UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espectro do Laplaciano de Dirichlet-Neumann em faixas estreitas

Diana Carolina Suarez Bello

São Carlos
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espectro do Laplaciano de Dirichlet-Neumann em faixas estreitas

Diana Carolina Suarez Bello

Orientadora: Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Diana Carolina Suarez Bello, realizada em 11/08/2020.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri (UFSCar)

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira (UFSCar)

Profa. Dra. Nataliia Goloshchapova (USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À minha mãe, Graciela e à minha avó Irene (in memorian).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu o dom da vida e me abençoa todos os dias.

Aos meus pais Graciela e Miller, às minhas irmãs Paola e Mileidy e a meu tio Julio pelo apoio, incentivo e confiança em mim.

Ao meu querido Jonathan Ordoñez Pimentel que sempre esteve ao meu lado durante o meu percurso acadêmico e a sua família pelo carinho e incentivo aos meus estudos.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, pela ajuda com a minha formação durante o mestrado.

Aos amigos do DM, especialmente a Muriel pelo constante apoio e incentivo.

À minha orientadora Professora Alessandra Aparecida Verri pela orientação, dedicação e paciência a este trabalho.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja Ω_ε uma faixa estreita em $\mathbb{R}^2$ e $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em Ω_ε. Neste trabalho, vamos estudar o problema espectral de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$. Será encontrado um comportamento assintótico para os valores da sequência crescente $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ dada pelo Princípio Max-Min, sob a condição de que Ω_ε é suficientemente fino. Além disso, vamos estudar propriedades espectrais do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em uma faixa estreita de largura fixa.

Palavras-chave: Operador Laplaciano, Condições de Dirichlet-Neumann, Formas Quadráticas, Espectro Essencial, Espectro Discreto, Faixas Estreitas.

Abstract

Let Ω_ε be a thin strip in $\mathbb{R}^2$ and $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ the Dirichlet-Neumann Laplacian in Ω_ε. In this work, we study the spectral problem of $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$. The asymptotic behaviour for the non-decreasing sequence of numbers $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ given by Max–Min Principle will be obtained, under the condition that Ω_ε is thin enough. Furthermore, we study the spectral properties of the Dirichlet-Neumann Laplacian in a thin strip of a fixed width.

Keywords: Laplacian Operator, Dirichlet-Neumann Boundary Conditions, Quadratic Forms, Essential Spectrum, Discrete Spectrum, Thin Strips.

Sumário

Notação

$\mathcal{B}$	Espaço de Banach.
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert.
$Y \sqsubseteq X$	Y é um subconjunto denso de X.
$\mathbf{1}$	Operador identidade.
$\operatorname{Im} T$	A imagem de uma transformação T.
$\operatorname{dom} T$	O domínio de uma transformação T.
$\mathrm{N}(T)$	O núcleo de uma transformação T.
$B(\mathcal{B})$	Conjunto de operadores lineares limitados de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$.
$C.S$	Desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\vert\langle \xi, \eta \rangle\vert \leq \Vert\xi\Vert \Vert\eta\Vert$, $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$.
$L^\infty(X)$	$\{\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável : $\exists\ 0 < M < \infty,$ com $\vert\psi(x)\vert < M$ q.t.p $x\}$.
$L^p(X)$	$\{\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável : $\Vert\psi\Vert_p^p := \int_X \vert\psi\vert^p d\mu < \infty,\ 1 \leq p < \infty\}$.
$\nabla \Psi$	O gradiente de Ψ nas coordenadas usuais em $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{H}^m(\Omega)$	$\{\psi \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha \psi \in L^2(\Omega),\ \vert\alpha\vert \leq m\}$.

Introdução

O espectro do operador Laplaciano em faixas estreitas tem sido estudado extensivamente nos últimos anos [1, 2, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 24, 25]. O assunto é interessante pois os resultados dependem da geometria dessas faixas e também das condições de contorno impostas em suas fronteiras. A condições mais usuais são as de Dirichlet, de Neumann ou de Dirichlet-Neumann [6, 9, 14, 19, 20, 5, 18, 21]. Neste trabalho, vamos estudar o operador Laplaciano sujeito às condições de Dirichlet-Neumann.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto (limitado ou ilimitado) e $\gamma : \overline{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^2 parametrizada pelo seu comprimento de arco. Denote por $\kappa(s)$ sua curvatura no ponto $\gamma(s)$. Considere Ω_ε a faixa construída ao se mover o segmento $(0, \varepsilon)$ ao longo de γ com respeito ao seu campo de vetores normais. Seja $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em Ω_ε, ou seja, o operador Laplaciano agindo no espaço de Hilbert $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e com condições de contorno de Dirichlet e de Neumann em γ e γ_ε (em que γ_ε corresponde a uma curva paralela à γ e a uma distancia $\varepsilon > 0$ dela), respectivamente. Observe a figura abaixo.

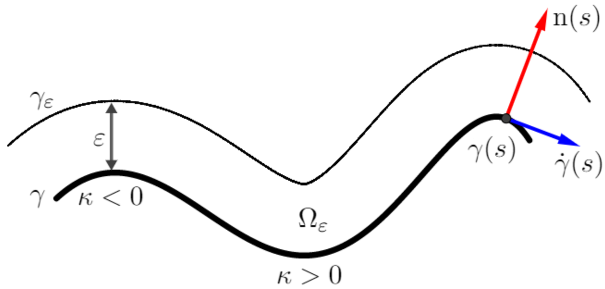

Figura 1: Geometria da faixa Ω_ε.

Denotemos por $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ a sequência crescente correspondente ao problema espectral de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ dada pelo Princípio Max-Min. Cada $\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})$ representa ou um autovalor discreto ou o ínfimo do espectro essencial de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$.

Um dos principais objetivos deste trabalho é entender o comportamento assintótico dos valores $\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})$ quando a largura da faixa tende a zero. Seguindo como referência o texto [17], mostraremos que, para todo $j \geq 1$,

$$\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1}$$

A aproximação acima pode ser obtida de duas formas diferentes. Numa primeira situação o resultado será obtido por meio de uma limitação superior e uma inferior para os valores $\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})$. Na segunda situação, mostraremos que o resultado também pode ser obtido por meio de uma aproximação no sentido uniforme dos resolventes dos operadores envolvidos.

Agora, consideremos o caso em que a região de estudo seja uma faixa estreita, como na Figura 1, mas de largura fixa. Denotemos tal região por $\hat{\Omega}$ e sua largura por $d > 0$. Novamente, seja $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em $\hat{\Omega}$. O espectro desse operador possui diferentes propriedades que dependem da geometria da faixa. Se $\hat{\Omega}$ é limitada, o espectro de $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ é puramente discreto. Por outro lado, se $\hat{\Omega}$ é ilimitada, o espectro pode ser puramente essencial ou conter elementos do espectro essencial e do espectro discreto.

De acordo com as referências [18, 5], mostraremos as seguintes caracterizações. (a) Se $\kappa \to 0$, quando $|s| \to \infty$, então $\sigma_{ess}(-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}) = [(\pi/2d)^2, \infty)$; (b) Se existe um número real positivo s_0 tal que $\kappa(s) \leq 0$, para s satisfazendo $|s| \geq s_0$, e $\int_{-s_0}^{s_0} \kappa(s) \mathrm{d}s < 0$, então $\inf \sigma(-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}) < (\pi/2d)^2$; (c) Se existe um número real positivo s_0 tal que $\kappa(s) = 0$, para $|s| \geq s_0$, $\int_{-s_0}^{s_0} \kappa(s) \mathrm{d}s = 0$ e $\|\kappa\|_{L^2(\mathbb{R})} > 0$, então $\inf \sigma(-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}) < (\pi/2d)^2$. Observemos que nas condições dos itens (a) e (b), por exemplo, podemos garantir a existência do espectro discreto para $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$.

Assumindo o resultado em (a) do parágrafo acima, vamos fazer uma análise do comportamento assintótico dado por (1). No caso em que $I = \mathbb{R}$ e a curvatura κ se anula no infinito, observemos que o termo $\pi^2/(2\varepsilon)^2$ em (1) coincide com o ínfimo do espectro essencial do operador $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$. Assim, se κ assume um valor negativo e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $\sigma_d(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}) \neq \emptyset$. Ou seja, o simples fato de κ assumir um valor negativo garante a existência de espectro discreto para $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$, desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno.

Terminamos esta introdução com alguns comentários a respeito do problema espectral do operador Laplaciano em Ω_ε no caso em que a condição de contorno na fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ é somente ou Dirichlet ou Neumann. No caso do operador Laplaciano de Neumann, $-\Delta_N^{\Omega_\varepsilon}$, a sequência $\{\lambda_j(-\Delta_N^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ dada pelo Princípio Max-Min satisfaz $\lambda_1(-\Delta_N^{\Omega_\varepsilon}) = \lambda_1(-\Delta_N^I) = 0$ e, para $j \geq 2$, $\lambda_j(-\Delta_N^{\Omega_\varepsilon}) = \lambda_j(-\Delta_N^I) + o(1)$, quando $\varepsilon \to 0$, em que $-\Delta_N^I$ denota o operador Laplaciano de Neumann em $L^2(I)$. Observemos que as características geométricas da faixa não influenciam o comportamento assintótico. Quanto ao operador Laplaciano de Dirichlet, $-\Delta_D^{\Omega_\varepsilon}$, a sequência $\{\lambda_j(-\Delta_D^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ dada pelo Princípio Max-Min satisfaz, para $j \geq 1$, $\lambda_j(-\Delta_D^{\Omega_\varepsilon}) = (\pi/\varepsilon)^2 + \lambda_j(-\Delta_D^I - \kappa^2/4) + o(1)$, quando $\varepsilon \to 0$, em que $-\Delta_D^I$ denota o operador Laplaciano de Dirichlet em $L^2(I)$. Observemos que neste caso o resultado final é influenciado pela geometria da região. Detalhes destes resultados podem ser encontrados em [6, 9, 15].

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos definições e resultados da teoria de operadores que serão úteis ao longo do texto. No Capítulo 2 definimos detalhadamente a região do plano na qual vamos considerar o operador Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet-Neumann. Neste mesmo capítulo é definido formalmente tal operador. No Capítulo 3 mostraremos o comportamento assintótico dado por (1) por meio de limitações superior e inferior. Já no Capítulo 4, mostraremos que o mesmo resultado é obtido por uma aproximação no sentido uniforme do resolvente dos operadores envolvidos. O Capítulo 5 é dedicado ao estudo do espectro do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em uma faixa de largura fixa. Neste mesmo capítulo, é feita uma comparação com os resultados dos Capítulos 2 e 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados básicos, além de notações, que utilizaremos ao longo do trabalho. Iniciamos com algumas definições e resultados da teoria de operadores autoadjuntos e operadores compactos. Em seguida, vamos apresentar alguns tópicos relacionados aos operadores que são definidos por formas quadráticas. Por último, apresentaremos o Princípio Max-Min que será uma ferramenta bastante útil ao longo do trabalho.

Neste capítulo, $\mathcal{B}$ sempre denota um espaço de Banach, $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $B(\mathcal{B})$ o conjunto de operadores lineares $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ limitados. Além disso, a notação $Y \sqsubseteq X$ indica que Y é um subconjunto denso em X. Devido ao caráter introdutório, a maioria das demonstrações serão omitidas.

1.1 O resolvente e o espectro de um operador

Definição 1.1. Seja $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ um operador linear no espaço de Banach complexo $\mathcal{B} \neq \{0\}$. O *conjunto resolvente* de T, denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o *operador resolvente* de T em λ,

$$R_\lambda(T) : \mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{dom} T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda \mathbf{1})^{-1},$$

existe e é limitado, isto é, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$. O *espectro* de T é o conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Observemos que $\sigma(T)$ contém todos os *autovalores* do operador T, isto é, todos os números λ para os quais a equação $(T - \lambda \mathbf{1})\psi = 0$ tem pelo menos uma solução não nula $\psi \in \operatorname{dom} T$; nesse caso, ψ é chamado de *autovetor* de T.

Teorema 1.2. *Seja $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$. Então, para todo λ no disco $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$ do plano complexo, $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$ e*

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1},$$

em que a série é absolutamente convergente.

Corolário 1.3. *$\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado de $\mathbb{C}$.*

Corolário 1.4. *Se $\sigma(T)$ e $\rho(T)$ são não vazios, então*

$$\|R_\lambda(T)\| \geq 1/d(\lambda, \sigma(T)), \quad \forall \lambda \in \rho(T),$$

com $d(\lambda, \sigma(T)) := \inf_{\mu \in \sigma(T)} |\mu - \lambda|$.

Para operadores limitados, tem-se os seguintes resultados específicos sobre o espectro.

Corolário 1.5. *Seja $T \in B(\mathcal{B})$. Se $|\lambda| > \|T\|$, então $\lambda \in \rho(T)$ e $\|R_\lambda(T)\| \to 0$, quando $|\lambda| \to \infty$.*

Corolário 1.6. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Definição 1.7. Sejam (T_n) uma sequência de operadores no espaço $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $T : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2$ linear. Diz-se que

a) T_n *converge fortemente* para T se

$$\|T_n\xi - T\xi\|_{\mathcal{N}_2} \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Denota-se por $T_n \xrightarrow{s} T$ ou $\mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} T_n = T$.

b) T_n *converge uniformemente*, ou *em norma*, para T se

$$\|T_n - T\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Denota-se tal convergência por $T_n \to T$ ou $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [4].

1.2 Operadores autoadjuntos

Definição 1.8. Um operador linear $T : \operatorname{dom} T \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *simétrico* se

$$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, T\eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} T.$$

T é *hermitiano* se é simétrico e $\operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}$.

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Seja $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, definimos $\operatorname{dom} T^*$ como o espaço vetorial dos elementos $\eta \in \mathcal{H}_2$ tais que o funcional linear

$$\xi \to \langle \eta, T\xi\rangle, \quad \xi \in \operatorname{dom} T,$$

pode ser representado por $\zeta \in \mathcal{H}_1$, ou seja,

$$\langle \eta, T\xi\rangle = \langle \zeta, \xi\rangle, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T.$$

Definição 1.9. O *adjunto* de T é o operador T^* com domínio $\operatorname{dom} T^*$ definido acima e, para $\eta \in \operatorname{dom} T^*$, $T^*\eta := \zeta$. Assim,

$$\langle \eta, T\xi\rangle = \langle T^*\eta, \xi\rangle, \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} T, \forall \eta \in \operatorname{dom} T^*.$$

Note que é essencial que $\operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}_1$ para que $T^* : \operatorname{dom} T^* \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ esteja bem definido.

A seguinte proposição mostra algumas propriedades do adjunto para o caso especifico de operadores limitados.

Proposição 1.10. *Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $T^{**} = T$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Portanto,*

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_1, \forall \eta \in \mathcal{H}_2.$$

Definição 1.11. a) Um operador linear $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *autoadjunto* se $T = T^*$

b) Um operador limitado $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é *unitário* se $\operatorname{Im} T = \mathcal{H}_2$, é injetor e $T^* = T^{-1}$.

Observação 1. a) Note que $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ é unitário se, e somente se,

$$\langle T\xi, T\eta \rangle = \langle \xi, T^*T\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}_1,$$

e $\operatorname{Im} T = \mathcal{H}_2$; em particular os operadores unitários são isometrias e T^{-1} também é unitário.

b) Se T é autoadjunto, então $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $\xi \in \operatorname{dom} T$. De fato, dado $\xi \in \operatorname{dom} T$

$$\langle T\xi, \xi \rangle = \langle \xi, T^*\xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle = \overline{\langle T\xi, \xi \rangle}.$$

Além disso, um operador autoadjunto é simétrico. Portanto, todo operador autoadjunto é hermitiano.

c) Se $T \in B(\mathcal{B})$, a noção de hermitiano e autoadjunto coincidem.

Proposição 1.12. *Se $T \in B(\mathcal{H})$ é autoadjunto. Então,*

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T\xi, \xi \rangle.$$

Definição 1.13. Sejam T e S operadores lineares em $\mathcal{H}$, defina $\operatorname{dom}(S+T) := \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ e $\operatorname{dom}(ST) := \{\xi \in \operatorname{dom} T : T\xi \in \operatorname{dom} S\}$,

$$(S+T)\xi := T\xi + S\xi \quad e \quad (ST)\xi := S(T\xi),$$

que são chamados de *operador soma* e *operador produto*, respetivamente.

Teorema 1.14. *Seja $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear e $S \in B(\mathcal{H})$. Então, $T^*S^* = (ST)^*$.*

Definição 1.15. a) Dizemos que os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são *unitariamente equivalentes* se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$.

b) Dois operadores lineares $T_j : \operatorname{dom} T_j \subset \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, são *unitariamente equivalentes* se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\operatorname{dom} T_2 := U \operatorname{dom} T_1$ e

$$T_2 = UT_1U^{-1} = UT_1U^*.$$

Proposição 1.16. *Sejam T_1 e T_2 operadores lineares unitariamente equivalentes. Então,*

a) se T_1 é hermitiano (resp. autoadjunto), então T_2 também é hermitiano (resp. autoadjunto);

b) $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$.

Prova: a) Por hipótese, existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $\operatorname{dom} T_2 = U \operatorname{dom} T_1$ e $T_2 = UT_1U^*$; note que $\operatorname{dom} T_2 \sqsubseteq \mathcal{H}_2$. Suponha T_1 hermitiano. Dados $\xi, \eta \in \operatorname{dom} T_2$,

$$\begin{aligned}\langle T_2\xi, \eta \rangle &= \langle (UT_1U^*)\xi, \eta \rangle = \langle T_1(U^*)\xi, U^*\eta \rangle \\ &= \langle U^*\xi, T_1(U^*\eta) \rangle = \langle \xi, (UT_1U^*)\eta \rangle \\ &= \langle \xi, T_2\eta \rangle.\end{aligned}$$

Portanto, T_2 é hermitiano. Agora, suponha que T_1 seja autoadjunto. Nesse caso,

$$T_2^* = (UT_1U^*)^* = (U^*)^*(UT_1)^* = UT_1^*U^* = UT_1U^* = T_2.$$

Portanto, T_2 é autoadjunto.

b) Dado $z \in \mathbb{C}$, vale

$$U(T_1 - z\mathbf{1})U^* = T_2 - z\mathbf{1}.$$

Assim, $z \in \rho(T_1)$ se, e somente se, $z \in \rho(T_2)$. Logo $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$. □

Uma das propriedades fundamentais do espectro dos operadores autoadjuntos é o seguinte teorema.

Teorema 1.17. *Se T é autoadjunto, então $\sigma(T)$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

Corolário 1.18. *Se T é autoadjunto e $z \in \rho(T)$, então*

$$\|R_z(T)\| = \frac{1}{d(z, \sigma(T))}.$$

Teorema 1.19. *Seja T autoadjunto, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $z \in \rho(T)$.

b) $\mathrm{Im}(T - z\mathbf{1}) = \mathcal{H}$.

c) $\exists c > 0$ *tal que* $\|(T - z\mathbf{1})\xi\| \geq c\|\xi\|$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} T$.

Definição 1.20. Um operador hermitiano T é *limitado inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \xi, T\xi \rangle \geq \beta\|\xi\|$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} T$. Neste caso, usamos a notação $T \geq \beta\mathbf{1}$ e dizemos que β é *um limite inferior* para T. No caso em que $\beta = 0$, T também é chamado de *operador positivo*.

Teorema 1.21. *Seja T um operador autoadjunto com $T \geq \beta\mathbf{1}$, então $\sigma(T) \subset [\beta, \infty)$.*

Outra propriedade interessante é mostrada no seguinte teorema.

Teorema 1.22. *Seja T autoadjunto. Se λ é um ponto isolado de $\sigma(T)$, então λ é um autovalor de T.*

Definição 1.23. Seja T um operador autoadjunto.

a) O *espectro essencial* de T é o conjunto $\sigma_{ess}(T)$ de pontos de acumulação de $\sigma(T)$ junto como os autovalores T de multiplicidade infinita.

b) O *espectro discreto* de T é o conjunto $\sigma_d(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$, isto é, o conjunto de autovalores isolados de T, cada um com multiplicidade finita.

c) Se $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$, então T diz-se ter *espectro puramente discreto*; se $\sigma_d(T) = \emptyset$, então T diz-se ter *espectro puramente essencial*.

Note que $\sigma_{ess}(T) \subset \sigma(T)$ desde que este último é um conjunto fechado.

Definição 1.24. Uma sequência $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ *converge fracamente* a $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, se para cada $\eta \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\langle \xi_n, \eta \rangle \to \langle \xi, \eta \rangle.$$

Dizemos que $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ *converge em norma* ou *converge fortemente* a $\xi \in \mathcal{H}$ se

$$\|\xi_n - \xi\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

O próximo resultado apresenta uma caracterização importante do espectro essencial.

Teorema 1.25. *Se T é autoadjunto, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$;

ii) Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$ *(isto é,* $\|\xi_n\| = 1$, $\forall n$*) de tal modo que* $\xi_n \stackrel{w}{\to} 0$ *e*

$$(T - \lambda \mathbf{1})\xi_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Tal sequência é chamada de sequência singular de Weyl para T em λ.

Corolário 1.26. *Se T é autoadjunto, então $\sigma_{ess}(T)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

Definição 1.27. Sejam (T_n) uma sequência de operadores autoadjuntos e T autoadjunto. Diz-se que

a) T_n converge para T no *sentido forte dos resolventes* (SR) se $R_i(T_n) \stackrel{s}{\to} R_i(T)$, e denota-se por $T_n \stackrel{SR}{\to} T$.

b) T_n converge para T no *sentido da norma dos resolventes* (NR) se $R_i(T_n) \to R_i(T)$, e denota-se por $T_n \stackrel{NR}{\to} T$.

Observação 2. Se $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $R_{\lambda_0}(T_n) \stackrel{s}{\to} R_{\lambda_0}(T)$ (ou em norma), então $R_\lambda(T_n) \stackrel{s}{\to} R_\lambda(T)$ (resp. em norma) para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [4].

1.3 Operadores compactos

Definição 1.28. Um operador linear $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é *compacto*, também chamado de *completamente continuo*, se $\overline{T(A)}$ é compacto em $\mathcal{H}$ para todo subconjunto limitado $A \subset \operatorname{dom} T$.

Observação 3. Equivalentemente, $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é compacto se para toda sequência limitada $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} T$, a sequência $(T\xi_n)$ tem uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$.

O seguinte teorema mostra uma caracterização dos operadores autoadjuntos com espectro essencial vazio; devido a tal caracterização estes operadores também são chamados de *operadores com resolvente compacto*.

Teorema 1.29. *Seja* $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador autoadjunto e suponha que* $\dim \mathcal{H} = \infty$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$.

ii) Existe uma base ortonormal $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ *de $\mathcal{H}$ formada por autovetores de T,* $T\xi_j = \lambda_j \xi_j$, $\forall j$, *com λ_j autovalores reais, contando suas multiplicidades, satisfazendo* $\lim_{j\to\infty} |\lambda_j| = \infty$ *(e assim, cada um deles possui multiplicidade finita).*

iii) $R_z(T)$ *é um operador compacto para algum* $z \in \rho(T)$ *(portanto,* $\forall z \in \rho(T)$*).*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [4].

1.4 Operadores multiplicação

Seja μ uma medida de Borel positiva sob um espaço métrico X obedecendo $\mu(E) < \infty$, para todo conjunto de Borel limitado $E \subset X$. Fixado um conjunto de Borel E, seja $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Definimos o *operador multiplicação* por φ como o operador linear

$$\operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi := \{\psi \in L^2_\mu(E) : (\varphi\psi) \in L^2_\mu(E)\},$$
$$(\mathcal{M}_\varphi \psi)(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \forall \psi \in \operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi.$$

Proposição 1.30. *$\operatorname{dom} \mathcal{M}_\varphi$ é denso em $L^2_\mu(E)$ e $\mathcal{M}^*_\varphi = \mathcal{M}_{\overline{\varphi}}$.*

Corolário 1.31. *$\mathcal{M}_\varphi$ é autoadjunto se, e somente se, φ é uma função real.*

Exemplo 1. Seja $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$, com μ sendo uma medida $\sigma-$finita. Então, o operador multiplicação por ϕ, $\mathcal{M}_\phi : L^p_\mu(\Omega) \longrightarrow L^p_\mu(\Omega)$,

$$(\mathcal{M}_\phi \psi)(t) = \phi(t)\psi(t), \quad \forall \psi \in L^p_\mu(\Omega),$$

é um operador linear, $\forall 1 \leq p \leq \infty$. Note que $\mathcal{M}_\phi \psi \in L^p_\mu(\Omega)$ para $\psi \in L^p_\mu(\Omega)$. Além disso, $\mathcal{M}_\phi$ é limitado em $L^p_\mu(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $\|\mathcal{M}_\phi \psi\| = \|\phi\|_\infty$.

Definição 1.32. A ($\mu-$) imagem essencial de uma função mensurável $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ é o conjunto de todos os $y \in \mathbb{C}$ tais que $\mu(\{x \in E : |\varphi(x) - y| < \varepsilon\}) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

Proposição 1.33. *a) O espectro $\sigma(\mathcal{M}_\varphi)$ é a imagem essencial de φ.*

b) λ é um autovalor de $\mathcal{M}_\varphi$ se, e somente se, $\mu(\{\varphi^{-1}(\lambda)\}) > 0$.

As provas dos resultados enunciados nesta seção, assim como os detalhes do Exemplo 1, podem ser encontrados em [4].

1.5 Formas sesquilineares

Seja $\operatorname{dom} b$ um subespaço denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Uma *forma sesquilinear* em $\mathcal{H}$ é uma aplicação

$$b : \operatorname{dom} b \times \operatorname{dom} b \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é linear na segunda variável e antilinear na primeira. b é hermitiana se

$$b(\xi, \eta) = \overline{b(\eta, \xi)}, \quad \forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} b.$$

A aplicação $\xi \mapsto b(\xi, \xi) := b(\xi)$, $\xi \in \operatorname{dom} b$, é chamada de *forma quadrática* associada a b. Em algumas situações denota-se $\operatorname{dom} b \times \operatorname{dom} b$ simplesmente por $\operatorname{dom} b$.

Observação 4. i) Vale a seguinte *identidade de polarização* para formas quadráticas:

$$4b(\xi, \eta) = b(\xi + \eta) - b(\xi - \eta) - ib(\xi + i\eta) + ib(\xi - i\eta), \quad \forall \xi, \eta \in \operatorname{dom} b.$$

ii) b é hermitiana se, e somente se, a forma quadrática associada é real. De fato, suponha que b seja hermitiana. Para cada $\xi \in \operatorname{dom} b$,

$$b(\xi) = b(\xi, \xi) = \overline{b(\xi, \xi)} = \overline{b(\xi)},$$

ou seja, $b(\xi)$ é real. Agora, suponha que b é uma forma quadrática real. Do item i), quaisquer que sejam $\xi, \eta \in \operatorname{dom} b$,

$$\begin{aligned} b(\xi,\eta) &= 1/4[b(\xi+\eta) - b(\xi-\eta) - ib(\xi+i\eta) + ib(\xi-i\eta)] \\ &= 1/4[b(\eta+\xi) - b(\eta-\xi) - ib(\eta-i\xi) + ib(\eta+i\xi)] \\ &= 1/4[b(\eta+\xi) - b(\eta-\xi) + ib(\eta+i\xi) - ib(\eta-i\xi)] \\ &= \overline{b(\eta,\xi)}, \end{aligned}$$

ou seja, b é hermitiana.

Definição 1.34. Uma forma sesquilinear é *limitada* se

$$\|b\| := \sup_{\substack{\xi_1,\xi_2 \in \operatorname{dom} b \\ \xi_1,\xi_2 \neq 0}} \frac{|b(\xi_1,\xi_2)|}{\|\xi_1\|\|\xi_2\|}$$

é finito, isto é, $\|b\| < \infty$.

Exemplo 2. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma forma sesquilinear limitada, de norma 1.

Proposição 1.35. *Se $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T_b \in B(\mathcal{B})$ satisfazendo*

$$b(\xi_1,\xi_2) = \langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle, \quad \forall \xi_1,\xi_2 \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|T_b\| = \|b\|$ e se b é hermitiana, então T_b é autoadjunto.

Observação 5. Existe uma correspondência biunívoca entre as formas sesquilineares limitadas (resp. hermitianas) em $\mathcal{H}$ e os operadores limitados em $\mathcal{H}$ (resp. autoadjuntos). A forma sesquilinear do Exemplo 2 tem como operador autoadjunto associado o operador identidade.

Definição 1.36. a) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Então, b é *positiva* se a forma quadrática associada satisfaz $b(\xi,\xi) \geq 0$, $\forall \xi \operatorname{dom} b$.

b) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana. Então, b é *limitada inferiormente* se existe $\beta \in \mathbb{R}$ com $b(\xi,\xi) \geq \beta\|\xi\|^2$, $\forall \xi \operatorname{dom} b$. Neste caso, denotamos $b \geq \beta\mathbf{1}$ e dizemos que β é *um limite inferior* de b. Note que $b - \beta 1$ define uma forma sesquilinear positiva a qual é dada por

$$(b - \beta 1)(\xi,\eta) := b(\xi,\eta) - \beta\langle \xi,\eta \rangle.$$

c) Seja b uma forma sesquilinear hermitiana e $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} b$. (ξ_n) é chamada de *sequência de Cauchy* com relação a b (ou em $(\operatorname{dom} b, b)$) se $b(\xi_n - \xi_m) \to 0$ quando $n, m \to \infty$. Diz-se que (ξ_n) *converge* a ξ com relação a b (ou em $(\operatorname{dom} b, b)$) se $\xi \in \operatorname{dom} b$ e $b(\xi_n - \xi) \to 0$ quando $n \to \infty$.

d) Uma forma sesquilinear b é *fechada* se para cada sequência de Cauchy (ξ_n) em $(\operatorname{dom} b, b)$ com $\xi_n \to \xi$ em $\mathcal{H}$, tem-se $\xi \in \operatorname{dom} b$ e $\xi_n \to \xi$ em $(\operatorname{dom} b, b)$.

Observação 6. Note que se b é uma forma sesquilinear limitada inferiormente, então sua forma quadrática associada é real. Logo, pela Observação 4, tem-se que b é hermitiana.

Se β é o limite inferior da forma sesquilinear b, definimos o seguinte produto interno em $\operatorname{dom} b \subset \mathcal{H}$:

$$\langle \xi,\eta \rangle_+ := b(\xi,\eta) + (1-\beta)\langle \xi,\eta \rangle, \quad \forall \xi,\eta \in \operatorname{dom} b.$$

Note que

$$\langle \xi, \xi \rangle_+ = b(\xi, \xi) + (1-\beta)\langle \xi, \xi \rangle = b(\xi) + (1-\beta)\|\xi\|^2 = b(\xi) - \beta\|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 \geq \|\xi\|^2.$$

Logo, $\|\xi\|_+ \coloneqq \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_+} \geq \|\xi\|$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} b$.

Lema 1.37. *Seja b uma forma sesquilinear hermitiana tal que $b \geq \beta 1$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $(\operatorname{dom} b, \langle \cdot, \cdot \rangle_+)$ *é um espaço de Hilbert.*

ii) *b é fechada.*

Exemplo 3. Dado um operador linear $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, podemos definir duas formas sesquilineares hermitianas e positivas. Mais precisamente, definimos $\operatorname{dom} b \coloneqq \operatorname{dom} T =: \operatorname{dom} \tilde{b}$ e

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= \langle T\xi, T\eta \rangle, \\ \tilde{b}(\xi, \eta) &= \langle T\xi, T\eta \rangle + \langle \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Em particular, desde que $\tilde{b}(\xi, \xi) = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|\xi\|_T^2$ (isto é, o quadrado da norma do gráfico de T), $\tilde{b}$ é fechada se, e somente se, T é fechado.

Esta forma quadrática pode ser vista como uma motivação para a introdução do produto interno $\langle \xi, \eta \rangle_+$ e o Lema 1.37.

Exemplo 4. Um operador hermitiano $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ define uma forma sesquilinear hermitiana b^T da seguinte forma:

$$b^T(\xi, \eta) \coloneqq \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \operatorname{dom} b^T = \operatorname{dom} T.$$

Ainda mais, b^T é limitada inferiormente se, e somente se, T é limitada inferiormente. b^T é chamada de *forma sesquilinear gerada por T*.

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [4].

1.6 Operadores associados às formas quadráticas

Definição 1.38. Dada uma forma sesquilinear hermitiana $b : \operatorname{dom} b \longrightarrow \mathbb{C}$, $\operatorname{dom} b \sqsubseteq \mathcal{H}$, o operador T_b associado à b é definido como

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T_b &\coloneqq \{\xi \in \operatorname{dom} b : \exists \zeta \in \mathcal{H} \text{ com } b(\eta, \xi) = \langle \eta, \zeta \rangle, \ \forall \eta \in \operatorname{dom} b\}, \\ T_b \xi &\coloneqq \zeta, \quad \xi \in \operatorname{dom} T_b, \end{aligned}$$

isto é, $b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b \xi \rangle$, $\forall \eta \in \operatorname{dom} b$, $\forall \xi \in \operatorname{dom} T_b$. Tal operador T_b está bem definido desde que $\operatorname{dom} b \sqsubseteq \mathcal{H}$.

Note que T_b é simétrico, pois, desde que b é hermitiano, para $\xi, \eta \in \operatorname{dom} T_b$,

$$\langle \eta, T_b \xi \rangle = b(\eta, \xi) = \overline{b(\xi, \eta)} = \overline{\langle \xi, T_b \eta \rangle} = \langle T_b \eta, \xi \rangle.$$

Além disso, se b é uma forma sesquilinear hermitiana limitada, o operador T_b da Definição 1.38 coincide com o operador da Proposição 1.35.

O próximo teorema é conhecido como representação de formas sesquilineares.

Teorema 1.39. *Seja* $\operatorname{dom} b \sqsubseteq \mathcal{H}$ *e* $b : \operatorname{dom} b \times \operatorname{dom} b \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma forma sesquilinear fechada com limite inferior* $\beta \in \mathbb{R}$ *(portanto hermitiana).*

Então, o operador T_b *associado à* b *é o único operador autoadjunto com* $\operatorname{dom} T_b \sqsubseteq \operatorname{dom} b$ *tal que*

$$b(\eta, \xi) = \langle \eta, T_b \xi \rangle, \quad \forall \eta \in \operatorname{dom} b,\ \forall \xi \in \operatorname{dom} T_b.$$

Ainda mais, $T_b \geq \beta \mathbf{1}$ *e* $\operatorname{dom} T_b$ *é um cerne de* b*, isto é,* $\overline{b|_{\operatorname{dom} T_b}} = b$ *.O subespaço* $\operatorname{dom} b$ *é chamado de domínio da forma de* T_b*.*

O próximo resultado é uma versão do Teorema 1.25, o qual apresenta uma caracterização do espectro essencial no qual a forma quadrática associada a T apareça.

Teorema 1.40. *Sejam* $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador autoadjunto e positivo e* b *a sua forma quadrática associada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$*;*

ii) Existe uma sequência normalizada $(\xi_n) \subset \operatorname{dom} b$*, de tal modo que* $\xi_n \overset{w}{\to} 0$ *em* $\mathcal{H}$ *e*

$$(T - \lambda \mathbf{1})\xi_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

em $(\operatorname{dom} b)^*$*, o qual denota o espaço dual do espaço* $\operatorname{dom} b$*.*

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [4] e [18].

1.7 O princípio Max-Min

Em alguns casos é possível caracterizar os autovalores de um operador que estão abaixo do seu espectro essencial através de uma aproximação variacional. Vejamos os resultados abaixo.

Proposição 1.41. *Seja* $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Suponha que, contando a multiplicidade, os autovalores de* T *sejam*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \inf \sigma_{ess}(T).$$

Então,

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq \xi \in domT} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, \qquad E_1 := N(T - \lambda_1 I),$$
$$\lambda_2 = \inf_{0 \neq \xi \in domT \cap E_1^{\perp}} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, \qquad E_2 := E_1 \oplus N(T - \lambda_2 I)$$
$$\lambda_k = \inf_{0 \neq \xi \in domT \cap E_{k-1}^{\perp}} \frac{\langle \xi, T\xi \rangle}{\|\xi\|^2}, \quad \text{em que} \quad E_{k-1} := E_{k-2} \oplus N(T - \lambda_{k-1} I).$$

A Proposição 1.41 é conhecida como *caracterização variacional do espetro discreto.*

Teorema 1.42 (Princípio Max-Min)**.** *Seja* $T : domT \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador autoadjunto e limitado inferiormente. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, defina*

$$\lambda_n(T) = \sup_{M_{n-1}} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \operatorname{dom} T \cap M_{n-1}^{\perp} \\ \|\psi\| = 1}} \langle \psi, T\psi \rangle \right\}, \tag{1.1}$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços lineares M_{n-1} de dimensão no máximo $n-1$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se o seguinte:

(i) $\lambda_n(T) < \lambda_{ess}(T) := \inf\{\lambda \in \sigma_{ess}(T)\}$ *se, e somente se, T tem no mínimo n autovalores menores que $\lambda_{ess}(T)$. Neste caso, $\lambda_n(T)$ é o $n-$ésimo autovalor de T e o ínfimo em (1.1) é atingido quando $M_{n-1} = [e_1, \ldots, e_{n-1}]$, em que e_j é o $j-$ésimo autovetor de T $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ correspondente ao $j-$ésimo autovalor.*

(ii) $\lambda_n(T) = \lambda_{ess}(T)$ *se, e somente se, T tem no máximo $n-1$ autovalores menores que $\lambda_{ess}(T)$ e, neste caso, $\lambda_m(T) = \lambda_n(T)$, para todo $m > n$.*

Será conveniente ter uma versão do Teorema 1.42 no qual a forma quadrática associada a T apareça.

Teorema 1.43. *Sejam T, $\lambda_n(T)$ e M_{n-1} como no Teorema 1.42. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_n(T) = \sup_{M_{n-1}} \left\{ \inf_{\substack{\psi \in \operatorname{dom} b \cap M_{n-1}^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} b(\psi) \right\},$$

em que $b(\cdot)$ e $\operatorname{dom} b$ são a forma quadrática e o domínio da forma de T, respectivamente.

Definição 1.44. Seja $\mathcal{H}_1$ um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Sejam $S : \operatorname{dom} S \sqsubseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ e $T : \operatorname{dom} T \sqsubseteq \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ operadores autoadjuntos positivos. Denote por a e b as formas quadráticas associadas a S e T, respectivamente. Dizemos que $0 \leq S \leq T$ se, e somente se, $\operatorname{dom} b \subset \operatorname{dom} a$ e

$$0 \leq a(\xi) \leq b(\xi), \quad \forall \xi \in \operatorname{dom} b.$$

Lema 1.45. *Sejam S e T como na Definição 1.44 e suponha que $0 \leq S \leq T$. Então, $\lambda_n(S) \leq \lambda_n(T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

As provas dos resultados enunciados nesta seção podem ser encontrados em [4] e [8].

Capítulo 2

Laplaciano de Dirichlet-Neumann em faixas estreitas

Neste capítulo definimos detalhadamente a região do plano de interesse de nosso estudo. Em seguida, usando formas quadráticas, definimos o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann nessa região. Algumas mudanças de variáveis que serão úteis ao longo do texto também são apresentadas.

2.1 Geometria da faixa

Dado um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (limitado ou ilimitado), seja $\gamma : \overline{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, de classe C^2 e com velocidade unitária (isto é, o seu traço está contido em um plano e $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, $\forall s \in I$). Escrevendo $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)$, sejam

$$\dot{\gamma} := \left(\dot{\gamma}^1, \dot{\gamma}^2\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{n} := \left(-\dot{\gamma}^2, \dot{\gamma}^1\right)$$

o campo de vetores tangentes unitários e o campo de vetores normais ao longo de γ, respectivamente.

A curvatura de γ é definida através da fórmula de Frenet–Serret como

$$\kappa := \det\left(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}\right) = \langle \ddot{\gamma}, \mathrm{n} \rangle = -\dot{\gamma} \cdot \dot{\mathrm{n}}.$$

Neste texto vamos supor que $\kappa \in L^\infty(I)$.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos a aplicação $\mathcal{L}_\varepsilon : \overline{I} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) := \gamma(s) + \varepsilon t \, \mathrm{n}(s), \quad \forall s \in \overline{I}, \, \forall t \in [0,1].$$

Observe que, fixando $t \in [0,1]$, a aplicação $s \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon(s,t)$ descreve uma curva "paralela" à γ e a uma distância $|\varepsilon t|$ dela. Por outro lado, fixando $s \in \overline{I}$, $u \mapsto \mathcal{L}_\varepsilon(s,t)$ descreve uma linha reta ortogonal à γ em s.

A aplicação $\mathcal{L}_\varepsilon$ é de classe C^1 no aberto $\Omega := I \times (0,1)$. Agora, vamos verificar que o determinante da sua matriz Jacobiana, denotada por $J\mathcal{L}_\varepsilon$, é não nulo para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Observemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) &= \gamma(s) + \varepsilon t\,\mathrm{n}(s) = \left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) + \varepsilon t\left(-\dot{\gamma}^2(s), \dot{\gamma}^1(s)\right) \\ &= \left(\gamma^1(s) - \varepsilon t\dot{\gamma}^2(s), \gamma^2(s) + \varepsilon t\dot{\gamma}^1(s)\right) = \left(\mathcal{L}_\varepsilon^1(s,t), \mathcal{L}_\varepsilon^2(s,t)\right),\end{aligned}$$

em que $\mathcal{L}_\varepsilon^1(s,t) \coloneqq \gamma^1(s) - \varepsilon t\dot{\gamma}^2(s)$ e $\mathcal{L}_\varepsilon^2(s,t) \coloneqq \gamma^2(s) + \varepsilon t\dot{\gamma}^1(s)$. Logo,

$$J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1(s) - \varepsilon t\ddot{\gamma}^2(s) & -\varepsilon\dot{\gamma}^2(s) \\ \dot{\gamma}^2(s) + \varepsilon t\ddot{\gamma}^1(s) & \varepsilon\dot{\gamma}^1(s) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}\det J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) &= \begin{vmatrix} \dot{\gamma}^1(s) - \varepsilon t\ddot{\gamma}^2(s) & -\varepsilon\dot{\gamma}^2(s) \\ \dot{\gamma}^2(s) + \varepsilon t\ddot{\gamma}^1(s) & \varepsilon\dot{\gamma}^1(s) \end{vmatrix} \\ &= (\dot{\gamma}^1(s) - \varepsilon t\ddot{\gamma}^2(s))(\varepsilon\dot{\gamma}^1(s)) - (-\varepsilon\dot{\gamma}^2(s))(\dot{\gamma}^2(s) + \varepsilon t\ddot{\gamma}^1(s)) \\ &= \varepsilon((\dot{\gamma}^1(s))^2 + (\dot{\gamma}^2(s))^2 - \varepsilon t(\dot{\gamma}^1(s)\ddot{\gamma}^2(s) - \dot{\gamma}^2(s)\ddot{\gamma}^1(s))) \\ &= \varepsilon(\|\dot{\gamma}(s)\|^2 - \varepsilon t\det(\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s))) \\ &= \varepsilon(1 - \varepsilon t\kappa(s)).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Desde que $\kappa \in L^\infty(I)$, temos

$$\varepsilon\|\kappa\|_\infty < 1, \tag{2.2}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, $\det J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) \neq 0$, para todo $(s,t) \in \Omega$, desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno.

O Teorema da Aplicação Inversa garante que $\mathcal{L}_\varepsilon$ é um difeomorfismo local de classe C^1 em Ω. Supondo que $\mathcal{L}_\varepsilon$ é injetora (ou seja, que a faixa não se auto-intercepta), segue que $\mathcal{L}_\varepsilon$ é um difeomorfismo global de classe C^1 em Ω.

Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos a faixa estreita

$$\Omega_\varepsilon \coloneqq \mathcal{L}_\varepsilon(\Omega).$$

A imagem Ω_ε num sentido geométrico descreve uma faixa aberta, que não apresenta interseção consigo mesma, contida entre as curvas paralelas

$$\gamma(I) \coloneqq \mathcal{L}_\varepsilon(I \times \{0\}) \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(I) \coloneqq \mathcal{L}_\varepsilon(I \times \{1\}),$$

e, se $\partial I \neq \emptyset$, as linhas retas $\mathcal{L}_\varepsilon(\{\inf I\} \times (0,1))$ e $\mathcal{L}_\varepsilon(\{\sup I\} \times (0,1))$. Observe a Figura 1.

2.2 Operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann e mudança de variáveis

Consideremos a forma quadrática $\mathcal{Q}_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ definida por

$$\mathcal{Q}_{DN}^{\Omega_\varepsilon}[\Psi] \coloneqq \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\Psi(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{dom}\left(\mathcal{Q}_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\right) \coloneqq \{\Psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\varepsilon) : \Psi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon(I)\}.$$

Denotamos por $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ seu operador autoadjunto associado que também é chamado de operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann. Grosseiramente falando, este operador age no espaço de Hilbert $L^2(\Omega_\varepsilon)$ com condições de contorno de Dirichlet e de Neumann sobre γ e γ_ε, respectivamente. Se $\partial I \neq \emptyset$, valem as condições de Dirichlet nas partes restantes de $\partial\Omega_\varepsilon$.

É natural expressar o operador $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ nas coordenadas (s,t) determinadas pela inversa da aplicação $\mathcal{L}_\varepsilon$. Assim, vamos realizar uma mudança de variáveis de forma que a região de integração em (2.3) seja mais simples e não dependa de ε.

Definimos a função $h_\varepsilon(s,t) := 1 - \varepsilon t\kappa(s)$, $(s,t) \in \Omega$. Assim, podemos escrever

$$\det J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t) = \varepsilon h_\varepsilon(s,t), \quad (s,t) \in \Omega.$$

Observe que (2.2) fornece uma estimativa uniforme

$$0 < 1 - \varepsilon \sup_{s\in I} |\kappa(s)| \leq h_\varepsilon(s,t) \leq 1 - \varepsilon \inf_{s\in I} |\kappa(s)| < \infty, \tag{2.4}$$

para todo $(s,t) \in \Omega$ e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon := L^2(\Omega, h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t)$ em que o seu produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ é dado por

$$\langle \eta, \psi\rangle_\varepsilon = \int_\Omega \overline{\eta(s,t)}\psi(s,t)\ h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad \eta,\psi \in \mathcal{H}_\varepsilon.$$

Consequentemente, a sua norma associada $\|\cdot\|_\varepsilon$ é

$$\|\psi\|_\varepsilon^2 = \int_\Omega |\psi(s,t)|^2\ h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \qquad \psi \in \mathcal{H}_\varepsilon. \tag{2.5}$$

Definimos o operador linear

$$U_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{H}_\varepsilon$$

por

$$U_\varepsilon\Psi = \sqrt{\varepsilon}\Psi \circ \mathcal{L}_\varepsilon, \quad \Psi \in L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Afirmamos que U_ε é unitário. De fato, denote por $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ a normal usual de $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Então, pelo Teorema de Mudança de Variáveis, sendo $\mathcal{L}_\varepsilon$ um difeomorfismo de classe C^1 temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\Psi(x)|^2\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \varepsilon|(\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)|^2\ h_\varepsilon(s,t)\ \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega |\sqrt{\varepsilon}(\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)|^2\ h_\varepsilon(s,t)\ \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega |U_\varepsilon\Psi(s,t)|^2\ h_\varepsilon(s,t)\ \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \|U_\varepsilon\Psi\|_\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Psi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|U_\varepsilon\Psi\|_\varepsilon, \quad \forall\Psi \in L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Portanto, U_ε é uma isometria. Além disso, é fácil ver que U_ε é sobrejetor e $U_\varepsilon^{-1} = U_\varepsilon^*$. Sendo assim, U_ε é um operador linear unitário.

O próximo passo é aplicar a mudança de variáveis definida por U_ε à forma quadrática $\mathcal{Q}_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$.

Neste caso, alguns cálculos (veja apêndice A) mostram que

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\varepsilon[\Psi] &:= \mathcal{Q}_{DN}^{\Omega_\varepsilon}(U_\varepsilon^{-1}\psi)\\ &= \int_\Omega \frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2}h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \psi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \setminus (I \times \{1\})\}.$$

Denotamos por H_ε o operador autoadjunto associado à $\mathcal{Q}_\varepsilon$. Desde que U_ε é unitário, os operadores $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ e H_ε são unitariamente equivalentes. Mas precisamente, vale a relação

$$H_\varepsilon = U_\varepsilon\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)U_\varepsilon^* = U_\varepsilon\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)U_\varepsilon^{-1}.$$

Desde que $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ é autoadjunto, a Proposição 1.16 garante que H_ε também é autoadjunto. Ainda mais, $\sigma(H_\varepsilon) = \sigma\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)$. Portanto, a partir de agora vamos a estudar o operador H_ε. Vamos trabalhar no espaço de Hilbert $L^2(\Omega, h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t)$ com a norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ dada por (2.5).

Uma relação que pode ser útil é a seguinte. Observemos que

$$(1-\varepsilon\sup_{s\in I}|\kappa(s)|)\int_\Omega|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leq \int_\Omega|\psi(s,t)|^2h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leq (1-\varepsilon\inf_{s\in I}|\kappa(s)|)\int_\Omega|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

ou seja,

$$\left(1-\varepsilon\sup_{s\in I}|\kappa(s)|\right)\|\psi\|^2 \leq \|\psi\|_\varepsilon^2 \leq \left(1-\varepsilon\inf_{s\in I}|\kappa(s)|\right)\|\psi\|^2,$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma usual de $L^2(\Omega)$. Portanto,

$$1-\varepsilon\sup_{s\in I}|\kappa(s)| \leq \frac{\|\psi\|_\varepsilon^2}{\|\psi\|^2} \leq 1-\varepsilon\inf_{s\in I}|\kappa(s)|, \quad \forall\psi\in\mathcal{H}_\varepsilon,\ \psi\neq 0. \tag{2.6}$$

A razão entre as normas age como $1+\mathcal{O}(\varepsilon)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Capítulo 3

Convergência espectral

Seja $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ o operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann definido na Seção 2.2 do Capítulo 2. Consideremos a sequência $\{\lambda_j\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)\}_{j=1}^{\infty}$ crescente correspondente ao problema espectral de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ dada pelo Princípio Max-Min. Relembremos que cada $\lambda_j\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)$ representa ou um autovalor (discreto, repetido de acordo com a sua multiplicidade) inferior ao espectro essencial ou o ínfimo do espectro essencial de $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$. Neste capítulo, estabelecemos um limite superior e um limite inferior para os valores da sequência $\big\{\lambda_j\big(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\big)\big\}_{j=1}^{\infty}$.

Ao final do capítulo é apresentado um dos principais resultados do trabalho, assim como a demostração de (1); veja a Introdução deste trabalho.

3.1 Limite superior

Seja ψ uma função teste no domínio $\mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ da forma

$$\psi(s,t) := \varphi(s)\chi_1(t), \tag{3.1}$$

em que $\chi_1(t) := \sqrt{2}\sin(\pi t/2)$ e $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(I)$. Note que χ_1 é a autofunção normalizada correspondente ao menor autovalor do operador Laplaciano unidimensional $-\Delta_{DN}^{(0,1)}$ sujeito às condições de contorno de Dirichlet e de Neumann em 0 e 1, respectivamente.

Agora, vamos analisar a diferença $\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - (\pi/2\varepsilon)^2\|\psi\|_\varepsilon^2$ para funções da forma (3.1). Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\|\psi\|_\varepsilon^2 &= \int_\Omega \frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2}h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\|\psi\|_\varepsilon^2 \\
&= \int_\Omega \frac{|\varphi'(s)\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \frac{|\varphi(s)\chi_1'(t)|^2}{\varepsilon^2}h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&- \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\int_\Omega |\varphi(s)\chi_1(t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Vamos analisar a segunda integral da última igualdade com mais detalhes:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|\varphi(s)\chi_1'(t)|^2}{\varepsilon^2} h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 (1-\varepsilon t\kappa(s))\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{\varepsilon}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{\varepsilon}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Na última igualdade, foi realizada uma integração por partes e usado o fato de que

$$
-\chi_1''(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \chi_1(t), \quad t \in (0,1). \tag{3.3}
$$

Agora, vamos analisar a última integral de (3.2):

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Omega |\varphi(s)\chi_1(t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= -\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Omega |\varphi(s)\chi_1(t)|^2 (1-\varepsilon t\kappa(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= -\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \left[\int_\Omega |\varphi(s)\chi_1(t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega |\varphi(s)\chi_1(t)|^2 \varepsilon t\kappa(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right] \\
&= -\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&+ \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \varepsilon \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 &= \int_I \left(\int_0^1 \frac{|\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi'(s)|^2\mathrm{d}s + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&- \frac{1}{\varepsilon}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&+ \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \varepsilon \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \int_I \left(\int_0^1 \frac{|\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi'(s)|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{\varepsilon}\int_I \left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&+ \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \varepsilon \int_I \left(\int_0^1 |\chi_1(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \int_I \left(\int_0^1 \frac{|\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi'(s)|^2\mathrm{d}s \\
&+ \int_I \left[\int_0^1 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |\chi_1(t)|^2 t - |\chi_1'(t)|^2 t\right)\mathrm{d}t\right]\frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\int_0^1 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |\chi_1(t)|^2 t - |\chi_1'(t)|^2 t\right)\mathrm{d}t = 1,
$$

segue que

$$\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 = \int_I \left(\int_0^1 \frac{|\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)} \mathrm{d}t \right) |\varphi'(s)|^2 \mathrm{d}s + \int_I \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s.$$

Por simplicidade de notação, definimos

$$a_\varepsilon(s) := \int_0^1 \frac{|\chi_1(t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)} \mathrm{d}t,$$

e escrevemos

$$\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 = \int_I \left(a_\varepsilon(s) |\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\varphi(s)|^2 \right) \mathrm{d}s.$$

Agora, observemos que, para cada $s \in I$,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(s) &\leq \sup_{(s,t)\in I\times(0,1)} \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)} \int_0^1 |\chi_1(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &= \sup_{(s,t)\in I\times(0,1)} \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)} \overset{(2.4)}{\leq} \frac{1}{1 - \varepsilon \sup_{s\in I} \kappa(s)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{s\in I} a_\varepsilon(s) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon \sup_{s\in I} \kappa(s)}. \tag{3.4}$$

Desde que $\kappa \in L^\infty(I)$ e $\|\varphi\|_{L^2(I)} = \|\psi\|$ (relembremos que $\|\cdot\|$ denota a norma usual em $L^2(\Omega)$), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi]}{\|\psi\|_\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 &= \frac{1}{\|\psi\|_\varepsilon^2} \left[\int_I \left(a_\varepsilon(s)|\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \right) \mathrm{d}s \right] \\ &\overset{(2.6)}{\leq} \frac{1}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))\|\psi\|^2} \left[\int_I \left(a_\varepsilon(s)|\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \right) \mathrm{d}s \right] \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))\|\varphi\|_{L^2(I)}^2} \left[\int_I \left(a_\varepsilon(s)|\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \right) \mathrm{d}s \right] \\ &\overset{(3.4)}{\leq} \frac{1}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \left[\frac{\int_I |\varphi'(s)|^2 \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} + (1-\varepsilon\sup\kappa(s)) \frac{\int_I \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} \right] \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \frac{\int_I \left(|\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \right) \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} - \frac{\sup\kappa(s)}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \frac{\int_I \kappa(s)|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Agora, faremos mais algumas estimativas que serão úteis. Novamente, desde que $\kappa \in L^\infty(I)$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\left| - \frac{\sup\kappa(s)}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \frac{\int_I \kappa(s)|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} \right| \leq \left| \frac{(\sup\kappa(s))^2}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \right| \leq K$$

e

$$\left| \frac{2\varepsilon\sup\kappa(s) - (\varepsilon\sup\kappa(s))^2}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \right| = \left| \frac{2\sup\kappa(s) - \varepsilon(\sup\kappa(s))^2}{(1-\varepsilon\sup\kappa(s))^2} \right| \varepsilon \leq K\varepsilon.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$-\frac{\sup \kappa(s)}{(1-\varepsilon \sup \kappa(s))^2}\frac{\int_I \kappa(s)|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} = \mathcal{O}(1),$$

$$\frac{1}{(1-\varepsilon \sup \kappa(s))^2} = 1 + \frac{2\varepsilon \sup \kappa(s) - (\varepsilon \sup \kappa(s))^2}{(1-\varepsilon \sup \kappa(s))^2} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Portanto,

$$\frac{\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi]}{\|\psi\|_\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \leq [1+\mathcal{O}(\varepsilon)]\frac{\int_I \left(|\varphi'(s)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2\right)\mathrm{d}s}{\int_I |\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s} + \mathcal{O}(1),$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Consideremos agora a forma quadrática unidimensional

$$\mathcal{Q}_0[\varphi] = \int_I |\varphi'(s)|^2 \mathrm{d}s + \int_I \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\varphi(s)|^2 \mathrm{d}s,$$

$\mathrm{dom}(\mathcal{Q}_0) \coloneqq \mathcal{H}_0^1(I)$. Seu operador autoadjunto associado é denotado por H_0. Mais precisamente, $H_0 = -\Delta_D^I + \kappa/\varepsilon$, em que Δ_D^I é o operador Laplaciano de Dirichlet unidimensional em I. Considere a sequência $\{\lambda_j(H_0)\}_{j=1}^{\infty}$ dada pelo Princípio Max-Min. Então, pelo Lema 1.45, para cada $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \lambda_j(H_\varepsilon) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 &\leq [1+\mathcal{O}(\varepsilon)]\lambda_j(H_0) + \mathcal{O}(1) \\ &= \lambda_j(H_0) + \mathcal{O}(1) \\ &= \lambda_j\left(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{3.5}$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

3.2 Limite inferior

Para cada $s \in I$ fixo, considere a forma quadrática

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{2,\varepsilon}[\psi] = \int_0^1 |\partial_t \psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}t, \quad \psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon),$$

agindo no no espaço de Hilbert $L^2((0,1), h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}t)$. Denotemos por $\widetilde{H}_{2,\varepsilon}$ seu operador autoadjunto associado.

Seja $\lambda_1(\widetilde{H}_{2,\varepsilon})$ o primeiro autovalor de $\widetilde{H}_{2,\varepsilon}$. O Princípio Max-Min garante que

$$\int_\Omega \frac{|\partial_t \psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2} h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geq \int_\Omega \frac{\lambda_1(\widetilde{H}_{2,\varepsilon})}{\varepsilon^2}|\psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{3.6}$$

para toda $\psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon)$.

Voltando à forma quadrática original $\mathcal{Q}_\varepsilon$, (3.6) implica

$$\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] \geq \int_\Omega \frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)} \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \frac{\lambda_1(\widetilde{H}_{2,\varepsilon})}{\varepsilon^2} |\psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{3.7}$$

para toda $\psi \in \operatorname{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon)$.

Para continuar com as estimativas vamos precisar de um problema auxiliar. Seja $\nu(\epsilon) \equiv \lambda_1(T_\epsilon)$ o menor autovalor do operador T_ϵ, agindo no espaço de Hilbert $L^2((0,1),(1-\epsilon t)\mathrm{d}t)$, definido por

$$(T_\epsilon \chi)(t) := -\chi''(t) + \frac{\epsilon}{1-\epsilon t}\chi'(t),$$
$$\chi \in \operatorname{dom} T_\epsilon := \{\chi \in \mathcal{H}^2(0,1) : \chi(0) = \chi'(1) = 0\}.$$

Note que $\nu(0) = \lambda_1(T_0) = (\pi/2)^2$ e sua autofunção associada é χ_1 (relembre que $\chi_1(t) = \sqrt{2}\sin(\pi t/2)$). Da Teoria de Perturbação Analítica, tem-se

$$\nu(\epsilon) = \nu(0) + \nu^{(1)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$, em que

$$\begin{aligned}
\nu^{(1)} &= \left\langle \frac{\chi_1'(t)}{1-\epsilon t}, \chi_1(t) \right\rangle = \int_0^1 \frac{\overline{\chi_1'(t)}}{1-\epsilon t}\chi_1(t)(1-\epsilon t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nu(\epsilon) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.8}$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$, (veja [16] para mais detalhes).

Usando a expansão (3.8) para $\lambda_1(\widetilde{H}_\varepsilon^2) = \nu(\varepsilon\kappa(s))$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 &\geq \int_\Omega \frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_\Omega |\psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&+ \int_\Omega \frac{\varepsilon\kappa(s) + \mathcal{O}((\varepsilon\kappa(s))^2)}{\varepsilon^2}|\psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 \\
&= \int_\Omega \frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \left(\frac{\kappa(s)}{\varepsilon} + \mathcal{O}((\kappa(s))^2)\right)|\psi(s,t)|^2 h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Desde que $\kappa \in L^\infty(I)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi] - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \|\psi\|_\varepsilon^2 \geq \int_\Omega \left(\frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)} + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}|\psi(s,t)|^2 + C|\psi(s,t)|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi]}{\|\psi\|_\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 &\geq \frac{1}{\|\psi\|_\varepsilon^2} \int_\Omega \left(\frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)} + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 + C|\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\overset{(2.6)}{\geq} \frac{1}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))\|\psi\|^2} \left[\int_\Omega \left(\frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)} + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 + C|\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega |\partial_s \psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} + \frac{1-\varepsilon \inf \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} \\
&+ \frac{C}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)} \frac{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega \left(|\partial_s \psi(s,t)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} \\
&- \frac{\inf \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega \kappa(s) |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} + \frac{C}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)}.
\end{aligned}
$$

Novamente, desde que $\kappa \in L^\infty(I)$, a constante $C > 0$ também pode ser tomada de forma que

$$
\begin{aligned}
\left| - \frac{\inf \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega \kappa(s) |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} \right| &\leq \left| \frac{\inf \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \sup \kappa(s) \frac{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} \right| \\
&\leq \left| \frac{\inf \kappa(s) \sup \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \right| \leq C.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
-\frac{\inf \kappa(s)}{(1-\varepsilon \inf \kappa(s))^2} \frac{\int_\Omega \kappa(s) |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} = \mathcal{O}(1),
$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Por outro lado, também temos

$$
\frac{C}{1-\varepsilon \inf \kappa(s)} = \mathcal{O}(1),
$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{Q}_\varepsilon[\psi]}{\|\psi\|_\varepsilon^2} - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 &\geq [1+\mathcal{O}(\varepsilon)] \frac{\int_\Omega \left(|\partial_s \psi(s,t)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \\
&= [1+\mathcal{O}(\varepsilon)] \frac{\int_\Omega \left(|\partial_s \psi(s,t)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t} + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}
$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Note que a forma quadrática

$$
\widetilde{\mathcal{Q}}_0[\psi] := \int_\Omega \left(|\partial_s \psi(s,t)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad \psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon),
$$

pode ser identificada com a forma quadrática unidimensional associada ao operador H_0. Logo, pelo Lema 1.45, tem-se, para cada $j \geq 1$,

$$
\lambda_j(H_\varepsilon) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right) \geq [1+\mathcal{O}(\varepsilon)]\lambda_j(H_0) + \mathcal{O}(1) = \lambda_j(H_0) + \mathcal{O}(1),
$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Portanto,

$$\lambda_j(H_\varepsilon) - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \geq \lambda_j\left(- \Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(1), \tag{3.9}$$

quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Das estimativas (3.5) e (3.9) para os valores da sequência $\left\{\lambda_j(H_\varepsilon)\right\}_{j=1}^{\infty}$, e do fato que os operadores $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ e H_ε são unitariamente equivalentes, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Para todo $j \geq 1$,*

$$\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \lambda_j\left(- \Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(1), \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Observação 7. O Teorema .6 do Apêndice C garante que, para todo $j \geq 1$,

$$\lambda_j\left(- \Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\right) = \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.10}$$

Como uma nova versão do Teorema 3.1, podemos afirmar que, para todo $j \geq 1$,

$$\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Assim, obtemos o comportamento assintótico dado por (1) na introdução deste trabalho.

Capítulo 4

Convergência uniforme dos resolventes

Neste capítulo vamos estudar com detalhes o mecanismo por trás da convergência dos valores da sequência $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$. Encontraremos um comportamento assintótico para esses valores, semelhante ao encontrado no Capítulo 3, mas por outras estratégias. Mostraremos que a convergência da sequência $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^{\infty}$ pode ser obtida como consequência de uma convergência em norma dos resolventes dos operadores $\{-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$.

4.1 Apresentação do resultado principal

Na Seção 2.2 do Capítulo 2 identificamos o operador $-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon}$ com o operador H_ε agindo no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon$. No entanto, a partir de agora, será mais conveniente trabalharmos com operadores agindo sobre um espaço de Hilbert "fixado", ou seja, que não depende do parâmetro ε. Relembremos que $\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(\Omega, h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t)$. Definimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_0 := L^2(\Omega),$$

com a métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Seja $\hat{U}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{H}_0$ o operador linear limitado dado por

$$\hat{U}_\varepsilon \psi = \sqrt{h_\varepsilon}\psi.$$

Observemos que $\hat{U}_\varepsilon$ é unitário. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos o operador

$$\hat{H}_\varepsilon := \hat{U}_\varepsilon H_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^* = \hat{U}_\varepsilon H_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon^{-1}.$$

Ao longo deste capítulo vamos supor que

$$\kappa' \in L^\infty(I).$$

Consideremos também o operador desacoplado

$$\hat{H}_0 := \left(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon} \right) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{DN}^{(0,1)} \right), \quad \text{em} \quad L^2(I) \otimes L^2(0,1).$$

A notação com o índice 0 é somente uma convenção de notação pois $\hat{H}_0$ ainda depende de ε.

Recordemos que o mapa

$$(\psi \otimes \varphi)(s,t) \mapsto \psi(s)\varphi(t), \quad \psi \in L^2(I),\, \varphi \in L^2(0,1), \tag{4.1}$$

pode ser estendido a um isomorfismo isométrico, em que

$$\|\psi \otimes \varphi\|_{L^2(I)\otimes L^2(0,1)} = \|\psi\|_{L^2(I)}\|\varphi\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall \psi \in L^2(I),\, \forall \varphi \in L^2(0,1).$$

Logo, podemos identificar $\hat{H}_0$ como um operador em $\mathcal{H}_0$.

Observemos que

$$\hat{H}_0 \geq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf \kappa}{\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Relembrando as considerações da Seção 3.2 do Capítulo 3, também temos

$$\hat{H}_\varepsilon \geq \frac{\nu(\varepsilon\kappa)}{\varepsilon^2} \geq \frac{\nu(\varepsilon \inf \kappa)}{\varepsilon^2} \overset{(3.8)}{=} \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1). \tag{4.3}$$

A primeira desigualdade foi estabelecida pelo operador H_ε e a desigualdade em (3.7). A segunda desigualdade é devido à monotonicidade da aplicação $\varepsilon \mapsto \nu(\varepsilon)$; veja [11].

Fixando um número qualquer

$$\underset{\sim}{k} > -\inf \kappa, \tag{4.4}$$

temos

$$\mathcal{O}(1) \leq \hat{H}_\varepsilon - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 - \frac{\inf \kappa}{\varepsilon} \overset{(4.4)}{<} \hat{H}_\varepsilon - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\underset{\sim}{k}}{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Assim, $\hat{H}_0 - (\pi/2\varepsilon)^2 + \underset{\sim}{k}/\varepsilon$ e $\hat{H}_\varepsilon - (\pi/2\varepsilon)^2 + \underset{\sim}{k}/\varepsilon$ são operadores positivos, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Agora estamos prontos para enunciar um dos resultados principais deste capítulo.

Teorema 4.1. *Em adição à injectividade de $\mathcal{L}_\varepsilon$ e a limitação de κ, suponhamos $\kappa' \in L^\infty(I)$. Então, existem constantes positivas ε_0 e C_0, dependendo somente de $\underset{\sim}{k}$ e do supremo das normas de κ e κ', tais que*

$$\left\| \left[\hat{H}_\varepsilon - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\underset{\sim}{k}}{\varepsilon}\right]^{-1} - \left[\hat{H}_0 - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\underset{\sim}{k}}{\varepsilon}\right]^{-1} \right\| \leq C_0 \varepsilon^{3/2},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

A demonstração deste teorema requer vários passos que serão apresentados nas próximas seções.

4.2 Formas quadráticas

Nesta seção vamos explicitar a forma quadrática associada ao operador $\hat{H}_\varepsilon$. Para isso, definimos

$$\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\psi] := \mathcal{Q}_\varepsilon[\hat{U}_\varepsilon^{-1}\psi], \quad \psi \in \mathrm{dom}(\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon) := \hat{U}_\varepsilon \,\mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon).$$

Desde que os domínios $\mathrm{dom}(\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon)$ coincidem e não dependem de ε, denotamos $\mathrm{dom}(\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon) = \hat{U}_\varepsilon \,\mathrm{dom}(\mathcal{Q}_\varepsilon) := \mathcal{D}$. Além disso, desde que $\hat{U}_\varepsilon^{-1}\psi = h_\varepsilon^{-1/2}\psi$, alguns cálculos (veja apêndice

B) mostram que, para cada $\psi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\psi] &= \mathcal{Q}_\varepsilon[\hat{U}_\varepsilon^{-1}\psi] = \mathcal{Q}_\varepsilon[h_\varepsilon^{-1/2}\psi] \\
&= \int_\Omega \frac{|\partial_s(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \frac{|\partial_t(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2}{\varepsilon^2} h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_\Omega \left[\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon^2(s,t)} + \frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2} + (V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t))|\psi(s,t)|^2 + V_\varepsilon^2(s,t)\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t))\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&+ \int_{I\times\{1\}} v_\varepsilon(s,t)|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

em que

$$V_\varepsilon^1(s,t) := \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2 t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^4(s,t)}, \qquad V_\varepsilon^2(s,t) := \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^3(s,t)},$$

$$V_\varepsilon^3(s,t) := \frac{1}{4}\frac{(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon^2(s,t)}, \qquad v_\varepsilon(s,t) := \frac{1}{2}\frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon\kappa(s))}.$$

Observemos que a expressão da forma quadrática $\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon$ depende fortemente de $\varepsilon > 0$ e da geometria de γ, no entanto, seu domínio não depende nem de $\varepsilon > 0$ e nem de κ; $\mathcal{D}$ é um subespaço do espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ com a métrica usual.

4.3 Operadores renormalizados

Nesta seção faremos as renormalizações necessárias com os operadores $\hat{H}_\varepsilon$ e $\hat{H}_0$ para dar continuidade ao estudo.

Por simplicidade de notação, definimos

$$L_\varepsilon := \hat{H}_\varepsilon - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\not{k}}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad L_0 := \hat{H}_0 - \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\not{k}}{\varepsilon}.$$

Denotamos por l_ε e l_0 as formas quadráticas associadas a L_ε e L_0, respectivamente. Observemos que $\mathrm{dom}(l_\varepsilon) = \mathcal{D}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $\hat{H}_0$ foi inicialmente definido como uma soma direta, usando o isomorfismo natural (4.1), assim, podemos identificar o seu domínio $\mathrm{dom}(l_0)$ com $\mathcal{D}$. Ainda mais, é possível mostrar que

$$l_0[\psi] = \int_\Omega \left\{|\partial_s\psi(s,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[|\partial_t\psi(s,t)|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2|\psi(s,t)|^2\right] + \frac{\not{k} + \kappa(s)}{\varepsilon}|\psi(s,t)|^2\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$\psi \in \mathcal{D}$, é a forma quadrática associada à L_0. De acordo com os cálculos da Seção 4.2, também temos

$$\begin{aligned}
l_\varepsilon[\psi] = \int_\Omega \Bigg\{ &\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon^2(s,t)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[|\partial_t\psi(s,t)|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2|\psi(s,t)|^2\right] + \left(V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t) + \frac{\not{k}}{\varepsilon}\right)|\psi(s,t)|^2 \\
&+ V_\varepsilon^2(s,t)\Re(\overline{\psi}(s,t)\partial_s\psi(s,t))\Bigg\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\partial v_\varepsilon(s,t)|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$\psi \in \mathcal{D}$, em que $\partial := I \times \{1\}$.

Além disso, será útil definir um operador intermediário, obtido a partir de L_ε ao se omitir alguns termos não singulares que dependem de ε. Para isso, observemos que existe uma constante positiva C, a qual depende de $\not{k}$ e do supremo das normas de κ e κ', e de forma que

$$\begin{aligned}
&|V_\varepsilon^1(s,t)| \le C\varepsilon^2, \qquad &|V_\varepsilon^2(s,t)| \le C\varepsilon, \qquad &|V_\varepsilon^3(s,t)| \le C, \\
&|v_\varepsilon(s,t)| \le C\varepsilon^{-1}, \qquad &|h_\varepsilon(s,t) - 1| \le C\varepsilon, \qquad &|V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t)| \le C,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

para todo $(s,t) \in \Omega$. Levando em conta estas estimativas, introduzimos o operador L como sendo o operador associado à forma quadrática l definida por

$$l[\psi] := \int_\Omega \left\{ |\partial_s \psi(s,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[|\partial_t \psi(s,t)|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |\psi(s,t)|^2 \right] + \frac{\mathcal{k}}{\varepsilon}|\psi(s,t)|^2 \right\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\partial v_\varepsilon(s,t)|\psi(s,t)|^2,$$

$\operatorname{dom} l = \mathcal{D}$.

Inicialmente, nosso objetivo será mostrar que L_ε e L estão suficientemente próximos, no sentido uniforme dos resolventes, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Faremos agora algumas estimativas que serão úteis nas próxima seções. Dadas as estimativas em (4.6), para $\psi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
\big|l_\varepsilon[\psi] - l[\psi]\big| &= \bigg| \int_\Omega \big\{ (h_\varepsilon^{-2}(s,t) - 1)|\partial_s \psi(s,t)|^2 + \big(V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t)\big)|\psi(s,t)|^2 \\
&\quad + V_\varepsilon^2(s,t)\Re(\overline{\psi}(s,t)\partial_s\psi(s,t))\big\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \bigg| \\
&\leq \int_\Omega \big\{ |h_\varepsilon^{-2}(s,t) - 1||\partial_s \psi(s,t)|^2 + |V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t)||\psi(s,t)|^2 \\
&\quad + |V_\varepsilon^2(s,t)||\psi(s,t)||\partial_s\psi(s,t)|\big\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leq \int_\Omega \big\{ C\varepsilon|\partial_s\psi(s,t)|^2 + C|\psi(s,t)|^2 + C\varepsilon|\psi(s,t)||\partial_s\psi|\big\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leq C\varepsilon\|\partial_s\psi\|^2 + C\|\psi\|^2 + C\varepsilon\|\psi\|\|\partial_s\psi\|.
\end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon\|\psi\|\|\partial_s\psi\| &= \left(\int_\Omega |\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\varepsilon^2\int_\Omega |\partial_s\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \varepsilon^2\int_\Omega |\partial_s\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\varepsilon^2\int_\Omega |\partial_s\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega |\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= \varepsilon^2\|\partial_s\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \\
&\leq \varepsilon\|\partial_s\psi\|^2 + \|\psi\|^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\big|l_\varepsilon[\psi] - l[\psi]\big| \leq C_1(\varepsilon\|\partial_s\psi\|^2 + \|\psi\|^2), \quad \forall\psi \in \mathcal{D}.$$

Ainda mais, existe uma constante $\hat{C} > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tem-se

$$\min\{l_\varepsilon[\psi], l_0[\psi], l[\psi]\} \geq \hat{C}\big(\|\partial_s\psi\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\psi\|^2\big) \geq \frac{\hat{C}}{\varepsilon}\|\psi\|^2, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}. \tag{4.8}$$

Portanto,

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \hat{C}^{-1}\varepsilon, \quad \|L_0^{-1}\| \leq \hat{C}^{-1}\varepsilon, \quad \|L^{-1}\| \leq \hat{C}^{-1}\varepsilon, \tag{4.9}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

4.4 Um resultado intermediário de convergência

Nesta seção vamos estudar o comportamento da sequência de operadores L_ε. Temos o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Sob as suposições do Teorema 4.1, existem constantes positivas ε_0 e $\hat{C}_0$, dependendo somente* *de κ e do supremo das normas de κ e κ', tais que*

$$\|L_\varepsilon^{-1} - L^{-1}\| \leq \hat{C}_0\varepsilon^2,$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Prova: Pela identidade de polarização para as formas sesquilineares geradas por l_ε e l, tem-se

$$\begin{aligned}
|l_\varepsilon(\phi,\psi) - l(\phi,\psi)| &= \Bigg| \int_\Omega \Big\{ (h_\varepsilon^{-2}(s,t) - 1)(\overline{\partial_s\phi}(s,t)\partial_s\psi(s,t)) + (V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t))(\overline{\phi}(s,t)\psi(s,t)) \\
&\quad + \frac{V_\varepsilon^2(s,t)}{2}(\overline{\phi}(s,t)\partial_s\psi(s,t) + \overline{\psi}(s,t)\partial_s\phi(s,t)) \Big\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \Bigg| \\
&\leq \int_\Omega \Big\{ |h_\varepsilon^{-2}(s,t) - 1||\partial_s\phi(s,t)\partial_s\psi(s,t)| + |V_\varepsilon^1(s,t) - V_\varepsilon^3(s,t)||\phi(s,t)\psi(s,t)| \\
&\quad + \left|\frac{V_\varepsilon^2(s,t)}{2}\right| (|\phi(s,t)\partial_s\psi(s,t)| + |\psi(s,t)\partial_s\phi(s,t)|) \Big\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\overset{(4.6)}{\leq} \int_\Omega \Big\{ C\varepsilon|\partial_s\phi(s,t)\partial_s\psi(s,t)| + C|\phi(s,t)\psi(s,t)| \\
&\quad + C\varepsilon(|\phi(s,t)\partial_s\psi(s,t)| + |\psi(s,t)\partial_s\phi(s,t)|) \Big\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leq C\varepsilon\|\partial_s\phi\|\|\partial_s\psi\| + C\|\phi\|\|\psi\| + C\varepsilon(\|\phi\|\|\partial_s\psi\| + \|\psi\|\|\partial_s\phi\|).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon\|\partial_s\phi\|\|\partial_s\psi\| &= \left(\varepsilon\int_\Omega |\partial_s\phi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\varepsilon\int_\Omega |\partial_s\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\varepsilon\int_\Omega |\partial_s\phi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega |\phi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\quad \left(\varepsilon\int_\Omega |\partial_s\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\varepsilon\|\partial_s\phi\|^2 + \|\phi\|^2}\sqrt{\varepsilon\|\partial_s\psi\|^2 + \|\psi\|^2}.
\end{aligned}$$

A mesma estimativa pode ser encontrada para os termos $\|\phi\|\|\psi\|$, $\varepsilon\|\phi\|\|\partial_s\psi\|$ e $\varepsilon\|\psi\|\|\partial_s\phi\|$. Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$, que depende de κ e do supremo das normas de κ e κ', tal que

$$\begin{aligned}
|l_\varepsilon(\phi,\psi) - l(\phi,\psi)| &\leq C\sqrt{\varepsilon\|\partial_s\phi\|^2 + \|\phi\|^2}\sqrt{\varepsilon\|\partial_s\psi\|^2 + \|\psi\|^2} \\
&\overset{(4.8)}{\leq} C\sqrt{\frac{\varepsilon}{\hat{C}}l[\phi]}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\hat{C}}l_\varepsilon[\psi]} \\
&= \left(\frac{C}{\hat{C}}\right)\varepsilon\sqrt{l[\phi]l_\varepsilon[\psi]},
\end{aligned}$$

para todo $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ e para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Tomando $\phi := L^{-1}f$ e $\psi := L_\varepsilon^{-1}g$, em que $f, g \in \mathcal{H}_0$ são arbitrárias, tem-se

$$|\langle (L_\varepsilon^{-1} - L^{-1})f, g\rangle| = |l_\varepsilon(\phi,\psi) - l(\phi,\psi)|.$$

Desde que

$$\langle L^{-1}f, f\rangle = l[\phi], \quad \langle L_\varepsilon^{-1}g, g\rangle = l_\varepsilon[\psi], \tag{4.10}$$

temos

$$
\begin{aligned}
|\langle (L_\varepsilon^{-1} - L^{-1})f, g\rangle| &\le \left(\frac{C}{\hat{C}}\right)\varepsilon\sqrt{l[\phi]l_\varepsilon[\psi]} \overset{(4.10)}{=} \left(\frac{C}{\hat{C}}\right)\varepsilon\sqrt{\langle L^{-1}f, f\rangle\langle L_\varepsilon^{-1}g, g\rangle} \\
&\overset{\text{C.S}}{\le} \left(\frac{C}{\hat{C}}\right)\varepsilon\sqrt{\|L^{-1}\|\|f\|^2\|L_\varepsilon^{-1}\|\|g\|^2} \\
&\overset{(4.9)}{\le} \left(\frac{C}{\hat{C}^2}\right)\varepsilon^2\|f\|\|g\|.
\end{aligned}
$$

Assim, tomando $\hat{C}_0 = C/\hat{C}^2$, temos

$$
|\langle (L_\varepsilon^{-1} - L^{-1})f, g\rangle| \le \hat{C}_0\varepsilon^2\|f\|\|g\|.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|L_\varepsilon^{-1} - L^{-1}\| &= \sup_{\|f\|=1} |\langle (L_\varepsilon^{-1} - L^{-1})f, f\rangle| \\
&\le \hat{C}_0\varepsilon^2,
\end{aligned}
$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. □

4.5 Uma descomposição ortogonal do espaço de Hilbert

Relembremos que denotamos por $\chi_1(t)$ a autofunção normalizada associada ao primeiro autovalor de $-\Delta_{DN}^{(0,1)}$. Definimos o subespaço fechado $\mathfrak{H}_1 := \{\varphi_1(s)\chi_1(t) : \varphi_1(s) \in L^2(I)\}$ de $\mathcal{H}_0$ e consideramos a decomposição ortogonal.

$$
\mathcal{H}_0 = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1^\perp.
$$

Desde que χ_1 é uma autofunção normalizada, vale $\|\varphi_1\chi_1\| = \|\varphi_1\|_{L^2(I)}$. Assim, dado $\psi \in \mathcal{H}_0$, tem-se a decomposição

$$
\psi = \psi_1 + \psi_\perp, \quad \psi_1 \in \mathfrak{H}_1,\ \psi_\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp, \tag{4.11}
$$

em que $\psi_1(s,t) = \varphi_1(s)\chi_1(t)$ com $\varphi_1(s) = \int_0^1 \psi(s,t)\chi_1(t)\mathrm{d}t$. Observe que $\psi_1 \in \mathcal{D}$ se $\psi \in \mathcal{D}$. A inclusão $\psi_\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$ significa que

$$
\int_0^1 \psi_\perp(s,t)\chi_1(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{q.t.p} \quad s \in I. \tag{4.12}
$$

Se $\psi_\perp \in \mathcal{D}$, então podemos derivar a última identidade para obter

$$
\int_0^1 \partial_s\psi_\perp(s,t)\chi_1(t)\mathrm{d}t = 0, \quad \text{q.t.p} \quad s \in I. \tag{4.13}
$$

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Sob a suposições de Teorema 4.1 existem constantes positivas ε_0 e $\widetilde{C}_0$, dependendo somente de $\underset{\sim}{k}$ e do supremo das normas de κ e κ', tais que*

$$
\|L^{-1} - L_0^{-1}\| \le \widetilde{C}_0\varepsilon^{3/2},
$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Prova: A princípio, vamos mostrar que

$$
l_0[\psi] = l_0[\psi_1] + l_0[\psi_\perp], \quad \psi \in \mathcal{D}. \tag{4.14}
$$

Por simplicidade, vamos supor que a forma sesquilinear gerada por l_0 é real. Para cada $\psi \in \mathcal{D}$ escrevemos $\psi = \psi_1 + \psi_\perp$, com $\psi_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\psi_\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$. Logo,

$$\begin{aligned} l_0[\psi] &= l_0[\psi_1 + \psi_\perp] \\ &= l_0[\psi_1] + l_0[\psi_\perp] + 2l_0(\psi_1, \psi_\perp). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} l_0(\psi_1, \psi_\perp) = \int_\Omega \Bigg\{ & \overline{\partial_s \psi_1}(s,t)\partial_s \psi_\perp(s,t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\overline{\partial_t \psi_1}(s,t)\partial_t\psi_\perp(s,t) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (\overline{\psi_1}(s,t)\psi_\perp(s,t))\right] \\ & + \frac{\Bbbk + \kappa(s)}{\varepsilon}(\overline{\psi_1}(s,t)\psi_\perp(s,t))\Bigg\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Para $\psi_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\psi_\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_\Omega \overline{\partial_s \psi_1}(s,t)\partial_s\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \int_\Omega \overline{\varphi_1'}(s)\chi_1(t)\partial_s\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \int_I \overline{\varphi_1'}(s)\left(\int_0^1 \chi_1(t)\partial_s\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\overset{(4.13)}{=} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \overline{\partial_t\psi_1}(s,t)\partial_t\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\Omega \overline{\varphi_1}(s)\chi_1'(t)\partial_t\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \overline{\varphi_1}(s)\left(\int_0^1 \chi_1'(t)\partial_t\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &= \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 \int_I \overline{\varphi_1}(s)\left(\int_0^1 \chi_1(t)\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\overset{(4.12)}{=} 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega \omega\overline{\psi_1(s,t)}\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \int_I \omega\left(\int_0^1 \overline{\varphi_1(s)\chi_1(t)}\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_I \omega\overline{\varphi_1(s)}\left(\int_0^1 \chi_1(t)\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s \\ &\overset{(4.12)}{=} 0, \end{aligned}$$

em que $\omega = -(\pi/2\varepsilon)^2 + (\Bbbk + \kappa(s))/\varepsilon$. Portanto, $l_0(\psi_1, \psi_\perp) = 0$, para toda $\psi \in \mathcal{D}$. Consequentemente, obtemos (4.14).

Por sua vez, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de (4.8) segue

$$\begin{aligned} l_0[\psi_1] &\geq \hat{C}\big(\|\partial_s\psi_1\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\psi_1\|^2\big) \\ &= \hat{C}\big(\|\varphi_1'\|^2_{L^2(I)} + \varepsilon^{-1}\|\varphi_1\|^2_{L^2(I)}\big) \end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$
\begin{aligned}
l_0[\psi_\perp] &= \int_\Omega \left\{ |\partial_s \psi_\perp(s,t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[|\partial_t \psi_\perp(s,t)|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |\psi_\perp(s,t)|^2 \right] + \frac{\underset{\sim}{k} + \kappa(s)}{\varepsilon} |\psi_\perp(s,t)|^2 \right\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\geq \|\partial_s \psi_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\|\partial \psi_\perp\|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|\psi\|^2 \right] + \frac{\underset{\sim}{k} - \|\kappa\|_\infty}{\varepsilon} \|\psi_\perp\|^2 \\
&\geq \|\partial_s \psi_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\delta \|\partial_t \psi_\perp\|^2 + (1-\delta)\|\partial_t \psi_\perp\|^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|\psi_\perp\|^2 \right] \\
&\geq \|\partial_s \psi_\perp\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{ \delta \|\partial_t \psi_\perp\|^2 + \left[(1-\delta)\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right] \|\psi_\perp\|^2 \right\} \\
&\geq \hat{C}_1 \big(\|\partial_s \psi_\perp\|^2 + \varepsilon^{-2} \|\partial_t \psi_\perp\|^2 + \varepsilon^{-2}\|\psi_\perp\|^2 \big),
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

em que $\hat{C}_1 = \min\{1, \delta, (1-\delta)(3\pi/2)^2 - (\pi/2)^2\}$, para um $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Na terceira desigualdade usamos que

$$
\|\partial_t \psi_\perp\|^2 = \int_\Omega |\partial_t \psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \geq \lambda_2\big(-\Delta_{DN}^{(0,1)} \big) \int_\Omega |\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \|\psi_\perp\|^2, \tag{4.17}
$$

uma consequência do Princípio Max-Min.

Agora, vamos comparar l_0 com l. Definimos

$$
m[\psi] := l[\psi] - l_0[\psi] = \int_\partial v_\varepsilon(s,t)|\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t - \int_\Omega \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\psi(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad \psi \in \mathcal{D}.
$$

Novamente, para $\psi \in \mathcal{D}$ escrevemos $\psi = \psi_1 + \psi_\perp$, com $\psi_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\psi_\perp \in \mathfrak{H}_1^\perp$. Temos

$$
\begin{aligned}
m[\psi_1] &= \int_{I\times\{1\}} \frac{1}{2}\frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon\kappa(s))} |\varphi_1(s)\chi_1(t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t - \int_\Omega \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} |\varphi_1(s)\chi_1(t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_I \frac{\kappa(s)^2}{1-\varepsilon\kappa(s)} |\varphi_1(s)|^2 \mathrm{d}s \leq C_2 \int_I |\varphi_1(s)|^2 \mathrm{d}s \\
&= C_2 \|\varphi_1\|^2_{L^2(I)} \overset{(4.15)}{\leq} \left(\frac{C_2}{\hat{C}}\right) \varepsilon l_0[\psi_1],
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C_2 > 0$, a qual depende do supremo de κ; e

$$
\begin{aligned}
|m[\psi_\perp]| &\leq \int_{I\times\{1\}} |v_\varepsilon(s,t)||\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega \left| \frac{\kappa(s)}{\varepsilon} \right| |\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\leq C\varepsilon^{-1} \left(\int_{I\times\{1\}} |\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega |\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right) \\
&= C\varepsilon^{-1} \left(\int_{I\times(0,1)} 2\Re(\overline{\psi_\perp(s,t)} \partial_t \psi_\perp(s,t)) \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \|\psi_\perp\|^2 \right) \\
&\leq C\varepsilon^{-1} \left[2 \left(\int_{I\times(0,1)} |\psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int_{I\times(0,1)} |\partial_t \psi_\perp(s,t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right)^{1/2} + \|\psi_\perp\|^2 \right] \\
&= C\varepsilon^{-1}(2\|\psi_\perp\|\|\partial_t \psi_\perp\| + \|\psi_\perp\|^2) \overset{(4.17)}{\leq} 2C\varepsilon^{-1}((2/3\pi)\|\partial_t \psi_\perp\|^2 + \|\psi_\perp\|^2) \\
&\overset{(4.16)}{\leq} 2C\varepsilon^{-1} \left(\frac{\varepsilon^2}{\hat{C}_1} l_0[\psi_\perp] \right) \leq 2\left(\frac{C}{\hat{C}_1}\right) \varepsilon l_0[\psi_\perp].
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
|m(\psi_1,\psi_\perp)| &= \left| \int_\partial v_\varepsilon(s,t)\overline{\psi_1}(s,t)\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \int_\Omega \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}\overline{\psi_1}(s,t)\psi_\perp(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right| \\
&\le \int_{I\times\{1\}} |v_\varepsilon(s,t)||\psi_1(s,t)\psi_\perp(s,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\le C\varepsilon^{-1}\left(\int_{I\times\{1\}} |\psi_1(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{I\times\{1\}} |\psi_\perp(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= C\varepsilon^{-1}\left(\int_\Omega 2\Re(\overline{\psi_1}(s,t)\partial_t\psi_1(s,t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_\Omega 2\Re(\overline{\psi_\perp}(s,t)\partial_t\psi_\perp(s,t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\le 2C\varepsilon^{-1}(\|\psi_1\|\|\partial_t\psi_1\|)^{1/2}(\|\psi_\perp\|\|\partial_t\psi_\perp\|)^{1/2} \\
&= 2C\varepsilon^{-1}(\|\psi_1\|\|\varphi_1\|_{L^2(I)}\|\chi_1'\|_{L^2(0,1)})^{1/2}(\|\psi_\perp\|\|\partial_t\psi_\perp\|)^{1/2} \\
&= 2C\varepsilon^{-1}\|\varphi_1\|_{L^2(I)}(\|\psi_\perp\|\|\partial_t\psi_\perp\|)^{1/2} \le 2(2/3\pi)^{1/2}C\varepsilon^{-1}\|\varphi_1\|_{L^2(I)}\|\partial_t\psi_\perp\| \\
&\le C\varepsilon^{-1}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\hat{C}}\right)l_0[\psi_1]}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{\hat{C}_1}\right)l_0[\psi_\perp]} = \left(\frac{C}{\sqrt{\hat{C}}\sqrt{\hat{C}_1}}\right)\varepsilon^{1/2}\sqrt{l_0[\psi_1]l_0[\psi_\perp]}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|m[\psi]| &\le |m[\psi_1]| + |m[\psi_\perp]| + 2|m(\psi_1,\psi_\perp)| \\
&\le \left(\frac{C_2}{\hat{C}}\right)\varepsilon l_0[\psi_1] + 2\left(\frac{C}{\hat{C}_1}\right)\varepsilon l_0[\psi_\perp] + 2\left(\frac{C}{\sqrt{\hat{C}}\sqrt{\hat{C}_1}}\right)\varepsilon^{1/2}\sqrt{l_0[\psi_1]l_0[\psi_\perp]} \\
&\le 2\widetilde{C}\varepsilon(l_0[\psi_1]+l_0[\psi_\perp]) + 2\widetilde{C}\varepsilon^{1/2}(l_0[\psi_1]+l_0[\psi_\perp]) \\
&\le 2\widetilde{C}\varepsilon l_0[\psi] + 2\widetilde{C}\varepsilon^{1/2}l_0[\psi] \\
&\le \widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}l_0[\psi],
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, em que $\widetilde{C} = \max\left\{C_2/\hat{C}, C/\hat{C}_1, C/\big(\sqrt{\hat{C}}\sqrt{\hat{C}_1}\big)\right\}$ e $\widetilde{C}_1 = 4\widetilde{C}$.

A desigualdade acima nos dizem que existem $\widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3 > 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}l_0[\psi] \le m[\psi] \le \widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}l_0[\psi] \\
-\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}l_0[\psi] \le l[\psi] - l_0[\psi] \le \widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}l_0[\psi] \\
(1-\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2})l_0[\psi] \le l[\psi] \le (1+\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2})l_0[\psi] \\
\widetilde{C}_2 l_0[\psi] \le (1-\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2})l_0[\psi] \le l[\psi] \le (1+\widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2})l_0[\psi] \le \widetilde{C}_3 l_0[\psi],
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}$ e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Pela identidade de polarização para as formas sesquilineares geradas por l e l_0, tem-se

$$
\begin{aligned}
|l(\phi,\psi) - l_0(\phi,\psi)| &= \frac{1}{4}|l[\phi+\psi] - l[\phi-\psi] - il[\phi+i\psi] + il[\phi-i\psi] \\
&\quad - l_0[\phi+\psi] + l_0[\phi-\psi] + il_0[\phi+i\psi] - il_0[\phi-i\psi)]| \\
&= \frac{1}{4}|m[\phi+\psi] - m[\phi-\psi] - im[\phi+i\psi] + im[\phi-i\psi]| \\
&\le \frac{1}{4}|m[\phi+\psi]| + |m[\phi-\psi]| + |m[\phi+i\psi]| + |m[\phi-i\psi]| \\
&\overset{(4.18)}{\le} \frac{\widetilde{C}_1}{4}\varepsilon^{1/2}[l_0[\phi+\psi] + l_0[\phi-\psi] + l_0[\phi+i\psi] + l_0[\phi-i\psi]] \\
&= \widetilde{C}_1\varepsilon^{1/2}[l_0[\phi] + l_0[\psi]] \\
&\overset{(4.19)}{\le} \widetilde{C}_4\varepsilon^{1/2}[l_0[\phi] + l[\psi]].
\end{aligned}
$$

Resumindo, tem-se a limitação

$$|l(\phi,\psi) - l_0(\phi,\psi)| \le \widetilde{C}_4 \varepsilon^{1/2}[l_0[\phi] + l[\psi]],$$

para toda $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, em que $\widetilde{C}_4 = \max\{\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_1/\widetilde{C}_2\}$.

Tomando $\phi := L_0^{-1} f$ e $\psi := L^{-1} g$, em que $f, g \in \mathcal{H}_0$ são arbitrárias, tem-se

$$|\langle (L^{-1} - L_0^{-1}) f, g\rangle| = |l_0(\phi,\psi) - l(\phi,\psi)|.$$

Desde que

$$\langle L_0^{-1} f, f\rangle = l_0[\phi], \quad \langle L^{-1} g, g\rangle = l[\psi], \tag{4.20}$$

temos

$$\begin{aligned} |\langle (L^{-1} - L_0^{-1}) f, g\rangle| &\le \widetilde{C}_4 \varepsilon^{1/2}[l_0[\phi] + l[\psi]] \overset{(4.20)}{=} \widetilde{C}_4 \varepsilon^{1/2}[\langle L_0^{-1} f, f\rangle + \langle L^{-1} g, g\rangle] \\ &\overset{\text{C.S}}{\le} \widetilde{C}_4 \varepsilon^{1/2}[\|L_0^{-1}\| \|f\|^2 + \|L^{-1}\| \|g\|^2] \\ &\overset{(4.9)}{\le} \frac{\widetilde{C}_4}{\hat{C}} \varepsilon^{3/2}[\|f\|^2 + \|g\|^2]. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\widetilde{C}_0 = 2\widetilde{C}_4/\hat{C}$

$$\begin{aligned} \|L^{-1} - L_0^{-1}\| &= \sup_{\|f\|=1} |\langle (L^{-1} - L_0^{-1}) f, f\rangle| \\ &\le \widetilde{C}_0 \varepsilon^{3/2}, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. □

Observemos que a prova do Teorema 4.1 segue como consequência do Lema 4.2 e do Lema 4.3.

4.6 Convergência dos autovalores

Como uma aplicação do Teorema 4.1, estudaremos o comportamento assintótico da sequência $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^\infty$ gerada pelo Princípio Max-Min.

Iniciamos com um análise do espectro do operador desacoplado $\hat{H}_0$.

Lema 4.4. *Suponha $\kappa \in L^\infty(I)$. Tem-se*

$$\lambda_1(\hat{H}_0) = \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2.$$

Além disso, para qualquer inteiro $N \ge 2$, existe uma constante positiva ε_0 que depende de N, κ e I tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\lambda_j(\hat{H}_0) = \lambda_j\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Prova: Devido à definição de $\hat{H}_0$, tem-se

$$\Big\{\lambda_j(\hat{H}_0)\Big\}_{j=1}^\infty = \Big\{\lambda_j\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big)\Big\}_{j=1}^\infty + \Big\{\Big(\frac{2j-1}{2\varepsilon}\pi\Big)^2\Big\}_{j=1}^\infty.$$

Agora, resta organizar a soma dos números do lado direito da expressão acima em uma sequência crescente. Observe que para $N = 1$ o resultado é trivial.

Para $N=2$, organizando os valores $\lambda_j(\hat{H}_0)$ em ordem crescente, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\hat{H}_0) &= \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 \\
\lambda_2(\hat{H}_0) &= \min\Big\{\lambda_2\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2, \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{3\pi}{2\varepsilon}\Big)^2\Big\} \\
&= \lambda_2\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2,
\end{aligned}$$

em que a última igualdade segue do comportamento assintótico (3.10). De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda_2(\hat{H}_0) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 &= \min\Big\{\lambda_2\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big), \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 + \Big(\frac{3\pi}{2\varepsilon}\Big)^2\Big\} \\
&= \min\Big\{\lambda_2\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big), \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + 8\Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2\Big\},
\end{aligned}$$

e então basta utilizar (3.10).

Agora, seja $N \geq 3$ e suponha por indução que

$$\lambda_{j-1}(\hat{H}_0) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 = \lambda_{j-1}\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big).$$

Então,

$$\lambda_j(\hat{H}_0) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 = \min\Big\{\lambda_j\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big), \lambda_1\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) + 8\Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2\Big\}.$$

Novamente, aplicamos (3.10) e a afirmação do lema está provada. □

Agora, dado $j \geq 1$ fixo, suponha $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno de forma que as conclusões do Teorema 4.1 e do Lema 4.4 sejam validas. Do Teorema 4.1 tem-se

$$\left|\Big[\lambda_j(\hat{H}_\varepsilon) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 + \frac{\not{k}}{\varepsilon}\Big]^{-1} - \Big[\lambda_j(\hat{H}_0) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2 + \frac{\not{k}}{\varepsilon}\Big]^{-1}\right| \leq C_0\varepsilon^{3/2};$$

o lado esquerdo é estimado pela diferença da norma dos resolventes (veja [13], Corolário 2.3).

Usando agora o Lema 4.4, a estimativa acima é equivalente à

$$\left|\frac{1}{\varepsilon[\lambda_j(\hat{H}_\varepsilon) - (\pi/2\varepsilon)^2] + \not{k}} - \frac{1}{\varepsilon\lambda_j(-\Delta_D^I + \kappa/\varepsilon) + \not{k}}\right| \leq C_0\varepsilon^{1/2}. \tag{4.21}$$

Assim, relembrando (3.10), conclui-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Big[\lambda_j(\hat{H}_\varepsilon) - \Big(\frac{\pi}{2\varepsilon}\Big)^2\Big] = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\lambda_j\Big(-\Delta_D^I + \frac{\kappa}{\varepsilon}\Big) = \inf \kappa.$$

Podemos observar que o comportamento assintótico encontrado aqui para a sequência $\{\lambda_j(-\Delta_{DN}^{\Omega_\varepsilon})\}_{j=1}^\infty$ é semelhante àquele encontrado no Capítulo 3.

Capítulo 5

O espectro essencial e discreto do Laplaciano de Dirichlet-Neumann

Neste capítulo vamos estudar o espectro do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann restrito a uma faixa infinita de largura fixada. Embora a geometria da faixa e o operador já tenham sido definidos no Capítulo 2, repetimos alguns passos da definição para fixar a notação usada neste capítulo (já que aqui a faixa possuirá largura fixa). Isto será feito na Seção 5.1. Nas Seções 5.2 e 5.3, estudaremos o espectro essencial e a existência de autovalores discretos do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann. Veremos que tais resultados são influenciados pela geometria da faixa. Os resultados deste capítulo são provenientes de [18] e [5].

5.1 Configuração do espaço

Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, de classe C^2 e com velocidade unitária. Seja $d > 0$ e $\Omega_0 := \mathbb{R} \times (0, d)$ uma faixa reta de largura d. Estudaremos o espectro essencial e discreto do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann na faixa estreita $\hat{\Omega} := \mathcal{L}(\Omega_0)$, em que $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definida como

$$\mathcal{L}(s,t) := \gamma(s) + t\,\mathrm{n}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, d];$$

$\mathrm{n}(s)$ denota o vetor normal de γ na posição s.

Ao longo do capítulo, assumimos que $\mathcal{L}$ é injetora e $\kappa \in L^\infty(\mathbb{R})$ com $d\|\kappa\|_\infty < 1$; $\kappa(s)$ denota a curvatura de γ na posição s. Observemos que baixo as condições mencionadas anteriormente, tem-se que aplicação $\mathcal{L}$ é um difeomorfismo de classe C^1 em Ω_0 com $\det J\mathcal{L}(s,t) = 1 - t\kappa(s)$, em que $J\mathcal{L}$ denota a matriz Jacobiana de $\mathcal{L}$.

A imagem $\hat{\Omega}$ num sentido geométrico descreve uma faixa aberta, que não apresenta interseção consigo mesma, contida entre as curvas paralelas

$$\gamma(\mathbb{R}) := \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \{0\}) \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(\mathbb{R}) := \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \{d\}).$$

Observe a figura abaixo. Consideremos a forma quadrática $\mathcal{Q}_{DN}^{\hat{\Omega}}$ definida por

$$\mathcal{Q}_{DN}^{\hat{\Omega}}[\Psi] := \int_{\hat{\Omega}} |\nabla\Psi(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{dom}\left(\mathcal{Q}_{DN}^{\hat{\Omega}}\right) := \{\Psi \in \mathcal{H}^1(\hat{\Omega}) : \Psi = 0 \quad \text{em} \quad \gamma(\mathbb{R})\}.$$

Denotamos por $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ seu operador autoadjunto associado o qual age no espaço de Hilbert $L^2(\hat{\Omega})$ com condições de contorno de Dirichlet e de Neumann sobre γ e $\hat{\gamma}$, respectivamente.

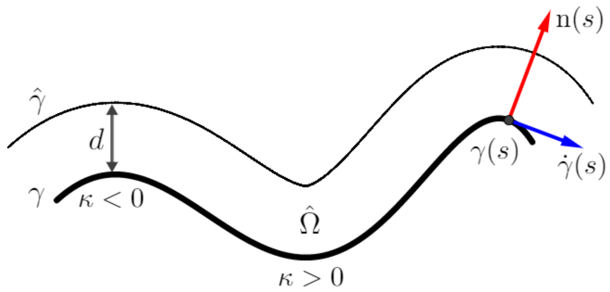

Figura 5.1: Geometria da faixa $\hat{\Omega}$.

Definimos a função $h(s,t) := 1 - t\kappa(s)$, $(s,t) \in \Omega_0$. Assim, podemos escrever

$$\det J\mathcal{L}(s,t) = h(s,t), \quad (s,t) \in \Omega_0. \tag{5.2}$$

Desde que $\kappa \in L^\infty(\mathbb{R})$ com $d\|\kappa\|_\infty < 1$, tem-se a seguinte estimativa uniforme

$$0 < 1 - d \sup_{s\in\mathbb{R}} |\kappa(s)| \le h(s,t) \le 1 - d \inf_{s\in\mathbb{R}} |\kappa(s)| < \infty, \tag{5.3}$$

para todo $(s,t) \in \Omega_0$.

Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\Omega_0, h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t)$ e denote por $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ a norma neste espaço. Vamos realizar uma mudança para coordenadas através da transformação unitária

$$U : L^2(\hat{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{H} \tag{5.4}$$

definida por

$$U\Psi = \Psi \circ \mathcal{L}, \quad \Psi \in L^2(\hat{\Omega}).$$

Aplicando tal mudança à forma quadrática $\mathcal{Q}_{DN}^{\hat{\Omega}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}[\Psi] &:= \mathcal{Q}_{DN}^{\hat{\Omega}}(U^{-1}\psi) \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{h(s,t)} \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{\Omega_0} |\partial_t \psi(s,t)|^2 h(s,t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$\mathrm{dom}(\mathcal{Q}) = \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_0) : \psi = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times \{0\}\}.$$

Denotamos por H o operador autoadjunto associado à $\mathcal{Q}$. Assim, desde que U é unitário, os operadores $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ e H são unitariamente equivalentes. Mas precisamente, vale a relação

$$H := U(-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}})U^{-1}.$$

Observação 8. No caso em que $\hat{\Omega}$ é uma faixa reta, ou seja, $\kappa(s) = 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, o Laplaciano $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ é identificado com o operador desacoplado

$$H_0 := \overline{-\Delta_D^{\mathbb{R}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes -\Delta_{DN}^{(0,d)}}, \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(0,d); \tag{5.5}$$

em que $-\Delta_D^{\mathbb{R}}$ denota o operador Laplaciano de Dirichlet em $L^2(\mathbb{R})$ e $-\Delta_{DN}^{(0,d)}$ denota o operador Laplaciano transversal em $L^2(0,d)$ sujeito às condições de contorno de Dirichlet e de Neumann em 0 e d, respectivamente.

Os autovalores de $-\Delta_{DN}^{(0,d)}$ são dados por

$$E_n := \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.6}$$

e a correspondente família de autofunções normalizadas $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é dada por

$$\chi_n(t) := \sqrt{\frac{2}{d}} \sin(\sqrt{E_n} t), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

De (5.5) e o Teorema VIII.33 em [22], o operador H_0 tem espectro puramente essencial começando pelo primeiro autovalor do Laplaciano transversal $-\Delta_{DN}^{(0,d)}$, isto é,

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ess}(H_0) = [E_1, \infty). \tag{5.8}$$

5.2 O espectro essencial

Conforme vimos na seção anterior, se $\hat{\Omega}$ é uma faixa reta, o espectro essencial do operador $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$ é o intervalo $[E_1, \infty)$, em que $E_1 = \pi^2/(2d)^2$. Nesta seção vamos mostrar que o mesmo resultado espectral mantém-se para qualquer faixa curvada que satisfaz

$$\kappa(s) \to 0, \quad \text{quando} \quad |s| \to \infty. \tag{5.9}$$

Lembremos que neste capítulo estamos sempre supondo $\kappa \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $d\|\kappa\|_\infty < 1$

Teorema 5.1 (Espectro essencial)**.** *Suponha (5.9). Então,*

$$\sigma_{ess}(H) = [E_1, \infty). \tag{5.10}$$

A demonstração deste teorema é obtida em dois passos que serão apresentados por dois lemas. Começamos por uma estimativa do limite inferior do espectro essencial.

Lema 5.2. *Suponha (5.9). Então,*

$$\inf \sigma_{ess}(H) \geq E_1.$$

Prova: Desde que (5.9) vale. Para qualquer $\delta > 0$ fixo, existe s_δ tal que

$$(1 - \delta d) \leq h(s,t) \leq (1 + \delta d), \quad \forall (s,t) \in \Omega_{0,\text{ext}}, \tag{5.11}$$

em que $\Omega_{0,\text{ext}} := \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_{0,\text{int}}$ com $\Omega_{0,\text{int}} := (-s_\delta, s_\delta) \times (0,d)$.

Consideremos a forma quadrática $\mathcal{Q}^N := \mathcal{Q}^N_{\text{int}} \oplus \mathcal{Q}^N_{\text{ext}}$, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^N_\omega[\psi] &:= \int_{\Omega_{0,\omega}} \frac{|\partial_s \psi(s,t)|^2}{h(s,t)} \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{\Omega_{0,\omega}} |\partial_t \psi(s,t)|^2 h(s,t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t, \\ \mathrm{dom}(\mathcal{Q}^N_\omega) &:= \{\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_{0,\omega}) : \psi(s,0) = 0 \quad \text{q.t.p} \quad s \in \mathbb{R} \cap \overline{\Omega}_{0,\omega}\}, \end{aligned}$$

com $\omega \in \{\text{int}, \text{ext}\}$. Denote por H^N, H^N_{int} e H^N_{ext} os operadores autoadjuntos associados à $\mathcal{Q}^N$, $\mathcal{Q}^N_{\text{int}}$ e $\mathcal{Q}^N_{\text{ext}}$, respectivamente. Observemos que vale a desigualdade

$$H \geq H^N := H^N_{\text{int}} \oplus H^N_{\text{ext}} \tag{5.12}$$

no sentido das formas quadráticas (veja [23], Capítulo $XIII.15$). O espectro do operador H^N_{int} é puramente discreto, veja Capítulo 7 em [3]. Sendo assim, o Princípio Max-Min garante a estimativa

$$\inf \sigma_{ess}(H) \geq \inf \sigma_{ess}(H^N) = \inf \sigma_{ess}(H^N_{\text{ext}}) \geq \inf \sigma(H^N_{\text{ext}}).$$

O próximo passo é encontrar um limite inferior apropriado para o espectro de $H^N_{\rm ext}$.

Para todo $\psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{Q}^N_{\rm ext})$, de (5.11) tem-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^N_{\rm ext}[\psi] &= \int_{\Omega_{0,\rm ext}} \frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{\Omega_{0,\rm ext}} |\partial_t\psi(s,t)|^2 h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\geq (1-\delta d)\int_{\Omega_{0,\rm ext}} |\partial_t\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\geq E_1(1-\delta d)\int_{\Omega_{0,\rm ext}} |\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&\geq E_1\frac{(1-\delta d)}{(1+\delta d)}\int_{\Omega_{0,\rm ext}} |\psi(s,t)|^2 h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= E_1\frac{(1-\delta d)}{(1+\delta d)}\|\psi\|^2_{\mathcal{H}_{\rm ext}},
\end{aligned}$$

em que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\rm ext}}$ denota a norma no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\rm ext} := L^2(\Omega_{0,\rm ext}, h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t)$. Logo,

$$H^N_{\rm ext} \geq E_1\frac{(1-\delta d)}{(1+\delta d)}\mathbf{1}, \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_{\rm ext}.$$

Consequentemente,

$$\inf \sigma_{ess}(H) \geq E_1\frac{(1-\delta d)}{(1+\delta d)}.$$

A conclusão do lema segue do fato que $\delta > 0$ é arbitrariamente pequeno. □

Lema 5.3. *Suponha (5.9). Então,*

$$\sigma_{ess}(H) \supseteq [E_1, \infty).$$

Prova: A estrategia é mostrar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ o valor $\eta := E_1 + \lambda^2$ pertence ao espectro essencial de H. Sendo assim, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ construiremos uma sequência $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathrm{dom}(\mathcal{Q})$ satisfazendo

(i) $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\psi_n \overset{w}{\to} 0$, quando $n \to \infty$, em $\mathcal{H}$;

(iii) $(H - \eta\mathbf{1})\psi_n \to 0$, quando $n \to \infty$, em $(\mathrm{dom}(\mathcal{Q}))^*$,

em que $(\mathrm{dom}(\mathcal{Q}))^*$ denota o espaço dual do espaço $\mathrm{dom}(\mathcal{Q})$. Lembremos que a condição (iii) significa que

$$\|(H-\eta\mathbf{1})\psi_n\|_{-1} := \|(H-\eta\mathbf{1})\psi_n\|_{(\mathrm{dom}(\mathcal{Q}))^*} = \sup_{\phi\in\mathrm{dom}(\mathcal{Q})\setminus\{0\}} \frac{|\langle\phi,(H-\eta\mathbf{1})\psi_n\rangle|}{\|\phi\|_1} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.13}$$

em que

$$\|\phi\|_1 := \sqrt{\mathcal{Q}[\phi] + \|\phi\|^2_{\mathcal{H}}}.$$

Iniciamos com a seguinte família de funções

$$\hat{\psi_n}(s,t) := \varphi_n(s)\chi_1(t)e^{i\lambda s}, \quad n \in \mathbb{N},$$

em que χ_1 denota a autofunção normalizada do operador Laplaciano de Dirichlet-Neumann em $(0,d)$ correspondente ao primeiro autovalor; veja (5.7). Definimos também

$$\varphi_n(s) := \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{s}{n} - n\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

com φ uma função qualquer em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset (-1,1)$ e $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Observemos que

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \qquad \|\varphi_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} = n^{-1}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \|\varphi_n''\|_{L^2(\mathbb{R})} = n^{-2}\|\varphi''\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.14}$$

Também tem-se que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset (n^2-n, n^2+n)$. Assim, podemos observar que $\hat{\psi}_n \in \operatorname{dom} H$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desde que a sequência $\{\hat{\psi}_n\}_{n=1}^\infty$ não está normalizada, finalmente, definimos

$$\psi_n := \frac{\hat{\psi}_n}{\|\hat{\psi}_n\|_{\mathcal{H}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Devido à (5.3) e a normalização de φ e χ_1, tem-se

$$0 < 1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}|\kappa(s)| \leq \|\hat{\psi}_n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1 - d\inf_{s\in\mathbb{R}}|\kappa(s)|. \tag{5.15}$$

Por definição, segue que $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ satisfaz a condição (i). Agora, nosso objetivo é mostrar que $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ satisfaz as condições (ii) e (iii) enunciadas acima.

A condição (ii) exige que $\langle\phi,\psi_n\rangle \to 0$, quando $n\to\infty$, para toda $\phi\in\mathcal{H}$. Desde que $C_0^\infty(\Omega_0)$ é um subconjunto denso em $\mathcal{H}$, é suficiente mostrar que $\langle\phi,\psi_n\rangle \to 0$, quando $n\to\infty$, para toda $\phi\in C_0^\infty(\Omega_0)$. Porém, o último limite segue do fato de que, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$, ϕ e ψ_n terão suportes disjuntos para todo n suficientemente grande.

Agora, para toda $\phi \in \operatorname{dom} H$, tem-se

$$\begin{aligned}|\langle\phi,(H-\eta\mathbf{1})\psi_n\rangle| &= |\mathcal{Q}(\phi,\psi_n) - \eta\langle\phi,\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq |\mathcal{Q}_1(\phi,\psi_n) - \lambda^2\langle\phi,\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}| + |\mathcal{Q}_2(\phi,\psi_n) - E_1\langle\phi,\psi_n\rangle_{\mathcal{H}}|,\end{aligned}$$

em que

$$\mathcal{Q}_1[\psi] := \int_{\Omega_0}\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad \mathcal{Q}_2[\psi] := \int_{\Omega_0}|\partial_t\psi(s,t)|^2 h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$
$$\operatorname{dom}(\mathcal{Q}_1) := \operatorname{dom}(\mathcal{Q}) =: \operatorname{dom}(\mathcal{Q}_2).$$

Integrando por partes e usando o fato de que $-\chi_1'' = E_1\chi_1$, junto com a normalização de φ e χ_1, segue que

$$\begin{aligned}|\mathcal{Q}_2(\phi,\hat{\psi}_n) - E_1\langle\phi,\hat{\psi}_n\rangle_{\mathcal{H}}| &= \left|\int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)(E_1\hat{\psi}_n(s,t)h(s,t) - \partial_t\hat{\psi}_n(s,t)\partial_t h(s,t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t - E_1\langle\phi,\hat{\psi}_n\rangle_{\mathcal{H}}\right| \\ &= \left|\int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)\partial_t\hat{\psi}_n(s,t)\partial_t h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\partial_t\hat{\psi}_n\|\left\|\frac{\partial_t h}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n} \\ &\leq \|\phi\|_1\sqrt{E_1}\left\|\frac{\partial_t h}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n},\end{aligned}$$

para toda $\phi \in \operatorname{dom}(\mathcal{Q})$, em que $\|\cdot\|_{\infty,n} := \|\cdot\|_{L^\infty(\operatorname{supp}\varphi_n\times(0,d))}$. Ao mesmo tempo, tem-se

$$\mathcal{Q}_1(\phi,\hat{\psi}_n) = \int_{\Omega_0}\partial_s\overline{\phi}(s,t)\partial_s\hat{\psi}_n(s,t)\left[\frac{1}{h(s,t)} - 1\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t - \int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)\partial_{ss}\hat{\psi}_n(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

e

$$\langle\phi,\hat{\psi}_n\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)\hat{\psi}_n(s,t)[h(s,t)-1]\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)\hat{\psi}_n(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Assim, usando o fato de que

$$-\partial_{ss}\hat{\psi}_n(s,t) - \lambda^2\hat{\psi}_n(s,t) = (-\varphi_n''(s) - 2i\lambda\varphi_n'(s))e^{i\lambda s}\chi_1(t),$$

e a normalização de φ e χ_1 mais uma vez, tem-se

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{Q}_1(\phi,\hat{\psi}_n) - \lambda^2\langle\phi,\hat{\psi}_n\rangle_{\mathcal{H}}| = \Bigg| & \int_{\Omega_0} \partial_s\overline{\phi}(s,t)\partial_s\hat{\psi}_n(s,t)\left[\frac{1}{h(s,t)}-1\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
& - \lambda^2\int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)\hat{\psi}_n(s,t)[h(s,t)-1]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
& + \int_{\Omega_0}\overline{\phi}(s,t)(-\varphi_n''(s)-2i\lambda\varphi_n'(s))e^{i\lambda s}\chi_1(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\Bigg| \\
& \leq \sqrt{\mathcal{Q}_1[\phi]}\|\partial_s\hat{\psi}_n\|\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}-\sqrt{h}\right\|_{\infty,n} + \lambda^2\|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\hat{\psi}_n\|\left\|\sqrt{h}-\frac{1}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n} \\
& + \|\phi\|_{\mathcal{H}}\|\varphi_n''-2\lambda\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n} \\
& \leq \|\phi\|_1\|\varphi_n'+i\lambda\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}-\sqrt{h}\right\|_{\infty,n} + \lambda^2\|\phi\|_1\left\|\sqrt{h}-\frac{1}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n} \\
& + \|\phi\|_1\|\varphi_n''-2\lambda\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|(H-\eta\mathbf{1})\hat{\psi}_n\|_{-1} \leq \sqrt{E_1}\left\|\frac{\partial_t h}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n} &+ (\|\varphi_n'+i\lambda\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}+\lambda^2)\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}-\sqrt{h}\right\|_{\infty,n} \\
&+ \|\varphi_n''-2\lambda\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\frac{1}{\sqrt{h}}\right\|_{\infty,n}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (5.9) e (5.14) segue que

$$(H-\eta\mathbf{1})\psi_n \to 0, \quad \text{quando} \quad n\to\infty,$$

em $(\mathrm{dom}(\mathcal{Q}))^*$. Logo, pelo Teorema 1.40, segue o resultado. □

O Teorema 5.1 segue dos Lemas 5.2 e 5.3.

5.3 Existência de espectro discreto

O objetivo desta seção é garantir a existência de espectro discreto para $-\Delta_{DN}^{\hat{\Omega}}$. Nosso principal argumento será o Princípio Max-Min. Em particular, ele nos diz que

$$\inf\sigma(H) = \inf_{\Phi\in\mathrm{dom}\,\mathcal{Q}}\frac{\mathcal{Q}[\Phi]}{\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2}. \tag{5.16}$$

Começamos com o seguinte resultado.

Teorema 5.4. *Suponha que existe um número real positivo s_0 tal que $\kappa(s)\leq 0$ para todo s satisfazendo $|s|\geq s_0$ e $\int_{-s_0}^{s_0}\kappa(s)\mathrm{d}s<0$. Então, $\inf\sigma(H)<E_1$.*

Prova: Para $\Phi\in\mathrm{dom}(\mathcal{Q})$, definimos

$$\hat{\mathcal{Q}}[\Phi] = \mathcal{Q}[\Phi] - E_1\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{5.17}$$

De acordo com (5.16), é suficiente encontrar uma função teste $\Phi\in\mathrm{dom}\,\mathcal{Q}$ tal que $\hat{\mathcal{Q}}[\Phi]<0$. Construiremos tal função nos parágrafos abaixo.

Seja φ uma função qualquer no espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que $\varphi(s)=1$ para $|s|\leq s_0$. Definimos a família de funções $\{\varphi_\lambda : \lambda > 0\}$:

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{para} \quad |s| \leq s_0 \\ \varphi(\pm s_0 + \lambda(s \mp s_0)) & \text{para} \quad |s| \geq s_0 \end{cases},$$

com o sinal superior para $s \geq s_0$ e o inferior para $s \leq -s_0$.

Agora, tomamos a função teste $\Phi_\lambda(s,t) = \varphi_\lambda(s)\chi_1(t)$, com χ_1 definida em (5.7). De modo análogo à Seção 3.1, tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}[\Phi_\lambda] &= \mathcal{Q}[\Phi_\lambda] - E_1\|\Phi_\lambda\|^2_{\mathcal{H}} \\
&= \int_{\Omega_0} \frac{|\varphi_\lambda'(s)\chi_1(t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{\Omega_0} |\varphi_\lambda(s)\chi_1'(t)|^2 h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t - E_1\int_{\Omega_0} |\varphi_\lambda(s)\chi_1(t)|^2 h(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d \frac{|\chi_1(t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi_\lambda'(s)|^2\mathrm{d}s + E_1\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&- \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 |\chi_1'(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s - E_1\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d |\chi_1(t)|^2\mathrm{d}t\right)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&+ E_1\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d |\chi_1(t)|^2 t\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d \frac{|\chi_1(t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi_\lambda'(s)|^2\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d [E_1|\chi_1(t)|^2 t - |\chi_1'(t)|^2 t]\mathrm{d}t\right)\kappa(s)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^d \frac{|\chi_1(t)|^2}{h(s,t)}\mathrm{d}t\right)|\varphi_\lambda'(s)|^2\mathrm{d}s + \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}} \kappa(s)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{1}{1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}\kappa(s)}\int_{\mathbb{R}}|\varphi_\lambda'(s)|^2\mathrm{d}s + \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}}\kappa(s)|\varphi_\lambda(s)|^2\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\lambda}{1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}\kappa(s)}\|\varphi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{d}\int_{-s_0}^{s_0}\kappa(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue do fato que $\kappa(s) \leq 0$, para todo $|s| \geq s_0$.

Por hipótese, o segundo termo na última desigualdade é negativo e não depende de λ. Assim, escolhendo λ suficientemente pequeno, segue que a soma dos termos na última desigualdade é negativa, o qual finaliza a prova. $\square$

Em adição as hipóteses do Teorema 5.4, suponha

$$\lim_{|s|\to\infty}\kappa(s) = 0.$$

Então, $\sigma_{ess}(H) = [E_1, \infty)$ (veja Teorema 5.1) e $\inf\sigma(H) < E_1$, ou seja, $\sigma_d(H) \neq \emptyset$.

Teorema 5.5. *Suponha que existe um número real positivo s_0 tal que $\kappa(s) = 0$ para $|s| \geq s_0$. Suponha também $\int_{-s_0}^{s_0}\kappa(s)\mathrm{d}s = 0$ e $\|\kappa\|_{L^2(\mathbb{R})} > 0$. Então, $\inf\sigma(H) < E_1$, isto é, existe pelo menos um autovalor discreto positivo de H.*

Prova: Usaremos aqui a mesma técnica da prova do Teorema 5.4. Seja φ uma função qualquer no espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que $\varphi(s) = 1$ para $|s| \leq s_0$. Definimos para $\varepsilon, \delta > 0$ a família de funções

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}(s) = \begin{cases} \varphi(s)(1 - \varepsilon\kappa(s)) & \text{para} \quad |s| \leq s_0 \\ \varphi(\pm s_0 + \lambda(s \mp s_0)) & \text{para} \quad |s| \geq s_0 \end{cases},$$

com o sinal superior para $s \geq s_0$ e o inferior para $s \leq -s_0$.

Assim, tomando a função teste $\Phi_{\lambda,\varepsilon}(s,t) = \varphi_{\lambda,\varepsilon}(s)\chi_1(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}[\Phi_{\lambda,\varepsilon}] &= \mathcal{Q}[\Phi_{\lambda,\varepsilon}] - E_1\|\Phi_{\lambda,\varepsilon}\|^2_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{1}{1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}\kappa(s)} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'_{\lambda,\varepsilon}(s)|^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}} \kappa(s)|\varphi_{\lambda,\varepsilon}(s)|^2 \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\lambda}{1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}\kappa(s)} \|\varphi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \varepsilon^2 \frac{\|\kappa'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{1 - d\sup_{s\in\mathbb{R}}\kappa(s)} + \varepsilon^2 \frac{\|\kappa\|^3_{L^3(\mathbb{R})}}{d} - \varepsilon \frac{2\|\kappa\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}{d}.
\end{aligned}$$

Note que o termo linear em ε é negativo e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos tornar negativa a operação dos três últimos termos. Finalmente, fixamos este $\varepsilon > 0$ e escolhemos λ suficientemente pequeno de tal modo que o lado direito da desigualdade seja negativa. $\square$

Para finalizar nosso capítulo, relembremos a estimativa dada por (1) na Introdução: *Para todo* $j \geq 1$,

$$\lambda_j(-\Delta^{\Omega_\varepsilon}_{DN}) = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 + \frac{\inf\kappa}{\varepsilon} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Suponha que $I = \mathbb{R}$ e que a curvatura κ se anula no infinito. Observemos que do Teorema 5.1, o termo $\pi^2/(2\varepsilon)^2$ na igualdade acima coincide com o ínfimo do espectro essencial do operador $-\Delta^{\Omega_\varepsilon}_{DN}$. Além disso, se κ assume um valor negativo e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, do Teorema 5.5, segue que $\sigma_d(-\Delta^{\Omega_\varepsilon}_{DN}) \neq \emptyset$.

Apêndice

A Mudança de variáveis em formas quadráticas

Neste apêndice vamos apresentar as mudanças de variáveis correspondente às formas quadráticas.

Relembre o difeomorfismo $\mathcal{L}_\varepsilon$ definido na Seção 2.1. Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\Psi(x)|^2 \mathrm{d}x &= \int_\Omega |((\nabla\Psi)\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)|^2 \cdot |\det J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega |((\nabla\Psi)\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)|^2 \cdot \varepsilon h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Escrevendo $\Psi(\mathcal{L}_\varepsilon(s,t)) = \Psi(\mathcal{L}_\varepsilon^1(s,t), \mathcal{L}_\varepsilon^2(s,t))$, $(s,t)\in\Omega$ e $z = \Psi(\mathcal{L}_\varepsilon^1, \mathcal{L}_\varepsilon^2)$, em que $\mathcal{L}_\varepsilon^1 = \mathcal{L}_\varepsilon^1(s,t)$ e $\mathcal{L}_\varepsilon^2 = \mathcal{L}_\varepsilon^2(s,t)$, tem-se

$$\begin{aligned}\nabla z &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial t}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1} & \frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^1}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon^2}{\partial t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla(\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon) = ((\nabla\Psi)\circ\ \mathcal{L}_\varepsilon)\cdot J\mathcal{L}_\varepsilon$$

e, consequentemente,

$$(\nabla\Psi)\circ\mathcal{L}_\varepsilon = \nabla(\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)\cdot J^{-1}\mathcal{L}_\varepsilon. \tag{18}$$

Tomando $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\psi = \Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}\left|\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\psi\right)\cdot J^{-1}\mathcal{L}_\varepsilon\right|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial s} & \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\varepsilon h_\varepsilon}\begin{pmatrix}\varepsilon\dot\gamma^1 & \varepsilon\dot\gamma^2 \\ -(\dot\gamma^2+\varepsilon t\ddot\gamma^1) & \dot\gamma^1-\varepsilon t\ddot\gamma^2\end{pmatrix}\right|^2 \\ &= \left|\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}h_\varepsilon}\begin{pmatrix}\varepsilon\dot\gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial s} - (\dot\gamma^2+\varepsilon t\ddot\gamma^1)\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \varepsilon\dot\gamma^2\frac{\partial\psi}{\partial s} + (\dot\gamma^1-\varepsilon t\ddot\gamma^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{pmatrix}^T\right|^2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3h_\varepsilon^2}\left[\left(\varepsilon\dot\gamma^1\frac{\partial\psi}{\partial s} - (\dot\gamma^2+\varepsilon t\ddot\gamma^1)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + \left(\varepsilon\dot\gamma^2\frac{\partial\psi}{\partial s} + (\dot\gamma^1-\varepsilon t\ddot\gamma^2)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3h_\varepsilon^2}\left[\varepsilon^2((\dot\gamma^1)^2+(\dot\gamma^2)^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 - 2\varepsilon^2t(\dot\gamma^1\ddot\gamma^1+\dot\gamma^2\ddot\gamma^2)\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right. \\ &\left.+ ((\dot\gamma^2+\varepsilon t\ddot\gamma^1)^2 + (\dot\gamma^1-\varepsilon t\ddot\gamma^2)^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Desde que γ é uma curva unitária, $\dot\gamma^1\ddot\gamma^1 + \dot\gamma^2\ddot\gamma^2 = \langle\dot\gamma,\ddot\gamma\rangle = 0$ e, para cada $s\in I$, se verifica que

$\|\ddot{\gamma}\| = |\kappa(s)|$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\psi(s,t)\right)\cdot J^{-1}\mathcal{L}_\varepsilon(s,t)\right|^2 &= \frac{1}{\varepsilon^3 h_\varepsilon^2(s,t)}\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\right)^2 + (1-\varepsilon t\kappa(s))^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{\varepsilon^3 h_\varepsilon^2(s,t)}\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\right)^2 + h_\varepsilon^2(s,t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{\varepsilon h_\varepsilon^2(s,t)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,t)\right)^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, de (18), (19) e do fato de que $\psi(s,t) = (\sqrt{\varepsilon}\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla\Psi(x)|^2dx &= \int_\Omega |((\nabla\Psi)\circ\mathcal{L}_\varepsilon)(s,t)|^2\cdot|\det J\mathcal{L}_\varepsilon(s,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \int_\Omega\left[\frac{1}{h_\varepsilon(s,t)}\left(\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}\Psi\circ\mathcal{L}_\varepsilon)}{\partial t}(s,t)\right)^2 h_\varepsilon(s,t)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&= \int_\Omega\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega\frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2}h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

B Forma quadrática associada a um operador

Neste apêndice vamos apresentar os detalhes da forma quadrática $\hat{Q}_\varepsilon$ associada ao operador $\hat{H}_\varepsilon$ definida na Seção 4.2.

Desde que $\hat{U}_\varepsilon^{-1}\psi = h_\varepsilon^{-1/2}\psi$, tem-se que, para cada $\psi\in\mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\psi] &= \mathcal{Q}_\varepsilon[\hat{U}_\varepsilon^{-1}\psi]\\
&= \int_\Omega\frac{|\partial_s(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2}{h_\varepsilon(s,t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_\Omega\frac{|\partial_t(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2}{\varepsilon^2}h_\varepsilon(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
|\partial_s(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2 &= \left|\frac{1}{2}\frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^{3/2}(s,t)}\psi(s,t) + \frac{1}{h_\varepsilon^{1/2}(s,t)}\partial_s\psi(s,t)\right|^2\\
&= \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^3(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)}|\partial_s\psi(s,t)|^2\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\psi(s,t)\overline{\partial_s\psi(s,t)} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t)\\
&= \frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^3(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|\partial_t(h_\varepsilon^{-1/2}(s,t)\psi(s,t))|^2 &= \left|\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\kappa(s)}{h_\varepsilon^{3/2}(s,t)}\psi(s,t) + \frac{1}{h_\varepsilon^{1/2}(s,t)}\partial_t\psi(s,t)\right|^2\\
&= \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon^3(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)}|\partial_t\psi(s,t)|^2\\
&+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\kappa(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\psi(s,t)\overline{\partial_t\psi(s,t)} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\kappa(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t)\\
&= \frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon(s,t)} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon^3(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{\varepsilon\kappa(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\psi] = \int_\Omega \left[\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon^2(s,t)} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2 t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^4(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^3(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t))\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$+ \int_\Omega \left[\frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}\frac{(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon^2(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{\kappa(s)}{\varepsilon h_\varepsilon(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t))\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Por sua vez, note que

$$\int_\Omega \frac{\kappa(s)}{\varepsilon h_\varepsilon(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_I \frac{\kappa(s)}{\varepsilon}\left(\int_0^1 \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t))\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,$$

em que

$$\int_0^1 \frac{1}{h_\varepsilon(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_t\psi(s,t))\mathrm{d}t \overset{\text{I.P.P}}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1-\varepsilon\kappa(s)}\int_{\{1\}}|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varepsilon\kappa(s)}{h_\varepsilon^2(s,t)}|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}t.$$

Portanto,

$$\hat{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\psi] = \int_\Omega \left[\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon^2(s,t)} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2 t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^4(s,t)}|\psi(s,t)|^2 + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^3(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t))\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$+ \int_\Omega \left[\frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4}\frac{(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon^2(s,t)}|\psi(s,t)|^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{I\times\{1\}} \frac{1}{2}\frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon\kappa(s))}|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$= \int_\Omega \left[\frac{|\partial_s\psi(s,t)|^2}{h_\varepsilon^2(s,t)} + \frac{|\partial_t\psi(s,t)|^2}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2 t^2(\kappa'(s))^2}{h_\varepsilon^4(s,t)} - \frac{1}{4}\frac{(\kappa(s))^2}{h_\varepsilon(s,t)^2}\right)|\psi(s,t)|^2\right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon t\kappa'(s)}{h_\varepsilon^3(s,t)}\Re(\overline{\psi(s,t)}\partial_s\psi(s,t))\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_{I\times\{1\}} \frac{1}{2}\frac{\kappa(s)}{\varepsilon(1-\varepsilon\kappa(s))}|\psi(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

C Comportamento assintótico de autovalores

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto (limitado ou ilimitado), $W : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Definimos $W_{min} := \inf_{x\in I}\{W(x)\}$. Considere a forma quadrática

$$n_\mu(\phi) = \int_I |\phi'|^2\mathrm{d}x + \mu\int_I W(x)|\phi|^2\mathrm{d}x, \quad \mathrm{dom}\, n_\mu = H_0^1(I).$$

Denote por $n_\mu(\psi,\varphi)$ e N_μ sua forma sesquilinear e seu operador autoadjunto associado, respectivamente. Considere a sequência $\{\lambda_j(N_\mu)\}_{j\in\mathbb{N}}$ dada pelo Princípio Max-Min. O resultado abaixo é uma versão mais simples do Teorema 4 de [10].

Teorema .6. *Para cada $j \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{\mu\to+\infty}\frac{\lambda_j(N_\mu)}{\mu} = W_{min}.$$

Prova: Desde que $N_\mu \geq \mu W_{min}\mathbf{1}$, pelo Princípio Max-Min,

$$\lim_{\mu\to+\infty}\frac{\lambda_j(N_\mu)}{\mu} \geq W_{min}.$$

Agora, precisamos mostrar a desigualdade oposta. Considere o operador multiplicação

$$\mathcal{M}_W\phi = W\phi, \quad \mathrm{dom}\,\mathcal{M}_W = \{\phi \in L^2(I) : W\phi \in L^2(I)\}.$$

O espectro de $\mathcal{M}_W$ é puramente essencial e igual a imagem essencial de W. Em particular, $W_{min} \in \sigma(\mathcal{M}_W)$. Pelo Teorema 1.25, existe uma sequência $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormalizada em $L^2(I)$ tal que $\|(\mathcal{M}_W - W_{min}\mathbf{1})\psi_i\| \to 0$, quando $i \to \infty$. Desde que $C_0^\infty(I)$ é denso em $\mathrm{dom}\,\mathcal{M}_W$, segue que existe uma sequência

$\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisfazendo

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle - \delta_{ij} \to 0, \quad \langle \varphi_i, (\mathcal{M}_W - W_{min})\varphi_j \rangle \to 0,$$

quando $i, j \to \infty$. Agora, dado $N \in \mathbb{N}$, tome $k = k(\mathbb{N})$ suficientemente grande tal que

$$A(N) - W_{min}\mathbf{1} \leq N^{-1}\mathbf{1},$$

em que $A(N)$ é uma matriz simétrica com entradas $\langle \varphi_{i+k}, W\varphi_{j+k} \rangle$, para $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Desde que o subespaço gerado por $\{\varphi_{1+k}, \ldots, \varphi_{N+k}\}$ é um subespaço N-dimensional de $\operatorname{dom} N_\mu$, tem-se $\lambda_j(N_\mu) \leq c_j(N_\mu)$, para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$, em que $\{c_j(N_\mu)\}_{j=1}^N$ é a sequência crescente de autovalores, repetidos de acordo com a multiplicidade, da matriz $C(N_\mu) := C_{ij}(N_\mu)$ definida por $C_{ij}(N_\mu) = n_\mu(\varphi_{i+k}, \varphi_{i+j})$. Podemos observar que

$$C(N_\mu) \leq \mu(W_{min} + N^{-1})\mathbf{1} + d(N)\mathbf{1},$$

em que $d(N)$ denota o maior autovalor da matriz com entradas $(\langle \nabla\varphi_{i+k}, \nabla\varphi_{j+k} \rangle)$. Sendo assim,

$$\lim_{\mu\to+\infty} \frac{\lambda_j(N_\mu)}{\mu} \leq W_{min} + N^{-1},$$

para $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$, em que N pode ser tomado arbitrariamente grande. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Borisov, D.; Exner, P.; Gadyl'shin, R. *Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip.* J. Math. Phys. **43**, 6265-6278 (2002).

[2] Chenaud, B.; Duclos, P.; Freitas, P.; Krejčiřík, D. *Geometrically Induced Discrete Spectrum in Curved Tubes.* Differential Geom. Appl. **23**, 95-105 (2005).

[3] Davies, E.B. *Spectral theory and differential operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] de Oliveira, C. R. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics.* Birkhäuser Basel, 2008.

[5] Dittrich, J.; Kríz, J. *Curved planar quantum wires with Dirichlet and Neumann boundary conditions.* J. Phys. A: Math. Gen. **35**, L269-L275 (2002).

[6] Duclos, P.; Exner, P. *Curvature-Induced Bound States in Quantum Waveguides in Two and Three Dimensions.* Rev. Math. Phys. **7**, 73-102 (1995).

[7] Duclos, P.; Exner, P.; Krejčiřík, D. *Bound states in curved quantum layers.* Commun. Math. Phys. **223**, 13–28 (2001).

[8] Edmunds, D. E.; Evans, W. D. *Spectral Theory and Differential Operators.* Oxford University Press, Oxford, 1987.

[9] Exner, P.; Šeba, P. *Bound states in curved quantum waveguides.* J. Math. Phys. **30**, 2574–2580 (1989).

[10] Freitas, P.; Krejčiřík, D. *Instability results for the damped wave equation in unbounded domains.* J. Diff. Eqns. **211**, 168-186 (2005).

[11] Freitas, P.; Krejčiřík, D. *Waveguides with Combined Dirichlet and Robin Boundary Conditions.* Mathematical Physics Analysis and Geometry. **9**, 335-352 (2006).

[12] Friedlander, L.; and Solomyak, M. *On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow infinite strip.* Amer. Math. Soc. Transl. **225**, 103-116 (2008).

[13] Gohberg, I.C.; Krein, M.G. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* AMS, Providence, Rhode Island, 1969.

[14] Goldstone, J.; Jaffe, R. L. *Bound states in twisting tubes.* Phys. Rev. B **45**, 14100–14107 (1992).

[15] Karp, L.; Pinsky, M. *First-order asymptotics of the principal eigenvalue of tubular neighborhoods.* Geometry of random motion (Ithaca, N.Y., 1987), Contemp. Math. **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 105–119 (1988).

[16] Kato, T. *On the Convergence of the perturbation method.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **6**, 145–226 (1951).

[17] Krejcirik, D. *Spectrum of the Laplacian in a narrow curved strip with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions.* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **15**, 555-568 (2009).

[18] Krejčiřík, D.; Kříž, J. *On the spectrum of curved planar waveguides.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41**, 757–791 (2005).

[19] Kuchment, P.; Zeng, H. *Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph.* J. Math. Anal. Appl. **258**, 671–700 (2001).

[20] Kuchment, P.; Zeng, H. *Asymptotics of spectra of Neumann Laplacians in thin domains.* Advances in differential equations and mathematical physics, Birmingham, AL, 2002. Contemporary Mathematics, vol. 327, pp. 199–213. American Mathematical Society, Providence, RI (2003).

[21] Olendski, O.; Mikhailovska, L. *Localized-mode evolution in a curved planar waveguide with combined Dirichlet and Neumann boundary conditions.* Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics. **67**, art. 056625 (2003).

[22] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1972.

[23] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, IV: Analysis of operators.* Academic Press, New York, 1978.

[24] Renger, W.; Bulla, W. *Existence of bound states in quantum waveguides under weak conditions.* Lett. Math. Phys. **35**, 1–12 (1995).

[25] Sobolev, A. V.; Walthoe, J. *Absolute continuity in periodic waveguides.* Proc. London Math. Soc. **85**, 717-741 (2002).