorema é um dos resultados principais dessa dissertação, dele resultará que os Fluxos de curvatura média que desenvolvem singularidade do tipo $I$ tem os Self-Shrinkers como sendo as hipersuperfícies que modelam, em certo sentido, sua singularidade. Sua demonstração é feita observando que na Proposição 4.5 podemos aplicar o núcleo do calor reverso $\rho_{x_0,\tau} : \mathbb{R}^{n+1}\times[0,\tau)\to\mathbb{R}^+$ definido por:

$$\rho_{x_0,\tau}(x,t) = \frac{1}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}. \tag{4.18}$$

Algumas de suas propriedades são:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{x_0,\tau} = -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}\rho_{x_0,\tau} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\rho_{x_0,\tau}(x,t)dx = 1, \quad \text{para todo } \ t\in[0,\tau) \tag{4.19}$$

Também é importante citar que o núcleo do calor reverso pode ser utilizado para garantir a existência de solução de tempo finito para o problema de Cauchy da Equação do Calor reversa. (Um método é fazer a convolução com a condição inicial como no problema de Cauchy da Equação do Calor)

**Teorema 4.6** (Fórmula da monotonia de Huisken)**.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média, $x_0\in\mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau>0$. Então:*

$$\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}d\mu_t = -\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}\left(H + \frac{\langle x-x_0, N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t,$$

*para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$.*

**Demonstração:** De (4.18) temos,

$$\nabla\rho_{x_0,\tau} = \frac{1}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}\nabla\left(e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}\right). \tag{4.20}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\nabla\left(e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}\right) = e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}\nabla\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}\right) &= -\frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{4(\tau-t)}\nabla\left(|x-x_0|^2\right)\\ &= -\frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{4(\tau-t)}2(x-x_0)\\ &= -\frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{2(\tau-t)}(x-x_0),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla\rho_{x_0,\tau} = -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}(x-x_0). \tag{4.21}$$

Logo, de (4.21), para todo $x\in\varphi_t(M)$ e para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$,

$$\frac{\langle\nabla\rho_{x_0,\tau},N\rangle^2}{\rho_{x_0,\tau}} = \frac{\rho_{x_0,\tau}^2\langle x-x_0,N\rangle^2}{4(\tau-t)^2\rho_{x_0,\tau}} = \frac{\rho_{x_0,\tau}\langle x-x_0,N\rangle^2}{4(\tau-t)^2},$$

isto é,

$$\frac{\left|(\nabla\rho_{x_0,\tau})^N\right|^2}{\rho_{x_0,\tau}} = \frac{\rho_{x_0,\tau}\langle x-x_0,N\rangle^2}{4(\tau-t)^2}, \tag{4.22}$$

para todo $x\in\varphi_t(M)$. Pela definição de Hessiana,

$$\mathrm{Hess}\rho_{x_0,\tau}(N,N) = \left\langle\overline{\nabla}_N\nabla\rho_{x_0,\tau},N\right\rangle \tag{4.23}$$

De (4.21), para todo $x\in\varphi_t(M)$ e para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$,

$$\begin{aligned}\left\langle\overline{\nabla}_N\nabla\rho_{x_0,\tau},N\right\rangle &= -\frac{1}{2(\tau-t)}\left\langle\overline{\nabla}_N\left(\rho_{x_0,\tau}(x-x_0)\right),N\right\rangle\\ &= -\frac{1}{2(\tau-t)}\left\langle\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}(x-x_0)\right),N\right\rangle\\ &= -\frac{1}{2(\tau-t)}\left\langle\rho_{x_0,\tau}\frac{\partial}{\partial N}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)(x-x_0),N\right\rangle\\ &= -\frac{1}{2(\tau-t)}\left\langle\rho_{x_0,\tau}\frac{\partial}{\partial N}(x-x_0),N\right\rangle-\frac{1}{2(\tau-t)}\left\langle\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)(x-x_0),N\right\rangle\\ &= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}\left\langle\frac{\partial}{\partial N}(x-x_0),N\right\rangle-\frac{1}{2(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)\langle x-x_0,N\rangle\\ &= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}\langle N,N\rangle-\frac{1}{2(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)\langle x-x_0,N\rangle\\ &= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}-\frac{1}{2(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)\langle x-x_0,N\rangle,\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{Hess}\rho_{x_0,\tau}(N,N) = -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)} - \frac{1}{2(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right)\langle x-x_0, N\rangle, \tag{4.24}$$

para todo $x \in \varphi_t(M)$ e para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$. Também, de (4.18),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial N}\left(\rho_{x_0,\tau}\right) &= \frac{1}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\partial}{\partial N}\left(e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}\right)\\
&= \frac{1}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}\frac{\partial}{\partial N}\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}\right)\\
&= \rho_{x_0,\tau}\frac{\partial}{\partial N}\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}\right)\\
&= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{4(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\left(|x-x_0|^2\right)\\
&= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{4(\tau-t)}\frac{\partial}{\partial N}\langle x-x_0, x-x_0\rangle\\
&= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{4(\tau-t)}2\left\langle x-x_0, \frac{\partial}{\partial N}(x-x_0)\right\rangle\\
&= -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}\langle x-x_0, N\rangle,
\end{aligned}$$

que substituindo em (4.24),

$$\mathrm{Hess}\rho_{x_0,\tau}(N,N) = -\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)} + \frac{\rho_{x_0,\tau}\langle x-x_0, N\rangle^2}{4(\tau-t)^2}, \tag{4.25}$$

para todo $x \in \varphi_t(M)$ e para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$. Assim, de (4.22) e (4.25) temos,

$$\frac{|\nabla\rho_{x_0,\tau}|^2}{\rho_{x_0,\tau}} - \mathrm{Hess}\rho_{x_0,\tau}(N,N) - \frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)} = 0, \tag{4.26}$$

para todo $x \in \varphi_t(M)$ e para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$. O núcleo do calor reverso, $\rho_{x_0,\tau}$, é tal que $\frac{\partial}{\partial t}\rho_{x_0,\tau} = -\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}\rho_{x_0,\tau}$, então podemos aplicar a Proposição 4.5. Obtemos, de (4.26), para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$,

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \rho_{x_0,\tau}d\mu_t\right] = -\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \left(H - \langle\nabla\left(\ln\rho_{x_0,\tau}\right), N\rangle\right)^2\rho_{x_0,\tau}d\mu_t. \tag{4.27}$$

Mas, de (4.21) e do fato $\nabla(\ln\rho_{x_0,\tau}) = \frac{\nabla\rho_{x_0,\tau}}{\rho_{x_0,\tau}}$, para todo $x \in \varphi_t(M)$ e para todo $t \in [0, \min\{\tau, T\})$,

$$\begin{aligned}
\left(H - \langle\nabla\left(\ln\rho_{x_0,\tau}\right), N\rangle\right)^2 = \left(H - \left\langle\frac{1}{\rho_{x_0,\tau}}\nabla\rho_{x_0,\tau}, N\right\rangle\right)^2 &= \left(H + \left\langle\frac{1}{\rho_{x_0,\tau}}\frac{\rho_{x_0,\tau}}{2(\tau-t)}(x-x_0), N\right\rangle\right)^2\\
&= \left(H + \frac{\langle x-x_0, N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2,
\end{aligned}$$

que substituindo em (4.27)

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \rho_{x_0,\tau}d\mu_t\right] = -\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 \rho_{x_0,\tau}d\mu_t, \quad (4.28)$$

para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$. Observemos que, para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$,

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 \rho_{x_0,\tau}d\mu_t &= \int_M \sqrt{4\pi(\tau-t)}\rho_{x_0,\tau}\left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t\\ &= \int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}\left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t,\end{aligned}$$

e, por outro lado, para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \rho_{x_0,\tau}d\mu_t\right] &= \frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\pi(\tau-t)}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}d\mu_t\right]\\ &= \frac{d}{dt}\int_M \sqrt{4\pi(\tau-t)}\frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n+1}{2}}}d\mu_t\\ &= \frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}d\mu_t,\end{aligned}$$

e então concluímos,

$$\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}d\mu_t = -\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}\left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t,$$

para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$. □

**Corolário 4.7.** *Seja $M$ variedade compacta de dimensão $n$, $\varphi : M\times[0,T)\to\mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média, $x_0\in\mathbb{R}^{n+1}$ e $\tau>0$. Então:*

$$\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}d\mu_t$$

*é não-crescente em $[0,\min\{\tau,T\})$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 4.6,

$$\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}d\mu_t = -\int_M \frac{e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(\tau-t)}}}{[4\pi(\tau-t)]^{\frac{n}{2}}}\left(H+\frac{\langle x-x_0,N\rangle}{2(\tau-t)}\right)^2 d\mu_t \quad (4.29)$$

para todo $t\in[0,\min\{\tau,T\})$. Como o integrando no lado direito de (4.29) é não-negativo concluímos a afirmação. □

## 4.2 Fluxo de curvatura média redimensionado

Sabemos que no caso em que $M$ é compacto, o Fluxo de curvatura média associado a ele se torna singular em tempo finito. Nosso objetivo é analisar a forma das hipersuperfícies quando elas se aproximam do tempo maximal do fluxo, isto é, gostaríamos de poder ampliar o fluxo de maneira que possamos "ver"se as hipersuperfícies se aproximam de algum objeto matemático conhecido. Veremos nesta seção que Singularidades do tipo $I$ são bem comportadas neste sentido.

**Proposição 4.8.** *Seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média de uma hipersuperfície compacta $n-$dimensional no intervalo maximal de existência $[0,T)$. Suponha que o fluxo desenvolve em $T$ singularidade do tipo $I$. Então as funções $\varphi_t$ convergem uniformemente, quando $t \to T$, a uma função contínua $\varphi_T : M \to \mathbb{R}^{n+1}$.*

**Demonstração:** Pela Proposição 1.27 temos que $|H(p,t)| \leq \sqrt{n}|A(p,t)|$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(p,\tilde{t}) - \varphi(p,t)| &= \left| \int_t^{\tilde{t}} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(p,s)ds \right| \\
&= \left| \int_t^{\tilde{t}} H(p,s)N(p,s)ds \right| \\
&\leq \int_t^{\tilde{t}} |H(p,s)|ds \\
&\leq \sqrt{n} \int_t^{\tilde{t}} |A(p,s)|ds,
\end{aligned}
$$

mas como o fluxo desenvolve em $T$ singularidade do tipo $I$ temos,

$$
\begin{aligned}
\int_t^{\tilde{t}} |A(p,s)|ds & \int_t^{\tilde{t}} \max_{p \in M} |A(p,s)|ds \\
&\leq C \int_t^{\tilde{t}} \frac{1}{\sqrt{2(T-s)}} ds \\
&\leq C \left| \sqrt{2(T-\tilde{t})} - \sqrt{2(T-t)} \right|
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
|\varphi(p,\tilde{t}) - \varphi(p,t)| \leq \sqrt{2n}C \left| \sqrt{(T-\tilde{t})} - \sqrt{(T-t)} \right|, \tag{4.30}
$$

para todo $t, \tilde{t} \in [0,T)$. Logo, de (4.30),

$$
||\varphi_{\tilde{t}} - \varphi_t||_\infty \leq \sqrt{2n}C \left| \sqrt{(T-\tilde{t})} - \sqrt{(T-t)} \right|, \tag{4.31}
$$

para todo $t, \tilde{t} \in [0,T)$, em que $|| \cdot ||_\infty$ é a norma do supremo.

Tome $\{t_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ sequência em $[0,T)$ de maneira que $t_N \to T$. Vale então, de (4.31),

$$||\varphi_{t_N} - \varphi_{t_M}||_\infty \leq \sqrt{2n}C\left|\sqrt{(T-t_N)} - \sqrt{(T-t_M)}\right|, \tag{4.32}$$

para todo $N, M \in \mathbb{N}$.
$\{t_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy, pois $\{t_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge. Da desigualdade em (4.32) concluímos que $\{\varphi_{t_N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $C(M,\mathbb{R}^{n+1})$. Como $C(M,\mathbb{R}^{n+1})$ é completo, existe $\varphi_T \in C(M,\mathbb{R}^{n+1})$ de maneira que $\varphi_{t_N} \to \varphi_T$. Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} ||\varphi_{t_N} - \varphi_t||_\infty &\leq \lim_{N\to\infty} \sqrt{2n}C\left|\sqrt{(T-t_N)} - \sqrt{(T-t)}\right| \\ &= \sqrt{2n}C\left| - \sqrt{(T-t)}\right| \\ &= C\sqrt{2n(T-t)},\end{aligned}$$

mas,

$$||\varphi_T - \varphi_t||_\infty = ||\lim_{N\to\infty} \varphi_{t_N} - \varphi_t||_\infty = \lim_{N\to\infty} ||\varphi_{t_N} - \varphi_t||_\infty,$$

e portanto,

$$||\varphi_T - \varphi_t||_\infty \leq C\sqrt{2n(T-t)}, \tag{4.33}$$

para todo $t \in [0,T)$. Da desigualdade em (4.33) concluímos que $\varphi_t$ converge uniformemente, quando $t \to T$, para uma função contínua $\varphi_T : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Assim concluímos a demonstração. □

**Observação:** Em vista da Proposição 4.8 iremos denotar $\hat{p} = \varphi_T(p)$.

No Capítulo 3 demonstramos, na Proposição 3.10, que o conjunto limite do fluxo (conjunto $S$), isto é, o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que existe sequência de pares $(p_i, t_i) \in M \times [0,T)$ de maneira que $t_i \to T$ e $\varphi(p_i,t_i) \to x$, é fechado e limitado. O Corolário seguinte irá garantir que quando o fluxo desenvolve singularidade do tipo $I$ o conjunto $S$ é a imagem da função obtida na Proposição 4.8.

**Corolário 4.9.** *Seja $\varphi : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média de uma hipersuperfície compacta $n-$dimensional no intervalo maximal de existência $[0,T)$ que desenvolve em $T$ singularidade do tipo $I$. Então $S = \{\hat{p} \mid p \in M\}$, em que $S$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que existe sequência de pares $(p_i,t_i) \in M \times [0,T)$ de maneira que $t_i \to T$ e $\varphi(p_i,t_i) \to x$.*

**Demonstração:** Claramente $\{\hat{p} \mid p \in M\} \subset S$. Mostremos que $S \subset \{\hat{p} \mid p \in M\}$. Seja $x \in S$. Então existe sequência de pares $(p_i,t_i) \in M \times [0,T)$ de maneira que $t_i \to T$ e $\varphi(p_i,t_i) \to x$. De (4.30) temos,

$$|\varphi(p_i,t_i) - \varphi(p_i,t)| \leq \sqrt{2n}C\left|\sqrt{(T-t_i)} - \sqrt{(T-t)}\right|. \tag{4.34}$$

Tomando o limite, quando $t \to T$, em (4.34), obtemos:

$$|\varphi(p_i, t_i) - \hat{p}_i| \leq \sqrt{2n}C \left|\sqrt{(T - t_i)}\right|. \tag{4.35}$$

De (4.35),

$$\lim_{i\to\infty} |x - \hat{p}_i| \leq \lim_{i\to\infty} (|x - \varphi(p_i, t_i)| + |\varphi(p_i, t_i) - \hat{p}_i|) = \lim_{i\to\infty} |x - \varphi(p_i, t_i)| + \lim_{i\to\infty} |\varphi(p_i, t_i) - \hat{p}_i| = 0,$$

ou seja, $\hat{p}_i \to x$. Sabemos que $\{\hat{p} \mid p \in M\}$ é compacto, pois é a imagem do compacto $M$ pela função contínua $\varphi_T$ . Então $\{\hat{p} \mid p \in M\}$ é fechado e portanto $x \in \{\hat{p} \mid p \in M\}$. Assim concluímos a demonstração. □

Em vista do Corolário 4.9 veremos a seguir que podemos, para cada $\hat{p} \in S$, redimensionar o fluxo ao redor de $\hat{p}$ de maneira a obter propriedades importantes como a limitação de sua Norma da Segunda Forma Fundamental e a limitação do Fluxo redimensionado. Tais propriedades serão fundamentais na próxima seção.

**Definição 4.10** (Fluxo de curvatura média redimensionado)**.** Seja $\varphi : M \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ Fluxo de curvatura média de uma hipersuperfície compacta $n-$dimensional no intervalo maximal de existência $[0, T)$ que desenvolve em $T$ singularidade do tipo $I$. Seja $\hat{p} \in S$. Definimos o Fluxo de curvatura média redimensionado $\tilde{\varphi} : M \times [-\frac{\ln T}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ por,

$$\tilde{\varphi}(q, s) = \frac{\varphi\left(q, \alpha^{-1}(s)\right) - \hat{p}}{\sqrt{2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)}},$$

em que $\alpha : [0, T) \to [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$ é definida como,

$$\alpha(t) = -\frac{\ln(T - t)}{2}.$$

**Proposição 4.11.** *Seja $\tilde{\varphi} : M \times [-\frac{\ln T}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ o Fluxo de curvatura média redimensionado dado pela Definição 4.10. Então:*

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}(q, s) = \tilde{H}(q, s)\tilde{N}(q, s) + \tilde{\varphi}(q, s),$$

*em que $\tilde{H}$ e $\tilde{N}$ são respectivamente a curvatura média e o vetor normal nas hipersuperfícies redimensionadas.*

**Demonstração:** Aplicando a regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}(q, s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\varphi\left(q, \alpha^{-1}(s)\right) - \hat{p}}{\sqrt{2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)}}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\alpha^{-1}(s)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi(q, t) - \hat{p}}{\sqrt{2\left(T - t\right)}}\right) \circ \alpha^{-1}(s)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\left[\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)}{\sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}}+\frac{\varphi\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)-\hat{p}}{\left(2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\\
&= \sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)+\frac{\varphi\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)-\hat{p}}{\sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}}\\
&= \sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}H\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)N\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)+\tilde{\varphi}(q,s),
\end{aligned}
$$

mas como o fluxo é obtido por homotetia valem $\sqrt{2\Big(T-\alpha^{-1}(s)\Big)}H\big(q,\alpha^{-1}(s)\big)=\tilde{H}(q,s)$ e $N\big(q,\alpha^{-1}(s)\big)=\tilde{N}(q,s)$, e então,

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}(q,s)=\tilde{H}(q,s)\tilde{N}(q,s)+\tilde{\varphi}(q,s).$$

$\square$

**Proposição 4.12.** *Seja $\tilde{\varphi}: M\times[-\frac{\ln T}{2},\infty)\to\mathbb{R}^{n+1}$ o Fluxo de curvatura média redimensionado dado pela Definição* 4.10*. Então:*

*i)* $|\tilde{A}|$ *é limitada.*

*ii)* $\tilde{\varphi}_s(M)\cap B\left(0,\sqrt{2n}C\right)\neq\emptyset$ *para todo* $s\in[-\frac{\ln T}{2},\infty)$.

**Demonstração:**

$i)$ Como o fluxo é obtido por homotetia vale $|\tilde{A}(q,s)|=\sqrt{2(T-\alpha^{-1}(s)}\,|A\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)|$. Temos,

$$
\begin{aligned}
|\tilde{A}(q,s)| &= \sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}\left|A\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)\right|\\
&\le \sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}\max_{q\in M}\left|A\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)\right|,
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

porém, o Fluxo redimensionado é definido a partir de um fluxo que desenvolve singularidade do tipo $I$ em $T$, isto é, vale

$$\max_{q\in M}\left|A\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)\right|\le\frac{C}{\sqrt{2\big(T-\alpha^{-1}(s)\big)}},$$

para todo $s\in[-\frac{\ln T}{2},\infty)$, e então de (4.36),

$$|\tilde{A}(q,s)|\le C,$$

para todo $s\in[-\frac{\ln T}{2},\infty)$.

$ii)$ Como em (4.30) temos, para todo $q\in M$,

$$\left|\varphi\left(q,\alpha^{-1}(s)\right)-\varphi(q,t)\right|\le\sqrt{2n}C\left|\sqrt{(T-\alpha^{-1}(s))}-\sqrt{(T-t)}\right|. \tag{4.37}$$

Aplicando em $p$ e tomando o limite, quando $t \to T$, em (4.37)

$$\lim_{t\to T} |\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \varphi(p,t)| \leq \sqrt{n} C \sqrt{2(T-\alpha^{-1}(s))},$$

porém,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T} |\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \varphi(p,t)| &= |\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \lim_{t\to T}\varphi(p,t)| \\ &= |\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \hat{p}|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \hat{p}| \leq \sqrt{n} C \sqrt{2(T-\alpha^{-1}(s))}, \tag{4.38}$$

para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Pela definição de fluxo redimensionado (Definição 4.10) e por (4.38) temos,

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}(p,s)| &= \left| \frac{\varphi\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \hat{p}}{\sqrt{2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)}} \right| \\ &= \sqrt{n} C,\end{aligned}$$

e então,

$$|\tilde{\varphi}(p,s)| < \sqrt{2n} C, \tag{4.39}$$

para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Logo $\tilde{\varphi}_s(p) \in B(0, \sqrt{2n}C)$ para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Portanto $\tilde{\varphi}_s(M) \cap B\left(0, \sqrt{2n}C\right) \neq \emptyset$ para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. $\square$

**Teorema 4.13** (Fórmula da monotonia redimensionada)**.** *Seja $\tilde{\varphi} : M \times [-\frac{\ln T}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ o Fluxo de curvatura média redimensionado dado pela Definição* 4.10*. Dado $\hat{p} \in S$ temos:*

$$\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s = -\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left|\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_s,$$

*para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$.*

**Demonstração:** Temos,

$$\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s = \frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}} d\tilde{\mu}_s = \frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}} \tilde{\mu}_s dL^n = \int_M \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}} \tilde{\mu}_s\right) dL^n,$$

mas como o fluxo é obtido por homotetia vale $\tilde{\mu}_s = \frac{1}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}$, e então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s &= \int_M \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}}}{\left[2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}\right) dL^n \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_M \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}}}{\left[2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}\right) dL^n \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_M \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}}}{\left[4\pi\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}\right) dL^n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_M \frac{d}{ds}\left(\alpha^{-1}(s)\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_t\right) \circ \alpha^{-1}(s) dL^n \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_M 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_t\right) \circ \alpha^{-1}(s) dL^n \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right) \int_M \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_t\right) \circ \alpha^{-1}(s) dL^n \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right) \left[\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}}\mu_t dL^n\right] \circ \alpha^{-1}(s) \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right) \left[\frac{d}{dt}\int_M \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_t\right] \circ \alpha^{-1}(s),
\end{aligned}
$$

e pela Fórmula da monotonia de Huisken (Teorema (4.6)),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s &= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\left[\int_M \left(H + \frac{\langle x-\hat{p}, N\rangle}{2(T-t)}\right)^2 \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_t\right] \circ \alpha^{-1}(s) \\
&= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left[\int_M 2(T-t)\left(H + \frac{\langle x-\hat{p}, N\rangle}{2(T-t)}\right)^2 \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_t\right] \circ \alpha^{-1}(s) \\
&= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left[\int_M \left(\sqrt{2(T-t)}H + \frac{\langle x-\hat{p}, N\rangle}{\sqrt{2(T-t)}}\right)^2 \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-t)}}}{\left[4\pi\left(T-t\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_t\right] \circ \alpha^{-1}(s) \\
&= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_M \left(\sqrt{2(T-\alpha^{-1}(s))}H + \frac{\langle x-\hat{p}, N\rangle}{\sqrt{2(T-\alpha^{-1}(s))}}\right)^2 \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(s))}} d\mu_{\alpha^{-1}(s)}}{\left[4\pi\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \\
&= -(2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_M \left(\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right)^2 \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\left[4\pi\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_{\alpha^{-1}(s)} \\
&= -\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_M \left(\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right)^2 \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\left[2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}} d\mu_{\alpha^{-1}(s)} \\
&= -\int_M \left(\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right)^2 \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\left[2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \mu_{\alpha^{-1}(s)} dL^n \\
&= -\int_M \left(\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right)^2 e^{-\frac{|y|^2}{2}} \tilde{\mu}_s dL^n \\
&= -\int_M \left(\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N}\right\rangle\right)^2 e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s.
\end{aligned}
$$

$\square$

**Corolário 4.14.** *Seja $\tilde{\varphi} : M \times [-\frac{\ln T}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ o Fluxo de curvatura média redimensionado dado pela definição* 4.10. *Valem:*

*i)*
$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s,$$
*é não-crescente em $[-\frac{\ln T}{2}, \infty)$.*

*ii)*
$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s \leq \frac{Vol\big(\varphi_0(M)\big)}{\big(2T\big)^{\frac{n}{2}}},$$
*para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$.*

*iii)*
$$\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{+\infty} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \Big|\tilde{H} + \big\langle y, \tilde{N} \big\rangle\Big|^2 d\tilde{\mu}_u du < \infty.$$

**Demonstração:**

*i)* Pelo Teorema 4.13,
$$\frac{d}{ds} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s = -\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \Big|\tilde{H} + \big\langle y, \tilde{N} \big\rangle\Big|^2 d\tilde{\mu}_s. \tag{4.40}$$

Como o integrando em (4.40) é não-negativo obtemos,
$$\frac{d}{ds} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s \leq 0$$
para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Assim concluímos.

*ii)* Pelo item *i)* temos
$$\begin{aligned}
\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s &\leq \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_{\frac{-\ln T}{2}} \\
&= \int_M e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4(T-\alpha^{-1}(\frac{-\ln T}{2}))}} d\tilde{\mu}_{\frac{-\ln T}{2}} \\
&= \int_M \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4T}}}{\left[2\left(T-\alpha^{-1}(\frac{-\ln T}{2})\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \mu_{\alpha^{-1}(\frac{-\ln T}{2})} dL^n \\
&= \int_M \frac{e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4T}}}{(2T)^{\frac{n}{2}}} \mu_0 dL^n \\
&= \frac{1}{(2T)^{\frac{n}{2}}} \int_M e^{-\frac{|x-\hat{p}|^2}{4T}} d\mu_0 = \frac{1}{(2T)^{\frac{n}{2}}} \int_M d\mu_0 = \frac{\mathrm{Vol}\left(\varphi_0(M)\right)}{(2T)^{\frac{n}{2}}},
\end{aligned}$$
para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$.

*iii)* Pelo Teorema 4.13,

$$\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_u du = -\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s}\left[\frac{d}{du}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_u\right] du. \tag{4.41}$$

Aplicando o Teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned}
-\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s}\left[\frac{d}{du}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_u\right] du &= -\left[\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s - \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_{\frac{-\ln T}{2}}\right]\\
&= \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_{\frac{-\ln T}{2}} - \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_s\\
&\leq \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} d\tilde{\mu}_{\frac{-\ln T}{2}}
\end{aligned}$$

ou seja, de (4.41) e pelo item *ii)*

$$\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_u du \leq \frac{\operatorname{Vol}(\varphi_0(M))}{(2T)^{\frac{n}{2}}}, \tag{4.42}$$

para todo $s\in[-\frac{\ln T}{2},\infty)$. Tomando o limite, quando $s\to\infty$, em (4.42), concluímos que:

$$\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{+\infty}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\langle y,\tilde{N}\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_u du < \infty.$$

$\square$

## 4.3 Self-Shrinkers

No capítulo 2 vimos (Exemplo 2.5) que os Self-Shrinkers, isto é, hipersuperfícies $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfazem a equação

$$H(p) + \langle\varphi(p), N(p)\rangle = 0 \quad \text{para todo } \ p\in M, \tag{4.43}$$

são soluções do Fluxo de curvatura média via certa homotetia. Nesta seção nos dedicaremos a demonstrar que tais hipersuperfícies "modelam"as singularidades do fluxo, isto é, o fluxo redimensionado converge para hipersuperfícies que satisfazem a equação em (4.43). O próximo Lema (para uma demonstração ver a referência [5]) irá garantir que o Fluxo de curvatura média converge para um conjunto de hipersuperfícies. Nosso último resultado, da seção, irá garantir que tal conjunto de hipersuperfícies limites é constituído apenas por Self-Shrinkers.

**Lema 4.15.** *Seja $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sequência em $[-\frac{\ln T}{2},\infty)$ tal que $s_j\to\infty$. Então existe subsequência $\{s_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\tilde{\varphi}_{s_{j_k}}$ converge para uma hipersuperfície completa, não-vazia $\tilde{M}_\infty$.*

**Lema 4.16.** *Seja $\tilde{\varphi} : M \times [-\frac{\ln T}{2}, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ o Fluxo de curvatura média redimensionado dado pela definição* 4.10. *Então existe constante $D > 0$ tal que para todo $s_1, s_2 \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$ vale:*

$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left|\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_2} \geq -D(s_2 - s_1) + \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left|\tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_1}.$$

**Demonstração:** Como,

$$\tilde{H}(p, s) = \sqrt{2(T - \alpha^{-1}(s))} H(p, \alpha^{-1}(s))$$

temos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s}(p, s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)} H(p, \alpha^{-1}(s))\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\alpha^{-1}(s)\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{2\left(T - t\right)} H(p, t)\right) \circ \alpha^{-1}(s) \\
&= \left(2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial H}{\partial t}\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \sqrt{2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)} H\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) \\
&= \left(2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial H}{\partial t}\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) - \tilde{H}(p, s),
\end{aligned}$$

mas usando a Proposição 3.12 obtemos,

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s}(p, s) = \left(2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)\right)^{\frac{3}{2}} \left(\Delta H\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) + H\left(p, \alpha^{-1}(s)\right) |A|^2 \left(p, \alpha^{-1}(s)\right)\right) - \tilde{H}(p, s)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s}(p, s) = \Delta \tilde{H}(p, s) + \tilde{H}(p, s)|\tilde{A}|^2(p, s) - \tilde{H}(p, s). \tag{4.44}$$

Como $\tilde{N}(p, s) = N\left(p, \alpha^{-1}(s)\right)$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{N}}{\partial s}(p, s) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(N\left(p, \alpha^{-1}(s)\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\alpha^{-1}(s)\right) \left(\frac{\partial N}{\partial t}(p, t)\right) \circ \alpha^{-1}(s),
\end{aligned}$$

mas usando a Proposição 3.12 obtemos,

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial s}(p, s) = -2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right) d\varphi_{\alpha^{-1}(s)}(\nabla H)$$

isto é,

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial s}(p, s) = -d\tilde{\varphi}_s(\nabla \tilde{H}). \tag{4.45}$$

Como

$$\tilde{\mu}_s = \frac{1}{\left[2\left(T - \alpha^{-1}(s)\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \mu_{\alpha^{-1}(s)}$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\tilde{\mu}_s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}\right)\\ &= \frac{d}{ds}\left(\alpha^{-1}(s)\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{[2(T-t)]^{\frac{n}{2}}}\mu_t\right)\circ\alpha^{-1}(s)\\ &= 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\left(\frac{n\mu_{\alpha^{-1}(s)}}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n+2}{2}}}+\frac{1}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}}\frac{d}{dt}(\mu_t)\circ\alpha^{-1}(s)\right)\end{aligned}$$

mas usando a Proposição 3.12 obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\tilde{\mu}_s) &= 2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)\left(\frac{n\mu_{\alpha^{-1}(s)}}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n+2}{2}}}-\frac{H^2(p,\alpha^{-1}(s))}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}}\mu_{\alpha^{-1}(s)}\right)\\ &= n\frac{\mu_{\alpha^{-1}(s)}}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}}-2\left(T-\alpha^{-1}(s)\right)H^2\left(p,\alpha^{-1}(s)\right)\frac{\mu_{\alpha^{-1}(s)}}{[2(T-\alpha^{-1}(s))]^{\frac{n}{2}}},\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}(\tilde{\mu}_s) = \left(n-\tilde{H}^2(p,s)\right)\tilde{\mu}_s. \tag{4.46}$$

Pela proposição 4.12 $|\tilde{A}|$ é limitado. Como $|\tilde{A}|$ é limitado, pela Proposição 1.27, $\tilde{H}$ é limitado. É possível mostrar que $|\nabla\tilde{H}|(p,s)$ e $|\Delta\tilde{H}|(p,s)$ também são limitados. Tal afirmação decorre de um resultado mais geral que garante que as derivadas covariantes de todas as ordens do Tensor Segunda forma fundamental, $|\nabla^m\tilde{A}|$, são limitados (ver a referência [1]). Seja $M$ constante que limite tais funções. Assim, pela Proposição 4.11,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial s}\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|^2\right|(p,s) &= \left|2\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|\left(\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right)\right|(p,s)\\ &= 2\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|(p,s)\left|\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|(p,s)\\ &\le 2\left(\left|\tilde{H}\right|+\left|\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|\right)(p,s)\left(\left|\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}\right|+\left|\frac{\partial}{\partial s}\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|\right)(p,s)\\ &\le 2\left(M+|\tilde{\varphi}|\right)(p,s)\left(\left|\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}\right|+\left|\left\langle\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s},\tilde{N}\right\rangle\right|+\left|\left\langle\tilde{\varphi},\frac{\partial\tilde{N}}{\partial s}\right\rangle\right|\right)(p,s)\\ &\le 2\left(M+|\tilde{\varphi}|\right)(p,s)\left(\left|\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}\right|+\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}\right|+|\tilde{\varphi}|\left|\frac{\partial\tilde{N}}{\partial s}\right|\right)(p,s),\end{aligned}$$

mas de (4.44) e (4.45) obtemos $\left|\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s}\right| \le M^3+2M$ e $\left|\frac{\partial\tilde{N}}{\partial s}\right| = |d\tilde{\varphi}_s(\nabla\tilde{H})| = |\nabla\tilde{H}| \le M$, ou seja,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|^2\right|(p,s)\leq 2\left(M+|\tilde{\varphi}|\right)(p,s)\left(\left|M^3+2M+\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}\right|+M\left|\tilde{\varphi}\right|\right|\right)(p,s)$$

e pela Proposição 4.11,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|^2\right|(p,s)\leq 2\left(M+|\tilde{\varphi}|\right)(p,s)\left(\left|M^3+3M+|\tilde{\varphi}|+M\left|\tilde{\varphi}\right|\right|\right)(p,s). \quad (4.47)$$

Consequentemente, para algum $C_1>0$ vale,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left|\tilde{H}+\left\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\right\rangle\right|^2\right|(p,s)\leq C_1+C_1|\tilde{\varphi}|^2(p,s). \quad (4.48)$$

De maneira análoga e usando (4.46), temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{ds}\Big(e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\tilde{\mu}_s\Big)\right| &= \left|\tilde{\mu}_s\frac{d}{ds}\Big(e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big)+e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\frac{d}{ds}(\tilde{\mu}_s)\right| \\
&= \left|\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\big\langle\tilde{\varphi}(p,s),\tilde{\varphi}(p,s)\big\rangle\Big)+\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\big(n-\tilde{H}^2(p,s)\big)\right| \\
&= \left|\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(-\frac{1}{2}2\big\langle\tilde{\varphi}(p,s),\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}(p,s)\big\rangle+n-\tilde{H}^2(p,s)\Big)\right| \\
&= \left|\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(-\big\langle\tilde{\varphi},\tilde{H}\tilde{N}+\tilde{\varphi}\big\rangle+n-\tilde{H}^2\Big)\right|(p,s) \\
&= \left|\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\right|\left|\Big(-\big\langle\tilde{\varphi},\tilde{H}\tilde{N}+\tilde{\varphi}\big\rangle+n-\tilde{H}^2\Big)\right|(p,s) \\
&= \tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\left|\Big(-\tilde{H}\big\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\big\rangle-|\tilde{\varphi}|^2+n-\tilde{H}^2\Big)\right|(p,s) \\
&\leq \tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(\big|\tilde{H}\big\langle\tilde{\varphi},\tilde{N}\big\rangle\big|+|\tilde{\varphi}|^2+n+\tilde{H}^2\Big)(p,s) \\
&\leq \tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(\big|\tilde{H}\big|\big|\tilde{\varphi}\big|+|\tilde{\varphi}|^2+n+\tilde{H}^2\Big)(p,s) \\
&\leq \tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(M\big|\tilde{\varphi}\big|+|\tilde{\varphi}|^2+n+M^2\Big)(p,s),
\end{aligned}$$

e então, para algum $C_2>0$,

$$\frac{d}{ds}\Big(e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\tilde{\mu}_s\Big)\leq\tilde{\mu}_s e^{-\frac{|\tilde{\varphi}(p,s)|^2}{2}}\Big(C_2+C_2|\tilde{\varphi}|+|\tilde{\varphi}|^2\Big). \quad (4.49)$$

Temos,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_s\right| &= \left|\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2\tilde{\mu}_s dL^n\right| \\
&= \left|\int_M\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2\tilde{\mu}_s\right)dL^n\right|,
\end{aligned} \quad (4.50)$$

mas,

$$\left|\int_M \frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2\tilde{\mu}_s\right)dL^n\right| \le \left|\int_M \left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{|y|^2}{2}}\tilde{\mu}_s\right)dL^n\right| + \left|\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\tilde{\mu}_s\frac{d}{ds}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 dL^n\right|$$

isto é, de (4.48) e (4.49),

$$\left|\int_M \frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2\tilde{\mu}_s\right)dL^n\right| \le \int_M (M+|y|)^2\left(C_2+C_2|y|+|y|^2\right)e^{-\frac{|y|^2}{2}}\tilde{\mu}_s dL^n + \int_M (C_1+C_1|y|^2)e^{-\frac{|y|^2}{2}}\tilde{\mu}_s dL^n$$

e consequentemente tomando $C$ como o máximo entre $C_1, C_2$ e $M$, obtemos de (4.50),

$$\left|\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_s\right| = \int_M (C+|y|)^2\left(1+C+C|y|+|y|^2\right)e^{-\frac{|y|^2}{2}}\tilde{\mu}_s dL^n. \tag{4.51}$$

Como $\tilde{\mu}_s$ é família limitada (caso contrário obteríamos uma contradição com o Lema 4.15), então o lado direito de (4.51) é finito, pois pode ser estimado pela integral da função de Gauss. Assim,

$$\left|\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\langle y,\tilde{N}\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_s\right| < \infty, \tag{4.52}$$

para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Em vista de (4.52) tome $D > 0$ constante tal que,

$$-D < \frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_s < D, \tag{4.53}$$

para todo $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. Dados $s_1, s_2 \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$ o Teorema do valor médio nos garante que existe $\tilde{s} \in [s_1, s_2]$ de maneira que,

$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_2} = \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_1} + (s_2-s_1)\frac{d}{ds}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{\tilde{s}},$$

e usando (4.53), concluímos que

$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_2} \ge -D(s_2-s_1) + \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\left\langle y,\tilde{N}\right\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_{s_1}.$$

Como $D$ independe de $s \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$ a desigualdade acima vale para todo $s_1, s_2 \in [-\frac{\ln T}{2}, \infty)$. $\square$

**Teorema 4.17.** *Seja $\tilde{M}_\infty$ uma hipersuperficie obtida pela Proposição* 4.15*. Então:*

$$\tilde{H}(y) + \left\langle y, \tilde{N}(y) \right\rangle = 0,$$

*para todo $y \in \tilde{M}_\infty$.*

**Demonstração:** Pelo item *iii*) do Corolário 4.14 temos,

$$\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{+\infty} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_u du < \infty. \tag{4.54}$$

Seja $\{s_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada pelo Lema 4.15. Então, de (4.54),

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s_{j_k}} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_u du < \infty. \tag{4.55}$$

**Afirmação:** Vale que,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_{s_{j_k}} = 0. \tag{4.56}$$

De fato, suponha que não vale (4.56). Então existe $\varepsilon > 0$ e subsequência $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que,

$$\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \langle y, \tilde{N} \rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_{s_{j_{k_i}}} \geq \varepsilon \quad \text{para todo} \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{4.57}$$

Considerando $s \in [s_{j_{k_i}}, s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D}]$ e aplicando o Lema 4.16, temos, de (4.57),

$$\begin{aligned} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_s &\geq -D(s - s_{j_{k_i}}) + \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_{s_{j_{k_i}}} \\ &\geq -D(s - s_{j_{k_i}}) + \varepsilon \\ &\geq -D(s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D} - s_{j_{k_i}}) + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $s \in [s_{j_{k_i}}, s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D}]$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\int_{s_{j_{k_i}}}^{s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D}} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \left\langle y, \tilde{N} \right\rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_u du \geq \int_{s_{j_{k_i}}}^{s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D}} \frac{\varepsilon}{2} du = \frac{\varepsilon^2}{4D}, \tag{4.58}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, de (4.58)

$$\begin{aligned} m\frac{\varepsilon^2}{4D} = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{4D} &\leq \sum_{i=1}^m \int_{s_{j_{k_i}}}^{s_{j_{k_i}} + \frac{\varepsilon}{2D}} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \langle y, \tilde{N} \rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_u du \\ &\leq \int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s_{j_{k_m}} + \frac{\varepsilon}{2D}} \int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}} \left| \tilde{H} + \langle y, \tilde{N} \rangle \right|^2 d\tilde{\mu}_u du, \end{aligned} \tag{4.59}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Tomando o limite, quando $m \to +\infty$, em (4.59),

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\frac{-\ln T}{2}}^{s_{j_{k_m}}+\frac{\varepsilon}{2D}}\int_M e^{-\frac{|y|^2}{2}}\left|\tilde{H}+\langle y,\tilde{N}\rangle\right|^2 d\tilde{\mu}_u du = +\infty,$$

uma contradição com (4.54). Assim a afirmação está demonstrada.

Pela afirmação temos,

$$\lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{\left|\tilde{\varphi}(q,s_{j_k})\right|^2}{2}}\left|\tilde{H}(q,s_{j_k})+\left\langle\tilde{\varphi}(q,s_{j_k}),\tilde{N}(p,s_{j_k})\right\rangle\right|^2=0, \tag{4.60}$$

para todo $q \in M$. Como para cada $q \in M$ o fluxo converge pontualmente a $\tilde{M}_\infty$, mais precisamente, quando $k \to \infty$, temos $\tilde{\varphi}(q,s_{j_k}) \to \tilde{y}$ para algum $\tilde{y} \in \tilde{M}_\infty$, obtemos de (4.60),

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\tilde{H}(p,s_{j_k})+\left\langle\tilde{\varphi}(p,s_{j_k}),\tilde{N}(p,s_{j_k})\right\rangle\right|=0,$$

e portanto,

$$\tilde{H}(\tilde{y})+\left\langle\tilde{y},\tilde{N}(\tilde{y})\right\rangle=0,$$

para todo $\tilde{y} \in \tilde{M}_\infty$. $\square$

# Capítulo 5

# Operador Ornstein–Uhlenbeck e aplicações

Este capítulo será dedicado a um exemplo de como podemos usar Análise em variedades Riemannianas para obter resultados geométricos, isto é, utilizaremos o Operador Ornstein–Uhlenbeck para concluir certas propriedades para casos específicos de Self-Shrinkers e a partir disso, aliado a resultados de classificação de hipersuperfícies, classificar tais Self-Shrinkers.

## 5.1 O operador $\mathcal{L}$

Nosso interesse no Operador Ornstein–Uhlenbeck reside no fato de que o mesmo é, em certo sentido, um operador autoadjunto no espaço $L^2(M)$ com peso (Ver referência [8] para variedades com peso). Veremos essa e outras propriedades a seguir.

**Definição 5.1.** (Operador $\mathcal{L}$) Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície e $u : M \to \mathbb{R}$ função suave. Definimos o operador $\mathcal{L} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ por:

$$\mathcal{L}u = \Delta u - \langle \varphi, d\varphi(\nabla u) \rangle, \tag{5.1}$$

em que $\Delta$ e $\nabla$ são, respectivamente, o Laplaciano e o Gradiente em $M$.

A seguir demonstraremos um pequeno Lema que será utilizado em muitas demonstrações nesta seção.

**Lema 5.2.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Então,*

$$d\varphi_p\left(\nabla|\varphi|^2(p)\right) = 2\varphi(p)^T.$$

*para todo $p \in M$.*

**Demonstração:** Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = v$. Pela definição de Gradiente temos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla |\varphi|^2(p), v \rangle &= \frac{d}{dt} |\varphi \circ c|^2 \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \langle \varphi \circ c, \varphi \circ c \rangle \Big|_{t=0} \\
&= 2 \left\langle \frac{d}{dt} (\varphi \circ c) \Big|_{t=0}, (\varphi \circ c)(0) \right\rangle \\
&= 2 \langle d\varphi_p(v), \varphi(p) \rangle \\
&= 2 \left\langle d\varphi_p(v), \varphi(p)^T \right\rangle \\
&= \left\langle d\varphi_p(v), 2\varphi(p)^T \right\rangle .
\end{aligned}$$

Logo, como nossa imersão é isométrica (definida via pullback),

$$\left\langle d\varphi_p \left( \nabla |\varphi|^2(p) \right), d\varphi_p(v) \right\rangle = \left\langle \nabla |\varphi|^2(p), v \right\rangle = \left\langle 2\varphi(p)^T, d\varphi_p(v) \right\rangle ,$$

para todo $v \in T_pM$. Portanto.

$$d\varphi_p \left( \nabla |\varphi|^2(p) \right) = 2\varphi(p)^T. \tag{5.2}$$

Como podemos repetir a abordagem para todo $p \in M$ concluímos a demonstração. □

**Proposição 5.3.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície e $u : M \to \mathbb{R}$ função suave. Então:*

$$\mathcal{L}u = e^{\frac{|\varphi|^2}{2}} \operatorname{div}\left( e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \nabla u \right). \tag{5.3}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
\Delta u - \langle \varphi, d\varphi(\nabla u) \rangle &= \Delta u - \left\langle \varphi^T, d\varphi(\nabla u) \right\rangle \\
&= e^{\frac{|\varphi|^2}{2}} e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \left[ \Delta u - \left\langle \varphi^T, d\varphi(\nabla u) \right\rangle \right] \\
&= e^{\frac{|\varphi|^2}{2}} \left[ e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \Delta u - e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \left\langle \varphi^T, d\varphi(\nabla u) \right\rangle \right],
\end{aligned}$$

isto é, de (5.1), do item $i)$ do Corolário 1.10 e do Lema 5.2,

$$\mathcal{L}u = e^{\frac{|\varphi|^2}{2}} \left[ e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \operatorname{div}(\nabla u) - \frac{e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}}{2} \left\langle d\varphi\left( \nabla |\varphi|^2 \right), d\varphi(\nabla u) \right\rangle \right],$$

e como nossa imersão é isométrica (definida via pullback),

$$\mathcal{L}u = e^{\frac{|\varphi|^2}{2}} \left[ e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \operatorname{div}(\nabla u) - \frac{e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}}{2} \left\langle \nabla |\varphi|^2, \nabla u \right\rangle \right]. \tag{5.4}$$

Observemos que, pela regra da cadeia,

$$\nabla\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\right)=-\frac{e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}}{2}\nabla|\varphi|^2,$$

e substituindo em (5.4)

$$\mathcal{L}u=e^{\frac{|\varphi|^2}{2}}\left[e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\operatorname{div}(\nabla u)+\left\langle\nabla\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\right),\nabla u\right\rangle\right]. \tag{5.5}$$

Pela Proposição 1.9,

$$\operatorname{div}\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right)=e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\operatorname{div}(\nabla u)+\left\langle\nabla\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\right),\nabla u\right\rangle,$$

e substituindo em (5.5),

$$\mathcal{L}u=e^{\frac{|\varphi|^2}{2}}\operatorname{div}\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right).$$

□

**Lema 5.4.** *Seja $\varphi : M\to\mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície, $u, v : M\to\mathbb{R}$ funções suaves. Se $u$ ou $v$ tem suporte compacto vale:*

$$\int_M v\,(\mathcal{L}u)\,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu=-\int_M\langle\nabla u,\nabla v\rangle\,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu. \tag{5.6}$$

**Demonstração:** Pela Proposição 5.3 temos,

$$\begin{aligned}\int_M v\,(\mathcal{L}u)\,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu&=\int_M ve^{\frac{|\varphi|^2}{2}}\operatorname{div}\left(e^{\frac{-|x|^2}{2}}\nabla u\right)e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu\\&=\int_M v\operatorname{div}\left(e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right)d\mu,\end{aligned}$$

e usando a Proposição 1.9,

$$\int_M v\,(\mathcal{L}u)\,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu=\int_M\operatorname{div}\left(ve^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right)d\mu-\int_M\left\langle\nabla v,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right\rangle d\mu. \tag{5.7}$$

Suponhamos que $v$ tenha suporte compacto. Seja $V\subset M$ aberto, com fronteira suave, de maneira que $\operatorname{supp} v\subset V$. De (5.7) e do fato de que $\operatorname{supp}\nabla v\subset\operatorname{supp} v$

$$\int_M v\,(\mathcal{L}u)\,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}d\mu=\int_V\operatorname{div}\left(ve^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right)d\mu-\int_V\left\langle\nabla v,e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right\rangle d\mu. \tag{5.8}$$

Como $v\equiv 0$ em $\partial V$ e pelo Teorema da divergência (Teorema 1.11),

$$\int_V\operatorname{div}\left(ve^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\nabla u\right)d\mu=\int_{\partial V}\left\langle ve^{\frac{-|x|^2}{2}}\nabla u,N\right\rangle d\mu=0,$$

em que $N$ é o campo unitário normal a $\partial V$ apontando para fora de $V$. Consequentemente, substituindo em (5.8),

$$\int_M v\,(\mathcal{L}u)\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu = -\int_V \langle \nabla v, \nabla u\rangle\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu = -\int_M \langle \nabla v, \nabla u\rangle\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu.$$

No caso em que $u$ tem suporte compacto a demonstração é análoga seguindo os passos a partir de (5.8). □

A partir do Lema 5.4 obtemos que $\mathcal{L}$ é um operador autoadjunto no subespaço das funções de suporte compacto contidas no espaço $L^2(M)$ com peso. De fato, se considerarmos a medida em $L^2(M)$ dada por $\nu = e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}}\mu$ temos, no produto interno usual,

$$\begin{aligned}
\langle v, \mathcal{L}u\rangle &= \int_M v\,(\mathcal{L}u)\, d\nu \\
&= \int_M v\,(\mathcal{L}u)\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= -\int_M \langle \nabla v, \nabla u\rangle\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= -\int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= \int_M u\,(\mathcal{L}v)\, e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= \int_M u\,(\mathcal{L}v)\, d\nu \\
&= \langle u, \mathcal{L}v\rangle\,,
\end{aligned}$$

Além disso, da equação acima $\int_M v\,(\mathcal{L}u)\, d\nu = \int_M u\,(\mathcal{L}v)\, d\nu$, e portanto também podemos interpretar o Operador $\mathcal{L}$ como satisfazendo uma espécie de integração por partes, ou mais ainda, como uma espécie de derivada fraca.

**Proposição 5.5.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um Self-Shrinker. Então valem:*

*i)* $\mathcal{L}|\varphi|^2 = 2n - 2|\varphi|^2$.

*ii)* $\mathcal{L}H^2 = 2\,(1 - |A|^2)\,H^2 + 2\,|\nabla H|^2$.

*iii)* $\mathcal{L}|A|^2 = 2\,|\nabla A|^2 + 2|A|^2\,(1 - |A|^2)$.

**Demonstração:**

*i)* Denotaremos $\overline{\nabla}$ pela conexão do ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$. Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = v$. Então $(\varphi \circ c)(0) = \varphi(p)$ e $\dfrac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0) = d\varphi_p(v)$. Logo, pelo Lema 5.2,

$$
\begin{aligned}
d\varphi_p\left(\nabla_v \nabla|\varphi|^2(p)\right) &= \left[\overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)} d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)\right]^T(p)\\
&= \left[\frac{d}{dt} d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)(c(t))\Big|_{t=0}\right]^T\\
&= \left[\frac{d}{dt} 2\varphi(c(t))^T\Big|_{t=0}\right]^T\\
&= 2\left[\frac{d}{dt}\Big(\varphi(c(t)) - \langle\varphi(c(t)), N(c(t))\rangle N(c(t))\Big)\Big|_{t=0}\right]^T\\
&= 2\left[d\varphi_p(v) - \langle\varphi(p), N(p)\rangle \frac{d}{dt} N(c(t))\Big|_{t=0} - \frac{d}{dt}\langle\varphi(c(t)), N(c(t))\rangle\Big|_{t=0} N(p)\right]^T\\
&= 2\left[d\varphi_p(v)\right]^T - 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle\left[\frac{d}{dt} N(c(t))\Big|_{t=0}\right]^T\\
&= 2d\varphi_p(v) - 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle\left[\overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)} N\right]^T\\
&= 2d\varphi_p(v) + 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle d\varphi_p(\mathcal{S}v)\\
&= d\varphi_p\left(2v + 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle\mathcal{S}v\right),
\end{aligned}
$$

e como $d\varphi_p$ é injetora concluímos que,

$$\nabla_v \nabla|\varphi|^2(p) = 2v + 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle\mathcal{S}v. \tag{5.9}$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$. De (5.9) e pela definição do Laplaciano,

$$
\begin{aligned}
\Delta|\varphi|^2(p) &= \sum_i \left\langle\nabla_{e_i}\nabla|\varphi|^2(p), e_i\right\rangle\\
&= \sum_i \langle 2e_i + 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle\mathcal{S}e_i, e_i\rangle\\
&= 2\sum_i 1 + \langle\varphi(p), N(p)\rangle\sum_i\langle\mathcal{S}e_i, e_i\rangle\\
&= 2n + \langle\varphi(p), N(p)\rangle\, tr(\mathcal{S})(p)\\
&= 2n + \langle\varphi(p), N(p)\rangle H(p),
\end{aligned}
$$

e pela hipótese de $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ser Self-Shrinker,

$$\Delta|\varphi|^2(p) = 2n - \langle\varphi(p), N(p)\rangle^2. \tag{5.10}$$

Assim pelo Lema 5.2, pela definição do Operador $\mathcal{L}$ e de (5.10),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}|\varphi|^2(p) &= 2n - 2\langle\varphi(p), N(p)\rangle^2 - 2\left\langle\varphi(p), \varphi(p)^T\right\rangle\\
&= 2n - 2\left\langle\varphi(p), \varphi(p)^N\right\rangle - 2\left\langle\varphi(p), \varphi(p)^T\right\rangle\\
&= 2n - 2\left\langle\varphi(p), \varphi(p)^N + \varphi(p)^T\right\rangle\\
&= 2n - 2|\varphi|^2(p),
\end{aligned}
$$

e como podemos repetir os passos para todo $p \in M$ vale a igualdade de funções.

*ii*) Pela definição do Operador $\mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}H^2 &= \Delta H^2 - \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H^2\right)\right\rangle \\
&= \operatorname{div}\left(\nabla H^2\right) - \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H^2\right)\right\rangle \\
&= \operatorname{div}\left(2H\nabla H\right) - \left\langle \varphi, d\varphi\left(2H\nabla H\right)\right\rangle \\
&= \operatorname{div}\left(2H\nabla H\right) - \left\langle \varphi, 2Hd\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle \\
&= 2H\operatorname{div}\left(\nabla H\right) + 2\left\langle \nabla H, \nabla H\right\rangle - 2H\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle \\
&= 2H\Delta H + 2|\nabla H|^2 - 2H\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = v$. Então $(\varphi \circ c)(0) = \varphi(p)$ e $\dfrac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0) = d\varphi_p(v)$. Temos, pela definição de Self-Shrinker,

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla H(p), v\right\rangle &= v\left(H\right)(p) \\
&= -v\left\langle \varphi, N\right\rangle(p) \\
&= -\frac{d}{dt}\left\langle \varphi(c(t)), N(c(t))\right\rangle\Big|_{t=0} \\
&= -\left\langle \frac{d}{dt}\varphi(c(t))\Big|_{t=0}, N(p)\right\rangle - \left\langle \varphi(p), \frac{d}{dt}N(c(t))\Big|_{t=0}\right\rangle \\
&= -\left\langle d\varphi_p(v), N(p)\right\rangle - \left\langle \varphi(p), \overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)}N\right\rangle \\
&= -\left\langle \varphi(p), \overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)}N\right\rangle \\
&= \left\langle \varphi(p), d\varphi_p\left(\mathcal{S}v\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \varphi(p)^T, d\varphi_p\left(\mathcal{S}v\right)\right\rangle \\
&= \left\langle d\varphi_p^{-1}\left(\varphi(p)^T\right), \mathcal{S}v\right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{S}\left[d\varphi_p^{-1}\left(\varphi(p)^T\right)\right], v\right\rangle,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

e como podemos repetir os passos para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$ obtemos que $\nabla H = \mathcal{S}X$, em que $X = d\varphi^{-1}\left(\varphi^T\right)$. Como a imersão é isométrica,

$$\begin{aligned}
d\varphi_p\left(\nabla_v X(p)\right) &= \left[\overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)}d\varphi\left(X\right)\right]^T \\
&= \left[\overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)}\varphi^T\right]^T \\
&= \left[\frac{d}{dt}\Big(\varphi(c(t)) - \left\langle \varphi(c(t)), N(c(t))\right\rangle N(c(t))\Big)\Big|_{t=0}\right]^T \\
&= \left[d\varphi_p(v)\right]^T - \left\langle \varphi(p), N(p)\right\rangle\left[\frac{d}{dt}N(c(t))\Big|_{t=0}\right]^T \\
&= d\varphi_p(v) - \left\langle \varphi(p), N(p)\right\rangle\left[\overline{\nabla}_{d\varphi_p(v)}N\right]^T \\
&= d\varphi_p(v) + \left\langle \varphi(p), N(p)\right\rangle d\varphi_p\left(\mathcal{S}v\right) \\
&= d\varphi_p\left(v + \left\langle \varphi(p), N(p)\right\rangle \mathcal{S}v\right),
\end{aligned}$$

e como $d\varphi_p$ é injetora concluímos que,

$$\nabla_v X(p) = v + \langle \varphi(p), N(p) \rangle \mathcal{S}v. \tag{5.13}$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$ e $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ campos que estendem essa base. De (5.13) e pela definição de Laplaciano,

$$\begin{aligned}
\Delta H(p) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla H(p), e_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \mathcal{S}X(p), e_i \rangle \\
&= \sum_i \left[ e_i \langle \mathcal{S}X, \tilde{e}_i \rangle (p) - \langle \mathcal{S}X, \nabla_{e_i} \tilde{e}_i \rangle (p) \right] \\
&= \sum_i \left[ e_i \mathcal{A}_p (X(p), e_i) - \mathcal{A}_p (X(p), \nabla_{e_i} \tilde{e}_i(p)) \right] \\
&= \sum_i \left[ e_i A (X, \tilde{e}_i)(p) - A (X, \nabla_{e_i} \tilde{e}_i)(p) \right] \\
&= \sum_i \left[ \nabla A (X, \tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) + A (\nabla_{e_i} X, \tilde{e}_i)(p) \right] \\
&= \sum_i \left[ \nabla A (X, \tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) + A (\tilde{e}_i + \langle \varphi(p), N(p) \rangle \mathcal{S}\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) \right] \\
&= \sum_i \left[ \nabla A (\tilde{e}_i, \tilde{e}_i, X)(p) + A (\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) + \langle \varphi(p), N(p) \rangle A (\mathcal{S}\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) \right] \\
&= \sum_i \nabla A (\tilde{e}_i, \tilde{e}_i, X)(p) + \sum_i A (\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) + \langle \varphi(p), N(p) \rangle \sum_i A (\mathcal{S}\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Porém,

$$\sum_i A (\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) = \sum_i \mathcal{A}_p(e_i, e_i) = \sum_i \langle \mathcal{S}e_i, e_i \rangle = tr(\mathcal{S})(p) = H(p). \tag{5.15}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\sum_i A (\mathcal{S}\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)(p) = \sum_i \left\langle \mathcal{S}^2 e_i, e_i \right\rangle &= \sum_i \langle \mathcal{S}(\mathcal{S}e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_i \left\langle \mathcal{S} \left( \sum_j \langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle e_j \right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle \langle \mathcal{S}e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle \langle e_j, \mathcal{S}e_i \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle^2 \\
&= |A|^2(p).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Tomando as extensões da base ortonormal como sendo as dadas pela aplicação exponencial obtemos que a conexão se anula em $p$, sendo assim,

$$\begin{aligned}
\sum_i \nabla A\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i, X\right)(p) &= \sum_i X\left(A\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i\right)\right)(p) \\
&= X\left(\sum_i A\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i\right)\right)(p) \\
&= X\left(H\right)(p) \\
&= dH_p(X(p)) \\
&= \left\langle X, \nabla H\right\rangle (p).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Substituindo (5.15), (5.16) e (5.17) em (5.14).

$$\Delta H(p) = \left\langle X, \nabla H\right\rangle (p) + H(p) + \left\langle \varphi(p), N(p)\right\rangle |A|^2(p),$$

e pela hipótese de $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ser Self-Shrinker,

$$\Delta H(p) = \left\langle X, \nabla H\right\rangle (p) + H(p) - H(p)|A|^2(p). \tag{5.18}$$

Substituindo (5.18) em (5.11) obtemos,

$$\mathcal{L}H^2(p) = 2H(p)\left\langle X, \nabla H\right\rangle (p) + 2H^2(p)\left(1 - |A|^2(p)\right) + 2|\nabla H(p)|^2 - 2H(p)\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle (p),$$

mas,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle (p) &= \left\langle \varphi^T, d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle (p) \\
&= \left\langle d\varphi d\varphi^{-1}\left(\varphi^T\right), d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle (p) \\
&= \left\langle d\varphi\left(X\right), d\varphi\left(\nabla H\right)\right\rangle (p) \\
&= \left\langle X, \nabla H\right\rangle (p),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathcal{L}H^2(p) = 2H^2(p)\left(1 - |A|^2(p)\right) + 2|\nabla H(p)|^2,$$

e como podemos repetir os passos para todo $p \in M$ vale a igualdade de funções.

$$\mathcal{L}H^2 = 2H^2\left(1 - |A|^2\right) + 2|\nabla H|^2.$$

*iii)* Seja $p \in M$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de $T_pM$ e $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ campos que estendem essa base. Pela fórmula de Simons (Proposição 1.25),

$$\Delta|A|^2(p) = 2|\nabla A|^2(p) - 2|A|^4(p) + 2H(p)tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p) + 2\sum_{i,j} A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)(p)\mathrm{Hess}H_p(e_i, e_j). \tag{5.19}$$

Como visto no item *ii)*, $\nabla H = \mathcal{S}X$. Temos, denotando $A(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = A_{ij}$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} A_{ij}(p)\mathrm{Hess}H_p(e_i,e_j) &= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\left\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\nabla H, \tilde{e}_j\right\rangle(p)\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\left\langle \nabla_{\tilde{e}_i}\mathcal{S}X, \tilde{e}_j\right\rangle(p)\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\left[\tilde{e}_i\left\langle \mathcal{S}X, \tilde{e}_j\right\rangle(p) - \left\langle \mathcal{S}X, \nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j\right\rangle(p)\right]\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\left[\tilde{e}_i A(X,\tilde{e}_j)(p) - A(X,\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j)(p)\right]\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\left[\nabla A(X,\tilde{e}_j,\tilde{e}_i)(p) + A(\nabla_{\tilde{e}_i}X,\tilde{e}_j)(p)\right]\\
&= \sum_{i,j} A_{ij}(p)\nabla A(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j,X)(p) + \sum_{i,j} A_{ij}(p)A(\nabla_{\tilde{e}_i}X,\tilde{e}_j)(p).
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

De (5.13),

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} A_{ij}(p)A(\nabla_{\tilde{e}_i}X,\tilde{e}_j)(p) &= \sum_{i,j} A_{ij}(p)A(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j)(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i,j} A_{ij}(p)A(\mathcal{S}\tilde{e}_i,\tilde{e}_j)(p)\\
&= \sum_{i,j} A(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j)^2(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i,j}\left\langle \mathcal{S}\tilde{e}_i,\tilde{e}_j\right\rangle(p)\left\langle \mathcal{S}^2\tilde{e}_i,\tilde{e}_j\right\rangle(p)\\
&= \sum_{i,j} \mathcal{A}_p(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j)^2 + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i}\sum_{j}\left\langle \mathcal{S}\tilde{e}_i,\tilde{e}_j\right\rangle(p)\left\langle \mathcal{S}^2\tilde{e}_i,\tilde{e}_j\right\rangle(p)\\
&= |A|^2(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i}\left\langle \mathcal{S}^2\tilde{e}_i, \sum_{j}\left\langle \mathcal{S}\tilde{e}_i,\tilde{e}_j\right\rangle\tilde{e}_j\right\rangle(p)\\
&= |A|^2(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i}\left\langle \mathcal{S}^2\tilde{e}_i,\mathcal{S}\tilde{e}_i\right\rangle(p)\\
&= |A|^2(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)\sum_{i}\left\langle \mathcal{S}^3\tilde{e}_i,\tilde{e}_i\right\rangle(p)\\
&= |A|^2(p) + \langle\varphi,N\rangle(p)tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p).
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Também, tomando as extensões da base ortonormal como sendo as dadas pela aplicação exponencial obtemos que a conexão se anula em $p$, sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} A_{ij}(p)\nabla A\left(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j,X\right)(p) &= \sum_{i,j} A_{ij}(p)X\left(A_{ij}\right)(p)\\
&= \frac{1}{2}X\left(\sum_{i,j} A_{ij}^2\right)(p)\\
&= \frac{1}{2}X\left(|A|^2\right)(p)\\
&= \frac{1}{2}\left\langle X, \nabla|A|^2\right\rangle(p)\\
&= \frac{1}{2}\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|A|^2\right)\right\rangle(p).
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Substituindo (5.21) e (5.22) em (5.20) obtemos,

$$\sum_{i,j} A_{ij}(p)\mathrm{Hess}H_p(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla |A|^2\right)\right\rangle(p) + |A|^2(p) + \langle \varphi, N\rangle(p) tr\left(\mathcal{S}^3\right)(p),$$

que substituindo em (5.19) e usando a hipótese de $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ser Self-Shrinker,

$$\Delta|A|^2(p) = 2|\nabla A|^2(p) - 2|A|^4(p) + \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla |A|^2\right)\right\rangle(p) + 2|A|^2(p). \tag{5.23}$$

Pela definição do Operador $\mathcal{L}$ obtemos de (5.23)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}|A|^2(p) &= \Delta|A|^2(p) - \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla |A|^2\right)\right\rangle(p)\\ &= 2|\nabla A|^2(p) - 2|A|^4(p) + 2|A|^2(p),\end{aligned}$$

e como podemos repetir os passos para todo $p \in M$ vale a igualdade de funções. Assim concluimos a demonstração. □

O próximo Lema será útil na próxima seção, porém, apenas o enunciaremos por sua demonstração fugir do nosso escopo. (Para uma demonstração ver o Corolário 1 da referência [7])

**Lema 5.6** (Princípio do máximo de Yau)**.** *Seja $M$ variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Seja $f$ função $C^2$ limitada superiormente em $M$. Então, existe uma sequência de pontos $\{p_k\} \subset M$ tal que:*

*i)* $\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \sup f$.

*ii)* $\lim_{k\to\infty} |\nabla f|(p_k) = 0$.

*iii)* $\lim_{k\to\infty} \sup \Delta f(p_k) \leq 0$.

## 5.2 Teoremas de classificação de Self-Shrinkers

Em seu artigo, [5], Huisken demonstrou que os únicos Self-Shrinkers compactos, mergulhados em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \geq 2$ e Curvatura média não negativa, são as esferas de raio $\sqrt{n}$. Posteriormente, sob hipóteses adicionais, demonstrou que são os cilindros generalizados $\mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$, para $n \geq 2$. Demonstraremos que impondo certa limitação na norma da Segunda forma fundamental e no crescimento de volume do Self-Shrinker podemos retirar a hipótese de compacidade e Curvatura média não-negativa. Posteriormente mostraremos que no caso em que o Self-Shrinker tem dimensão 2 e impondo que a norma da Segunda forma fundamental é constante, podemos retirar a hipótese de crescimento de volume.

**Definição 5.7.** (Crescimento de volume) Seja $M$ variedade e $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície. Dizemos que $M$ tem crescimento de volume polinomial se existirem constantes $C > 0$ e $k > 0$ de maneira que, para todo $R > 0$,

$$\mathrm{Vol}\left(\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)\right) \leq CR^k,$$

em que $B_R$ é a bola Euclidiana centrada na origem e de raio R.

Enunciaremos a seguir um Teorema que nos servirá para classificar os Self-Shrinker. Como ele não é nosso foco apenas o enunciaremos sem demonstração. (Para uma demonstração ver o Teorema 4 da referência [9])

**Teorema 5.8** (H.B.Lawson). *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície mergulhada e $\nabla A = 0$. Então $\varphi(M)$ é, a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^{n+1}$, um aberto de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $r > 0$ e algum $k = 0, \ldots, n$.*

Também enunciaremos, sem demonstração, um Teorema devido a Xu Cheng e Detang Zhou que estabelece a equivalência, para um Self-Shrinker, entre a condição de crescimento de volume polinomial e a condição de ser imersão própria. (Para uma demonstração ver o Teorema 1.3 da referência [17])

**Teorema 5.9** (X.Cheng e D.Zhou). *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um Self-Shrinker suave de dimensão $n$, completo. Então a imersão é própria se, e somente se, o Self-Shrinker tem crescimento de volume polinomial.*

**Proposição 5.10.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um Self-Shrinker suave de dimensão $n$, completo, com crescimento de volume polinomial. Se $|A|^2(p) \leq 1$, para todo $p \in M$, então $H \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$.*

**Demonstração:** Seja $\zeta : M \to \mathbb{R}$ função suave de suporte compacto. Pelo Lema 5.4 e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\begin{aligned}
\int_M \zeta^2 \mathcal{L}\left(H^2\right) e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu &= -\int_M \left\langle \nabla H^2, \nabla \zeta^2 \right\rangle e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&\leq \left| \int_M \left\langle \nabla H^2, \nabla \zeta^2 \right\rangle e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \right| d\mu \\
&\leq \int_M \left|\left\langle \nabla H^2, \nabla \zeta^2 \right\rangle\right| \left| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} \right| d\mu \\
&= \int_M \left|\left\langle \nabla H^2, \nabla \zeta^2 \right\rangle\right| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&\leq \int_M \left|\nabla H^2\right| \left|\nabla \zeta^2\right| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= \int_M \left|2H\nabla H\right| \left|2\zeta \nabla \zeta\right| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&= \int_M 4\left|H\right|\left|\nabla H\right|\left|\zeta\right|\left|\nabla \zeta\right| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu,
\end{aligned}$$

isto é, pela Proposição 5.5,

$$\int_M \zeta^2 \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2 + 2|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \le \int_M 4\big|H\big|\big|\nabla H\big|\big|\zeta\big|\big|\nabla\zeta\big| e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu. \qquad (5.24)$$

Porém,

$$\begin{aligned} 0 \le \Big(2|H||\nabla\zeta| - |\zeta||\nabla H|\Big)^2 &= \Big(2|H||\nabla\zeta|\Big)^2 + \Big(|\zeta||\nabla H|\Big)^2 - 4|H||\nabla H||\zeta||\nabla\zeta| \\ &= 4|H|^2|\nabla\zeta|^2 + |\zeta|^2|\nabla H|^2 - 4|H||\nabla H||\zeta||\nabla\zeta| \\ &= 4H^2|\nabla\zeta|^2 + \zeta^2|\nabla H|^2 - 4|H||\nabla H||\zeta||\nabla\zeta|, \end{aligned}$$

logo,

$$4|H||\nabla H||\zeta||\nabla\zeta| \le 4H^2|\nabla\zeta|^2 + \zeta^2|\nabla H|^2. \qquad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.24) obtemos:

$$\int_M \zeta^2 \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2 + 2|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \le \int_M 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu + \int_M \zeta^2|\nabla H|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu, \qquad (5.26)$$

logo,

$$\int_M \zeta^2 \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2 + |\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \le \int_M 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu. \qquad (5.27)$$

Dado $R>0$ tome $\zeta$ definida por $\zeta(p) = h_R(|\varphi(p)|^2)$, em que $h_R : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função corte, isto é, é uma função suave não-negativa que satisfaz as condições $h_R(t)=1$, se $t<R^2$, $h_R(t)=0$, se $t \ge (R+1)^2$, e $|h_R'(t)| \le L$ para alguma constante positiva $L$ que independe do $R$ dado. Pelo Teorema 5.9 a imersão $\varphi$ é própria e portanto $\zeta$ tem suporte compacto. Obtemos, por (5.27),

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)} \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2 + |\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu &\le \int_M \zeta^2 \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2 + |\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\ &\le \int_M 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu. \end{aligned} \qquad (5.28)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_M 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu = &\int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)} 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu + \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}-\overline{B_R}\right)} 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\ &+ \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}^C\right)} 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \end{aligned}$$

e como $\zeta$ é constante em $\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)$ e em $\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}^C\right)$, concluímos que $\nabla\zeta = 0$ em tais conjuntos, obtendo,

$$\int_M 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu = \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}-\overline{B_R}\right)} 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu. \qquad (5.29)$$

Substituindo (5.29) em (5.28),

$$\int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)} \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2+|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \leq \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}-\overline{B_R}\right)} 4H^2|\nabla\zeta|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu. \quad (5.30)$$

Observemos que,

$$\nabla\zeta = \nabla\left(h_R \circ |\varphi|^2\right) = \frac{dh_R}{dt}(|\varphi|^2)\nabla|\varphi|^2,$$

então pelo Lema 5.2 e por estarmos em uma imersão isométrica (definida via pullback)

$$|\nabla\zeta|^2 \leq L^2\left|\nabla|\varphi|^2\right|^2 = L^2\left|d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)\right|^2 = 4L^2|\varphi^T|^2$$

ou seja,

$$|\nabla\zeta|^2 \leq 4L^2|\varphi|^2. \quad (5.31)$$

Pela Proposição 1.27, vale que $H^2(p) \leq n|A|(p)^2$ para todo $p \in M$. Como por hipótese $|A|^2(p) \leq 1$ para todo $p \in M$ obtemos,

$$H^2(p) \leq n, \quad (5.32)$$

para todo $p \in M$. Substituindo (5.31) e (5.32) em (5.30),

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)} \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2+|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu &\leq 16nL^2 \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}-\overline{B_R}\right)} |\varphi|^2 e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \\
&\leq 16nL^2\left(R+1\right)^2 e^{\frac{-R^2}{2}} \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}-\overline{B_R}\right)} d\mu \\
&\leq 16nL^2\left(R+1\right)^2 e^{\frac{-R^2}{2}} \int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}\right)} d\mu \\
&= 16nL^2\left(R+1\right)^2 e^{\frac{-R^2}{2}} \mathrm{Vol}\left(\varphi^{-1}\left(\overline{B_{R+1}}\right)\right),
\end{aligned}$$

consequentemente, pela hipótese de crescimento de volume polinomial,

$$\int_{\varphi^{-1}\left(\overline{B_R}\right)} \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2+|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \leq 16nL^2C\left(R+1\right)^{k+2} e^{\frac{-R^2}{2}}. \quad (5.33)$$

Como as constantes $C, L, k$ não dependem de $R$, podemos tomar o limite quando $R \to \infty$ em (5.33). Portanto,

$$\int_M \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2+|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu \leq 0.$$

Por hipótese $|A|^2 \leq 1$, consequentemente a integral acima é não negativa. Assim,

$$\int_M \left[2\left(1-|A|^2\right)H^2+2|\nabla H|^2\right] e^{\frac{-|\varphi|^2}{2}} d\mu = 0. \quad (5.34)$$

De (5.34) concluímos que:

$$\nabla H = 0, \tag{5.35}$$

e,

$$2\big(1 - |A|^2\big)H^2 = 0. \tag{5.36}$$

Como $\nabla H = 0$, obtemos que $H$ é constante. Consequentemente, de (5.36), $H \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$. Assim concluímos a demonstração.
Observe que, se por hipótese $M$ fosse compacta, poderíamos considerar $\zeta \equiv 1$ na desigualdade (5.27) obtendo de mesma maneira a igualdade (5.34) e portanto o mesmo resultado. □

Como Corolário obtemos o seguinte Teorema de Classificação, devido a H.Cao e H.Li.

**Teorema 5.11** (H.Cao e H.Li)**.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um Self-Shrinker suave de dimensão $n$, completo, mergulhado, com crescimento de volume polinomial. Se $|A|^2(p) \leq 1$ para todo $p \in M$ então $\varphi(M)$ é, a menos de rotação, uma das hipersuperfícies $\mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $k = 0, \cdots, n$.*

**Demonstração:** Pela Proposição 5.10 temos que $H \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$. Suponhamos que $|A|^2 \equiv 1$.
Pelo item *iii*) da Proposição 5.5 obtemos que $\nabla A \equiv 0$. Pelo Teorema 5.8 $\varphi(M)$ é, a menos de um movimento rígido, um aberto de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $r > 0$ e para algum $k = 1, \cdots, n$. Como por hipótese nosso Self-Shrinker é completo temos que ele será, a menos de um movimento rígido, todo o $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $r > 0$ e para algum $k = 1, \cdots, n$. Pelo Exemplo 2.6, a menos de rotação, ele coincide com $\mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para algum $k = 1, \cdots, n$. E assim concluímos o caso em que $|A|^2 \equiv 1$.
Suponhamos que $H \equiv 0$. Então nosso Self-Shrinker é, a menos de rotação, o plano $\mathbb{R}^n$. De fato, consideremos o seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\varphi \circ \alpha)(s) &= (\varphi \circ \alpha)(s) \\ (\varphi \circ \alpha)(0) &= \varphi(p). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Esse problema é bem definido, visto que, dada curva $c : I \to M$, temos

$$0 = H\left(c(t)\right) = -\left\langle (\varphi \circ c), (N \circ c) \right\rangle (t),$$

isto é, o vetor posição $\varphi \circ c$ é vetor tangente a $\varphi(M)$. Como $M$ é completo o problema em (5.37) possui solução única definida globalmente. Assim $\varphi \circ \alpha$ é reta em $\mathbb{R}^{n+1}$ passando por $\varphi(p)$ e pela origem (a reta é solução e pela unicidade é única). Sendo assim, concluímos que nosso Self-Shrinker é obtido por essas retas que passam pela origem e por pontos do Self-Shinker, isto é, é um cone. Como nosso Self-Shrinker é imersão suave, concluímos que o mesmo é, a menos de rotação, o plano $\mathbb{R}^n$, pois é o único cone suave em $\mathbb{R}^{n+1}$ (de fato, qualquer outro cone deixa de ser imersão suave quando se observa a origem). Assim concluímos a demonstração. $\square$

A próxima Proposição mostra que se um Self-Shrinker é propriamente imerso em $\mathbb{R}^3$ e a norma de sua Segunda forma fundamental é constante então obtemos o mesmo resultado da Proposição 5.10 (visto que $|A|^2 \equiv 0$ implica $H \equiv 0$). Pelo Teorema de X.Cheng e D.Zhou sabemos que a hipótese de ser propriamente imerso é equivalente a de ter crescimento de volume polinomial, portanto a hipótese que irá diferir será sobre a norma da Segunda forma fundamental.

**Proposição 5.12.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$ um Self-Shrinker de dimensão 2 suave, completo, propriamente imerso. Se $|A|^2$ é constante então $|A|^2 \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$.*

**Demonstração:** Pela Proposição 5.5 vale que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^2(1 - |A|^2).$$

Como $|A|^2$ é constante obtemos da definição do Operador $\mathcal{L}$ que,

$$\mathcal{L}|A|^2 = \Delta|A|^2 - \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|A|^2\right)\right\rangle = 0.$$

Logo,

$$|\nabla A|^2 + |A|^2(1 - |A|^2) = 0. \tag{5.38}$$

Como $\varphi$ é propriamente imersa em $\mathbb{R}^3$ a função $|\varphi(p)|^2$ atinge mínimo para algum $\tilde{p} \in M$. Portanto, $\Delta|\varphi|^2(\tilde{p}) \geq 0$ e $\nabla|\varphi|^2(\tilde{p}) = 0$. Como nossa imersão é isométrica (definida via pullback), $|d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)(\tilde{p})| = |\nabla|\varphi|^2(\tilde{p})| = 0$, e assim $d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)(\tilde{p}) = 0$. Pela Proposição 5.5,

$$4 - 2|\varphi|^2(\tilde{p}) = \mathcal{L}|\varphi|^2(\tilde{p}) = \Delta|\varphi|^2(\tilde{p}) - \langle \varphi(\tilde{p}), d\varphi\left(\nabla|\varphi\right)(\tilde{p})|^2\rangle = \Delta|\varphi|^2(\tilde{p}) \geq 0.$$

Assim,

$$|\varphi(\tilde{p})|^2 \leq 2. \tag{5.39}$$

Pela definição de Self-Shrinker temos,

$$H^2 = \left(-\langle \varphi, N\rangle\right)^2 = \langle \varphi, N\rangle^2 \leq \langle \varphi, N\rangle^2 + |\varphi^T|^2 = |\varphi|^2,$$

ou seja, de (5.39)

$$H^2(\tilde{p}) \leq 2. \tag{5.40}$$

Pelo Lema 5.2 e pela imersão ser isométrica (definida via pullback),

$$|\varphi(\tilde{p})^T| = \frac{1}{2}\left|d\varphi_{\tilde{p}}\left(\nabla|\varphi|^2(\tilde{p})\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\nabla|\varphi|^2(\tilde{p})\right| = 0,$$

portanto de (5.12) (contido na demonstração do item $ii$) da Proposição 5.5),

$$\nabla H(\tilde{p}) = \mathcal{S}\left(d\varphi_{\tilde{p}}^{-1}\left(\varphi(\tilde{p})^T\right)\right) = 0. \tag{5.41}$$

Tome $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $\tilde{p}$ de maneira que $\nabla_{e_i} e_j(\tilde{p}) = 0$ e $h_{ij}(\tilde{p}) = \lambda_i(\tilde{p})\delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle e_i, \nabla H\rangle(\tilde{p}) &= e_i(H)(\tilde{p}) \\
&= e_i\left(\sum_{r=1}^{2} A(e_r, e_r)\right)(\tilde{p}) \\
&= \sum_{r=1}^{2} e_i\left(A(e_r, e_r)\right)(\tilde{p}) \\
&= \sum_{r=1}^{2} \nabla A\left(e_r, e_r, e_i\right)(\tilde{p}) \\
&= \sum_{r=1}^{2} h_{rri}(\tilde{p}),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

e então de (5.41),

$$\sum_{r=1}^{2} h_{rri}(\tilde{p}) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \tag{5.43}$$

Como $|A|^2$ é constante, obtemos (operando como em (5.42)) para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
0 = e_i\left(|A|^2\right)(\tilde{p}) &= e_i\left(\sum_{r,k=1}^{2} h_{rk}^2\right)(\tilde{p}) \\
&= 2\sum_{r,k=1}^{2} h_{rk}(\tilde{p})e_i\left(h_{rk}\right)(\tilde{p}) \\
&= 2\sum_{r,k=1}^{2} h_{rk}(\tilde{p})h_{rki}(\tilde{p}) \\
&= 2\sum_{r,k=1}^{2} \lambda_r(\tilde{p})\delta_{rk}h_{rki}(\tilde{p}) \\
&= 2\sum_{r=1}^{2} \lambda_r(\tilde{p})h_{rri}(\tilde{p}).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

De (5.43) e (5.44), sumarizamos:

$$\begin{aligned} &h_{11j}(\tilde{p}) + h_{22j}(\tilde{p}) = 0, && \text{para } \ j = 1,2. \\ &\lambda_1(\tilde{p})h_{11j}(\tilde{p}) + \lambda_2(\tilde{p})h_{22j}(\tilde{p}) = 0, && \text{para } \ j = 1,2. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Substituindo a primeira equação de (5.45) na segunda equação obtemos,

$$(\lambda_1(\tilde{p}) - \lambda_2(\tilde{p}))\, h_{11j}(\tilde{p}) = 0, \quad \text{para } \ j = 1,2.$$

Se $\lambda_1(\tilde{p}) \neq \lambda_2(\tilde{p})$ então

$$h_{22j}(\tilde{p}) = h_{11j}(\tilde{p}) = 0, \quad \text{para } \ j = 1,2.$$

Pela Equação de Codazzi (Proposição 1.22) os índices permutam, concluindo que

$$|\nabla A|^2(\tilde{p}) = \sum_{i,j,r=1}^{2} h_{ijr}^2(\tilde{p}) = 0.$$

De (5.38) obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= |\nabla A|^2(\tilde{p}) + |A|^2(\tilde{p})\Big(1 - |A|^2(\tilde{p})\Big) \\ &= |A|^2(\tilde{p})(1 - |A|^2(\tilde{p})) \\ &= |A|^2(1 - |A|^2), \end{aligned}$$

e então

$$|A|^2 \equiv 1 \ \text{ ou } \ |A|^2 \equiv 0.$$

Se $\lambda_1(\tilde{p}) = \lambda_2(\tilde{p})$, temos de (5.40),

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \lambda_1^2(\tilde{p}) + \lambda_2^2(\tilde{p}) \\ &= 2\lambda_1^2(\tilde{p}) \\ &= 4\frac{\lambda_1^2}{2}(\tilde{p}) \\ &= \frac{(2\lambda_1)^2}{2}(\tilde{p}) \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2}(\tilde{p}) \\ &= \frac{H^2(\tilde{p})}{2} \leq \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

De (5.38) temos,

$$0 \leq |\nabla A|^2 = |A|^2(|A|^2 - 1) \leq 0,$$

isto é, $|A|^2(|A|^2 - 1) = 0$ e consequentemente $|A|^2 \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$. $\square$

Como anteriormente obtemos como Corolário um Teorema de Classificação, devido a Q.Guang.

**Teorema 5.13** (Q.Guang). *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$ um Self-Shrinker suave de dimensão 2, completo, mergulhado e propriamente imerso. Se $|A|^2$ é constante então $\varphi(M)$ é, a menos de rotação, uma das hipersuperfícies:*

*i)* $\mathbb{R}^2$.

*ii)* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

*iii)* $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$.

**Demonstração:** Pela Proposição 5.12 temos que $|A|^2 \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$. Suponhamos que $|A|^2 \equiv 1$.
Pelo item *iii*) da Proposição 5.5 obtemos que $\nabla A \equiv 0$. Pelo Teorema 5.8 $\varphi(M)$ é, a menos de um movimento rígido, um aberto de $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{2-k}$ para algum $r > 0$ e para algum $k = 1, 2$. Como por hipótese nosso Self-Shrinker é completo temos que ele será, a menos de um movimento rígido, todo o $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{R}^{2-k}$ para algum $r > 0$ e para algum $k = 1, 2$. Pelo Exemplo 2.6, a menos de rotação, ele coincide com $\mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{2-k}$ para algum $k = 1, 2$. Assim concluímos o caso em que $|A|^2 \equiv 1$.
O caso em que $|A|^2 \equiv 0$ basta observar que as curvaturas principais serão nulas e então o Self-Shrinker será um aberto de um plano. Como $M$ é completo, $\varphi(M)$ será o plano todo. Pelo Exemplo 2.6 o Self-Shrinker será, a menos de rotação, o plano $\mathbb{R}^2$. Assim concluímos a demonstração. □

Nossa última Proposição irá retirar a hipótese de crescimento de volume polinomial em relação a Proposição 5.12. A estratégia da demonstração reside no fato de que a hipótese de o Self-Shrinker ser propriamente imerso, ou de maneira equivalente, possuir crescimento de volume polinomial, assumida na Proposição 5.12, foi utilizada para obtermos um ponto de mínimo para a função $|\cdot|^2$ sobre a hipersuperfície. Devido ao Princípio do máximo de Yau veremos que podemos obter propriedades semelhantes as obtidas a partir do ponto de mínimo para a função $|\cdot|^2$.

**Proposição 5.14.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$ um Self-Shrinker de dimensão 2 suave e completo. Se $|A|^2$ é constante então $|A|^2 \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$.*

**Demonstração:** Pela Proposição 5.5 vale que:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|A|^2 = |\nabla A|^2 + |A|^2(1 - |A|^2).$$

Como $|A|^2$ é constante obtemos da definição do Operador $\mathcal{L}$ que:

$$\mathcal{L}|A|^2 = \Delta|A|^2 - \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|A|^2\right)\right\rangle = 0.$$

Logo,

$$|\nabla A|^2 + |A|^2(1 - |A|^2) = 0. \tag{5.46}$$

**Afirmação:** $\mathcal{K}(p) \geq -\frac{1}{2}|A|^2(p)$ para todo $p \in M$, em que $\mathcal{K}$ é a curvatura de Gauss. De fato:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda_1(p) + \lambda_2(p))^2 \\ &= \lambda_1^2(p) + \lambda_2^2(p) + 2\lambda_1(p)\lambda_2(p) \\ &= |A|^2(p) + 2\mathcal{K}(p) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{K}(p) \geq -\frac{1}{2}|A|^2(p),$$

e assim a Afirmação está demonstrada.

Como $|A|^2$ é constante obtemos, pela Afirmação, que a curvatura de Gauss é limitada inferiormente e consequentemente a curvatura de Ricci é limitada inferiormente (De fato elas coincidem em dimensão 2). Como $-|\varphi|^2$ é limitada superiormente $\Big(-|\varphi|^2 \leq 0\Big)$ podemos aplicar o Lema 5.6 para a função $-|\varphi(p)|^2$. Assim, existe uma sequência $\{p_k\}$ em $M$ tal que:

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} |\varphi(p_k)|^2 = \inf |\varphi|^2, \\ &\lim_{k\to\infty} |\nabla|\varphi|^2(p_k)| = 0, \\ &\lim_{k\to\infty} \inf \Delta|\varphi|^2(p_k) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.47}$$

De fato:

$$\lim_{k\to\infty} |\varphi(p_k)|^2 = -\lim_{k\to\infty} -|\varphi(p_k)|^2 = -\sup -|\varphi(p_k)|^2 = \inf |\varphi|^2,$$

também,

$$\lim_{k\to\infty} |\nabla|\varphi|^2(p_k)| = \lim_{k\to\infty} |-\nabla|\varphi|^2(p_k)| = \lim_{k\to\infty} |\nabla(-|\varphi|^2)(p_k)| = 0,$$

e,

$$\lim_{k\to\infty} \inf \Delta|\varphi|^2(p_k) = \lim_{k\to\infty} -\sup -\Delta|\varphi|^2(p_k) = -\lim_{k\to\infty} \sup \Delta(-|\varphi(p_k)|^2) \geq 0.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e como nossa imersão é isométrica (definida via pullback), temos de (5.47),

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)\right\rangle\right|(p_k) \leq \lim_{k\to\infty} |\varphi(p_k)| \left|d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)(p_k)\right| = \lim_{k\to\infty} |\varphi(p_k)| \left|\nabla|\varphi|^2(p_k)\right| = 0,$$

portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)\right\rangle(p_k) = 0. \tag{5.48}$$

Pela definição do Operador $\mathcal{L}$ e de (5.47) e (5.48),

$$\lim_{k\to\infty} \inf \mathcal{L}|\varphi|^2(p_k) \geq \lim_{k\to\infty} \inf \Delta|\varphi|^2(p_k) + \lim_{k\to\infty} \inf \left(-\left\langle \varphi, d\varphi\left(\nabla|\varphi|^2\right)\right\rangle(p_k)\right) \geq 0. \tag{5.49}$$

Assim continuamos a demonstração. Pela Proposição 5.5 temos,

$$|\varphi|^2 = 2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}|\varphi|^2. \tag{5.50}$$

De (5.49) e (5.50) temos,

$$\inf|\varphi|^2 = \lim_{k\to\infty}|\varphi(p_k)|^2 = 2 - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\mathcal{L}|\varphi|^2(p_k) \leq 2 - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\inf\mathcal{L}|\varphi|^2(p_k) \leq 2. \tag{5.51}$$

Pela definição de Self-Shrinker temos,

$$\lim_{k\to\infty}H^2(p_k) = \lim_{k\to\infty}\langle\varphi, N\rangle^2(p_k) \leq \lim_{k\to\infty}\langle\varphi, N\rangle^2(p_k) + \lim_{k\to\infty}|\varphi^T|^2(p_k) = \lim_{k\to\infty}|\varphi|^2(p_k),$$

ou seja, de (5.51),

$$\lim_{k\to\infty}H^2(p_k) \leq 2. \tag{5.52}$$

Pelo Lema 5.2, pela imersão ser isométrica (definida via pullback) e de (5.47),

$$\lim_{k\to\infty}|\varphi(p_k)^T| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left|d\varphi_{p_k}\left(\nabla|\varphi|^2(p_k)\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left|\nabla|\varphi|^2(p_k)\right| = 0,$$

portanto de (5.12) (contido na demonstração do item $ii$) da Proposição 5.5),

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}|\nabla H(p_k)| &= \lim_{k\to\infty}\left|\mathcal{S}\left(d\varphi_{p_k}^{-1}\left(\varphi(p_k)^T\right)\right)\right| \\ &\leq \lim_{k\to\infty}|\mathcal{S}|(p_k)\left|d\varphi_{p_k}^{-1}\left(\varphi(p_k)^T\right)\right| \\ &\leq \lim_{k\to\infty}|A|(p_k)\left|\varphi(p_k)^T\right| \\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Tome, para cada $p_k$, $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p_k$ de maneira que $\nabla_{e_i}e_j(p_k) = 0$ e $h_{ij}(p_k) = \lambda_i(p_k)\delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle e_i, \nabla H\rangle(p_k) &= \lim_{k\to\infty}e_i(H)(p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}e_i\left(\sum_{r=1}^{2}h_{rr}\right)(p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}e_i\left(\sum_{r=1}^{2}A(e_r, e_r)\right)(p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{2}e_i\left(A(e_r, e_r)\right)(p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{2}\nabla A\left(e_r, e_r, e_i\right)(p_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{2}h_{rri}(p_k),\end{aligned} \tag{5.54}$$

obtendo, de (5.53),

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{2} h_{rri}(p_k)=0 \quad \text{para} \quad i=1,2. \tag{5.55}$$

Como $|A|^2$ é constante, obtemos (operando como em (5.54)) para $i=1,2$,

$$\begin{aligned}
0 &= e_i\left(|A|^2\right)(p_k)\\
&= e_i\left(\sum_{r,s=1}^{2} h_{rs}^2\right)(p_k)\\
&= 2\sum_{r,s=1}^{2} h_{rs}(p_k)e_i\left(h_{rs}\right)(p_k)\\
&= 2\sum_{r,s=1}^{2} h_{rs}(p_k)h_{rsi}(p_k)\\
&= 2\sum_{r,s=1}^{2} \lambda_r(p_k)\delta_{rs}h_{rsi}(p_k)\\
&= 2\sum_{r=1}^{2} \lambda_r(p_k)h_{rri}(p_k).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

De (5.55) e (5.56), sumarizamos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\big(h_{11j}(p_k)+h_{22j}(p_k)\big)=0, && \text{para} \quad j=1,2.\\
&\lim_{k\to\infty}\big(\lambda_1(p_k)h_{11j}(p_k)+\lambda_2(p_k)h_{22j}(p_k)\big)=0, && \text{para} \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Como $\lambda_1^2(p)+\lambda_2^2(p)=|A|^2(p)$ e $|A|^2(p)$ é constante, as sequências $\{\lambda_j(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas para $j=1,2$. De maneira análoga, usando (5.46), se obtém que as sequências $\{h_{iij}(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas para $i,j=1,2$. Sendo assim, passando a uma subsequência se necessário, ambas são convergentes. Então tome:

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_j(p_k)=\overline{\lambda}_j, \quad \lim_{k\to\infty}h_{iij}(p_k)=\overline{h}_{iij}, \qquad \text{para} \quad i,j=1,2.$$

De (5.57), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\overline{h}_{11j}+\overline{h}_{22j}=0, && \text{para} \quad j=1,2.\\
&\overline{\lambda}_1\overline{h}_{11j}+\overline{\lambda}_2\overline{h}_{22j}=0, && \text{para} \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Substituindo a primeira equação de (5.58) na segunda equação obtemos,

$$(\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2)\overline{h}_{11j}=0. \qquad \text{para} \quad j=1,2.$$

Se $\overline{\lambda}_1\neq\overline{\lambda}_2$ então

$$\overline{h}_{22j}=\overline{h}_{11j}=0. \qquad \text{para} \quad j=1,2.$$

Pela Equação de Codazzi (Proposição 1.22) os índices permutam, concluindo que,

$$\lim_{k\to\infty} |\nabla A|^2(p_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j,r=1}^{2} h_{ijr}^2(p_k) = \sum_{i,j,r=1}^{2} \overline{h}_{ijr}^2 = 0.$$

Tomando o limite em (5.46) obtemos,

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left[ |\nabla A|^2(p_k) + |A|^2(p_k)\left(1 - |A|^2(p_k)\right)\right] = |A|^2(1-|A|^2),$$

e então

$$|A|^2 \equiv 1 \quad \text{ou} \quad |A|^2 \equiv 0.$$

Se $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2$, temos de (5.52),

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \overline{\lambda}_1^2 + \overline{\lambda}_2^2 \\ &= 2\overline{\lambda}_1^2 \\ &= 4\frac{\overline{\lambda}_1^2}{2} \\ &= \frac{(2\overline{\lambda}_1)^2}{2} \\ &= \frac{(\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2)^2}{2} \\ &= \frac{\lim_{k\to\infty} H^2(p_k)}{2} \leq \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

De (5.46) temos,

$$0 \leq |\nabla A|^2 = |A|^2(|A|^2 - 1) \leq 0, \tag{5.59}$$

isto é, $|A|^2(|A|^2-1) = 0$ e consequentemente $|A|^2 \equiv 0$ ou $|A|^2 \equiv 1$. □

Como Corolário obtemos nosso último, e principal, Teorema de classificação devido a Q.M.Cheng e S.Ogata.

**Teorema 5.15** (Q.M.Cheng e S.Ogata)**.** *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$ um Self-Shrinker suave de dimensão 2, completo, mergulhado. Se $|A|^2$ é constante então $\varphi(M)$ é, a menos de rotação, uma das hipersuperfícies:*

*i)* $\mathbb{R}^2$.

*ii)* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

*iii)* $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$.

**Demonstração:** É a mesma demonstração do Teorema 5.13 substituindo a Proposição 5.12 pela Proposição 5.14. □

# Referências Bibliográficas

[1] MANTEGAZZA, Carlo. Lecture notes on mean curvature flow. Coleção Progress in Mathematics 290, Basel: Birkhäuser/Springer, 2011.

[2] ZHU, Xi-Ping, Lectures on mean curvature flow. Providence, R.I.: American Mathematical Society: International Press, 2002.

[3] HUISKEN, Gerhard; POLDEN, Alexander. Geometric evolution equations for hypersurfaces. 2. ed. Italy: Springer, 1996.

[4] HUISKEN, Gerhard. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres.[S. l.], v. 20, n. 237 - 266, 1984.

[5] HUISKEN, Gerhard. Symptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. J. Differential Geom. 31 (1990).

[6] CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometria Riemanniana. (Portuguese) [Riemannian geometry] Projeto Euclides [Euclid Project], 10. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[7] YAu, S.T.,Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm. Pure and Appl. Math., 28(2),201-228 (1975).

[8] GRIGOR'YAN, Alexander (Eds.) Heat kernels and analysis on manifolds. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics.Volume: 47; 2009.

[9] LAWSON, H. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, Ann. of Math. (1969).

[10] ILMANEN,Tom. Lectures on Mean Curvature Flow and Related Equations. Draft Version. Recompiled, 1998.

[11] SIMONS,J. Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math. (2)88 (1968), 62–105.

[12] RUDIN, Walter. Real and Complex Analysis. 3ª.ed. McGraw-Hill, 1987.

[13] COLDING, Tobias H., and MINIBOZZI, William P. "Generic mean curvature flow I; generic a singularities" Annals of Mathematics 175, 755–833, (2012).

[14] GUANG, Qiang. “Self-shrinkers with second fundamental form of constant length”.Bulletin of the Australian Mathematical Society, ISSN-e 0004-9727, Vol. 96, Nº. 2, (2017).

[15] CHENG, S.Y., and OGATA, S. “Dimensional complete self-shrinkers in R3”. Math. Z. DOI 10.1007/s00209-016-1665-2, (2016).

[16] CHENG, S.Y., and YAU, S.T. “Complete self-shrinkers of the mean curvature flow”. J. Math. Soc. Japan., Vol. 66, No. 3, (2014)

[17] CHENG, X., and ZHOU, D. “Volume estimate about shrinkers”. Proc. of the Amer. Math. Soc, Vol. 141, No. 2, (2013)