Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas (PPGECE)

O MODELO DE BARRAS COMO RECURSO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Gabriel de Oliveira Fontes

Orientadora: *Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa*

São Carlos
Outubro de 2019

O MODELO DE BARRAS COMO RECURSO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS

Gabriel de Oliveira Fontes

Orientadora: *Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

São Carlos
Outubro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gabriel de Oliveira Fontes, realizada em 22/10/2019:

Grazielle F. Barbosa

Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar

Everaldo de Mello Bonotto

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC/USP

Yuriko Yamamoto Baldin

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin
UFSCar

Dedico este trabalho à minha querida e amada filha Valentina, pois ela é o motivo de todos os meus esforços e a razão da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, que sempre contribuiu muito com a minha bagagem de conhecimentos. Eles foram responsáveis pela maior herança da minha vida: meus estudos. Agradeço também à minha orientadora Grazielle Feliciani Barbosa, por suas correções e incentivos. Também agradeço a professora Yuriko Yamamoto Baldin por seus ensinamentos!

Abstract

According to Saeb data (assessment used by the federal government to measure student learning at the end of each stage), most Brazilian students do not achieve results considered sufficient when referring to mathematics teaching, considering that it is sufficient to perform operation with natural numbers or recognizing function graphs, who knows that these students have a minimal understanding of algebra. Therefore, the work foresees the study of a model for teaching algebra that became known in Singapore, which obtained excellent results in international exams. In addition, the work has the resolution of 7 problems, using the Singapore model together with the Problem Solving which aims at four steps that were proposed by Polya, they are: Understanding the Problem, Establishing a Plan, Implementing the Plan and Retrospect. These two methodologies aim to serve as a basis for mathematics teachers in algebra teaching. The paper also presents a brief understanding of the transition process from arithmetic to algebra, recognizing that understanding this process facilitates the teacher to find the difficulties of students. During the resolution of each problem, we tried to create, in some points, dialogues between teacher and student, trying to simulate the teaching-learning environment, besides providing what started the work, improving the training of mathematics teachers.

Keywords: Problem Solving, Bar Modeling, Singapore, Algebra Teaching, Teacher Training.

Resumo

Segundo os dados do Saeb (avaliação utilizada pelo governo federal para medir a aprendizagem dos alunos ao fim de cada etapa), a maior parte dos alunos brasileiros não atingem resultados satisfatórios quando nos referimos ao ensino de Matemática; considerando como suficiente a capacidade de realizar operações com números naturais, reconhecer gráficos de funções e compreender minimamente a álgebra. Por isso, o presente trabalho prevê o estudo de um modelo para ensinar álgebra, conhecido em Singapura, país que obteve ótimos resultados nos exames educacionais. Além disso, a pesquisa conta com a resolução de sete problemas, com a utilização do modelo de Singapura juntamente com a Resolução de Problemas, visando quatro passos que foram propostos por G.Polya, sendo eles: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto. Tais metodologias têm como objetivo servir de base para os professores de Matemática no ensino de álgebra. O trabalho ainda apresenta uma breve discussão do processo de transição da aritmética para álgebra, reconhecendo que o procedimento facilita a detecção das dificuldades dos alunos pelo professor. Durante a resolução de cada problema, procuramos criar, em alguns pontos, diálogos entre professor e aluno, tentando simular o ambiente de ensino-aprendizagem, além de recuperar a proposta inicial do trabalho: melhorar a formação dos professores de Matemática.

Palavras chave: Resolução de Problemas; Modelo de Barras; Singapura; Ensino de Álgebra; Formação de Professores.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Em toda a história da humanidade, temos exemplos de civilizações que obtiveram êxito em suas inovações, levando este conhecimento para outros lugares no mundo, exemplo disso são: estratégias de guerra, modelos políticos e econômicos, ou até mesmo as mais diversas invenções tecnológicas, sempre modernizando o que já se conhece. Agora, imagine se tivéssemos um modelo de educação que apresentasse bons resultados! Pois esse modelo existe, e segundo Queiroz (2014), ele é presente em Singapura, que conseguiu transformar positivamente e significativamente o ensino através de um projeto de educação.

Agora, quando o assunto é educação, não podemos imaginar que tal feito será concretizado apenas copiando um modelo que deu certo em outro lugar. Devemos ter claro que as condições de determinados lugares são diferentes em outros, por isso vale mais compreender o que foi feito, e dessa forma, aproveitar o que é adequado e possível dentro da nossa realidade, do que achar que o modelo dará certo sempre em qualquer lugar, desconsiderando aspectos importantes como a política e a cultura da região, por exemplo.

Dentro desse projeto, onde nos deteremos com maior afinco, encontra-se um modelo para ensino de Matemática, mais especificamente, é um modelo para trabalhar problemas de álgebra, conhecido como Modelo de Barras. A motivação desse trabalho, se deu através das próprias experiências vividas pelo aluno ao longo de toda a jornada escolar, onde a álgebra sempre se fez presente, e em grande parte se mostrou complexa e abstrata, além da motivação por parte da orientadora em trabalhar com a matemática de Singapura, assunto no qual foi banca e dessa forma lhe gerou interesse. O autor deste trabalho, no momento em que o trabalho foi pensado e começou a se organizar, não possuía sala de aula, sendo assim o objetivo central da dissertação se tornou em, estudar a matemática de Singapura através de trabalhos já realizados no assunto, dentre eles trabalhos realizados pela professora Yuriko, especialista no assunto, e seus orientandos; ainda utilizar o modelo de Barras juntamente com a Resolução de Problemas, que é central na Matemática de Singapura, para criar um roteiro para os professores de Matemática, faremos isso resolvendo alguns problemas algébricos, a maioria retirados da OBMEP.

Claramente, que atingir um ensino de Matemática eficiente, não basta um modelo de ensino ou um conjunto de medidas que atinjam somente professores e alunos, mas sim a motivação e o esforço de toda a população, como foi em Singapura. Apesar disso, trabalhar com a formação de professores é, sem dúvida, contribuir para tal feito, fazendo-os repensar suas metodologias de ensino e propondo um jeito novo de trabalhar os problemas algébricos. Dessa forma, o trabalho tenta responder as seguintes questões: o que dizem os documentos norteadores da educação brasileira sobre o ensino de álgebra? O que é a Matemática de Singapura? Como resolver um problema algébrico utilizando o modelo de Barras?

Com discussões também subsidiadas por textos estrangeiros, o trabalho se sustenta a partir de trabalhos desenvolvidos pela especialista no assunto, Yuriko Yamamoto Baldin e outras três pesquisas desenvolvidas por alunos da UFSCar: o primeiro, um trabalho de graduação desenvolvido pela Milena Brochine Ribeiro, com foco principal na resolução de problemas através do modelo pictórico e as demais, são dissertações de mestrado, desenvolvidas por Jonas Marques dos Santos Queiroz e Danilo Eudes Pimentel, que abordam a parte teórica do modelo de Singapura. Considerando os dois trabalhos, a presente dissertação desenvolve-se a partir da união desses dois trabalhos, não com o objetivo de torná-lo mais completo, pois os trabalhos apresentam-se muito completos para o que se espera, mas o de fazer com que a pesquisa seja a mais abrangente possível dentro do objetivo proposto. Para melhor compreensão dos procedimentos analíticos do trabalho, segue uma breve descrição dos capítulos.

O Capítulo 1, trata sobre a transição da Aritmética para Álgebra; o caminho, no ensino da Matemática, que tem a função de tornar mais concreto e lógico a passagem do conhecimento numérico para conhecimento simbólico. Antes de entender essa passagem e como ela se apresenta, vamos olhar para documentos da educação brasileira, para entender o que é esperado no ensino da Matemática, mais especificamente da álgebra. No Brasil, há dois documentos norteadores da educação, o primeiro deles é a BNCC (Base Nacional Curricular Comum), um documento obrigatório que determina competências, habilidades e conhecimentos que todos os alunos deveriam desenvolver ao longo de sua jornada nas escolas. Ela é orientada por 3 princípios, que foram traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica: ético, político e estético. Dentro deste documento, voltaremos nossos olhares ao ensino de álgebra e o que esperar quanto a aprendizagem dos alunos. O segundo documento são os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), que por sua vez é não obrigatório, mas mostra ter grande importância para os docentes, pois acaba servindo como um material de apoio já que apresenta orientações e propostas, didáticas e metodológicas. Didáticas, pois auxiliam a forma como o professor deve agir em sala de aula, ou como intervir diante dos alunos, e metodológica, pois traz propostas de ensino de matemática, recursos como História da Matemática, Resolução de Problemas, Modelagem, etc. Esses documentos são essenciais nesse trabalho, visto que reforçam as metodologias desenvolvidas na segunda parte, capítulo cuja ideia central desenvolvemos no parágrafo seguinte. Concluímos o capítulo explicando o processo de transição da aritmética para álgebra, que não se dá forma abrupta e imediata, mas através de um caminho longo que vai desde os primeiros anos do ensino infantil até a metade do ensino fundamental II. Todo esse processo tem início no ensino da aritmética, com apresentação dos números. No meio do caminho entre a aritmética até a álgebra, é onde se encontra a Pré-Álgebra. Dentro da Pré-Álgebra, temos mais dois caminhos a percorrer, a Álgebra da Aritmética e a Algebrização, antes de cairmos na Álgebra. Entender o processo é útil ao professor de Matemática, pois dessa forma ele é capaz de identificar as defasagens dos seus alunos, e também ajuda na escolha dos problemas a serem trabalhados. Além disso, é importante que fique claro, que mesmo a Aritmética não some quando chegamos na Álgebra, e nem que a Álgebra não exista no início da Aritmética, já que a própria compreensão de número é simbólica e abstrata.

As metodologias de ensino, que se encontram no Capítulo 2 desse trabalho, são as grandes chaves da Matemática de Singapura, já que contribuem, com um conjunto de métodos, auxiliando professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de álgebra. O capítulo dá início com a Resolução de Problemas, que se baseia em uma obra clássica, "A Arte de Resolver Problemas" de George Polya, que estabelece quatro passos na busca pela solução de um problema, que são: Compreensão, Estabelecimento do Plano, Resolução e Retrospecto. A Compreensão que se relaciona com uma boa leitura e interpretação do enunciado, se familiarizando com as peculiaridades apresentadas na situação do problema. O Estabelecimento do Plano, é o que demanda maior esforço e habilidades do aluno, pois necessita que o mesmo trace os passos, que serão o caminho até o objetivo final, que é a solução do problema. Esse momento é o mais importante na resolução para nós, pois aqui as barras são projetadas e toda a "mágica" acontece, por isso se torna um pouco complexo, já que precisamos modelar os dados do problema, através de algo concreto; no nosso caso, o concreto são as barras. Com o plano traçado, entra em cena o processo de Resolução, ao contrário do passo anterior, esse não deve trazer dores de cabeça, já que cabe nesse momento finalizar o problema, por isso basicamente ficam os cálculos para concluir. Por último, o que Polya chama de Retrospecto, cujos objetivos são a análise e as considerações dos resultados encontrados, cabendo também propor ou comparar diferentes soluções. Consideramos o papel do professor o de mediador nesse processo da aprendizagem, procurando guiar o aluno na construção do conhecimento, de modo a fazer com que a criança tenha o papel principal. Singapura que hoje ocupa as primeiras colocações em ensino de Matemática no mundo, ficou famosa por ter revolucionado o ensino de matemática no país.

Então onde está o grande segredo? O grande segredo é o modelo de Barras, que traz a construção de uma problemática que sempre se colocou abstrata e agora, através do que chamamos de Pictórico, pode ser percebido como algo concreto. O Pictórico para nós, sem o rigor de sua definição e de forma crua, é a representação do abstrato através de um desenho, esse desenho, por sua vez, será uma barra. A escolha desse modelo mais específico se dá por vários motivos, que tratamos ao longo do trabalho, mas principalmente pela facilidade que temos em desenhar uma barra. Nesse capítulo, também destacamos como um fator importante para o grande sucesso em Singapura, a filosofia de um governo que se mostra consciente no investimento em educação, transformando positivamente a visão do país.

O Terceiro e último capítulo apresenta sete situações-problema, nais quais resolveremos utilizando aquilo que aprendemos com a Resolução de Problemas e o modelo de Barras. O objetivo maior da utilização desses problemas no trabalho, é mostrar de forma prática, o que o modelo pode fazer e como as soluções se dão de forma mais clara e menos abstrata. Utilizamos em todos os problemas os passos estabelecidos por Polya, pois assim, conseguimos criar um roteiro que facilita o entendimento do processo e também contribui para a prática docente. Todos nós professores quando escolhemos um problema para os nossos alunos e resolvemos, sempre devemos nos colocar no lugar da criança e tentamos prever quais dúvidas podem surgir. Por isso, e por não ter tido a oportunidade de fazer esse trabalho em sala de aula, procurei vivenciar, intuitivamente, o ambiente escolar e sempre me colocando, tanto no lugar do aluno quanto do professor, fazendo questionamentos a respeito das situações-problema.

Dos sete problemas, seis deles foram tirados do banco de questões da OBMEP, sendo que todos eles fazem parte dos níveis 1 ou 2, assim, nosso foco fica mais restrito à Pré-Álgebra, no processo de Algebrização. Por conhecer bem os problemas da OBMEP e por acompanhar de perto o belo trabalho que os professores universitários fazem na criação dos mesmos, foi indispensável a utilização desses problemas no trabalho, sendo que cada um deles tem suas características e peculiaridades. A escolha de problemas diferentes é uma forma de abranger e tornar mais completo esse roteiro.

Concluímos nosso trabalho com a certeza de que o Método de Barras facilita a abstração nesta fase do desenvolvimento, pois transforma um conhecimento abstrato em algo concreto ajudando os alunos no processo de Algebrização.

Capítulo 1

Transição da Aritmética para Álgebra

Nesse capítulo, será apresentado o ensino de álgebra segundo a Base Nacional Curricular Comum e os Paramêtros Curriculares Nacionais, de maneira a tentar compreender todo o processo de transição da aritmética para álgebra. Entendemos que a criança aprende nos anos inciais primeiramente a aritmética, e é a partir dela que devemos, através de um processo chamado algebrização, levar o aluno à abstração da álgebra. Para isso, vamos olhar inicialmente para a Base Nacional Curricular Comum para compreender como a álgebra se apresenta no Ensino Fundamental.

1.1 Álgebra na concepção da BNCC

A Base Nacional Curricular Comum propõe cinco unidades temáticas que auxiliam no desenvolvimento das habilidades que devem ser ensinadas no Ensino Fundamental, dentre as quais está a Álgebra, que é concebida como objeto de estudo para o trabalho. Portanto, entender essa temática através de uma ementa compartilhada por todo o país do ponto de vista metodológico torna-se extremamente enriquecedor.

Para a BNCC, estudar álgebra é fazer uso de letras e outros símbolos que auxiliem na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas Matemáticas, de modo a destacar que tal unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. Tais colocações são uma tentativa de generalizar os conteúdos que devem ser ensinados aos alunos do ensino fundamental, mas para que o estudante compreenda a álgebra, ou seja, para que ele consiga, por exemplo, resolver equações que envolvam letras e símbolos, habilidades previstas somente para o 7º e 8º anos, ele ainda tem um longo caminho a percorrer, e durante esse caminho o pensamento algébrico vai sendo construído através de um currículo pré-estabelecido desde os anos iniciais. O documento é dividido em unidades temáticas, orientando ano a ano quais objetos de conhecimento devem ser trabalhados, por exemplo no 7º ano, na unidade temática álgebra, um dos objetos de conhecimento previsto são as equações polinomiais do 1º grau. Vale ressaltar que alguns desses objetos, importantes no processo de ensino de álgebra, como a "ampliação dos conjuntos numéricos"por exemplo, não aparecem diretamente na unidade temática álgebra, pois a Base entende esse objeto como pertencente a unidade temática "números". O mesmo ocorre com o sistema de representação decimal posicional e os algoritmos das operações, que são cruciais no raciocínio algébrico. Ou seja, a ênfase da estrutura algébrica acaba sendo quase que total nas sequências segundo a Base Nacional Curricular.

Veja o que a BNCC (2017, pág. 278-319) entende sobre os objetos de conhecimento na unidade temática álgebra, do 1º ao 9º ano do ensino fundamental:

1º ano: Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências; sequências recursivas: observação de regras usadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo),

2º ano: Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas; identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.

3º ano: Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas; relação de igualdade.

4º ano: Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural; sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero; relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; propriedades da igualdade.

5º ano: Propriedades da igualdade e noção de equivalência; grandezas diretamente proporcionais; problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

6º ano: Propriedades da igualdade; problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

7º ano: Linguagem algébrica: variável e incógnita; equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica; problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; equações polinomiais do 1º grau.

8º ano: Valor numérico de expressões algébricas; associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano; sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano; equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; sequências recursivas e não recursivas; variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

9º ano: Funções: representações numérica, algébrica e gráfica; razão entre grandezas de espécies diferentes; grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.

A BNCC fala em construção do pensamento algébrico, pois até o 7º ano os conteúdos são apresentados de forma mais concreta, pois a linguagem é quase toda numérica, tornando-a menos abstrata que a linguagem simbólica não numérica. Essa abstração, pode ser o resultado do aparecimento de incógnitas, por isso a importância de um modelo concreto que facilite a percepção do abstrato e faça a transição para o conhecimento algébrico da melhor maneira possível.

1.2 Álgebra na concepção dos PCN's

Os Parâmetros Curriculares Nacionais surgiram em 1997 com o objetivo de nortear os professores, principalmente os mais novos e inexperientes quanto as aulas que deveriam ministrar. O documento não só apresenta os conteúdos que devem ser ensinados e dominados pelos alunos em cada ano, mas também traz um olhar metodológico e didático de práticas adequadas que o professor pode seguir, além de indicações de obras bibliográficas. Percebemos que as diretrizes expostas se preocupam mais com o "como?" do que com o "o que?" e que, apesar disso, elas não são obrigatórias, mas sim recomendações aos profissionais da educação de como gerir uma aula, ao contrário da BNCC que surge como uma obrigatoriedade a ser seguida.

Os PCN's apresentam princípios usados em sua elaboração. A seguir destaco dois destes princípios que se relacionam diretamente com o trabalho.

Segundo os PCN's(1997, pág.19):

> "• *A atividade Matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, se servindo dele para compreender e transformar sua realidade.*
>
> • *No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância devendo ser cotidianamente estimulada, levando o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções e a aprender como organizar e tratar dados.*"

O primeiro princípio diz claramente o que já era proposto por Polya(1995) em "Arte de Resolver Problemas", isto é, o aluno com o auxílio do professor constrói o seu conhecimento. O segundo princípio, vai ao encontro do modelo de Singapura que veremos mais adiante, onde representamos os dados de um problema através de uma figura.

Os PCN's(1997, pág. 32) também tratam de metodologias que podem ser utilizadas em sala de aula, e dentre essas metodologias, destaco a resolução de problemas, foco desse trabalho, pois muitas vezes quando ouvimos falar dela, associamos a ideia a algo mecânico e exaustivo. Ao contrário, subvertendo tal ideia, vejamos o que se apresenta nos parâmetros:

> *"...o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.* "

Cabe lembrar que a maneira como exercemos nossas reflexões dentro da área de educação supostamente deveria ser feito considerando a maneira como o aluno aprenderia determinado conceito, por isso é importante destacar o que os PCN's dizem quanto ao que concerne à aprendizagem através da Resolução de Problemas: elaborar um ou vários procedimentos de resolução (simulações, tentativas, formular hipóteses), comparar os resultados com os de outros alunos e validar seus procedimentos. Esses princípios também são estabelecidos, de forma parecida, por Polya(1995, pag. 3 a 15) servindo de base para os nossos estudos.

Quanto a álgebra, os PCN's(1997, pàg. 39) trazem uma proposta inserida no bloco de Números e Operações que se apresenta apenas como representação para expressar generalização dentro das propriedades das operações aritméticas e na regularidade das sequências numéricas. Atualmente, como vimos na BNCC, o que prevalece no ensino da Álgebra é a construção do pensamento algébrico, mas do que solucionar exercícios é a busca pela compreensão dos processos.

1.3 Processo de Transição

Observou-se até aqui como se compreende a álgebra durante o ensino fundamental através da Base Nacional Curricular Comum Curricular,, além dos Parâmetros Curriculares Nacionais, esses que servem para os professores como um norteador dos conteúdos a serem ensinados aos alunos. Por isso, cada campo da Matemática possui seu objeto de estudo, como a Aritmética, que analisa os números (inteiros, racionais, reais, complexos) e suas operações; a Geometria, estudando os objetos geométricos do plano e do espaço (pontos, retas, segmentos, figuras, polígonos, etc) e suas transformações; ou mesmo a Teoria dos Conjuntos, ramo da Matemática, no qual estudamos as coleções de objetos ou então a Probabilidade, campo em que lidamos com os acontecimentos aleatórios, dentre outras áreas.

Sendo assim, qual são os objetos fundamentais da álgebra?

> "*Há duzentos anos a resposta seria certamente: "equações". Hoje em dia, essa resposta já não nos satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjunto.*"(PONTE, 2006, pág. 7)

Observemos o esquema do que é previsto pelos PCN's dentro do campo algébrico no ensino fundamental.

Dessa forma, quando se fala no ensino de Álgebra atualmente, torna-se comum encontrar a expressão pensamento algébrico, que tem por objetivo estimular o aluno a compreender melhor as abstrações da álgebra. Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, p. 37), o pensamento algébrico proporcina ao aluno, com relação ao estudo das estruturas, simbolização, modelagem e ao estudo da variação:

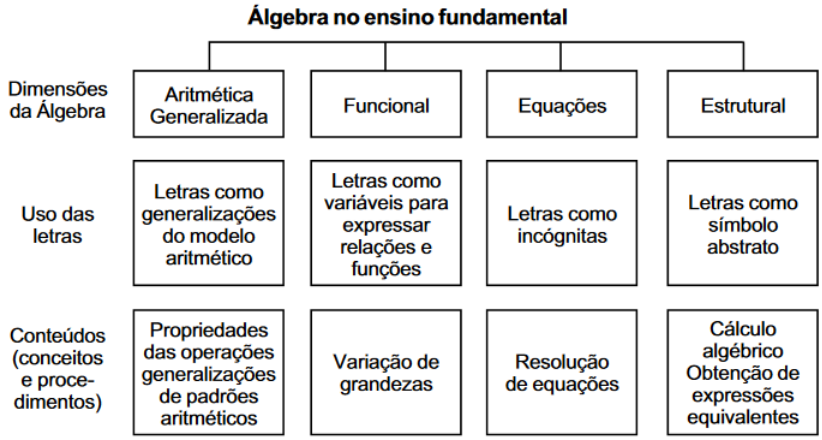


Figura 1.1: Fonte: PCN's (1998, pág. 116)

• Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),

• Representar e analisar situações Matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),

• Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),

• Analisar mudanças em diversas situações (Estudo da variação).

Outra ideia que está ficando para trás é o contato tardio do aluno com a álgebra, previsto apenas para o 7º ano do ensino fundamental, segundo os documentos educacionais mais antigos. Hoje já se fala em ensino de álgebra desde os primeiros anos do ensino fundamental. Obviamente, nos anos iniciais, não há a resoluç]ao de uma equação abstrata, mas começa-se a trabalhar as abstrações através, por exemplo, dos números com suas operações, de sequências que tentam fazer com que o aluno compreenda padrões, processos que chamamos de transição da aritmética para álgebra.

Observa-se por parte de alunos e professores um grande equívoco de achar que a álgebra difere da aritmética pela existência dos símbolos, mas se analisarmos com maior exatidão, a simbolização já começa na própria Aritmética. O que ocorre, é uma mudança de significados que alguns símbolos sofrem quando transitam da aritmética para álgebra.

Portanto, apesar da simbolização ser uma característica relacionada a álgebra, ela não se limita, podendo ser vista em outras áreas. Seu foco maior é justamente a abstração que causa grandes problemas no processo de ensino-aprendizagem, até porque, na maior parte das vezes, o significado de cada símbolo é esquecido, dando importância apenas para a manipulação do mesmo.

> *"...o simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular. Por outro lado, o simbolismo acarreta grandes perigos para o processo de ensino-aprendizagem, pois caímos no formalismo quando perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção aos símbolos e ao modo de os manipular."* (DAVIS e HERSH, 1995 apud PONTE, 2006, pág.9)

Pensando nos entraves dos alunos ao tentarem aprender as nuances da álgebra, principalmente no que se refere às abstrações provocadas pelo simbolismo, é indispensável que se compreenda o processo de transição da aritmética para álgebra.

Essa transição pode ser entendida em três passos: a aritmética, em seguida o que podemos chamar de pré-álgebra, o qual engloba a álgebra da aritmética e a algebrização, e o terceiro e último, está a álgebra. A imagem abaixo ilustra bem esse processo de transição.

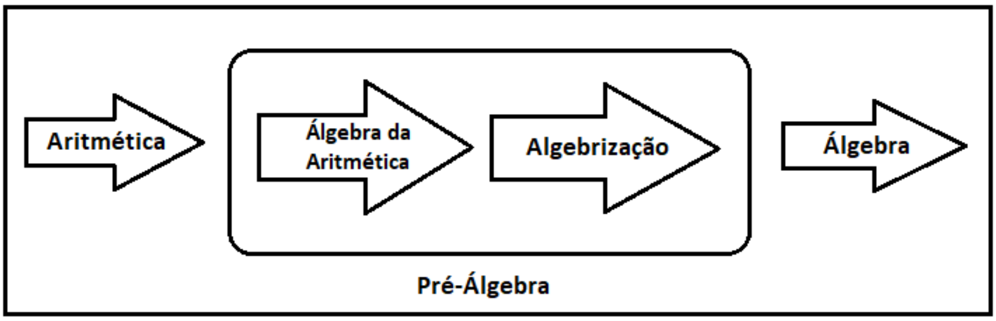


Figura 1.2: Fonte: Queiroz (2014, pág.28).

A transição da aritmética para álgebra ocorre durante todo o ensino fundamental, desde o 1º ano até o 9ºano. Vamos detalhar cada um desses passos encaixando cada um deles nos anos aos quais eles pertencem.

Os conteúdos de aritmética têm início nos anos iniciais, mais conhecido como Primeiro Ciclo (1º, 2º e 3º anos). Esses conhecimentos de Aritmética começam com o sistema posicional e com as primeiras noções de contagem, além do primeiro contato com operações básicas. No Segundo Ciclo (4º e 5º anos), os alunos vão consolidar o que aprenderam sobre as operações aritméticas e suas propriedades e terem o primeiro contato com as propriedades operatórias dos números inteiros positivos, momento em que os alunos passam a perceber a importância e as vantagens da Matemática para resolver os problemas do cotidiano e até mesmo aquelas situações que apresentam algum tipo de abstração. Esses conhecimentos de aritmética adquiridos no segundo ciclo são os que desenvolverão a Álgebra da Aritmética.

A Algebrização é considerada a fase mais importante e é também onde os professores e alunos encontram as maiores dificuldades. Ela ocorre no Terceiro Ciclo (6^o e 7^o anos) e é o momento em que se deve trabalhar o raciocínio algébrico do aluno, tendo comoo objetivo de que o mesmo seja capaz de compreender melhor a abstração da álgebra. Nessa fase, através da representação algébrica, o aluno fará generalizações sobre regularidades observadas em sequências, como também sobre as propriedades das operações aritméticas. Além disso, é o primeiro contato do estudante com as estruturas algébricas no campo dos números inteiros e também com os números racionais. Podemos perceber a grande importância e também os desafios no processo de algebrização pelo número de pesquisas nesta área, também tornando-se, de certa forma, foco dos estudos deste trabalho. Assim, podemos listar algumas das maiores dificuldades dos alunos nessa fase da algebrização, como a habilidade de atribuir significado concreto às letras, passar informação da linguagem natural para a algébrica, compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e =, distinguir adição aritmética $(2 + 4)$ da adição algébrica $(x + 4)$, como bem coloca Ponte(2006, pág.10).

Já no Quarto Ciclo (8^o e 9^o anos), que tanto a BNCC quanto os PCN's preveem o ensino da Álgebra, espera-se que o aluno tenha capacidade para trabalhar no contexto mais generalizado as representações algébricas e as operações simbólicas, isso tudo nos diversos campos numéricos, bem como a apresentação dos números reais. Segundo os PCN's de 1998, nesse quarto ciclo os alunos deverão ser capazes de:

- Produzir e identificar as escritas algébricas (sistemas, equações e inequações),

- Resolver situações-problema através de equações e inequações do primeiro grau,

- Observar regularidades e estabelecer leis Matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Capítulo 2

A Resolução de Problemas e o Modelo de Barras

Nesse capítulo vamos descrever a teoria que servirá como base para o estudo, com o objetivo de criar um modelo de ensino para o professor de Matemática, voltado para o processo de transição da Aritmética para Álgebra, também conhecido como algebrização. A partir desse momento, o trabalho terá como base a metodologia de Resolução de Problemas e o Modelo de Barras.

2.1 Resolução de Problemas

O livro "A Arte de Resolver Problemas"Polya (1995)[1], descreve uma metodologia de resolução de problemas, estabelecendo um roteiro para que aluno e professor trabalhem juntos em situações-problema, propondo quatro fases que são seguidas da seguinte maneira: o processo de abordagem de um problema, que o autor concebe por: Compreensão do problema, Estabelecimento de um plano e Execução do plano; e por fim, mas não menos importante, Polya sugere que o aluno faça uma análise do resultado, para uma possível reestruturação na resolução, chamando-a de Retrospecto. É importante que o docente não só entenda cada um desses passos, mas que compreenda claramente o objetivo de cada um. Vejamos cada fase de forma separada:

1. Compreensão do problema. Primeiramente o enunciado deve ser bem escrito para proporcionar ao aluno um interesse maior pela leitura, configurando-se como dever do professor selecionar de forma mais criteriosa os dados que estruturarão os problemas. Agora o aluno já tem condições de fazer uma leitura mais satisfatória, identificando as

[1]George Polya, foi um matemático húngaro e professor de matemática de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University. Trabalhou em muitos tópicos da matemática, como: séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. E ainda tem uma enorme contribuição para a heurística em educação matemática.

partes principais do problema, que são: a incógnita, os dados e a condicionante. Caso o problema apresente algum tipo de imagem que tenha relação com o problema, deve-se identificar a incógnita e os dados na mesma. Todo esse processo de compreensão de um problema deve ser incumbido pelo aluno, o professor deverá apenas auxiliá-lo.

> *O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho, independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experencie qualquer progresso. Se o professor ajudar de forma demasiada, nada vai restar para que o aluno faça.* (POLYA, 1995, pág. 1).

2. Estabelecimento de um plano. Aqui, os alunos encontram as maiores dificuldades, pois o conhecimento necessário para desenvolver um plano precisa ser amplo, desde realizar os cálculos até saber ilustrar um problema. Pensando nisso, o professor deve se colocar no lugar do aluno e lembrar de suas próprias experiências, tendo em vista as dificuldades que encontrou quando tentava resolver o problema. Por isso, Polya acrescenta que *as boas ideias são baseadas nas experiências passadas e em conhecimentos previamente adquiridos.*

3. Execução do plano. Fica reservado ao aluno nesse momento exercitar seus conhecimentos prévios e pôr em prática o que foi feito nos estágios anteriores. Se compararmos essa etapa aos dois passos anteriores, é relativamente mais simples, pois já compreendemos o que pede o enunciado e já traçamos um roteiro de resolução, demandando do aluno, o exercício das habilidades técnicas necessárias para executar a estratégia de resolução, de forma que o professor certifique-se que todos os procedimentos tenham se processado satisfatoriamente.

> *O maior risco é o estudante esqueçer o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor.* (POLYA, 1995, pág. 9).

4. Retrospecto. Para a maioria das pessoas já teríamos chegado ao fim de mais um exercício, sem passar pela validação do problema. Nessa etapa, cabe ao aluno revisar o que foi feito, percebendo se há ausência de argumentos, se determinada afirmação demanda demonstração. Além disso, pode o aluno procurar outro caminho para resolver o problema, possibilitando o aperfeiçoamento naquele conhecimento. O professor como mediador nesse processo de ensino e aprendizagem, deve sempre motivar os alunos, fazendo-os perceber a importância de deixar o problema resolvido por completo e questionarem se o procedimento utilizado pode servir em outros casos, de maneira que sintam-se preparados para os próximos desafios.

2.2 Modelo de Barras

Singapura é uma cidade-estado insular que possui governo próprio e autônomo, sendo constituída por um conjunto de 63 ilhas. Localiza-se na ponta sul da Península Malaia, no Sudeste Asiático, 137 quilômetros ao norte do equador. O país é separado da Malásia e da Indonésia pelos Estreitos de Johor e Singapura, respectivamente. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de Singapura é o 2º maior comparado aos países asiáticos, e o 9º maior do mundo (dados de 2018).

Figura 2.1: Localização de Singapura

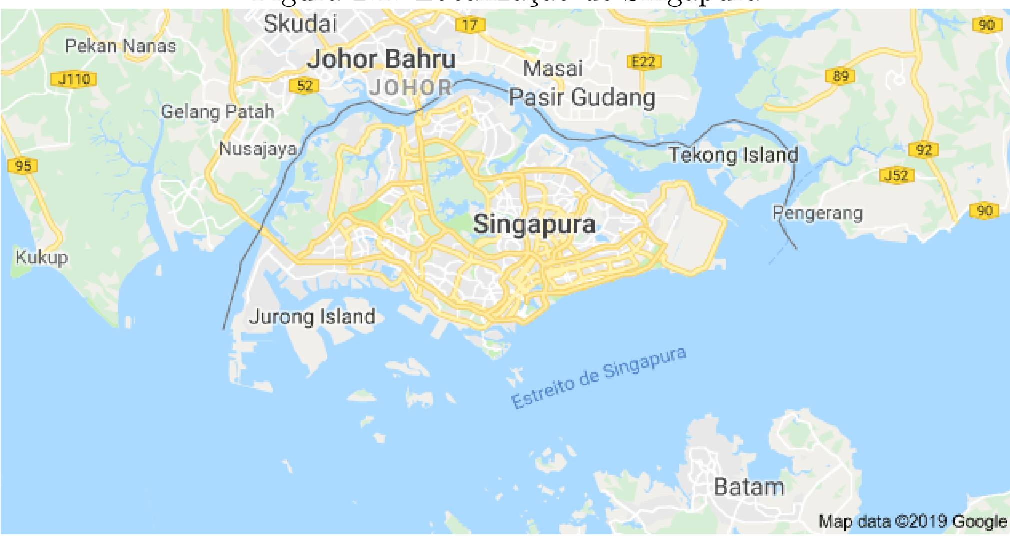


Figura 2.2: Fonte: https://www.google.com/maps/place/Singapura

Possui um território altamente urbanizado, apesar de quase metade dele ser coberto por vegetação. No entanto, Singapura prevê um aumento em seu território por meio de aterramento marítimo para dar continuidade ao desenvolvimento. Apesar de ser de grande importância levar em conta os aspectos históricos e geográficos de Singapura, não o faremos, pois, o objetivo aqui é olhar para o Modelo de Barras, que é a parte da Matemática de Singapura sob a qual a cidade consagrou sua fama pelos ótimos resultados em Matemática nas avaliações internacionais.

O modelo é conhecido como modelo pictórico, ou como é mencionado em diversos artigos, modelo de desenho. Como o próprio nome deduz, consiste na representação ilustrativa de quantidades ou relações numéricas conhecidas e desconhecidas de um problema. Esse mesmo modelo também é conhecido como modelo de barras porque Singapura utiliza as barras em praticamente todas as representações, devendo este fato à facilidade em dividir, desenhar, representar números maiores e até mesmo para exibir relações proporcionais.

Singapura utiliza o método de barras no ensino de Matemática, e é importante entender que o modelo faz parte do que chamamos de Matemática de Singapura, mas não é a Matemática de Singapura. Vale ressaltar que tal modelo pictórico é utilizado desde a década de 1980 em Singapura, começando desde o segundo ano do ensino infantil, e o objetivo aqui é mais específico, pois o nosso trabalho é voltado para a pré-álgebra, mas especificamente no processo de algebrização, que segundo os PCN's, ocorre especificamente no 7º ano do ensino fundamental.

Segundo Baldin(2013), as principais características da Matemática de Singapura se apresentam da seguinte maneira:

- Abordagem de aprendizagem: Concreto → Pictórico → Abstrato;

- Estímulo ao processo de pensamento ativo, comunicação de ideias matemáticas e resolução de problemas;

- Desenvolvimento de fundamentos que os alunos necessitarão para a matemática mais avançada;

- Ênfase no exercício mental dos conceitos de matemática por meio da abordagem pelo modelo pictórico;

A ótima aceitação que tem o modelo se dá pela ampla quantidade de problemas que se enquadram a ele, indo desde de exercícios bem simples, até os mais complexos. Observe um exemplo:

> *Os problemas podem ser tão simples como: "Jane tem 10 bolachas e Joe tem 12. Quantas eles têm juntos?"Ou tão complexo quanto: "Jessica e Lilian tinham a mesma quantia em dinheiro. Jessica deu R\$* $1140,00$ *para uma instituição de caridade e Lilian deu R\$* $580,00$ *para outra instituição de caridade. No final, Lilian tinha 9 vezes mais dinheiro que Jessica. Quanto dinheiro cada garota tinha no começo?"* (CLARK, 1995, pág.1)

Esse tipo de abordagem concreto, pictórico e abstrato (CPA), pode ser exemplificado da seguinte maneira: imagine que você possua 5 canetas, que são objetos concretos. Agora, o número 5 que representa a quantidade de canetas é o abstrato, mas se representarmos essa quantidade de 5 canetas através de 5 tracinhos ou 5 bolinhas, estamos usando o que podemos chamar de pictórico: a representação da abstração na forma de uma figura. Esse tipo de abordagem faz referência a existência de um caminho imaginário, que vai do concreto até o abstrato, e o percurso entre ele é o que chamamos de pictórico.

Além de sua metodologia ser utilizada atualmente em várias partes do mundo, os livros publicados em Singapura também são utilizados na formação de professores. A visão oficial do Ministério da Educação de Singapura é expressa pela máxima “Thinking School, Learning Nation” (“Escola que Pensa, Nação que Aprende”) Paulsen (2018), e pretende traduzir o objetivo de preparar uma geração de cidadãos empenhados que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade do lugar.

Outro aspecto que merece a devida atenção é a forma como o professor aborda o modelo em sala de aula, dessa forma vemos como a Resolução de Problemas, principal metodologia da Matemática de Singapura, ajuda no desenvolvimento do pensamento algébrico. O trabalho feito por Polya a respeito dessa metodologia é bem completo, no que se refere a compreensão e a busca pela solução de um problema e a relação professor-aluno. Nesse ponto Singapura apresenta uma abordagem interessante, na qual o aluno tem maior participação e o professor se torna um falicitador do processo de ensino-aprendizagem. Os programas baseiam-se no princípio de que as crianças são estudantes curiosos, ativos e competentes e os professores são facilitadores na aprendizagem das crianças.

Podemos notar o apoio que tem as escolas de Singapura do Ministério que os representa, fortalecendo ainda mais o modelo estabelecido, pois a prioridade é formar pessoas que saibam pensar e que possam dar continuidade no crescimento do país. Outro ponto são os livros didáticos, que abordam os temas de forma sucinta e objetiva, pois o interesse é possibilitar que os alunos aprendam questionando e refletindo, de maneira que material não traga o conteúdo mastigado. Além disso, os assuntos abordados só se dão por finalizados quando todos os alunos aprenderam o conteúdo, só assim pode-se iniciar algo novo.

Baldin (2017) explica que muitas vezes a Matemática de Singapura é confundida com o próprio Modelo de Barras, o que não corresponde ao real significado da proposta dos livros textos das escolas de Singapura que seguem uma orientação curricular fundamentada, em que o Modelo de Barras constitui uma das técnicas principais de ensino.

Podemos observar nesse esquema pentagonal que a Resolução de Problemas se encontra no centro do pentágono, ou seja, ela é o centro da proposta curricular da Matemática de Singapura, não sendo apenas uma base para o ensino de Matemática, mas sim a principal metodologia envolvida no processo de ensino aprendizagem.

Baldin (2017) em seu artigo resume bem como funciona o esquema pentagonal de ensino de Matemática de Singapura:

> ”...a concepção do ensino de matemática no ensino fundamental da Matemática de Singapura está construída em torno do núcleo central que é a Resolução de Problemas. Mas, para constituir o quadro curricular existem cinco frentes: **atitude**, **meta-cognição**, **processos**,

Figura 2.3: Esquema Pentagonal de Ensino de Matemática

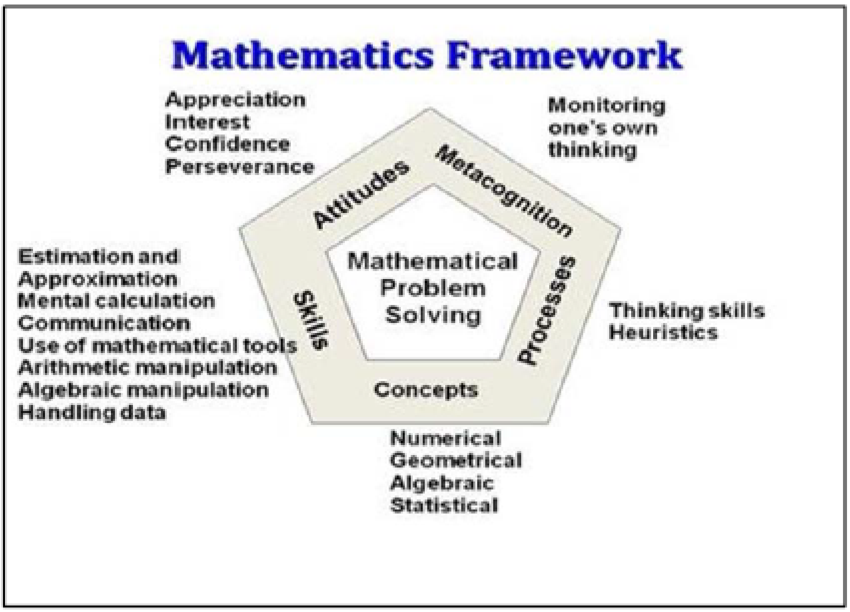


Figura 2.4: Fonte: http://lysigrey.wikispaces.com/Mathematics+Framework

> **conceitos** e **habilidades**. Os **conceitos** de conteúdo matemático estão na base do diagrama, e envolvem as áreas de números, geometria, álgebra e estatística, conceitos que nós nos preocupamos também nos projetos MatDigital e PROF-OBMEP. As **habilidades** requeridas envolvem estimativa e aproximação, cálculo mental, comunicação, uso de instrumentos matemáticos, manipulação aritmética, manipulação algébrica, tratamento de dados, que também são parte dos nossos PCN. Os **processos** se referem a habilidades de pensamento e heurística, enquanto que a **meta-cognição** significa monitoramento de seu próprio pensamento, e as atitudes significam apreciação, interesse, confiança, perseverança.“

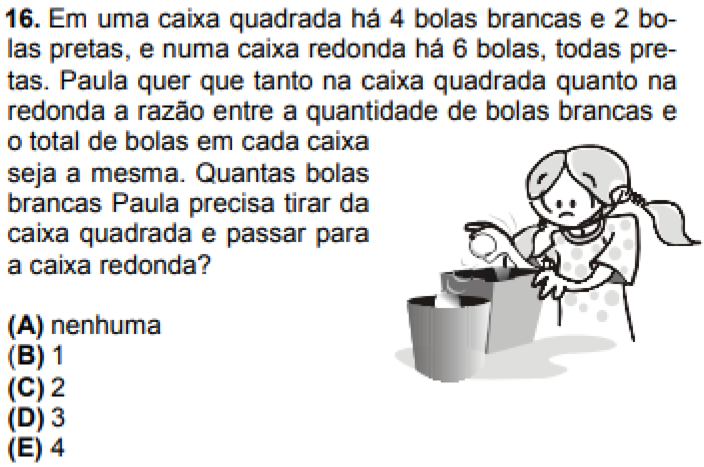
Trabalhar com a Matemática de Singapura dentro do modelo de barras exige do professor a busca pelos problemas e situações problemas que sejam mais adequados para os seus alunos desenvolverem da melhor forma o pensamento algébrico. Quanto aos problemas que poderiam ser trabalhados em sala de aula, Queiroz (2014) coloca que a metodologia do Modelo de Barras é muito importante e útil para os alunos na resolução de problemas que envolvem **comparação**, **parte-todo**, **razões** e **proporções** fazendo com que os alunos possam aprimorar seus conhecimentos anteriores da aritmética, e adquirirem novos olhares para a abstração da álgebra que virá nos anos seguintes.

Capítulo 3

Apresentação de Problemas

3.1 Problema 1 (Proporção das bolas)

Essa atividade foi retirada da OBMEP, Prova 1ª fase 2006 - Nível 1 - Questão 16 que envolve fração e proporção, além disso o problema é um pré-requisito para o aluno ter o conhecimento sobre frações equivalentes.



16. Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

(A) nenhuma
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

Figura 3.1: Problema 1

A ideia para solução desse problema foi tirado de um material de apoio da OBMEP na escola, em Baldin e Silva (2016).

Compreensão do Problema.

Esse exercício tem poucas informações, por isso a compreensão se dá de forma relativamente simples. Inicialmente deve ser feita uma leitura satisfatória que permita

a familiarização com o problema, depois podemos separar o enunciado por partes a serem analisadas. Sugiro que façamos uma análise do início até o primeiro ponto final, registrando as informações encontradas. Nesse momento, o professor pode intervir de forma a auxiliar com os seguintes questionamentos: *Quantas bolinhas tem em cada caixa? As bolinhas são idênticas?*, na expectativa de que os alunos tenham anotado a seguintes informações.
- *Caixa Quadrada: 4 bolinhas brancas e 2 bolinhas pretas;*
- *Caixa Redonda: 0 bolinhas brancas e 6 bolinhas pretas.*

A segunda parte do texto pode ser compreendida até o próximo ponto final, e nesse momento o enunciado traz a condicionante, tornando-se necessário a intervenção do professor com a seguinte pergunta: *Qual a condicionante*? Vale ressaltar que a priori os alunos devem ter conhecimento sobre razão e proporção, assim saberão que

$$\frac{Bolinhas\, Brancas}{Total\, de\, bolas\, na\, Caixa}$$

nas duas caixas, deverá ser igual ou equivalente.

Na última parte, analisaremos o que restou do enunciado, em que é apresentado a incógnita do problema, na qual a pergunta do professor poderá ser: *Qual é a incógnita?* Se a palavra incógnita incomodar os alunos, podemos refazer a pergunta da seguinte maneira: *O que pede o problema?* A resposta que o professor deve julgar como ideal é:
- *O problema pede que contemos o número de bolinhas brancas que deverão ser transportadas da caixa quadrada para a caixa redonda afim de satisfazer a condicionante.*

Estabelecimento de um plano.

Depois de estar familiarizado com o enunciado, o aluno provavelmente representou o problema em sua consciência de forma ilustrativa, por isso a melhor maneira de abordar o exercício é usar uma representação pictórica do mesmo, até porque o aluno, na cabeça do professor, ainda não assimilou esse processo de abstração, isto é, ainda se encontra na Aritmética e não realizou de fato sua transição para Álgebra. Veja as figuras abaixo:

O professor nesse passo, pode perguntar aos alunos: *Através da figura, qual a razão entre bolas brancas e o total de bolas na caixa redonda? E na quadrada?* Assim, espera-se que os alunos vizualizem a representação inicial do problema, e encontrem as razões $\frac{0}{6}$ e $\frac{4}{6}$, respectivamente, como mostra a figura. Observando a não igualdade entre as razões, o professor pode intervir da seguinte forma: *E agora? O que devemos fazer?*

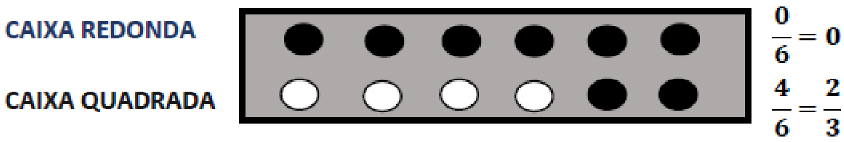


Figura 3.2: Disposição inicial das bolinhas

esperando que os alunos digam: *Precisamos passar bolinhas brancas da caixa quadrada para a redonda!* Perceba que não é possível encontrar a resposta de imediato através de um padrão de resolução, precisamos transferir uma bolinha de cada vez e comparar as razões. A princípio parece falhar o nosso modelo, por não atingir o esperado de forma direta, mas entenda que o objetivo é transitar com o aluno da Aritmética para Álgebra, esclarecendo o que inicialmente parecer abstrato. Sendo assim, vejamos o que quando se muda uma bolinha branca de caixa.

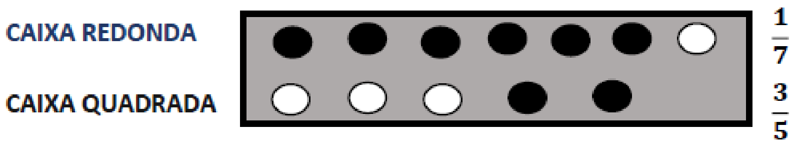


Figura 3.3: Passando 1 bolinha branca

Através da ilustração vemos que a passagem de uma bolinha branca não iguala as razões nas duas caixas. Sendo assim, o processo deve continuar.

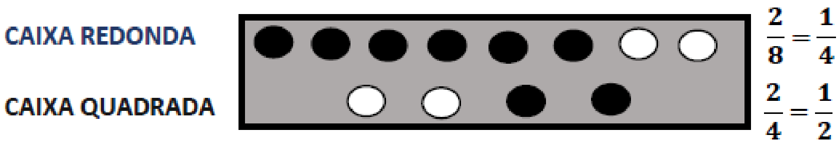


Figura 3.4: Passando 2 bolinhas brancas

O conhecimento de frações equivalentes deve ser considerado como pré-requisito, frações que possuem números distintos no numerador e/ou denominador, mas que representam a mesma quantidade dentro do mesmo contexto. Voltando para a imagem acima vemos que ainda não atingimos a igualdade esperada entre as razões, situação na qual o professor pode perguntar aos alunos: *É possível concluir que a resposta esperada vai acontecer no próximo passo?* É interessante esse questionamento no que se refere a previsão do que procuramos porque pode-se perceber a capacidade do aluno de raciocinar de forma lógica e, consequentemente, para perceber o quão atento eles estão.

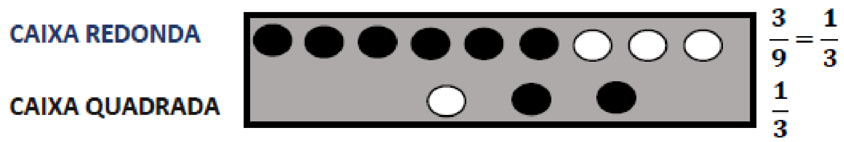


Figura 3.5: Passando 3 bolinhas brancas

É possível responder a última pergunta feita pelo professor aos alunos, por meio da imagem porque se não fosse, no próximo passo não restaria bolinha branca na caixa quadrada, e pressupõem-se que o problema tenha uma resposta correta e que também tenha sido revisado, anulando a possibilidade de haver erros.

Execução do plano.

Esse passo, como vimos no capítulo 2, é o que os alunos encarariam de forma mais tranquila. Nesse problema, a execução se torna mais simples ainda, pois o que resta é comparar numericamente as razões (frações) encontradas nos passos anteriormente. Por isso, temos:

$$1^o \text{ Passo. } \frac{0}{6} \neq \frac{4}{6} \qquad 2^o \text{ Passo. } \frac{1}{7} \neq \frac{3}{5}$$
$$3^o \text{ Passo. } \frac{2}{8} \neq \frac{2}{4} \qquad 4^o \text{ Passo. } \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

ou seja, o 4º passo nos garante a igualdade procurada. Perceba que as frações não são idênticas, ainda que elas sejam equivalentes, as quais representam a mesma razão, logo, foi necessário a retirada de 3 bolinhas da caixa quadrada, por isso a resposta correta é a alternativa (C).

Retrospecto.

Esse é o espaço destinado a validação do(s) resultado(s) encontrado(s), mas não é só isso, o retrospecto pode ainda ser um momento de comparar a solução entre os alunos e perceber que para um mesmo problema podemos ter mais de uma solução.

A forma como foi solucionado o problema, tirando as bolinha da caixa quadrada uma à uma e levando até a caixa redonda, acaba por validar sem querer. Para que as razões sejam iguais, não podemos ter uma das caixas sem bolas brancas, pois assim produziremos um razão nula. Por isso, o número de bolinhas brancas possíveis nas caixas redonda e quadrada respectivamente, (lembrando que temos apenas 4 bolinhas brancas), são: 1 e 3; 2 e 2; 3 e 1. Agora veja:

- 1 e 3: produziria um total de 7 bolinhas na caixa redonda e 5 bolinhas na caixa quadrada, o que não ajuda, pois o total de bolinhas é sempre o denominador da nossa fração, e não é possível criar frações próprias equivalentes com 5 e 7 nos denominadores, pois esses valores não são múltiplos entre si. - 2 e 2: nesse caso teríamos um total de 8 bolinhas na caixa redonda e 4 bolinhas na caixa quadrada, e apesar desses valores serem múltiplos entre si, as caixas possuem a mesma quantidade de bolinhas brancas, fazendo com que a caixa que tem menos bolinhas posssua maior proporção dessas bolinhas.

- 3 e 1: obviamente que esse é o último caso possível, e teoricamente, tem que resolver o problema, pensando que o mesmo tenha sido feito para ter um resultado. O total de bolinhas na caixa redonda passa a ser 9 e na caixa quadrada passa a ser 3. Claramente esses valores resolvem o problema, pois inicialmente temos 3 vezes mais bolinhas brancas na caixa redonda, a proporção do número total de bolinhas, 3 vezes mais bolinhas na caixa redonda.

Agora, no início do problema tínhamos 4 bolinhas brancas na caixa quadrada, e no final ficamos com apenas 1 bolinha. Portanto, foi necessário passar 3 bolinhas brancas da caixa quadrada para a caixa redonda, resultado que valida o problema.

3.2 Problema 2 (Balança)

O problema em questão foi retirado da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2012 – Nível 1 – Questão 11, envolvendo balança de prato, um recurso muito utilizado pelos livros didáticos para ensinar equação. Além disso, o problema trata basicamente de unidade de medida.

11. A balança da figura está equilibrada. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Os copos do prato da esquerda estão completamente cheios e os copos do prato da direita estão cheios até metade de sua capacidade. Qual é o peso, em gramas, de um copo vazio?

A) 50
B) 125
C) 175
D) 200
E) 250

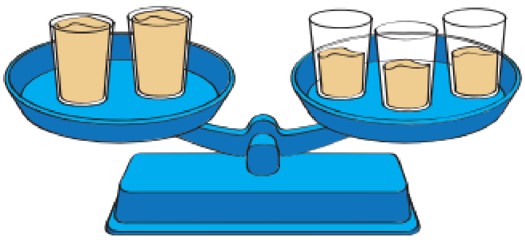


Figura 3.6: Problema 2

A proposta de resolução desse problema foi retirado de Baldin e Silva (2016, pág. 56), um material do IMPA que é uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégia de ensino.

Compreensão do Problema.

Sempre devemos começar com uma boa leitura do enunciado, e logo após, separar o texto em partes para serem analisadas separadamente, registrando as informações presentes no sentido de estabelecer um plano. Normalmente, tais partes são separadas no enunciado por ponto final; não sendo uma regra obrigatória esse tipo de separação.

Começamos pelo primeiro parágrafo até o primeiro ponto, que apesar de curto, contém uma informação muito importante: "a balança está equilibrada." O professor poderá intervir da seguinte forma: *O que significa a balança estar equilibrada?* Os alunos devem se recordar de que a balança a qual o enunciado se refere é a balança de pratos, esse esforço é facilitado, pois o problema apresenta uma imagem, que ilustra a situação colocada. Nesse momento, torna-se viável lembrar que a balança equilibrada apresenta peso igual nos dois pratos, fazendo com que os mesmos fiquem nivelados. Então os alunos devem anotar:

- *Na balança, cada prato possui a mesma medida de peso.*

O segundo trecho apresenta duas novas informações: a primeira diz que os copos são idênticos, o que facilita a compreensão do aluno, já que os copos apresentam o mesmo peso e capacidade, a segunda diz que a quantidade de farinha presente em cada copo, se somada, produz 1400 gramas. Nesse momento, o professor desempenha um papel importante, procurando questionar os alunos da seguinte forma: *Podemos afirmar que cada prato da balança possui* 700 *gramas de farinha?* A expectativa do professor é a de que os alunos respondam afirmativo para a pergunta, até porque parece intuitivo se compararmos essa informação com aquela anotada anteriormente. Por isso, é importante deixar claro aos alunos que não devemos nos precipitar, até porque estamos compreendendo o problema, e antes de analisar todo o enunciado, não devemos tirar nenhuma conclusão precipitada. Sendo assim anotemos:

- *Os copos são idênticos;*

- *Juntos, os copos apresentam* 1400 *gramas de farinha.*

Vamos analisar o próximo parágrafo e anotar as informações relevantes nele, esta que por sua vez refere-se à quantidade de farinha nos copos. Anotemos:

- *Os copos da esquerda estão cheios e os copos da direita cheios pela metade de sua capacidade.*

O que resta do enunciado é o que o problema propõe que respondamos, encontrar o peso de um copo vazio (em gramas).

Nesse problema, além do enunciado, temos novamanete a compreensão de uma imagem já que as informações contidas nela são de extrema importância e, dessa forma, o professor pode questionar os alunos: *Será que a imagem nesse problema é útil para nós? Ou sem ela também podemos resolver o problema?* Espera-se que os alunos percebam que a imagem contém informação necessária, ou seja, o número de copos em cada prato na balança, vale lembrar que essa informação não aparece no enunciado. Anotemos:

-*Temos* 2 *copos no prato da esquerda e* 3 *copos no prato da direita.*

Sempre que terminamos de registrar as informações contidas no enunciado, é importante que o professor pergunte aos alunos: *Qual a incógnita é a condicionante do problema?* Nesse problema temos como incógnita o peso de um copo vazio e a condicionante são 2 copos cheios e 3 copos pela metade de farinha em equilíbrio numa balança de prato.

Estabelecendo um Plano.

O plano para esse problema foi retirado do livro "OBMEP na escola", e a estratégia que vamos adotar para esse é a busca do que precisamos através do que queremos, por isso o professor pode provocar os estudantes com as questões a seguir:
O que queremos? O peso de um copo vazio.

Sabemos que o peso de um copo vazio é igual ao peso de um copo com farinha menos o peso da farinha contida nele. Por isso:
O que precisamos? Precisamos do peso da farinha contida nele.

Vamos responder à segunda pergunta usando uma representação pictórica, mas antes precisamos lembrar aos alunos que qualquer coisa pode ser a representação de unidade de medida. Portanto, usaremos como unidade de medida a quantidade de farinha, isto é, um copo cheio pela metade. Assim, vamos representar com barrinhas o peso da quantidade de farinha que enche o nosso copo pela metade. De rápida observação, temos que no prato da esquerda os dois copos presentes estão totalmente cheios de farinha, logo eles representam na nossa unidade de medida, quatro "metades"de farinha. Já o prato da direita, possui três copos pela metade, totalizando três “metades”de farinha. Veja como fica na ilustração:

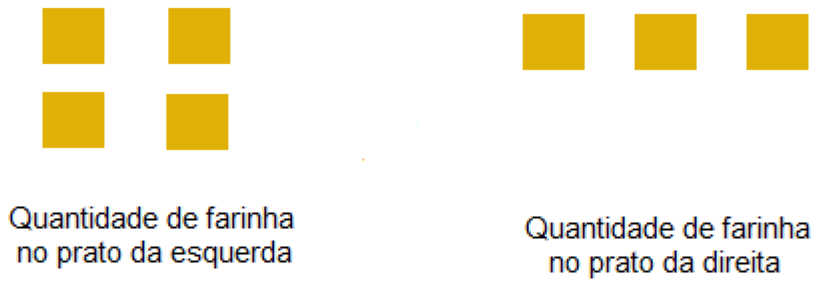


Figura 3.7: Quantidade de farinha nos pratos

Ou seja, os dois copos cheios do lado esquerdo têm a mesma quantidade de farinha que os quatro copos cheios pela metade. Devemos lembrar que estamos falando apenas da quantidade (peso) de farinha, desprezando o peso do copo. Somando a quantidade total de farinha através da nossa nova unidade de medida devemos ter $1400g$ de farinha, segundo o enunciado. Usaremos essa informação quando formos executar o problema.

Precisamos agora representar o nosso problema de forma concreta, para que possamos enxergar aquilo que inicialmente é desconhecido e abstrato. O professor, nesse caso, deve auxiliar o aluno na construção pictórica das informações fornecidas pelo enunciado. Primeiro temos uma balança que está em equilíbrio, isso quer dizer que os lados possuem o mesmo peso. Segundo que podemos representar os copos e farinha fora deles, podendo assim relacioná-los e relacionar o peso dos lados da balança. Veja como ficou a nossa representação:

Figura 3.8: Representação do problema na forma pictórica

Execução do Plano.

Com a ilustração acima, chegamos no total de 7 "metades"de farinha nos dois lados da balança, além disso, sabemos que o total de farinha em gramas presente na balaça é 1400. Por isso, dividindo $1400g$ por 7 (quantidade de copos cheios pela metade), chegamos ao resultado de $200g$ de farinha para cada copo cheio pela metade.

Agora a solução do problema sai direto, pois ao observar a disposição dos copos e da farinha dos lados na imagem acima, percebemos a presença de uma farinha a mais do lado esquerdo em comparação com o outro lado, já do lado diretio é apresentado um copo à mais que do lado esquerdo. Como a balança se apresenta em equilíbrio, o peso de um copo vazio posssui o mesmo peso de uma farinha.

Portanto, o peso de um copo vazio é igual a $200g$ e a resposta correta é a alternativa (D).

Retrospecto.

Além de tentar resolver esse problema pelo método algébrico, podemos usar esse passo também para validar o nosso resultado. Para isso, podemos confirmar se depois do nosso resultado a balança ainda permanece em equilíbrio, ou seja, se o peso em cada prato é igual. Para o prato do lado esquerdo devemos somar o peso total de farinha e o peso de 2 copos vazios, daí temos:

$$800 + 2 \cdot 200 = 1200.$$

Em seguida, para o prato do lado direito devemos somar o peso total de farinha juntamente com o peso de 3 copos vazios, logo

$$600 + 3 \cdot 200 = 1200,$$

o que garante o equilíbrio na balança. Dessa forma, validamos o resultado encontrado e garantimos que a nossa resposta está correta.

3.3 Problema 3 (Doações)

Este problema foi escrito por Clark (1995, pág. 1). O problema a seguir é um bom exemplo de um exercício de subtração que pode ser considerado difícil para os alunos de 7º anos, pois exige que seja modelado de forma algébrica.

Jessica e Lilian tinham a mesma quantia de dinheiro. Jessica deu 1140 *reais para uma instituição de caridade e Lilian deu* 580 *reais para outra instituição de caridade. No final, Lilian tinha* 9 *vezes mais dinheiro que Jessica. Quanto dinheiro cada garota* *tinha no começo?*

Compreensão do Problema.

Esse problema pode facilmente ser compreendido se for analisado separadamente e com a cautela necessária para não se perder nas informações, por isso é muito importante o papel do professor como intermediador. Listaremos agora os dados presentes nele.

No primeiro e segundo parágrafos, o enunciado traz informações importantes quanto a quantidade de dinheiro de cada uma das meninas, veja:

- As meninas têm quantidade igual de dinheiro inicialmente;

- Jessica doou 1140 reais para uma instituição;

- Lilian doou 580 reais para outra instituição.

O penúltimo parágrafo toma como referência as informações anteriores para trazer uma relação entre as quantidades de dinheiro que cada menina possui após as doações:

- Lilian possui agora uma quantidade de dinheiro 9 vezes maior que a quantidade que Jessica possui.

Finalmente, no último parágrafo, o enunciado traz a incógnita do problema, que se encontra de forma clara e direta para os alunos:

- A quantidade de dinheiro que possuía cada menina antes das doações.

A compreensão se apresentou de forma simples e rápida, isso se deve ao quão direto as informações aparecem, pois em alguns casos, como nos problemas já resolvidos anteriormente nesse trabalho, o enunciado não deixa explícito os dados, trazendo maior dificuldade na hora de separar as informações. Ademais, esse problema não apresenta imagem, por isso as informações presentes do texto são suficientes para encontrar a solução. O professor pode trazer para os alunos algumas indagações, como: Qual o significado de doação quando nos referimos a quantidade de dinheiro de cada garota? Espera-se que os alunos não levem em conta nenhum tipo de sentimento quanto à doação e percebma que doar, para o problema, significa perder dinheiro.

Outra informação importante que deve ficar perceptível aos alunos nesse momento, e para isso o professor deve estar atento, é o fato de Lilian possuir 9 vezes mais dinheiro que Jessica. A palavra vezes, para a Matemática, significa multiplicação, podendo ser compreendida, nesse caso, como a adição de fatores iguais. A partir disso, espera-se que os alunos percebam que a quantidade de dinheiro de Jessica somada a elas mesma 9 vezes é igual a quantidade de dinheiro que possui Lilian.

Estabelecendo um Plano.

Estabelecer um plano para este problema pode não ser tão simples quanto a compreensão do mesmo. Dessa forma, o auxílio da representação pictórica facilita a visualização do problema e a construção de uma estratégia.

Para esse problema específico, o professor pode sugerir aos alunos que estes usem as barras para representar a quantidade que tem Jessica e Lilian inicialmente e, assim, o uso da barra torna-se um ótimo recurso para representar das informações contidas nos problemas, já que a mesma pode ser facilmente desenhada, proporcionando, visualmente, ótimas comparações com outras barras semelhantes. Dessa forma, o professor deve pedir aos alunos que produzam barras para comparar a quantidade inicial de dinheiro que cada uma das meninas possui. O resultado esperado pode ser visto na imagem a seguir.

Figura 3.9: Quantidade inicial em dinheiro de cada menina.

Podemos observar que as duas barras têm mesmo tamanho, representando a informação inicial em que Jessica e Lilian apresentam a mesma quantidade de dinheiro. A parti daí, espera-se que os alunos sejam capazes de perceber, a partir da doação que cada uma fez às respectivas instituições, que as barras sejam descoloridas parcialmente e proporcionalmente. A próxima figura ilustra o resultado esperado após as doações.

Podemos perceber, de forma intuitiva, que a barra que mais foi descolorida é exatamente onde a doação foi maior, pois a perda de dinheiro também foi maior. A parte descolorida na primeira barra representa a doação de 1140 reais e a parte descolorida na segunda barra representa a doação de 580 reais.

Nesse momento, é esperado que os alunos encontrem mais dificuldades, pois até aqui apenas colocamos de forma ilustrativa os dados que retiramos do enunciado,

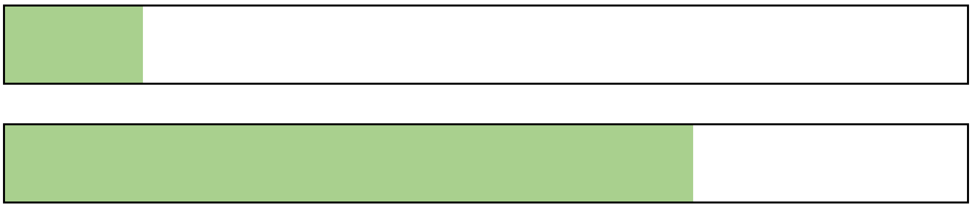


Figura 3.10: Quantidade de dinheiro após as doações

agora precisamos criar estratégias para chegar no resultado que queremos. Logo, o professor deve novamente assumir o papel de facilitador e elaborar indagações que levem os alunos às respostas esperadas. Por exemplo, se pensarmos apenas nas barras desenhadas até aqui, o que queremos descobrir? Espera-se que os alunos percebam que a incógnita agora está representada pela barra toda pintada, ou seja, queremos descobrir quanto representa em dinheiro uma barra inteiramente pintada. O professor ainda pode realizar mais duas perguntas: Qual relação existe entre a primeira e a segunda barras? Como podemos usar essa relação para encontrar o valor em dinheiro da menor barra? Para a primeira pergunta, a resposta é que a parte pintada da segunda barra é 9 vezes maior que a parte pintada da primeira barra. Agora para responder a segunda pergunta, observe a seguinte imagem.

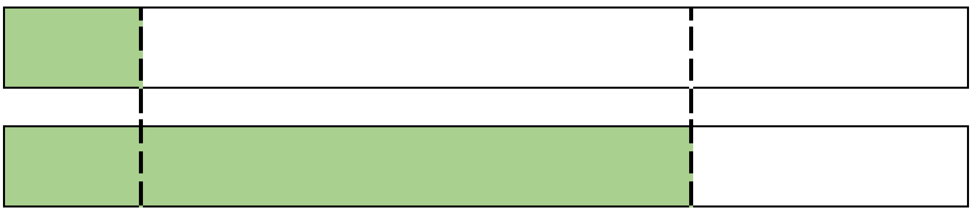


Figura 3.11: Diferença nas doações

Os alunos devem ser capazes de traçar essas duas linhas tracejadas que aparecem na imagem, por isso é importante que as barras sejam feitas uma abaixo da outra para facilitar a visualização. O professor pode perguntar nesse momento: Qual a relação entre a parte pintada na segunda barra, compreendida entre as duas linhas tracejadas, e a parte pintada na primeira barra? A resposta esperada é 8 vezes maior. Perceba que não é tão simples chegar nessa resposta, e a sutileza está em perceber que apesar da parte pintada na segunda barra ser 9 vezes maior que na primeira, no momento em que traçamos as linhas, uma parte é perdida.

Através de uma simples subtração, podemos encontrar a parte pintada, na segunda barra, compreendida entre as linhas tracejadas. Observando rapidamente, podemos perceber que devemos subtrair 580 de 1140, que é exatamente a parte descolorida na primeira barra menos a parte descolorida na segunda barra.

Execução do Plano.

Esse é o momento mais tranquilo de todo o processo, onde são realizados os cálculos que deixamos quando estávamos estabelecendo o plano. O primeiro deles é realizar a diferença entre as doações para descobrir a quantia de dinheiro que representa a parte pintada, na segunda barra, compreendida entre as linhas tracejadas na figura 3.11, conforme abaixo:

$$1140 - 580 = 560.$$

Ou seja, 560 reais é a diferença na doação de Jessica e Lilian. Como já havíamos concluído que essa diferença representa 8 vezes a parte pintada, da primeira barra, na figura 3.10, logo temos que:

$$560 \div 8 = 70,$$

que representa exatamente a parte pintada, da primeira barra, na figura 3.10, ou seja, é quantidade de dinheiro que sobrou do total que Jessica tinha, após as doações. Portanto, o total que Jessica tinha, em dinheiro, antes da doação era $1140 + 70 = 1210$ reais, a mesma quantidade que tinha Lilian.

Retrospecto.

Esse espaço pode ser usado para reflexão e validação do problema, propondo ainda uma outra forma resolve-lo. No que se refere à reflexão, podemos de forma simples chegar na mesma resposta, só que agora faremos isso através da barra que representa a quantidade de dinheiro da Lilian. Veja na imagem abaixo.

Figura 3.12: Quantidade de dinheiro de Lilian

Basta somarmos cada parte da nossa barra e vamos encontrar o valor, em dinheiro, que tinha Lilian antes da doação, logo

$$70 + 560 + 580 = 1210$$

reais, exatamente o mesmo valor que obtivemos ao realizar os cálculos através da Jessica. Validamos assim o problema e concluímos que o valor encontrado corresponde ao valor, em dinheiro, que cada menina tinha inicialmente.

3.4 Problema 4 (Quixajuba à Paraqui)

O problema a seguir também foi tirado da OBMEP, agora do ano de 2010 - 1ª fase, Nível 2, questão 15. Além disso, o problema envolve comprimento e noção de linearidade.

15. A estrada que passa pelas cidades de Quixajuba e Paraqui tem 350 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando *Quixajuba a 92 km*. No quilômetro 290 há uma placa indicando *Paraqui a 87 km*. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraqui?

A) 5 km
B) 41 km
C) 128 km
D) 179 km
E) 215 km

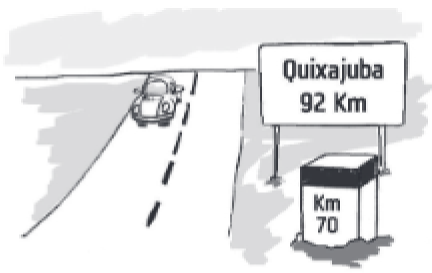


Figura 3.13: Problema 4

Compreensão do Problema.

Dividindo o enunciado em 4 partes, compreendidas entre um parágrafo e outro, faremos a análise das informações contidas. No primeiro parágrafo, temos uma informação a respeito do comprimento da estrada que passa por duas cidades (Quixajuba e Paraqui).

- *O comprimento da estrada é de 350 km.*

O segundo e o terceiro parágrafos trazem informações a respeito da distância que se deve percorrer para chegar em cada uma das cidades a partir de um determinado ponto da estrada. Para melhor compreender esse tipo de informação, os alunos devem depreender que, por determinação, foi estabelecido que a estrada teria um início e um fim, ou seja, um quilômetro 0 e um quilômetro 350. Sendo assim, o problema traz as seguintes informações:

- *O km 70 da estrada está à 92 km de Quixajuba;*

- *O km 290 da estrada está à 87 km de Paraqui.*

Nesse momento, o professor deve checar se os alunos compreenderam bem essas informações, por isso ele pode intervir com a seguinte pergunta: devemos somar ou subtrair o quilômetro da estrada à distância das cidades? Espera-se que os alunos respondam que tal procedimento vai depender de uma série de fatores. Pois perceba que não é possível subtrair 92 de 70, já que a distância entre duas cidades jamais poderia ser negativa, por outro lado, se somarmos 87 em 290, ultrapassaríamos o fim da estrada, que termina no quilômetro 350. Partindo para o último parágrafo do enunciado encontramos a pergunta do problema:

- *Qual a distância entre as cidades de Quixajuba e Paraqui?*

Finalizado a retirada de informações presentes no texto, o professor deve se certificar que os alunos conseguem identificar a incógnita e a condicionante do problema. Podendo simplesmente perguntar: *Qual a incógnita e a condicionante?* A incógnita como bem sabemos, é a questão principal proposta pelo problema que, nesse caso, faz saber a distância entre as duas cidades presentes no enunciado. Já a condicionante, ou seja, as informações relevantes para obtermos o valor da incógnita, pode ser vista como as marcações na estrada e a distância que as cidades se encontram a partir dessas marcações.

Estabelecendo um Plano.

A utilização de barras para problemas que envolvem distância pode ser de grande ajuda, pois tal estratégia se assemelha às mais variadas ferramentas de medição. Por isso o professor pode auxiliar os alunos a imaginar a estrada em questão como uma linha reta, e partir daí simular usando a ideia de barra. Pois bem, usando as informações retiradas do texto, vamos desenhar as barras.

A primeira informação que temos é o comprimento total da estrada, veja a ilustração criada a partir de uma barra.

Observe que a nossa estrada apresenta um início (quilômetro 0) e um fim (quilômetro 350), o que para alunos de 7º e 8º anos pode gerar conflitos, por isso

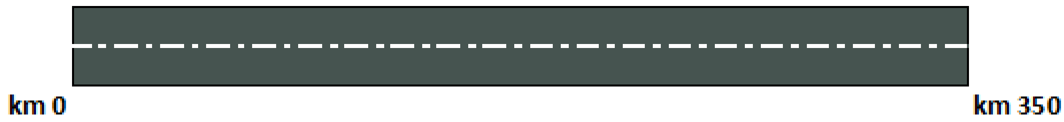


Figura 3.14: Comprimento Total da Estrada

reforço mais uma vez a necessidade do professor de se colocar no lugar do aluno e perceber as dúvidas que possam surgir.

Voltando ao plano, podemos agora acrescentar à imagem 3.14 as outras duas informações que foram tiradas do texto. A primeira delas se refere a distância de 92 km do km 70 da estrada até a cidade de Quixajuba. Incluindo essa informação a nossa barra, temos:

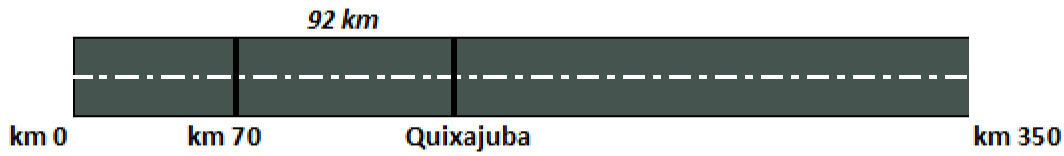


Figura 3.15: Distância de Quixajuba ao km 70

Nesse momento, o professor deve se atentar à marcação dos alunos do quilômetro 70 na barra, isso porque caso ocorrer alguma marcação errônea, a solução ficará comprometida. Uma marcação que pode ser considerada equivocada é o km 70 ficar mais próximo do quilômetro 350 do que do quilômetro 0.

A segunda informação, que coloca Paraqui à 87 do 290, pode ser incluída da seguinte maneira:

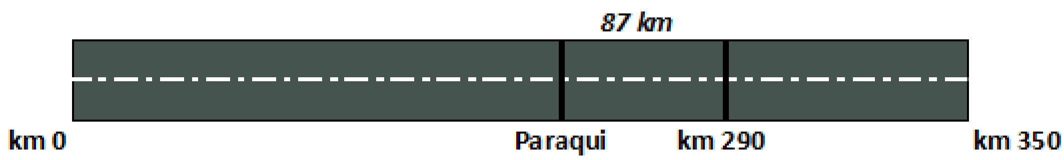


Figura 3.16: Distância de Paraqui ao km 290

A mesma consideração acima deve ser levada em conta aqui, já que Paraqui deve estar mais próxima do km 350 do que do km 0. Vamos colocar agora todas as informações obtidas em uma única barra, e vejamos o que podemos tirar daí.

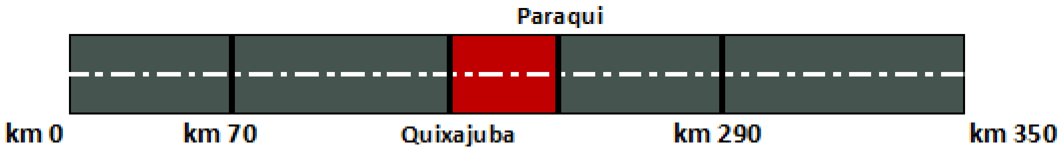


Figura 3.17: Distância de Quixajuba à Paraqui

Claramente podemos observar a nossa incógnita na barra, por isso foi ressaltado acima a importância de ter as marcações de cada cidade de forma coerente. Podemos até concluir que se tudo faz sentido para o aluno, mesmo com marcações erradas, algo pode ter sido compreendido por ele de forma equivocada.

Execução do Plano.

Com tudo encaminhado, devemos apenas colocar em prática aquilo que foi planejado. Para encontrar a distância entre as duas cidades, parte esta que foi colorida de vermelho na imagem 3.17 e, a partir da mesma, podemos subtrair do tamanho total da barra a parte que não está colorida de vermelho, por isso vamos descobrir quanto mede a parte não vermelha da barra. Uma das partes não vermelhas presente na barra, é compreendida do quilômetro 0 até Quixajuba. Como Quixajuba está a 92 do quilômetro 70, temos que:

$$70 + 92 = 162,$$

Ou seja, a cidade de Quixajuba está no quilômetro 162, exatamente o comprimento dessa primeira parte não vermelha. Já o comprimento da segunda, compreendida entre Paraqui e o quilômetro 350, pode ser encontrado subtraindo de 350 o quilômetro em que está a cidade de Paraqui que, por sua vez, é

$$290 - 87 = 203.$$

Logo, a segunda parte não vermelha da barra tem comprimento igual a:

$$350 - 203 = 147km$$

Somando as duas partes não vermelhas, temos:

$$147 + 162 = 309$$

quilômetros de barra não vermelha.

Portanto, a distância de Quixajuba à Paraqui, e vice-versa, é:

$$350 - 309 = 41km,$$

alternativa (B).

Retrospecto.

Como forma de validação deste problema, que envolve a distância entre as cidades de Quixajuba e Paraqui, vamos percorrer o caminho da estrada, desde o km0 até o km350, de forma lúdica. Assim, usando o resultado que encontramos, vamos verificar se ele nos serve.

Partindo do marco 0 da estrada até o km70, claramente percorremos $70km$ de distância. A parti daqui, faremos nossa viagem até Quixajuba, que segundo o enunciado, tem $92km$ de distância do km70. Logo, estamos à

$$70 + 92 = 162km$$

de distância do marco 0.

Usando o resultado obtido, temos que a distância de Quixajuba à Paraqui é de $41km$. Logo, estamos à

$$162 + 41 = 203km$$

de distância do marco 0.

Próximo passo é chegar ao km290 da estrada, lá tem uma placa, que segundo o enunciado, indica $87km$ até a cidade de Paraqui. Mas é exatamente da cidade de Paraqui, que nós viemos. Ou seja, andamos

$$203 + 87 = 290km$$

de distância do marco 0. E esse resultado finaliza a validação, pois nós estamos exatamente no km290 da estrada, isso indica que a distância de $41km$ das cidades de Quixajuba e Paraqui satifaz o nosso problema.

3.5 Problema 5 (Vôlei na Escola)

O problema 5, que envolve porcentagem, foi retirado da OBMEP, 2011 - 1ª fase, Nível 1, questão 15.

15. Em 2009 uma escola tinha 320 alunos esportistas, dos quais 45% jogavam vôlei. Em 2010 essa porcentagem diminuiu para 25%, mas o número de jogadores de vôlei não se alterou. Qual era o número de alunos esportistas em 2010?

A) 480
B) 524
C) 560
D) 576
E) 580

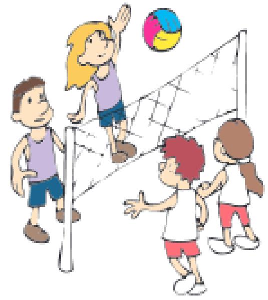


Figura 3.18: Problema 5

Compreensão do Problema.

Fazendo apenas uma breve observação do problema, podemos perceber a presença de porcentagem, assunto que o modelo de barras é bastante utilizado, juntamente com o modelo de pizza, para ensinar, o que expõe a forma como tal tipo de problema é encarado nas escolas. O modelo de barras está sempre presente quando se ensina porcentagem, por outro lado, quando o aluno, ou até mesmo o professor, se depara com um problema como esse, dificilmente ele utiliza o modelo que lhe foi ensinado, procurando sempre modelá-lo através de uma equação, fazendo com que esse processo, na maioria das vezes, se torne mecânico, ou seja, o aluno procura uma solução para o problema sem ao menos refletir sobre os resultados. Sendo assim, vamos procurar uma resposta para esse problema de forma concreta e depois usaremos as equações para compreender esse processo de algebrização. Para iniciar, vamos começar pelo primeiro parágrafo que já traz duas informações relevantes para nós. A primeira informação do enunciado é sobre a quantidade de alunos que praticam esportes em uma determinada escola no ano de 2009, totalizando 320 alunos esportistas. Dentre esses alunos, 45% deles praticam vôlei. A partir dessas informações, anotemos:

- Em 2009, 320 alunos praticam esportes em uma escola,

- 45% dos 320 alunos, praticam vôlei.

No segundo parágrafo o enunciado diz que, no ano de 2010, houve uma diminuição no número de praticantes de vôlei, e essa porcentagem agora é de 25%. Tal informação merece a devida atenção, pois a palavra "diminuiu" pode trazer a sensação de que agora temos menos alunos, mesmo a informação seguinte dizendo que o número de alunos que praticam vôlei não se alterou, daí a importância de olhar para as duas informações juntas. Assim, vamos anotar essas informações, mas mudando a ordem com que elas aparecem:

- O número de praticantes de vôlei não se alterou;

- O número de jogadores de vôlei passou a representar 25% do total de esportistas.

O último parágrafo traz de forma direta a questão na qual se resume o problema, questionando o número de alunos esportistas que a escola passou a ter no ano de 2010. Nesse momento, o professor faz a seguinte pergunta aos alunos: *Vocês são capazes de informar a incógnita e a condicionante?* Espera-se que os alunos apresentem a incógnita como o número de esportistas da escola no ano de 2010. Já a condicionante deve ser entendida como a permanência do número de jogadores de vôlei de um ano para o outro mesmo havendo variação na porcentagem de jogadores de vôlei em relação ao total de alunos esportistas.

Estabelecendo um Plano.

Inicialmente vamos tratar as informações de cada ano separadamente, utilizando as barras para representar as porcentagens que estão presentes no enunciado. No ano de 2009, por exemplo, tínhamos 45% dos 320 alunos esportistas da escola praticando vôlei, então devemos representar essa quantidade através de uma barra. Faremos essa representação de maneira inteligente, imaginando que o aluno seja capaz de realizar os cálculos mentalmente, situação que permite ao professor perguntar aos alunos: *Saberiam representar* 45% *através de outra expressão?* Após rápida observação, podemos perceber que 45% pode ser representado de forma equivalente pela expressão $50\% - 5\%$, sendo a outra forma de representar os 45% é escrevendo-o como $20\% + 25\%$. Apesar disso, a primeira se mostra mais fácil para realizar os cálculos e, assim, 50% que é a representação da metade do total de alunos esportistas, pode ser representado pela figura abaixo.

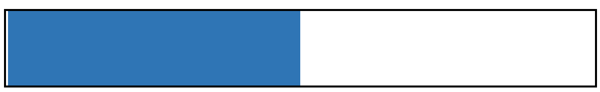


Figura 3.19: 50% dos alunos esportistas em 2009

já os 5% é uma representação da vigésima parte de um todo de alunos esportistas e também pode ser representado usando barra. Veja:

Figura 3.20: 5% dos alunos esportistas em 2009

Para representar os 45%, devemos desconsiderar/tirar a quantidade representada na Figura 3.20 da Figura 319. Assim, temos:

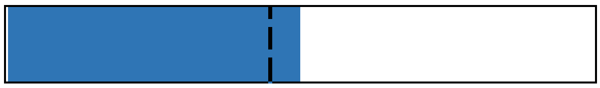


Figura 3.21: 45% dos alunos esportistas em 2009

Dando continuidade as informações apresentadas no problema, o professor pode perguntar aos alunos: *No ano de* 2010 *o número de alunos esportistas é maior ou menor que no ano de* 2009*?* A expectativa é a de que os alunos respondam que o número de esportistas aumentou, pois agora temos para a mesma quantidade de alunos, uma parcela menor do total de esportistas.

Sabendo que uma porcentagem sempre pode ser escrita na forma de fração, o professor pode fazer a seguinte pergunta: Qual fração irredutível representa 25%? A resposta correta é um quarto, ou seja, 25% é uma parte de outras quatro iguais. Logo, pela informação retirada do enunciado, na qual 25% representa a mesma quantidade de alunos que jogam vôlei na escola em 2010 que os 45% que jogavam vôlei em 2009. Assim, comparando a (figura anterior), podemos representar através de uma barra a nova quantidade de alunos esportistas de 2010. Observe a figura abaixo:

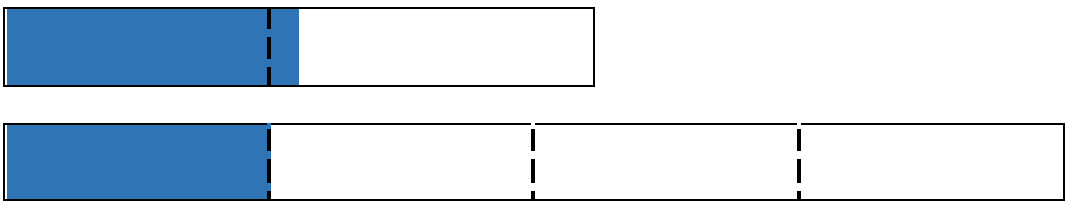


Figura 3.22: Construção dos 25% de alunos esportistas em 2010

Para concluir o problema, basta encontrar o valor que representa a barra da (figura última), mas esse trabalho deixaremos para o próximo passo na execução do plano.

Execução do Plano.

Com o plano estabelecido, vamos agora executar as tarefas, pois esse momento é reservado para resolver as contas que deixamos por fazer no passo anterior. Para início de conversa, vamos determinar o valor que representa 45% de 320. Poderíamos simplesmente fazê-lo através de uma multiplicação de $0,45$ por 320, mas queremos mais do que isso: desejamos que as contas façam sentido ao alunos e, assim, optamos por deixa-las simplistas e ao mesmo tempo intuitivas. Para isso, trocamos 45% pela expressão $50\% - 5\%$, que é composta por porcentagens que fazem mais sentido para o aluno. Sendo assim, 50% representa metade do total de 320 alunos, ou seja, 160 alunos. Já os 5% pode ser obtido dividindo 320 por 20, ou de forma mais simples, é o mesmo que dividir 32 por 2, ou seja, 16 alunos.

Portanto,

$$160 - 16 = 144$$

alunos que praticam vôlei na escola no ano de 2009.

Na segunda parte temos que no ano de 2010, os 25% dos alunos que praticam vôlei representam a mesma quantidade dos 45% de alunos que praticavam vôlei em 2009 que já sabemos é o equivalente à 144. Ou seja, 144 é uma quarta parte do total de alunos esportistas da escola, por isso para encontrar o número de alunos esportistas, basta multiplicar 144 por 4, logo

$$144 \times 4 = 576$$

alunos. Alternativa (D).

Retrospecto.

O aluno chegando até aqui já indica que ele sabe trabalhar com porcentagem e sabe relacioná-la com as frações. Dessa forma, a validação do problema é direta.

Como em 2009 tínhamos 45% dos 320 alunos esportistas jogando vôlei, sabemos então que o número de alunos que jogavam vôlei em 2009 era

$$45\% \quad de \quad 320 = 144.$$

Sabendo ainda, segundo o enunciado, que esse número não se alterou em 2010 e além disso, passou a representar 25% do total de esportistas da escola. Basta então, que 25% do valor que encontramos, seja 144. O valor encontrado foi 576, logo

$$25\% \quad de \quad 576 = 144.$$

Portanto, o resultado é válido, satisfazendo o nosso problema.

3.6 Problema 6 (Peso das Frutas)

O próximo exercício também foi retirado da OBMEP, Prova da 1ª fase de 2014 – Nível 2 – questão 15, envolvendo fração e proporção.

15. Télio comprou laranjas, maçãs e uvas no mercado. O preço por quilograma de cada fruta está na tabela abaixo. Metade do peso total da compra era de maçãs e o peso das uvas era o dobro do peso das laranjas. Se Télio gastou R$ 38,00, quantos quilogramas de frutas ele comprou?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Preços (R$) por quilograma	
Maçã	3,00
Uva	4,00
Laranja	2,00

Figura 3.23: Problema 6

Compreensão do Problema.

Inicialmente, como procedemos em todos os problemas, vamos analisar a estrutura do que está posto em questão. Vemos que o enunciado é composto por quatro parágrafos e uma tabela que complementa as informações.

No primeiro parágrafo, o enunciado contextualiza o problema, indicando que Télio comprou 3 frutas diferentes: maçã, uva e laranja. Perceba que apesar de não apresentar dados para a resolução, a contextualização do problema nos ajuda a compreender o que está acontecendo e, assim, é relevante e indispensável essa informação trazida no início do texto. O segundo parágrafo apenas informa que temos uma tabela complementar, indicando o preço de cada fruta por quilograma. Já o terceiro descreve de forma fracionada a quantidade (peso) de cada uma das 3 frutas. As informações aqui obtidas devem ser analisadas de forma cuidadosa, já que as frações não se relacionam: a fração que representa a quantidade (peso) de laranja comprada está relacionada com o peso total da compra, e a fração do peso da uva e da laranja se relacionam entre si, por isso a necessidade de posteriormente relacioná-las construindo as barras. Veja os dados apresentados nesse parágrafo:

- Metade do peso total era de maçãs;

- O peso da uva era o dobro do peso da laranja.

No último parágrafo apresentam o valor pago pela compra feita por Télio, juntamente com a pergunta do problema. O valor pago foi de R$ 38,00 reais pelo total da compra. Nesse instante, o professor pode perguntar aos alunos: *Qual a incógnita e a condicionante?* Espera-se que os alunos indiquem a incógnita como o peso total da compra, e como condicionante a fração que representa a quantidade de cada fruta em relação ao peso total juntamente com o preço pago por tudo.

Se fizermos uma análise de todas as incógnitas apresentadas nesse trabalho, podemos chegar na conclusão equivocada segundo a qual a incógnita é a questão colocada pelo problema, mas tal fato nem sempre se concretiza. Imagine que um problema peça que encontremos o perímetro de um triângulo retângulo e temos apenas o valor dos catetos. Sendo assim, a incógnita passa a ser a hipotenusa, que é apenas uma parte do processo completo para encontrar o perímetro. Tal observação é importante, uma vez que todos os problemas apresentados no trabalho apresentam a incógnita como a questão do problema, induzindo ao leitor que essa coincidência se torne uma regra.

A última coisa a ser feita é identificar os preços por kg de cada fruta apresentada na tabela. Essa informação é interesse do ponto de vista da quantidade (peso) comprada por Télio, pois é uma possibilidade que o aluno acredite que metade do preço total foi pago em maçãs, e sabemos que isso não é verdade, apenas para o caso de que o preço por kg de cada fruta fosse o mesmo. Segue a tabela de preços.

Estabelecendo um Plano.

A primeira informação que temos a respeito da compra feita por Télio é uma representação em forma de fração da quantidade (peso) de cada uma das frutas. A maçã corresponde à metade do peso total da compra, por isso, podemos representar essa informação através de uma barra, veja:

A barra acima representa o peso total da compra feita por Télio, já a parte pintada representa o peso das maçãs. Observe que a outra metade (em branco) da barra

Preços (R$) por quilograma	
Maçã	3,00
Uva	4,00
Laranja	2,00

Figura 3.24: Tabela de Preços

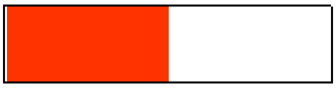


Figura 3.25: Quantidade de maçãs (em kg)

representa o peso das uvas mais o peso das laranjas, por isso precisamos da informação seguinte para pintarmos o peso das uvas e das laranjas. O peso das uvas, segundo o enunciado, é o dobro do peso das laranjas que foram adquiridas por Télio. Sendo assim, devemos pintar na metade restante da barra, o peso das uvas e das laranjas de forma que as uvas representem o dobro das laranjas. Para isso, a nossa estratégia será dividir a metade da barra em n partes iguais, tal que n possibilite a pintura do peso das frutas da forma pretendida. Cabe ao professor, nesse momento, a possibilidade de perguntar aos alunos: qual o número de partes em que podemos dividir a barra para que o peso das uvas represente o dobro do peso das laranjas? A resposta esperada pode aparecer de várias maneiras distintas, já que n pode ser qualquer múltiplo de 3. De qualquer forma, as respostas vindas dos alunos provavelmente devam ser: 6, 12 ou no máximo 18, cabendo ao professor provocar os alunos afim de que percebam essa infinidade de possibilidades.

Vamos aqui, adotar a divisão da metade da barra em 3 partes iguais, pois facilitará o nosso trabalho, mas caso o aluno, por exemplo, venha a dividir a barra em 12 partes iguais, o professor deve deixar que o mesmo continue o processo da sua maneira. Retomando o nosso raciocínio, a partir da barra pintada em 3 partes iguais, devemos pintar (de roxo) 2 partes para representar o peso das uvas e (de laranja) 1 parte para representar o peso das laranjas, perceba que temos o dobro do peso de uvas quando comparamos o peso das laranjas. Nossa nova barra ficou assim:

A fração que representa o peso das maçãs está relacionada com o peso total da compra, e a fração das uvas e das laranjas estão relacionadas entre si. Por isso, não podemos relacionar essas frações, já que elas não se referem ao mesmo todo, portanto vamos dividir a metade da barra que representa o peso das maçãs em 3 partes iguais,

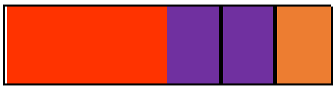


Figura 3.26: Quantidade de uva e laranja (em kg)

como foi feito na outra metade, dessa forma vamos obter, na barra total, 6 partes iguais, como na imagem abaixo.

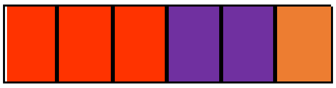


Figura 3.27: A barra dividida em 6 partes iguais

Agora, podemos representar o peso das frutas em frações que se relacionam com o peso total da compra, sendo:

- A quantidade de maçãs representa $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ do peso total,

- A quantidade de uvas representa $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ do peso total,

- A quantidade de laranjas representa $\frac{1}{6}$ do peso total.

A quantidade adquirida de um produto, multiplicado pelo preço de sua unidade, resulta no valor total a ser pago. Por isso, para saber o valor pago nas frutas adquiridas por Télio, devemos multiplicar por 3, 4 e 2 respectivamente a quantidade de maças, uvas e laranjas compradas e, em seguida, somar tudo. Vale lembrar que a multiplicação é uma soma de fatores iguais, por isso, através de uma barra, vamos somar 3 vezes a quantidade de maçãs, 4 vezes a quantidade de uvas e 2 vezes a quantidade de laranjas que já foram representadas na imagem "anterior". Observe a imagem.

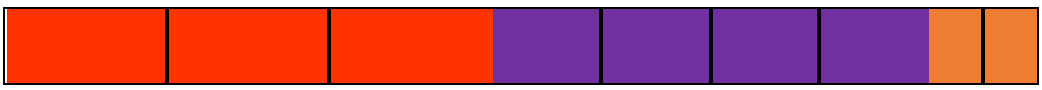


Figura 3.28: Preço total da compra

Em que a parte vermelha representa o preço pago pelas maçãs, a roxa o preço pago pelas uvas e a laranja o preço pago pelas laranjas. Perceba, também, que podemos dividir essa barra em pequenas partes de mesmo tamanho daquelas obtidas na imagem "anterior". Observe que foram gerados 19 partes de tamanhos iguais, ou seja, representam a mesma quantidade em reais.

Execução do Plano.

Nesse momento, é possível perceber o quanto é facilitador o uso das barras, pois sequer usamos equações ou qualquer tipo de abstração, apenas representações, o mais legal de tudo isso é que já conseguimos enxergar o resultado, pois quase nada foi deixado para a execução.

Nossa última barra representa os 38 reais gastos por Télio na compra das frutas, e se dividirmos a barra em tamanhos igual aqueles quando dividimos a primeira barra, que representava o peso da compra de Télio, vamos obter 19 pedaços de barra. Ou seja,

$$38 \div 19 = 2$$

é o valor de um desses pedaços na qual foi dividida as barras. Queremos, agora, o valor do peso total da compra, o qual é representado pela a barra inicial, que foi dividida em 6 partes iguais de tamanho 2. Portanto,

$$6 \times 2 = 12$$

e o peso total da compra feita por Télio é de 12 quilos. Alternativa (C).

Retrospecto.

Mais uma vez, o problema foi resolvido através do modelo pictórico e fazendo uso das barras. Recordemos a importância de questionar os nossos resultados: *será que fazem sentido?, o resultado é válido para o nosso problema?*. Por isso é extremamente importante que seja feito o retrospecto do problema, validando e "conferindo"se os resultado encontrados são satisfatórios. Nesse caso, verificaremos se o resultado encontrado satisfaz todas as condições do nosso problema.

O resultado encontrado foi $12kg$ o resultado do total da compra feita por Télio. Dentre os $12kg$, temos maçâs, uvas e laranjas. O peso das maçâs, segundo o enunciado, representam metade da compra, logo são $6kg$ de maçâs. Já o peso das uvas representam o dobro do peso de laranjas, isso dentro dos $6kg$ que ainda restam, já que os outros $6kg$, que totalizam os $12kg$ da compra, são o peso das maçãs. Nesse caso, o único resultado possível são $4kg$ de uvas e $2kg$ de laranjas.

Perceba que além de validar o nosso resultado do peso total da compra, validamos também as nossas construções e divisões das barras, onde os valores encontrados aqui no retrsopecto são perfeitamente válidos nas nossas construções.

3.7 Problema 7 (As 3 Canecas)

Este último problema também foi retirado da OBMEP, Prova 1ª fase 2019 – Nível 2 – questão 10, envolvendo equivalência de frações.

10. Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

A) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.
B) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.
C) Ela ficará preenchida em 5/8 de sua capacidade.
D) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
E) Ela vai transbordar.

Figura 3.29: Problema 7

Compreensão do Problema.

O enunciado do problema conta com 5 parágrafos, e novamente o professor deve sugerir aos alunos que compreendam o problema parágrafo por parágrafo, lembrando sempre de registrar a incógnita e a condicionante.

O primeiro parágrafo apresenta o problema ao leitor, trazendo as informações básicas e contextuais da narrativa. Essas informações se referem as 3 canecas que possuí Janaína, sendo que cada uma delas tem capacidades diferentes, e o enunciado trata as canecas como: pequena, média e grande.

No segundo parágrafo, o enunciado compara as duas canecas menores quanto a capacidade delas, informando que a caneca pequena cheia enche $\frac{3}{5}$ da caneca média, ou seja, se dividirmos a caneca média em 5 partes iguais, 3 dessas partes correspondem a caneca pequena. Já no terceiro parágrafo, a comparação ocorre entre a caneca média e a grande, onde uma caneca média cheia enche $\frac{5}{8}$ da caneca grande, logo, se dividirmos a caneca grande em 8 partes iguais, 5 partes corresponderiam a caneca média.

O quarto parágrafo informa que Janaína encheu as canecas pequena e média, despejando tudo na caneca grande e no último parágrafo, há o questionamento sobre o que aconteceu com a caneca grande depois de despejar nela as canecas média e pequena, completamente cheias. Nesse momento, o professor pode intervir com o seguinte questionamento: *Quais são as possibilidades quando despejamos algo em uma caneca?* As possibilidades são 3: não encher completamente a caneca, encher completamente ou transbordar. Além disso, pode se observar que quando representamos em fração, essas possibilidades aparecem com o numerador menor que denominador, numerador igual ao denominador e numerado menor que o denominador, respectivamente. Essas últimas informações serão importantes na hora de analisar as alternativas.

Depois de quase tudo compreendido, o professor deve lembrar os alunos de identificar a incógnita e a condicionante do problema. Perceba que pode não ser tão simples identificar a incógnita, pois ela não está explícita, e o maior erro do aluno é achar que ela sempre será o nosso resultado final. Agora, perceba que queremos saber o que acontece depois que despejamos a as duas canecas menores na caneca grande, logo a nossa incógnita é a quantidade total que representa as duas canecas menores cheias. Já a condicionante são as relações existentes entre as canecas pequena e média e entre as canecas média e grande apresentadas no enunciado.

Estabelecendo um Plano.

Vamos utilizar novamente as barras para auxiliar na resolução, que é feita sem utilizar as abstrações da álgebra, representando a capacidade de cada caneca com as barras, nas quais as cores das barras serão as mesmas das canecas na imagem. Veja:

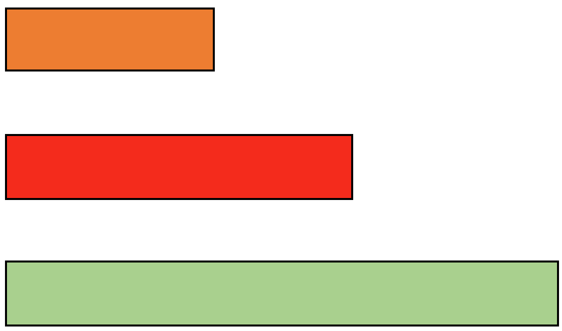


Figura 3.30: Capacidade das canecas em barras.

Sabemos que a barra laranja representa $\frac{3}{5}$ da barra vermelha, ou seja, se dividirmos a barra vermelha em 5 partes iguais, 3 partes irão representar a barra laranja. O mesmo pode ser feito com as barras vermelha e verde. Sabendo que a barra vermelha representa $\frac{5}{8}$ da barra verde, podemos dividir a barra verde em 8 partes iguais, e 5 partes irão representar a barra vermelha inteira.

Vamos transformar essas informações em barras para melhor visualizarmos o que está envolvido na operação. Desenharemos apenas uma barra para representar a relação existente entre a caneca de capacidade média e a caneca de maior capacidade. Veja na figura 3.32:

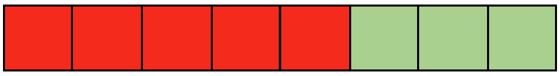


Figura 3.31: Relação entre as canecas média e grande.

A capacidade da caneca grande foi dividida em 8 partes iguais, e 5 dessas partes foram preenchidas com a capacidade da caneca média, o que representa $\frac{5}{8}$ como é apresentado no enunciado. Agora perceba que a parte pintada em vermelho que representa a capacidade da caneca média, está dividida em 5 partes iguais. Portanto se quisermos representar a relação entre a capacidade da caneca pequena e da caneca média, teríamos:

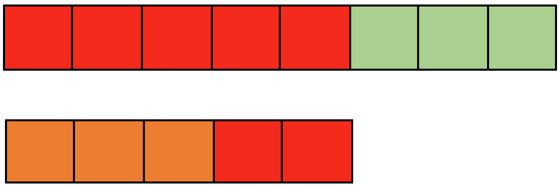


Figura 3.32: As barras divididas em partes iguais

Mas, todas essas partes agora, são iguais, pois todas fazem partes da divisão inicial da maior barra, que representa a capacidade da caneca grande. Daí tiramos, que os $\frac{3}{5}$ da barra média são iguais aos $\frac{5}{8}$ da barra grande.

Execução do Plano.

Sabemos que Janaína encheu as duas canecas menores e despejou na caneca grande, ou seja, devemos somar o valor que as duas canetas menores juntas representam em relação a caneca grande. A caneca pequena representa $\frac{3}{8}$ da caneca grande, já a caneca média representa $\frac{5}{8}$ da caneca grande, logo

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8}.$$

Ou seja, as duas canecas menores juntas representam $\frac{8}{8}$ da caneca grande, o mesmo quer dizer que as duas canecas menores enchem por completo a caneca grande. Analisando as alternativas, temos que a correta é a letra (D), pois a caneca ficará totalmente cheia, sem transbordar.

Retrospecto.

Esse é momento em que procuramos uma segunda solução utilizando o modelo algébrico, pois é necessário que seja feita uma comparação entre as soluções, afim de fortalecer o pensamento algébrico do aluno. Usaremos os mesmos dados obtidos no momento da compreensão:

- Temos 3 canecas: uma pequena, uma média e uma grande,
- A pequena tem capacidade de $\frac{3}{5}$ da média,
- A média tem capacidade de $\frac{5}{8}$ da grande,
- As duas canecas menores foram enchidas e despejadas na grande.

Vamos encontrar uma relação entre a caneca pequena e a grande para trabalharmos com a mesma unidade. Vale ressaltar que para validar esse problema da forma como será feita, é necessário que os alunos compreendam o produto de frações. Como a caneca média é $\frac{5}{8}$ da caneca grande, essa relação se dá pelo seguinte produto:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Ou seja, a caneca pequena representa 3/8 da caneca grande. Portanto, as duas canecas menores juntas representam:

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Alternativa (D), que indica a caneca cheia, sem transbordar.

Conclusão

Frequentemente o que se vê diante dos trabalhos apresentados nesse programa de Mestrado (PPGECE) são trabalhos mais práticos e voltados para os alunos de ensino fundamental e médio, quase sempre com atividades aplicadas em sala de aula. Este trabalho teve uma proposta diversa, voltada para a formação dos professores de Matemática no ensino algébrico. Diante disso, o que se vê nas escolas quanto ao ensino de álgebra, são procedimentos decorados que não trazem contribuições no que diz respeito ao entendimento do assunto, desestimulando os discentes.

Por isso, inicialmente, o trabalho procura explicar o caminho percorrido da aritmética até a álgebra, e dentro dessa transição procuramos colocar cada passo ao seu respectivo ano, facilitando ao professor compreender as dificuldades de seus alunos. Utilizamos aqui o que está posto na Base Nacional Curricular Comum e os Parâmetros Curriculares Nacionais, documentos que nos auxiliam a entender o que os alunos precisam em cada passo da vida escolar. Depois, o trabalho traz a Matemática de Singapura, que conta com a Resolução de Problemas como metodologia, e o Modelo de Barras de maneira a criar um roteiro para ser seguido na resolução de cada problema. Quanto aos problemas que foram propostos, não foi estabelecido nenhuma regra, além de que fossem bons exercícios. Apesar disso, quase todos foram utilizados na OBMEP, simplesmente por que foram os melhores exercícios encontrados, além disso, os conteúdos abordados também são bem diversos, justamente para que as soluções não pareçam repetitivas.

O leitor percebe, durante a solução de cada problema, que tudo aquilo se tornou um roteiro feito pelo autor, onde ele busca a todo instante tornar as soluções o mais próximo possível da realidade da sala de aula, onde as dificuldades surgem e caminhos são dados para que o professor-leitor possa se nortear dentro daquilo que se espera e fazer com que os alunos compreendam minimamente os conceitos algébricos.

Durante a procura por "bons" problemas, o autor se deparou com uma grande quantidade de exercícios que não se encaixam nas soluções utilizando o modelo de barras, pois, muitas vezes, eles não podem ser modelados de forma pictórica, mesmo assim o método é considerado eficiente, já que ao mesmo tempo que se tem a facilidade de desenhar e descrever um dado a partir de uma barra, o aluno também consegue compreender melhor o problema, pois a barra transforma o abstrato em algo concreto e mais próximo de sua realidade. Podemos concluir que o processo que leva o aluno à entender a abstração da álgebra pode ser mais fácil e intuitivo se for utilizado primeiramente procedimentos com materiais concretos e de fácil compreensão.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y.Y. 2013, comunicação pessoal, **Texto explicativo sobre a chamada Matemática da Singapura (versão revisada de 2014)**, material de apoio para o projeto PROF-OBMEP

BALDIN, Y.Y. **Desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de escola básica**: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. II CEMACYC, Cali, Colombia, p. 1-12, 29 out. 2017.

BALDIN, Y.Y.; SILVA, A. F. **OBMEP na escola**: Resolução de Problemas na sala de aula. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 93 p. v. 1. ISBN 978-85-244-0424-5.

BRASIL.**Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, 2017. 598 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 5 Mar. 2019.

CLARK, A. **Singapore Math**: A Visual Approach to Word Problems. Math in Focus: My Pals are Here! Maths, 1995.

DAVIS, P.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa, 1995: Gradiva.

GARELICK, J.H; GARELICK, B. **Singapore Math Using the bar model approach, Singapore textbooks enable students to solve difficult math problems and learn how to think symbolically**. Education Leadership, U.S. Department of Justice, p. 28-31, 10 nov. 2007.

OBMEP, Prova 1ª fase 2006 - Nível 1. **Questão 16**. site da OBMEP, 29 ago. 2006. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2006.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

OBMEP, Prova 1ª fase 2010 - Nível 2. **Questão 15**. site da OBMEP, 08 jun. 2010. Disponível em: www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2010.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

OBMEP, Prova 1ª fase 2011 - Nível 1. **Questão 15**. site da OBMEP, 16 ago. 2011. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2011.pdf. Acesso em: 16 abr. 2019.

OBMEP, Prova 1ª fase 2012 - Nível 1. **Questão 11**. site da OBMEP, 05 jun. 2012. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n1-2012.pdf. Acesso em: 10 abr. 2019.

OBMEP, Prova 1ª fase 2014 - Nível 2. **Questão 15**. site da OBMEP, 27 maio. 2014. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2014.pdf. Acesso em: 16 abr. 2019.

OBMEP, Prova 1ª fase 2019 - Nível 2. **Questão 10**. site da OBMEP, 21 maio. 2019. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2019.pdf. Acesso em: 16 abr. 2019.

PAULSEN, A. **Singapore**: Thinking Schools, Learning Nation. andrewpaulsen, 2018. Disponível em: https://tecnoblog.net/247956/referencia-site-abnt-artigos/. Acesso em: 20 de jun. de 2019.

PIMENTEL, D.E. **Metodologia da Resolução de Problemas no Planejamento de Atividades para a Transição da Aritmética para a Álgebra.** 2010. 136 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. 2ªed. Rio de Janeiro: Interciência. 1995.

PONTE, J. P. **Números e álgebra no currículo escolar**. Grupo de Investigação DIFMAT, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 1-21, 14 jun. 2006.

QUEIROZ, J.M.S. **Resolução de Problemas da Pré-Álgebra e Álgebra para Fundamental II do Ensino Básico com Auxílio do Modelo de Barras**. 2014. 144 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

RIBEIRO, M.B. **A resolução dos problemas da OBMEP através do método de barras como meio para capacitação de professores em estratégias de ensino de matemática**. Orientador: Prof.(a) Dr.(a) Yuriko Yamamoto Baldin. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

SANTOS, C.S.; CARDOSO, A; SACRAMENTO, M.M. **11 Educação Matemática**: Retrospecto e Perspectiva. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO Matemática, 11., 2013, Curitiba. **ALGEBRIZAÇÃO: REFLEXÕES SOBRE UMA PRÁTICA.** Curitiba: SBEM, 2013. p. 1 - 11.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília : MEC/SEF: Secretaria de Educação Funda, v. 3, 1997. 92 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 15 Abr. 2019.