

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – MESTRADO

BRUNA KER SIMÃO DE OLIVEIRA

EFEITOS DA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NO DESEMPENHO DO  
GRÁFICO MODIFICADO CONSIDERANDO OS ÍNDICES DE  
CAPACIDADE

SÃO CARLOS

MAIO DE 2020

BRUNA KER SIMÃO DE OLIVEIRA

EFEITOS DA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NO DESEMPENHO DO  
GRÁFICO MODIFICADO CONSIDERANDO OS ÍNDICES DE  
CAPACIDADE

Texto apresentado como requisito para  
qualificação no Mestrado no Programa de Pós-  
Graduação de Engenharia de Produção da  
Universidade Federal de São Carlos.

Área de concentração: Gestão da Qualidade

Orientador: Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Schoemer Jardim



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

---

### Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Bruna Ker Simão de Oliveira, realizada em 08/07/2020.

#### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime (UFSCar)

Profa. Dra. Fabiane Letícia Lizarelli (UFSCar)

Prof. Dr. Felipe Schoemer Jardim (UFF)

Prof. Dr. Subhabrata Chakraborti (UA)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

BRUNA KER SIMÃO DE OLIVEIRA

EFEITOS DA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS NO DESEMPENHO DO  
GRÁFICO MODIFICADO CONSIDERANDO OS ÍNDICES DE  
CAPACIDADE

Qualificado em 24 de maio de 2019

Banca examinadora

---

Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime (Orientador)

Universidade Federal de São Carlos, São Paulo

---

Prof. Dr. Felipe Schoemer Jardim (Coorientador)

Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Subhabrata Chakraborti

The Alabama University, Tuscaloosa, EUA

---

Prof. Dra. Fabiana Letícia Lizarelli

Universidade Federal de São Carlos, São Paulo

## DEDICATÓRIA

A Deus, o meu criador, que me deu toda capacitação necessária para concluir essa fase da minha vida. Porque dEle, por Ele e para Ele são todas as coisas.

*“E tudo quanto fizerdes, fazei-o de todo o coração, como para o Senhor e não para homens.”*

*Colossenses 3:23*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, criador dos céus e da terra, que com sua infinita misericórdia e bondade me permitiu entrar no programa de mestrado da UFSCar, me conduziu nesse período e me deu graça e conhecimento para desenvolver este trabalho.

Ao meu marido Lucas Pires que me deu suporte em toda essa fase, nos momentos bons e difíceis, me incentivando com amor a perseverar nos estudos e compreendendo minhas ausências para dedicação a este trabalho.

Ao meu filho Benjamim que nasceu durante o mestrado, me dando mais força, garra e alegria para condução do mesmo.

Aos meus pais, Marcus e Patrícia, por todo apoio me dado desde o ensino fundamental até a pós graduação, sempre me ajudando e me estimulando a progredir.

A toda minha família, estendo à família do meu marido Lucas, que me faz me sentir amada e cuidada.

Aos meus amigos e líderes da igreja em Campinas por me darem suporte e direção espiritual.

Ao Professor Dr. Pedro Carlos Oprime por ter me dado a oportunidade de desenvolver este trabalho, confiando em minha competência.

Ao Professor Dr. Felipe Schoemer Jardim que com muita paciência me ensinou princípios básicos da estatística e me levou a pensar mais afundo sobre o tema do trabalho.

Ao Professor Dr. Subhabrata Chakraborti que confiou em meu potencial desde à primeira apresentação sobre o tema e que me motiva a buscar caminhos mais altos na academia.

À Professora Dra. Fabiana Letícia Lizarelli que com sua simpatia e dedicação me deu todo suporte necessário durante a gestação para conseguir concluir os créditos do programa.

À toda equipe do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção da UFSCar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo incentivo financeiro.

## RESUMO

Os gráficos de controle modificado e de aceitação são indicados para o monitoramento de processos altamente capazes, cuja variação natural é significativamente baixa se comparada aos limites de especificação. Isso é conveniente pois esses gráficos permitem que a média do processo varie dentro de uma faixa específica de valores sem considera-lo fora de controle e, do ponto de vista prático, pode-se dizer que processos altamente capazes suportam certas mudanças em sua média sem comprometer a sua qualidade em termos de produção de itens não conformes. Pelo fato de os gráficos modificado e de aceitação não exigirem a invariabilidade da média, menos intervenções são necessárias no processo, reduzindo custos de monitoramento, o que torna seu uso ainda mais relevante. Este trabalho estuda o efeito da estimação do parâmetro desvio padrão e a influência dos índices de capacidade nas medidas de desempenho do gráfico modificado. Optou-se por detalhar o estudo apenas para este gráfico porquanto ele foca no controle da probabilidade do erro tipo I (que é o mais comum na indústria). Para compreender o efeito da estimação do desvio padrão no desempenho do gráfico modificado, foram propostos modelos estatísticos que calculam a taxa de alarmes falsos (FAR) e o número médio de amostras até o primeiro alarme (ARL), considerando os casos onde o desvio padrão do processo é conhecido e aquele no qual ele precisa ser estimado. Os resultados mostraram que quando o desvio padrão é estimado, tanto o FAR quanto o ARL se tornam variáveis aleatórias, o que compromete a qualidade do gráfico. Para perceber essa avaria, foram feitos alguns testes gráficos e numéricos, os quais revelaram que para se obter resultados semelhantes aos valores nominais do caso ideal (parâmetros conhecidos), é preciso recolher um número alto de dados (muitas amostras ( $m$ ) de tamanho elevado ( $n$ )) durante a Fase I do processo de implantação do gráfico de controle. Contudo, esse valor elevado de  $m$  e  $n$  inviabiliza o uso do gráfico para muitos processos fabris. Algumas soluções foram propostas para reduzir o número de dados necessários na Fase I. Finalmente avaliou-se a influência dos índices de capacidade nos valores de FAR e ARL, foi atestado que o gráfico é apropriado para processos altamente capazes, pois enquanto a média varia dentro da faixa permitida, a taxa máxima de alarmes falsos se mantém menor ou igual ao valor nominal.

## **ABSTRACT**

*The modified and the acceptance control charts are indicated for monitoring highly capable processes, whose natural dispersion is significantly lower than the specification limits. This affirmation is based on the fact that these charts allow the process mean to vary over a range (specified by the tolerable non-conforming items rate,) remaining its in in-control (IC) condition and, from a practical point of view, highly capable processes support some shifts on their mean without affect the production of non-conforming items (cause there is a considerable room between the nominal mean and the specification limits). As the modified and acceptance charts do not require a rigid stability on the process mean, detecting just practical importance shifts, the number of process halts are minimized, which can save time and resources, making their use even more relevant. This work studies the effect of the parameter estimation and the influence of the capability indexes on the performance measures of the modified chart. We chose to detail the study only for this chart because the focus of this chart is on the control of the probability of type I error (which is the most common on the industry). To understand the effect of the standard deviation estimation on the modified chart performance, there were proposed some statistical models to calculate the False Alarm Rate (FAR) and the Average Run Length (ARL), considering the cases where the standard deviation is known and the one in which it is unknown. The results showed that when the standard deviation is estimated, both FAR and ARL become random variables, what compromise the performance of the chart. To amply the knowledge about this damage it was done some graphical and numerical tests, which showed that it is necessary to collected a big number of data (many large samples) from the process on Phase I to get closer the results of the unknown case to the desired value. However, this high number of m and n makes the use of the chart unfeasible in many manufacture industries. Some solutions were proposed to reduce this high number of data needed on Phase I. Finally, it was evaluated the influence of the capability indexes on FAR and ARL, and it was attested that the modified chart is really appropriated for high capable processes, because while the mean vary inside the allowed range, the maximum false alarm rates remains bellow or equal to the nominal value.*



## SUMÁRIO

RESUMO .....	7
ABSTRACT .....	8
LISTA DE TABELAS .....	11
LISTA DE FIGURAS .....	12
LISTA DE SÍMBOLOS .....	13
LISTA DE SIGLAS .....	14
1 INTRODUÇÃO .....	7
1.1 Problemática de Pesquisa .....	10
1.2 Objetivo .....	11
1.3 Justificativa.....	12
1.4 Estrutura da Pesquisa.....	13
2 MÉTODOS.....	15
2.1 Abordagem de pesquisa.....	15
2.2 Tipo de Pesquisa.....	16
2.3 Método de Pesquisa.....	16
2.3.1 Modelagem.....	17
2.3.2 Riscos e Restrições.....	18
2.3.3 Modelos estatísticos propostos para o gráfico modificado .....	19
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
3.1 Revisão Bibliográfica Sistemática.....	20
3.2 Revisão da literatura sobre os gráficos modificado e de aceitação .....	21
3.2.1 Médias limites toleráveis ( $\mu U$ e $\mu L$ ) e intoleráveis ( $\mu 1, U$ e $\mu 1, L$ ) .....	23
3.2.2 Limites de Controle e os erros tipo I e tipo II .....	24
3.3 Estimação de parâmetros e seus efeitos no desempenho do gráfico de controle .....	25
4 DESEMPENHO DO GRÁFICO MODIFICADO .....	28
4.1 Taxa de Alarmes Falsos (FAR) com desvio padrão conhecido .....	28

4.2	Taxa de Alarmes Falsos com desvio padrão estimado.....	32
4.2.1	A distribuição de probabilidade <b>CFAR<sub>max</sub></b> .....	35
4.3	Average Run Length (ARL) com desvio padrão conhecido .....	41
4.3.1	A distribuição de <i>run-length</i> (RL).....	41
4.3.2	<i>Average-run-length</i> (ARL).....	42
4.4	<i>Average-run-length</i> (ARL) com desvio padrão estimado .....	44
4.4.1	<i>Conditional average-run-length</i> (CARL) .....	45
4.4.2	<i>Unconditional average-run-length</i> (ARL).....	50
5	ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO ( <b>CP</b> e <b>CP<sub>k</sub></b> ).....	53
6	EXEMPLO DIDÁTICO.....	55
6.1	Parâmetros do processo .....	55
6.2	Desvio padrão é conhecido (caso K).....	56
6.3	Desvio padrão estimado (caso U).....	57
6.3.1	Taxa de Alarmes Falsos Condicionada ( <b>CFAR<sub>max</sub></b> ) .....	57
6.3.2	Perspectivas condicional e incondicional do <b>ARL<sub>0, min</sub></b> .....	60
6.4	Possíveis soluções para redução do número de dados necessários na Fase I do CEP.....	62
6.4.1	Possíveis soluções para reduzir o valor do tamanho da amostra <b>n<sub>X</sub></b> .....	63
6.5	Influência dos índices de capacidade no desempenho do gráfico .....	66
7	CONCLUSÃO .....	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. Análise da esperança e desvio padrão de $CFAR_{max}$ para diversos valores de $m$ .	40
Tabela 6.1. Médias limites toleráveis e limites de controle do processo.....	56
Tabela 6.2. $FAR_{max}$ e $ARL_{min}$ para diversos tamanhos de amostra. ....	57
Tabela 6.3. Valores da esperança e desvio padrão de $CFAR_{max}$ para diversos valores de $m$ e $n$ , $FAR_{max} = 0,001$ .....	59
Tabela 6.4. Valor esperado e desvio padrão de $CARL0, min$ para diversos valores de $m$ e $n$ , $FAR_{max} = 0,001$ .....	62
Tabela 6.5. Cálculo do tamanho da amostra ( $nX$ ) para diversos valores de $\alpha_{nom}$ e $\beta_{nom}$ ..	64
Tabela 6.6. Cálculo do tamanho da amostra ( $nX$ ) para diversos valores de $\delta$ e $\gamma$ .....	65
Tabela 6.7. Influência do deslocamento da média do processo nos índices de capacidade e nas medidas de desempenho $FAR_{max}$ e $ARL0, min$ . ....	66

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Problema de pesquisa.....	11
Figura 1.2. Estruturação da pesquisa .....	14
Figura 3.1. Definição das taxas ( $\delta$ e $\gamma$ ) de itens não conformes. ....	24
Figura 4.1. Momentos no gráfico modificado e de aceitação em que ocorrem as taxas de alarmes falso mínima e máximas. ....	30
Figura 4.2. Curva da taxa de alarme falso para o gráfico de aceitação. ....	31
Figura 4.3. Curvas de $CFAR_{max}$ em função da ordem do quantil ( $u$ ) de $Y$ .....	34
Figura 4.4. Curva de $CFAR_{max}Y$ para diversos $Y_t$ .....	37
Figura 4.5. Curvas da $FCFAR_{max}t$ parametrizadas em função de $m$ . ....	38
Figura 4.6. Curvas da p.d.f. de $CFAR_{max}$ parametrizada em função de “ $m$ ”.....	39
Figura 4.7. Curva do $ARL_0$ para o gráfico de aceitação.....	43
Figura 4.8. Curvas de $CARL_0, min$ em função da ordem do quantil ( $U$ ) de $Y$ . ....	46
Figura 4.9. Curva de $CARL_0, minY$ . ....	48
Figura 4.10. Curvas da c.d.f. de $CARL_0, min$ parametrizadas em “ $m$ ”.....	49
Figura 4.11. Curvas da p.d.f. de $CARL_0, min$ parametrizadas em “ $m$ ”. ....	50
Figura 6.1. Curvas de $CFAR_{max}(U)$ parametrizadas em $m$ $FAR_{max} = 0,001$ , $n = 34$ , $\Delta IC = 7,348$ . ....	58
Figura 6.2. Curvas de $CFAR_{max}(U)$ parametrizadas em “ $n$ ”, $FAR_{max} = 0,001$ , $m = 10$ , $\Delta IC = 7,348$ .....	59
Figura 6.3. Curvas de $CARL_0, min(U)$ parametrizadas em $m$ , $FAR_{max} = 0,001$ , $n = 34$ , $\Delta IC = 7,348$ .....	61

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_0$	: Desvio padrão conhecido
$\hat{\sigma}$	: Desvio padrão estimado
$S_p$	: Desvio padrão agrupado
$\mu$	: Média do processo
$\mu_0$	: Média conhecida ou nominal
$\bar{x}$	: Média amostral
$\alpha$	: Probabilidade do erro tipo I
$\beta$	: Probabilidade do erro tipo II
$\delta$	: Taxa máxima de itens não conformes aceitável
$\gamma$	: Taxa específica de unidades não conformes indesejável
$n$	: Tamanho da amostra
$m$	: Número de amostras
$C_p$	: Índice de capacidade potencial do processo
$C_{PK}$	: Índice de capacidade efetiva do processo
$F_{CFAR}$	: Função de distribuição acumulada de CFAR
$F_{CARL}$	: Função de distribuição acumulada de CARL
$f_{CFAR}$	: Função densidade de probabilidade de CFAR
$f_{CARL}$	: Função densidade de probabilidade de CARL
$\mu_U$	: Média limite superior tolerável
$\mu_L$	: Média limite inferior tolerável
$\mu_{1,U}$	: Média limite superior inaceitável
$\mu_{1,L}$	: Média limite inferior inaceitável
$\Delta_{IC}$	: Variação da média em função do número de desvios padrões
$\Phi(.)$	: Função de distribuição acumulada padrão
$Z$	: Quantil da distribuição normal padrão

## LISTA DE SIGLAS

ACC:	: <i>Acceptance control chart</i>
ARL	: <i>Average run length</i>
CARL	: <i>Conditional average run length</i>
C.D.F.	: <i>Cumulative distribution function</i>
CEP	: <i>Controle estatístico do processo</i>
CFAR	: <i>Conditional false alarm rate</i>
CRL	: <i>Conditional run length</i>
E	: <i>Expectance</i>
EWMA	: <i>Exponentially weighted moving average</i>
FAR	: <i>False alarm rate</i>
LCL	: <i>Lower control limits of the modified chart</i>
$LCL_{acc}$	: <i>Lower control limits of the acceptance chart</i>
LSL	: <i>Lower specification limits</i>
P.D.F.	: <i>Probability density function</i>
RL	: <i>Run length</i>
SD	: <i>Standard deviation</i>
UCL	: <i>Upper control limits of the modified chart</i>
$UCL_{acc}$	: <i>Upper control limits of the acceptance chart</i>
USL	: <i>Upper specification limits</i>

## 1 INTRODUÇÃO

O controle estatístico do processo (CEP) tem sido muito utilizado pelas indústrias manufatureiras com o intuito de monitorar, controlar e aprimorar seus processos fabris (JARDIM, CHAKRABORTI, EPPRECHT, 2019; TOLEDO et al., 2017; MONTGOMERY, 2016; SALEH et al., 2015). Como o próprio nome indica, pode-se dizer, de maneira genérica, que o controle se dá por meio do emprego de técnicas estatísticas as quais visam, principalmente, por meio de gráficos, identificar a presença de causas especiais no processo e eliminá-las, a fim de torna-lo previsível e estável.

Apesar de ser uma técnica antiga, com início na primeira metade do século XX, o CEP faz parte do que Garvin (1992) denominou como era do controle estatístico da qualidade no estudo da evolução da qualidade nos Estados Unidos da América (EUA). Nessa era ocorreu uma disseminação do uso do CEP nas indústrias e foram publicados inúmeros trabalhos acadêmicos abordando suas diferentes técnicas e métodos.

Dentro do CEP, pode-se dizer que um dos métodos mais utilizados é o gráfico de controle (MONTGOMERY, 2016; MOHAMMADIAN e AMIRI, 2012; CHOU, CHEN e LIU, 2005; CHAKRABORTI e VAN, 2008). De acordo com Seif, Faraz e Saniga (2015) o gráfico de controle é uma ferramenta que visa avaliar o desempenho, gerir a capacidade, controlar e melhorar o processo produtivo. No que diz respeito ao monitoramento, os gráficos de controle foram desenvolvidos como um guia para identificar a presença de causas especiais no processo (FREUND, 1957).

Um processo em controle, de acordo Montgomery (2016), é aquele que está sujeito apenas à variabilidade natural, aquele sob presença de causas aleatórias, comuns e inevitáveis. Um processo fora de controle, por sua vez, é aquele que apresenta causas especiais, não esperadas, as quais tiram a estabilidade estatística do mesmo indicando que há problemas que devem ser identificados e corrigidos.

O primeiro autor a sugerir o uso do gráfico de controle foi Shewhart em 1924. O autor propôs o uso do gráfico de controle para processos que seguem uma distribuição de probabilidade gaussiana (distribuição normal), a qual é definida com base em dois parâmetros bastante conhecidos: a média e o desvio padrão ( $(X \sim N(\mu_0, \sigma_0))$ ).

De acordo com Montgomery (2016), os gráficos de Shewhart sugerem que toda vez que causas especiais forem detectadas, o processo deve ser parado para intervenções, visando eliminar tais causas e retomar sua estabilidade. Esses gráficos se atentam na estabilidade da variável de controle, de forma que qualquer mudança dessa variável com relação ao valor nominal (*target*) deve ser considerada situação fora de controle (*OCC – out-of-control*).

Recentemente um novo parecer sobre o controle dos processos tem eclodido. Considerando os gráficos que controlam a média de processos (gráficos  $\bar{X}$ ), autores têm sustentado a ideia de que nem toda alteração da média deve ser considerada condição fora de controle. Existem processos que, devido a sua natureza, estão sujeitos a variações inevitáveis em sua variável de controle (HOLMES e MERGEN, 2000; AIAG, 2016), as quais são provocadas por causas atribuíveis. Para Woodall (1985), em alguns casos, pequenas alterações na estabilidade do parâmetro de medição podem apresentar pouca ou nenhuma importância prática para a organização.

Para Mohammadian e Amari (2012) e Oprime e Mendes (2017) um tipo de processo que permite certa variação da média, por exemplo, são processos com elevado índice de capacidade. Isso porque, a variação natural é muito inferior aos limites de especificação, permitindo que os limites de controle sejam um pouco relaxados. Outros casos onde esse fenômeno é tolerado são processos que passaram por melhoria contínua e que alcançaram uma redução de variabilidade superior a seis sigmas, indicando alta capacidade (ISO7870, 2012); nesses casos a variabilidade dentro dos subgrupos é muito inferior ao permitido pelos limites de especificação, o que indica que certas alterações na média não comprometeria a qualidade do processo. Um exemplo clássico em que certa variação da média é permitida é um processo cujo fator dominante de variabilidade é o setup da máquina, como o processo de estamperia (OPRIME e MENDES, 2017).

O gráfico de controle de aceitação, introduzido por Freund (1957), é uma alternativa ao tradicional gráfico de Shewhart quando a proposta é monitorar processos cuja média é passível de certas alterações (MOHAMMADIAN e AMIRI, 2012). Isso porque o gráfico de aceitação não objetiva controlar a estabilidade do processo, e sim protegê-lo da produção exacerbada de itens defeituosos (FREUND, 1957). Nesse caso a média do processo pode variar dentro de determinada faixa de valores desde que a proporção de não conformes não exceda à taxa especificada, a qual é definida considerando os limites de especificação. Dessa forma, o número de intervenções no processo diminui, proporcionando uma economia financeira na produção



(HILL, 1956). Assim, tem-se que o foco deste gráfico está em aceitar ou rejeitar o processo com base em seus níveis de qualidade, sua capacidade potencial e efetiva e no controle do erro tipo I ( $\alpha$ ) e tipo II ( $\beta$ ).

Quando Freund (1957) cita o termo gráfico de aceitação em seu artigo, ele está considerando um único gráfico que controla tanto a probabilidade do erro tipo I ( $\alpha$ ) quanto a do erro tipo II ( $\beta$ ). Mas ele sugere duas fórmulas diferentes para calcular os limites de controle do gráfico, uma focada em  $\alpha$  e outra em  $\beta$ . Assim, pode-se dizer que existem dois gráficos distintos que, quando são projetados com os mesmos limites de controle, podem ser utilizados de forma conjunta. Contudo, Woodall e Faltin (2019), Montgomery (2016) e Hill (1956) consideram esses dois gráficos separadamente, atribuindo o nome de gráfico de aceitação aquele focado em  $\beta$ , e gráfico modificado aquele focado em  $\alpha$ . Neste trabalho também assumiremos essa notação.

Obter redução de custos mantendo um padrão de qualidade aceito pelo mercado é questão de sobrevivência no mundo globalizado e, por isso, muitas indústrias anseiam este resultado. Dessa forma, quando causas especiais (que tiram a estabilidade do processo, provocando o deslocamento de sua média) são esperadas e/ou podem ser toleradas, contando que a produção de itens defeituosos não ultrapasse ao valor estipulado pela alta gerência, o uso dos gráficos modificados e de aceitação se torna mais vantajoso (FREUND, 1957).

Uma vez definida a importância de se aplicar os gráficos modificados e de aceitação é preciso projetá-los. Para tanto existe o modelo estatístico proposto por Hill (1956) e por Freund (1957) que fundamentam todos os posteriores trabalhos sobre o tema. Contudo, o modelo proposto por esses autores não leva em consideração os índices de capacidade do processo (que demonstram se o processo está apto ou não à aplicação desses gráficos), nem verifica o desempenho operacional dos gráficos (por meio de medidas de desempenho que avaliem sua confiabilidade durante a fase de monitoramento – Fase II) e, não considera a possibilidade de um (ou todos) dos parâmetros ser desconhecido (o que afeta diretamente a fase de projeto do gráfico – Fase I). Dessa forma, desenvolver modelos estatísticos que ampliem o conhecimento sobre as medidas de desempenho do gráfico (no presente trabalho foram estudados a Taxa de Alarmes Falsos (FAR) e o *Average-run-length* (ARL)) e que incorporem os índices de capacidade no cálculo dessas medidas se tornam importantes para a literatura e relevantes para aplicação prática.

Outro aspecto a ser considerado é o conhecimento dos parâmetros do processo. No modelo que será proposto neste trabalho considera-se que a variável de controle segue uma

distribuição normal ( $X \sim N(\mu_0, \sigma_0)$ ), cujos parâmetros são média ( $\mu_0$ ) e desvio padrão ( $\sigma_0$ ). Sabe-se, porém, que comumente o gestor do processo não conhece esses parâmetros, precisando estimá-los a partir de dados amostrais. Consequente a isso, espera-se que haja uma variação entre os dados reais e os coletados, chamado de erro amostral. De acordo com Chakraborti (2006), essa variação afeta negativamente algumas propriedades operacionais do gráfico, como, por exemplo, a taxa de alarmes falsos, que aumenta significativamente. E, visto que mais falsos alarmes são gerados, o número médio de amostras até o primeiro alarme (ARL) diminui. Por conta disso, é importante analisar com detalhes os efeitos da estimação dos parâmetros neste gráfico. Neste trabalho considerou-se que a média populacional é conhecida e que o desvio padrão do processo ( $\hat{\sigma}$ ) precisa ser estimado.

## 1.1 Problemática de Pesquisa

O gráfico modificado é uma importante ferramenta para o controle de processos altamente capazes, visto que ele permite determinada variação na média sem considerá-lo fora de controle. Sua aplicação pode resultar em redução de recursos (tempo e dinheiro), pois seu uso reduz o número de interrupções na linha de produção sem comprometer a taxa de produção de itens conformes. Contudo, apesar da importância do tema, pouco se conhece sobre esse gráfico, principalmente quando o assunto é o seu desempenho durante a fase de monitoramento (Fase II).

Essa lacuna na literatura motivou o desenvolvimento do presente trabalho, cuja problemática central pode ser descrita da seguinte forma: O desempenho do gráfico modificado sofre influência da estimação de parâmetros e dos índices de capacidade do processo?

Essa problemática central pode ser destrinchada em três questões de pesquisa mais específicas, as quais são mostradas abaixo:

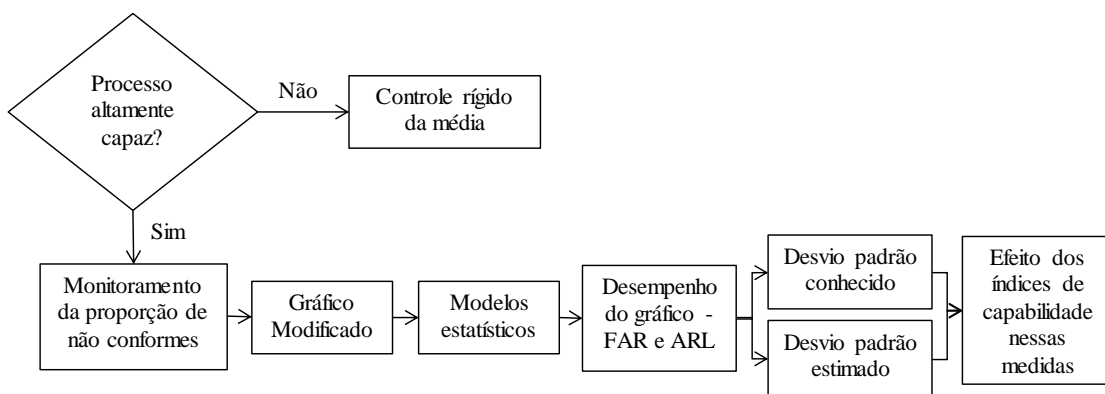
- Por que controlar rigidamente a média de processos que permitem certa variação sem causar danos na sua qualidade e no desempenho do gráfico?
- O gráfico modificado é realmente adequado para processos altamente capazes? Quais os efeitos dos índices de capacidade no seu desempenho?

- Normalmente os parâmetros do processo precisam ser estimados. Qual o efeito dessa estimação na medidas de desempenho do gráfico modificado?

Para responder essas questões, o presente trabalho visa propor modelos estatísticos que forneçam o cálculo exato da taxa de alarmes falsos (FAR) e do número médio de amostras até o primeiro alarme (ARL) quando o desvio padrão do processo é conhecido (Caso K), e que determinem as equações das curvas de distribuição de probabilidade (p.d.f. e c.d.f) dessas medidas de desempenho quando o desvio padrão é desconhecido (Caso U). Além disso serão propostos modelos que considerem a influencia dos índices de capacidade  $C_p$  e  $C_{pk}$  no cálculo dessas medidas de desempenho.

A Figura 1.1 resume as questões de pesquisa abordadas neste trabalho.

Figura 1.1. Problema de pesquisa



Fonte: autoria própria

## 1.2 Objetivo

O objetivo central deste trabalho é a construção de modelos estatísticos que calculem as medidas de desempenho (FAR e ARL) do gráfico modificado considerando o caso onde o desvio padrão é conhecido, o caso onde o desvio padrão é estimado e a interferência dos índices de capacidade do processo nessas medidas de desempenho.

A taxa de alarmes falsos (FAR) é a probabilidade de haver um sinal indicando condição fora de controle quando, na verdade, o processo está sob controle (CHAKRABORTI, 2006). Já o ARL, sigla de *Average Run Length*, é uma variável aleatória que mede o número médio de

amostras necessárias (ou número de pontos plotados no gráfico de controle) até que o gráfico detecte uma mudança (sinal) em um processo (CHAKRABORTI, 2000).

Essas definições foram retiradas de estudos sobre o gráfico  $\bar{X}$  de Shewhart, por isso antes de aplica-las ao gráfico de aceitação é necessário compreender as diferenças conceituais dessas variáveis, visto que um novo tipo de gráfico está sendo analisado. Essas alterações serão detalhadamente explicadas no capítulo de revisão bibliográfica.

Os modelos propostos por este trabalho consideram a construção teórica já existente na literatura, proposta por Freund em 1957. As principais variáveis de entrada do modelo são: desvio padrão ( $\sigma$ ), tamanho da amostra ( $n$ ), número de amostras ( $m$ ) e índices de capacidade ( $C_P$  e  $C_{PK}$ ). E as variáveis de saída que serão observadas para medir o desempenho do processo são: FAR e ARL.

Duas hipóteses foram elaboradas considerando estas variáveis respostas e a problemática de pesquisa.

*H<sub>1</sub>: o desempenho do gráfico modificado depende do fato de o desvio padrão ser conhecido ou estimado.*

*H<sub>2</sub>: o grau de capacidade do processo interfere diretamente nos resultados das medidas de desempenho do gráfico modificado.*

Espera-se, com os modelos propostos, responder a essas duas hipóteses e compreender a relação prática entre as variáveis em estudo, validando a sua importância na aplicação em processos de manufatura.

Apesar de existir uma possível relação da automação dos processos, indústria 4.0 e aperfeiçoamento dos processos com redução da sua variabilidade instantânea (aumento dos índices de capacidade), este trabalho não abordará essa interação com mais detalhes. Essas questões ficam como sugestão para trabalhos futuros.

### **1.3 Justificativa**

O gráfico de controle modificado é uma ferramenta importante para o monitoramento de processos industriais altamente capazes (MOHAMMADIAN e AMARI, 2012; OPRIME e

MENDES, 2017). Esse tipo de processo, devido a automação tecnológica, tem se tornado cada vez mais frequente, o que traz à atualidade o tema.

Woodall e Faltin (2019) enfatizam que apesar de ter sido desenvolvido há muitos anos (década de 1950), o gráfico modificado pode ter grande valor na prática nos dias atuais. Isto porque ao permitir a variação da média dentro de uma faixa de valores, o número de alarmes falsos “irrelevantes” para o processo diminui, isto é, mudanças que não comprometem o índice de itens não conformes do processo passam a ser toleradas, e apenas mudanças genuinamente importantes passam a ser sinaladas, o que, por senso comum, é benéfico.

Além disso, o uso do gráfico modificado reduz o número de interferências no processo, se comparado aos gráficos de Shewhart, o que pode resultar em redução de custos e de tempo, tornando o trabalho justificável em termos práticos.

Apesar da relevância do tema, pouco se conhece sobre as propriedades desse gráfico. Até hoje não foram encontrados estudos sobre os efeitos da estimação do desvio padrão e da interferência dos índices de capacidade no desempenho do gráfico modificado. Essa lacuna na literatura abriu espaço para o presente trabalho.

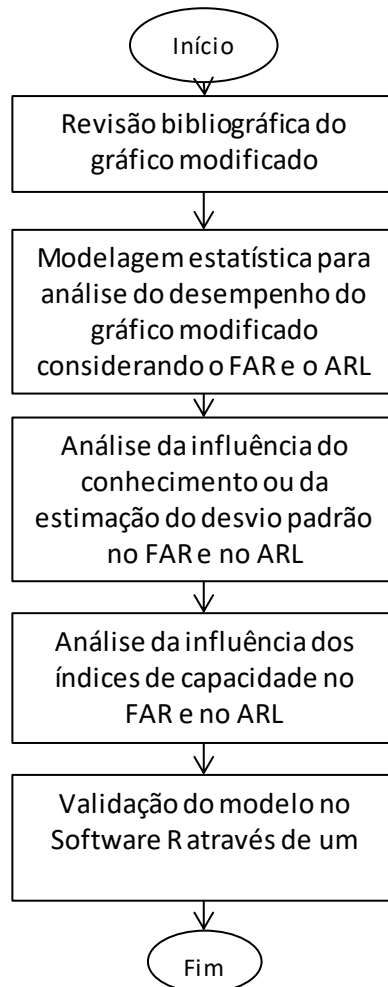
#### **1.4 Estrutura da Pesquisa**

O presente trabalho será dividido em três grandes etapas:

- 1) Revisão bibliográfica do gráfico modificado: esta etapa é de extrema importância, visto que já existe um conceito estatístico para esse gráfico, não sendo objeto de interesse elaborar algo inteiramente novo, mas sim adequar o conhecimento existente para ampliar sua aplicabilidade.
- 2) Elaboração de modelos estatísticos que avaliem o desempenho do gráfico modificado para três cenários: no primeiro o desvio padrão é conhecido, já no segundo ele precisa ser estimado e, no terceiro os índices de capacidade são incorporados. Pode-se dizer que esta é a contribuição, propriamente dita, deste trabalho para a literatura.
- 3) Validação dos modelos criados por meio da ilustração de um exemplo hipotético que demonstre a serventia dos modelos propostos.

A Figura 1.2 sintetiza essas etapas.

Figura 1.2. Estruturação da pesquisa



Fonte: autoria própria

## 2 MÉTODOS

Metodologia de pesquisa é o estudo sistemático e lógico dos métodos empregados nas ciências (GERHARDT e SILVEIRA, 2009). Ela é vista, por muitos pesquisadores, como a validade dos resultados de uma pesquisa (MIGUEL et al, 2012), isto é, uma pesquisa é considerada de caráter científico desde que obedeça algum critério metodológico.

Os procedimentos básicos propostos pelo estudo dos métodos podem ser divididos em cinco grandes etapas: determinação da abordagem da pesquisa; determinação do tipo de pesquisa; método escolhido para a pesquisa; projeto de pesquisa; elaboração da pesquisa. Neste trabalho procuramos seguir todos esses procedimentos, os quais serão melhor esclarecidos nas próximas seções.

### 2.1 Abordagem de pesquisa

Esta pesquisa tem caráter quantitativo, isso significa que os resultados apresentados serão expressos numericamente (de forma quantificada). Além da mensurabilidade, outros fatores importantes para definir uma pesquisa quantitativa são: causalidade, generalização e replicação (MIGUEL et al, 2012). A definição desses termos, segundo Miguel et al (2012) está exposta na Quadro 3.1.

Quadro 2.1. Características de uma pesquisa quantitativa e suas descrições

<b>Características</b>	<b>Descrições</b>
<b>Mensurabilidade</b>	Está relacionada com a capacidade de se medir as variáveis de forma a produzir dados para a realização do teste de hipóteses.
<b>Causalidade</b>	Está relacionada com a habilidade de estabelecer relações causais entre as variáveis dependentes e independentes.
<b>Generalização</b>	Está relacionada com a possibilidade de os resultados atingidos serem generalizados para além da própria pesquisa.
<b>Replicação</b>	Está relacionada com a possibilidade de a pesquisa apresentar os mesmos resultados quando repetida por outro pesquisador.

Fonte: Elaborado pelo autor

Fonseca (2002) define a pesquisa quantitativa como aquela centrada na objetividade e que emprega a linguagem matemática para descrever as causas de um dado fenômeno, a relação entre as variáveis, etc.

O presente trabalho tem como objetivo construir um modelo matemático que retrate o fenômeno do controle estatístico do processo quando há possibilidades de aplicação do gráfico de aceitação. Mais especificamente, esse modelo calcula as medidas de desempenho do gráfico modificado (FAR e ARL) considerando os casos quando o desvio padrão é conhecido e estimado e relacionado essas medidas aos índices de capacidade do processo.

## **2.2 Tipo de Pesquisa**

Segundo Miguel et al (2012) uma pesquisa que pretende analisar modelos quantitativos, com o objetivo principal de compreender o processo modelado ou explicar suas características, é considerada de natureza axiomática descritiva. À vista disso, a partir de um problema idealizado (não observado) são criadas teorias, sustentadas por métodos matemáticos, estatísticos e computacionais com objetivo de obter melhor compreensão do problema em estudo.

Apesar do controle estatístico ser realizado com base em um fenômeno real, observado e medido, esta dissertação está focada em compreender um modelo teórico existente na literatura sobre o gráfico modificado e, a partir dele, desenvolver outros modelos estatísticos que utilizem as variáveis de interesse da pesquisa, a fim de que, futuramente, ele possa ser utilizado empiricamente para monitoramento de processos. Por isso denominamos a natureza desta pesquisa como axiomática descritiva.

## **2.3 Método de Pesquisa**

A identificação do método de pesquisa adequado para investigação de um problema ou fenômeno está diretamente relacionado com as soluções que são desejadas para tal. Dessa



forma, um mesmo fenômeno pode ser estudado a partir de diversos métodos e tipos de pesquisa, dependendo assim do foco desejado pelo pesquisador e de outras questões, tais como: a natureza do problema e de sua formulação, a base teórica e cultural que o sustentaram até o momento do estudo, a proximidade entre o observador e o objeto de análise, entre outras (BERTO e NAKANO, 2000).

O tema gráfico modificado pode ser estudado por vários dos métodos de pesquisa citados por Filippini (1997), por exemplo:

- Modelagem: fazer modelos matemáticos e estatísticos visando aprofundar o tema com enfoque em determinadas variáveis;
- Simulação: usar de recursos computacionais para simular modelos propostos na literatura e avaliar seus efeitos sobre um dado fenômeno;
- Estudo de caso: identificar empresas que utilizam o controle estatístico do processo, mais especificamente, o gráfico modificado e analisar as consequências dessa aplicação na organização;
- Experimento: analisar o antes e o depois de uma organização em processo de implantação do gráfico modificado no monitoramento de seus processos.

Não existe um método absoluto, isto é, que seja completo em si mesmo. Pode-se dizer que a ciência é formada por inúmeras pesquisas científicas as quais se completam e ampliam a visão do fenômeno estudado. Por isso, a escolha de um método específico para condução de uma pesquisa sempre estará atrelada há uma série de restrições e riscos.

O método de pesquisa escolhido para estruturação deste trabalho foi a modelagem. As seções a seguir tratarão de descrever com mais detalhes este método, expor os riscos e restrições desta escolha e apresentar características particulares dos modelos a serem propostos.

### **2.3.1 Modelagem**

A modelagem é a arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los a partir de teorias disponíveis, expondo suas soluções em uma linguagem compreensível para o mundo real e comprovando-as com base nos dados disponíveis (BASSANEZI, 2002). Para Rosa e Orey (2007, p. 12) “a modelagem pode ser descrita como

um processo que envolve a obtenção, a análise crítica e a validação de um modelo que representa um sistema retirado da realidade”.

Miguel et al (2012) esclarecem que a modelagem busca estabelecer relações matemáticas entre variáveis relevantes para o problema real, as quais são definidas e selecionadas pelo pesquisador. Um modelo matemático pode ser formado por expressões numéricas, equações algébricas, gráficos, Tabelas, etc. (BIEMBENGUT e HEIN, 2005). Para o autor, a elaboração de um modelo está relacionada com o nível de conhecimento matemático do pesquisador.

O modelo que será desenvolvido no presente trabalho é um modelo matemático que utiliza de expressões numéricas para descrever um fenômeno estatístico. Dessa forma, além do conhecimento algébrico matemático, a elaboração do mesmo envolve certa destreza no âmbito estatístico.

### **2.3.2 Riscos e Restrições**

Este método é eficiente para resolução de problemas reais que, por serem complexos, necessitam de um modelo matemático para descrevê-lo, o qual seja passível de ser solucionado (MIGUEL et al., 2012). Porém, como já foi dito, há riscos e restrições inerentes a ele, tais como:

- Risco de não avaliar todas as variáveis dependentes e independentes relevantes, produzindo resultados incompletos;
- Risco de construir modelos muito complexos;
- Risco de ocultar partes do modelo que são essenciais para sua replicação;
- Restrição de não utilizar a modelagem em conjunto com outros métodos de pesquisa. Como, por exemplo, a simulação, a qual validaria a veracidade do modelo criado.

No decorrer do trabalho, muita atenção será dispendida na construção dos modelos, visando minimizar os riscos apresentados acima. Porém, a restrição apresentada foi imposta pela autora visando delimitar a pesquisa atual, ficando como oportunidade de pesquisa para outros pesquisadores.

### 2.3.3 Modelos estatísticos propostos para o gráfico modificado

Os modelos estatísticos esperados como resultado deste trabalho foram desenvolvidos exclusivamente para o gráfico modificado. Para o desenvolvimento desses modelos foram pré-definidas as variáveis dependentes e independentes relevantes. Além disso, foram considerados alguns conceitos e fórmulas já existentes para o gráfico de Shewhart e para o gráfico de aceitação/modificado proposto por Freund (1957).

Os modelos propostos consideram a Fase I do CEP, pois é nessa fase que as linhas de controle do gráfico são definidas (considerando se o desvio padrão é conhecido ou estimado). Mas como são modelos estatísticos que calculam as medidas de desempenho (FAR e ARL) do gráfico modificado, pode-se afirmar que eles serão aplicados durante a fase de monitoramento (Fase II), e que por isso eles são fundamentados na equação que descreve a probabilidade de a média amostral cair fora dos limites, como mostra a equação 1.

$$1 - P(LCL \leq \bar{x} \leq UCL) \quad (1)$$

Onde, LCL e UCL são os limites inferior e superior de controle, respectivamente, e  $\bar{x}$  é a média amostral coletada naquele momento do monitoramento.

As variáveis de entrada de interesse para os modelos, além dos limites de controle e da média amostral, são: o desvio padrão conhecido ( $\sigma_0$ ), o desvio padrão estimado ( $\hat{\sigma}$ ) e os índices de capacidade ( $C_p$  e  $C_{pk}$ ). Já as variáveis de saída são: FAR e ARL.

Além dessas, algumas outras variáveis serão introduzidas aos modelos durante o desenvolvimento, tais como: média populacional ( $\mu$ ), variável padrão normalizada ( $z$ ), tamanho da amostra ( $n$ ), número de amostras recolhidas do processo ( $m$ ), limites de especificação superior e inferior (LSL e USL) e função densidade probabilidade ( $\Phi$ ).

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 Revisão Bibliográfica Sistemática

Por meio de uma revisão bibliográfica sistemática sobre o tema gráfico modificado e gráfico de aceitação foram encontradas apenas nove publicações em revistas científicas internacionais, sendo que oito delas se encontram na base do *Web of Science*. Nesta pesquisa foram supressos estudos contidos em livros e artigos publicados em congressos nacionais; e apenas foram considerados artigos referentes ao contexto de engenharia e estatística de probabilidade, excluindo, assim, publicações nas demais áreas de conhecimento. As palavras-chave (*strings*) utilizadas foram: *acceptance control chart*; *acceptance control*; *acceptance quality*.

O artigo mais recente sobre o tema foi escrito por Woodall e Faltin em 2019. Os demais foram publicados nos seguintes anos: 2013, 2005, 2000, 1998, 1994, 1992, 1990 e 1981, tendo apenas uma publicação em cada ano.

Em 1990, Wesolowsky (1990) tratou o gráfico de controle de aceitação (ACC) para dois processos, ou duas características de um produto, que são controlados para que haja conformidade simultânea aos limites de especificação. Já em 1992, o autor publicou outro texto estudando o ACC para processos ou características independentes que precisam, simultaneamente, estar de acordo com as especificações (WESOLOWSKY, 1992). Já em 1994, Steiner e Wesolowsky (1994) projetaram o ACC para produtos que tem duas ou mais características correlacionadas, as quais também devem estar de acordo com a especificação para que sejam aceitos.

Mhatre, Scheaffer e Leavenworth (1981) estudaram o ACC para variáveis que seguem a distribuição de Poisson. Enquanto que Chou, Chen e Liu (2005) utilizaram a distribuição Burr para determinar os limites de controle ou tamanho da amostra apropriado para o ACC quando não há normalidade nas variáveis.

Wu (1998) apresentou um ACC adaptado, no qual o tamanho da amostra pode ser ajustado durante o controle do processo. Já Holmes e Mergen (2000) propuseram a combinação

do ACC com o gráfico EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*). Mohammadian e Amari (2012) desenvolveram um modelo estatístico econômico para projeção do ACC.

Por fim, Woodall e Faltin (2019) abordaram a necessidade de se repensar sobre o projeto e avaliação dos gráficos de controle, visto que ultimamente os processos de manufatura têm sido monitorados por diferentes tipos de gráficos, simultaneamente, gerando um número consideravelmente grande de alarmes falsos, o que, por senso comum deve ser evitado. Woodall e Faltin (2019) citam que apesar de o gráfico modificado e de aceitação serem ferramentas antigas (criadas na década de 1950), eles podem ser de grande valor para o monitoramento de processos atuais que sejam altamente capazes, visto que eles priorizam detectar rapidamente apenas mudanças de importância prática para o processo, minimizando assim o número de alarmes “irrelevantes” para o mesmo.

### **3.2 Revisão da literatura sobre os gráficos modificado e de aceitação**

O termo gráfico de aceitação foi utilizado pela primeira vez por Freund, em 1957. Entende-se que a proposta do autor era estruturar um gráfico que priorizasse o monitoramento do processo em termos de aceita-lo ou rejeita-lo, de acordo com o nível de produtos não conformes produzidos. Já o termo modificado foi utilizado por Hill em 1956, no sentido de admitir limites de controle modificados nos gráficos de controle, de acordo com a necessidade de restrição do deslocamento da média em alguns processos em específico.

A ideia em comum entre os dois autores é que processos altamente capazes possuem um desvio natural muito inferior aos limites impostos pelas especificações e, por essa razão, certa variação da média do processo pode ser tolerada sem que haja prejuízos a sua qualidade em termos de produção de itens não conformes (HILL, 1956; FREUND 1957). Ou seja, tanto Freund (1957) quanto Hill (1956) discordam dos gráficos  $\bar{X}$  de Shewhart no sentido de manter rigidamente a estabilidade da média em processos altamente capazes.

Woodall (1985) concorda com essa ideia quando afirma que pequenas alterações no processo, percebidas ao longo do tempo, podem apresentar pouca ou nenhuma importância prática para o mesmo. Do mesmo modo Mohammadian e Amari (2012) e Oprime e Mendes (2017), sugerem que os limites de controle sejam um pouco relaxados quando os processos forem altamente capazes, permitindo que a média varie dentro de uma determinada faixa de

valores. Para esses autores, as alterações na média devem ser avaliadas sob o ponto de vista prático, julgando se os benefícios das intervenções no processo são superiores aos custos decorrentes dessas ações.

Existem processos que são altamente capazes por sua natureza, como, por exemplo, o processo de estamparia, cujo fator dominante de variabilidade é o setup da máquina. Porém, há processos que por meio de melhorias contínuas atingiram um nível de variabilidade, dentro dos subgrupos, bastante pequena, alcançando índices de capacidade significativamente altos (ISO7870, 2012).

Freund (1957) desenvolveu o gráfico de aceitação com o intuito de monitorar a média de processos altamente capazes a partir do controle mútuo da probabilidade dos erros tipo I e tipo II ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Para tanto ele propôs duas maneiras de se calcular os limites de controle do gráfico, sendo que a primeira considera  $\alpha$  e a segunda,  $\beta$ . De acordo com o autor, para ser possível controlar simultaneamente  $\alpha$  e  $\beta$ , esses dois possíveis limites de controle devem ser iguais. Para tanto, Freund (1957) recomendou utilizar na Fase I um tamanho específico de amostras ( $n_x$ ), o qual é calculado com base nas probabilidades do erro tipo I e do tipo II, e das taxas de não conformes aceitáveis ( $\delta$ ) e inaceitáveis ( $\gamma$ ), como mostra a equação 2.

$$n_x = \left( \frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_\delta - Z_\gamma} \right)^2 \quad (2)$$

Onde  $Z_\alpha$ ,  $Z_\beta$ ,  $Z_\delta$  e  $Z_\gamma$  representam o quantil  $(1 - \alpha)$ ,  $(1 - \beta)$ ,  $(1 - \delta)$ ,  $(1 - \gamma)$  da distribuição normal padrão, respectivamente.

Contudo, estudos mais recentes consideram que essas duas formas de se calcular os limites de controle originam dois gráficos distintos, pois nem sempre é possível obter a igualdade entre eles, posto que eles dependem de parâmetros diferentes e porque, geralmente, esse tamanho em específico de amostra é grande e inviável. Montgomery (2009) e Woodall e Faltin (2019) se referem ao gráfico focado em  $\alpha$  como gráfico modificado, e ao gráfico embasado em  $\beta$  como gráfico de aceitação. Essa análise individual de cada gráfico também será utilizada no desenvolvimento deste trabalho.

Sabe-se que a primeira fase (Fase I) da aplicação de um gráfico de controle consiste no projeto do gráfico (suas linhas) de acordo com as condições impostas pelo processo (em estado de controle) e pelo gestor. As principais linhas dos gráficos modificado e de aceitação são:

média da variável de controle ( $\mu$ ), limites de controle, limites de especificação, médias limites toleráveis e, para o gráfico de aceitação, as médias intoleráveis.

Assumindo que a variável de controle segue uma distribuição normal ( $X \sim N(\mu, \sigma)$ ), tanto a média ( $\mu$ ) quanto o desvio padrão do processo ( $\sigma$ ) podem ser conhecidos ou estimados. Os limites de especificação são definidos pelo gestor. Os limites de controle e as médias limites toleráveis e intoleráveis devem ser calculados (os cálculos serão apresentados nas próximas seções).

### 3.2.1 Médias limites toleráveis ( $\mu_U$ e $\mu_L$ ) e intoleráveis ( $\mu_{1,U}$ e $\mu_{1,L}$ )

Segundo Freund (1957) as médias limites toleráveis ( $\mu_U$  e  $\mu_L$ ) e intoleráveis ( $\mu_{1,U}$  e  $\mu_{1,L}$ ) podem ser especificadas com base em experiências passadas ou podem ser calculadas. Para calculá-las é preciso conhecer a taxa máxima de itens não conformes aceitável ( $\delta$ ) e uma taxa específica de unidades não conformes indesejável ( $\gamma$ ), além dos limites de especificação e o desvio padrão do processo (veja as equações de 3 a 6).

$$\mu_U = USL - z_\delta * \sigma_0 \quad (3)$$

$$\mu_L = LSL + z_\delta * \sigma_0 \quad (4)$$

$$\mu_{1,U} = USL - z_\gamma * \sigma_0 \quad (5)$$

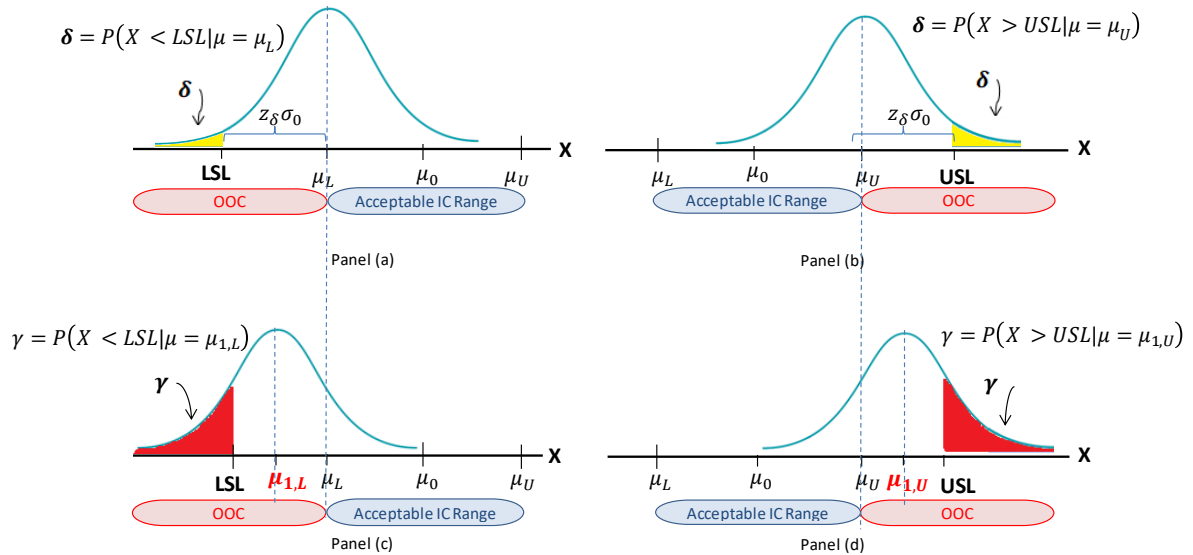
$$\mu_{1,L} = LSL + z_\gamma * \sigma_0 \quad (6)$$

A taxa máxima de produtos não conformes aceitável são essenciais para determinar as médias limites toleráveis, as quais definem a faixa de valores permitida para a variação da média do processo de maneira segura. Já a taxa específica de produtos não conformes indesejável aponta para as médias que o gestor deseja ao máximo evitar, caso a média do processo se desloque para esses limites intoleráveis em específico, há indicação de que o processo está produzindo muitos itens defeituosos, precisando assim de uma intervenção urgente.

Enquanto a média do processo estiver variando dentro da faixa tolerável ( $\mu_U$  e  $\mu_L$ ), ele deverá ser considerado aceito (ou sob controle). Consequentemente, um processo deve ser rejeitado (ou ser considerado fora de controle) quando sua média se deslocar para fora dessa faixa tolerável (mesmo que não ultrapasse os limites intoleráveis ( $\mu_{1,U}$  e  $\mu_{1,L}$ )), visto que a produção de itens não conformes é superior ao índice considerado como aceitável.

Essa relação entre as médias limites e as regiões de aceitação e rejeição do gráfico pode ser melhor compreendida através da Figura 3.1. Considere que  $X$  seja a característica da qualidade a ser controlada no processo, a qual segue uma distribuição normal.

Figura 3.1. Definição das taxas ( $\delta$  e  $\gamma$ ) de itens não conformes.



Fonte: autoria própria

Com base na Figura 3.1, Painéis (a e b), é possível perceber que se a média do processo se desloca para um das médias limites toleráveis, a produção de itens não conformes estará no limite aceitável pelos gestores. Já os Painéis (c e d) mostram que o deslocamento da média para os valores indesejáveis ( $\mu_{1,U}$  e  $\mu_{1,L}$ ) indicam uma produção exacerbada de produtos não conformes igual ao valor considerado crítico pelos gestores. Além disso, a Figura 3.1. deixa claro que a região de aceitação é demarcada pelas médias toleráveis, e qualquer área externa a esta é considerada como rejeitável (ou fora de controle).

### 3.2.2 Limites de Controle e os erros tipo I e tipo II

Como já foi dito na seção 3.2, os gráficos modificados e de aceitação se diferem no fato de o primeiro focar na probabilidade do erro tipo I e, do segundo focar na probabilidade do erro tipo II. Isso acontece pois os limites de controle do gráfico modificado ( $UCL$  e  $LCL$ ) são calculados com base em  $\alpha_{nom}$ , e os limites de controle do gráfico de aceitação ( $UCL_{acc}$  e  $LCL_{acc}$ ) dependem de  $\beta_{nom}$  para serem calculados. As equações 7, 8, 9 e 10 expõem os cálculos dos limites de controle relativos a esses dois gráficos.



$$UCL = \mu_U + z_{\alpha_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = USL - z_{\delta} \sigma_0 + z_{\alpha_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

$$LCL = \mu_L - z_{\alpha_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = LSL + z_{\delta} \sigma_0 - z_{\alpha_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

$$UCL_{acc} = \mu_{1,U} - z_{\beta_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = USL - z_{\gamma} \sigma_0 - z_{\beta_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

$$LCL_{acc} = \mu_{1,L} + z_{\beta_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = LSL + z_{\gamma} \sigma_0 + z_{\beta_{nom}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (10)$$

Sabe-se que para ambos os gráficos a média do processo não precisa permanecer estável em um valor nominal, podendo variar dentro de uma faixa de valor delimitada pelas médias limites toleráveis ( $\mu_U$  e  $\mu_L$ ). Porém, a singularidade do gráfico modificado está no fato de ele controlar a probabilidade de o processo estar entre as médias toleráveis e o gráfico erroneamente sinalizar uma mudança além do aceitável (essa é a probabilidade do erro tipo I). Enquanto que o gráfico de aceitação busca ter pleno controle da probabilidade do processo estar fora de controle, mas o gráfico erradamente não sinalizar uma mudança da média superior aos limites intoleráveis (esse é o erro tipo II).

É importante lembrar que a situação ideal (de acordo com Freund (1957)) é aquela onde é possível monitorar tanto  $\alpha_{nom}$  quanto  $\beta_{nom}$  a partir de um único gráfico, para isso, como já foi dito, é preciso que  $LCL = LCL_{acc}$  e  $UCL = UCL_{acc}$ .

### 3.3 Estimação de parâmetros e seus efeitos no desempenho do gráfico de controle

Os gráficos de controle são ferramentas do CEP que visam controlar processos de manufatura através do monitoramento de algumas de suas características (variáveis) da qualidade. Para tanto, é preciso conhecer a distribuição de probabilidade dessas variáveis e, consequentemente, seus parâmetros. Comumente assume-se que a variável ( $X$ ) a ser controlada segue uma distribuição normal ( $X \sim N(\mu, \sigma)$ ), assim os parâmetros a serem monitorados são a média e o desvio padrão. Contudo, na maioria das vezes, esses parâmetros são desconhecidos necessitando ser estimados antes do gráfico ser projetado e aplicado ao processo (CHAKRABORTI, 2006).

A estimação da média e do desvio padrão é feita a partir de “ $m$ ” amostras de tamanho “ $n$ ”, as quais são retiradas do processo em controle durante a Fase I do gráfico de controle (JARDIM; CHAKRABORTI; EPPRECHT, 2019; SALEH, et al, 2015; JONES-FARMER et al, 2014). Uma vez que a estimação é feita a partir de dados amostrais, existe uma variabilidade nos dados com relação ao processo em sua totalidade. Essa variabilidade é conhecida como “*practitioner-to-practitioner variability*” (SALEH, et al, 2015) visto que cada usuário do gráfico pode obter uma amostra diferente. Assim, quando os parâmetros são estimados, os limites de controle se tornam condicionados a essas estimativas e algumas propriedades operacionais do gráfico de controle, como por exemplo, o FAR e o ARL, ficam comprometidas (CHAKRABORTI, 2006).

Ainda de acordo com Chakraborti (2006), alguns dos efeitos da estimação de parâmetros no cálculo do FAR, é o aumento, às vezes substancial, do número de alarmes falsos, o que resulta em perda de tempo e de dinheiro. Além disso, tanto FAR quanto ARL se tornam variáveis aleatórias, que são representadas por distribuições de probabilidade, as quais possuem seus próprios parâmetros ( $\mu, \sigma$ ). Isso pode comprometer a qualidade dessas medidas, visto que a média de FAR e de ARL pode se distanciar significativamente do valor desejado (obtido no caso onde os parâmetros são conhecidos).

A análise dos efeitos da estimação de parâmetros no desempenho do gráfico de controle pode ser feita com base em duas perspectivas, segundo Jardim, Chakrabort e Epprecht (2019), são essas: perspectiva condicional e incondicional.

A perspectiva condicional leva em consideração a variabilidade *practitioner-to-practitioner* (usuário-para-usuário), examinando o desempenho de cada gráfico de controle em sua individualidade (analisando um gráfico com base na estimativa do parâmetro encontrada). Isto é, o desempenho do gráfico fica condicionado ao valor do estimador, por isso denomina-se o FAR condicionado como CFAR, e o ARL condicionado como CARL (JARDIM; CHAKRABORTI; EPPRECHT, 2019).

Já a perspectiva incondicional não leva em consideração a variabilidade *practitioner-to-practitioner*, visto que ela analisa o desempenho médio de uma infinidade de gráficos de controle, cada um correspondendo a um conjunto de parâmetros estimados a partir de amostras de um mesmo processo (CHAKRABORTI, 2000).

No presente trabalho ambas as perspectivas serão consideradas para avaliar o desempenho do gráfico modificado. Porém, neste caso, apenas o desvio padrão será estimado, considerando, assim, a média do processo é conhecida. O estimador escolhido e recomendado para o desvio padrão é o desvio padrão agrupado ( $S_p$ ), pois Mahmoud (2010) afirma que é preferível usar esse estimador ao invés do tradicional  $\bar{S}/c_4$ .

O desvio padrão agrupado ( $S_p$ ) é calculado pela raiz quadrada da média das variâncias amostrais referentes às amostras recolhidas na Fase 1 ( $S_p = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2}$ , onde  $S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \bar{X}_i)^2$ ).

## 4 DESEMPENHO DO GRÁFICO MODIFICADO

Após a fase de projeto do gráfico de controle, inicia-se a fase de monitoramento (Fase II). É nesta fase que ocorre o controle, propriamente dito, do processo, avaliando, por meio de amostras, se há presença de causas especiais que o tirem de sua condição de controle. Neste caso, o gráfico alerta o gestor para que alguma intervenção seja feita de forma a retomar seu estado de controle.

Uma vez que a fase de monitoramento é feita com base em amostras, os erros amostrais são inevitáveis. Assim, uma amostra recolhida pode indicar que o processo está sob controle, quando na verdade ele não está, ou vice-versa. Por essa razão, é importante que o gestor sempre avalie o desempenho do gráfico de controle, para minimizar intervenções desnecessárias no processo e/ou a produção exacerbada de unidades não conformes.

De acordo com Montgomery (2016) o ARL (*average run length*) é uma medida confiável para calcular o desempenho do gráfico de controle na Fase II. E, devido ao fato de o cálculo do ARL depender de outro índice muito importante, o FAR (*false alarm rate*), essas duas medidas serão abordadas com mais detalhes nas próximas seções.

### 4.1 Taxa de Alarmes Falsos (FAR) com desvio padrão conhecido

O gráfico de controle proposto por Shewhart foi projetado para emitir um sinal todas as vezes que a média amostral (coletadas na Fase II) for plotada fora dos limites de controle (CHAKRABORTI, 2000). Quando este fenômeno ocorre, entende-se que alguma causa especial está atuando no processo, tirando sua estabilidade e, conseqüentemente, colocando-o em condição fora de controle. Freund (1957) afirma que o gráfico de Shewhart funciona como um guia para o gestor indicando todas as vezes que causas especiais atuam no processo.

Uma medida de desempenho interessante para o gráfico de controle é a taxa de alarmes falsos (FAR). Chakraborti (2000) define essa taxa como a probabilidade do gráfico emitir um sinal, quando de fato não houve mudanças no processo, o que também é conhecido como probabilidade do erro tipo I ( $FAR = \alpha$ ).

Considerando o gráfico  $\bar{X}$  de Shewhart, só existe uma situação na qual um sinal incorreto (falso alarme) é gerado: um ponto é plotado fora dos limites de controle, embora a média do processo não tenha se movido (isto é, permanece centralizada no valor nominal,  $\mu = \mu_0$ ).

Contudo, para o gráfico de controle modificado existem inúmeras taxas de alarmes falsos possíveis, visto que a média do processo pode variar dentro de uma faixa de valores sem que ele seja rejeitado ou considerado fora de controle. Nesses casos, um alarme verdadeiro ocorre toda vez que o gráfico alerta condição fora de controle para um processo cuja média tenha se deslocado para fora das médias limites toleráveis. Consequentemente, um falso alarme é obtido toda vez que um sinal indica condição fora de controle e a média ainda está dentro do intervalo permitido ( $\mu_L < \mu < \mu_U$ ). Como existem inúmeros pontos permissíveis para a localização da média dentro desse intervalo, para cada posição assumida há uma nova probabilidade de um falso alarme. Ou seja, existem inúmeros  $FAR$ 's ou ( $\alpha$ 's) possíveis para este gráfico.

Como o gráfico modificado é aplicado em processos capazes, espera-se que a probabilidade de a média amostral cair fora dos limites de controle seja extremamente baixa quando o processo estiver centralizado na média nominal, nesse caso tem-se que  $FAR$  possui seu menor valor ( $FAR_{min} = P(\bar{X} < LCL \text{ ou } \bar{X} > UCL | \mu = \mu_0)$ ). À medida que a média vai se distanciando do valor nominal, a probabilidade de ocorrer um falso alarme aumenta. Quando a média alcança um dos limites toleráveis ( $\mu_L$  ou  $\mu_U$ ), apesar de o processo ainda ser considerado aceito (ou em controle), pode-se dizer que a máxima taxa de alarmes falsos é atingida (isto é,  $FAR_{max} = P(\bar{X} < LCL | \mu = \mu_L)$  ou  $FAR_{max} = P(\bar{X} > UCL | \mu = \mu_U)$ ). As equações 11 e 12 sintetizam o que foi dito no parágrafo acima.

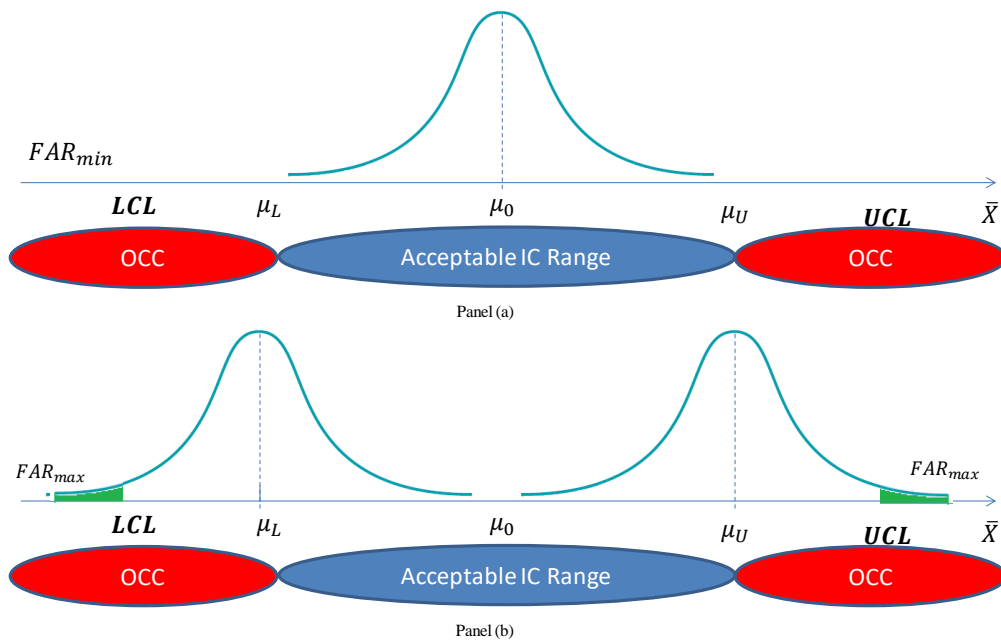
$$FAR_{max} = 1 - P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL | \mu = \mu_U \text{ ou } \mu = \mu_L) \quad (11)$$

$$FAR_{min} = 1 - P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL | \mu = \mu_0) \quad (12)$$

A Figura 4.1, Painel (a) e Painel (b) mostram os dois momentos nos quais a taxa de alarmes falsos mínima e máxima são atingidas, respectivamente.

É razoável admitir que quando o gestor utiliza esse gráfico ele deseja monitorar a máxima probabilidade de um falso alarme, visto ser o momento mais crítico para o processo. Assim, pode-se dizer que a probabilidade do erro tipo I definida pelo gestor ( $\alpha_{nom}$ ) é igual a  $FAR_{max}$  ( $FAR_{max} = \alpha_{nom}$ ).

Figura 4.1. Taxa de alarme falso mínima e máxima considerando o gráfico modificado.

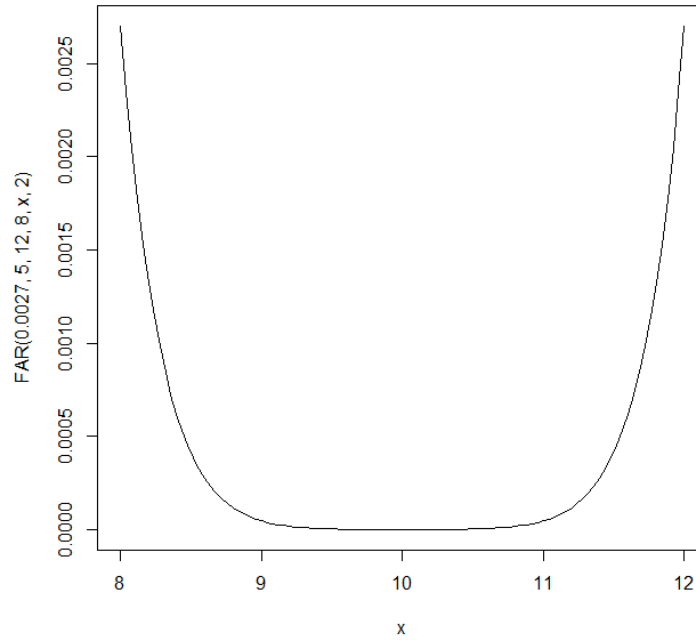


Fonte: autoria própria

Visto que a taxa de alarmes falsos assume inúmeros valores dentro da zona aceitável, é possível encontrar uma curva que caracterize o comportamento dessa taxa para o gráfico modificado. Além do mais, pode-se afirmar que essa curva é simétrica, pois  $FAR_{min}$  fica no centro entre os  $FAR_{max}$  (visto que  $\mu_0$  é exatamente o ponto médio entre  $\mu_L$  e  $\mu_U$ ). Contudo, é importante esclarecer que essa curva não indica que o FAR é uma variável aleatória, ela apenas aponta que para cada média assumida pelo processo existe um FAR de valor fixo. O FAR se torna uma variável aleatória quando ele depende de outra variável aleatória, mas nesta seção 4.1 estamos considerando que o desvio padrão e a média são conhecidos. A Figura 4.2 mostra um exemplo dessa curva. Para construí-la foram considerados os seguintes parâmetros e variáveis:  $\alpha_{nom} = 0,0027$ ,  $n = 5$ ,  $\mu_U = 12$ ,  $\mu_L = 8$  e  $\sigma_0 = 2$ .

Analisando a Figura 4.2, pode-se concluir que, para este processo, o  $FAR_{min}$  é um número muito próximo de zero ( $5,22e-07$ ) e o  $FAR_{max}$  se iguala à probabilidade do erro tipo I ( $\alpha_{nom}$ ) determinada pelo gestor (0,0027), como já foi afirmado anteriormente. Além disso, é possível visualizar o comportamento simétrico da curva, indicando que a taxa de alarmes falsos não depende da direção do desvio da média.

Figura 4.2. Curva da taxa de alarme falso para o gráfico de aceitação.



Fonte: autoria própria

Já foi dito que a atenção do gestor está na máxima probabilidade de ocorrer um falso alarme ( $FAR_{max}$ ) e não na mínima, visto que o processo está em iminência de sair de sua condição de controle quando sua média coincide com uma das médias limites toleráveis ( $\mu_L$  ou  $\mu_U$ ). Por conta desses fatores, a partir deste momento apenas as equações derivadas de  $FAR_{max}$  (equação **11**) serão consideradas.

Considerando as equações **7** e **8**, assumindo que a média do processo tenha se deslocado para o limite tolerável inferior ( $\mu = \mu_L$ ) e admitindo que a variável de interesse ( $X$ ) segue uma distribuição normal, isto é,  $\bar{X} \sim N(\mu_L, \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ , é possível normalizar a equação **11**, como mostra a equação **13**.

$$FAR_{max} = 1 - P\left(-z_{FAR_{max}} \leq Z \leq \frac{(\mu_U - \mu_L)}{\sigma_0} * \sqrt{n} + z_{FAR_{max}}\right) \quad (13)$$

A equação **13** pode ser simplificada tornando  $FAR_{max}$  função de delta. Esse delta representará a região aceitável do gráfico em termos de desvios padrões e será calculado pela razão entre a faixa permitida para variação da média do processo e o número de desvios padrões do processo, isto é,  $\Delta_{IC} = \frac{(\mu_U - \mu_L)}{\sigma_0}$ . Assim a equação de  $FAR_{max}$  pode ser reescrita, como mostra a equação **14**.

$$FAR_{max} = 1 - [\Phi(\Delta_{IC} * \sqrt{n} + z_{FAR_{max}}) - \Phi(-z_{FAR_{max}})] \quad (14)$$

Onde  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada padrão (c.d.f.).

Considerando que o gráfico de aceitação é utilizado para monitorar processos altamente capazes, é razoável assumir que  $\Delta_{IC} \geq 3$ . Assim, supondo que o gestor defina  $n = 4$  como um tamanho de amostra sensato para o processo, e levando em consideração o famoso limite 3-sigmas ( $z_{FAR_{max}} = 3$ ), tem-se que  $\Phi(\Delta_{IC} * \sqrt{n} + z_{FAR_{max}}) = \Phi(9) = 1$ . Nesse caso a equação **14** poderia ser reduzida à equação **15**.

$$FAR_{max} = \Phi(-z_{FAR_{max}}) \quad (15)$$

É interessante notar que a equação **15** equivale à equação da taxa de falsos alarmes do gráfico de Shewhart quando um processo unilateral é considerado. Lembre-se que no gráfico de Shewhart só existe um único FAR.

#### 4.2 Taxa de Alarmes Falsos com desvio padrão estimado

Como foi visto na seção anterior, existem diversos valores possíveis para a taxa de alarmes falsos (FAR) no caso dos gráficos modificado e de aceitação, devido ao fato de a cada deslocamento da média dentro da faixa aceitável existir um novo valor de FAR. Contudo, enquanto os parâmetros do processo são conhecidos, o FAR não é uma variável aleatória, visto não depender de nenhuma outra variável. Quando os parâmetros são estimados, os limites de controle ficam condicionados ao estimador e, conseqüentemente, a probabilidade de ocorrer um falso alarme passa a depender dessa estimativa. Assim, a taxa de alarmes falsos se torna uma variável aleatória condicionada (CFAR) ao estimador.

No presente trabalho considera-se que a média do processo é conhecida tanto no caso K quanto no caso U, assim apenas o desvio padrão é estimado no caso U. É importante lembrar que o estimador escolhido foi o desvio padrão agrupado ( $\hat{\sigma} = S_p$ ). Assim, matematicamente  $CFAR_{max}(S_p)$  pode ser definido a partir da equação **16**.

$$CFAR_{max}(S_p) = 1 - P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL | S_p \text{ e } \mu = \mu_L \text{ ou } \mu = \mu_U) \quad (16)$$

Ainda assumindo que a média do processo se deslocou para o limite tolerável inferior, ou seja,  $\mu = \mu_L$ , utilizando as equações **7** e **8** e considerando  $\Delta_{IC} = \frac{(\mu_U - \mu_L)}{\sigma_0}$ , chega-se a equação **17**.



$$\begin{aligned}
CFAR_{max}(S_p) &= 1 - P\left(-Z_{FAR_{max}} \frac{S_p}{\sigma_0} \leq Z \leq \left(\frac{\mu_U - \mu_L}{\sigma_0}\right) \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}} \frac{S_p}{\sigma_0}\right) \quad (17) \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\Delta_{IC} \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}} \frac{S_p}{\sigma_0}\right) - \Phi\left(-Z_{FAR_{max}} \frac{S_p}{\sigma_0}\right)\right]
\end{aligned}$$

Contudo, a equação **17** não é simples de ser resolvida, visto que ela apresenta o  $CFAR_{max}$  em função do desvio padrão agrupado ( $S_p$ ), cuja distribuição de probabilidade é complexa. Assim, para simplificar a fórmula de  $CFAR_{max}(S_p)$  é preciso considerar a razão  $S_p/\sigma_0$ , pois sabe-se que  $Y = m(n-1) S_p^2/\sigma_0^2$  e  $Y$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição bastante conhecida, a distribuição qui-quadrada ( $\chi_{m(n-1)}^2$ ) com  $m(n-1)$  graus de liberdade. Dessa forma, como  $Y$  está diretamente relacionado com o estimador  $S_p$  e  $CFAR_{max}$  tem relação direta com  $S_p$ , é possível facilitar a resolução da equação **17** colocando  $CFAR_{max}$  em função de  $Y$ , como mostra a equação **18**.

$$\begin{aligned}
CFAR_{max}(Y) &= 1 \quad (18) \\
&- \left[\Phi\left(\Delta_{IC} \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) - \Phi\left(-Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Similar à equação **14**, considerando um processo altamente capaz ( $\Delta_{IC} \geq 3$ ) e assumindo que  $\Delta_{IC} = 3$  e  $n = 4$  e  $Z_{FAR_{max}} = 3$ , tem-se que  $\Phi\left(\Delta_{IC} \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) = 1$ , reduzindo a equação de  $CFAR_{max}(Y)$ , como mostra a equação **19**.

$$CFAR_{max}(Y) = \Phi\left(-Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) \quad (19)$$

E, novamente, de forma similar à equação **15**, a equação **19** é equivalente ao falso alarme condicionado do gráfico  $\bar{X}$  unilateral de Shewhart quando o processo está em controle e o desvio padrão é desconhecido.

Calcular  $CFAR_{max}(Y)$  é uma ótima ferramenta, porém, pelo fato de  $Y$  ser função direta do número de amostras recolhidas do processo na Fase I ( $m$ ) e do tamanho dessas amostras ( $n$ ), análises gráficas de  $CFAR_{max}(Y)$  parametrizadas em  $m$  ou  $n$  ficam comprometidas, pois nesses casos a escala do gráfico iria variar, dificultando a formação de qualquer crivo. Além disso, o fato de o domínio de  $Y$  ser de zero a infinito  $[0, \infty]$  também prejudica a elaboração de alguns gráficos.

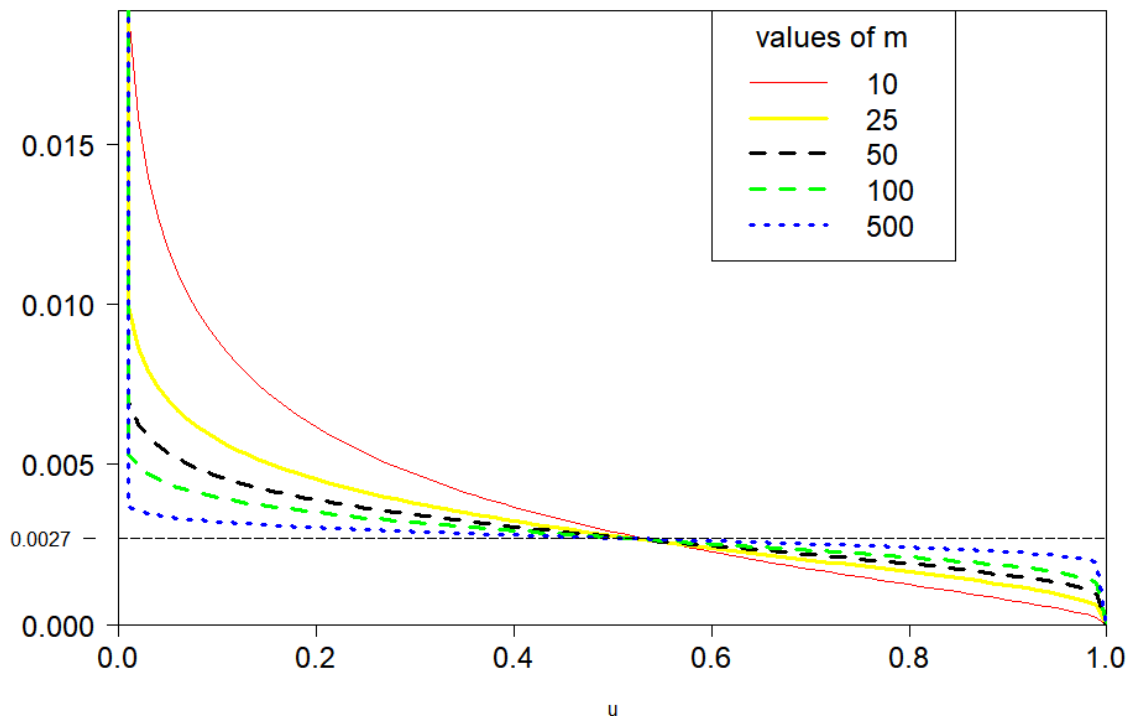
Assim, em certos casos, uma estratégia que pode ser útil é a conversão de  $Y$  em uma variável aleatória com distribuição uniforme padrão ( $U$ ), isso porque a relação de  $CFAR_{max}$  com os valores de  $m$  e  $n$  se tornaria implícita e o intervalo de análise diminuiria, visto que o domínio de  $U$  é de zero a um  $[0,1]$ . Esse procedimento estatístico só é possível devido a uma técnica conhecida como transformação integral de probabilidade (*probability integral transformation*), a qual permite transformar qualquer variável aleatória em uma distribuição uniforme padrão. Nesse caso,  $U = F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(Y)$  e  $Y = F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(U)$ . Assim, a equação **18** pode ser reescrita em função de  $U$ , como mostra a equação **20**.

$$CFAR_{max}(U) = 1 - \left( \Phi \left( \Delta_{IC} \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(U)}{m(n-1)}} \right) - \Phi \left( -Z_{FAR_{max}} \sqrt{\frac{F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(U)}{m(n-1)}} \right) \right) \quad (20)$$

Como o intervalo de valores possíveis de  $U$  varia entre 0 e 1, interpreta-se que cada décimo desse intervalo representa um decil da distribuição de  $Y$ . Assim, quando um gráfico de  $CFAR_{max}(U)$  é projetado, é possível fazer uma análise em termos de  $Y$ .

A Figura 4.3 mostra várias curvas de  $CFAR_{max}(U)$  parametrizadas por  $m$  para  $n = 5$ ,  $\Delta_{IC} = 3$  e  $FAR_{max} = 0,0027$ .

Figura 4.3. Curvas de  $CFAR_{max}$  em função da ordem do quantil ( $u$ ) de  $Y$ .



Fonte: autoria própria

A partir da Figura 4.3 é possível perceber claramente o efeito de  $m$  no desempenho do gráfico modificado quando o desvio padrão é estimado. Pode ser visto que as curvas de  $CFAR_{max}(U)$  se aproximam do valor nominal à medida que o valor de  $m$  aumenta (compare, por exemplo, as curvas para  $m = 10$  e  $m = 500$ ). Isso significa que a diferença entre a taxa de alarmes falsos nominal e a percebida (obtida com base na estimativa  $S_p$ ) é consideravelmente maior quando  $m$  é pequeno. Em outras palavras, a variabilidade de  $CFAR_{max}$  com relação ao valor esperado pode ser reduzida aumentando o número de amostras na Fase I.

#### 4.2.1 A distribuição de probabilidade $CFAR_{max}$

Uma vez que  $CFAR_{max}$  é uma variável aleatória, é importante conhecer sua distribuição de probabilidade. Por definição, sabe-se que uma função de distribuição acumulada (c.d.f.) é expressa, estatisticamente, como a probabilidade de uma variável aleatória ( $X$ ) ser menor ou igual a um número qualquer ( $x$ ) de sua distribuição, isto é,  $F_X(x) = P(X \leq x)$ . Além disso, se  $X$  for uma variável contínua, tem-se que  $P(X \leq x)$  corresponde a uma área abaixo da sua distribuição de densidade, assim pode ser calculada por meio de uma integral. Isso resulta na seguinte afirmação:  $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ .

Dessa forma, é possível denotar a c.d.f. de  $CFAR_{max}$  da seguinte maneira:  $F_{CFAR_{max}(Y)}(cfar_{max})$ , onde  $cfar_{max}$  (minúsculo) representa qualquer valor possível de sua distribuição. Considere  $cfar_{max} = t$ . A equação **21** mostra o cálculo de  $F_{CFAR_{max}(Y)}(t)$ .

$$\begin{aligned}
 F_{CFAR_{max}}(t) &= P(CFAR_{max} \leq t) \\
 &= P\left(1 - \Phi\left(\Delta_{IC}\sqrt{n} + z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) + \Phi\left(-z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) \leq t\right) \quad (21) \\
 & \qquad \qquad \qquad 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

Se for considerado um processo altamente capaz, com  $\Delta_{IC} = 3$ ,  $n = 4$  e  $z_{FAR_{max}} = 3$ , a equação de  $F_{CFAR_{max}(Y)}(t)$  fica reduzida, como mostra a equação **22**.

$$F_{CFAR_{max}}(t) = P(CFAR_{max} \leq t) = P\left(\Phi\left(-z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}}\right) \leq t\right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(-Z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \leq \Phi^{-1}(t)\right) \\
&= 1 - F_{\chi_{m(n-1)}^2}\left(m(n-1)\left(-\frac{\Phi^{-1}(t)}{Z_{FAR_{max}}}\right)^2\right), \quad 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

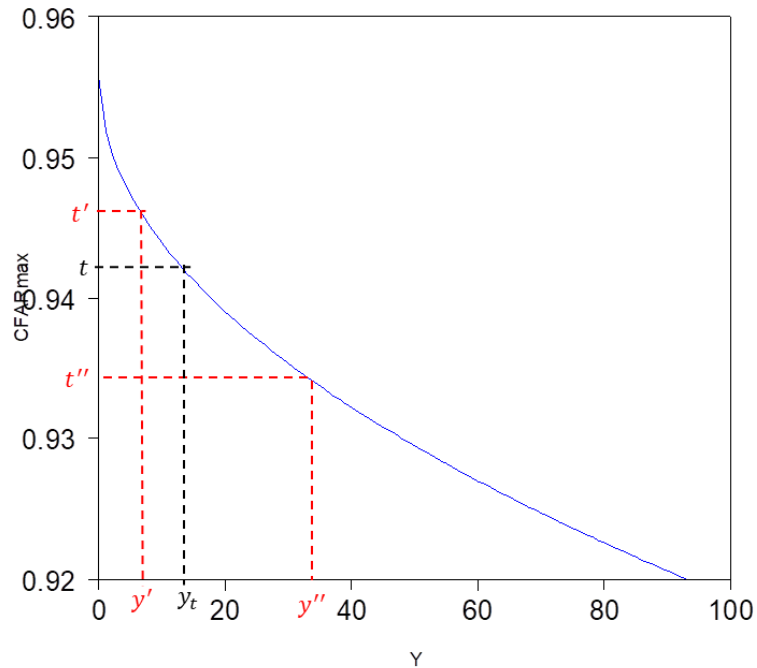
Onde  $F_{\chi_{m(n-1)}^2}$  representa a c.d.f. da distribuição central qui-quadrada com  $m(n-1)$  graus de liberdade. Como era de se esperar, a equação **22** equivale à c.d.f. de FAR para o gráfico  $\bar{X}$  unilateral de Shewhart quando apenas o desvio padrão é estimado. Além disso, ela também equivale à expressão de FAR do gráfico  $\bar{X}$  bilateral desde que  $t = t/2$  (para mais detalhes veja Jardim, Chakrabort e Epprecht (2018)).

Além disso, pelo fato de  $CFAR_{max}(Y)$  ser uma variável aleatória, pode-se dizer que  $P(CFAR_{max}(Y) \leq t)$  também é aleatória e, por essa razão, é possível obter sua esperança (ou média). Utilizando de certas propriedades do valor esperado, pode-se chegar à equação **23**, a qual evidencia que a média da probabilidade de  $CFAR_{max}(Y)$  ser menor do que  $t$  é igual a c.d.f. de  $CFAR_{max}(Y)$ .

$$\begin{aligned}
F_{CFAR_{max}}(t) &= P(CFAR_{max}(Y) \leq t) = g(t, y) = E_Y(P(CFAR_{max}(Y) \leq t)) \\
&= \int_0^\infty P(CFAR_{max}(Y) \leq t) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty P\left(1 - \Phi\left(\Delta_{IC}\sqrt{n} + z_\alpha \sqrt{\frac{y_t}{m(n-1)}}\right) + \Phi\left(-z_\alpha \sqrt{\frac{y_t}{m(n-1)}}\right) \leq t\right) f_Y(y) dy \quad (23)
\end{aligned}$$

É interessante dizer que a  $P(CFAR_{max}(y) \leq t)$  se torna uma variável aleatória binária, quando um valor fixo de  $t$  é definido para a integralização. Sendo assim, dado um valor fixo de  $t$  e considerando um determinado valor de  $y_t$ , a chance de  $CFAR_{max}(Y)$  ser menor do que  $t$  é 0% ou 100%, não existindo uma opção intermediária. Esse fenômeno é melhor explicado pela Figura 4.4.

Figura 4.4. Curva de  $CFAR_{max}(Y)$  para diversos  $Y_t$ .



Fonte: Autoria própria

A Figura 4.4 representa a curva de  $CFAR_{max}(Y)$  para vários valores de  $y_t$ . Foi definido um intervalo de  $[0,100]$ , pois é infactível considerar todo o domínio de  $Y$   $[0,\infty]$ . Além disso, considerou-se  $n = 5$ ,  $m = 25$  e  $FAR_{max} = 0,0027$ .

Com base no exemplo exposto na Figura 4.3, tem-se que para um dado  $y'$  existe um  $t'$ , assim como para  $y''$  há um  $t''$ , em outras palavras,  $CFAR_{max}(y') = t'$  e  $CFAR_{max}(y'') = t''$ . Perceba que  $t'$  é maior do que  $t$ , assim, a  $P(CFAR_{max}(y') \leq t) = 0$ . E  $t''$  é menor do que  $t$ , dessa forma, a  $P(CFAR_{max}(y'') \leq t) = 1$ . Generalizando esses dois casos, tem-se que:

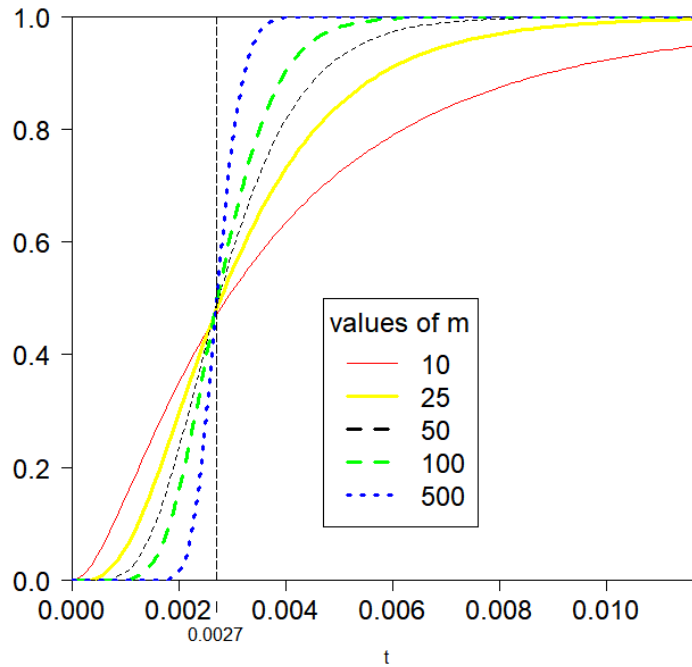
- Se  $0 \leq y < y_t$ , então:  $P(CFAR_{max}(y) \leq t) = 0$
- Se  $y_t \leq y \leq \infty$ , então:  $P(CFAR_{max}(y) \leq t) = 1$

A partir disso e com base em algumas assimilações matemáticas é possível reduzir a equação de  $F_{CFAR_{max}}(t)$  em uma única integral de índices iguais a  $y_t$  e  $\infty$  e escreve-la a partir da c.d.f. da distribuição de  $Y$  (veja a equação **24**).

$$F_{CFAR_{max}}(t) = \int_{y_t}^{\infty} f_Y(y) dy = P(Y \geq y_t) = 1 - P(Y \leq y_t) = 1 - F_{\chi_{m(n-1)}^2}(y_t) \quad (24)$$

A Figura 4.5 mostra a c.d.f. de  $CFAR_{max}(t)$  calculada a partir da equação **23**, considerando  $n = 5$ ,  $m = 10, 20, 50, 100, 500$  e  $FAR_{max} = 0,0027$ .

Figura 4.5. Curvas da  $F_{CFAR_{max}}(t)$  parametrizadas em função de  $m$ .

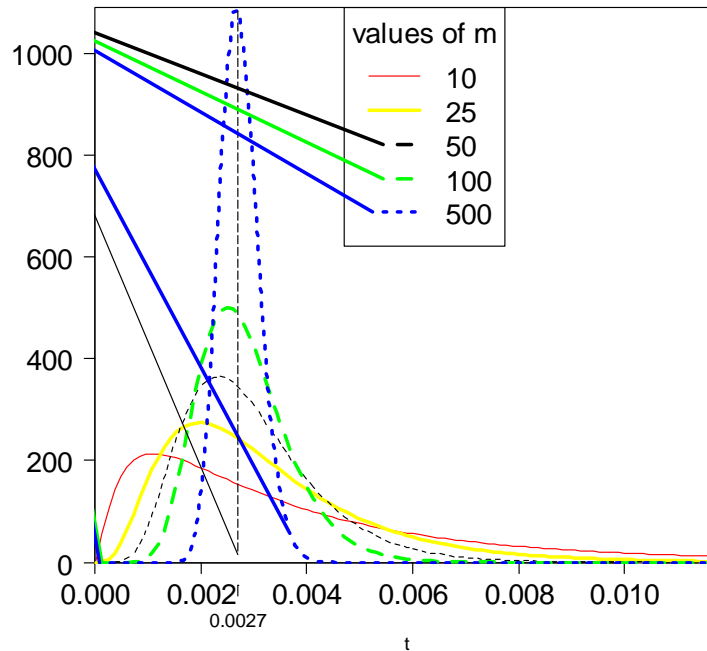


Fonte: autoria própria

Note na Figura 4.5 que a linha vertical representa o valor nominal da taxa de alarme falso ( $FAR_{max} = 0,0027$ ) definida pelo gestor no caso onde o desvio padrão é conhecido. Por meio desta figura percebe-se claramente o efeito do número de amostras recolhidas na Fase I ( $m$ ) na distribuição acumulada de  $CFAR_{max}$ . Veja que quanto menor for o valor de  $m$ , maiores são as chances de a taxa de alarmes falsos condicionada ser maior do que o valor estipulado pelo gestor ( $CFAR_{max} > FAR_{max}$ ). Isso pode ser percebido pelo fato de as curvas de  $CFAR_{max}$  se distanciarem da linha vertical com a redução de  $m$ . Por exemplo, para  $m = 10$ , tem-se que a  $P(CFAR_{max} \geq 0.004) \approx 40\%$ , isso significa que há 40% de chance de  $CFAR_{max}$  ser 48% maior do que o valor nominal 0,0027. Contudo, para um número de amostras grandes, como por exemplo  $m = 500$ , a c.d.f. de  $CFAR_{max}$  se aproxima tanto da linha vertical que é provável que ele não seja muito diferente de 0,0027.

Para fornecer mais informações, na Figura 4.6 é exibida a p.d.f. de  $CFAR_{max}$  ( $f_{CFAR_{max}}(t)$ ), a qual foi calculada tomando os derivados numéricos de sua c.d.f. Foram considerados os mesmos valores das variáveis, ou seja,  $n = 5$ ,  $m = 10, 20, 50, 100, 500$  e  $FAR_{max} = 0,0027$ .

Figura 4.6. Curvas da p.d.f. de  $CFAR_{max}$  parametrizada em função de “m”.



Fonte: autoria própria

As curvas de  $f_{CFAR_{max}}(t)$  apresentadas na Figura 4.6 mostram que a distribuição de  $CFAR_{max}$  é extremamente inclinada para a direita (isto é, apresenta uma grande cauda para o lado direito) quando  $m$  é pequeno, veja, por exemplo,  $m = 10$ . Isso também significa que há uma grande probabilidade de  $CFAR_{max}$  ser diferente do valor nominal. Contudo, à medida que o número de amostras aumenta,  $m = 500$ , por exemplo, a curva se aproxima de uma distribuição normal com média bem próxima do valor nominal.

Além da análise gráfica das distribuições de  $CFAR_{max}$ , é interessante examinar o comportamento numérico da média e do desvio padrão dessa variável. Para tanto, utiliza-se das equações 25 e 26.

$$E(CFAR_{max}) = \int_0^{\infty} t \left[ 1 - \Phi \left( \Delta_{IC} \sqrt{n} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) + \Phi \left( -z_{\alpha} \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) \right] f_Y(y) dy \quad (25)$$

$$SD(CFAR_{max}) = \sqrt{E(CFAR_{max}^2) - E(CFAR_{max})^2} \quad (26)$$

Onde o valor esperado de  $CFAR_{max}$  é obtido integrando o produto da variável aleatória pela sua função de densidade ( $E(CFAR_{max}(Y)) = \int_0^{\infty} t \cdot f_Y(y) dy$ ) e o desvio padrão é feito tirando a raiz quadrada de sua variância ( $SD(CFAR_{max}(Y)) = \sqrt{VAR(CFAR_{max}(Y))}$ ). Sabe-se

que a variância é o segundo momento central da distribuição de probabilidade da variável aleatória, isto é,  $Var(CFAR_{max}(Y)) = E[(CFAR_{max}(Y) - E(CFAR_{max}(Y)))^2]$ .

A partir das equações 25 e 26 foi possível construir a Tabela 4.1, a qual mostra alguns possíveis valores de  $E(CFAR_{max})$  e  $SD(CFAR_{max})$ , gerados pelo software de linguagem R, considerando  $FAR_{max} = 0,0027$ ,  $\Delta_{IC} = 3$ ,  $m = 10, 20, 50, 100, 500$ .

Tabela 4.1. Análise da esperança e desvio padrão de  $CFAR_{max}$  para diversos valores de  $m$ .

<b>m</b>	$E(CFAR_{max})$	$1 - \frac{E(CFAR_{max})}{FAR_{max}}$	$SD(CFAR_{max})$	$1 - P(CFAR_{max} < 0.0027)$
<b>10</b>	0.0041	52%	0.0039	53%
<b>20</b>	0.0032	19%	0.0020	52%
<b>50</b>	0.0030	11%	0.0013	51%
<b>100</b>	0.0028	4%	0.0009	51%
<b>500</b>	0.0027	0%	0.0004	50%

Fonte: autoria própria

Além do valor esperado e do desvio padrão de  $CFAR_{max}$ , a Tabela 4.1 também apresenta duas análises do efeito da estimação do desvio padrão ( $S_p$ ) na taxa de alarmes falsos condicionada. A primeira leva em consideração a diferença entre o valor esperado e o valor nominal, enquanto que a segunda considera a probabilidade de  $CFAR_{max}$  ser maior do que o valor nominal.

A partir da Tabela 4.1, colunas 2 e 3, é possível observar que à medida que  $m$  aumenta, a  $E(CFAR_{max})$  se aproxima de  $FAR_{max}$  ( $CFAR_{max} \approx 0,0027$ ). Enquanto que as colunas 4 e 5 mostram que a dispersão do processo e a  $P(CFAR_{max} > 0,0027)$  diminuem com o aumento de  $m$ , isto significa que a p.d.f. de  $CFAR_{max}$  torna-se mais simétrica, se aproximando de uma curva normal (como foi apresentado na Figura 4.6).

O fato de a  $P(CFAR_{max} > 0,0027)$  diminuir com o aumento de  $m$ , ou seja, se aproximar do valor nominal, também pode ser explicado pela Convergência de Probabilidade, a qual afirma que uma sequência  $(X_n)$  de variáveis aleatórias converge para a variável aleatória  $X$  se a probabilidade de um desvio para  $n$  tendendo a infinito for igual à zero, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n - X > \varepsilon) = 0$ . Isto também se aplica para o caso quando o número de amostras tende a infinito ( $m \rightarrow \infty$ ), assim, o desvio padrão de  $CFAR_{max}$  se iguala a zero ( $SDCFAR_{max} = 0$ ) e a esperança de  $CFAR_{max}$  se iguala ao valor nominal com 100% de probabilidade.



Conclui-se então que quando o desvio padrão é estimado, para aumentar as chances de  $CFAR_{max}$  ser próximo da taxa de alarmes falsos obtida no caso onde os parâmetros são conhecidos, é necessário coletar um grande número de amostras na Fase I do processo de implantação do gráfico modificado (como  $m = 500$ ), o que na prática é impossível. Por isso é preciso encontrar uma solução para que um número mais razoável de amostras possa ser coletado e a probabilidade de ocorrer um falso alarme não seja demasiadamente grande. O ajuste de limites pode ser uma solução para esse problema.

### 4.3 Average Run Length (ARL) com desvio padrão conhecido

A medida de comprimento de sequência, mais conhecida pelo seu nome na língua inglesa – *average-run-length* (ARL), é uma das formas mais comuns de se medir o desempenho de um gráfico de controle. Como o próprio nome indica, ela é a média da variável aleatória discreta *run-length* (RL), a qual representa o número de amostras que precisam ser coletadas (ou o número de estatísticas de controle que precisam ser plotadas no gráfico de controle) até que o gráfico detecte uma mudança em um processo estável ou em controle (CHAKRABORTI, 2000). Ou seja, o ARL é o número médio de amostras recolhidas do processo, na Fase II, até o aparecimento do primeiro alarme.

É razoável alegar que quando um processo está em controle, o gestor deseja que o gráfico emita o menor número possível de alarmes falsos e, caso o processo saia da condição de controle, ele anseia que o gráfico o detecte o mais rápido possível. Assim, o melhor desempenho do gráfico de controle é obtido quando ARL é um número relativamente alto para processos em controle ( $ARL_0$ ), e significativamente baixo para processos que estão fora de controle ( $ARL_1$ ).

#### 4.3.1 A distribuição de *run-length* (RL)

O *run-length* (RL) é uma variável aleatória cujo experimento envolve a repetição do evento de retirar uma amostra do processo até que os dados plotados no gráfico indiquem

condição fora de controle. Quando os parâmetros do processo são conhecidos ( $\mu_0$  e  $\sigma_0$ ), pode-se afirmar que essas tentativas são independentes e que todas possuem a mesma probabilidade de acontecer. Como a probabilidade  $p$  de obter um sucesso (um alarme) é constante, para este caso, pode-se afirmar que  $RL_0$  segue uma distribuição geométrica, com parâmetro  $p$ .

O parâmetro  $p$  da distribuição geométrica do  $RL_0$  corresponde à probabilidade de ocorrer um falso alarme, ou seja,  $p = FAR$ . Enquanto que o parâmetro  $p$  do  $RL_1$  é a probabilidade de um alarme verdadeiro.

No caso do gráfico modificado, devido ao fato de existir inúmeros valores possíveis para a taxa de alarmes falsos (FAR), como já foi dito na seção 4.1, para cada valor assumido por FAR tem-se um novo parâmetro  $p$  para a distribuição de  $RL_0$ . Assim, quando o processo estiver centralizado na média nominal, o parâmetro  $p$  será igual ao  $FAR_{min}$  (nesse caso a distribuição de  $RL_0$  é descrita como  $RL_{0,FAR_{min}}$ ), enquanto que o parâmetro  $p$  será igual a  $FAR_{max}$  quando o processo se deslocar para um das médias limites toleráveis ( $\mu_L$  ou  $\mu_U$ ) (aqui descreve-se a distribuição como  $RL_{0,FAR_{max}}$ ). As expressões 27 e 28 simplificam o que foi dito neste parágrafo.

$$RL_{0,FAR_{min}} \rightarrow p = P(\text{alarme} | \mu = \mu_0) = FAR_{min} \quad (27)$$

$$RL_{0,FAR_{max}} \rightarrow p = P(\text{alarme} | \mu = \mu_L \text{ ou } \mu = \mu_U) = FAR_{max} \quad (28)$$

Contudo, apenas as distribuições derivadas de  $FAR_{max}$  serão abordadas com mais detalhes nas próximas seções.

### 4.3.2 Average-run-length (ARL)

Como já foi dito na introdução da seção 4.3, o *average-run-length* (ARL) é a média da distribuição de *run-length* (RL), ou seja,  $ARL = E(RL)$ . Considerando um processo em controle e com parâmetros conhecidos, tem-se que  $RL_0$  segue uma distribuição geométrica e, por causa disso, sua média ( $ARL_0$ ) é igual ao recíproco da taxa de alarmes falsos (FAR), isto é, para o gráfico  $\bar{X}$  de Shewhart  $ARL_0 = 1/FAR = 1/\alpha$  (CHAKRABORTI, 2000).

A partir da definição acima pode-se dizer que o recíproco da máxima taxa de alarmes falsos dos gráficos modificado e de aceitação é o  $ARL_{0,FAR_{max}}$ . Sabe-se que o  $FAR_{max}$  é o pior

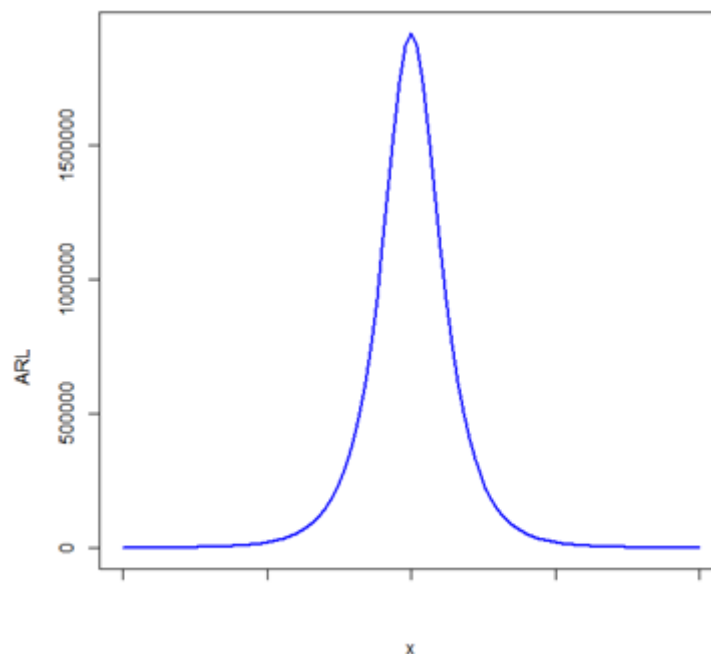
cenário para o FAR nesses gráficos, visto que o processo está em iminência de sair do estado de controle. Considerando essa situação ( $\mu = \mu_L$  ou  $\mu = \mu_U$ ), espera-se que o número médio de amostras necessárias até a detecção do primeiro alarme seja o menor possível, assim dizemos que nessa situação o  $ARL_0$  obtém seu valor mínimo, como mostra a equação 29.

$$ARL_{0,min} = ARL_{0,FAR_{max}} = E(RL_{0,FAR_{max}}) = \frac{1}{FAR_{max}} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{1 - [\Phi(\Delta_{IC} * \sqrt{n} + Z_{FAR_{max}}) - \Phi(-Z_{FAR_{max}})]}$$

Apesar de  $ARL_0$  não ser uma variável aleatória quando os parâmetros do processo são conhecidos, para os gráficos modificado e de aceitação é possível descrever graficamente o comportamento de  $ARL_0$  para os inúmeros posicionamentos da média do processo dentro do range aceitável de variação. A Figura 4.7 mostra a curva que descreve o comportamento de  $ARL_0$  para cada deslocamento de  $m$ , para tal foi considerado  $FAR_{max} = 0,0027$ ,  $n = 5$ ,  $\Delta_{IC} = 3$ .

Figura 4.7. Curva do  $ARL_0$  para o gráfico de aceitação.



Fonte: autoria própria

Por questões de escala parece que o  $ARL_{0,min}$ , exposto na Figura 4.7, é igual à zero, porém a partir do cálculo exato feito no software R observa-se que  $ARL_{0,min} = 370,4$ , valor equivalente ao obtido no gráfico  $\bar{X}$  de Shewhart quando  $\alpha = 0,0027$ . Além disso, calculou-se o  $ARL_{0,max}$  obtendo o seguinte resultado:  $ARL_{0,max} = 1.917.440$ . Percebe-se que o valor

obtido para o  $ARL_{0,max}$  foi bastante elevado, visto que nesse caso o processo é altamente capaz, ou seja, a chance de ocorrer um falso alarme quando a média está centrada no valor nominal é substancialmente pequena e, por conseguinte, o número médio de amostras recolhidas do processo até que o gráfico indique condição fora de controle tende a ser muito alto.

Uma vez que o ARL é uma média de uma variável aleatória, seu desvio padrão é muito alto, podendo não representar o valor mais recorrente de RL no processo (isso ocorre porque a distribuição de RL é geométrica, ou seja, possui uma cauda acentuada para a direita) (MONTGOMERY, 2009). Por isso alguns autores têm criticado sua representatividade na medição do desempenho do gráfico de controle, contudo, ainda assim, o ARL é a medida de desempenho mais frequentemente utilizada e, por isso, também é utilizada neste trabalho para avaliar o desempenho do gráfico modificado.

#### 4.4 *Average-run-length* (ARL) com desvio padrão estimado

A estimação de parâmetros é um fenômeno que compromete algumas propriedades operacionais do gráfico, inclusive o número médio de amostras até o primeiro alarme (ARL). Por conta disso, muito se tem debatido na literatura sobre como minimizar esses efeitos negativos sobre as medidas de desempenho do gráfico de controle. Contudo, até então não foi definida uma abordagem única que solucionasse esse problema por completo, visto que sempre há vantagens e desvantagens a serem consideradas.

Existem duas perspectivas de análise dos efeitos da estimação dos parâmetros nas medidas de desempenho do gráfico de controle: a perspectiva condicional e a perspectiva incondicional.

Historicamente, a maioria dos autores se concentrou no estudo da distribuição marginal de *run-length* em controle ( $RL_0$ ), especialmente no seu valor esperado, o ARL incondicional em controle ( $ARL_0$ ). O  $ARL_0$  incondicional não considera a individualidade de cada gráfico, mas sim a média do desempenho de todos os possíveis gráficos derivados das inúmeras possibilidades de estimativas obtidas.

Já a perspectiva condicional tem sido considerada recentemente por alguns autores. Eles argumentam que a distribuição condicional de RL em controle ( $CRL_0$ ) e, conseqüentemente,

seus derivados, tal como o ARL condicional em controle ( $CARL_0$ ) fazem mais sentido no contexto do monitoramento de processo, visto que elas consideram a variabilidade existente entre os usuários - *practitioner-to-practitioner variability* (Saleh et al., 2015a; Epprecht et al., 2015). Sob essa perspectiva, a principal métrica de medida de desempenho é o Critério de Probabilidade de Excedência (ALBERS et al, 2005), que é basicamente a probabilidade de  $CARL_0$  ser maior do que um valor em específico. Jardim, Chakrabort e Epprecht (2019) comparou essas duas perspectivas para o gráfico  $\bar{X}$  bilateral de Shewhart, este trabalho também discutirá essas duas perspectivas para o gráfico modificado.

#### 4.4.1 *Conditional average-run-length (CARL)*

Sob a perspectiva condicional o ARL é uma variável aleatória condicionada à estimativa do desvio padrão obtida por meio de amostras retiradas do processo. Assim, é possível conhecer suas distribuições de probabilidade.

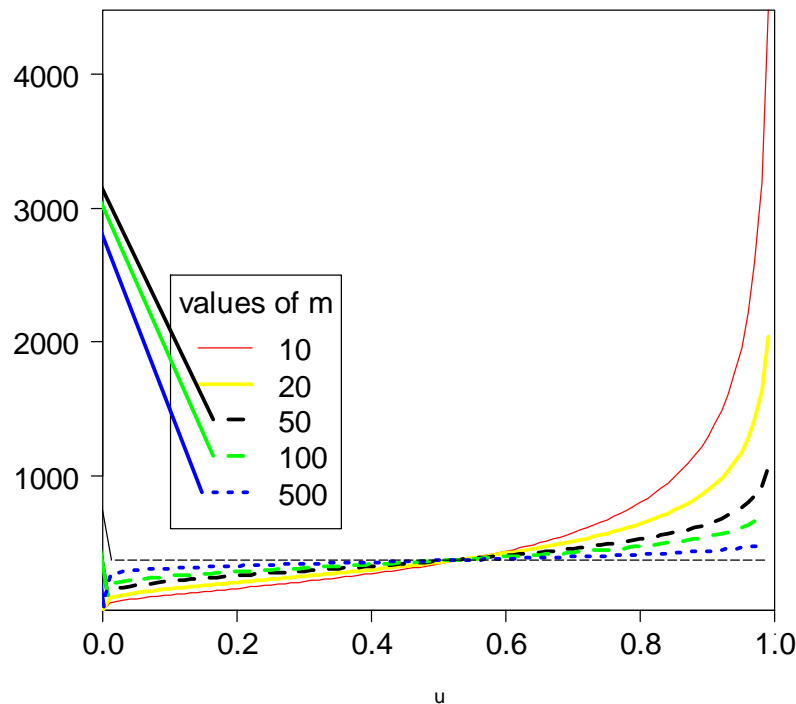
A distribuição do RL condicionado em controle ( $CRL_0$ ) segue uma distribuição geométrica cujo parâmetro  $p$  é a taxa de alarmes falsos condicionada (CFAR). Portanto, pode-se afirmar que  $CARL_0 = E(CRL_0) = 1/CFAR$ .

Sabe-se que quando a média do processo se desloca para uma das médias limites toleráveis, isto é, o processo está em iminência de sair do estado de controle, a maior taxa de alarme falso ( $CFAR_{max}$ ) é obtida. Nesse caso espera-se que o menor número de amostras sejam necessárias até a emissão do primeiro alarme ( $CARL_{0,min}$ ). A equação 30 mostra o cálculo exato de  $CARL_{0,min}$ .

$$\begin{aligned}
CARL_{0,min} &= E(CRL_{0,CFAR_{max}}) = \frac{1}{CFAR_{max}} \\
&= \frac{1}{1 - \left[ \Phi \left( \Delta_{IC}\sqrt{n} + Z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) - \Phi \left( -Z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) \right]} \\
&= \frac{1}{1 - \left( \Phi \left( \Delta_{IC}\sqrt{n} + Z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(U)}{m(n-1)}} \right) - \Phi \left( -Z_{FAR_{max}}\sqrt{\frac{F_{\chi^2_{m(n-1)}}^{-1}(U)}{m(n-1)}} \right) \right)} \quad (30)
\end{aligned}$$

Como pode ser visto na equação 30, a expressão de  $CARL_{0,min}$  pode ser escrita em função de  $Y$  ou  $U$ , dependendo apenas das análises estatísticas que se desejam obter. A Figura 4.8 mostra algumas curvas de  $CARL_{0,min}$  em função da ordem do quantil ( $U$ ) de  $Y$ , parametrizadas em  $m$  e considerando  $FAR_{max} = 0,0027$ ,  $n = 5$  e  $\Delta_{IC} = 3$ .

Figura 4.8. Curvas de  $CARL_{0,min}$  em função da ordem do quantil ( $U$ ) de  $Y$ .



Fonte: autoria própria

A linha tracejada na Figura 4.8 representa o valor de  $ARL_0$  obtido no caso onde o desvio padrão é conhecido, isto é,  $ARL_0 = 370,4$ . Observe que quanto maior o número de amostras recolhidas na fase I do CEP, mais as curvas de  $CARL_{0,min}$  se aproximam da linha horizontal

(compare  $m = 10$  e  $m = 500$ ). Isso significa que a diferença entre o valor nominal e o percebido de  $ARL_0$  diminui à medida que  $m$  aumenta.

Uma vez que  $CARL_{0,min}$  é a média de  $CRL_{0,FAR,max}$ , uma variável aleatória, pode-se afirmar que  $CARL_{0,min}$  também é uma variável aleatória e, por isso, pode ser descrita por uma distribuição de probabilidade.

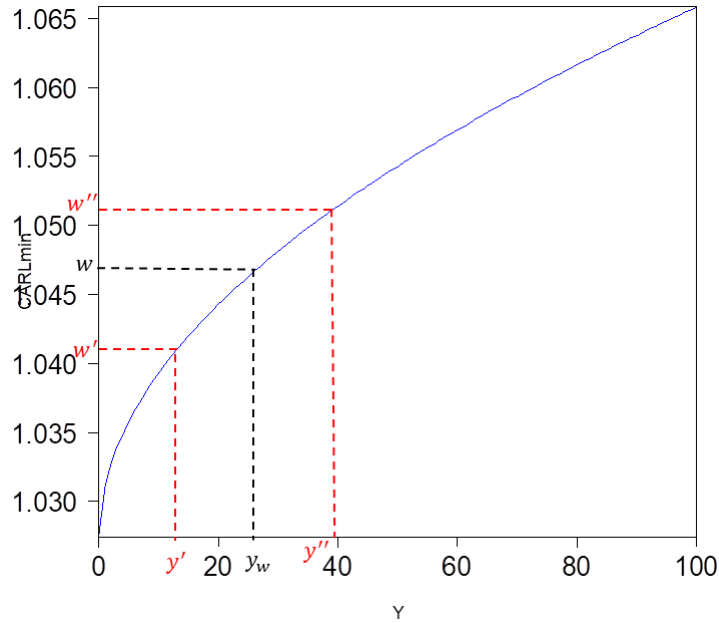
A função de distribuição acumulada (c.d.f.) de  $CARL_{0,min}$  pode ser escrita de acordo com a equação **31**.

$$\begin{aligned}
 F_{CARL_{0,min}(Y)}(w) &= P(CARL_{0,min}(Y) \leq w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{CARL_{0,min}(Y)}(w) dw \\
 &= E_Y \left( P(CARL_{0,min}(Y) \leq w) \right) = \int_0^{\infty} P(CARL_{0,min}(y) \leq w) f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} P \left( \frac{1}{1 - \left( \Phi \left( \Delta_{IC} \sqrt{n} + z_{FAR,max} \sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} \right) - \Phi \left( -z_{FAR,max} \sqrt{\frac{y}{m(n-1)}} \right) \right) \leq w} \right) f_Y(y) dy
 \end{aligned} \tag{31}$$

Onde  $w$  representa qualquer valor possível de  $CARL_{0,min}$  dentro de sua distribuição.

Como pode ser visto, a equação **31** foi trabalhada de forma a colocar o cálculo da c.d.f. de  $CARL_{0,min}$  em função da p.d.f. da distribuição qui-quadrada de  $Y$ , visto que esta é bastante conhecida, o que facilita os cálculos.

É importante lembrar que  $P(CARL_{0,min}(Y) \leq w)$  é uma variável binária, quando  $w$  é determinado e essa probabilidade é integrada. Isso significa que a probabilidade de  $CARL_{0,min}(Y)$  ser menor ou igual a  $w$  é de 100% ou 0%, não havendo outra possibilidade. Essa relação pode ser provada através da curva de  $CARL_{0,min}(Y)$  mostrada na Figura 4.9. Observe que, visando facilitar a análise do gráfico, o valor máximo de  $Y$  foi fixado em 100, embora seu domínio seja até infinito.

Figura 4.9. Curva de  $CARL_{0,min}(Y)$ .

Fonte: autoria própria

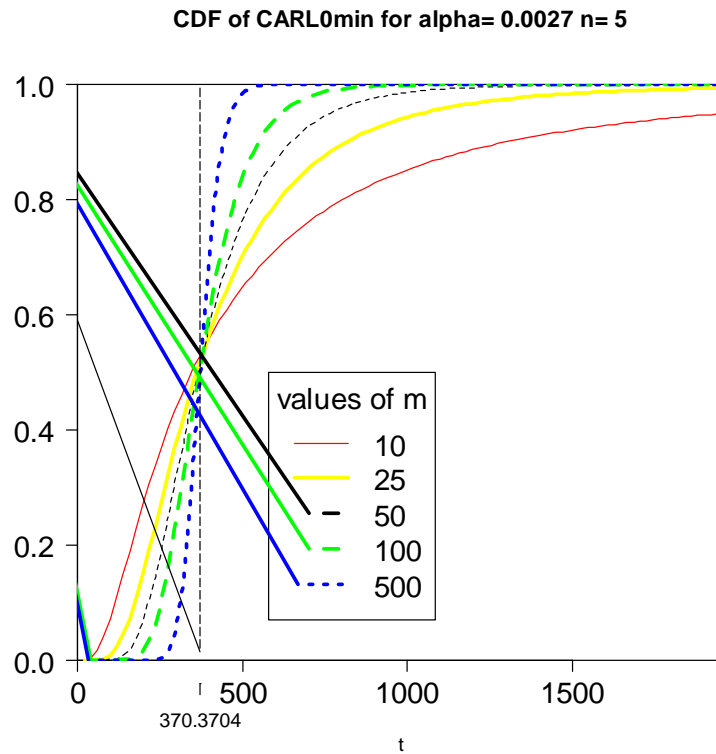
A partir da Figura 4.9 é possível perceber que  $w < w''$ , logo  $P(w'' < w) = 0$ . Isso acontece para todo  $CARL_{0,min}$  superior ao valor nominal, ou seja, enquanto  $y$  for maior do que  $y_w$ . Dessa forma, a equação 33 pode ser simplificada em uma integral de intervalo  $[0, y_w]$  e, conseqüentemente, a c.d.f. de  $CARL_{0,min}$  pode ser escrita em função da c.d.f. de  $CFAR_{max}$ , como mostra a equação 32.

$$\begin{aligned} F_{CARL_{0,min}}(w) &= \int_0^{y_w} f_Y(y) dy = P(Y \leq y_w) = 1 - F_{CFAR_{max}}(t) \\ &= 1 - F_{CFAR_{max}}(w^{-1}) \end{aligned} \quad (32)$$

A partir da equação 32 e assumindo  $FAR_{max} = 0,0027$ ,  $n = 5$ ,  $\Delta_{IC} = 3$ , é possível construir o gráfico da  $F_{CARL_{0,min}}$  parametrizada em  $m$ , o qual é mostrado na Figura 4.10.



Figura 4.10. Curvas da c.d.f. de  $CARL_{0,min}$  parametrizadas em “m”.

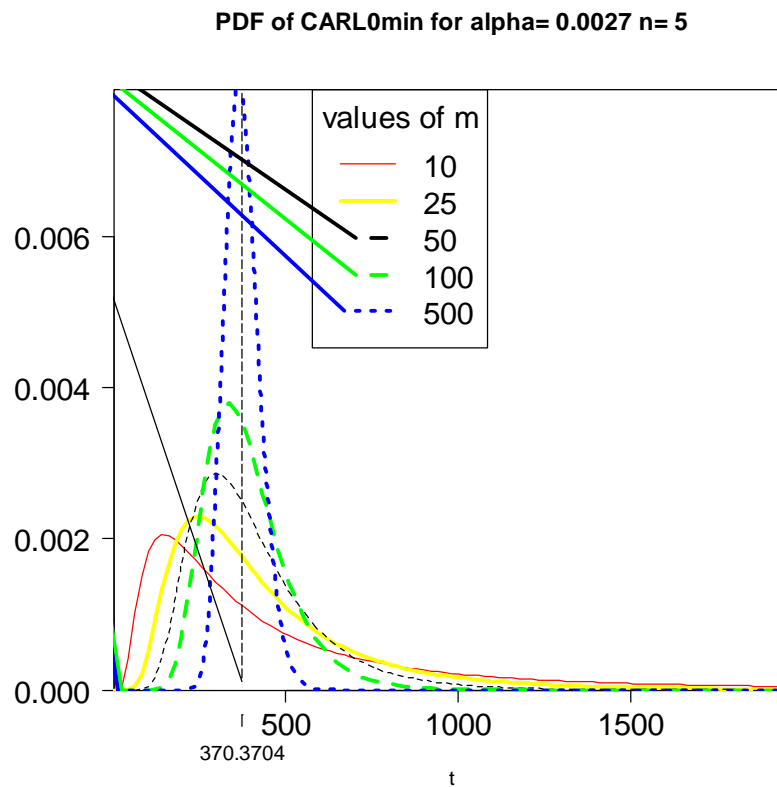


Fonte: autoria própria

Com base na Figura 4.10, é possível perceber que ao aumentar o tamanho da amostra na Fase I, a curva da c.d.f. de  $CARL_{0,min}$  se aproxima da linha tracejada, indicando que há grandes chances de  $CARL_{0,min}$  não ser muito diferente do valor nominal 370,3704 (compare, por exemplo,  $m = 10$  e  $m = 500$ ). Além disso, pode-se dizer que a chance de  $CARL_{0,min}$  ser maior do que o valor nominal é superior a 40%, um valor razoavelmente alto, o que indica o grave efeito da estimação do parâmetro nessa medida de desempenho.

Com a finalidade de gerar mais informações sobre o comportamento dessa medida de desempenho para diferentes valores de  $m$ , analisou-se, também, a p.d.f. de  $CARL_{0,min}(f_{CARL_{0,min}}(w))$  [veja a figura 4.11]. Para tanto foram utilizadas equações dos derivados numéricos da c.d.f. de  $CARL_{0,min}$  e os mesmos parâmetros usados para elaboração da Figura 4.10.

Figura 4.11. Curvas da p.d.f. de  $CARL_{0,min}$  parametrizadas em “m”.



Fonte: autoria própria

Com base na Figura 4.11 percebe-se que à medida que mais amostras são recolhidas do processo na fase I ( $m$ ) mais as curvas de  $f_{CARL_{0,min}}(w)$  se aproximam de uma curva normal com média adjacente ao valor nominal 370,3704 (compare  $m = 10$  e  $m = 500$ ). Tal fato também revela que quanto maior o valor de  $m$ , menor a probabilidade de o valor de  $CARL_{0,min}$  se divergir consideravelmente do valor nominal. Além disso é possível constatar que as curvas de  $f_{CARL_{0,min}}(w)$  se comportam de maneira semelhante às curvas de  $f_{CFAR_{max}}(t)$ , já que essas variáveis são recíprocas.

#### 4.4.2 Unconditional average-run-length (ARL)

O  $ARL_{0,min}$  não condicionado tem esse nome, porque ele desconsidera a variabilidade entre usuários que a perspectiva condicional pondera, isto é, ele não é condicionado a nenhum gráfico em específico, visto ser a média de todos os  $CARL_{0,min}$  referentes a todos os possíveis gráficos decorrentes dos valores obtidos pelas estimativas do desvio padrão.

O cálculo do ARL não condicionado é descrito pela equação 33.

$$ARL_{0,min} = E(CARL_{0,min}) = E\left(E(RL_{0,CFAR_{max}}|S_p)\right) = E(RL_{0,CFAR_{max}}) \quad (33)$$

Como já foi dito na seção 4.4.1, o cálculo de  $CARL_{0,min}$  pode ser feito em função de  $Y$  (uma variável aleatória que segue uma distribuição qui-quadrada), por essa razão a esperança de  $CARL_{0,min}$  pode ser facilmente obtida através da equação 34.

$$E(CARL_{0,min}) = ARL_{0,min} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - \Phi\left(\Delta_{IC}\sqrt{n} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{y}{m(n-1)}}\right) + \Phi\left(-z_{\alpha}\sqrt{\frac{y}{m(n-1)}}\right) \leq t} f_Y(y) dy \quad (34)$$

Apesar de não ser tão comum, é interessante analisar o desvio padrão de  $CARL_{0,min}$  para compreender a diferença existente entre os inúmeros resultados possíveis de  $CARL_{0,min}$ . A equação 35 mostra como é feito o cálculo de  $SD(CARL_{0,min})$ .

$$SD(CARL_{0,min}) = \sqrt{E(CARL_{0,min}^2) - E(CARL_{0,min})^2} \quad (35)$$

O cálculo da média e do desvio padrão de  $CARL_{0,min}$ , para  $m = 10, 20, 50, 100, 500$  e  $n = 5$ , é feito na Tabela 4.2. Além disso, essa tabela apresenta a probabilidade de  $CARL_{0,min}$  ser maior ou igual a 370,4 (critério de excêndencia proposto por ALBERS et al, 2005) e a diferença existente em termos de percentual entre a esperança de  $CARL_{0,min}$  e o valor nominal ( $ARL_{0,min}$ ).

Tabela 4.2: Probabilidade de  $CARL_{0,min}$  ser menor ou igual a 370,4, esperança e o desvio padrão de  $CARL_{0,min}$

<b>m</b>	$E(CARL_{0,min})$	$1 - \frac{E(CARL_{0,min})}{ARL_{0,min}}$	$SD(CARL_{0,min})$	$1 - P(CARL_{0,min} \leq 370,4)$
<b>10</b>	621,15	68%	1110,18	0,470
<b>20</b>	447,79	21%	328,65	0,481
<b>50</b>	406,23	10%	190,34	0,487
<b>100</b>	387,66	5%	122,66	0,491
<b>500</b>	373,73	1%	51,09	0,496

Fonte: autoria própria

A partir da Tabela 4.2, colunas 2 e 3, é possível perceber que o valor esperado de  $CARL_{0,min}$  se aproxima de 370,4 à medida que o número de amostras recolhidas na Fase I aumenta, diminuindo, assim, a diferença entre o  $CARL_{0,min}$  percebido e o  $ARL_{0,min}$  desejável

(obtido no caso K, onde o desvio padrão do processo é conhecido). As colunas 4 e 5 revelam que quanto maior o valor de  $m$  menor o desvio de  $CARL_{0,min}$ , indicando que a sua p.d.f. se aproxima de uma curva normal, ou seja, se torna mais simétrica (com aproximadamente 50% de chance de  $CARL_{0,min}$  ser menor ou maior do que o valor médio – que nesse caso se assemelha bastante do valor nominal). Conclui-se que quanto amostras são retiradas do processo (como  $m = 500$ ) mais confiável se torna a  $E(CARL_{0,min})$ . Porém, esse valor de  $m$  é completamente inviável na prática, sendo necessário encontrar outras soluções para garantir a confiabilidade do gráfico com um valor mais razoável para  $m$ .

## 5 ÍNDICES DE CAPACIDADE DO PROCESSO ( $C_p$ e $C_{pk}$ )

O gráfico de controle de aceitação é indicado para monitorar processos que sejam altamente capazes, isto é, cujos índices de capacidade são elevados. Para calcular o nível de capacidade de um processo utilizam-se os Índices de Capacidade do Processo (ICP).

De acordo com Lin e Pearn (2005), existem três índices de capacidade aplicáveis a processos de manufatura, são eles:  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ . O índice  $C_p$  reflete a capacidade potencial do processo, medindo a consistência da característica da qualidade em relação à tolerância de fabricação (USL e LSL). Já o  $C_{pk}$  calcula a capacidade efetiva do processo, levando em consideração a magnitude do desvio e a sua centralidade, estimando o seu desempenho através da proporção de itens conformes produzidos. Quando o processo está centralizado na média, os dois termos de  $C_{pk}$  são iguais ( $C_{pk,U} = C_{pk,L}$ ) e  $C_{pk} = C_p$ . Por último,  $C_{pm}$  procura medir a habilidade do processo em permanecer em torno do valor nominal, o que reflete, também, na sua centralidade (LIN; PEARN, 2005).

No presente trabalho serão abordados apenas os índices  $C_p$  e  $C_{pk}$ . O cálculo de  $C_p$  utiliza como base de referência a tolerância natural do processo. Enquanto  $C_{pk}$  é definido pelo menor valor encontrado entre a média e os limites de especificação. As equações 36 e 37 representam esses índices:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (36)$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}; \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right) \quad (37)$$

Considere  $\frac{USL - \mu}{3\sigma} = C_{pk,U}$  e  $\frac{\mu - LSL}{3\sigma} = C_{pk,L}$ .

O número de desvios padrões utilizados nas equações 36 e 37 se refere a um processo seis-sigma, o caso mais comum na literatura, o qual garante com 99,74% de chance que os dados amostrais irão cair dentro dos limites de especificação. Os limites naturais de um processo seis sigma variam 3 desvios padrões para a direita e para a esquerda com relação a sua média nominal ( $Z_{\alpha/2} = 3$ ). Mohammadian e Amari (2012) e Montgomery (2009) consideram que um processo seis sigma ou mais tem um índice de capacidade maior ou igual a dois, ou seja,  $C_{pk} \geq 2$ , e por isso são considerados altamente capazes.

Como pode ser visto nas fórmulas **36** e **37**, os índices de capacidade são calculados com base nos limites de especificação do processo, assim como as médias limites toleráveis ( $\mu_U$  e  $\mu_L$ ) (veja as equações **6** e **7**). Dessa forma é possível acrescentar os limites de especificação à fórmula dos limites de controle e, conseqüentemente, a equação de  $FAR_{max}$  pode ser reescrita, como mostra a equação **38**.

$$FAR_{max} = 1 - P \left( \frac{LSL - \mu}{\sigma} \sqrt{n} + z_{\delta} \sqrt{n} - z_{FAR_{max}} \leq Z \right. \\ \left. \leq \frac{USL - \mu}{\sigma} \sqrt{n} - z_{\delta} \sqrt{n} + z_{FAR_{max}} \right) \quad (38)$$

Como foi afirmado acima, tem-se que  $C_{PK,U} = \frac{USL - \mu_{\bar{X}}}{3\sigma}$  e que  $C_{PK,L} = \frac{\mu_{\bar{X}} - LSL}{3\sigma}$ . Logo, é possível inserir os índices de capacidade na equação **38**, obtendo-se a equação **39**.

$$FAR_{max} = 1 - [\Phi(3C_{PK,U} * \sqrt{n} - z_{\delta} * \sqrt{n} + z_{FAR_{max}}) \\ - \Phi(-3C_{PK,L} * \sqrt{n} + z_{\delta} * \sqrt{n} - z_{FAR_{max}})] \quad (39)$$

Uma vez definido o cálculo de  $FAR_{max}$  em função dos índices de capacidade, fica fácil encontrar a nova equação de  $ARL_{0,min}$ . Veja a equação **40**.

$$ARL_{0,min} \\ = \frac{1}{1 - [\Phi(3C_{PK,U} * \sqrt{n} - z_{\delta} * \sqrt{n} + z_{FAR_{max}}) - \Phi(-3C_{PK,L} * \sqrt{n} + z_{\delta} * \sqrt{n} - z_{FAR_{max}})]} \quad (40)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, é possível desenvolver as fórmulas de  $CFAR_{max}$  e  $CARL_{0,min}$  em função dos índices de capacidade, como mostram as equações **41** e **42**.

$$CFAR_{max} = 1 - \left[ \Phi \left( 3C_{PK,U} * \sqrt{n} - z_{\delta} \sqrt{n} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} + z_{FAR_{max}} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) \right. \\ \left. - \Phi \left( -3C_{PK,L} * \sqrt{n} + z_{\delta} \sqrt{n} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} - z_{FAR_{max}} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) \right] \quad (41)$$

$$CARL_{0,min} = \frac{1}{1 - [\Phi \left( 3C_{PK,U} * \sqrt{n} - z_{\delta} \sqrt{n} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} + z_{FAR_{max}} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right) - \\ \Phi \left( -3C_{PK,L} * \sqrt{n} + z_{\delta} \sqrt{n} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} - z_{FAR_{max}} * \sqrt{\frac{Y}{m(n-1)}} \right)]} \quad (42)$$

## 6 EXEMPLO ILUSTRATIVO

O presente capítulo trata de um processo fictício, criado a partir de dados hipotéticos, apenas para aferir uma possível aplicação do gráfico modificado e analisar o seu desempenho. Como as modelagens estatísticas propostas nos capítulos 4 e 5 consideraram exclusivamente o gráfico modificado (aquele cujos limites de controle são obtidos a partir das médias limites toleráveis e da probabilidade do erro tipo I ( $\alpha$ )), este capítulo também só abordará este gráfico. Entretanto a dedução dos modelos e a condução deste exemplo didático para o gráfico de aceitação (focado nas médias indesejáveis e na probabilidade do erro tipo II ( $\beta$ )) pode ser facilmente obtida, devido ao fato de o comportamento dos gráficos modificado e de aceitação ser bastante similar, ficando, assim, como proposta para pesquisas futuras.

### 6.1 Parâmetros do processo

Considere um processo industrial que controla uma determinada característica da qualidade de seu produto ( $X$ ) cuja distribuição de probabilidade segue uma curva normal ( $X \sim N(\mu, \sigma)$ ). Sabe-se que esse processo é altamente capaz com índice de capacidade efetiva igual a 2 ( $C_{pk} = 2$ ).

A média nominal deste processo é igual a 20 ( $\mu_0 = 20$ ) e os limites de especificação inferior e superior são 8 e 32, concomitantemente ( $LSL = 8$  e  $USL = 32$ ). Foi determinado que o percentual de itens não conformes aceitável para o processo é de 1% ( $\delta = 0,01$ ) enquanto que o percentual rejeitável é de 5% ( $\gamma = 0,05$ ). No mais, deseja-se que as probabilidades de se cometer o erro tipo I e tipo II sejam de 0,001 e 0,2, respectivamente ( $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,2$ ).

Quanto ao tamanho da amostra, o gestor optou por calcular o tamanho específico (veja equação 2) de amostra que iguala os limites de controle dos gráficos modificado e de aceitação. O valor encontrado foi  $n_x = 34$ . Observe que este é um número muito alto se comparado ao valor usual de  $n$  usado comumente nas indústrias (geralmente,  $n = 4$  ou  $n = 5$ ), ou seja, na prática, geralmente,  $n = 34$  não é um tamanho inviável.

Quando os parâmetros são conhecidos, o desempenho do gráfico não depende diretamente desse tamanho de amostra, visto que tanto FAR quanto ARL não são variáveis

aleatórias. Contudo, para conseguir igualar os limites de controle dos gráficos modificado e de aceitação de forma a garantir o controle simultâneo de  $\alpha_{nom}$  e  $\beta_{nom}$ , é necessário utilizar esse tamanho específico de amostra.

Porém, quando o desvio padrão precisa ser estimado, tanto FAR quanto ARL se tornam variáveis aleatórias, dependentes do tamanho da amostra ( $n$ ) e do número de amostras ( $m$ ). Isso significa que quando os parâmetros são estimados muito mais dados são necessários, na Fase I, para garantir um bom desempenho do gráfico, o que na prática é praticamente impossível. A seção 6.3 esclarecerá melhor essa questão.

## 6.2 Desvio padrão é conhecido (caso K)

A princípio é suposto que o desvio padrão do processo seja conhecido, sendo  $\sigma_0 = 2$ .

Para dar início à Fase I do CEP de implantação do gráfico modificado é necessário calcular os limites de controle e as médias limites toleráveis do processo, para tanto são utilizadas as equações 3 e 4, 7 e 8. A Tabela 6.1 mostra os resultados desses cálculos.

Tabela 6.1. Médias limites toleráveis e limites de controle do processo.

$\mu_U$	$\mu_L$	$UCL$	$LCL$
27,347	12,653	28,407	11,593

Fonte: autoria própria

A partir da Tabela 6.1 também é possível calcular o  $\Delta_{IC}$  do processo, isto é, a variação permitida à média em termos de seu desvio padrão. Sabe-se que  $\Delta_{IC} = \frac{(\mu_U - \mu_L)}{\sigma_0}$ , logo o  $\Delta_{IC}$  deste processo é igual a 7,348.

Uma vez que as linhas do gráfico já foram projetadas, é possível iniciar a fase de monitoramento e controle do processo (Fase II). Contudo, antes disso, é interessante conhecer o desempenho do gráfico. Para tanto são calculados a taxa de alarme falso ( $FAR_{max}$ ) e o *average-run-length* ( $ARL_{min}$ ). A Tabela 6.2 mostra o cálculo de  $FAR_{max}$  e  $ARL_{min}$  para diversos tamanhos de amostra ( $n$ ).



Tabela 6.2.  $FAR_{max}$  e  $ARL_{min}$  para diversos tamanhos de amostra.

	$n = 4$	$n = 9$	$n = 15$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 34$
$FAR_{max}$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
$ARL_{0,min}$	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Fonte: autoria própria

Como pode ser percebido, o cálculo de  $FAR_{max}$  e  $ARL_{min}$  não varia com os diferentes tamanhos de amostra, visto não serem variáveis aleatórias quando o desvio padrão é conhecido (comprovando o que foi dito no capítulo 4). Outro ponto importante a se notar é que o valor de  $FAR_{max}$ , quando os parâmetros são conhecidos, é igual à probabilidade de se cometer o erro tipo I ( $\alpha$ ) determinado pelo gestor e, o  $ARL_{min}$  é o recíproco de  $FAR_{max}$ .

### 6.3 Desvio padrão estimado (caso U)

Neste momento, supõe-se que o desvio padrão não seja conhecido, necessitando, assim, ser estimado. O estimador escolhido foi o desvio padrão agrupado ( $S_p$ ).

Como já foi explicado, nesse caso, os limites de controle passam a ser função da estimativa do desvio padrão, a qual pode assumir inúmeros valores dependendo da amostra retirada do processo. Como o cálculo de  $FAR_{max}$  depende dos limites de controle, pode-se afirmar que para cada limite obtido, um novo valor de  $FAR_{max}$  é apurado, assim, pode-se dizer que  $FAR_{max}$  está condicionado ao estimador  $S_p$ , passando a ser chamado de  $CFAR_{max}$ . Conseqüentemente, o  $ARL_{0,min}$  também se torna uma variável aleatória condicionada a  $S_p$ , passando a ser chamado de  $CARL_{0,min}$ . Lembre-se que quando o valor esperado de  $CARL_{0,min}$  é calculado, essa medida de desempenho perde sua condicionalidade a  $S_p$ , voltando a ser chamada apenas de  $ARL_{0,min}$ , em outras palavras,  $E(CARL_{0,min}) = ARL_{0,min}$ .

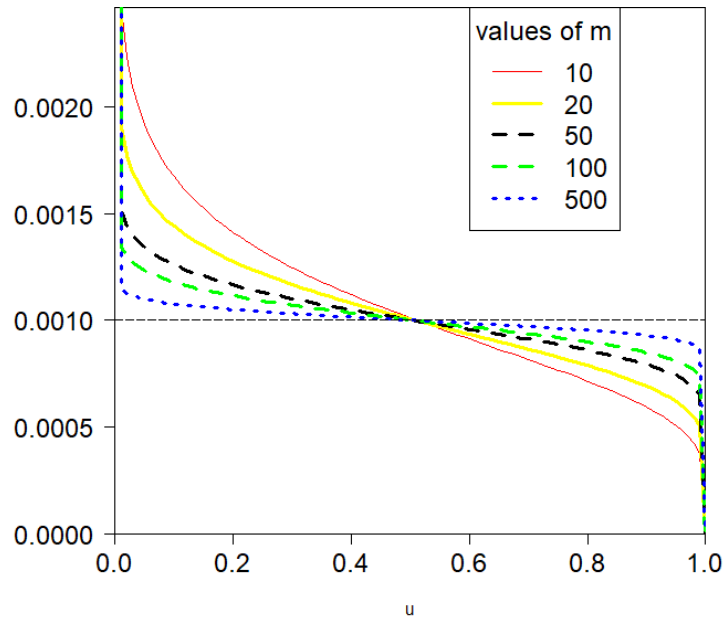
#### 6.3.1 Taxa de Alarmes Falsos Condicionada ( $CFAR_{max}$ )

Com já foi dito na seção 4.2, a taxa de alarmes falsos condicionada ( $CFAR_{max}$ ) é uma variável aleatória condicionada ao estimador  $S_p$  e seu cálculo pode ser feito em função de  $Y$

(variável aleatória que segue uma distribuição qui-quadrada). Dessa forma, é possível analisar o comportamento de  $CFAR_{max}$  em função de  $Y$  (ou de  $U$ , veja equação **22**) e suas distribuições de probabilidade, incluindo análise de sua média e do seu desvio padrão. É importante lembrar que o valor esperado de  $CFAR_{max}$  é um valor genérico não condicionado ao estimador, podendo ser chamado de  $FAR_{max}$  novamente.

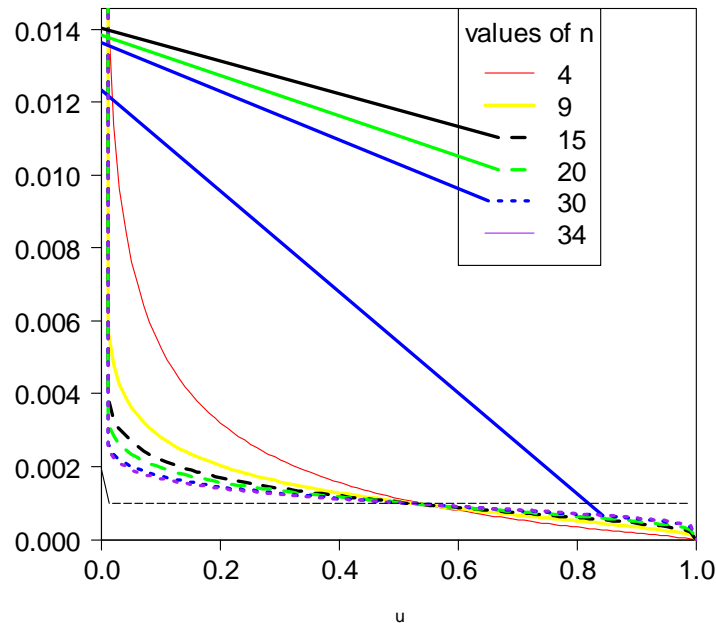
Utilizando um software de linguagem R foi possível desenhar a curva de  $CFAR_{max}$  em função de  $U$ , uma variável uniforme de domínio  $[0,1]$  para vários valores de  $m$  e  $n$ , como mostram as Figuras 6.1 e 6.2, respectivamente.

Figura 6.1. Curvas de  $CFAR_{max}(U)$  parametrizadas em  $m FAR_{max} = 0,001$ ,  $n_x = 34$ .



Fonte: Autoria própria

Figura 6.2. Curvas de  $CFAR_{max}(U)$  parametrizadas em “n”,  $FAR_{max} = 0,001$ ,  $m = 10$ .



Fonte: Autoria própria

Como pode se perceber nas Figuras 6.1 e 6.2, o aumento do número de amostras ( $m$ ) e/ou do tamanho das amostras ( $n$ ) na Fase I faz com que as curvas de  $CFAR_{max}(U)$  se aproximem do valor nominal decretado pelo gestor ( $FAR_{max} = \alpha_{nom} = 0,001$ ).

Além disso, sabe-se que a p.d.f. de  $CFAR_{max}$  se aproxima de uma distribuição normal à medida que  $m$  aumenta (veja a Figura 4.6), ou seja, torna-se mais simétrica, centralizada no valor nominal e com menor desvio padrão (isso também ocorre quando  $n$  aumenta). Esses efeitos de  $m$  e  $n$  no valor esperado de  $CFAR_{max}$  e no seu desvio padrão também podem ser observado através da Tabela 6.3.

Tabela 6.3. Valores da esperança e desvio padrão de  $CFAR_{max}$  para diversos valores de  $m$  e  $n$ ,  $FAR_{max} = 0,001$ .

		<b>n = 4</b>	<b>n = 9</b>	<b>n = 15</b>	<b>n = 20</b>	<b>n = 30</b>	<b>n = 34</b>
$E(CFAR_{max})$	<b>m = 10</b>	0.00214	0.00138	0.00121	0.00115	0.00110	0.00109
	<b>m = 20</b>	0.00152	0.00118	0.0011	0.00107	0.00105	0.00104
	<b>m = 50</b>	0.00119	0.00107	0.00104	0.00103	0.00102	0.00102
	<b>m = 100</b>	0.00109	0.00103	0.00102	0.00101	0.00101	0.00101
	<b>m = 500</b>	0.00102	0.00101	0.00100	0.00100	0.00100	0.00100
$SD(CFAR_{max})$	<b>m = 10</b>	0.00296	0.00116	0.00077	0.00062	0.00048	0.00044
	<b>m = 20</b>	0.00149	0.00070	0.00049	0.00041	0.00032	0.00030
	<b>m = 50</b>	0.00073	0.00040	0.00029	0.00025	0.00020	0.00018
	<b>m = 100</b>	0.00047	0.00027	0.00020	0.00017	0.00014	0.00013
	<b>m = 500</b>	0.00019	0.00012	0.00009	0.00007	0.00006	0.00006

Fonte: autoria própria

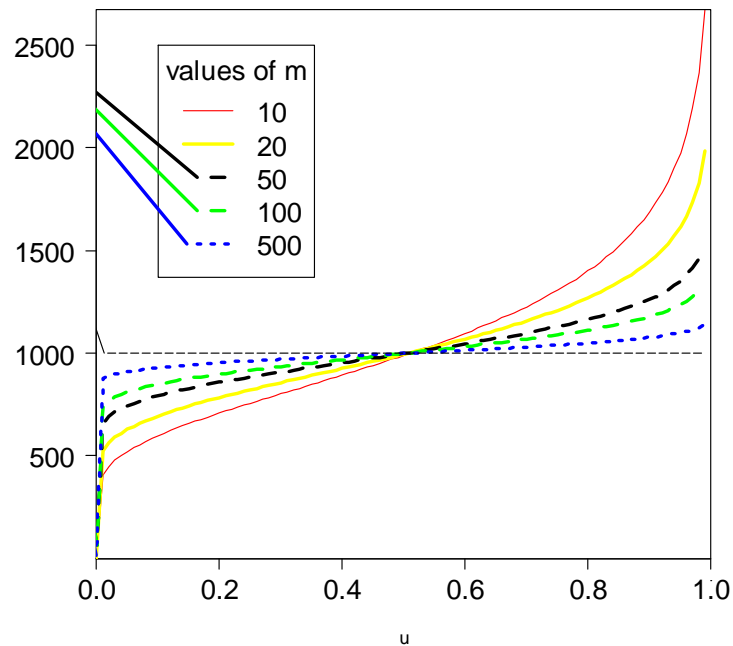
A Tabela 6.3 mostra que quando os valores de  $m$  e  $n$  são baixos ( $m = 10$  e  $n = 4$ , por exemplo) a esperança de  $CFAR_{max}$  se distancia bastante do valor nominal ( $FAR_{max}$ ), somado a isso, tem-se que a variabilidade de  $CFAR_{max}$  é bastante elevada, comprometendo ainda mais sua confiabilidade. Entretanto, quando um grande número de dados são recolhidos ( $m = 500$  e  $n = 34$ , por exemplo), o desvio se torna significativamente pequeno e a média se posiciona em um valor muito próximo do nominal, determinando assim boa confiabilidade de  $CFAR_{max}$ .

Agora, considere apenas a coluna onde  $n = 34 = n_x$ . Note que apesar de  $n_x$  ser um valor alto, o uso desse tamanho de amostra não garante que a esperança de  $CFAR_{max}$  seja igual ao  $FAR_{max}$  nominal, considerando valores usuais de  $m$  (como, por exemplo,  $m = 10$ ). Além disso, perceba que para  $m = 10$ ,  $SD(CFAR_{max})$  é relativamente alto, indicando sua alta variabilidade. Contudo, quando muitas amostras são recolhidas ( $m = 500$ ), em média  $CFAR_{max}$  se iguala ao  $FAR_{max}$  nominal e a variabilidade se reduz drasticamente. Isso revela que para garantir, em média, a confiabilidade do gráfico é necessário um número muito elevado de dados, o que torna o monitoramento do processo extremamente custoso. Por essa razão, é necessário analisar as vantagens e desvantagens de se garantir uma elevada confiabilidade de  $CFAR_{max}$  no monitoramento do processo.

### 6.3.2 Perspectivas condicional e incondicional do $ARL_{0,min}$

Quando o desvio padrão é estimado o número médio mínimo de amostras até o primeiro falso alarme ( $ARL_{0,min}$ ) também se torna uma variável aleatória condicionada ao estimador ( $CARL_{0,min}$ ). Assumindo o uso do desvio padrão agrupado ( $S_p$ ), a equação de  $CARL_{0,min}$  pode ser escrita em função de  $Y$  (ou de  $U$  – veja a equação 31). Dessa forma, é possível descrever seu comportamento em termos do quantil de  $Y$  ( $CARL_{0,min}(U)$ ), conforme a Figura 6.3.

Figura 6.3. Curvas de  $CARL_{0,min}(U)$  parametrizadas em  $m$ ,  $FAR_{max} = 0,001$ ,  $n = 34$ .



Fonte: autoria própria

Como era esperado, a Figura 6.3 expõe que o aumento do o número de amostras recolhidas do processo ( $m$ ) afeta diretamente o comportamento de  $CARL_{0,min}(U)$ , visto que as curvas de  $CARL_{0,min}(U)$  se aproximam da linha tracejada (que representa o valor nominal ( $ARL_{0,min} = \frac{1}{FAR_{max}=0,001} = 1000$ )) à medida que  $m$  aumenta.

Além disso, pelo fato de  $CARL_{0,min}$  ser uma variável aleatória, é possível calcular sua média e seu desvio padrão. A Tabela 6.4 mostra os valores de  $E(CARL_{0,min})$  e  $SD(CARL_{0,min})$  para diversos valores de  $m$  e  $n$ .

Vale lembrar que o valor esperado de  $CARL_{0,min}$  não é condicionado ao estimador, assim ele pode ser denominado apenas como  $ARL_{0,min}$ , nesse caso diz-se que a perspectiva não condicional é aplicada.

Tabela 6.4. Valor esperado e desvio padrão de  $CARL_{0,min}$  para diversos valores de  $m$  e  $n$ ,  $FAR_{max} = 0,001$ .

		<b>n = 4</b>	<b>n = 9</b>	<b>n = 15</b>	<b>n = 20</b>	<b>n = 30</b>	<b>n = 34</b>
$E(CARL_{0,min}) =$ $ARL_{0,min}$	<b>m = 10</b>	3107.387	1436.537	1220.926	1156.358	1098.636	1085.94
	<b>m = 20</b>	1644.481	1189.618	1102.418	1074.027	1047.619	1041.67
	<b>m = 50</b>	1204.081	1070.138	1039.223	1028.685	1018.659	1016.37
	<b>m = 100</b>	1095.123	1034.198	1019.335	1014.194	1009.266	1008.14
	<b>m = 500</b>	1018.029	1006.706	1003.824	1002.815	1001.843	1001.62
$SD(CARL_{0,min})$	<b>m = 10</b>	26214.69	1697.622	913.641	704.072	515.965	473.027
	<b>m = 20</b>	2661.249	811.418	528.579	431.628	333.271	309.087
	<b>m = 50</b>	858.440	417.805	298.800	251.629	199.979	186.682
	<b>m = 100</b>	504.183	276.968	203.770	173.274	138.986	130.020
	<b>m = 500</b>	196.3904	117.785	88.564	75.8812	61.3098	57.450

Fonte: autoria própria

A partir da Tabela 6.4 é possível concluir que quanto maior for o valor de  $m$  e  $n$ , menor será o valor de  $E(CARL_{0,min})$  e mais próximo do valor nominal. Além disso, a confiabilidade dessa medida de desempenho aumenta à medida que o valor de  $m$  e  $n$  cresce, isso é percebido pela redução do desvio padrão.

Agora, considerando apenas a coluna onde  $n = 34 = n_x$ , vemos de maneira mais nítida (o que já foi relatado na interpretação da tabela 6.3, onde  $CFAR_{max}$  é analisado) que utilizar meramente amostras do tamanho  $n_x = 34$  não garante a igualdade, em média, de  $CARL_{0,min}$  ao valor nominal, levando em conta valores usuais de  $m$ , como  $m = 10$  ou  $m = 20$ . Além disso, nesses casos, existe uma alta variabilidade de  $CARL_{0,min}$  (para  $m = 10$ ,  $SD(CARL_{0,min}) = 473.027$ ). Assim, pode-se dizer que, a solução de  $n_x = 34$  só é uma boa solução para o caso de variância desconhecida ou estimada quando o número de amostras é significativamente elevado, como, por exemplo,  $m = 500$ . Mais uma vez é importante ressaltar que recolher 500 amostras de 34 elementos de um processo produtivo é inviável, demandando assim uma solução mais plausível para melhorar o desempenho do gráfico.

#### 6.4 Possíveis soluções para redução do número de dados necessários na Fase I do CEP

Como já foi mencionado na seção 3.2, o gráfico modificado e o gráfico de aceitação são bastante semelhantes, se diferindo apenas no fato de que o gráfico modificado foca no controle da probabilidade do erro tipo I ( $\alpha$ ) e, o gráfico de aceitação mira na probabilidade do erro tipo

II ( $\beta$ ). Caso os limites de controle desses gráficos sejam iguais, apenas um único desenho gráfico é capaz de monitorar os dois erros simultaneamente. Para igualar os limites, de acordo com Freund (1957), é preciso retirar do processo amostras de um tamanho específico, o qual é calculado de acordo com a equação 2.

Porém, como já foi mostrado nas seções anteriores, este tamanho de amostra ( $n_X$ ) é significativamente alto, o que é inviável na prática. Algumas possíveis soluções para redução desse tamanho amostral serão mostradas na seção 6.4.2.

O problema do grande número de dados necessários na Fase I do CEP se agrava quando o desvio padrão do processo é estimado, pois nesse caso, além de uma amostra de tamanho grande, são necessárias muitas amostras ( $m$ ) para que o gráfico continue operando com um bom desempenho (veja seção 6.3).

Estudos recentes sobre o gráfico de Shewhart mostram que para processos em que a estimação de parâmetros é necessária, uma solução interessante para redução do número de amostras é o ajuste de limites. Essa é uma técnica que visa limitar, em uma baixa probabilidade, que a esperança da variável aleatória ( $CFAR_{max}$  e  $CARL_{0,min}$ ) possa exceder o valor nominal. Contudo, este estudo sobre ajuste de limites para o gráfico modificado ainda não está concluído e, por essa razão, não foi inserido nesta dissertação. Possivelmente, no próximo ano publicaremos trabalhos a respeito deste tema.

#### 6.4.1 Possíveis soluções para reduzir o valor do tamanho da amostra $n_X$

Como foi mostrado na equação 2, o tamanho específico de amostra  $n_X$  depende diretamente dos valores de  $\alpha_{nom}$ ,  $\beta_{nom}$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  estabelecidos pelo gestor. Isso significa que qualquer alteração em alguma dessas variáveis modificará o resultado final de  $n_X$ . Com base nisso, elaborou-se duas tabelas nas quais foram testadas a influência da variação de  $\alpha_{nom}$  e  $\beta_{nom}$  (tabela 6.5) e de  $\delta$  e  $\gamma$  (tabela 6.6) no valor de  $n_X$ .

Tabela 6.5. Cálculo do tamanho da amostra ( $n_x$ ) para diversos valores de  $\alpha_{nom}$  e  $\beta_{nom}$ .

Cenário	$\alpha_{nom}$	$\beta_{nom}$	$n_x$
A	0,0001	0,20	45
A	0,0005	0,20	37
A	0,0010	0,20	34
A	0,0027	0,20	29
A	0,0050	0,20	26
B	0,001	0,10	42
B	0,001	0,15	37
B	0,001	0,20	34
B	0,001	0,25	31
B	0,001	0,30	29
C	0,0001	0,10	54
C	0,0005	0,15	41
C	0,0010	0,20	34
C	0,0027	0,25	26
C	0,0050	0,30	21

Fonte: autoria própria

Como pode ser observado, a tabela 6.5 foi dividida em três diferentes cenários para facilitar a avaliação dos resultados. No cenário “A” o valor de  $\alpha_{nom}$  é alterado enquanto  $\beta_{nom}$  é mantido constante; no cenário “B”,  $\beta_{nom}$  varia e  $\alpha_{nom}$  fica constante; e no cenário “C”, ambos variam. Considere que em todos os cenários as taxas de não conformidades aceitável e inaceitável do processo permanecem constantes, isto é,  $\delta = 0,01$  e  $\gamma = 0,05$ .

A partir da tabela 6.5 é possível perceber duas situações interessantes: a primeira é que quanto menor for o valor definido para  $\alpha_{nom}$  ou  $\beta_{nom}$ , ou seja, quanto mais rígido for o controle do processo, maior será o valor de  $n_x$ . A segunda consiste no fato de que quando ambas as probabilidades são variadas, valores mais extremos de  $n_x$  são obtidos (valores máximos e mínimos desse experimento). Assim, caso o gestor aceite um controle menos rigoroso do erro tipo I e do erro tipo II ( $\alpha_{nom} = 0,0050$  e  $\beta_{nom} = 0,30$ , por exemplo), o menor tamanho de amostra é encontrado ( $n_x = 21$ ). Contudo, esse valor ainda é considerado bastante elevado pelos estudiosos da área do controle estatístico do processo.



Tabela 6.6. Cálculo do tamanho da amostra ( $n_x$ ) para diversos valores de  $\delta$  e  $\gamma$ .

Cenário	$\delta$	$\gamma$	$n_x$
A	0,001	0,05	10
A	0,005	0,05	24
A	0,010	0,05	45
A	0,015	0,05	76
A	0,020	0,05	125
B	0,01	0,005	335
B	0,01	0,020	278
B	0,01	0,050	45
B	0,01	0,100	20
B	0,01	0,150	13
C	0,001	0,005	79
C	0,005	0,020	77
C	0,010	0,050	45
C	0,015	0,100	27
C	0,020	0,150	21

Fonte: autoria própria

A Tabela 6.6 segue a mesma lógica da tabela anterior, contudo as variáveis de interesse são  $\delta$  e  $\gamma$ . Nesta tabela o cenário “A” corresponde à situação onde o valor de  $\delta$  é alterado e  $\gamma$  é mantido constante; já no cenário “B”, tem-se que  $\gamma$  varia e  $\delta$  fica constante; por último, no cenário “C”, ambas variam. Considere que a probabilidade do erro tipo I e erro tipo II permanecem constantes, sendo  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,20$ .

Analisando a Tabela 6.6 percebe-se que quanto menor for a taxa de não conformes permitida ( $\delta = 0,001$ , por exemplo), menores serão as amostras ( $n_x = 10$ , para esse  $\delta$ ). Em contra partida, valores baixos de  $n_x$  são obtidos à medida que a taxa de não conformes inaceitável aumenta ( $n_x = 13$  quando  $\gamma = 0,150$ ). A partir disso é possível concluir que quanto menos produtos defeituosos são permitidos para o processo, menores tamanhos de amostras são suficientes para construção do gráfico e monitoramento do processo. Por último, nota-se no cenário 3 que a taxa de não conformes inaceitável ( $\gamma$ ) tem maior influência no tamanho da amostra, pois quando  $\gamma$  é alto (exemplo,  $\gamma = 0,150$ ), apesar de  $\delta$  também ser alto ( $\delta = 0,020$ ) o menor valor de  $n_x$  é encontrado ( $n_x = 21$ ).

A partir da análises feitas nesta seção, pode-se concluir que o menor tamanho de amostra é obtido quando o gestor opta por reduzir a taxa de não conformes aceitável e manter as demais variáveis nos valores iniciais, ou seja,  $\delta = 0,001$ ,  $\gamma = 0,05$ ,  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,20$ .

## 6.5 Influência dos índices de capacidade no desempenho do gráfico

Foi abordado no capítulo 5 que as medidas de desempenho do gráfico modificado e de aceitação,  $FAR_{max}$  e  $ARL_{0,min}$ , podem ser calculadas com base nos índices de capacidade do processo. Assim, é evidente que qualquer alteração na capacidade do processo influenciará no desempenho do gráfico.

Uma vez que o gráfico modificado só pode ser aplicado em processos altamente capazes, tem-se, inicialmente, um índice de capacidade elevado ( $C_{PK} \geq 2,0$ ). Contudo, se há perturbações que desloquem a média do processo, a sua capacidade é reduzida e, conseqüentemente, o índice efetivo também diminui.

A Tabela 6.7 mostra numericamente como o deslocamento da média influencia no índice de capacidade efetiva do processo e, conseqüentemente, nos valores de  $FAR_{max}$  e  $ARL_{0,min}$ . Considere que o desvio padrão do processo é conhecido e constante ( $\sigma_0 = 2$ ) e que  $\delta = 0,01$  e  $\alpha = 0,001$ .

Tabela 6.7. Influência do deslocamento da média do processo nos índices de capacidade e nas medidas de desempenho  $FAR_{max}$  e  $ARL_{0,min}$ .

USL	LSL	$Z_\delta$	$Z_\alpha$	$\mu = \mu_0 + \Delta$	$C_{Pk}$	$C_P$	$FAR_{max}$	$ARL_{0,min}$
32	8	2,33	3,09	20	2	2	0	-
32	8	2,33	3,09	21	1,833	2	0	-
32	8	2,33	3,09	22	1,667	2	0	-
32	8	2,33	3,09	23	1,500	2	0	-
32	8	2,33	3,09	24	1,333	2	0	-
32	8	2,33	3,09	25	1,167	2	0	-
32	8	2,33	3,09	26	1	2	1,31E-12	7,63E+11
32	8	2,33	3,09	27	0,833	2	2,24E-05	44650,96697
32	8	2,33	3,09	27,347	0,775	2	0,001072	933,0463936
32	8	2,33	3,09	28,407	0,667	2	0,508303	1,967332364
32	8	2,33	3,09	29	0,500	2	0,959914	1,041759887
32	8	2,33	3,09	30	0,333	2	0,999998	1,000001542
32	8	2,33	3,09	31	0,167	2	1	1
32	8	2,33	3,09	32	0	2	1	1

Fonte: autoria própria

Para construção da Tabela 6.7, a média do processo foi deslocada do valor nominal até o limite de especificação superior e, para cada nova posição da média calculou-se os índices de

capacidade (conforme as equações **38** e **39**), o  $FAR_{max}$  e o  $ARL_{0,min}$  (de acordo com as equações **40** e **41**). Considere que o desvio padrão do processo é conhecido e constante e que  $\delta = 0,01$  e  $\alpha = 0,001$ .

Como pode ser visto, inicialmente, quando a média está centrada no valor nominal ( $\mu = 20$ ), os índices de capacidade são iguais a 2, isto é, o processo pode ser considerado altamente capaz. À medida que a média se desloca em direção ao limite de especificação, a capacidade efetiva do processo ( $C_{pk}$ ) diminui, indicando que o processo está perdendo sua capacidade. A capacidade potencial ( $C_p$ ) não se altera porque o desvio padrão permanece constante.

Enquanto a capacidade efetiva do processo é superior 1,167, a probabilidade máxima de ocorrer um alarme falso é praticamente zero (potências superiores a -100) e, conseqüentemente, o número médio mínimo de amostras até o primeiro alarme tende ao infinito (se  $FAR_{max}$  tende a zero,  $ARL_{0,min} = \frac{1}{FAR_{max}}$  tende a infinito - por essa razão o software não escreveu numericamente o valor de  $ARL_{0,min}$ ), isso indica a alta capacidade do processo. Quando, porém, a média se desloca para o limite de aceitação superior ( $\mu_{U,acc} = 27,35$ ) o risco de um alarme falso aumenta significativamente e se assemelha ao valor nominal da probabilidade do erro tipo I. Caso a média se desloque para o limite superior de controle ( $UCL = 28,407$ ), a chance de ocorrer um alarme falso aumenta para aproximadamente 50% e o  $ARL_{0,min}$  se reduz drasticamente ( $ARL_{0,min} = 2$ ). A partir do momento que a média excede ao limite de controle, o processo sai de sua condição de controle e o gráfico passa a emitir alertas com alta frequência. Por essa razão, a chance de emissão de um alarme (só que agora verdadeiro) passa a ser superior a 95% (podendo chegar a 100% à medida que a média se aproxima do limite de especificação superior) e, em média a cada amostra retirada do processo o gráfico vai emitir um sinal para o gestor.

Conclui-se então que, à medida que o processo perde capacidade produtiva, a probabilidade de o gráfico emitir um alarme falso aumenta e, conseqüentemente, o número médio de amostras até o primeiro alarme diminui.

## 7 CONCLUSÃO

O gráfico modificado é uma ferramenta interessante para controle de processos altamente capazes, isto porque ele permite a variação da média dentro de uma faixa de valores (diferente dos gráfico de Shewhart, cuja média tem que se manter estável no valor alvo). Essa faixa permitida para variação da média é definida com base no índice de não conformes aceitável, o que protege o processo da produção exacerbada de itens defeituosos. Ou seja, apesar de não haver controle rígido da estabilidade da média, a qualidade do processo, em termos de produção de itens não conformes, não é comprometida e o número de intervenções no processo é reduzido se comparado ao gráfico de controle tradicional de Shewhart. Por essa razão, a aplicação deste gráfico pode inclusive reduzir custos.

Apesar de ser uma ferramenta relevante, pouco se sabe sobre ele. O presente trabalho procurou definir as variáveis e os parâmetros necessários para a construção do gráfico modificado na Fase I do CEP. Além de ampliar o conhecimento sobre o desempenho deste gráfico, o qual é importante para a condução da Fase II.

São consideradas neste trabalho duas medidas de desempenho: a taxa de alarmes falsos (FAR) e o número médio de amostras até o primeiro alarme (ARL). A análise do desempenho do gráfico considerou os casos onde o desvio padrão do processo é conhecido e estimado, visando compreender os efeitos da estimação do parâmetro nessas medidas.

Percebeu-se que a estimação do desvio padrão compromete o desempenho do gráfico, principalmente pelo fato de FAR e ARL se tornarem variáveis aleatórias condicionadas às estimativas. Uma vez que elas se tornam variáveis aleatórias, é possível definir o comportamento delas a partir de suas distribuições de probabilidade, p.d.f. (função distribuição de probabilidade) e c.d.f. (função densidade acumulada).

Assim, duas grandes contribuições deste trabalho foram a descrição dos cálculos exatos de  $FAR_{max}$  e  $ARL_{0,min}$  quando o desvio padrão é conhecido (caso K); e a definição das equações da p.d.f. e c.d.f de  $CFAR_{max}$  e  $CARL_{0,min}$  para o caso onde o desvio padrão é estimado (caso U). A partir dessas equações foi possível conhecer os parâmetros ( $\mu_0$  e  $\sigma_0$ ) dessas medidas, o que permitiu comparar o desempenho do gráfico entre o cenário ideal (caso K) e a realidade mais comum dos processos (caso U).

Além disso, foram consideradas no desenvolvimento do modelo estatístico do caso U as duas perspectivas de análise dos efeitos da estimação de parâmetros nas medidas de desempenho: a perspectiva condicional, a qual leva em consideração a variabilidade de amostras entre usuários, e a perspectiva incondicional que considera a média do desempenho de todos os gráficos vinculados aos diversos valores possíveis de estimativas.

Foi visto também que para o desempenho do gráfico modificado no caso U ser semelhante aos resultados do caso K é necessário um grande número de amostras ( $m$ ) na Fase I. Tal fato, somado ao tamanho específico de amostra ( $n_x$ , que geralmente é grande), representa um valor extremamente alto de dados (17.000 dados na situação hipotética descrita no capítulo 6, na qual para alcançar valores similares de  $FAR_{max} = 0,001$  e  $ARL_{0,min} = 1000$  são necessárias  $n_x = 34$  e  $m = 500$ ), o que é completamente inviável. Portanto, o gestor deve analisar a relação custo-benefício de se garantir o mesmo nível de desempenho ou renunciá-lo, todavia essa decisão deve ser tomada com cuidado para também não comprometer a qualidade do gráfico.

Com o intuito de reduzir esse número de dados, foram propostas três soluções para redução do tamanho  $n_x$  de amostra: folgar o controle das probabilidades nominais dos erros tipo I e erro tipo II ( $\alpha_{nom}$  e  $\beta_{nom}$ ); diminuir a taxa de não conformes aceitável ( $\delta$ ); aumentar a taxa de não conformes inaceitável ( $\gamma$ ). Além disso foi sugerido utilizar o método do ajuste de limites para diminuir o número de amostras ( $m$ ) necessárias para aproximar os resultados do  $CFAR_{max}$  e  $CARL_{0,min}$  (caso U) aos valores de  $FAR_{max}$  e  $ARL_{0,min}$  (caso K).

Por último, foi possível verificar que o gráfico de aceitação é, realmente, indicado para processos altamente capazes, pois, nesse caso, mesmo que a média se desloque um pouco do valor nominal (dentro de uma faixa específica de valores) e a sua capacidade diminua moderadamente, o desempenho do gráfico permanece quase que inalterado, com probabilidade de um falso alarme bem próximo de zero. Contudo, se a média se deslocar para um valor próximo ao limite de aceitação, os riscos de um alarme falso aumentam. E caso a média se desloque para os limites de especificação, o processo é considerado incapaz ( $C_{pk} = 0$ ) e, por isso, a cada amostra o gráfico sinalizaria condição fora de controle.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIAG CATALOG, *Publications and Training*. AIAG ORG, 2016.
- ALBERS, W., KALLENBERG, W. C. M. e NURDIATI, S. *Exceedance probabilities for parametric control charts*. **Statistics**, v. 39 Issue 5, p. 429-443, 2005.
- BASSANEZZI, R. C. *Ensino – aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- BERTO, R. M. V. S.; NAKANO, D. N. A Produção Científica nos Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção: Um Levantamento de Métodos e Tipos de Pesquisa. **Production**, v. 9, n. 2, p. 65–75, 2000.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Editora Contexto. v.12, p.12-63, 2005.
- CHAKRABORTI, S. *Run Length, Average Run Length and False Alarm Rate of Shewhart X-bar Xhart: Exact Derivations by Conditioning*. **Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation**, v. 29, n. 1, p. 61–81, 2000.
- CHAKRABORTI, S. *Parameter Estimation and Design Considerations in Prospective Applications of the  $\bar{X}$  Chart*. **Journal of Applied Statistics**, v. 33, p. 439-459, 2006.
- CHAKRABORTI, S.; VAN DE WIEL, M. A. *A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic*. **Beyond Parametrics in Interdisciplinary Research: Festschrift in Honor of Professor Pranab K. Sen**, v. 1, p. 156–172, 2008.
- CHOU, C. Y.; CHEN, C. H.; LIU, H. R. *Acceptance control charts for non-normal data*. **Journal of Applied Statistics**, v. 32, n. 1, p. 25–36. 2005.
- EPPRECHT, E. K.; LOUREIRO, L. D.; CHAKRABORTI, S. *Effect of the Amount of Phase I Data on the Phase II Performance of  $S_2$  and  $S$  Control Charts*. **Journal of Quality Technology**, v. 47, p. 139-155, 2015.
- FILIPPINI, R. *Operations management research: some reflections on evolution, models and empirical studies in OM*. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 17, n. 7, p. 655–670, 1997.
- FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- FREUND, R. A. *Acceptance Control Charts*. **Industrial Quality Control**, p. 13–22, 1957.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (organizadoras). *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- HILL, D. *Modified Control Limits*. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 5, n. 1, p. 12–19, 1956.
- HOLMES, D. S.; MERGEN, A. E. *Exponentially weighted moving average acceptance charts*. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 16, n. 2, p. 139–142, 2000.

ISO 7870-3, Control charts — Part 3: *Acceptance control charts*, 2012.

JARDIM, F.S., CHAKRABORTI, S., EPPRECHT, E. K.  $\bar{X}$  Chart with Estimated Parameters: The Conditional ARL Distribution and New Insights. **Production and Operations Management**, 2018.

JARDIM, F.S., CHAKRABORTI, S., EPPRECHT, E. K. Two Perspectives for Designing a Phase II Control Chart with Estimated Parameters: The Case of Shewhart Xbar Chart. **Journal of Quality Technology**, 2019.

JONES-FARMER, L. A.; WOODALL, W. H.; STEINER, S. H.; e CHAMP, C. W. *An Overview of Phase I Analysis for Process Improvement and Monitoring*. **Journal of Quality Technology**, v. 46, p. 265-280, 2014.

LIN, P. C.; PEARN, W. L. *Testing manufacturing performance based on capability index Cpm*. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 27, n. 3-4, p. 351-358, 2005.

MAHMOUD, M. A.; HENDERSON, G. R., EPPRECHT, E. K., WOODALL, W. H. Estimating the Standard Deviation in Quality-Control Applications. **Journal of Quality Technology**, v. 42, n. 4, 2010.

MHATRE, S.; SCHEAFFER, R. L.; LEAVENWORTH, R. S. *Acceptance Control Charts with Stipulated Error Probabilities based on Poisson Count Data*. **Research Report**, v. 13, n. 4, p. 221-227, 1981.

MIGUEL, P. A. C. et al. *Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações*. Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO, 2012.

MOHAMMADIAN, F.; AMIRI, A. *Economic-Statistical Design of Acceptance Control Chart*. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 29, n. 1, p. 53-61, 2012.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

OPRIME, P. C., MENDES, G. H. D. S. *The X-bar control chart with restriction of the capability indices*. **International Journal of Quality & Reliability Management**, v. 34, n. 1, pp.38-52, 2017.

ROSA, M.; OREY, D. C. A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. **Revista Horizontes**, v. 25, n. 2, p. 197-206, 2007.

SALEH, N.A., MAHMOUD, M. A., KEEFE, M. J., WOODALL, W. H., The difficulty in designing Shewhart  $\bar{X}$  and X control charts with estimated parameters. **Journal of Quality Technology**, v. 47, n. 2, 2015.

SEIF, A.; FARAZ, A.; SANIGA, E. *Economic statistical design of the VP  $X^-$  control charts for monitoring a process under non-normality*. **International Journal of Production Research**, v. 53, n. 14, p. 4218-4230, 2015.

STEINER, S. H.; WESOLOWSKY, G. O. *Simultaneous Acceptance Control Charts for Products with Multiple Correlated Characteristics*. **International Journal of Production Research**, v. 32, n. 3, p. 531-543, mar. 1994.

TOLEDO, J. C.; LIZARELLI, F. L.; SANTANA JUNIOR, M. B. *Success factors in the implementation of statistical process control: action research in a chemical plant*. **Production**, v. 27, n. 0, p. 1-14, 2017.

WESOLOWSKY, G. O. *Simultaneous Acceptance Control Charts for Two Correlated Processes*. **Technometrics**, v. 32, n. 1, p. 43–48, 1990.

WESOLOWSKY, G. O. *Simultaneous Acceptance Control Charts for Independent Processes*. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 41, n. 1, p. 147–158, 1992.

WOODALL, W.H. *The statistical design of quality control charts*. **Journal of the Royal Statistical Society**, v.34, p. 155-160, 1985.

WOODALL, W.H.; FALTIN, F. W. “*Rethinking Control Chart Design and Evaluation*”. **Quality Engineering**, 2019.

WU, Z. *An adaptive acceptance control chart for tool wear*. **International Journal of Production Research**, v. 36, n. 6, p. 1571–1586, 1998.