Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Boa postura para alguns Sistemas de Equações Dispersivas e para uma Equação Dispersiva

Ronaldo Bressan Pes

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

São Carlos
Outubro de 2020

Boa postura para alguns Sistemas de Equações Dispersivas e para uma Equação Dispersiva

Ronaldo Bressan Pes

Orientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor em Matemática. O autor foi apoiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de finança 001.

São Carlos
Outubro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Ronaldo Bressan Pes, realizada em 30/10/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo (UFSCar)

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho (UFSCar)

Prof. Dr. Gerson Petronilho (UFSCar)

Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee (UNICAMP)

Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias (UFMG)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais, Ereni e Gilberto.

"La utopía está en el horizonte. Camino dos pasos, ella se aleja dos pasos y el horizonte se corre diez pasos más allá. ¿Entonces para qué sirve la utopía? Para eso, sirve para caminar."(Eduardo Galeano/Fernando Birri)

Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao meus pais, Gilberto e Ereni, e ao meu irmão, Robledo, pelo amor, incentivo e suporte incondicional nos meus estudos e escolhas da vida. Agradeço também aos demais familiares, dos quais recebi apoio total.

Ao meu orientador, Professor Cezar Issao Kondo, pelos ensinamentos, pela paciência, pela confiança no meu trabalho durante o período de pesquisa e pelos conselhos matemáticos enriquecedores, que tornaram uma realidade a presente tese.

Aos membros da banca de defesa, Gerson Petronilho, José Ruidival Soares dos Santos Filho, Mahendra Prasad Panthee e Luiz Gustavo Farah Dias pelas correções e valiosas sugestões.

Ao Professor Henrik Kalisch, da Universidade de Bergen, pelas sugestões e suporte para o presente trabalho.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFSCar que contribuiram diretamente com minha formação matemática e, em especial, aos professores Luis Antônio Carvalho do Santos e Tiago Henrique Picon.

Um agradecimento especial ao Professor João Baptista Peneireiro, pelo qual tenho admiração infinita, tendo sido meu grande exemplo e incentivador nesta caminhada desde a graduação para a vida. Compartilho da mesma gratidão com os professores Márcio Luiz Miotto, Taísa Junges Miotto, Ricardo Fajardo e João Carlos Gilli Martins, pela contribuição na minha formação acadêmica e incentivo à continuação dos meus estudos.

Ao meu grande amigo e parceiro, desde o primeiro dia da graduação, Rodrigo de Freitas Gabert. Sem você eu não teria chegado nem na metade do caminho: foste e é um verdadeiro amigo e essa caminhada não existiria sem tua existência. Agradeço pela amizade, pela paciência, pelos ensinamentos que vão muito além da matemática, e por haver estado ao meu lado neste fase.

Ao meu amigo Marcos, a grande amizade que construí em São Carlos. Essa caminhada não se realizaria se não fosse pelo grande amigo que foi e é, desde as várias rodas de violão às grandes discussões matemáticas. Com certeza, estar ao seu lado foi um aprendizado.

Ao Diego Henrique que ajudou na tomada de decisões importantes da minha vida. Agradeço-o pelo companheirismo, paciência e suporte neste período.

Aos meus amigos Renan e Eric, os quais, além da amizade, dividimos grandes momentos de reflexão sobre a vida e também, por outro lado, de boas gargalhadas.

À minha amiga Renata, pela amizade e suporte em muitos problemas matemáticos, tendo sido um grande exemplo e parceira na pós-graduação.

Ao Cláudio e Rafa, amigos da vida, para além da sala 107, a qual dividimos por muito tempo. Ao Alisson, pela parceria e grande ajuda quando cheguei em São Carlos. À Patrícia e Victor, amigos dos quais recebi imenso apoio nos momentos mais difíceis. À Rafa, Jéssica, Fernanda Somavilla e Renato, pela amizade, que tornavam os dias mais leves. À Flávia, amiga que enriquecia o departamento com suas visitas surpresas. Ao Igor e Francisco, além de amigos, dois grandes exemplos. A los hermanos Joel, Carlitos, Mynor, Diana, Ramón e Tito, grandes parceiros de Latinoamérica. Ao Bruno, Fernando e Alex pela amizade e pelos papos em direção ao RU da UFSCar. Ao Wagner, Karina, Dalton, Renan e Bárbara pela amizade e coleguismo. Ao Filipe, Fernando Augusto, Carlos, Evandro, Matheus e Givanildo, além da amizade, parceiros de futebol. Também agradeço a Amanda Ferreira, Dayana Flores e Izabella, colegas e vizinhas de salas.

Aos meus compadres Rian, Marieli e Vanessa Steindorf que, através da amizade, atenuaram os grandes percalços dessa jornada.

Das muitas amizades construídas no Departamento de Matemática estão entre elas aquelas representadas na galera do futebol e a estes eu os agradeço pelos momentos de descontração.

Aos amigos do IFPR que, apesar do curto período que estivemos juntos, deixaram marcas significativas na minha formação pessoal e profissional. São eles: Guilherme e Johny, Carla, Kelly, Reinaldo, Cristian, Emerson, Roseílda, Tiago Suchecki, Zaudir, Vander, Ronaldo, Renan, Patrícia e João Matheus.

Muitos foram os amigos que me ajudaram nessa caminhada, direta ou indiretamente, e todos, de alguma forma, compõem a minha história. Muito embora muitos destes não tenham permanecido constantes e suficientemente próximos a esta trajetória, não é por isso que não sejam dignos de um obrigado. Por isso, deixo aqui meu sincero agradecimento a todos vocês.

Por fim, agradeço ao meu inseparável amigo, tão importante quanto, o violão, potencializador, e muitas vezes atenuador, de grandes emoções.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer a boa postura para sistemas de equações diferenciais parciais dispersivas e para uma equação diferencial parcial, com dados iniciais pertencentes ao espaço de Gevrey.

A prova se baseia em estimativas sobre normas adaptadas à parte linear das equações. Em particular, estimativas nos espaços de Bourgain são provadas para os termos lineares e não lineares do sistema e o resultado principal é obtido pelo princípio da contração.

A classe de sistema em vista contém vários sistemas que surgem na modelagem de ondas em fluidos, estabilidade e instabilidade de ondas solitárias e modelos para propagação de ondas em sistemas físicos em que efeitos não lineares e dispersivos são importantes.

As técnicas apresentadas neste trabalho foram baseadas em Grujić e Kalisch, ver [21], que estudaram a boa postura de um PVI associado a uma equação geral, cujos dados iniciais pertencem aos espaços de Gevrey.

Abstract

The main aim of this work is to establish the well posedness for a dispersive partial differential equations systems and for a partial differential equation, with initial data belonging to Gevrey space.

The proof relies on estimates in norms adapted to the linear part of the equations. In particular, estimates in Bourgain spaces are proven for the linear and nonlinear terms of the system and the main result is obtained by a contraction principle.

The class of system in view contains a number of systems arising in the modeling of waves in fluids, stability and instability of solitary waves and models for wave propagation in physical systems where both nonlinear and dispersive effects are important.

The techniques presented in this work were based in Grujić and Kalisch, see [21], who studied the well posedness of a IVP associated to a general equation, whose the initial data belongs to Gevrey spaces.

Sumário

Introdução

As equações diferenciais parciais são objetos de grande interesse dos pesquisadores por apresentarem diversas aplicações e com uma matemática bem rigorosa. Sua criação, que se iniciou com estudo do Cálculo Diferencial e Integral, estava associada inicial e principalmente a problemas da mecânica clássica. Ao longo do tempo, novas aplicações surgiram, alcançando o cerne de muitos problemas de outras áreas do conhecimento, inclusive fora da Matemática e da Física, como em uma dinâmica populacional ou até mesmo em modelos econômicos.

No contexto físico, em particular, as equações diferenciais parciais cujas ondas de diferentes comprimentos se propagam em diferentes velocidades de fase (para uma leitura mais aprofundada, ver [31], são chamadas de equações diferenciais dispersivas. Estas, por sua vez, quando compõem um sistema de equações, podem representar fenômenos mais complexos e interessantes.

Seguindo esta direção, o presente trabalho dedicar-se-á ao estudo do problema de Cauchy para uma equação diferencial parcial e para sistemas de equações diferenciais parciais dispersivas, obtidos pelo acoplamento não linear de generalizações e modificações de equações como a de Korteweg-de Vries, Kawahara e Schrödinger, amplamente estudadas, dada a gama de suas aplicações. O real interesse em sistemas que conecte estas equações se dá pela investigação da boa postura, cuja noção, de acordo com Jacques Hadamard, segue através de três características que desejamos e esperamos de uma solução de uma equação diferencial parcial. Dizemos, à luz de [15], que dado um problema para um equação diferencial parcial é *bem posto* se

- (a) o problema, de fato, possui uma solução;
- (b) esta solução é única;
- (c) a solução depende continuamente de um dado inicial do problema.

A última condição diz respeito a problemas que surgem a partir de situações físicas e significa que para dados iniciais próximos, as respectivas soluções, associadas a estes dados, obedecem essa mesma proximidade. Essa definição também se estende a um sistema de equações diferenciais parciais, objeto que é de nosso principal interesse.

Em particular, estabeleceremos a boa postura local para três sistemas de equações dispersivas bem como para uma equação diferencial parcial, distribuídos, respectivamente, em cada capítulo da presente tese, através de técnicas apresentadas em [21].

Para fazer isso, os espaços considerados são os espaços de Gevrey, guardados na notação $G^{\sigma,s}$. Assim, a busca de uma solução local para cada um dos sistemas se resume em encontrar um $T>0$, para o qual a boa postura do problema esteja satisfeita no espaço $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$. No caso da boa postura para a equação diferencial parcial, tratada no último capítulo, o espaço a ser considerado é $C([-T,T],G^{\sigma,s})$.

O Capítulo 1 corresponde as noções preliminares do texto, no qual deixamos o leitor a par dos pré-requisitos e cuja finalidade é a compreensão de detalhes e resultados técnicos associados à análise de Fourier. Ademais, é neste capítulo que são definidos os principais espaços de funções, os quais formam o ambiente das muitas estimativas produzidas neste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos a boa postura para o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{\ell=0}^{N_1-k}\partial_x^k\left\{\sum_{m=0}^{N_1-k}\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\,\partial_x^{2k+1}u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_3}\sum_{\ell=0}^{N_3-k}\partial_x^k\left\{\sum_{m=0}^{N_3-k}\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\right\} + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\,\partial_x^{2k+1}v = 0, x,t\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{I.0.1}$$

com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x) \\ v(x,0)=v_0(x), \end{cases}$$

onde $u=u(x,t)$ e $v=v(x,t)$ são funções reais e $p\in\mathbb{Z}_+$ fixo. Além disso, $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$ denotam polinômios homogêneos e os termos a_k e b_k denotam números reais.

O principal resultado no Capítulo 2 foi estabelecer o seguinte: seja $s\geq 2N+1/2$, onde $N=\max\{N_2,N_4\}$ e suponha $N_2\geq N_1,N_3$ e $N_4\geq N_1,N_3$. Para o dado inicial (u_0,v_0) em $G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}$, existe um $T>0$, tal que o problema de valor inicial (I.0.1) é bem posto no espaço $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$.

Apesar da aparente generalidade no sistema (I.0.1), dadas as possibilidades de escolhas para os polinômios que compõem os termos não lineares, e também por consequência disso, este pode apresentar representações mais simples e ser encontrado em alguns sistemas de equações estudados na literatura. Isso será feito com detalhe em cada capítulo.

Em especial, a motivação para o sistema (I.0.1) vem dos sistemas estudados em [1], [5] e [10], que surgem como modelos para propagação de ondas em sistemas físicos, como veremos adiante.

De fato, para escolhas particulares de N_1, N_2, N_3 e N_4, bem como em cada um dos polinômios $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$, sobre os quais estamos impondo que sejam homogêneos, podemos obter

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(uv^2) = 0, \;\; u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \alpha\, \partial_x^3 v + \partial_x(vu^2) = 0, \;\; v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

que foi estudado em [10] e é um sistema de equações de Korteweg-de Vries modificada.

Mais geral que este, mas ainda um caso particular do sistema I.0.1, para p inteiro positivo, é o sistema apresentado em [1], como segue

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^p v^{p+1}) = 0, \;\; u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x(v^p u^{p+1}) = 0, \;\; v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

embora este trabalho se refira à estabilidade e instabilidade das ondas solitárias, o que é, bem como a boa postura para um sistema, fortemente estudado.

Além dos exemplos mencionados acima, outro sistema acoplado de equações do tipo KdV-KdV, considerado em [5], o qual contém termos não lineares quadráticos, inclui um caso especial

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(p(u,v)) = 0, \;\; u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \alpha\, \partial_x^3 v + \partial_x(q(u,v)) = 0, \;\; v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

onde a e b denotam os seguintes polinômios

$$p(u,v) = Au^2 + Buv + Cv^2 \quad \text{e} \quad q(u,v) = Du^2 + Evu + Fv^2,$$

desde que consideramos o caso particular $A = C = D = F \equiv 0$. Tais sistemas surgem como modelos para propagação de ondas em sistemas físicos onde efeitos não lineares e dispersivos são importantes. No Capítulo 3, uma variação de (I.0.1) nasce na tentativa de ampliar o alcance de novos sistemas e é justamente pelo fato do sistema (I.0.1) não incluir o sistema proposto em [5], na sua forma geral, que consideramos um novo sistema, acrescido de novos termos, como segue

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(P(u,v)) + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\, \partial_x^{2k+1} u = 0 \\ \partial_t v + \partial_x(Q(u,v)) + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_3-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_3-k} \partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\, \partial_x^{2k+1} v = 0, \end{cases} \tag{I.0.2}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$, com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Para a, b, c e d números reais quaisquer, fixados, $P(u,v)$ e $Q(u,v)$ são dados por

$$\begin{aligned} P(u,v) &= au^q + bv^q \\ Q(u,v) &= cu^q + dv^q. \end{aligned}$$

De fato, não linearidades quadráticas como $\partial_x u^2$ e $\partial_x v^2$ não estão contempladas em (I.0.1) para quaisquer que sejam as escolhas dos polinômios $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$, mas agora estes termos estão incluídos em (I.0.2), pela definição acima, no caso particular em que $q = 2$.

Neste capítulo, o resultado de boa postura se resume no seguinte teorema: seja $s \geq 2N + 1/2$, onde $N = \max\{N_2, N_4\}$ e suponha $N_2 \geq N_1, N_3$ e $N_4 \geq N_1, N_3$. Para o dado inicial (u_0, v_0) em $G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial (I.0.2) é bem posto no espaço $C([-T,T], G^{\sigma,s}) \times C([-T,T], G^{\sigma,s})$.

O último sistema considerado neste trabalho, referente ao Capítulo 4, é o sistema de equações Schrödinger-KdV, dado por

$$\begin{cases} i\partial_t u + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} + \sum_{j=1}^{N_1} u^{2j+1} + \sum_{j=1}^{N_2} a_j \, \partial_x^{2j} u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_3} \partial_x^k (Q_k(u,v)) + \sum_{j=1}^{N_4} b_j \, \partial_x^{j+1} v = 0, \end{cases} \tag{I.0.3}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$, com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

para $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ funções reais. Este sistema surge no objetivo de englobar sistemas como

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha(uv) + \beta|u|^2 u, & u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \gamma \partial_x(|u|^2), & v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função complexa, $v = v(x,t)$ é uma função real e α, β e γ são constantes reais. Segundo [12], estes sistemas modelam interações entre ondas curtas, $u(x,t)$, e ondas longas, $v(x,t)$, e surgem na mecânica dos fluidos, bem como na física do plasma. Os mesmos fenômenos modelam o sistema abaixo

$$\begin{cases} i\partial_t f - \partial_x^4 f + |f|^2 f + \beta(fg) = 0, & u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t g - \partial_x^5 g + \frac{1}{2}\partial_x(|g|g) + \frac{1}{2}\beta\partial_x(|f|^2) = 0, & v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

estudado em [2], que, por sua vez, é um caso particular do sistema (I.0.3).

O resultado de boa postura deste capítulo apresenta uma diferença sutil dos demais, que reside no fato das desigualdades entre os índices dos somatórios serem estritas, como segue: seja $s \geq 2N + 1/2$, onde $N = \max\{N_2, N_4\}$ e suponha $N_1, N_3 < N_2$ e $N_1, N_3 \leq N_4$. Para o dado inicial (u_0, v_0) em $G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial (I.0.3) é bem posto no espaço $C([-T, T]; G^{\sigma,s}) \times C([-T, T], G^{\sigma,s})$.

Por fim, dedicamos o Capítulo 5 ao estudo da boa postura para a seguinte equação diferencial parcial

$$\partial_t u + \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k \, \mathcal{H} \partial_x^{2k} u + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, \partial_x^{2k+1} u = 0 \qquad \text{(I.0.4)}$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$, com dado inicial

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

onde $\mathcal{H}$ denota a transformada de Hilbert.

Esta equação geral vem de [21] e contempla a equação de Benjamin-Ono, a qual foi estudada, por exemplo, em [4] e [29], em outros contextos. Em particular, em [24], a equação aparece da seguinte forma

$$\partial_t u + u u_x - \mathcal{H}(\partial_x^2 u) + \partial_x u - \tau \partial_x^3 u = 0,$$

a qual é importante na descrição da evolução de ondas internas de crista longa em sistemas com dois fluidos.

O principal resultado no Capítulo 5 foi estabalecer o seguinte: seja $s \geq 2N_2 + 1/2$ e suponha $N_2 \geq N_1$. Para o dado inicial u_0 em $G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial (I.0.4) é bem posto no espaço $C([-T, T], G^{\sigma,s})$.

De modo geral, para os sistemas (I.0.1), (I.0.2) e (I.0.3), estabelecer o resultado de boa postura passa pela construção de um operador integral, obtido pelo princípio de Duhamel, e, por meio de estimativas, usar o princípio de contração. De fato, para o par de dados iniciais $(u_0, v_0) \in G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, fixados, o operador em questão a ser considerado é o par $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$, definido formalmente por

$$\begin{cases} \Gamma_1(u, v) = \psi(t) U(t) u_0 - \psi_T(t) \displaystyle\int_0^t U(t - t') M_1(u, v) dt' \\ \Gamma_2(u, v) = \psi(t) W(t) v_0 - \psi_T(t) \displaystyle\int_0^t W(t - t') M_2(u, v) dt', \end{cases}$$

onde ψ é uma função real na variável t satisfazendo

$$\text{(i)} \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \qquad \text{(ii)} \quad \psi \equiv 1 \ \text{ sobre } \ [-1, 1], \qquad \text{(iii)} \quad \operatorname{supp} \psi \subset [-2, 2],$$

e, para $\delta > 0$, seja $\psi_\delta(t) := \psi(t/\delta)$.

Além disso $\{U(t)\}$ e $\{W(t)\}$ denotam os grupos unitários que, por meio do par $(U(t)u_0, W(t)v_0)$, definem a solução para a parte linear do sistema. Ademais, $M_1(u,v)$ e $M_2(u,v)$ denotam os termos não lineares nas respectivas equações nos respectivos sistemas. Observe que nesta notação estamos subtendendo que os operadores $U(t)$ e $W(t)$, bem como $M_1(u,v)$ e $M_2(u,v)$, dependem dos sistemas que estamos considerando.

Contudo, os espaços que desenvolvem um papel chave são os espaços de Bourgain, denotados por $X_\phi^{\sigma,s,b}$ e motivados a partir de [7] e [8], pois é por meio destes que provaremos a propriedade de contração para o mapa Γ, enquanto que para a prova da existência de solução, lançaremos mão de um mergulho destes espaços sobre o espaço das funções contínuas a valores em Gevrey.

Basicamente, o controle das parcelas que definem o operador Γ sobre os espaços de Bourgain é realizado através das seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|\psi(t)U(t)u_0\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c\,\|u_0\|_{G^{\sigma,s}} \\ \|\psi(t)W(t)v_0\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} &\leq c\,\|v_0\|_{G^{\sigma,s}}, \end{aligned}$$

supondo $b_1, b_2 > 1/2$. Além disso,

$$\begin{aligned} \left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-s)f(s)ds\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c\,T^{1-b_1+b_1'}\,\|f\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\ \left\|\psi_T(t)\int_0^t W(t-s)g(s)ds\right\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} &\leq c\,T^{1-b_2+b_2'}\,\|g\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}. \end{aligned}$$

As desigualdades acima fornecem uma estimativa para as parcelas dos operadores Γ_1 e Γ_2, porém ficam estimativas remanescentes. De fato, as estimativas multilineares para os termos não lineares serão dadas através do seguinte resultado: Dado $N_1 \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq k \leq N_1$ e $0 \leq \ell \leq N_1 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1, b'_2 < -1/4$ e $s > (2N_1+1)\max\{b_1, b_2\} + N_1$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $u_1, \cdots, u_p \in X_1^{\sigma,s,b_1}$, $v_1, \cdots, v_q \in X_2^{\sigma,s,b_2}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_1 - k$, para $j = 1, \cdots, p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p, q, s, b_1, b_2 e b_1' tal que

$$\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j}u_j \prod_{i=1}^q \partial_x^\ell v_i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \leq c\prod_{j=1}^p \|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \prod_{i=1}^q \|v_i\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}.$$

Em particular, o Teorema 2.3.1 é válido quando $b = b_1 = b_2$ e $p = 1$, e podemos obter um resultado particular, provado em [21].

A prova para esta estimativa requer adaptações de estimativas prévias provadas em [21]. São estas, por sua vez, que estabelecem uma relação de ordem entre os valores N_1, N_2, N_3 e N_4.

Algo similar ocorre para a equação (I.0.4), exceto pelo fato de não precisarmos de estimativas duplas, adaptadas aos respectivos espaços do espaço produto.

Muito embora, nos exemplos citados acima e nos respectivos artigos no quais eles surgem, tenha sido já provado algum resultado de boa postura, global ou local, não havia, até então, uma técnica capaz de incluir diversificados sistemas conhecidos e de grande interesse ao estudo de sistemas de equações diferenciais parciais dispersivas, e isso se deve às estimativas de termos não lineares muito complicados, como àqueles envolvendo somas e produtos de potências de derivadas de u e v.

Capítulo

1

Noções Preliminares

O tratamento para o estudo de equações diferenciais parciais e também sistemas de equações diferenciais parciais passa por ferramentas da análise de Fourier, bem como pelas propriedades dos espaços para os quais os dados iniciais pertencem.

É com esse intuito que neste capítulo deixaremos o leitor a par dos detalhes técnicos do texto que são indispensáveis para compreensão, e introduziremos algumas definições e notações importantes, que frequentemente serão utilizadas no decorrer da tese.

1.1 Análise de Fourier

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e para $1 \leq p, q \leq \infty$ definimos o espaço de Lebesgue misto, $L_x^p L_t^q(\mathbb{R}^2)$, ou simplismente $L_x^p L_t^q$ (para mais detalhes, ver [3]), com norma definida por

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \|\|f(x, \cdot)\|_{L_t^q}\|_{L_x^p}.$$

Quando $p = q$, temos que $\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \|f\|_{L_{x,t}^p}$. Além disso, no caso particular que $1 \leq p, q < \infty$, temos

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \left[\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q dt \right]^{p/q} dx \right]^{1/p}.$$

Suponha (p, q) tais que $1 \leq p, q \leq \infty$ e um par correspondente (p', q'), respectivamente conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Supondo $f \in L_x^p L_t^q$ e $g \in L_x^{p'} L_t^{q'}$, obtemos, por aplicações sucessivas da desigualdade de Hölder, que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) g(x,t) dx dt \right| \leq \|f\|_{L_x^p L_t^q} \|g\|_{L_x^{p'} L_t^{q'}}.$$

O mesmo procedimento nos leva ao seguinte resultado: se, para cada $i = 1, \cdots, n$, supomos $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$ e $f_i \in L_x^{p_i} L_t^{q_i}$, então

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(x,t) \cdots f_n(x,t) dx dt \right| \leq \|f_1\|_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \cdots \|f_n\|_{L_x^{p_n} L_t^{q_n}},$$

desde que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} = 1.$$

O próximo resultado caracteriza a norma dos espaços de Lebesgue de norma mista, ver [3]:

Teorema 1.1.1. *Se $f \in L_x^p L_t^q$, $1 \leq p, q \leq \infty$, então*

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \sup_{g \in U_{p',q'}} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) g(x,t) dx dt \right| = \sup_{g \in U_{p',q'}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x,t) g(x,t)| dx dt,$$

onde $U_{p',q'}$ denota a esfera unitária de $L_x^{p'} L_t^{q'}$, sendo p' e q' conjugados a p e q, respectivamente. Além disso, se $f \in L_x^p L_t^q$, para $1 \leq p, q < \infty$, então existe $g \in U_{p',q'}$ tal que

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) g(x,t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x,t) g(x,t)| dx dt.$$

Além disso, relembremos a desigualdade de Young, ver [9], que afirma que: se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

com $1 \leq p, q, r \leq \infty$, então

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Por dualidade, temos que a desigualdade acima é equivalente a

$$\int f * g(y) h(y) dy \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^s},$$

para toda $h \in L^s$, não negativa, sendo s e r são expoentes conjugados, isto é, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$. Note, neste caso, que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1.$$

Para as definições e resultados a seguir, estamos lançando mão das bibliografias [23] e [31], para as quais, como pré-requisitos, são suficientes os cursos usuais de Análise no $\mathbb{R}^n$, Teoria da Medida e Topologia. As demonstrações destes resultados serão omitidas. Além disso, por vezes, muitas das definições abaixo serão usadas no texto restritas a dimensão dois.

A *transformada de Fourier* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(\xi) d\xi.$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$, isto é, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, desde que sejam n-uplas da forma $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$, temos

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Uma notação importante quando se quer escrever derivadas de funções de várias variáveis de maneira eficiente e prática é a de multi-índice.

Com efeito, denotamos com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ uma n-upla de inteiros não negativos. Assim, definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$
$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$. Também, sendo $D_j = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, onde $i = \sqrt{-1}$, denotamos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Com isso, denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente $\mathcal{S}$, e nos referimos como espaço de Schwartz, o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Além disso, dizemos que uma sequência $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}$ *converge a zero* em $\mathcal{S}$, e denotamos $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$, se para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente.

Teorema 1.1.2. *A transformada de Fourier é um operador contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e valem*

$$\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha D^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$$
$$\mathcal{F}[x^\alpha \phi(x)](\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\phi}(\xi),$$

para qualquer $\phi \in \mathcal{S}$.

Teorema 1.1.3. *A transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\phi(\xi)d\xi.$$

Algumas das propriedades a seguir, relacionam a transformada de Fourier de uma convolução entre duas funções com o produto de suas transformadas.

Teorema 1.1.4. *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, então*

$$\begin{aligned}
\int \widehat{\phi}(x)\psi(x)dx &= \int \phi(x)\widehat{\psi}(x)dx \\
\int \phi(x)\overline{\psi(x)}dx &= \int \widehat{\phi}(x)\overline{\widehat{\psi}}(x)dx \\
\widehat{\phi * \psi}(x) &= \widehat{\phi}(x)\widehat{\psi}(x) \\
(2\pi)^n\ \widehat{\phi\psi}(x) &= (\widehat{\phi} * \widehat{\psi})(x).
\end{aligned}$$

Recorde que a convolução entre duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}^n$, é definida por

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy.$$

Para definir a transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, consideraremos o fato de que $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto denso tanto em $L^2(\mathbb{R}^n)$ quanto em $L^1(\mathbb{R}^n)$. O teorema que segue é conhecido como *identidade de Plancherel.*

Teorema 1.1.5. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^n\ \|f\|_{L^2}$.*

Este resultado mostra que a transformada de Fourier define um operador linear entre $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$ e, mais que isso, uma isometria. Logo, existe uma extensão $\mathcal{F}$ definida sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Podemos ainda estender a transformada de Fourier às distribuições temperadas, que são, por definição, funcionais lineares contínuos definidos sobre $\mathcal{S}$, o espaço de Schwartz. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente $\mathcal{S}'$. É possível mostrar que se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (isto é, f é integrável sobre qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$) e tal que

$$|f(x)| \leq A(1+|x|)^B,\ \ \forall\ \ |x| > C,$$

para algumas constantes positivas A, B e C, então $f \in \mathcal{S}'$. Uma importante consequência disso é que $L^p \subset \mathcal{S}'$, para $1 \leq p \leq \infty$, ver [23].

Assim, se $u \in \mathcal{S}'$, definimos a transformada de Fourier de u, denotada por $\widehat{u}$ ou $\mathcal{F}(u)$, por

$$\langle \widehat{u}, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle,\ \ \forall\ \ \phi \in \mathcal{S}.$$

Em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definimos o *valor principal* de $1/x$, denotado por $\text{v. p.}\,\frac{1}{x}$, pela expressão

$$\langle \text{v. p.}\,\frac{1}{x}, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx.$$

Assim, à luz das duas definições acima, é possível mostrar que

$$\langle \mathcal{F}(\text{v. p.}\,\frac{1}{x}), \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -i\pi\text{sign}(y)\phi(y)dy = \langle -i\pi\text{sign}(x), \phi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Aqui, $\text{sign}(y)$ denota a função sinal e é definida por

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} 1, \text{ se } y \geq 0 \\ -1, \text{ se } y < 0. \end{cases}$$

Além disso, para $\phi \in \mathcal{S}$, definimos também a *transformada de Hilbert*, denotada por $\mathcal{H}(\phi)$, por

$$\mathcal{H}(\phi)(y) = \frac{1}{\pi}(\text{v. p.}\,\frac{1}{x} * \phi)(y) = \frac{1}{\pi}\langle \text{v. p.}\,\frac{1}{x}, \phi(y-\cdot)\rangle. \tag{1.1.1}$$

Pela definição da transformada de Hilbert, temos que $\mathcal{H} \in \mathcal{S}'$ e, portanto, podemos calcular sua transformada de Fourier. Com efeito, se χ_A denota função característica de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, então

$$\widehat{\mathcal{H}(\phi)}(y) = \mathcal{F}\left[\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\left(\text{v. p.}\,\frac{1}{x}\chi_{\{\epsilon<|x|<1/\epsilon\}} * \phi\right)\right](y) = -i\ \text{sign}(y)\widehat{\phi}(y),$$

ou seja,

$$\widehat{\mathcal{H}(\phi)}(y) = -i\ \text{sign}(y)\widehat{\phi}(y), \ \ \forall\ \ \phi \in \mathcal{S}. \tag{1.1.2}$$

Consequência disso e da identidade de Plancherel é que $\|\mathcal{H}(\phi)\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$.

Também podemos definir a transformada parcial de Fourier quando se quer tomar essa transformação com respeito a uma das variáveis, fixando as demais. Para isso, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^m)$, com $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ e $t = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Se para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$, tivermos que

$$\int_K dx \int f(x,t)dt < \infty,$$

então, via Teorema de Fubini, f é integrável em t para quase todo $x \in \Omega$ e podemos definir a *transformada parcial* de Fourier *com respeito a* t, sendo

$$\mathcal{F}_t(f)(x,t) = \widehat{f}^t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle t,s\rangle}f(x,s)ds. \tag{1.1.3}$$

O espaço para o qual este operador é continuamente inversível é $C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, que denota o subespaço de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ cujo suporte é compacto. Uma sequência $\{\phi_j\} \subset C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *converge a zero* em $C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, e escrevemos $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$, se existe um compacto fixo, $K \subset \Omega$ tal que o suporte de qualquer elemento da sequência esteja contido em $K \times \mathbb{R}^m$, e $\phi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Teorema 1.1.6. *A transformada parcial de Fourier definida em* (1.1.3) *é um operador continuamente inversível em* $C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *e valem as fórmulas*

$$\widehat{D_t^\alpha \phi}^t(x,t) = t^\alpha \widehat{\phi}^t(x,t)$$
$$\mathcal{F}_t(t^\alpha \phi(x,t))(x,s) = (-1)^{|\alpha|} D_s^\alpha \widehat{\phi}^t(x,s)$$
$$\widehat{D_x^\alpha \phi}^t(x,t) = D_x^\alpha \widehat{\phi}^t(x,t)$$
$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\phi}^t(x,t)\psi(x,t)dxdt = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x,t)\widehat{\psi}^t(x,t)dxdt,$$

para todos $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ *e para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Analogamente é definida a transformada parcial de Fourier com respeito a variável x e resultados como o Teorema 1.1.6 também são válidos trocando a variável x no lugar da variável t, adaptando os espaços de forma adequada.

No presente texto, as definições e resultados acima, em sua maioria, serão usadas restritos a dimensão dois. Nesse caso, x denotará a variável espacial e t a variável temporal. Sendo assim, usaremos a notação $\mathcal{F}(f)(x,t)$ para denotar a transformada de Fourier para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, como abaixo

$$\mathcal{F}(f)(x,t) = \widehat{f}(x,t) = \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} e^{-i\langle (x,t),(\xi,\eta)\rangle} f(\xi,\eta) d\xi\, d\eta.$$

Sempre que a transformada de Fourier for tomada parcialmente, será indicada a variável a ser considerada. Além disso, a mesma notação $\mathcal{F}(f)$, ou simplesmente $\widehat{f}$, será usada para denotar a transformada de Fourier sobre funções reais de uma variável real.

1.2 Espaços de Bourgain e Gevrey

Motivados pelos espaços de Bourgain, pela primeira vez introduzido, em sua versão periódica, a partir de [7] e [8], definimos: fixada $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e para $\sigma > 0$, $s \in \mathbb{R}$ e $b \in [-1,1]$, o espaço $X_\phi^{\sigma,s,b}$, é definido como sendo o completamento do espaço de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, com respeito a norma

$$\|f\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} = \left[\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} (1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}(1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} |\hat{f}(\xi,\tau)|^2 \, d\xi\, d\tau\right]^{1/2}.$$

Em particular, se $\sigma = 0$, denotaremos $X_\phi^{0,s,b} = X_\phi^{s,b}$.

Além disso, se $g \in L^2$, usamos H^s para denotar o espaço de Sobolev de ordem $s \in \mathbb{R}$ com norma

$$\|g\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{g}\,\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^s\widehat{g}\,\|_{L^2},$$

onde $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Definimos o espaço Gevrey para $\sigma > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, denotado por $G^{\sigma,s}$, como sendo o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$ para o qual a norma

$$\|u\|_{G^{\sigma,s}} \doteq \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)}\, |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2}$$

é finita.

Como mencionado em [21], é possível mostrar que funções em $G^{\sigma,s}$ são restrições ao eixo real de funções analíticas na faixa de largura igual a 2σ. Assim, um teorema de boa postura para PVI, tanto para equações quando sistema de equações diferenciais parciais, é realmente uma afirmação sobre a existência de soluções que são analíticas numa variável espacial.

Assim, espaço das funções contínua definidas no intervalo $[-T,T]$ a valores em $G^{\sigma,s}$, denotado por $C([-T,T],G^{\sigma,s})$, é um espaço de Banach munido da norma

$$|v|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} = \sup_{-T\le t\le T} \|v(\cdot,t)\|_{G^{\sigma,s}}.$$

Observação 1.2.1. Se $b > 1/2$, o espaço $X_\phi^{\sigma,s,b}$ é mergulhado em $C([-T,T],G^{\sigma,s})$. De fato, é válida a desigualdade

$$|v|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} \le c\|v\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}}, \tag{1.2.1}$$

a partir de um Teorema de Mergulho de Sobolev, ver [21].

Para $k \in \mathbb{R}$, definimos os operadores multiplicadores de Fourier A^k e Λ^k por

$$\widehat{A^k u}(\xi,\tau) = (1+|\xi|)^k\ \widehat{u}(\xi,\tau)$$
$$\widehat{\Lambda^k u}(\xi,\tau) = (1+|\tau|)^k\ \widehat{u}(\xi,\tau).$$

Dada a notação acima, os resultados a seguir representam lemas técnicos a serem utilizados no decorrer do texto.

Lema 1.2.1. *Seja $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Então para todo $\xi \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda^b v(\xi,t)|^2 dt \le c \int_{-\infty}^{\infty} |v(\xi,t)|^2 dt + c\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_t v(\xi,t)|^2 dt \tag{1.2.2}$$

Demonstração. Primeiro, pela definição de Λ, temos que

$$\Lambda^b v(\xi,t) = \mathcal{F}_t^{-1}[\mathcal{F}_x^{-1}((1+|t|)^b \widehat{v}(\xi,t))].$$

Pela identidade de Plancherel, temos que:

$$\|\Lambda^b v(\xi,\cdot)\|_{L_t^2} = \|\mathcal{F}_x^{-1}((1+|\cdot|)^b \widehat{v}(\xi,\cdot))\|_{L_t^2}. \tag{1.2.3}$$

Como $(1+|t|)^b \le 1+|t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $b \in [-1,1]$, obtemos que

$$\mathcal{F}_x^{-1}((1+|t|)^b \widehat{v}(\xi,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}(1+|t|)^b \widehat{v}(x,t)dx = (1+|t|)^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{v}(x,t)dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_x^{-1}((1+|t|)^b \widehat{v}(\xi,t))| &\le (1+|t|)^b \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{v}(x,t)dx \right| \\
&\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{v}(x,t)dx \right| + |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{v}(x,t)dx \right| \\
&\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{v}(x,t)dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ t\ \widehat{v}(x,t)dx \right|.
\end{aligned}$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ t\ \widehat{v}(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\eta}\ t\ \widehat{v}^t(\eta,t)d\eta dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\eta}\ \widehat{\partial_t v}^t(\eta,t)d\eta dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}_x(\widehat{\partial_t v}^t)(x,t)dx \\
&= \mathcal{F}_x^{-1}[\mathcal{F}_x(\widehat{\partial_t v}^t)](\xi,t) \\
&= \widehat{\partial_t v}^t(\xi,t).
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

De modo análogo, obtemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \widehat{v}(x,t)dx = \widehat{v}^t(\xi,t). \tag{1.2.5}$$

Usando (1.2.4) e (1.2.5), temos que

$$|\mathcal{F}_x^{-1}((1+|t|)^b \widehat{v}(\xi,t))|^2 \le 2\ |\widehat{\partial_t v}^t(\xi,t)|^2 + 2\ |\widehat{v}^t(\xi,t)|^2. \tag{1.2.6}$$

Aplicando (1.2.6) em (1.2.3) e a identidade de Plancherel, obtemos que

$$\|\Lambda^b v(\xi,\cdot)\|_{L^2_t} \leq 2(\|\widehat{v}^t(\xi,\cdot)\|_{L^2_t} + \|\widehat{v}^t(\xi,\cdot)\|_{L^2_t}),$$

como queríamos provar. □

O lema a seguir, bem como o anterior, constitui um resultado técnico que será usado para provar a unicidade da solução para cada um dos problemas a serem considerados nos respectivos capítulos da presente tese.

Lema 1.2.2. *Se $u \in C([-T,T], G^{\sigma,s})$ e $b \in [-1,1]$, então*

$$\|\psi_{T/2}u\|^2_{X^{\sigma,s,b}_\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda^b(\psi_{T/2}(t)e^{i\phi(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t))|^2 dt d\xi.$$

Demonstração. Pela definição da norma, temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_{T/2}u\|^2_{X^{\sigma,s,b}_\phi} &= \int\int (1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau \\
&= \int (1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)} \int [(1+|\tau+\phi(\xi)|)^b|\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi,\tau)|]^2 d\tau d\xi \\
&= \int (1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)} \int [(1+|t|)^b|\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi,t-\phi(\xi))|]^2 dt d\xi,
\end{aligned}$$

após realizar a mudança de variável $t = \tau + \phi(\xi)$.

É suficiente, portanto, mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda^b(\psi_{T/2}(t)e^{i\phi(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t))|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [(1+|t|)^b|\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi,t-\phi(\xi))|]^2 dt.$$

De fato, dada uma função conveniente v, temos, pela identidade de Plancherel, que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(\Lambda^b v)(\xi,t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}_x^{-1}((1+|t|)^b\, \widehat{v}(\xi,t))|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}(1+|t|)^b\, \widehat{v}(x,t)dx\right|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{2b} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\, \widehat{v}(x,t)dx\right|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [(1+|t|)^b\, \mathcal{F}_t^{-1}v(\xi,t)]^2 dt.
\end{aligned}$$

Desse modo, basta mostrar que para $v(\xi,t) = \psi_{T/2}(t)e^{i\phi(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t)$ devemos ter

$$\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi,t-\phi(\xi)) = \mathcal{F}_t(\psi_{T/2}(t)e^{i\phi(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t)).$$

Com efeito, isto ocorre pois

$$
\begin{aligned}
\widehat{\psi_{T/2}u}(\xi, t-\phi(\xi)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-i\tau(t-\phi(\xi))}\psi_{T/2}(\tau)u(x,\tau)dx\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t}\ \psi_{T/2}(\tau)\ e^{it\phi(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\ u(x,\tau)dx\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t}\ \psi_{T/2}(\tau)\ e^{it\phi(\xi)}\ \mathcal{F}_x u(\xi,\tau)d\tau \\
&= \mathcal{F}_t(\psi_{T/2}(t)e^{i\phi(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t)),
\end{aligned}
$$

como queríamos provar. □

Proposição 1.2.1. *Sejam* ϵ, σ *e* s *dados, tais que* $0<\epsilon<\sigma$ *e* $s>0$. *Então, dado* $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, *existe uma constante* $c_{\epsilon,\alpha}>0$ *tal que*

$$\|\partial_x^\alpha f\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} \le c_{\epsilon,\alpha}\|f\|_{G^{\sigma,s}}$$

Demonstração. Com efeito, pela definição da norma temos que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha f\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} &= \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\ |\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{-2\epsilon(1+|\xi|)} e^{2\sigma(1+|\xi|)}\ |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right] ^{1/2}\\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{-2\epsilon(1+|\xi|)} e^{2\sigma(1+|\xi|)}\ (1+|\xi|)^{2|\alpha|}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, se $c_{\epsilon,\alpha} = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}\{e^{-2\epsilon(1+|\xi|)}(1+|\xi|)^{2|\alpha|}\}<\infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^\alpha f\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} &\le c_\epsilon\ \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)}\ |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right]^{1/2} \\
&= c_\epsilon\ \|f\|_{G^{\sigma,s}}.
\end{aligned}
$$

□

Além disso, vale o seguinte:

Proposição 1.2.2. *Sejam* ϵ, σ *e* s *dados, tais que* $0<\epsilon<\sigma$ *e* $s>0$. *Se* $f,g\in G^{\sigma,s}$, *então*

$$\|fg\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} \le c\ \|f\|_{G^{\sigma,s}}\|g\|_{G^{\sigma,s}}$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$
\begin{aligned}
\|fg\|_{G^{\sigma-\epsilon}} &= \|(1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\widehat{fg}(\xi)\|_{L^2} \\
&= \|(1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi)\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Mas, note que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}|(\widehat{f}*\widehat{g})(\xi)| &= (1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\left|\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi-x)\widehat{g}(x)dx\right| \\ &\leq (1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi-x)||\widehat{g}(x)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} A(\xi,x)B(\xi,x)dx,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}A(\xi,x) &\doteq e^{-\epsilon(1+|\xi|)}(1+|\xi-x|)^s e^{\sigma(1+|\xi-x|)}|\widehat{f}(\xi-x)|(1+|x|)^s e^{\sigma(1+|x|)}|\widehat{g}(x)| \\ B(\xi,x) &\doteq e^{\sigma(1+|\xi|)}(1+|\xi|)^s(1+|\xi-x|)^{-s}e^{-\sigma(1+|\xi-x|)}(1+|x|)^{-s}e^{-\sigma(1+|x|)}.\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $B(\xi,x)$ é limitada. De fato, temos que

$$1+|\xi|\leq(1+|\xi-x|)+(1+|x|)\leq(1+|\xi-x|)(1+|x|)$$

implicam em duas desigualdades

$$\begin{aligned}e^{\sigma(1+|\xi|)}\leq e^{\sigma(1+|\xi-x|)}e^{\sigma(1+|x|)} \quad &\Rightarrow \quad e^{\sigma(1+|\xi|)}e^{-\sigma(1+|\xi-x|)}e^{-\sigma(1+|x|)}\leq 1 \\ (1+|\xi|)^s\leq(1+|\xi-x|)^s(1+|x|)^s \quad &\Rightarrow \quad (1+|\xi|)^s(1+|\xi-x|)^{-s}(1+|x|)^{-s}\leq 1,\end{aligned}$$

uma vez que σ e s são positivos. Assim, obtemos que

$$\|fg\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}}\leq c\left\|\int_{\mathbb{R}}A(\xi,x)dx\right\|_{L^2}=c\left\|\int_{\mathbb{R}}F(\xi-x)G(x)e^{-\epsilon(1+|\xi|)}dx\right\|_{L^2},$$

onde

$$\begin{aligned}F(\xi) &= (1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{f}(\xi)| \\ G(\xi) &= (1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{g}(\xi)|.\end{aligned}$$

Assim, se Ψ é dada por

$$\Psi(\xi)=\int_{\mathbb{R}}F(\xi-x)G(x)e^{-\epsilon(1+|\xi|)}dx,$$

então, por dualidade, para terminar a demonstração, basta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(\xi)h(\xi)d\xi\leq\|f\|_{G^{\sigma,s}}\|g\|_{G^{\sigma,s}},$$

para $h \in L^2(\mathbb{R})$, não negativa, tal que $\|h\|_{L^2} = 1$. Para h nestas condições, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi)h(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(\xi - x)G(x)h(\xi)e^{-\epsilon(1+|\xi|)}dxd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(\xi)e^{-\epsilon(1+|\xi|)} \int_{\mathbb{R}} F(\xi - x)G(x)dxd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(\xi)e^{-\epsilon(1+|\xi|)}(F * G)(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi)h(\xi)d\xi &\leq \|F\|_{L^2}\|G\|_{L^2}\|he^{-\epsilon(1+|\cdot|)}\|_{L^1} \\
&\leq \|F\|_{L^2}\|G\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\|e^{-\epsilon(1+|\cdot|)}\|_{L^2} \\
&\leq \|F\|_{L^2}\|G\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\|e^{-2\epsilon(1+|\cdot|)}\|_{L^1}^{1/2} \\
&= c_\epsilon\|F\|_{L^2}\|G\|_{L^2} \\
&= c_\epsilon\|f\|_{G^{\sigma,s}}\|g\|_{G^{\sigma,s}},
\end{aligned}$$

como queríamos provar.

$\square$

Capítulo

2

Boa postura para um Sistema do tipo KdV/Kawahara

No presente capítulo estudaremos a boa postura local de um sistema de equações do tipo KdV/Kawahara generalizada no espaço de Gevrey. Sob este propósito, estimativas para os termos não lineares serão provadas, sobre as quais os espaços de Bourgain desempenharão um papel fundamental. É também por meio delas que provaremos, via o princípio de contração, a boa postura local.

2.1 Introdução e Resultados

Considere o problema de valor inicial (PVI) para o sistema do tipo KdV/Kawahara

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\, \partial_x^{2k+1} u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_3-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_3-k} \partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\, \partial_x^{2k+1} v = 0, x, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

onde $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ são funções reais e os termos a_k and b_k são números reais. Além disso, $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$ denotam polinômios homogêneos, isto é, sem termos constantes. Com isso, se $d_P = d_P(k,\ell,m)$ e $d_Q = d_Q(k,\ell,m)$ denotam os graus dos polinômios $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$, respectivamente, então escrevemos

$$P_{k,\ell,m}(x) = \sum_{i=1}^{d_P} p_{k,\ell,m} x^i \quad \text{e} \quad Q_{k,\ell,m}(x) = \sum_{i=1}^{d_Q} q_{k,\ell,m} x^i. \tag{2.1.3}$$

Também, para futuros cálculos, consideramos

$$\widetilde{P}_{k,\ell,m}(x) = \sum_{i=1}^{d_P} |p_{k,\ell,m}| x^i \quad \text{e} \quad \widetilde{Q}_{k,\ell,m}(x) = \sum_{i=1}^{d_Q} |q_{k,\ell,m}| x^i.$$

Os termos de maior ordem no sistema são os termos dispersivos $\partial_x^{2N_2+1}u$ e $\partial_x^{2N_4+1}v$. Evidentemente, o leque de equações que este modelo engloba é vasto e pode representar várias situações físicas. Por exemplo, considere o termo não linear

$$\sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\}.$$

Se $N_1 = 1$, então temos que este termo é igual a

$$\begin{aligned} &u^p P_{0,0,0}(v) + \partial_x u^p P_{0,0,1}(v) + u^p P_{0,1,0}(\partial_x v) + \partial_x u^p P_{0,1,1}(\partial_x v) \\ &\quad + \partial_x [u^p P_{1,0,0}(v) + \partial_x u^p P_{1,0,1}(v)]. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Se $N_3 = 1$, obtemos o termo não linear análogo, referente a segunda equação, no sistema (2.1.1), isto é

$$\begin{aligned} &v^p Q_{0,0,0}(u) + \partial_x v^p Q_{0,0,1}(u) + v^p Q_{0,1,0}(\partial_x u) + \partial_x v^p Q_{0,1,1}(\partial_x u) \\ &\quad + \partial_x [v^p Q_{1,0,0}(u) + \partial_x v^p Q_{1,0,1}(u)]. \end{aligned}$$

Para as situações físicas a seguir, considere $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 1$.

Situação 2.1.1. Quando $p = 1$ e tomando

$$\begin{aligned} P_{0,0,0} = P_{0,0,1} = P_{0,1,0} = P_{0,1,1} = P_{1,0,1} \equiv 0 \ \text{ e } \ P_{1,0,0}(x) = x^2 \\ Q_{0,0,0} = Q_{0,0,1} = Q_{0,1,0} = Q_{0,1,1} = Q_{1,0,1} \equiv 0 \ \text{ e } \ Q_{1,0,0}(x) = x^2, \end{aligned}$$

obtemos o seguinte sistema acoplado de equações do tipo KdV (ver [10])

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(uv^2) = 0, \quad u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \alpha\, \partial_x^3 v + \partial_x(vu^2) = 0, \quad v(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

Situação 2.1.2. Seja $q \in \mathbb{N}$. Se, em (2.1.4), consideramos $p = q$ e $P_{1,0,0}(x) = x^{q+1}$ e os demais polinômios nulos (com escolhas análogas para $Q_{k,\ell,m}$), então obtemos

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^p v^{p+1}) = 0, \quad u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x(v^p u^{p+1}) = 0, \quad v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

estudado em [1], referente à estabilidade e instabilidade das ondas solitárias.

Situação 2.1.3. O sistema acoplado do tipo KdV-KdV abaixo, considerado em [5], contendo termos não lineares quadráticos,

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x (P(u,v)) = 0, \;\; u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \alpha\, \partial_x^3 v + \partial_x (Q(u,v)) = 0, \;\; v(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

onde P e Q denotam os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} P(u,v) &= Au^2 + Buv + Cv^2 \\ Q(u,v) &= Du^2 + Evu + Fv^2, \end{aligned}$$

pode ser obtido como um caso particular do sistema (2.1.1), desde que consideramos o caso particular $A = C = D = F \equiv 0$. De fato, para estas escolhas, devemos tomar, sobre os termos não lineares, todos os polinômios nulos, exceto pelos polinômios $P_{1,0,0}$ e $Q_{1,0,0}$, que são escolhidos iguais, sendo $P_{1,0,0}(x) = Q_{1,0,0}(x) = x$.

Tais sistemas surgem como modelos para propagação de ondas em sistemas físicos onde efeitos não lineares e dispersivos são importantes. No Capítulo 3, é realizado um tratamento para o caso em que as constantes A, C, D e F são não nulas.

A parte não linear no sistema (2.1.1) pode ser ainda mais geral quando considerado valores maiores para N_1 e N_3. Por exemplo, se $N_1 = 2$ e $p = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} &uP_{0,0,0}(v) + \partial_x u P_{0,0,1}(v) + \partial_x^2 u P_{0,0,2}(v) \\ &+uP_{0,1,0}(\partial_x v) + \partial_x u P_{0,1,1}(\partial_x v) + \partial_x^2 u P_{0,1,2}(\partial_x v) \\ &+uP_{0,2,0}(\partial_x^2 v) + \partial_x u P_{0,2,1}(\partial_x^2 v) + \partial_x^2 u P_{0,2,2}(\partial_x^2 v) \\ &+\partial_x [uP_{1,0,0}(v) + \partial_x u P_{1,0,1}(v) + \partial_x^2 u P_{1,0,2}(v)] \\ &+\partial_x [uP_{1,1,0}(\partial_x v) + \partial_x u P_{1,1,1}(\partial_x v) + \partial_x^2 u P_{1,1,2}(\partial_x v)] \\ &+\partial_x^2 [uP_{2,0,0}(v) + \partial_x u P_{2,0,1}(v) + \partial_x^2 u P_{2,0,2}(v)]. \end{aligned}$$

Considerando apenas a primeira equação, em (2.1.1), trocando v por u, escolhendo $N_2 = 1$, e considerando novamente todos os polinômios identicamente nulos, exceto $P_{0,0,1}(x) = x^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ fixado, obtemos a equação de Kawahara

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x^5 u + u^k \partial_x u = 0,$$

bem como em uma versão similar em [25], mostrando mostrando o poder de alcance desse sistema, podendo abranger sistemas mais gerais, de maior ordem e com não-linearidades mais complexas.

Para finalizar a presente seção, vamos enunciar o principal resultado provado neste capítulo, que trata da boa postura local para o sistema (2.1.1).

Teorema 2.1.1. *Seja $s \geq 2N + 1/2$, onde $N = \max\{N_2, N_4\}$ e supomos $N_2 \geq N_1, N_3$ e $N_4 \geq N_1, N_3$. Para o dado inicial em $G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial* (2.1.1)-(2.1.2) *é bem posto no espaço $C([-T,T], G^{\sigma,s}) \times C([-T,T], G^{\sigma,s})$.*

Recordando que o conjunto $C([-T,T], G^{\sigma,s})$ denota o espaço de funções contínuas do $[-T,T]$ em $G^{\sigma,s}$, isto é, para cada $t \in [-T,T]$, temos que a função $u(\cdot,t) \in G^{\sigma,s}$ e $u(\cdot,t)$ contínua.

Na próxima seção formularemos o problema em termos de equações integrais, as quais definirão o operador que provaremos satisfazer a propriedade de contração.

2.2 Noções Preliminares

Nesta seção recordaremos algumas estimativas preliminares que serão essenciais para provar o resultado de boa postura enunciado no Teorema 2.1.1.

Com o objetivo de resolver o sistema (2.1.1)-(2.1.2), consideramos o seguinte sistema linear, dado por

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\, \partial_x^{2k+1} u = 0 \\ \partial_t v + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\, \partial_x^{2k+1} v = 0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

com dado inicial descrito em (2.1.2). Tomando a transformada de Fourier com respeito a x de (2.2.1), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}^x + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\, (i\xi)^{2k+1}\, \widehat{u}^x = 0 \\ \partial_t \widehat{v}^x + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\, (i\xi)^{2k+1}\, \widehat{v}^x = 0, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

cujo dado inicial correspondente é

$$\begin{cases} \widehat{u}^x(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{v}^x(\xi, 0) = \widehat{v}_0(\xi). \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Portanto, a solução para (2.2.2)-(2.2.3) é dada por

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^x(\xi,t) \\ \widehat{v}^x(\xi,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(-\sum_{k=1}^{N_2} a_k (i\xi)^{2k+1} t \right) \widehat{u}_0(\xi) \\ \exp\left(-\sum_{k=1}^{N_4} b_k (i\xi)^{2k+1} t \right) \widehat{v}_0(\xi) \end{bmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Escrevendo
$$\phi_1(\xi) \doteq \sum_{k=1}^{N_2} a_k \xi (i\xi)^{2k} \ \text{ e } \ \phi_2(\xi) \doteq \sum_{k=1}^{N_4} b_k \xi (i\xi)^{2k}, \tag{2.2.5}$$
temos que (2.2.4) se reescreve por
$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^x(\xi,t) \\ \widehat{v}^x(\xi,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-it\phi_1(\xi)} \ \widehat{u}_0(\xi) \\ e^{-it\phi_2(\xi)} \ \widehat{v}_0(\xi) \end{bmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa de Fourier com respeito a x em (2.2.6), obtemos
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} \ \widehat{u}_0(y) \ dy \doteq (S_t * u_0)(x) \\ v(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_2(y))} \ \widehat{v}_0(y) \ dy \doteq (T_t * v_0)(x), \end{aligned}$$
onde S_t e T_t são dados, respectivamente, por
$$S_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} dy \ \text{ e } \ T_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_2(y))} dy.$$

Definindo, portanto, os operadores $U(t)f \doteq S_t * f$ e $W(t)f \doteq T_t * f$, temos que o par (u,v), descrito abaixo, é a solução de (2.2.1)
$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(t)u_0 \\ W(t)v_0 \end{bmatrix}.$$

Recordamos que a notação $\{U(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ e $\{W(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ para o grupo unitário define a solução para o sistema linear PVI (2.2.1)-(2.1.2). Assim, o problema de Cauchy (2.1.1)-(2.1.2) é reescrito, pelo princípio de Duhamel, como a equação integral
$$\begin{aligned} u &= U(t)u_0 - \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \sum_{m=0}^{N_1-k} \int_0^t U(t-t')\partial_x^k \{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}(t') \ dt' \\ v &= W(t)v_0 - \sum_{k=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_3-k} \sum_{m=0}^{N_3-k} \int_0^t W(t-t')\partial_x^k \{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}(t') \ dt'. \end{aligned}$$

Para procurar soluções locais na variável temporal, é conveniente introduzir uma função de corte nas equações acima. Para esse fim, seja ψ uma função real na variável t com as seguintes propriedades:

$$\text{(i)} \ \ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{(ii)} \ \ \psi \equiv 1 \ \text{ sobre } \ [-1,1], \quad \text{(iii)} \ \ \operatorname{supp}\psi \subset [-2,2].$$

Também, para $\delta > 0$, seja $\psi_\delta(t) \doteq \psi(t/\delta)$. Finalmente, para um par (u, v) definimos formalmente os seguinte operadores

$$\begin{cases} \Gamma_1(u,v) \doteq \psi(t)U(t)u_0 - \sum_{I_{N_1}} \psi_T(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}dt' \\ \Gamma_2(u,v) \doteq \psi(t)W(t)v_0 - \sum_{I_{N_3}} \psi_T(t) \int_0^t W(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}dt', \end{cases} \tag{2.2.7}$$

sendo $I_{N_j} = \{(k,\ell,m) : 0 \leq k \leq N_j \;\text{ e }\; 0 \leq \ell, m \leq N_j - k\}$, para $j = 1, 3$. Então, a existência e unicidade de uma solução local para o sistema (2.1.1)-(2.1.2) decorrerá do fato do mapa $(u, v) \mapsto (\Gamma_1(u, v), \Gamma_2(u, v))$, definido sobre um espaço métrico completo conveniente, ser uma contração.

Com objetivo de provar a propriedade de contração para o mapa descrito acima, o espaço de funções a ser considerado, são os espaços inspirados nos espaços de Bourgain, definidos no Capítulo 1. Precisamente, quando $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, usaremos a respectiva notação:

$$X_1^{\sigma,s,b} = X_{\phi_1}^{\sigma,s,b} \;\text{ e }\; X_2^{\sigma,s,b} = X_{\phi_2}^{\sigma,s,b}.$$

Note que os pesos ϕ_1 e ϕ_2, definidos em (2.2.5), são adaptados às partes lineares das equações em (2.1.1), já que são obtidas pela busca de uma solução para o sistema (2.2.1).

2.3 Estimativas sobre os Espaços de Bourgain

O propósito desta seção é dar estimativas para os termos que aparecem nos operadores Γ_1 e Γ_2. Inicialmente, faremos isso para os termos $\psi(t)U(t)u_0$ e $\psi(t)W(t)v_0$. De fato, vamos apresentar um resultado similar, mais geral, ao provado em [26]. Lá, foi usado o espaço de Bourgain sem o peso exponencial e considerando $\phi(\xi) = \xi^3$.

Em nosso caso, vamos considerar $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $V(t)f$ como sendo o operador dado pela convolução $Q_t * f$, onde

$$Q_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi(y))} dy$$

e o operador é definido por

$$(Q_t * f)(x) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi(y))}\, \widehat{f}(y)\, dy.$$

Lema 2.3.1. *Suponha $s \in \mathbb{R}$, $b > 1/2$ e $0 < \delta \leq 1$. Se $\omega_0 \in G^{\sigma,s}$, então*

$$\|\psi(\delta^{-1}t)V(t)\omega_0\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} \leq c\, \delta^{(1-2b)/2} \|\omega_0\|_{G^{\sigma,s}}. \tag{2.3.1}$$

Demonstração. Definimos $\varphi_\delta(t) = \psi(\delta^{-1}t)$ e note inicialmente que

$$\widehat{\varphi_\delta}(\tau) = \delta\ \widehat{\psi}(\delta\tau). \tag{2.3.2}$$

De fato, pela mudança de variável $r = \delta^{-1}s$, obtemos que

$$\widehat{\varphi_\delta}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau s}\psi(\delta^{-1}s)ds = \delta \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau(\delta r)}\psi(r)dr = \delta\ \widehat{\psi}(\delta\tau).$$

Assim, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\psi(\delta^{-1}t)V(t)\omega_0(x) &= \varphi_\delta(t)V(t)\omega_0 \\
&= \varphi_\delta(t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi - t\phi(\xi))}\ \widehat{\omega_0}(\xi)d\xi \\
&= \mathcal{F}_t^{-1}[\widehat{\varphi_\delta}](t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi - t\phi(\xi))}\ \widehat{\omega_0}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau t}\ \widehat{\varphi_\delta}(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi - t\phi(\xi))}\ \widehat{\omega_0}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\ \widehat{\omega_0}(\xi) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{it(\tau-\phi(\xi))}\ \widehat{\varphi_\delta}(\tau)d\tau\right] d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\ \widehat{\omega_0}(\xi) \left[\delta \int_{\mathbb{R}} e^{it(\tau-\phi(\xi))}\ \widehat{\psi}(\delta\tau)d\tau\right] d\xi.
\end{aligned}$$

Na última integral, fazendo a mudança de variável $r = \tau - \phi(\xi)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\psi(\delta^{-1}t)V(t)\omega_0(x) &= \delta \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\ \widehat{\omega_0}(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{itr}\ \widehat{\psi}(\delta(r+\phi(\xi)))\ dr\ d\xi \\
&= \delta \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{itr}\ \widehat{\omega_0}(\xi)\ \widehat{\psi}(\delta(r+\phi(\xi)))\ d\xi\ dr \\
&= \delta \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{itr}\ f^\delta(\xi,r)\ d\xi\ dr \\
&= \delta\ \mathcal{F}^{-1}(f^\delta)(x,t),
\end{aligned}$$

onde $f^\delta(\xi,r) = \widehat{\omega_0}(\xi)\widehat{\psi}(\delta(r+\phi(\xi)))$ e $\mathcal{F}^{-1}$ denota a Transformada de Fourier inversa.

Se $d\mu = d\xi d\tau$, então, pela definição da norma em $X_\phi^{\sigma,s,b}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi(\delta^{-1}t)V(t)\omega_0\|^2_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &= \delta^2 \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{\omega_0}(\xi)|^2|\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{\omega_0}(\xi)|^2 g(\xi)\ d\xi,
\end{aligned}$$

onde

$$g(\xi) = \delta^2 \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}|\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 d\tau.$$

Vamos usar o seguinte fato para estimar a integral acima: se $b > 1/2$, então $(1+a)^{2b} \leq 2^{2b-1}(1+a^{2b})$, para todo $a > 0$. Desse modo, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\delta^2 \int_{\mathbb{R}} (1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b} |\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 d\tau &\leq 2^{2b-1}\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 d\tau \\
&+ 2^{2b-1}\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 |\tau+\phi(\xi)|^{2b} d\tau \\
&\doteq 2^{2b-1}(I + II).
\end{aligned}$$

Usando que $0 < \delta \leq 1$ e $2b > 1$, e reescrevendo I efetuando a mudança de variável $\tilde{s} = \delta(\tau+\phi(\xi))$, temos que

$$\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 d\tau = \delta \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tilde{s})|^2 d\tilde{s} = \delta \, \|\psi\|_{L^2}^2 \leq \delta^{1-2b} \, \|\psi\|_{L^2}^2,$$

lembrando que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ e então $\|\psi\|_{L^2} < \infty$.

De modo análogo, no segundo termo obtemos que

$$\begin{aligned}
\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\delta(\tau+\phi(\xi)))|^2 |\tau+\phi(\xi)|^{2b} d\tau &= \delta^{1-2b} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tilde{s})|^2 |\tilde{s}|^{2b} d\tilde{s} \\
&= \delta^{1-2b} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}^\alpha \, \widehat{\psi}(\tilde{s})|^2 |\tilde{s}|^{2(b-\alpha)} d\tilde{s} \\
&\leq \delta^{1-2b} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \, \widehat{\psi}(x)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}|^{2(b-\alpha)} d\tilde{s}.
\end{aligned}$$

Assim, é suficiente escolher $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2(\alpha - b) + 1 > 0$ e então assegurar a integrabilidade da função $\tilde{s}^{2(b-\alpha)}$. Além disso, como $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, sabemos que $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, portanto, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \, \widehat{\psi}(x)|^2 < \infty$. Logo, segue que

$$\begin{aligned}
\|\psi(\delta^{-1}t)V(t)\omega_0\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &\leq c \, \delta^{(1-2b)/2} \left[\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} |\widehat{\omega_0}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
&= c \, \delta^{(1-2b)/2} \|\omega_0\|_{G^{\sigma,s}}
\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Aplicando o lema prévio para $\delta = 1$, $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)U(t)u_0\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c \, \|u_0\|_{G^{\sigma,s}} \\
\|\psi(t)W(t)v_0\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} &\leq c \, \|v_0\|_{G^{\sigma,s}},
\end{aligned}$$

desde que escolhemos b_1 e b_2 sob as hipóteses do Lema. Ainda resta obter uma estimativa sob o espaço de Bourgain do segundo termo de (2.2.7), obtida baseada em [19], considerando, como feito no lema anterior, para um grupo unitário geral $\{V(t)\}$.

Lema 2.3.2. *Sejam $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b \leq b'+1$ e $0 < T \leq 1$. Então existe $c > 0$ tal que as seguintes propriedades se verificam*

$$\text{(i)} \left\| \psi_T(t) \int_0^t g(t')dt' \right\|_{H_t^b} \leq c\, T^{1-b+b'} \|g\|_{H^{b'}}; \tag{2.3.3}$$

$$\text{(ii)} \left\| \psi_T(t) \int_0^t V(t-t')w(x,t')dt' \right\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} \leq c\, T^{1-b+b'} \|w\|_{X_\phi^{\sigma,s,b'}}. \tag{2.3.4}$$

Demonstração. A prova de (2.3.3) segue de [19].

Para provar (2.3.4), note que por defincão o operador V é dado por

$$\widehat{V(t)\varphi}^{x}(\xi) = e^{-it\phi(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi).$$

De fato, pela definição de $Q_t(x)$, temos que

$$Q_t(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi y - t\phi(y))}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y}e^{-it\phi(y)}dy = \mathcal{F}_x^{-1}[e^{-it\phi(\cdot)}](\xi)$$

e, portanto,

$$\widehat{V(t)\varphi}^{x}(\xi) = \widehat{Q_t * \varphi}^{x}(\xi) = \widehat{Q_t}^{x}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-it\phi(\xi)}\widehat{\varphi}(\xi).$$

Denotando por u e h por

$$u(x,t) = \psi_T(t)\int_0^t V(t-t')w(x,t')dt' \;\text{ e }\; h(t',\xi) = e^{it'\phi(\xi)}\,\widehat{w}^{x}(\xi,t'),$$

temos que

$$\widehat{u}^{x}(\xi,t) = \psi_T(t)\int_0^t e^{-i(t-t')\phi(\xi)}\,\widehat{w}^{x}(\xi,t')dt' = e^{-it\phi(\xi)}\psi_T(t)\int_0^t h(\xi,t')dt',$$

Agora, tomando v tal que

$$\widehat{v}^{x}(\xi,t) = \psi_T(t)\int_0^t h(\xi,t')dt'.$$

Assim, obtemos que $\widehat{u}^{x}(\xi,t) = e^{-it\phi(\xi)}\,\widehat{v}^{x}(\xi,t)$, o que implica em

$$\widehat{u}(\xi,\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau}\widehat{u}^{x}(\xi,t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau+\phi(\xi))}\,\widehat{v}^{x}(\xi,t)dt = \widehat{v}(\xi,\tau+\phi(\xi)).$$

Agora, usando a definição de $X_\phi^{\sigma,s,b}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &= \|(1+|\tau+\phi(\xi)|)^b(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \\
&= \|(1+|\tau+\phi(\xi)|)^b(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{v}(\xi,\tau+\phi(\xi))\|_{L^2_{\xi,\tau}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}|\widehat{v}(\xi,\tau+\phi(\xi))|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\int_{\mathbb{R}}(1+|\tau+\phi(\xi)|)^{2b}|\widehat{v}(\xi,\tau+\phi(\xi))|^2 d\tau d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pela mudança de variável $\rho = \tau + \phi(\xi)$, temos que

$$\|u(x,t)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} = \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\int_{\mathbb{R}}(1+|\rho|)^{2b}|\widehat{v}(\xi,\rho)|^2 d\rho d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, usando que $(1+|x|) \leq \sqrt{2}\ (1+|x|^2)^{1/2} = \sqrt{2}\ \langle x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e, mais que isso, que essas quantidades são equivalentes, uma vez que $\langle x\rangle \leq (1+|x|)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u(x,t)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &\leq c\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\int_{\mathbb{R}}\langle\rho\rangle^{2b}|\widehat{v}(\xi,\rho)|^2 d\rho d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\|\widehat{v}^x(\xi,t)\|^2_{H_t^b} d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim, a partir do item (2.3.3) segue que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{v}^x(\xi,t)\|_{H_t^b} &= \left\|\psi_T(t)\int_0^t h(\xi,t')dt'\right\|_{H_t^b} \\
&\leq c\,T^{1-b+b'}\|h(\xi,t)\|_{H_t^{b'}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u(t,x)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &\leq c\,T^{1-b+b'}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\|h(\xi,t)\|^2_{H_t^{b'}} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c\,T^{1-b+b'}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\langle\tau\rangle^{2b'}\left|\widehat{h}^t(\xi,\tau)\right|^2 d\tau d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\widehat{h}^{t}(\xi,\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} h(\xi,t)dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} e^{it\phi(\xi)}\, \widehat{w}^{\,x}(\xi,t)dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\tau-\phi(\xi))}\, \widehat{w}^{\,x}(\xi,t)dt\\ &= \widehat{w}(\xi,\tau-\phi(\xi)).\end{aligned}$$

Assim, efetuando a mudança de variável $\rho = \tau - \phi(\xi)$, obtemos que

$$\begin{aligned}\|u(x,t)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} &\leq c\, T^{1-b+b'} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau\rangle^{2b'} \big|\, \widehat{w}\,(\xi,\tau-\phi(\xi))\big|^2 d\tau d\xi \right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq c\, T^{1-b+b'} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} \int_{\mathbb{R}} \langle \rho+\phi(\xi)\rangle^{2b'} \big|\, \widehat{w}\,(\xi,\rho)\big|^2 d\rho d\xi \right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq c\, T^{1-b+b'} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2s} e^{2\sigma(1+|\xi|)} (1+|\rho+\phi(\xi)|^{2b'}\, |\, \widehat{w}\,(\xi,\rho)|^2\, d\rho d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\left\| \psi_T(t) \int_0^t V(t-t')w(x,t')dt' \right\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} = \|u(x,t)\|_{X_\phi^{\sigma,s,b}} \leq c\, T^{1-b+b'} \|w\|_{X_\phi^{\sigma,s,b'}},$$

o que encerra a demonstração. □

Em particular, sejam $f \in X_1^{\sigma,s,b_1'}$ e $g \in X_2^{\sigma,s,b_2'}$. Assumindo $b_1, b_2 > 1/2$, $b_i - 1 < b_i'$, para $i = 1, 2$, aplicando o Lema 2.3.2 para $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\| \psi_T(t) \int_0^t U(t-s)f(s)ds \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c\, T^{1-b_1+b_1'}\ \|f\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}\\ \left\| \psi_T(t) \int_0^t W(t-s)g(s)ds \right\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} &\leq c\, T^{1-b_2+b_2'}\ \|g\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}.\end{aligned}$$

Quando aplicamos as estimativas acima para os termos não lineares do sistema (2.1.1), obtemos os termos

$$\|\partial_x^k[\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)]\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \quad \text{e} \quad \|\partial_x^k[\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)]\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}},$$

dos quais buscamos obter algum produto de normas de Bourgain, de u e v, sem suas derivadas.

É disso que trata o próximo teorema. Para prová-lo, vamos usar lemas, cujas as provas foram adaptadas a partir de [21]. Para enunciá-los é necessário uma notação preliminar como segue: para uma função conveniente f, definimos F_ρ^1 e F_ρ^2, via transformada de Fourier, por

$$\widehat{F_\rho^1}(\xi,\tau) = \frac{f(\xi,\tau)}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} \quad \text{e} \quad \widehat{F_\rho^2}(\xi,\tau) = \frac{f(\xi,\tau)}{(1+|\tau+\phi_2(\xi)|)^\rho}.$$

Lema 2.3.3. *Seja $0 \leq k \leq N_1$. Se $\rho > 1/4$ e $N_2 \geq N_1$, existe $c > 0$, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_t^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |(A^{k/2}F_\rho^1)(x,t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}(\widehat{A^{k/2}F_\rho^1})(x,t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|)^{k/2}\widehat{F_\rho^1}(x,t)]|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|x|)^{k/2}\frac{|f(x,t)|}{(1+|t+\phi_1(x)|)^\rho}\right]\right|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{it\tau}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi d\tau\right|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi\right] d\tau\right|^2 dt.
\end{aligned}$$

Defina $G(x,\tau)$ por

$$G(x,\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\, d\xi.$$

Logo, pela identidade de Plancherel, temos que

$$\begin{aligned}
\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_t^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_t^{-1}(G(x,\cdot))(t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |G(x,\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi\right|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Por definição da norma mista, recorde que

$$\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2}^2 = \|\|A^{k/2}F_\rho^1(\cdot,t)\|_{L_t^2}\|_{L_x^4}^2.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|A^{k/2}F_\rho^1\|^2_{L^4_xL^2_t} &= \left[\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}|(A^{k/2}F_\rho^1)(x,t)|^2dt\right]^{4/2}dx\right]^{2/4}\\
&= \left[\int_{\mathbb{R}}\|(A^{k/2}F_\rho^1)(x,\cdot)\|^4_{L^2_t}dx\right]^{1/2}\\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi\right|^2d\tau\right]^2dx\right]^{1/2}\\
&\le \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi\right|^4dx\right]^{1/2}d\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left\|\int_{\mathbb{R}}e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi\right\|^2_{L^4_x}d\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left\|\mathcal{F}_x^{-1}\left[(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right]\right\|^2_{L^4_x}d\tau.
\end{aligned}
$$

Recordando a Desigualdade de Hausdorff-Young, a qual afirma que: se $1\le p\le 2$ e p' é o conjugado de p, ou seja, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, então

$$\|\widehat{g}\|_{p'}\le\|g\|_p,\ \forall\, g\in L^p$$

Desse modo, se $p'=4$, então $p=4/3$. Logo, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|A^{k/2}F_\rho^1\|^2_{L^4_xL^2_t} &\le \int_{\mathbb{R}}\left\|(1+|\xi|)^{k/2}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right\|^2_{L^{4/3}_x}d\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|)^{2k/3}\frac{|f(\xi,\tau)|^{4/3}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho/3}}d\xi\right]^{3/2}d\tau\\
&\le \int_{\mathbb{R}}\left[\left\|\frac{(1+|\xi|)^{2k/3}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho/3}}\right\|_{L^3_x}\left\|f^{4/3}(\cdot,\tau)\right\|_{L^{3/2}_x}\right]^{3/2}d\tau\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi\right]^{1/2}\int_{\mathbb{R}}|f(x,\tau)|^2dx\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Para concluir a prova, resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi\le c,\ \forall\,\tau\in\mathbb{R}.$$

Com efeito, recorde a definição de ϕ_1, que é dada por

$$\phi_1(\xi)=\sum_{j=1}^{N_2}(-1)^ja_j\,\xi^{2j+1}.$$

Assim,

$$\phi_1'(\xi) = \sum_{j=1}^{N_2}(-1)^j(2j+1)a_j\,\xi^{2j} \doteq \sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j\,\xi^{2j}$$

Uma vez que $0 \leq k \leq N_1$ e $N_1 \leq N_2$, supondo que x fora do conjunto de zeros de ϕ_1', temos que

$$\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} \leq \frac{\left[|x|\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\right]^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j x^{2j}\right|} \leq \frac{|x|^{2N_2}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j x^{2j}\right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j x^{2j-2N_2}\right|}.$$

Como $2j-2N_2 \leq 0$, temos que o último termo,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j x^{2j-2N_2}\right|} \longrightarrow \frac{1}{|\tilde{a}_{N_2}|} \;\text{ quando }\; |x| \longrightarrow \infty.$$

Desse modo, temos que o termo $(1+|x|)^{2k}/|\phi_1'(x)|$ é limitado para x suficientemente grande. Assim, existe $\delta > 0$ de tal modo que $(-\delta, \delta)$ contenha os zeros de ϕ_1' e tal que

$$\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} \leq M, \;\; \forall \;\; |x| > \delta.$$

Observe que $x = 0$ é uma raiz de ϕ_1. Temos dois casos a considerar: ϕ_1 tem pelo menos duas raízes reais diferente de zero ou ϕ_1 possui as demais raízes complexas.

Suponhamos que ϕ_1 possui pelo menos duas raízes diferentes de zero. Se os pontos em que ϕ_1' se anula é exatamente onde a função ϕ_1 possui seus máximos e mínimos locais, exceto pela origem, então sejam m_1, m_2, $\cdots$, m_n estes pontos.

Além disso, há duas possibilidades, que dependem do sinal do coeficiente do termo de maior grau de ϕ_1, que é: ou o $\lim\limits_{\xi\to-\infty}\phi_1(\xi) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\xi\to-\infty}\phi_1(\xi) = +\infty$. Suponhamos que ocorra o primeiro caso. Neste caso, como o polinômio é de grau ímpar, temos que é válido o seguinte:

$$\lim_{\xi\to+\infty}\phi_1(\xi) = +\infty.$$

Desse modo, sejam $r_1 = \min\{\phi_1(m_i)\} - 1$ e $r_2 = \max\{\phi_1(m_i)\} + 1$. Então existem R_1 e R_2, positivos, tais que $\phi_1(-R_1) = r_1$ e $\phi_1(R_2) = r_2$.

Uma vez que τ tem apenas o efeito de deslocar o gráfico de ϕ_1 para cima ou para baixo na nova função $\tau + \phi_1(\xi)$, isso significa que os zeros de ϕ_1' também coincidem com os pontos de máximo e/ou mínimo da função $\tau + \phi_1(\xi)$, exceto na origem.

Logo, se $R = \max\{R_1, \delta, R_2\}$, obtemos que os zeros de ϕ_1' bem como os máximos e mínimos de $\tau + \phi_1(\xi)$, independentemente de τ (uma vez que a escolha de R também independe), estão contidos no intervalo $(-R, R)$ e, além disso, as oscilações de $\tau + \phi_1(\xi)$, estão contidas na faixa compreendida entre as retas $y = \tau + \phi_1(-R)$ e $y = \tau + \phi_1(R)$.

A partir desta escolha para R, dividimos a seguinte integral

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi &= \int_{-R}^{R} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi + \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi \\ &\doteq I + II.\end{aligned}$$

De imediato, note que $I \leq \displaystyle\int_{B(0,R)} (1+|\xi|)^{2N_1} d\xi < \infty$. Por outro lado, efetuando a mudança de variável $\lambda = \tau + \phi_1(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned}II &= \int_{-\infty}^{R} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi + \int_{R}^{\infty} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\tau+\phi_1(-R)} \frac{(1+|\xi(\lambda)|)^{2k}}{\phi_1'(\xi(\lambda))}\frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}}d\lambda + \int_{\tau+\phi_1(R)}^{\infty} \frac{(1+|\xi(\lambda)|)^{2k}}{\phi_1'(\xi(\lambda))}\frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}}d\lambda.\end{aligned}$$

Agora, se $\lambda < \tau + \phi_1(-R)$, então $\xi(\lambda) < -R$. Mas, se $\lambda > \tau + \phi_1(R)$, então $\xi(\lambda) > R$. Então, em ambos os casos, têm-se $|\xi(\lambda)| > R$ e, portanto,

$$\frac{(1+|\xi(\lambda)|)^{2k}}{|\phi_1'(\xi(\lambda))|} \leq M.$$

Logo,

$$II \leq M\left(\int_{-\infty}^{\tau+\phi_1(-R)} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}}d\lambda + \int_{\tau+\phi_1(R)}^{\infty} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}}d\lambda\right) \leq 2M\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}}d\lambda < \infty,$$

pois $4\rho > 1$, provando a limitação desejada.

Analogamente, obtém-se o resultado quando $\displaystyle\lim_{\xi\to-\infty} \phi_1(\xi) = +\infty$.

Por outro lado, se houver zeros de ϕ_1' que não são pontos de máximo e mínimo locais de ϕ_1, procedemos de maneira análoga, separando a integral integral I sobre um intervalo $(-\widetilde{R}, \widetilde{R})$, com $\widetilde{R} > \delta$, de modo a conter todos os zeros do polinômio ϕ_1', ao mesmo tempo que, fora dele, tenha-se ϕ_1 uma bijeção.

Finalmente, no caso em que ϕ_1 possui apenas uma raiz real, $x = 0$, e as demais são complexas, ϕ_1' possui apenas um ponto de máximo ou mínimo exatamente na origem, onde também se anula. Logo, considerando $R = \max\{1, \delta\}$ e procedendo de modo análogo obtém-se o requerido lema. □

Lema 2.3.4. *Para $\rho > 1/2$ e $s > \frac{1}{2} + k$. Então, existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
|A^{k-s}F_\rho^1(x,t)| &= |\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(A^{k-s}F_\rho^1))(x,t)| \\
&= \left|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|x|)^{k-s}\frac{|f(x,t)|}{(1+|t+\phi_1(x)|)^\rho}\right)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{it\tau}(1+|\xi|)^{k-s}\frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi d\tau\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi|)^{k-s}|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}d\xi d\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(\xi,\tau)|^2}{(1+|\xi|)^{2s-2k}}d\tau\right]^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{2\rho}}d\tau\right]^{1/2}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{s-k}}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(\xi,\tau)|^2 d\tau\right]^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{2\rho}}d\tau\right]^{1/2}d\xi.
\end{aligned}$$

Mas, note que pela mudança de variável $\lambda = \tau + \phi_1(\xi)$, têm-se que $\frac{d\lambda}{d\tau} = 1$ e então

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{2\rho}}d\tau = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\lambda|)^{2\rho}}d\lambda < \infty,$$

uma vez que, por hipótese, $\rho > 1/2$. Além disso, a hipótese $s > \frac{1}{2} + k$, implica que $2s - 2k > 1$, e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2s-2k}}d\xi < \infty.$$

Assim, aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^\infty L_t^\infty} & \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{s-k}}\left[\int_{\mathbb{R}}|f(\xi,\tau)|^2 d\tau\right]^{1/2}d\xi \\
&\leq c\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2(s-k)}}d\xi\right]^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi\right]^{1/2} \\
&\leq c\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2s-2k}}d\xi\right]^{1/2}\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
&\leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2},
\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Lema 2.3.5. *Se $\rho > 1/2$ e $s \geq (2N+1)\rho + k$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Vamos usar o mergulho de Sobolev, ver [21]

$$\|A^{k-s}F_\rho^1(x,\cdot)\|_{L_t^\infty} \leq c\,\|\Lambda^\rho A^{k-s}F_\rho^1(x,\cdot)\|_{L_t^2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^2L_t^\infty} &= \|\|A^{k-s}F_\rho^1(x,\cdot)\|_{L_t^\infty}\|_{L_x^2} \\
&\leq c\,\|\|\Lambda^\rho A^{k-s}F_\rho^1(x,\cdot)\|_{L_t^2}\|_{L_x^2} \\
&= c\,\|\Lambda^\rho A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_{x,t}^2} \\
&= c\,\|\widehat{\Lambda^\rho A^{k-s}F_\rho^1}\|_{L_{x,t}^2} \\
&= c\left\|\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}f(\xi,\tau)\right\|_{L_{x,t}^2} \\
&\leq c\left\|\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right\|_{L_{x,t}^\infty}\|f\|_{L_{x,t}^2}.
\end{aligned}$$

Para encerrar a prova, é suficiente mostrar que

$$\left\|\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right\|_{L_{x,t}^\infty} \leq c.$$

Com efeito, pela desigualdade triangular, temos que

$$(1+|\tau|)^\rho \leq (1+|\tau+\phi_1(\xi)|+|\phi_1(\xi)|)^\rho.$$

Observe também que, sendo o termo $(s-k)/\rho$ positivo, dada na hipótese, vale que

$$\frac{1}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \leq 1.$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} &\leq \left[\frac{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|+|\phi_1(\xi)|)}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)}\right]^\rho \\
&= \left[\frac{1}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}}\left(1+\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)}\right)\right]^\rho \\
&= \left[\frac{1}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}}+\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}}\frac{1}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)}\right]^\rho \\
&\leq \left[1+\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}}\right]^\rho.
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$|\phi_1(\xi)| \leq \sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j+1} = (1+|\xi|)^{2N_2+1}\left[\sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2}\right] = (1+|\xi|)^{2N_2+1}B(\xi),$$

onde

$$B(\xi) \doteq \sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2}.$$

Portanto,

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \leq (1+|\xi|)^{2N_2+1-\frac{s-k}{\rho}}B(\xi).$$

Também, temos que

$$\lim_{\xi\to\infty} B(\xi) = |a_{N_2}|.$$

Ainda, em particular, $s \geq (2N_2+1)\rho + k$ e, então, $2N_2 + 1 - \frac{s-k}{\rho} \leq 0$.

Isto implica que $(1+|\xi|)^{2N_2+1-\frac{s-k}{\rho}} \leq 1$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} < M, \ \ \forall \ \ |\xi| > \delta.$$

Por outro lado, B é contínua e, portanto, limitada sobre $B(0,\delta)$, provando a limitação desejada. □

Trocando os papéis de N_1, N_2 e ϕ_1 por N_3, N_4 e ϕ_2, obtemos da mesma maneira os seguintes lemas:

Lema 2.3.6. *Seja $0 \leq k \leq N_3$. Se $\rho > 1/4$ e $N_4 - N_3 \geq 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2}F_\rho^2\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Lema 2.3.7. *Para $\rho > 1/2$ e $s > \frac{1}{2} + k$. Então existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^2\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Lema 2.3.8. *Se $\rho > 1/2$ e $s \geq (2N+1)\rho + k$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^2\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\,\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Também temos lemas análogos que mesclam as versões acima, como os que seguem abaixo:

Lema 2.3.9. *Seja $0 \leq k \leq N_1$. Se $\rho > 1/4$ e $N_4 - N_1 \geq 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2} F_\rho^2\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Lema 2.3.10. *Seja $0 \leq k \leq N_3$. Se $\rho > 1/4$ e $N_2 - N_3 \geq 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2} F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Este controle sobre as normas $L_x^4 L_t^2$, $L_x^\infty L_t^\infty$ e $L_x^2 L_t^\infty$ nos permitirá provar estimativas multilineares, as quais serão desenvolvidas à frente.

Note, além disso, que os Lemas 2.3.3, 2.3.6, 2.3.9 e 2.3.10 impõem uma restrição que significa dizer que a ordem da derivada de maior grau do termo não linear não pode ultrapassar a ordem da derivada de maior grau do termo linear e isso é traduzido nas hipótese $N_2 \geq N_1, N_3$ e $N_4 \geq N_1, N_3$ que assumiremos a partir de agora.

Como já observamos, o Lema 2.3.1 nos forneceu uma estimativa para a primeira parcela dos operadores Γ_1 e Γ_2. Contudo, como o Lema 2.3.2 indica, precisamos obter uma estimativa para o termo não linear do sistema 2.1.1, a saber

$$\|\partial_x^k[\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)]\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \quad \text{e} \quad \|\partial_x^k[\partial_x^m v^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)]\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}.$$

Isto é a tarefa do próximo teorema, onde uma desigualdade de produtos mistos é dada em termos de u e v sobre os espaços de Bourgain.

Para fazer isto, vamos reescrever os termos acima. De início, recordemos a notação de multindice: dado $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_p!$. Desse modo, algumas vezes será conveniente reescrever, via Regra de Leibniz, o seguinte termo

$$\begin{aligned}
\partial_x^m u^p &= \partial_x^m \left(\prod_{j=1}^p u \right) \\
&= \sum_{m_1 + \cdots + m_p = m} \begin{pmatrix} m \\ m_1, \cdots, m_p \end{pmatrix} \prod_{j=1}^p \partial_x^{m_j} u \\
&= \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^p \partial_x^{m_j} u,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{pmatrix} m \\ m_1, \cdots, m_p \end{pmatrix} = \frac{m!}{m_1! \cdots m_p!} = \frac{m!}{\alpha!} = c_\alpha^m.$$

Neste notação, obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_x^k[\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)] &= \partial_x^k\left[\partial_x^m u^p \sum_{i=1}^{d_P} p_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)^i\right] \\
&= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \sum_{i=1}^{d_P} p_{k,\ell,m}\partial_x^k\left[\prod_{j=1}^{p}\partial_x^{m_j}u(\partial_x^\ell v)^i\right] \\
&= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \sum_{i=1}^{d_P} p_{k,\ell,m}\partial_x^k\left[\prod_{j=1}^{p}\partial_x^{m_j}u\prod_{r=1}^{i}\partial_x^\ell v_r\right],
\end{aligned}
$$

onde $v_r = v$, para cada $r = 1, \cdots, i$. A igualdade acima nos dá uma ideia sobre que tipo de termos devemos estimar, que se resume a

$$
\left\|\partial_x^k\left[\prod_{j=1}^{p}\partial_x^{m_j}u\prod_{r=1}^{i}\partial_x^\ell v_r\right]\right\|_{X_1^{\sigma,s,b'_1}}.
$$

A estimativa em questão, a ser provada, foi baseada em [21], e apresentaremos o resultado mais geral, desde que consideraremos normas mistas e produtos $u_1, \cdots, u_n$, os quais decorrem do termo $\partial_x^m u^p$. Assim, as estimativas multilineares para os termos não lineares serão dadas através do seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *Dado $N_1 \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq k \leq N_1$ e $0 \leq \ell \leq N_1 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1, b'_2 < -1/4$ e $s > (2N_1 + 1)\max\{b_1, b_2\} + N_1$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $u_1, \cdots, u_p \in X_1^{\sigma,s,b_1}$, $v_1, \cdots, v_q \in X_2^{\sigma,s,b_2}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_1 - k$, para $j = 1, \cdots, p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p, q, s, b_1, b_2 e b'_1 tal que*

$$
\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^{p}\partial_x^{\alpha_j}u_j\prod_{i=1}^{q}\partial_x^\ell v_i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b'_1}} \leq c\prod_{j=1}^{p}\|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\prod_{i=1}^{q}\|v_i\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}. \tag{2.3.5}
$$

Demonstração. Inicialmente, para $j = 1, 2, \cdots, p$ e $i = 1, 2, \cdots, q$,

$$
\begin{aligned}
f_j(\xi,\tau) &= (1+|\xi|)^s(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{b_1}e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{u_j}(\xi,\tau), \\
g_i(\xi,\tau) &= (1+|\xi|)^s(1+|\tau+\phi_2(\xi)|)^{b_2}e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{v_i}(\xi,\tau).
\end{aligned}
$$

e, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, definimos

$$
\begin{aligned}
\widehat{A^\alpha(F_j^1)_\rho}(\xi,\tau) &= \frac{(1+|\xi|)^\alpha|f_j(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi(\xi)|)^\rho} \\
\widehat{A^\alpha(G_i^2)_\rho}(\xi,\tau) &= \frac{(1+|\xi|)^\alpha|g_i(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi(\xi)|)^\rho} \\
\widehat{A^\alpha H_\rho^1}(\xi,\tau) &= \frac{(1+|\xi|)^\alpha|h(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi(\xi)|)^\rho}.
\end{aligned}
$$

Assim, observe que

$$\prod_{j=1}^{p}\|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\prod_{i=1}^{q}\|v_i\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}=\prod_{j=1}^{p}\|f_j\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\prod_{i=1}^{q}\|g_i\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Por outro lado, o lado esquerdo de (2.3.5) é igual a

$$\|(1+|\xi|)^s(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{b_1'}e^{\sigma(1+|\xi|)}[\widehat{\partial_x^k(\partial_x^{\alpha_1}u_1\cdots\partial_x^{\alpha_p}u_p\,\partial_x^{\ell}v_1\cdots\partial_x^{\ell}v_q)]}\,(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau},$$

Vamos lidar com o caso $p=q=1$ apenas para fixar o argumento. Com efeito

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\{\partial_x^k(\partial_x^{\alpha_1}u_1\,\partial_x^{\ell}v_1)\}}\,(\xi,\tau)|\\
&=|(i\xi)^k[\widehat{\partial_x^{\alpha_1}u_1}*\widehat{\partial_x^{\ell}v_1}](\xi,\tau)|\\
&=|(i\xi)^k[(i\xi)^{\alpha_1}\widehat{u}_1*(i\xi)^{\ell}\widehat{v}_1](\xi,\tau)|\\
&\le|\xi|^k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|(i\xi_1)|^{\alpha_1}\,|\widehat{u}_1(\xi_1,\tau_1)||(i(\xi-\xi_1))|^{\ell}\,|\widehat{v}_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|\,d\xi_1d\tau_1\\
&\le|\xi|^k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi_1|)^{\alpha_1}\,|\widehat{u}_1(\xi_1,\tau_1)|(1+|\xi-\xi_1|)^{\ell}\,|\widehat{v}_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|\,d\xi_1d\tau_1\\
&\le|\xi|^k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi_1|)^{N_1-k}|\widehat{u}_1(\xi_1,\tau_1)|(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k}|\widehat{v}_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|\,d\xi_1d\tau_1,
\end{aligned}$$

desde que, por hipótese, assumimos que $0\le\ell,\alpha_j\le N_1-k$ para cada $j=1,\cdots,p$.

Pela definição de $\widehat{u}_1$ e $\widehat{v}_1$, a última integral é igual a

$$|\xi|^k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|f_1(\xi_1,\tau_1)|}{(1+|\tau_1+\phi_1(\xi_1)|)^{b_1}e^{\sigma(1+|\xi_1|)}}\frac{(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|g_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|}{(1+|\tau-\tau_1+\phi_2(\xi-\xi_1)|)^{b_2}e^{\sigma(1+|\xi-\xi_1|)}}\,d\xi_1d\tau_1.$$

Também, pela desigualdade triangular, temos que

$$e^{\sigma(1+|\xi|)}\le e^{\sigma(1+|\xi_1|)}e^{\sigma(1+|\xi-\xi_1|)},\tag{2.3.6}$$

e, então, precisamos apenas estimar na norma mista em $L^2_\xi L^2_\tau$ o seguinte

$$\frac{(1+|\xi|)^{k+s}}{(1+|\tau_1+\phi_1(\xi)|)^{-b_1'}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|f_1(\xi_1,\tau_1)|}{(1+|\tau_1+\phi_1(\xi_1)|)^{b_1}}\frac{(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|g_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|}{(1+|\tau-\tau_1+\phi_2(\xi-\xi_1)|)^{b_2}}\,d\tilde{\mu},$$

isto é, o termo

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^2}\Phi(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)d\tilde{\mu}\right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\doteq\|\Psi(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau},$$

onde $d\tilde{\mu}=d\xi_1d\tau_1$ e $\Phi(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)$, obviamente, é dada por

$$\frac{(1+|\xi|)^{k+s}}{(1+|\tau_1+\phi_1(\xi)|)^{-b_1'}}\frac{(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|f_1(\xi_1,\tau_1)|}{(1+|\tau_1+\phi_1(\xi_1)|)^{b_1}}\frac{(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s}\,|g_1(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|}{(1+|\tau-\tau_1+\phi_2(\xi-\xi_1)|)^{b_2}}.$$

Assim, queremos provar que

$$\|\Psi\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \leq c\|f_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|g_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Mas, como $L^2_\xi L^2_\tau = L^2_{\xi,\tau}$, é suficiente, por dualidade, mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi,\tau)h(\xi,\tau)\ d\xi d\tau \leq c\ \|f_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\|g_1\|_{L^2_\xi L^2_\tau}, \tag{2.3.7}$$

para $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, função não negativa e satisfazendo $\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$. De fato, recordando a seguinte notação

$$\begin{aligned}\widehat{A^\alpha f}(\xi,\tau) = (1+|\xi|)^\alpha \widehat{f}(\xi,\tau)\ \text{ e }\ \widehat{F^1_\rho}(\xi,\tau) &= \frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\\ \Longrightarrow\ \widehat{A^\alpha F^1_\rho}(\xi,\tau) &= \frac{(1+|\xi|)^\alpha|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}.\end{aligned}$$

Seguindo a notação indicada no início da prova, Φh é dada exatamente por

$$\widehat{A^{k+s}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\widehat{A^{N_1-k-s}(F^1_1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1)\widehat{A^{N_1-k-s}(G^2_1)_{b_2}}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1).$$

Então, agora, para provar (2.3.7), dividimos o espaço euclidiano, $\mathbb{R}^4$, em duas regiões, Ω_1 e Ω_2, definidas por

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| \leq |\xi-\xi_1|\}\\ \Omega_2 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1) \in \mathbb{R}^4 : |\xi-\xi_1| \leq |\xi_1|\}.\end{aligned}$$

Se $d\mu = d\xi\ d\tau\ d\xi_1\ d\tau_1$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi,\tau)h(\xi,\tau)\ d\xi d\tau &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)d\xi_1 d\tau_1\right] h(\xi,\tau)\ d\xi d\tau\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)\ d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau\\ &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_j}\Phi(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)h(\xi,\tau)d\mu\\ &\doteq \sum_{j=1}^{2}\ \Upsilon_j.\end{aligned}$$

Daqui pra frente, nesta demonstração, usaremos a seguinte estimativa:

$$(a+b)^\alpha \leq c_\alpha\ (a^\alpha+b^\alpha),\ \ \alpha>1,\ \ a,b>0. \tag{2.3.8}$$

Primeiro, suponhamos que $(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1)\in\Omega_1$ e vamos mostrar que

$$(1+|\xi|)^{k+s}(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s}\leq c\,(1+|\xi|)^{N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2}.$$

De fato, como $(1+|\xi_1|)^{-k}\leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{k+s}(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s} &\leq (1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\ &\quad\times(1+|\xi|)^{\frac{N_1}{2}}(1+|\xi_1|)^{N_1-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{\frac{N_1}{2}}.\end{aligned}$$

Agora, como

$$1+|\xi|\leq(1+|\xi_1|)+(1+|\xi-\xi_1|),$$

temos, por meio de (2.3.8), que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{k+s-N_1/2} &\leq [(1+|\xi_1|)+(1+|\xi-\xi_1|)]^{k+s-N_1/2}\\ &\leq c\,[(1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}+(1+|\xi-\xi_1|)^{k+s-N_1/2}],\end{aligned}$$

uma vez que, por hipótese, $k+s-N_1/2>1$.

Então,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2-k-s} &\leq c\,(1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\ &\quad+c\,(1+|\xi-\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\ &\leq 2c\,(1+|\xi-\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\ &\leq 2c.\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \int_{\Omega_1}\widehat{A^{k+s}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\widehat{A^{N_1-k-s}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1)\widehat{A^{N_1-k-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\,d\mu\\ &\leq c\int_{\mathbb{R}^4}\widehat{A^{N_1/2}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\widehat{A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1)\widehat{A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\,d\mu\\ &= c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{A^{N_1/2}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\left[\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1)\widehat{A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)d\xi_1d\tau_1\right]d\xi d\tau\\ &= c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{A^{N_1/2}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\left[\widehat{A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}}*\widehat{A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_2}}\right](\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\\ &= c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{A^{N_1/2}H_{-b_1'}}(\xi,\tau)\,\widehat{A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_2}}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\\ &= c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}A^{N_1/2}H_{-b_1'}(\xi,\tau)\,\overline{A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_2}}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Hölder e pelos Lema 2.3.3, Lema 2.3.4 e Lema 2.3.5, segue que

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &\leq c\, \|A^{N_1/2} H_{-b_1'}\|_{L_x^4 L_t^2} \|A^{N_1-s}(F_1^1)_{b_1}\|_{L_x^2 L_t^\infty} \|A^{N_1/2}(G_1^2)_{b_1}\|_{L_x^4 L_t^2} \\ &\leq c\, \|h\|_{L_x^2 L_t^2} \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2} \\ &= c\, \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Vamos supor agora que $(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1) \in \Omega_2$ e, como fizemos sobre Ω_1, provaremos uma estimativa similiar, a saber

$$(1+|\xi|)^{k+s}(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s} \leq c\,(1+|\xi|)^{N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-s}.$$

Com efeito, para obter a desigualdade acima, basta trocar os papéis entre ξ_1 e $\xi - \xi_1$, seguindo a técnica do caso anterior, isto é, observando que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{k+s}(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-k-s} &\leq (1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} \\ &\quad\times (1+|\xi|)^{\frac{N_1}{2}}(1+|\xi_1|)^{\frac{N_1}{2}}(1+|\xi-\xi_1|)^{N_1-s},\end{aligned}$$

e mostrando que a primeira parcela no produto acima é limitada, como abaixo

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} &\leq c\,(1+|\xi-\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} \\ &\quad + c\,(1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} \\ &\leq 2c\,(1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} \\ &\leq 2c.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Upsilon_2 &\leq c \int_{\mathbb{R}^4} \widehat{A^{N_1/2} H_{-b_1'}}(\xi,\tau) \widehat{A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1) \widehat{A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1, \tau-\tau_1)\, d\mu \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} A^{N_1/2} H_{-b_1'}(\xi,\tau)\, \overline{A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1} A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \\ &\leq c\, \|A^{N_1/2} H_{-b_1'}\|_{L_x^4 L_t^2} \|A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1}\|_{L_x^4 L_t^2} \|A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_1}\|_{L_x^2 L_t^\infty} \\ &\leq c\, \|h\|_{L_x^2 L_t^2} \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2} \\ &= c\, \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2}. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Assim, por (2.3.9) e (2.3.10), obtemos (2.3.7), como queríamos provar.

Para lidar com o caso em que $p = 2$ e $q = 1$, precisamos analisar o termo

$$\widehat{A^{k+s} H_{-b_1'}}(\xi,\tau) \widehat{A^{N_1-k-s}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1) \widehat{A^{N_1-k-s}(F_2^1)_{b_1}}(\xi_2-\xi_1, \tau_2-\tau_1) \widehat{A^{N_1-k-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1, \tau-\tau_1).$$

Note que neste caso aparecem duas novas variáveis, ξ_2 e τ_2, resultando em uma integral sobre $\mathbb{R}^6$. Então decompomos $\mathbb{R}^6$ em $(2+1)!$ subdomínios, $\Omega_1, \cdots, \Omega_6$, definidos por

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi-\xi_2| \le |\xi_2-\xi_1| \le |\xi_1|\}\\
\Omega_2 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi_1| \le |\xi-\xi_2| \le |\xi_2-\xi_1|\}\\
\Omega_3 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi_2-\xi_1| \le |\xi_1| \le |\xi-\xi_2|\}\\
\Omega_4 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi_1| \le |\xi_2-\xi_1| \le |\xi-\xi_2|\}\\
\Omega_5 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi-\xi_2| \le |\xi_1| \le |\xi_2-\xi_1|\}\\
\Omega_6 &= \{(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \mathbb{R}^6 : |\xi_2-\xi_1| \le |\xi-\xi_2| \le |\xi_1|\}.
\end{aligned}$$

Primeiramente, suponha $(\xi,\tau,\xi_1,\tau_1,\xi_2,\tau_2) \in \Omega_1$. Agora, reescrevemos o seguinte

$$\begin{aligned}
\frac{(1+|\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi_2-\xi_1|)^{N_1-k-s}(1+|\xi-\xi_2|)^{N_1-k-s}}{(1+|\xi|)^{-(k+s)}} &= (1+|\xi|)^{N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2}\\
&\times (1+|\xi_2-\xi_1|)^{N_1-s}(1+|\xi-\xi_2|)^{N_1-s}\\
&\times (1+|\xi_2-\xi_1|)^{-k}(1+|\xi-\xi_2|)^{-k}\\
&\times (1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\
&\le (1+|\xi|)^{N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2}\\
&\times (1+|\xi_2-\xi_1|)^{N_1-s}(1+|\xi-\xi_2|)^{N_1-s}\\
&\times (1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$1+|\xi| \le (1+|\xi-\xi_2|) + (1+|\xi_2-\xi_1|) + (1+|\xi_1|),$$

temos, por meio de (2.3.8), que

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{k+s-N_1/2} &\le [(1+|\xi-\xi_2|) + (1+|\xi_2-\xi_1|) + (1+|\xi_1|)]^{k+s-N_1/2}\\
&\le c\,[(1+|\xi-\xi_1|)^{k+s-N_1/2} + (1+|\xi_2-\xi_1|)^{k+s-N_1/2} + (1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}],
\end{aligned}$$

uma vez que, por hipótese, $k+s-N_1/2 > 1$.

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s} &\le c\,[(1+|\xi-\xi_2|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\
&+ (1+|\xi_2-\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\
&+ (1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\
&\le 3c\,(1+|\xi_1|)^{k+s-N_1/2}(1+|\xi_1|)^{N_1/2-k-s}\\
&= 3c.
\end{aligned}$$

Também, note que a mesma estimativa permanece válida sobre Ω_6. Assim, se Υ_i é definido analogamente como no caso $p = q = 1$ para $i = 1, \cdots, 6$, temos que

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1 + \Upsilon_6 &\leq c \int_{\mathbb{R}^6} \widehat{A^{N_1/2} H_{-b_1'}}(\xi,\tau) \widehat{A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1}}(\xi_1,\tau_1) \widehat{A^{N_1-s}(F_2^1)_{b_1}}(\xi_2-\xi_1,\tau_2-\tau_1) \times \\
&\quad \times \widehat{A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1) d\mu \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^2} A^{N_1/2} H_{-b_1'}(\xi,\tau) \overline{A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1} A^{N_1-s}(F_2^1)_{b_1} A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_2}}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \\
&\leq c\, \|A^{N_1/2} H_{-b_1'}\|_{L_x^4 L_t^2} \|A^{N_1/2}(F_1^1)_{b_1}\|_{L_x^4 L_t^2} \|A^{N_1-s}(F_2^1)_{b_1}\|_{L_x^2 L_t^\infty} \|A^{N_1-s}(G_1^2)_{b_2}\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \\
&\leq c\, \|h\|_{L_x^2 L_t^2} \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|f_2\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2} \\
&= c\, \|f_1\|_{L_x^2 L_t^2} \|f_2\|_{L_x^2 L_t^2} \|g_1\|_{L_x^2 L_t^2}.
\end{aligned}$$

Para concluir a prova para este caso particular, $p = 2$ e $q = 1$, e estabelecer a mesma estimativa sobre os demais conjuntos, é suficiente trocar os papéis de ξ_1, $\xi_2 - \xi_1$ e $\xi - \xi_1$. O caso geral, quando p e q são inteiros arbitrários, temos que $p + q - 1$ convoluções, geradas via propriedades das transformadas de Fourier, e portanto uma integral sobre $\mathbb{R}^{2(p+q)}$, que é dividido em $(p + q)!$ subregiões, isto é, todas as possibilidades de desigualdades entre $|\xi_1|$, $|\xi_{p+q-1} - \xi_{p+q-2}|$, $\cdots$, $|\xi_2 - \xi_1|$ e $|\xi - \xi_1|$.

Assim, por exemplo, se Ω é o conjunto formado por todos os elementos $(\xi, \tau, \xi_1, \tau_1, \cdots, \xi_{p+q-1}, \tau_{p+q-1}) \in \mathbb{R}^{2(p+q)}$ tais que

$$|\xi_1| \;\leq\; |\xi_{p+q-1} - \xi_{p+q-2}| \;\leq\; \cdots \;\leq\; |\xi_2 - \xi_1| \;\leq\; |\xi - \xi_1|,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\Upsilon_\Omega &\leq c \int_{\mathbb{R}^2} A^{N_1/2} H_{-b_1'}(\xi,\tau) \prod_{i=1}^{p} \overline{A^{N_1-s}(F_i^1)_{b_1}} \prod_{j=1}^{q-1} \overline{A^{N_1-s}(G_j^2)_{b_2}}\; \overline{A^{N_1/2}(G_q^2)_{b_2}}(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \\
&\leq c\, \|A^{N_1/2} H_{-b'}\|_{L_x^4 L_t^2} \prod_{i=1}^{p-1} \|A^{N_1-s}(F_i^1)_{b_1}\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \|A^{N_1-s}(F_p^1)_{b_1}\|_{L_x^2 L_t^\infty} \\
&\times \prod_{j=1}^{q-1} \|A^{N_1-s}(G_j^2)_{b_2}\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \|A^{N_1/2}(G_q^2)_{b_2}\|_{L_x^4 L_t^2} \\
&\leq c\, \|h\|_{L_x^2 L_t^2} \prod_{i=1}^{p} \|f_i\|_{L_x^2 L_t^2} \prod_{j=1}^{q} \|g_j\|_{L_x^2 L_t^2} \\
&= c \prod_{i=1}^{p} \|f_i\|_{L_x^2 L_t^2} \prod_{j=1}^{q} \|g_j\|_{L_x^2 L_t^2},
\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

Em particular, o Teorema 2.3.1 é válido quando $b = b_1 = b_2$ e $p = 1$, e podemos obter um resultado particular, provado em [21].

Além disso, observamos que a mesma estimativa é verdadeira se trocamos os papéis entre os espaços X_1^{σ,s,b_1} e X_2^{σ,s,b_2}. Para ver isto, basta reproduzir a demonstração acima trocando b_1, b_1' e ϕ_1 por b_2, b_2' e ϕ_2, respectivamente. Então, temos o seguinte

Teorema 2.3.2. *Dado $N_3 \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq k \leq N_3$ e $0 \leq \ell \leq N_3 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1, b'_2 < -1/4$ e $s > (2N_3 + 1)\max\{b_1, b_2\} + N_3$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $u_1, \cdots, u_p \in X_2^{\sigma,s,b_2}$, $v_1, \cdots, v_q \in X_1^{\sigma,s,b_1}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_3 - k$, para $j = 1, \cdots, p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p, q, s, b_1, b_2, b_1' e b_2' tal que*

$$\left\| \partial_x^k \left\{ \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_j \prod_{i=1}^{q} \partial_x^{\ell} v_i \right\} \right\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}} \leq c \prod_{j=1}^{p} \|u_j\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \prod_{i=1}^{q} \|v_i\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}.$$

Com isso, concluímos a seção de estimativas para os termos lineares e não lineares de (Γ_1, Γ_2) e as usaremos na seguinte seção, na qual provaremos a existência e unicidade de solução para (2.1.1)-(2.1.2) sobre subespaços métricos completos dos espaços de Bourgain.

2.4 Existência de uma Solução

O objetivo desta seção é usar o princípio de contração para provarmos a existência e unicidade para o sistema em questão. Para isso, precisamos definir o operador $(\Gamma_1(u,v), \Gamma_2(u,v))$ em um espaço adequado, $B_1 \times B_2$, métrico completo, sobre o qual o operador esteja bem definido e, também, possua a propriedade da contração, isto é,

$$\begin{gathered}
\text{(i) } (\Gamma_1(u,v), \Gamma_2(u,v)) \in B_1 \times B_2, \ \ \forall \ (u,v) \in B_1 \times B_2 \\
\text{(ii) } \exists\, \lambda \in (0,1) \ \text{ tal que } \ \forall\, (u_1,v_1), (u_2,v_2) \in B_1 \times B_2 \\
\|(\Gamma_1(u_1,v_1), \Gamma_2(u_1,v_1)) - (\Gamma_1(u_2,v_2), \Gamma_2(u_2,v_2))\|_{B_1 \times B_2} \leq \lambda \|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_{B_1 \times B_2}.
\end{gathered}$$

Tornando mais precisas as informações acima, definimos para o par de dados iniciais $(u_0, v_0) \in G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$ os subespaços

$$\begin{aligned}
B_1 &\doteq \{w \in X_1^{\sigma,s,b_1} : \|w\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1, \ \text{ onde } \ r_1 = \|u_0\|_{G^{\sigma,s}}\} \\
B_2 &\doteq \{w \in X_2^{\sigma,s,b_2} : \|w\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2, \ \text{ onde } \ r_2 = \|v_0\|_{G^{\sigma,s}}\}.
\end{aligned}$$

Formalmente, para um par $(u,v) \in B_1 \times B_2$, definimos

$$\Gamma(u,v) \doteq (\Gamma_1(u,v), \Gamma_2(u,v)). \tag{2.4.1}$$

Para o espaço produto, consideramos a norma da soma, isto é, se $(u,v) \in B_1 \times B_2$, então

$$\|(u,v)\|_{B_1\times B_2} = \|u\|_{B_1} + \|v\|_{B_2},$$

e, munidos desta norma, temos um espaço métrico completo. Assim, na sequência, provaremos os itens (i) e (ii), cuja prova passa pela existência de um valor positivo, $T>0$, para o qual estes itens são válidos.

Lema 2.4.1. *Existe um valor $T>0$, tal que o operador Γ, definido em* (2.4.1)*, satisfaz: se $(u,v)\in B_1\times B_2$, então $\Gamma(u,v)\in B_1\times B_2$.*

Demonstração. Se $(u,v)\in B_1\times B_2$, então usando os Lema 2.3.1 e Lema 2.3.2, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\le \|\psi(t)U(t)u_0\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \\
&\quad + \sum_{I_{N_1}} \|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\left\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\right\}dt'\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \\
&\le c\,\|u_0\|_{G^{\sigma,s}} + c\,T^{1-b_1+b_1'}\sum_{I_{N_1}} \|\partial_x^k\left\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\right\}\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\
&\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j} u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\
&\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m}\sum_{i=1}^{d_P} c_\alpha^m\,|p_{k,\ell,m}| \left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j} u(\partial_x^\ell v)^i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}.
\end{aligned}$$

Para cada $i=1,\cdots,d_P$, definindo $v_r=v$, para $r=1,\cdots,i$, podemos reescrever

$$\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j} u(\partial_x^\ell v)^i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} = \left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j} u\prod_{r=1}^i \partial_x^\ell v_r\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}},$$

e, pelo Teorema 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m}\sum_{i=1}^{d_P} c_\alpha^m\left\{|p_{k,\ell,m}|\|u\|^p_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\prod_{r=1}^i\|v_r\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\right\} \\
&\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m}\sum_{i=1}^{d_P} c_\alpha^m\left\{|p_{k,\ell,m}|(2cr_1)^p\prod_{r=1}^i 2cr_2\right\} \\
&\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2) \\
&\le cr_1 + c\,T^{1-b_1+b_1'}(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2).
\end{aligned}$$

Agora, note que existe ao menos uma terna $(k,\ell,m)\in I_{N_1}$ para a qual $p_{k,\ell,m}\neq 0$. Isso permite escolher $T > 0$ tal que

$$T^{1-b_1+b_1'} \leq \frac{r_1}{4(2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)} \doteq A_1,$$

e, então, temos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1.$$

Analogamente, obtemos que

$$\|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq cr_2 + c\, T^{1-b_2+b_2'}(2cr_2)^p \sum_{I_{N_3}} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \widetilde{Q}_{k,\ell,m}(2cr_1).$$

Assim, escolhendo $T > 0$ satisfazendo

$$T^{1-b_2+b_2'} \leq \frac{r_2}{4(2cr_2)^p \sum_{I_{N_3}} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \widetilde{Q}_{k,\ell,m}(2cr_1)} \doteq A_2,$$

temos que

$$\|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2.$$

Agora, para concluir a prova é suficiente tomar $T = \min\{{A_1}^{1/(1-b_1+b_1')}, {A_2}^{1/(1-b_2+b_2')}\}$ e obtemos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1 \;\text{ e }\; \|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2,$$

isto é, $\Gamma(u,v) \in B_1 \times B_2$, como queríamos provar. □

Temos recém provado que a aplicação Γ mapeia $B_1 \times B_2$ em $B_1 \times B_2$. O próximo passo a ser tomado é provar que Γ é uma contração sobre $B_1 \times B_2$.

Teorema 2.4.1. *A aplicação* $\Gamma : B_1 \times B_2 \to B_1 \times B_2$*, definida em* (2.4.1)*, é uma contração.*

Demonstração. Queremos provar que

$$\|\Gamma(u_1,v_1) - \Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq \frac{1}{2}\, \|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2}.$$

De fato, a menos de somas em k, ℓ e m, as quais omitiremos previamente para simplificar a notação, temos que

$$\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2) = \psi_T(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x^k \left\{\partial_x^m u_1^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_1) - \partial_x^m u_2^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_2)\right\} dt'.$$

Suponhamos que $P_{k,\ell,m}$ é um polinômio da forma x^q. Assim, note que

$$\begin{aligned}
\partial_x^m u_1^p(\partial_x^\ell v_1)^q - \partial_x^m u_2^p(\partial_x^\ell v_2)^q &= \partial_x^m(u_1^p - u_2^p)(\partial_x^\ell v_1)^q - \partial_x^m u_2^p[(\partial_x^\ell v_2)^q - (\partial_x^\ell v_1)^q] \\
&= \partial_x^m[(u_1 - u_2)R_{p-1}(u_1, u_2)](\partial_x^\ell v_1)^q \\
&- \partial_x^m u_2^p[(\partial_x^\ell(v_2 - v_1))R_{q-1}(\partial_x^\ell v_2, \partial_x^\ell v_1)] \\
&\doteq I - II,
\end{aligned}$$

onde $R_{\lambda-1}(x,y) = \sum_{i=1}^{\lambda} x^{i-1}y^{\lambda-i}$, que é tal que $R_{\lambda-1}(x,y) = R_{\lambda-1}(y,x)$ e satisfaz

$$x^\lambda - y^\lambda = (x-y)R_{\lambda-1}(x,y),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{N}.$$

Agora, para obter a estimativa para I, primeiro definimos

$$f_j^1 = \begin{cases} u_1 - u_2, j = 1 \\ u_2, j = 2, \cdots, p \end{cases}, f_j^p = \begin{cases} u_1 - u_2, j = 1 \\ u_1, j = 2, \cdots, p \end{cases},$$

e para todo $i = 2, \cdots, p-1$, definimos f_j^i como sendo

$$f_j^i = \begin{cases} u_1 - u_2, j = 1 \\ u_1, j = 2, \cdots, i \\ u_2, j = i+1, \cdots, p. \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever I por

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^{p} \partial_x^m[(u_1 - u_2){u_1}^{i-1}{u_2}^{p-i}](\partial_x^\ell v_1)^q = \sum_{i=1}^{p} \partial_x^m \left[\prod_{j=1}^{p} f_j^i\right](\partial_x^\ell v_1)^q \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p}(\partial_x^{\alpha_j} f_j^i) \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell f_k,
\end{aligned}$$

onde $f_k = v_1$ para todo $k = 1, \cdots, q$. Assim, pelo Teorema 2.3.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k(I)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} &\leq c\sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^{p}(\partial_x^{\alpha_j} f_j^i) \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell f_k\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\
&\leq c\sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p} \|f_j^i\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \prod_{k=1}^{q} \|f_k\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \\
&= c\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \|u_2 - u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \sum_{i=1}^{p} \|u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}^{i-1} \|u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}^{p-i} \|v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}^{q} \\
&\leq c^m \|u_2 - u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{p-1}(2cr_1, 2cr_1)(2cr_2)^q.
\end{aligned}$$

Além disso, podemos reescrever II. Para fazer isso, definimos para $k = 1, \cdots, q-1$, $g_k^1 = v_1$, $g_k^q = v_2$, e para cada $i = 2, \cdots, q-1$, definimos

$$g_k^i = \begin{cases} v_2, k = 1, \cdots, i-1 \\ v_1, k = i, \cdots, q-1 \end{cases}.$$

Finalmente, seja $g_q^i = v_2 - v_1$ para $i = 1, \cdots, q$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} II &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_2 \left[(\partial_x^\ell (v_2 - v_1)) \sum_{i=1}^{q} (\partial_x^\ell v_2)^{i-1} (\partial_x^\ell v_1)^{q-i} \right] \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_2 \Bigg[(\partial_x^\ell (v_2 - v_1))(\partial_x^\ell v_1)^{q-1} + \sum_{i=2}^{q-1} (\partial_x^\ell v_2)^{i-1} (\partial_x^\ell v_1)^{q-i} \\ &+ (\partial_x^\ell (v_2 - v_1))(\partial_x^\ell v_2)^{q-1} \Bigg] \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_2 \left[\prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell g_k^1 + \sum_{i=2}^{q-1} \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell g_k^i + \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell g_k^q \right] \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_2 \left[\sum_{i=1}^{q} \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell g_k^i \right]. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema 2.3.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k (II)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} &\leq \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \sum_{i=1}^{q} \left\| \partial_x^k \left\{ \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_2 \prod_{k=1}^{q} \partial_x^\ell\, g_k^i \right\} \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \sum_{i=1}^{q} \prod_{j=1}^{p} \|u_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \prod_{k=1}^{q} \|g_k^i\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \sum_{i=1}^{q} \|u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}^p \|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \|v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}^{i-1} \|v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}^{q-i} \\ &\leq c^m \|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} (2cr_1)^p R_{q-1}(2cr_2, 2cr_2). \end{aligned}$$

No caso geral, isto é, quando $P_{k,\ell,m}$ é um polinômio como em (2.1.3), temos que

$$\begin{aligned} \partial_x^m {u_1}^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_1) - \partial_x^m {u_2}^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_2) &= \sum_{i=1}^{d_P} \partial_x^m [(u_1 - u_2) R_{p-1}(u_1, u_2)](\partial_x^\ell v_1)^i \\ &- \sum_{i=1}^{d_P} \partial_x^m {u_2}^p [(\partial_x^\ell (v_2 - v_1)) R_{i-1}(\partial_x^\ell v_2, \partial_x^\ell v_1)] \\ &\doteq III - IV. \end{aligned}$$

Portanto, como no caso prévio, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k(III)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} &\leq c^m \|u_1 - u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{p-1}(2cr_1, 2cr_1) P_{k,\ell,m}(2cr_2) \\
\|\partial_x^k(IV)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} &\leq c^m \|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} (2cr_1)^p \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2, 2cr_2).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.3.2, o Lema 2.3.1 e as estimativas acima, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(u_1, v_1) - \Gamma_1(u_2, v_2)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq{}& c\, T^{1-b_1+b_1'} \|u_2 - u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{p-1}(2cr_1, 2cr_1) \sum_{I_{N_1}} c^m P_{k,\ell,m}(2cr_2) \\
&+ c\, T^{1-b_1+b_1'} \|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} (2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2, 2cr_2).
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(u_1, v_1) - \Gamma_2(u_2, v_2)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq{}& c\, T^{1-b_2+b_2'} \|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} R_{p-1}(2cr_2, 2cr_2) \sum_{I_{N_3}} c^m Q_{k,\ell,m}(2cr_1) \\
&+ c\, T^{1-b_2+b_2'} \|u_2 - u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} (2cr_2)^p \sum_{I_{N_3}} c^m \sum_{i=1}^{d_Q} R_{i-1}(2cr_1, 2cr_1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(u_1, v_1) - \Gamma(u_2, v_2)\|_{B_1 \times B_2} \leq{}& \|v_2 - v_1\|_{B_2} [T^{1-b_1+b_1'} A_{11} + T^{1-b_2+b_2'} A_{12}] \\
&+ \|u_2 - u_1\|_{B_1} [T^{1-b_1+b_1'} A_{21} + T^{1-b_2+b_2'} A_{22}],
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{11} &= c\, (2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2, 2cr_2) \\
A_{12} &= c\, R_{p-1}(2cr_2, 2cr_2) \sum_{I_{N_3}} c^m Q_{k,\ell,m}(2cr_1) \\
A_{21} &= c\, R_{p-1}(2cr_1, 2cr_1) \sum_{I_{N_1}} c^m P_{k,\ell,m}(2cr_2) \\
A_{22} &= c\, (2cr_2)^p \sum_{I_{N_3}} c^m \sum_{i=1}^{d_Q} R_{i-1}(2cr_1, 2cr_1).
\end{aligned}$$

Escolhendo $T > 0$ tal que

$$T < \frac{1}{8} \min\left\{ {A_{11}}^{-1/(1-b_1+b_1')}, {A_{12}}^{-1/(1-b_2+b_2')}, {A_{21}}^{-1/(1-b_1+b_1')}, {A_{22}}^{-1/(1-b_2+b_2')} \right\},$$

temos que

$$\|\Gamma(u_1,v_1)-\Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2}\leq \frac{1}{2}\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2},$$

provando que a aplicação Γ é uma contração. □

Pelo que acabamos de provar, para $T>0$ nas condições do Teorema 2.4.1, temos que Γ é uma contração, e disso segue que Γ possui um único ponto fixo (u,v) em $B_1\times B_2$, o qual é a única solução para o problema de valor inicial do sistema (2.1.1)-(2.1.2).

Como mencionado na Observação 1.2.1, o espaço $X_{\phi}^{\sigma,s,b}$ é mergulhado continuamente em $C([-T,T],G^{\sigma,s})$ se $b>1/2$. Portanto, se supomos $b_1,b_2>1/2$, então o par $(u,v)\in C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$. Por outro lado, isso não implica na unicidade da solução sobre $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$. Este é o assunto da próxima seção.

2.5 Unicidade e Dependência Contínua do Dado Inicial

Como observado na seção prévia, provamos a existência de uma solução do sistema (2.1.1)-(2.1.2) sobre $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$ para algum $T>0$. Contudo, resta mostrar a unicidade. Para provar isso, lançaremos mão de alguns resultados provados no Capítulo 1, a saber, Lema 1.2.1 e Lema 1.2.2, que, por sua vez, são válidos, em particular, para $\phi=\phi_1$ e $\phi=\phi_2$. Assim, temos o seguinte:

Lema 2.5.1. *Seja $b=\min\{b_1,b_2\}$ e suponha $b_1,b_2>1/2$, $s>2N+1/2$ e $0<\epsilon<\sigma$. Se $(u,v)\in C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$ satisfaz (2.1.1)-(2.1.2), então $\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}}$ e $\|\psi_{\frac{T}{2}}v\|_{X_2^{\sigma-\epsilon,s,b_2}}$ são finitas.*

Demonstração. Pelos Lema 1.2.1 e Lema 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}} &= \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma(1+|\xi|)}\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda^{b_1}(\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu(\xi,t))|^2dtd\xi\\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu(\xi,t)|^2dtd\xi\\
&+c\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_t[\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu(\xi,t)]|^2dtd\xi.
\end{aligned}$$

Diferenciando com respeito a t o segundo termo, temos que

$$\frac{2}{T}\psi'_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu(\xi,t)+\psi_{\frac{T}{2}}(t)i\phi_1(\xi)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu(\xi,t)+\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_xu_t(\xi,t).$$

e recordando a definição de ϕ_1, em (2.2.5), temos que

$$|i\phi_1(\xi)e^{i\phi_1(\xi)t}|\leq c\,(1+|\xi|)^{2N_2+1}.$$

Usando propriedades do suporte de ψ, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}} &\leq c\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}|\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 dt d\xi \\
&+ c\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\ |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 dt d\xi \\
&+ c\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2(s+N_2)+1}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\ |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 dt d\xi \\
&+ c\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\ |\mathcal{F}_x u_t(\xi,t)|^2 dt d\xi \\
&\leq c\,T\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} + c\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} \\
&+ c\,T\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s+2N_2+1}} + c\,T\sup_{-T\leq t\leq T}\|u_t(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}}.
\end{aligned}$$

O último termo, contendo u_t, é finito pois estamos supondo (u,v) uma solução de (2.1.1). Os restantes termos são finitos uma vez que

$$\begin{aligned}
\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} &= \sup_{-T\leq t\leq T}\|(1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\
&\leq c\sup_{-T\leq t\leq T}\|(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\
&= c\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma,s}} = c\,|u|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} < \infty.
\end{aligned}$$

Também, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s+2N_2+1}} &= \sup_{-T\leq t\leq T}\|(1+|\xi|)^{s+2N_2+1}e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\
&= \sup_{-T\leq t\leq T}\|(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}[(1+|\xi|)^{s+2N_2+1}e^{-\epsilon(1+|\xi|)}]\ \widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\
&\leq c\sup_{-T\leq t\leq T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma,s}} \\
&= c\,|u|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} < \infty.
\end{aligned}$$

Similarmente, o mesmo se verifica para $\psi_{\frac{T}{2}}v$, concluindo a prova. □

Da Observação 1.2.1, temos uma solução em $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$ para o sistema (2.1.1)-(2.1.2), que, *a priori*, não é única. O Lema 2.5.1 implicará a unicidade. De fato, vamos supor (u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$, duas soluções do sistema (2.1.1)-(2.1.2). Então $\Gamma(u_1,v_1)=(u_1,v_1)$ e $\Gamma(u_2,v_2)=(u_2,v_2)$. Além disso, pelo Lema 2.5.1, temos que $\psi_{T/2}u_j\in X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}$ e $\psi_{T/2}v_i\in X_2^{\sigma-\epsilon,s,b_2}$.

Por outro lado, por (2.2.7), temos que

$$\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)=\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)\ \text{ e }\ \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)=\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right).$$

Assim, se B_j^ϵ corresponde a bola fechada de raio $2cr_j$ sobre $X_j^{\sigma-\epsilon,s,b_j}$, para $j=1,2$, então usando as estimativas na Seção 1.4, já que estas independem de σ, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon} &= \left\|\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon}\\ &\le \frac{1}{2}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon}.\end{aligned}$$

Portanto, $u_1\equiv u_2$ e $v_1\equiv v_2$ onde $\psi_{\frac{T}{2}}\equiv 1$, isto é, no intervalo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, provando a unicidade de nosso problema sobre o espaço desejado.

Finalmente, para provar a dependência contínua dos dados iniciais, consideramos (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$, soluções de (2.1.1), correspondendo aos dados iniciais (u_0,v_0) e $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$, respectivamente. Então, pela unicidade dos respectivos problemas, obtemos que

$$\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}=\|\Gamma_1(u,v)-\widetilde{\Gamma}_1(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1}+\|\Gamma_2(u,v)-\widetilde{\Gamma}_2(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_2}.$$

Ainda,

$$\begin{aligned}&\Gamma_1(u,v)-\widetilde{\Gamma}_1(\tilde{u},\tilde{v})=\psi(t)U(t)(u_0-\tilde{u}_0)\\ &-\sum_{I_{N_1}}\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell)v)-\partial_x^m\tilde{u}^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell)\tilde{v})\}(t')dt'\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}&\Gamma_2(u,v)-\widetilde{\Gamma}_2(\tilde{u},\tilde{v})=\psi(t)W(t)(v_0-\tilde{v}_0)\\ &-\sum_{I_{N_3}}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell)u)-\partial_x^m\tilde{v}^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell)\tilde{u})\}(t')dt'.\end{aligned}$$

Logo, pelos Lema 2.3.1, Lema 2.3.2 e pela prova apresentada no Teorema 2.4.1, obtemos que

$$\begin{aligned}\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}&\le c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}}\\ &\quad+(1/2)\,\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}\\ \Rightarrow\ \|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}&\le 2c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}}.\end{aligned}$$

Novamente, pela Observação 1.2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}\times\mathcal{C}_{T,\sigma,s}}&\le c\,\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}\\ &\le c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}},\end{aligned}$$

concluindo a prova do Teorema 2.1.1.

No próximo capítulo trataremos de ampliar o alcance de problemas físicos no qual sistemas de equações do tipo KdV/Kawahara sejam bem postos.

Capítulo

3

Boa postura para um Sistema do tipo KdV/Kawahara com não linearidades arbitrárias

Neste capítulo provaremos a boa postura para um sitema de equações do tipo KdV/Kawahara com não linearidades de ordem arbitrária. As técnicas a serem utilizadas seguem o roteiro apresentado no Capítulo 2.

3.1 Introdução e Resultados

Consideramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(P(u,v)) + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k\, \partial_x^{2k+1} u = 0 \\ \partial_t v + \partial_x(Q(u,v)) + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_3}\sum_{\ell=0}^{N_3-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_3-k} \partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=1}^{N_4} b_k\, \partial_x^{2k+1} v = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

com $x, t \in \mathbb{R}$ e supondo $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$ tal qual no capítulo anterior, ou seja, polinômios homogêneos. Além disso, os termos $P(u,v)$ e $Q(u,v)$, presentes no sistema acima, são dados por

$$P(u,v) = aR(u) + bR(v)$$
$$Q(u,v) = cR(u) + dR(v),$$

para a, b, c e d números reais quaisquer, fixados, e onde, para $q \in \mathbb{N}$ arbitrário, $R(x) = x^q$.

A motivação para considerarmos um sistema como (3.1.1) vem do fato do sistema (2.1.1) não englobar sistemas para os quais sistemas de equações dispersivas são importantes. De fato, apesar da generalidade contida nos termos não lineares presentes em (2.1.1), tal generalização não é suficiente para atingir sistemas mais complexos, como mostramos por meio do exemplo (ver [5])

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(p(u,v)) = 0, \quad u(x,0) = \phi(x) \\ \partial_t v + \alpha\, \partial_x^3 v + \partial_x(q(u,v)) = 0, \quad v(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

onde p e q denotam os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} p(u,v) &= Au^2 + Buv + Cv^2 \\ q(u,v) &= Du^2 + Evu + Fv^2, \end{aligned}$$

que, por sua vez, é englobado em (2.1.1) pela restrição $A = C = D = F \equiv 0$.

Pedir tais condições sobre os coeficientes A, C, D e F representa uma perda muito grande do ponto de vista geral do problema e isso ocorre por que existem termos que não estão representados na parte não linear de (2.1.1), quando expandidos os polinômios $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$.

A razão para isto vem do fato de que supomos, no capítulo anterior, os polinômios $P_{k,\ell,m}$ e $Q_{k,\ell,m}$ homogêneos, implicando na restrição de escolhas de polinômios constantes, impossibilitando a cobertura desses casos.

A correção é adicionar novos termos às equações. Um simples acréscimo é colocar os termos $\partial_x(u^2)$ e $\partial_x(v^2)$ e obter um novo sistema. Contudo, algo mais geral pode ser considerado. Por essa razão é que para $q \in \mathbb{N}$ são introduzidos os polinômios $P(u,v)$ e $Q(u,v)$.

Observe ainda que o termo uv não foi incluído na definição dos polinômios $P(u,v)$ e $Q(u,v)$ como sugerem os polinômios $p(u,v)$ e $q(u,v)$ presentes em (3.1.3). Porém, $\partial_x(uv)$, como já observado no Capítulo 2, pode ser absorvido pelos termos não lineares em (2.1.1). De fato, se em (2.1.4) consideramos $P_{1,0,0}(x) = x$ e os demais polinômios nulos, assumindo $p = 1$ e $N_1 = 1$, então

$$\sum_{k=0}^{1} \sum_{\ell=0}^{1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{1-k} \partial_x^m u \; P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} = \partial_x(uv). \tag{3.1.4}$$

O sistema (3.1.1)-(3.1.2) pode ainda abarcar outros problemas como o sistema de Majda-Biello, estudado em [32], como segue abaixo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2}\partial_x(v^2) = 0 \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \partial_x(uv) = 0. \end{cases}$$

Incluí-lo como um caso particular de (3.1.1) nos levaria a pedir que todos os polinômios $P_{k,\ell,m}$ fossem nulos. Entretanto, a técnica apresentada aqui usa, na construção de um valor $T > 0$ para que se obtenha boa postura, que ao menos um destes polinômios seja não nulo. Mesmo assim, as mesmas ferramentas podem ser adaptadas para obtenção de um resultado de existência, unicidade, bem como dependência contínua dos dados iniciais para o sistema de Majda-Biello.

Ademais, podem ser consideradas outras situações físicas, como a estudada em [6], na qual o sistema (3.1.1)-(3.1.2) representa:

Situação 3.1.1. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + \partial_x^3 u + \alpha_3 \partial_x^3 v + \alpha_1 v \partial_x v + \alpha_2 \partial_x(uv) = 0 \\ \beta_1 \partial_t v + r\partial_x v + v\partial_x v + \partial_x^3 v + \beta_2\alpha_3\partial_x^3 u + \beta_2\alpha_2 u\partial_x u + \beta_2\alpha_1\partial_x(uv) = 0, \end{cases}$$

com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ e r são números reais com β_1 e β_2 positivos. Sendo $\beta_1 > 0$, e considerando caso particular em que $r = 0$ e $\alpha_3 = 0$, o mesmo é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + \alpha_1 v\partial_x v + \alpha_2\partial_x(uv) + \partial_x^3 u = 0 \\ \partial_t v + \gamma_1\beta_2\alpha_2 u\partial_x u + \gamma_1 v\partial_x v + \gamma_1\beta_2\alpha_1\partial_x(uv) + \gamma_1\partial_x^3 v = 0, \end{cases}$$

onde $\gamma_1 = 1/\beta_1$.

Para ver que (3.1.1) engloba o sistema acima é necessário escolher adequadamente os polinômios que definem as partes não lineares nas equações presentes no sistema.

Com efeito, supomos inicialmente $p = 1$. Para a primeira e segunda equação, vamos considerar $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 1$. Nesse caso, através de (2.1.4) e (3.1.4), sabemos que escolhendo $P_{1,0,0}(x) = \alpha_2 x$, $Q_{1,0,0}(x) = \gamma_1\beta_2\alpha_1 x$ e os demais polinômios nulos, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{1-k} \partial_x^m u \; P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v) \right\} &= \partial_x(uP_{1,0,0}(v)) = \alpha_2\partial_x(uv) \\ \sum_{k=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{1-k} \partial_x^m v \; Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} &= \partial_x(vQ_{1,0,0}(u)) = \gamma_1\beta_2\alpha_1\partial_x(uv). \end{aligned}$$

Para $a_1 = 1$ e $b_1 = \gamma_1$, obtemos a parte linear do sistema. Por fim, para $q = 2$, basta considerar os polinômios

$$\begin{cases} P(u,v) = \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{\alpha_1}{2}v^2 \\ Q(u,v) = \dfrac{\gamma_1\beta_2\alpha_2}{2}u^2 + \dfrac{\gamma_1}{2}v^2. \end{cases}$$

Este sistema possui a estrutura de um par de equações de Korteweg-de Vries acopladas através de efeitos dispersivos e não lineares que, de acordo com [6], foi derivado por Gear e Grimshaw, em [18], como modelo para descrever a forte interação de componentes fracamente não-lineares.

Assim, é baseado no artigo [21] e à luz de resultados já provados no capítulo prévio que provaremos a boa postura para o sistema (3.1.1)-(3.1.2), com dado inicial no espaço de Gevrey. Basicamente, o principal resultado deste capítulo consiste no seguinte:

Teorema 3.1.1. *Seja $s \geq 2N + 1/2$, $N = \max\{N_2, N_4\}$ e supomos $N_2 \geq N_1, N_3$ e $N_4 \geq N_1, N_3$. Para o dado inicial em $G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial* (3.1.1)-(3.1.2) *é bem posto no espaço $C([-T,T], G^{\sigma,s}) \times C([-T,T], G^{\sigma,s})$.*

As ferramentas e notações que usaremos serão similares, e muitas vezes as mesmas, às estabelecidas no Capítulo 2. Assim, na sequência, construíremos o operador integral que provaremos ser uma contração sob um espaço métrico completo conveniente.

3.2 Noções Preliminares

Vimos no capítulo anterior que os pesos na definição dos espaços de Bourgain à serem considerados, são oriundos das partes lineares das equações do sistema em questão. Agora, note que as partes lineares dos sistemas (2.1.1) e (3.1.1) coincidem. De fato, a parte linear de (3.1.1), dada por

$$\begin{cases} \partial_t u + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_2} a_k \, \partial_x^{2k+1} u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_4} b_k \, \partial_x^{2k+1} v = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

com dado inicial descrito em (3.1.2), é exatamente o sistema descrito em (2.2.1) - (2.1.2).

Logo, se prosseguirmos de maneira análoga ao desenvolvido no capítulo prévio, chegaremos as mesmas funções ϕ_1 e ϕ_2:

$$\phi_1(\xi) \doteq \sum_{k=1}^{N_2} a_k \xi (i\xi)^{2k} \;\text{ e }\; \phi_2(\xi) \doteq \sum_{k=1}^{N_4} b_k \xi (i\xi)^{2k}.$$

Consequentemente, temos os operadores $U(t)f = S_t * f$ e $W(t)f = T_t * f$, definidos de forma análoga ao Capítulo 2. Nesse caso, estes operadores induzem a solução, o par $(U(t)u_0, W(t)v_0)$, para o problema (3.2.1)-(3.1.2).

Através dos grupos unitários $\{U(t)\}$ e $\{W(t)\}$ chegamos ao seguinte par de equações integrais

$$\begin{aligned} u &= U(t)u_0 - \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{\ell=0}^{N_1-k}\sum_{m=0}^{N_1-k}\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}(t')\,dt' \\ &+ \int_0^t U(t-t')\partial_x\{P(u,v)\}\,dt' \\ v &= W(t)v_0 - \sum_{k=0}^{N_3}\sum_{\ell=0}^{N_3-k}\sum_{m=0}^{N_3-k}\int_0^t W(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}(t')\,dt' \\ &+ \int_0^t W(t-t')\partial_x\{Q(u,v)\}dt'. \end{aligned}$$

A localização da solução para o sistema colocado na variável temporal faz com que introduzimos uma função ψ satisfazendo:

$$\text{(i)}\quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \qquad \text{(ii)}\quad \psi \equiv 1 \ \text{ on } \ [-1,1], \qquad \text{(iii)}\quad \operatorname{supp}\psi \subset [-2,2],$$

e, desse modo, definimos formalmente os operadores

$$\begin{cases} \Gamma_1(u,v) \doteq \psi(t)U(t)u_0 - \displaystyle\sum_{I_{N_1}} \psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}\,dt' \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t U(t-t')\partial_x(P(u,v))dt' \\ \Gamma_2(u,v) \doteq \psi(t)W(t)v_0 - \displaystyle\sum_{I_{N_3}} \psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}\,dt' \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t W(t-t')\partial_x(Q(u,v))dt', \end{cases} \tag{3.2.2}$$

onde I_{N_j} indica o conjunto de índices de valores $(k,\ell,m) \in \mathbb{Z}_+^3$ tais que $0 \leq k \leq N_j$, $0 \leq \ell \leq N_j - k$ e $0 \leq m \leq N_j - k$, para cada $j = 1, 3$.

Seguindo ainda a notação do Capítulo 2, na Seção 2.4, e definindo $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ sobre $B_1 \times B_2$, devemos mostrar o seguinte:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ \Gamma \ \text{ está bem definida, isto é, } \ \Gamma(B_1 \times B_2) \subset B_1 \times B_2; \\ &\text{(ii)}\ \ \exists\, c \in (0,1) \ \text{ tal que } \ \forall\, (u_1,v_1),(u_2,v_2) \in B_1 \times B_2 \\ &\quad \|\Gamma(u_1,v_1) - \Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq c\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2}. \end{aligned}$$

Para provar o item (i), é necessário provar que para todo par $(u,v) \in B_1 \times B_2$, o termo $\|\Gamma(u,v)\|_{B_1\times B_2}$ é finito. Como no Capítulo 2, consideraremos sobre $B_1 \times B_2$ a norma da soma.

Logo, reduzimos o problema a obtermos estimativas para os termos $\|\Gamma_j(u,v)\|_{X^{\sigma,s_j,b_j}_{\phi_j}}$ que, pela desigualdade triangular, se resumem a estimar o seguinte

$$
\begin{gathered}
\|\psi(t)U(t)u_0\|_{X^{\sigma,s_1,b_1}_{\phi_1}}\\
\left\|\int_0^t U(t-t')\partial_x(P(u,v))dt'\right\|_{X^{\sigma,s_1,b_1}_{\phi_1}}\\
\left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}\; dt'\right\|_{X^{\sigma,s_1,b_1}_{\phi_1}}\\
\|\psi(t)W(t)v_0\|_{X^{\sigma,s_2,b_2}_{\phi_2}}\\
\left\|\int_0^t W(t-t')\partial_x(Q(u,v))dt'\right\|_{X^{\sigma,s_2,b_2}_{\phi_2}}\\
\left\|\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m v^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}\; dt'\right\|_{X^{\sigma,s_2,b_2}_{\phi_2}}.
\end{gathered}
$$

Estas estão garantidas pelas aplicações dos Lema 2.3.1, Lema 2.3.2, Teorema 2.3.1 e Teorema 2.3.2, como será mostrado a seguir.

Já as estimativas para os termos

$$\|\partial_x(P(u,v))\|_{X^{\sigma,s_1,b_1'}_{\phi_1}} \;\text{ e }\; \|\partial_x(Q(u,v))\|_{X^{\sigma,s_2,b_2'}_{\phi_2}},$$

decorrem de uma consequência do Teorema 2.3.1, como enunciaremos na seguinte seção.

3.3 Estimativas sobre os Espaços de Bourgain

O resultado a seguir segue imediatamente do Teorema 2.3.1.

Teorema 3.3.1. *Dado $N_1 \in \mathbb{N}$, sejam $0 \le k \le N_1$ e $0 \le \alpha \le N_1 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1 < -1/4$ e $s > (2N_1+1)\max\{b_1,b_2\} + N_1$. Fixado $q \in \mathbb{N}$ com $q > 1$, sejam $u_1, \cdots, u_q \in X_2^{\sigma,s,b_2}$.*

Então existe uma constante $c = c(q,s,b_1,b_2,b'_1)$ tal que

$$\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^q \partial_x^\alpha u_j\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b'_1}} \le c\prod_{j=1}^q \|u_j\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}. \tag{3.3.1}$$

A estimativa acima é útil para provar a existência e unicidade de solução do sistema (3.1.1)-(3.1.2) e serão aplicadas na seguinte seção. Além disso, decorre do Teorema 3.3.1 desigualdades especiais quando consideramos casos particulares sobre as hipóteses.

De fato, se $b_1 = b_2$, obtemos

$$\left\| \partial_x \left\{ \prod_{j=1}^{q} u_j \right\} \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \leq c \prod_{j=1}^{q} \|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}.$$

Também pode-se obter uma estimativa análoga, trocando os papéis de b_1 e b_2, como abaixo

$$\left\| \partial_x^k \left\{ \prod_{j=1}^{q} \partial_x^{\alpha} u_j \right\} \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_2'}} \leq c \prod_{j=1}^{q} \|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}},$$

supondo $u_1, \cdots, u_q \in X_1^{\sigma,s,b_1}$.

Na próxima seção provaremos a existência e unicidade de solução para o sistema (3.1.1)-(3.1.2) sobre subespaços de Bourgain adequados por meio do princípio de contração.

3.4 Existência de uma Solução

Nesta seção provaremos os itens (i) e (ii) mencionados na Seção 3.1. Estes compõem um passo importante e fundamental no objetivo de provarmos a boa postura para o problema de valor inicial (3.1.1)-(3.1.2).

Antes disso, vamos considerar a seguinte notação para os polinômios P e Q:

$$|P|(x,y) = |a|R(x) + |b|R(y) \quad \text{e} \quad |Q|(x,y) = |c|R(x) + |d|R(y).$$

Para a demonstração dos dois próximos resultados lançaremos mão de estimativas já estabelecidas no Capítulo 2, em particular nas demonstrações do Lema 2.4.1 e do Teorema 2.4.1. A razão para isso reside no fato de que o operador (Γ_1, Γ_2) coincide com o definido no Capítulo 2, exceto pelos termos que envolvem as derivadas dos polinômios $P(u,v)$ e $Q(u,v)$. Logo, teremos de nos preocupar apenas com estas parcelas do operador.

Teorema 3.4.1. *A aplicação Γ está bem definida sobre $B_1 \times B_2$.*

Demonstração. Seja $(u,v) \in B_1 \times B_2$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq & \left\| \psi(t)U(t)u_0 - \sum_{I_{N_1}} \psi_{T/2}(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x^k[\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^{\ell} v)]dt' \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \\ & + \left\| \psi_{T/2}(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x(P(u,v))dt' \right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \\ & \doteq I + II. \end{aligned}$$

A primeira parcela é estimada tal qual no Lema 2.4.1, como abaixo

$$\|I\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \le c\, r_1 + c\, T^{1-b_1-b_1'}(2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} \tilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2).$$

A segunda decorre aplicando inicialmente o Lema 2.3.2 e em seguida o Teorema 3.3.1. Com efeito

$$\begin{aligned}
\|II\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\le c\, T^{1-b_1-b_1'}\, \|\partial_x(P(u,v))\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \\
&\le c\, T^{1-b_1-b_1'}[|a|\|\partial_x R(u)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} + |b|\|\partial_x R(v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}] \\
&\le c\, T^{1-b_1-b_1'}[|a|R(\|u\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}) + |b|R(\|v\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}})] \\
&\le c\, T^{1-b_1-b_1'}[|a|(2cr_1)^q + |b|(2cr_2)^q] \\
&\le c\, T^{1-b_1-b_1'}|P|(2cr_1, 2cr_2).
\end{aligned}$$

O detalhe da aplicação do Teorema 3.3.1, aplicado acima, reside no seguinte: se para cada $i = 1, \cdots, q$, definimos $u_i = u$, então podemos escrever

$$\|\partial_x R(u)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} = \|\partial_x u^q\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} = \left\|\partial_x \left\{\prod_{i=1}^{q} u_i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}} \le c \prod_{i=1}^{q} \|u_i\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} = c\, R(\|u\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}).$$

Agora, se T for escolhido de modo que

$$T^{1-b_1-b_1'} \le \frac{cr_1}{(2cr_1)^p \sum_{I_N} \tilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2) + |P|(2cr_1, 2cr_2)} \doteq A_1,$$

então temos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \le 2cr_1.$$

Analogamente, para Γ_2, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \le c\, r_2 &+ c\, T^{1-b_2-b_2'}(2cr_2)^p \sum_{I_N} \tilde{Q}_{k,\ell,m}(2cr_1) \\
&+ c\, T^{1-b_2-b_2'}|Q|(2cr_1, 2cr_2).
\end{aligned}$$

Se T for escolhido de modo que

$$T^{1-b_2-b_2'} \le \frac{cr_2}{(2cr_2)^p \sum_{I_N} \tilde{Q}_{k,\ell,m}(2cr_1) + |Q|(2cr_1, 2cr_2)} \doteq A_2,$$

então temos que

$$\|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2.$$

Tomando $T = \min\{A_1{}^{1/(1-b_1-b_1')}, A_2{}^{1/(1-b_2-b_2')}\}$, concluímos o resultado. $\square$

O próximo resultado diz respeito ao item (ii).

Teorema 3.4.2. *A aplicação $\Gamma : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ é uma contração.*

Demonstração. Vamos provar que existe $T > 0$ para o qual exista $c \in (0,1)$ tal que

$$\|\Gamma(u_1,v_1) - \Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq c\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2}$$

para todo $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in B_1 \times B_2$.

Assim, dados $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in B_1 \times B_2$, temos pela definição do operador Γ que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma(u_1,v_1) - \Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} &= \|(\Gamma_1(u_1,v_1),\Gamma_2(u_1,v_1)) - (\Gamma_1(u_2,v_2),\Gamma_2(u_2,v_2))\|_{B_1\times B_2}\\
&= \|(\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2), \Gamma_2(u_1,v_1) - \Gamma_2(u_2,v_2))\|_{B_1\times B_2}\\
&= \|\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2)\|_{B_1} + \|\Gamma_2(u_1,v_1) - \Gamma_2(u_2,v_2)\|_{B_2}
\end{aligned}$$

Assim, vamos lidar inicialmente com a primeira parcela da soma acima. Sem perda de generalidade, omitiremos o somatório na definição de Γ_1. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2) &= \psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\left\{\partial_x^m u_1^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_1) - \partial_x^m u_2^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v_2)\right\}dt'\\
&\quad + \psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x[P(u_1,v_1) - P(u_2,v_2)]dt'\\
&\doteq I + II.
\end{aligned}$$

A parcela I pode ser estimada tal como no Teorema 2.4.1, o que nos leva ao seguinte

$$\begin{aligned}
\|I\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c\,T^{1-b_1+b_1'}\|u_2 - u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}} c^m P_{k,\ell,m}(2cr_2)\\
&\quad + c\,T^{1-b_1+b_1'}\|v_2 - v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2,2cr_2).
\end{aligned}$$

Para estimar II, observe o seguinte que

$$\begin{aligned}
P(u_1,v_1) - P(u_2,v_2) &= a[R(u_1) - R(u_2)] - b[R(v_1) - R(v_2)]\\
&= a[u_1^q - u_2^q] - b[v_1^q - v_2^q]\\
&= a[(u_1-u_2)R_{q-1}(u_1,u_2)] - b[(v_1-v_2)R_{q-1}(v_1,v_2)],
\end{aligned}$$

onde $R_{\lambda-1}$ é como no Capítulo 3, a saber

$$R_{\lambda-1}(x,y)=\sum_{i=1}^{\lambda}x^{i-1}y^{\lambda-i}$$

e satisfaz $x^\lambda-y^\lambda=(x-y)R_{\lambda-1}(x,y)$.

Assim, aplicando o Lema 2.3.2 e o Teorema 2.3.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|II\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\le \left\|\psi_{T/2}(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x[P(u_1,v_1)-P(u_2,v_2)]dt'\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\\
&\le \left\|\psi_{T/2}(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x[a(u_1-u_2)R_{q-1}(u_1,u_2)]dt'\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\\
&+ \left\|\psi_{T/2}(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x[b(v_1-v_2)R_{q-1}(v_1,v_2)]dt'\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\\
&\le c|a|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|\partial_x[(u_1-u_2)R_{q-1}(u_1,u_2)]\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}\\
&+ c|b|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|\partial_x[(v_1-v_2)R_{q-1}(v_1,v_2)]\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}\\
&\le c|a|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\,R_{q-1}\left(\|u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}},\|u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\right)\\
&+ c|b|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|v_1-v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\,R_{q-1}\left(\|v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}},\|v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\right)\\
&\le c|a|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\,R_{q-1}\left(2cr_1,2cr_1\right)\\
&+ c|b|\;T^{1-b_1+b_1'}\,\|v_1-v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\,R_{q-1}\left(2cr_2,2cr_2\right).
\end{aligned}$$

Logo, juntando as estimativas para I e II, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_1(u_1,v_1)-\Gamma_1(u_2,v_2)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \le{}& T^{1-b_1+b_1'}\,\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\,A_{11}\\
&+T^{1-b_1+b_1'}\,\|v_1-v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\,A_{12},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_{11}&=c\;R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}}c^mP_{k,\ell,m}(2cr_2)+c|a|R_{q-1}(2cr_1,2cr_1)\\
A_{12}&=c\;(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}c^m\sum_{i=1}^{d_P}R_{i-1}(2cr_2,2cr_2)+c|b|R_{q-1}(2cr_2,2cr_2).
\end{aligned}$$

Analogamente, como podemos escrever o seguinte

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(u_1,v_1)-\Gamma_2(u_2,v_2)={}&\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\left\{\partial_x^m v_1^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u_1)-\partial_x^m v_2^p Q_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u_2)\right\}dt'\\
&+\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x[Q(u_1,v_1)-Q(u_2,v_2)]dt'.
\end{aligned}$$

tem-se que

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma_2(u_1,v_1)-\Gamma_2(u_2,v_2)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq\, & T^{1-b_2+b_2'}\,\|v_1-v_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\,A_{21}\\
& + T^{1-b_2+b_2'}\,\|u_1-u_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\,A_{22},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= c\,R_{p-1}(2cr_2,2cr_2)\sum_{I_{N_3}} c^m \tilde{Q}_{k,\ell,m}(2cr_1) + c|d|R_{q-1}(2cr_2,2cr_2)\\
A_{22} &= c\,(2cr_2)^p \sum_{I_{N_3}} c^m \sum_{i=1}^{d_Q} R_{i-1}(2cr_1,2cr_1) + c|c|R_{q-1}(2cr_1,2cr_1).
\end{aligned}
$$

Juntando as informações acima, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma(u_1,v_1)-\Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq\, & \|u_2-u_1\|_{B_1}[T^{1-b_1+b_1'}A_{11}+T^{1-b_2+b_2'}A_{22}]\\
& + \|v_2-v_1\|_{B_2}[T^{1-b_1+b_1'}A_{12}+T^{1-b_2+b_2'}A_{21}],
\end{aligned}
$$

Escolhendo $T>0$ tal que

$$
T<\frac{1}{8}\min\left\{{A_{11}}^{-1/(1-b_1+b_1')}, {A_{12}}^{-1/(1-b_1+b_1')}, {A_{21}}^{-1/(1-b_2+b_2')}, {A_{22}}^{-1/(1-b_2+b_2')}\right\},
$$

temos que

$$
\|\Gamma(u_1,v_1)-\Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq \frac{1}{2}\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2},
$$

provando que a aplicação Γ é uma contração. □

Temos assim provado os itens (i) e (ii), restando mostrar a existência e unicidade de solução para o sistema (3.1.1)-(3.1.2) no espaço desejado, assunto que trataremos na seguinte seção.

3.5 Unicidade e Dependência Contínua do Dado Inicial

O fato de Γ ser contração, provado na seção anterior, implica, *a priori*, apenas na existência e unicidade de uma solução para o sistema (3.1.1)-(3.1.2) no espaço $C([-T,T],B_1)\times C([-T,T],B_2)$.

Para provar a existência de solução sobre $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$, precisamos de um fato já explorado no Capítulo 2, que corresponde ao mergulo de $X_\phi^{\sigma,s,b}$ em $C([-T,T],G^{\sigma,s})$ se $b>1/2$. Assim, em particular, a solução que provamos existir, (u,v), pertence ao espaço $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$, desde que supomos $b_1,b_2>1/2$.

Já para provar unicidade neste espaço, vamos lançar mão do Lema 2.5.1. Assim, supomos (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in C([-T, T], G^{\sigma,s}) \times C([-T, T], G^{\sigma,s})$, soluções do sistema (3.1.1)-(3.1.2). Então, temos que $\Gamma(u_1, v_1) = (u_1, v_1)$ e $\Gamma(u_2, v_2) = (u_2, v_2)$. Além disso, pelo Lema 2.5.1, temos que $\psi_{T/2} u_j \in X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}$ e $\psi_{T/2} v_i \in X_2^{\sigma-\epsilon,s,b_2}$.

Por outro lado, temos que

$$\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1, \psi_{\frac{T}{2}} v_1\right) = \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1, \psi_{\frac{T}{2}} v_1\right) \text{ and } \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2, \psi_{\frac{T}{2}} v_2\right) = \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2, \psi_{\frac{T}{2}} v_2\right).$$

Se B_j^ϵ corresponde a bola fechada de raio $2cr_j$ sobre $X_j^{\sigma-\epsilon,s,b_j}$, então usando as estimativas na Seção 5, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1, \psi_{\frac{T}{2}} v_1\right) - \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2, \psi_{\frac{T}{2}} v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon \times B_2^\epsilon} &= \left\|\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1, \psi_{\frac{T}{2}} v_1\right) - \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2, \psi_{\frac{T}{2}} v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon \times B_2^\epsilon} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1, \psi_{\frac{T}{2}} v_1\right) - \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2, \psi_{\frac{T}{2}} v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon \times B_2^\epsilon}.\end{aligned}$$

Portanto, $u_1 \equiv u_2$ e $v_1 \equiv v_2$ onde $\psi_{\frac{T}{2}} \equiv 1$, isto é, no intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, provando a unicidade de nosso problema sobre o espaço desejado.

Finalmente, para provar a dependência contínua dos dados iniciais, consideramos (u, v) e $(\tilde{u}, \tilde{v})$ soluções de (2.1.1) correspondendo aos dados iniciais (u_0, v_0) e $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, respectivamente. Então, obtemos que

$$\begin{aligned}\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{B_1 \times B_2} &\leq c\,\|(u_0 - \tilde{u}_0, v_0 - \tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}} \\ &\quad + (1/2)\,\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{B_1 \times B_2}\end{aligned}$$

e portanto

$$\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{B_1 \times B_2} \leq 2c\,\|(u_0 - \tilde{u}_0, v_0 - \tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}}.$$

Novamente, pela Observação 1.2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s} \times \mathcal{C}_{T,\sigma,s}} &\leq c\,\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{B_1 \times B_2} \\ &\leq c\,\|(u_0 - \tilde{u}_0, v_0 - \tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}},\end{aligned}$$

concluindo a prova do Teorema 3.1.1.

Capítulo

4

Boa postura para um Sistema do tipo Schrödinger-Korteweg de Vries

Neste capítulo, provaremos a boa postura para um sistema de equações do tipo Korteweg de Vries e Schrödinger. As técnicas a serem utilizadas seguem o mesmo roteiro apresentado nos Capítulos 2 e 3.

4.1 Introdução e Resultados

Considere o problema de valor inicial (PVI) para o sistema do tipo Schrödinger-KdV

$$\begin{cases} i\partial_t u + \displaystyle\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{\ell=0}^{N_1-k}\partial_x^k\left\{\sum_{m=0}^{N_1-k}\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\right\} + \sum_{j=1}^{N_1}u^{2j+1} + \sum_{j=1}^{N_2}a_j\,\partial_x^{2j}u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_3}\partial_x^k(Q_k(u,v)) + \sum_{j=1}^{N_4}b_j\,\partial_x^{2j+1}v = 0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

com dado inicial

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{4.1.2}$$

para $x, t \in \mathbb{R}$, com $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ funções reais, sendo $P_{k,\ell,m}$ um polinômio homogêneo, e os termos a_j and b_j números reais. Ademais, $Q_k(u,v)$ denota o seguinte polinômio

$$Q_k(u,v) = \alpha_k u^{2k} + \beta_k v^{2k},$$

sendo α_k e β_k números reais.

O sistema (4.1.1)-(4.1.2), quando visto fora de sua generalidade, engloba situações físicas que mostram fenômenos de interações entre ondas dispersivas curtas e longas, sendo estes fenômemos analisados quando se busca encontrar ondas viajantes.

Na literatura, podemos observar as seguintes situações especiais:

Situação 4.1.1. Em [12], é estudado o seguinte sistema

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha(uv) + \beta|u|^2 u, & u(x,0) = u_0(x) \\ \partial_t v + \partial_x^3 v + \frac{1}{2}\partial_x v^2 = \gamma\partial_x(|u|^2), & v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função complexa, $v = v(x,t)$ é uma função real e α, β e γ são constantes reais. Segundo [12], estes sistemas modelam interações entre ondas curtas, $u(x,t)$, e ondas longas, $v(x,t)$, e surgem na mecânica dos fluidos, bem como na física do plasma.

Em particular, no sistema (4.1.1), estamos considerando u e v funções reais. Além disso, para obter o sistema acima, basta considerar na primeira equação $N_1 = 1$, e lembrando neste caso que o termo não linear que envolve o polinômio $P_{k,\ell,m}$ é dado por

$$\begin{aligned} u^p P_{0,0,0}(v) + \partial_x u^p P_{0,0,1}(v) + u^p P_{0,1,0}(\partial_x v) + \partial_x u^p P_{0,1,1}(\partial_x v) \\ + \partial_x[u^p P_{1,0,0}(v) + \partial_x u^p P_{1,0,1}(v)]. \end{aligned}$$

Assim, escolhemos $\beta = -1$, e para $\alpha \neq 0$, escolhemos $P_{0,0,0}(x) = -\alpha x$ e os demais polinômios nulos. Além disso, $N_2 = 1$ e $a_1 = 1$. Para a segunda equação, escolhemos $N_3 = 1$, consequentemente $Q_1(u,v) = \gamma u^2 + \dfrac{1}{2}v^2$. Portanto, obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t u + uP_{0,0,0}(v) + u^3 + \partial_x^2 u = 0 \\ \partial_t v + \partial_x[Q_1(u,v)] + \partial_x^3 v = 0. \end{cases}$$

Situação 4.1.2. Em [2], é estudado o seguinte sistema

$$\begin{cases} i\partial_t f - \partial_x^4 f + |f|^2 f + \beta(fg) = 0 \\ \partial_t g - \partial_x^5 g + \frac{1}{2}\partial_x(|g|g) + \frac{1}{2}\beta\partial_x(|f|^2) = 0. \end{cases}$$

Esta é mais uma situação física na qual o sistema (4.1.1) engloba. Para ver isto, escolhemos $N_1 = 1$, $P_{0,0,0}(x) = \beta x$, desde que β seja não nulo, e demais polinômios nulos. Também, para $N_2 = 2$, escolhemos $a_1 = 0$ e $a_2 = -1$.

Já para a segunda equação, sendo $N_3 = 1$, consideramos $Q_1(u,v) = \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{2}v^2$ e, por fim, tomamos $N_4 = 2$, $b_1 = 0$ e $b_2 = -1$. Assim, obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t f + fP_{0,0,0}(g) + f^3 - \partial_x^4 f = 0 \\ \partial_t g + \partial_x[Q_1(f,g)] - \partial_x^5 g = 0. \end{cases}$$

Assim como a situação anterior, este sistema também representa interações entre ondas curtas e longas.

Novamente, as técnicas a serem apresentadas serão baseadas em [21]. Além disso, iremos fazer uso de muitos resultados provados nos capítulos anteriores, muitas notações serão preservadas e outras atenderão o novo contexto do presente capítulo.

Assim, o principal resultado a ser provado, que trata da boa postura do problema de valor inicial (4.1.1)-(4.1.2), para dados iniciais no espaços de Gevrey, é o seguinte:

Teorema 4.1.1. *Seja $s \geq 2N + 1/2$, onde $N = \max\{N_2, N_4\}$, assumindo $N_1, N_3 < N_2$ e $N_1, N_3 \leq N_4$. Para o dado inicial em $G^{\sigma,s} \times G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial* (4.1.1)-(4.1.2) *é bem posto no espaço $C([-T,T], G^{\sigma,s}) \times C([-T,T], G^{\sigma,s})$.*

Na próxima seção trataremos da formulação do problema em termos de equações integrais, que virão a definir um operador, o qual mostraremos satisfazer o princípio de contração sobre um suspespaço métrico completo dos espaços de Bourgain, definidos no Capítulo 1.

4.2 Noções Preliminares

Nesta seção vamos definir novas funções ϕ_1 e ϕ_2, obviamente distintas das definidas nos capítulos anteriores, bem como os respectivos operadores unitários, associados a elas, $U(t)$ e $W(t)$. Vimos que para isso, buscamos a solução formal para a parte linear do sistema (4.1.1), e cuja técnica demanda de ferramentas como a transformada de Fourier.

Com efeito, resolvendo o sistema (4.1.1)-(4.1.2), consideramos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} i\partial_t u + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_2} a_j \partial_x^{2j} u = 0 \\ \partial_t v + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_4} b_j\, \partial_x^{2j+1} v = 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

com dado inicial descrito em (4.1.2). Tomando a transformada de Fourier com respeito a x de (4.2.1), obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t \widehat{u}^x + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_2} a_j\, (i\xi)^{2j}\, \widehat{u}^x = 0 \\ \partial_t \widehat{v}^x + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_4} b_j\, (i\xi)^{2j+1}\, \widehat{v}^x = 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

cujo dado inicial correspondente é

$$\begin{cases} \widehat{u}^x(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{v}^x(\xi, 0) = \widehat{v}_0(\xi). \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Note que (4.2.2) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}^x - i \displaystyle\sum_{j=1}^{N_2} a_j \, (i\xi)^{2j} \, \widehat{u}^x = 0 \\ \partial_t \widehat{v}^x + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_4} b_j \, (i\xi)^{2j+1} \, \widehat{v}^x = 0. \end{cases}$$

Portanto, a solução para (4.2.2)-(4.2.3) é dada por

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^x(\xi,t) \\ \widehat{v}^x(\xi,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2} a_j \, i \, (i\xi)^{2j} t \right) \widehat{u}_0(\xi) \\ \exp\left(- \displaystyle\sum_{j=1}^{N_4} b_j (i\xi)^{2j+1} t \right) \widehat{v}_0(\xi) \end{bmatrix}. \tag{4.2.4}$$

Assim, se escrevermos

$$\phi_1(\xi) = \sum_{j=1}^{N_2} (-1)^{j+1} a_j \, \xi^{2j} \ \text{ e } \ \phi_2(\xi) = \sum_{j=1}^{N_4} (-1)^j \, b_j \, \xi^{2j+1}, \tag{4.2.5}$$

temos que (4.2.4) se reescreve por

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}^x(\xi,t) \\ \widehat{v}^x(\xi,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-it\phi_1(\xi)} \, \widehat{u}_0(\xi) \\ e^{-it\phi_2(\xi)} \, \widehat{v}_0(\xi) \end{bmatrix}. \tag{4.2.6}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa de Fourier com respeito a x em (4.2.6), obtemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} \, \widehat{u}_0(y) \, dy \doteq (S_t * u_0)(x) \\ v(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_2(y))} \, \widehat{v}_0(y) \, dy \doteq (T_t * v_0)(x), \end{aligned}$$

onde S_t e T_t são dados, respectivamente, por

$$S_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} dy \ \text{ e } \ T_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_2(y))} dy.$$

Definindo, portanto, os operadores $U(t)f \doteq S_t * f$ e $W(t)f \doteq T_t * f$, temos que o par (u,v), descrito abaixo, é a solução de (4.2.1)

$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(t)u_0 \\ W(t)v_0 \end{bmatrix}.$$

Recordamos que a notação $\{U(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ e $\{W(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ para o grupo unitário define a solução para o sistema linear PVI (4.2.1)-(4.2.2). Assim, o problema de Cauchy (4.1.1)-(4.1.2) é reescrito, pelo princípio de Duhamel, como a equação integral

$$
\begin{aligned}
u &= U(t)u_0 - \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{\ell=0}^{N_1-k}\sum_{m=0}^{N_1-k}\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}(t')\,dt' \\
&+ \sum_{j=1}^{N_1}\int_0^t U(t-t')u^{2j+1}(t')\,dt' \\
v &= W(t)v_0 + \sum_{k=1}^{N_3}\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[Q_k(u,v)](t')\,dt'.
\end{aligned}
$$

Assim, para um par (u, v) definimos formalmente os seguinte operadores

$$
\begin{cases}
\Gamma_1(u,v) \doteq \psi(t)U(t)u_0 + i\sum_{I_{N_1}}\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}dt' \\
\qquad + \sum_{j=1}^{N_1}\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\,u^{2j+1}(t')dt' \\
\Gamma_2(u,v) \doteq \psi(t)W(t)v_0 - \sum_{k=1}^{N_3}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[Q_k(u,v)](t')dt',
\end{cases}
\tag{4.2.7}
$$

sendo $I_{N_1} = \{(k,\ell,m) : 0 \le k \le N_1 \;\text{ e }\; 0 \le \ell, m \le N_1 - k\}$. Então, a existência e unicidade de uma solução local para o sistema (4.1.1)-(4.1.2) decorrerá do fato do mapa $(u,v) \mapsto (\Gamma_1(u,v), \Gamma_2(u,v))$, definido sobre um espaço métrico completo conveniente, ser uma contração.

Com objetivo de provar a propriedade de contração para o mapa descrito acima, usaremos os espaços de Bourgain, que com os pesos ϕ_1 e ϕ_2 adaptados às partes lineares das equações em (4.1.1), ganham notação especial, a saber: para $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$, escrevemos $X_1^{\sigma,s,b} = X_{\phi_1}^{\sigma,s,b}$ e $X_2^{\sigma,s,b} = X_{\phi_2}^{\sigma,s,b}$.

Note que o peso ϕ_2, definido neste capítulo, coincide com os pesos definidos nos Capítulos 2 e 3, o que não ocorre com o peso ϕ_1, que possui potências pares. Isso implica que precisamos estabelecer estimativas, análogas às provadas previamente, que estão vinculadas ao polinômio ϕ_1.

Além disso, observe que para provarmos o Teorema 2.3.1, lançamos mão apenas dos seguintes resultados: Lema 2.3.3, Lema 2.3.4, Lema 2.3.5, Lema 2.3.6, Lema 2.3.7, Lema 2.3.8, Lema 2.3.9 e Lema 2.3.10. Portanto, necessitamos apenas provar versões para estes lemas. Provados tais lemas, não demonstraremos uma versão para o Teorema 2.3.1, uma vez que a prova é exatamente igual a dada no Capítulo 2. Ainda, a demonstração dos lemas que seguem na seguinte seção são, em sua maior parte, similares às estabelecidas no Capítulo 2, porém demandam uma prova.

4.3 Estimativas sobre os Espaços de Bourgain

Para os lemas que seguem, cujas as provas foram adaptadas a partir de [21], vamos usar a seguinte notação: para uma função conveniente f, definimos F^1_ρ e F^2_ρ, via transformada de Fourier, por

$$\widehat{F^1_\rho}(\xi,\tau) = \frac{f(\xi,\tau)}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} \quad \text{e} \quad \widehat{F^2_\rho}(\xi,\tau) = \frac{f(\xi,\tau)}{(1+|\tau+\phi_2(\xi)|)^\rho}.$$

Mais especificamente, os resultados a serem apresentados fornecem controles sobre as normas mistas $L^p_x L^q_t$ para os termos acima.

Lema 4.3.1. *Seja $0 \le k \le N_1$. Se $\rho > 1/4$ e $N_2 - N_1 > 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ tal que*

$$\|A^{k/2}F^1_\rho\|_{L^4_x L^2_t} \le c\,\|f\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Demonstração. É possível mostrar, como no Capítulo 2, que

$$\|A^{k/2}F^1_\rho\|^2_{L^4_x L^2_t} \le \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi\right]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} |f(x,\tau)|^2 dx\, d\tau.$$

Logo, resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi \le c,\ \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Relembre que a definição de ϕ_1 que é dada por

$$\phi_1(\xi) = \sum_{j=1}^{N_2} (-1)^{j+1} a_j\, \xi^{2j}. \tag{4.3.1}$$

Se $\alpha_j = 2j(-1)^{j+1}a_j$, então

$$\phi_1'(\xi) = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j \xi^{2j-1}.$$

Sendo $0 \le k \le N_1$ e supondo x fora do conjunto de zeros de ϕ_1', temos

$$\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} = \frac{\left[|x|\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\right]^{2k}}{\left|\sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j x^{2j-1}\right|} \le \frac{|x|^{2N_1}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_1}}{\left|\sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j x^{2j-1}\right|} = \frac{\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_1}}{\left|\sum_{j=1}^{N_2} \alpha_j x^{2j-(2N_1+1)}\right|}.$$

Por hipótese, temos que $N_2 > N_1$ e, então, $2N_2 - (2N_1 + 1) > 0$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta)$ contenha todos os zeros de ϕ_1' e

$$\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} \leq M, \ \ \forall \ \ |x| > \delta.$$

Observe que $x = 0$ é uma raiz de ϕ_1. Temos dois casos a considerar: ϕ_1 tem pelo menos duas raízes reais diferente de zero ou ϕ_1 possui as demais raízes complexas.

Suponhamos que ϕ_1 possui pelo menos duas raízes diferentes de zero. Se os pontos em que ϕ_1' se anula é exatamente onde a função ϕ_1 possui seus máximos e mínimos locais, então sejam m_1, m_2, $\cdots$, m_n estes pontos.

Agora, há duas possibilidades, que dependem do sinal do coeficiente do termo de maior grau de ϕ_1, que é: ou o $\lim\limits_{\xi \to -\infty} \phi_1(\xi) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\xi \to -\infty} \phi_1(\xi) = -\infty$. Suponhamos que ocorra o primeiro caso. Neste caso, como o polinômio é de grau par, temos que é válido o seguinte:

$$\lim_{\xi \to +\infty} \phi_1(\xi) = +\infty$$

Desse modo, sejam $r_1 = \min\{\phi_1(m_i)\}$ e $r_2 = \max\{\phi_1(m_i)\} + 1$. Então existem R_1 e R_2, positivos, tais que $\phi_1(R_1) = r_1$ e $\phi_1(R_2) = r_2$.

Uma vez que τ tem apenas o efeito de deslocar o gráfico de ϕ_1 para cima ou para baixo na nova função $\tau + \phi_1(\xi)$, isso significa que os zeros de ϕ_1' também coincidem com os pontos de máximo e/ou mínimo da função $\tau + \phi_1(\xi)$.

Logo, considerando $R = \max\{R_1, \delta, R_2\}$, obtemos que os zeros de ϕ' bem como os máximos e mínimos de $\tau + \phi_1(\xi)$, independemente de τ (uma vez que a escolha de R também independe), estão contidos no intervalo $(-R, R)$ e, além disso, as oscilações de $\tau + \phi_1(\xi)$, estão contidas na faixa compreendida entre as retas $y = \tau - \phi_1(R)$ e $y = \tau + \phi_1(R)$.

A partir desta escolha para R, devidimos a seguinte integral

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi &= \int_{(-R,R)} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi + \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi \\ &\doteq I + II.\end{aligned}$$

De imediato, note que

$$I \leq \int_{B(0,R)} (1+|\xi|)^{2N} d\xi < \infty.$$

Por outro lado, efetuando a mudança de variável $\lambda = \tau + \phi_1(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned} II &= \int_{-\infty}^{R} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi + \int_{R}^{\infty} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi \\ &= \int_{\tau+\phi_1(-R)}^{\infty} \frac{(1+|\xi_1(\lambda)|)^{2k}}{\phi_1'(\xi_1(\lambda))} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}} d\lambda + \int_{\tau+\phi_1(R)}^{\infty} \frac{(1+|\xi_2(\lambda)|)^{2k}}{\phi_1'(\xi_2(\lambda))} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}} d\lambda. \end{aligned}$$

Agora, note que $\phi(-R) = \phi(R)$. Além disso, se $\lambda > \tau + \phi_1(R)$, então $\xi(\lambda) > R$. Então, em ambos os casos, têm-se $|\xi(\lambda)| > R$ e, portanto,

$$\frac{(1+|\xi(\lambda)|)^{2k}}{|\phi_1'(\xi(\lambda))|} \leq M.$$

Logo, como $4\rho > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} II &\leq M \left(\int_{\tau+\phi_1(-R)}^{\infty} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}} d\lambda + \int_{\tau+\phi_1(R)}^{\infty} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}} d\lambda \right) \\ &\leq 2M \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{4\rho}} d\lambda < \infty, \end{aligned}$$

provando a limitação desejada nesse caso.

A prova quando $\lim_{\xi \to -\infty} \phi_1(\xi) = -\infty$ segue por um argumento análogo.

Por outro lado, se houver zeros de ϕ_1' que não são pontos de máximo e mínimo locais de ϕ_1, procedemos de maneira análoga, separando a integral integral I sobre um intervalo $(-\widetilde{R}, \widetilde{R})$, com $\widetilde{R} > \delta$, de modo a conter todos os zeros do polinômio ϕ_1', ao mesmo tempo que, fora dele, tenha-se ϕ_1 uma bijeção.

Finalmente, no caso em que ϕ_1 possui apenas uma raiz real, $x = 0$, e as demais são complexas, considerando $R > 0$ suficientemente grande e procedendo de modo análogo obtém-se o requerido lema. □

Lema 4.3.2. *Para $\rho > 1/2$ e $s > \frac{1}{2} + k$. Então, existe uma constante c, dependendo somente de ρ, e s tal que*

$$\|A^{k-s} F_\rho^1\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \leq c \, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Análoga ao Lema 2.3.4. □

Lema 4.3.3. *Se $\rho > 1/2$ e $s \geq (2N+1)\rho + k$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s} F_\rho^1\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c \, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Como no Lema 2.3.5, podemos mostrar que

$$\|A^{k-s} F_\rho^1\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c \left\| \frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} \right\|_{L_{x,t}^\infty} \|f\|_{L_{x,t}^2},$$

restando apenas mostrar que

$$\left\| \frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} \right\|_{L^\infty_{x,t}} \le c.$$

Com efeito, podemos mostrar que

$$\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} \le \left[1 + \frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \right]^\rho.$$

Agora, se B é dada por

$$B(\xi) = \sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2}$$

então

$$|\phi_1(\xi)| \le \sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j} = (1+|\xi|)^{2N_2} \left[\sum_{j=1}^{N_2} |a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2} \right] \le (1+|\xi|)^{2N_2+1} B(\xi).$$

Portanto,

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \le (1+|\xi|)^{2N_2+1-\frac{s-k}{\rho}} B(\xi).$$

Por hipótese, temos que $s \ge (2N_2+1)\rho + k$, ou seja, $2N_2 + 1 - (s-k)/\rho \le 0$. Isto implica que $(1+|\xi|)^{2N_2+1-\frac{s-k}{\rho}} \le 1$ e, portanto,

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \le B(\xi).$$

Assim, resta estimar a função $B(\xi)$. Com efeito, note que

$$\lim_{\xi\to\infty} B(\xi) = |a_{N_2}|,$$

já que $2j \le 2N_2$. Logo, existe $\delta > 0$ para o qual $B(\xi) < M_1$, $\forall\ |\xi| \ge \delta$, para algum $M_1 > 0$ fixo.

Por outro lado, B é contínua e, então, limitada sobre $B(0,\delta)$. Logo, $B(\xi) < M_2$ para qualquer $x \in B(0,\delta)$. Assim, se $M = \max\{M_1, M_2\} > 0$, então

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} < M,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R},$$

provando a limitação desejada. $\square$

Além disso, temos que

Lema 4.3.4. *Seja $0 \leq k \leq N_1$. Se $\rho > 1/4$ e $N_4 - N_1 \geq 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2} F_\rho^2\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Lema 4.3.5. *Seja $0 \leq k \leq N_3$. Se $\rho > 1/4$ e $N_2 - N_3 > 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ tal que*

$$\|A^{k/2} F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2} \leq c\, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Dos lemas acima vem as hipóteses que encontramos no resultado principal apresentado neste capítulo, que são: $N_1, N_3 < N_2$ e $N_1, N_3 \leq N_4$. Decorre também destes os seguintes teoremas, cuja as demonstrações são análogas aos dos Teorema 2.3.1 e Teorema 2.3.2, apresentados no Capítulo 2.

Teorema 4.3.1. *Dado $N_1 \in \mathbb{N}$, sejam $0 \leq k \leq N_1$ e $0 \leq \ell \leq N_1 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1, b'_2 < -1/4$ e $s > (2N_1 + 1)\max\{b_1, b_2\} + N_1$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $u_1, \cdots, u_p \in X_1^{\sigma,s,b_1}$, $v_1, \cdots, v_q \in X_2^{\sigma,s,b_2}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_1 - k$, para $j = 1, \cdots, p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p, q, s, b_1, b_2 e b'_1 tal que*

$$\left\| \partial_x^k \left\{ \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_j \prod_{i=1}^{q} \partial_x^{\ell} v_i \right\} \right\|_{X_1^{\sigma,s,b'_1}} \leq c \prod_{j=1}^{p} \|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \prod_{i=1}^{q} \|v_i\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}. \tag{4.3.2}$$

Além disso, obtemos a versão para a qual trocamos os papéis entre os espaços X_1^{σ,s,b_1} e X_2^{σ,s,b_2}, bem como b_1, b'_1 e ϕ_1 por b_2, b'_2 e ϕ_2, respectivamente.

Teorema 4.3.2. *Dado $N_3 \in \mathbb{N}$, sejam $0 \leq k \leq N_3$ e $0 \leq \ell \leq N_3 - k$. Sejam $b_1, b_2 > 1/2$, $b'_1, b'_2 < -1/4$ e $s > (2N_3 + 1)\max\{b_1, b_2\} + N_3$. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, $u_1, \cdots, u_p \in X_2^{\sigma,s,b_2}$, $v_1, \cdots, v_q \in X_1^{\sigma,s,b_1}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_3 - k$, para $j = 1, \cdots, p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p, q, s, b_1, b_2, b'_1 e b'_2 tal que*

$$\left\| \partial_x^k \left\{ \prod_{j=1}^{p} \partial_x^{\alpha_j} u_j \prod_{i=1}^{q} \partial_x^{\ell} v_i \right\} \right\|_{X_2^{\sigma,s,b'_2}} \leq c \prod_{j=1}^{p} \|u_j\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \prod_{i=1}^{q} \|v_i\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}.$$

O próximo passo é provar que o mapa (Γ_1, Γ_2) é um contração sobre um subespaço métrico completo dos espaços de Bourgain, à luz das estimativas provadas até agora.

4.4 Existência de uma Solução

O leque de estimativas multilineares e lineares, provadas até agora, nos permitirão mostrar a existência de uma solução em $X_1^{\sigma,s,b_1} \times X_2^{\sigma,s,b_2}$ para o problema de valor inicial (4.1.1)-(4.1.2) por um argumento de contração. Para isto, denotamos

$$B_1 \doteq \{w \in X_1^{\sigma,s,b_1} : \|w\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1, \text{ onde } r_1 = \|u_0\|_{G^{\sigma,s}}\}$$
$$B_2 \doteq \{w \in X_2^{\sigma,s,b_2} : \|w\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2, \text{ onde } r_2 = \|v_0\|_{G^{\sigma,s}}\}.$$

Assim, para um par $(u,v) \in B_1 \times B_2$, definimos formalmente o operador

$$\Gamma(u,v) \doteq (\Gamma_1(u,v), \Gamma_2(u,v)). \tag{4.4.1}$$

Neste espaço produto, consideramos a norma da soma, isto é, se $(u,v) \in B_1 \times B_2$, então

$$\|(u,v)\|_{B_1 \times B_2} = \|u\|_{B_1} + \|v\|_{B_2},$$

e temos um espaço métrico completo com respeito a esta norma.

O próximo passo é provar que Γ pode ser escolhido de modo que sua imagem, tomando elementos de $B_1 \times B_2$, está contido em $B_1 \times B_2$, o que significa que existe $T > 0$ tal que $\Gamma(B_1 \times B_2) \subset B_1 \times B_2$.

Lema 4.4.1. *Existe um valor $T > 0$, tal que o operador Γ, definido em* (4.4.1)*, satisfaz: se $(u,v) \in B_1 \times B_2$, então $\Gamma(u,v) \in B_1 \times B_2$.*

Demonstração. Para $(u,v) \in B_1 \times B_2$, queremos mostrar que $\Gamma(u,v) \in B_1 \times B_2$, isto é, que $\Gamma_1(u,v) \in B_1$ e $\Gamma_2(u,v) \in B_2$.

De fato, temos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{B_1} \leq \|\psi(t)U(t)u_0\|_{B_1} + \sum_{I_{N_1}} \left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell v)\}dt'\right\|_{B_1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_1} \left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\; u^{2j+1}(t')dt'\right\|_{B_1}$$

As duas primeiras parcelas acima já foram provadas no Capítulo 3, exceto pela parcela que envolve o termo u^{2j+1}, cuja a estimativa segue pela aplicação do Lema 2.3.2 e, em seguida, do Teorema 4.3.1, como abaixo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N_1}\left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')u^{2j+1}(t')dt'\right\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} &\leq c\sum_{j=1}^{N_1} T^{1-b_1+b_1'}\|u^{2j+1}\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}\\ &\leq c\sum_{j=1}^{N_1} T^{1-b_1+b_1'}\;\|u\|^{2j+1}_{X_1^{\sigma,s,b_1}}.\end{aligned}$$

Logo, juntando as estimativas acima, obtemos

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq c\,r_1 + c\,T^{1-b_1-b_1'}\Big[(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)+\sum_{j=1}^{N_1}(2cr_1)^{2j+1}\Big].$$

Escolhendo $T>0$ tal que

$$T^{1-b_1+b_1'} \leq \frac{r_1}{(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha^m\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)+\sum_{j=1}^{N_1}(2cr_1)^{2j+1}} \doteq A_1,$$

temos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1.$$

Por outro lado, a partir do Lema 2.3.2 e Teorema 4.3.2, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma_2(u,v)\|_{B_2} &\leq \|\psi(t)W(t)v_0\|_{B_2}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{N_3}\left\|\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[Q_k(u,v)]dt'\right\|_{B_2}\\ &\leq c\,\|v_0\|_{G^{\sigma,s}}+c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=0}^{N_3}\|\partial_x^k[Q_k(u,v)]\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}\\ &\leq cr_2+c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=0}^{N_3}\Big(|\alpha_k|\|u\|^{2k}_{X_1^{\sigma,s,b_1}}+|\beta_k|\|v\|^{2k}_{X_2^{\sigma,s,b_2}}\Big)\\ &\leq cr_2+c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=0}^{N_3}|Q|_k(2cr_1,2cr_2).\end{aligned}$$

Assim, escolhendo $T>0$ satisfazendo

$$T^{1-b_2+b_2'} \leq \frac{r_2}{4\,c\,\sum_{k=0}^{N_3}|Q|_k(2cr_1,2cr_2)} \doteq A_2.$$

obtemos que

$$\|\Gamma_2(u,v)\|_{B_2} \leq 2cr_2.$$

Logo, para concluir a prova é suficiente tomar $T = \min\{{A_1}^{1/(1-b_1+b_1')}, {A_2}^{1/(1-b_2+b_2')}\}$ e obtemos que

$$\|\Gamma_1(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1 \ \text{ e } \ \|\Gamma_2(u,v)\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}} \leq 2cr_2,$$

ou seja, $\Gamma(u,v) \in B_1 \times B_2$, como queríamos provar. $\square$

Provaremos no próximo teorema a propriedade de contração para o operador Γ para algum $T > 0$.

Teorema 4.4.1. *A aplicação* $\Gamma : B_1 \times B_2 \to B_1 \times B_2$*, definida em* (4.4.1)*, é uma contração.*

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\|\Gamma(u_1,v_1) - \Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} = \|\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2)\|_{B_1} + \|\Gamma_2(u_1,v_1) - \Gamma_2(u_2,v_2)\|_{B_2}.$$

De maneira análoga ao Capítulo 3, a primeira parcela acima obedece a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2)\|_{B_1} \leq{}& c\,T^{1-b_1+b_1'}\|u_2-u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}} c^m \widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)\\ &+ c\,T^{1-b_1+b_1'}\|v_2-v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}(2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2,2cr_2)\\ &+ \sum_{j=1}^{N_1}\left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')(u_1^{2j+1}-u_2^{2j+1})dt'\right\|_{B_1}\end{aligned}$$

Observe que, para cada $j = 1, \cdots, N_1$, temos que $u_1^{2j+1} - u_2^{2j+1} = (u_1-u_2)R_{2j}(u_1,u_2)$, onde R_{2j} é o polinômio definido no Capítulo 2. Assim, podemos aplicar o Lema 2.3.2 e o Teorema 4.3.1 para obter

$$\begin{aligned}\left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')(u_1^{2j+1}-u_2^{2j+1})dt'\right\|_{B_1} &\leq c\,T^{1-b_1+b_1'}\|(u_1-u_2)R_{2j}(u_1,u_2)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1'}}\\ &\leq c\,T^{1-b_1+b_1'}\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} R_{2j}(2cr_1,2cr_1).\end{aligned}$$

Logo, as estimativas acima se resumem no seguinte

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1(u_1,v_1) - \Gamma_1(u_2,v_2)\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq{}& c\,T^{1-b_1+b_1'}\|u_2-u_1\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\Bigg[\sum_{j=1}^{N_1} R_{2j}(2cr_1,2cr_1)\\ &+ R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}} c^m\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)\Bigg]\\ &+ c\,T^{1-b_1+b_1'}\|v_2-v_1\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}} c^m\sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_2,2cr_2).\end{aligned}$$

Por outro lado, para a segunda parcela podemos reescrever o seguinte

$$\begin{aligned}\Gamma_2(u_1,v_1)-\Gamma_2(u_2,v_2) &= \sum_{k=1}^{N_3}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[Q_k(u_1,v_1)-Q_k(u_2,v_2)]dt'\\ &= \sum_{k=1}^{N_3}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[\alpha_k(u_1^2-u_2^2)+\beta_k(v_1^2-v_2^2)]dt'.\end{aligned}$$

Assim, fatorando $u_1^2-u_2^2$ e $v_1^2-v_2^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_2(u_1,v_1)-\Gamma_2(u_2,v_2) &= \sum_{k=1}^{N_3}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[\alpha_k(u_1-u_2)R_{2k-1}(u_1,u_2)]dt'\\ &+ \sum_{k=1}^{N_3}\psi_T(t)\int_0^t W(t-t')\partial_x^k[\beta_k(v_1-v_2)R_{2k-1}(v_1,v_2)]dt'.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_2(u_1,v_1)-\Gamma_2(u_2,v_2)\|_{B_2} &\le c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=1}^{N_3}[|\alpha_k|\|\partial_x^k[(u_1-u_2)R_{2k-1}(u_1,u_2)]\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}\\ &+|\beta_k|\|\partial_x^k[(v_1-v_2)R_{2k-1}(v_1,v_2)]\|_{X_2^{\sigma,s,b_2'}}]\\ &\le c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=1}^{N_3}[|\alpha_k|\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}R_{2k-1}(2cr_1,2cr_1)\\ &+|\beta_k|\|v_1-v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}R_{2k-1}(2cr_2,2cr_2)]\\ &\le c\,T^{1-b_2+b_2'}\sum_{k=1}^{N_3}[|\alpha_k|R_{2k-1}(2cr_1,2cr_1)\|u_1-u_2\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}}\\ &+|\beta_k|R_{2k-1}(2cr_2,2cr_2)\|v_1-v_2\|_{X_2^{\sigma,s,b_2}}].\end{aligned}$$

Assim, suponha

$$\begin{aligned}A_{11} &= c\,(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}}c^m\sum_{i=1}^{d_P}R_{i-1}(2cr_2,2cr_2)\\ A_{12} &= c\,4cr_2\sum_{k=1}^{N_3}|\beta_k|R_{2k-1}(2cr_2,2cr_2)\\ A_{21} &= c\,\sum_{j=1}^{N_1}R_{2j}(2cr_1,2cr_1)+R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}}c^m\widetilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_2)\\ A_{22} &= c\,4cr_2\sum_{k=1}^{N_3}|\alpha_k|R_{2k-1}(2cr_1,2cr_1).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\|\Gamma(u_1,v_1)-\Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2} \leq \|v_2-v_1\|_{B_2}&[T^{1-b_1+b_1'}A_{11}+T^{1-b_2+b_2'}A_{12}]\\ &+\|u_2-u_1\|_{B_1}[T^{1-b_1+b_1'}A_{21}+T^{1-b_2+b_2'}A_{22}].\end{aligned}$$

Escolhendo $T>0$ tal que

$$T<\frac{1}{8}\min\left\{{A_{11}}^{-1/(1-b_1+b_1')},{A_{12}}^{-1/(1-b_2+b_2')},{A_{21}}^{-1/(1-b_1+b_1')},{A_{22}}^{-1/(1-b_2+b_2')}\right\},$$

temos que

$$\|\Gamma(u_1,v_1)-\Gamma(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2}\leq\frac{1}{2}\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{B_1\times B_2},$$

provando que a aplicação Γ é uma contração. □

Como observamos já em capítulos anteriores, os resultados acima garantem a existência de solução para o sistema (4.1.1)-(4.1.2) no espaço $C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$. Na próxima seção, provaremos a unicidade, que também segue de técnicas já apresentadas.

4.5 Unicidade e Dependência Contínua do Dado Inicial

Para provar a unicidade da solução para o sistema (4.1.1)-(4.1.2), lançaremos mão de um resultado análogo ao Lema 2.5.1. A demonstração segue também de modo análogo. Além disso o mecanismo e técnica para provarmos a unicidade é a mesma apresentada nos capítulos prévios.

Lema 4.5.1. *Sejam $b>1/2$, $0<\epsilon<\sigma$ e suponha $s>2N+1/2$. Se $(u,v)\in C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$ satisfaz (4.1.1)-(4.1.2), então $\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}}$ e $\|\psi_{\frac{T}{2}}v\|_{X_2^{\sigma-\epsilon,s,b_2}}$ são finitos.*

Assim, supomos (u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in C([-T,T],G^{\sigma,s})\times C([-T,T],G^{\sigma,s})$, soluções do sistema (4.1.1)-(4.1.2). Então, temos que

$$\Gamma(u_1,v_1)=(u_1,v_1)\ \text{ e }\ \Gamma(u_2,v_2)=(u_2,v_2).$$

Além disso, pelo Lema 4.5.1, temos que $\psi_{T/2}u_j\in X_1^{\sigma-\epsilon,s,b_1}$ e $\psi_{T/2}v_i\in X_2^{\sigma-\epsilon,s,b_2}$. Por outro lado, temos que

$$\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)=\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)\ \text{ e }\ \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)=\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right).$$

Se B_j^ϵ corresponde a bola fechada de raio $2cr_j$ sobre $X_j^{\sigma-\epsilon,s,b_j}$, então usando as estimativas na Seção 5.5, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon} &= \left\|\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon}\\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_1,\psi_{\frac{T}{2}}v_1\right)-\left(\psi_{\frac{T}{2}}u_2,\psi_{\frac{T}{2}}v_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon\times B_2^\epsilon}.\end{aligned}$$

Portanto, $u_1\equiv u_2$ e $v_1\equiv v_2$ onde $\psi_{\frac{T}{2}}\equiv 1$, isto é, no intervalo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, provando a unicidade de nosso problema sobre o espaço desejado.

Finalmente, para provar a dependência contínua dos dados iniciais, consideramos (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$ soluções de (4.1.1) correspondendo aos dados iniciais (u_0,v_0) e $(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)$, respectivamente. Então, obtemos que

$$\begin{aligned}\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2} &\leq c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}}\\ &\quad+(1/2)\,\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}\leq 2c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}}.$$

Novamente, pela Observação 1.2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}\times\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} &\leq c\,\|(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})\|_{B_1\times B_2}\\ &\leq c\,\|(u_0-\tilde{u}_0,v_0-\tilde{v}_0)\|_{G^{\sigma,s}\times G^{\sigma,s}},\end{aligned}$$

concluindo a prova do Teorema 4.1.1.

Capítulo

5

Boa postura para a equação do tipo Benjamin-Ono

Neste capítulo provaremos a boa postura para uma equação do tipo Benjamin-Ono. As técnicas a serem utilizadas seguem o mesmo roteiro apresentado nos capítulos anteriores. A gama de aplicações físicas recai em modelos no estudo da evolução de ondas internas de crista longa em sistemas com dois fluidos e também em aproximações de onda longa à equação de onda de água.

5.1 Introdução e Resultados

Considere o problema de valor inicial (PVI) para a equação do tipo Benjamin-Ono

$$\partial_t u + \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=1}^{N_2} a_k \, \mathcal{H}\partial_x^{2k} u + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, \partial_x^{2k+1} u = 0 \quad (5.1.1)$$

$x, t \in \mathbb{R}$, com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (5.1.2)$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função real. Além disso, $P_{k,\ell,m}$ denota um polinômio homogêneo, os termos a_k e b_k são números reais, com b_{N_2} não nulo e $p \in \mathbb{N}$. Aqui, $\mathcal{H}$ denota a transformada de Hilbert, definida no Capítulo 1, em (1.1.1).

Esta equação geral vem de [21] e contempla a equação de Benjamin-Ono, a qual foi estudada, por exemplo, em [4] e [29], em outros contextos. Em particular, em [24], a equação aparece da seguinte forma

$$\partial_t u + u\partial_x u - \mathcal{H}(\partial_x^2 u) + \partial_x u - \tau \partial_x^3 u = 0,$$

e é importante na descrição da evolução de ondas internas de crista longa em sistemas com dois fluidos.

De fato a equação acima é um caso particular de (5.1.1), pois, como vimos em (2.1.4), o termo não linear em (5.1.1), para $N_1 = 1$, é dado por

$$u^p P_{0,0,0}(u) + \partial_x u^p P_{0,0,1}(u) + u^p P_{0,1,0}(\partial_x u) + \partial_x u^p P_{0,1,1}(\partial_x u) \\ + \partial_x [u^p P_{1,0,0}(u) + \partial_x u^p P_{1,0,1}(u)].$$

Assim, supondo $p = 1$ e escolhendo todos os polinômios nulos, exceto por $P_{0,0,1}(x) = x$, obtemos o termo não linear $u\partial_x u$. Os demais termos são obtidos escolhendo $N_2 = 1$, $a_1 = -1$, $b_0 = 1$ e $b_1 = -\tau$.

O fato relevaldo na técnica utilizada para provar a boa postura para o problema (5.1.1)-(5.1.2) é que não há necessidade de pedirmos os termos $a_k's$ não nulos. Sobre essa possibilidade, isto é, considerando $a_k = 0$, para $k = 1, \cdots, N_2$, estamos também resolvendo um problema de boa postura para o seguinte problema de valor inicial

$$\partial_t u + \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \partial_x^k \left\{ \sum_{m=0}^{N_1-k} \partial_x^m u^p P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u) \right\} + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, \partial_x^{2k+1} u = 0,$$

com dado inicial

$$u(x,0) = u_0(x).$$

A consequência deste fato nos leva a uma gama de situações físicas como as citadas em [21] e outras mais. De fato, começando com a equação estudada em [22]

$$\partial_t u + u^p \partial_x u + \partial_x^3 u = 0,$$

para $p \in \mathbb{N}$, a qual é inserida em (5.1.1) pela escolha $N_1 = N_2 = 1$, $P_{0,1,0}(x) = x$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ e $a_1 = 0$. Com derivadas de ordem maior, a equação de Kawahara, apresentada em [25], dada por

$$\partial_t u + \frac{3}{2} u \partial_x u + \alpha \partial_x^3 u - \beta \partial_x^5 u = 0,$$

onde α e β, que podem ser positivos ou negativos, são as constantes que representam os efeitos de dispersão, também pode ser obtida a partir de (5.1.1). Com efeito, para $p = 1$, escolhendo $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = \alpha$, $b_2 = -\beta$ e, por fim, tomando $P_{0,1,0}(x) = 3x/2$ e os demais polinômios nulos.

Podemos representar não linearidades mais complexas, como as que aparecem na equação apresentada em [28]

$$\partial_t u - \partial_x^5 u = c_1 \partial_x u \partial_x^2 u + c_2 \partial_x (u \partial_x^2 u) + c_3 \partial_x u^3$$

sendo α, c_1, c_2, c_3 constantes reais com $\alpha \neq 0$. Esta equação surge no contexto de aproximações de onda longa à equação de onda de água.

Para isso note que o termo não linear de (5.1.1) quando $N_1 = 2$ e $p = 1$ é o seguinte

$$\begin{gathered} uP_{0,0,0}(u) + \partial_x uP_{0,0,1}(u) + \partial_x^2 uP_{0,0,2}(u) + uP_{0,1,0}(\partial_x u) \\ +\partial_x uP_{0,1,1}(\partial_x u) + \partial_x^2 uP_{0,1,2}(\partial_x u) + uP_{0,2,0}(\partial_x^2 u) + \partial_x uP_{0,2,1}(\partial_x^2 u) + \partial_x^2 uP_{0,2,2}(\partial_x^2 u) \\ +\partial_x[uP_{1,0,0}(u) + \partial_x uP_{1,0,1}(u) + \partial_x^2 uP_{1,0,2}(u)] \\ +\partial_x[uP_{1,1,0}(\partial_x u) + \partial_x uP_{1,1,1}(\partial_x u) + \partial_x^2 uP_{1,1,2}(\partial_x u)] \\ +\partial_x^2[uP_{2,0,0}(u) + \partial_x uP_{2,0,1}(u) + \partial_x^2 uP_{2,0,2}(u)]. \end{gathered}$$

Assim, supondo $N_2 = 2$, basta tomar $b_0 = b_1 = a_1 = a_2 = 0$, $b_2 = 1$, e escolhendo os polinômios $P_{0,2,1}(x) = c_1 x$, $P_{1,0,2}(x) = c_2 x$, $P_{0,0,1}(x) = 3c_3 x^2$ (este último foi considerado para descrever o termo $c_3\partial_x u^3$, que é reescrito por $c_3 u^2 \partial_x u$) e os demais polinômios nulos. Ressaltamos que a escolha para os polinômios podem não ser únicas para obter a equação acima.

Outras equações estudadas na literatura podem representar (5.1.1)

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \alpha\partial_x^5 u + \beta\partial_x^3 u + \gamma\partial_x u + \mu\partial_x u^k = 0 && \text{ver [36]} \\ &\partial_t u + \alpha\partial_x^7 u + \beta\partial_x^5 u + \gamma\partial_x^3 u + \tfrac{1}{2}\partial_x u^2 = 0 && \text{ver [35]} \\ &\partial_t u + u\partial_x u + u^2\partial_x u + \partial_x^3 u = 0 && \text{ver [30]} \\ &\partial_t u + 45u^2\partial_x u - 15\partial_x u\partial_x^2 u - 15u\partial_x^3 u + \partial_x^5 u + \partial_x^5 u = 0 && \text{ver [34]} \\ &\partial_t u + \tfrac{3}{2}u\partial_x u + \tfrac{1}{4}\partial_x(\partial_x u)^2 - \tfrac{1}{2}\partial_x^2(u\partial_x u) + \tfrac{1}{6}\partial_x^3 u + \tfrac{2}{30}\partial_x^5 u = 0 && \text{ver [13] - [33].} \end{aligned}$$

Por fim, a partir de [13] e [33], têm-se a seguinte equação de ordem 7

$$\begin{gathered} \partial_t u + \tfrac{3}{2}u\partial_x u + \tfrac{1}{4}\partial_x(\partial_x u)^2 - \tfrac{1}{2}\partial_x^2(u\partial_x u) + \tfrac{1}{6}\partial_x^3 u + \tfrac{2}{30}\partial_x^5 u - \tfrac{17}{360}\partial_x^7 u + \tfrac{1}{6}\partial_x(\partial_x u\partial_x^3 u) \\ -\tfrac{1}{6}\partial_x^2(u\partial_x^3 u) - \tfrac{1}{6}\partial_x^4(u\partial_x u) + \tfrac{1}{2}\partial_x(u(\partial_x u)^2) - \tfrac{1}{2}\partial_x^2(u^2\partial_x u) = 0, \end{gathered}$$

para a qual deve ser considerado $N_1 = N_2 = 3$.

A gama de modelos no qual (5.1.1) é vasta e o principal resultado provado neste capítulo para esta equação é o seguinte:

Teorema 5.1.1. *Seja $s \geq 2N + 1/2$, onde $N = \max\{N_1, N_2\}$. Para o dado inicial em $G^{\sigma,s}$, existe um $T > 0$, tal que o problema de valor inicial* (5.1.1)-(5.1.2) *é bem posto no espaço $C([-T,T], G^{\sigma,s})$.*

O conjunto $C([-T,T], G^{\sigma,s})$ denota o espaço de funções contínuas do tempo $[-T,T]$ em $G^{\sigma,s}$, isto é, para cada $t \in [-T,T]$, a função $u(\cdot,t) \in G^{\sigma,s}$ e $u(\cdot,t)$ contínua.

Na próxima seção formularemos o problema de Cauchy, (5.1.1)-(5.1.2), em termos de uma equação integral, a qual é obtida a partir do Princípio de Duhamel, e definirá o operador que provaremos satisfazer a propriedade de contração.

5.2 Noções Preliminares

Com o objetivo de resolver a equação (5.1.1)-(5.1.2), consideramos sua parte linear, que é dada por

$$\partial_t u + \sum_{k=1}^{N_2} a_k \, \mathcal{H}\partial_x^{2k} u + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, \partial_x^{2k+1} u = 0, \tag{5.2.1}$$

com dado inicial descrito em (5.1.2). Tomando a transformada de Fourier com respeito a x de (5.2.1), obtemos

$$\partial_t \widehat{u}^x + \sum_{k=1}^{N_2} a_k \, (-i\text{sign}(\xi))(i\xi)^{2k} \; \widehat{u}^x + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, (i\xi)^{2k+1} \widehat{u}^x = 0, \tag{5.2.2}$$

cujo dado inicial correspondente é

$$\widehat{u}^x(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi). \tag{5.2.3}$$

Portanto, a solução para (5.2.2)-(5.2.3) é dada por

$$\widehat{u}^x(\xi, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{N_2} -a_k \, i\text{sign}(\xi) \; (i\xi)^{2k} t + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \, (i\xi)^{2k+1} t \right) \widehat{u}_0(\xi) \tag{5.2.4}$$

Escrevendo

$$\phi_1(\xi) = \sum_{k=1}^{N_2} (-1)^k a_k \xi |\xi|^{2k-1} + \sum_{k=0}^{N_2} b_k \xi (i\xi)^{2k}, \tag{5.2.5}$$

temos que (5.2.4) se reescreve por

$$\widehat{u}^x(\xi, t) = e^{-it\phi_1(\xi)} \; \widehat{u}_0(\xi). \tag{5.2.6}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa de Fourier com respeito a x em (5.2.6), obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} \; \widehat{u}_0(y) \; dy \doteq (S_t * u_0)(x),$$

onde S_t é dado por

$$S_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(xy - t\phi_1(y))} dy.$$

Definindo, portanto, o operador $U(t)f \doteq S_t * f$, temos que o par u, descrito abaixo, é a solução de (5.2.1)

$$u(x,t) = U(t)u_0.$$

Recordamos que a notação $\{U(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ para o grupo unitário define a solução para a equação linear PVI (5.2.1)-(5.1.2).

Assim, o problema de Cauchy (5.1.1)-(5.1.2) é reescrito em termos da sua equação integral

$$u = U(t)u_0 - \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{\ell=0}^{N_1-k} \sum_{m=0}^{N_1-k} \int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}(t')\, dt'.$$

Como nos demais capítulos, introduziremos uma função de corte na equação acima: seja ψ uma função real na variável t com as seguintes propriedades

$$\text{(i)} \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{(ii)} \quad \psi \equiv 1 \text{ on } [-1,1], \quad \text{(iii)} \quad \operatorname{supp}\psi \subset [-2,2].$$

Também, para $\delta > 0$, seja $\psi_\delta(t) \doteq \psi(t/\delta)$. Finalmente, para um par u definimos formalmente o seguinte operador

$$\Gamma(u) \doteq \psi(t)U(t)u_0 - \sum_{I_{N_1}} \psi_T(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}dt', \tag{5.2.7}$$

sendo $I_{N_1} = \{(k,\ell,m) : 0 \le k \le N_1 \;\text{ e }\; 0 \le \ell, m \le N_1 - k\}$. Então, a existência e unicidade de uma solução local para o PVI (5.1.1)-(5.1.2) decorrerá do fato do mapa $u \mapsto \Gamma(u)$, definido sobre um espaço métrico completo conveniente, ser uma contração.

Com objetivo de provar a propriedade de contração para o mapa descrito acima, vamos considerar os Espaços de Bourgain, cuja notação usada será $X_1^{\sigma,s,b} = X_{\phi_1}^{\sigma,s,b}$.

Como feito nos capítulos anteriores, o passo inicial é provar que Γ é um contração sobre B_1, a bola fechada de $X_1^{\sigma,s,b} = X_{\phi_1}^{\sigma,s,b}$ de raio $2cr_1$, onde $r_1 = \|u_0\|_{G^{\sigma,s}}$. Para isso, passamos por estimativas sobre o operador Γ, como as que seguem

$$\|\psi(t)U(t)u_0\|_{X_1^{\sigma,s,b}}$$
$$\left\|\psi_T(t)\int_0^t U(t-t')\partial_x^k\{\partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\}dt'\right\|_{X_1^{\sigma,s,b}}.$$

Contudo, estas são obtidas por aplicações do Lemas 2.3.1 e do Lema 2.3.2. Portanto, basta estimar o termo $\partial_x^k\{\partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)$, para a qual vimos ser suficiente o seguinte

$$\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^p \partial_x^{\alpha_j} u_j \prod_{i=1}^q \partial_x^\ell v_i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b'}} \le c \prod_{j=1}^p \|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b}} \prod_{i=1}^q \|v_i\|_{X_1^{\sigma,s,b}}.$$

A técnica para provar a estimativa acima é a mesma usada na prova do Teorema 2.3.1, a qual lançou mão de resultados prévios, como o Lema 2.3.3, Lema 2.3.4 e Lema 2.3.5. Na próxima seção trataremos de provar resultados análogos a estes, uma vez que o peso ϕ_1 difere neste capítulo dos apresentados nos demais.

5.3 Estimativas sobre os Espaços de Bourgain

Baseado em [21], provaremos estimatitvas com respeito as normas mistas dos espaços de Lebesgue, definidos no Capítulo 1, referente a função $F_\rho^1(\xi,\tau)$, definida via transformada de Fourier por

$$\widehat{F_\rho^1}(\xi,\tau) = \frac{f(\xi,\tau)}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}.$$

Muitos passos nas demonstrações a seguir serão omitidos pois são análogos aos utilizados no Lema 2.3.3, Lema 2.3.4 e Lema 2.3.5, como já observado.

Lema 5.3.1. *Seja $0 \le k \le N_1$. Se $\rho > 1/4$ e $N_2 - N_1 \ge 0$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ, tal que*

$$\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2} \le c\, \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Inicialmente, pela identidade de Plancherel, temos que

$$\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_t^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(1+|\xi|)^{k/2} \frac{|f(\xi,\tau)|}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho} d\xi \right|^2 d\tau.$$

A partir disso é possível mostrar que

$$\|A^{k/2}F_\rho^1\|_{L_x^4 L_t^2}^2 \le \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi \right]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} |f(x,\tau)|^2 dx\, d\tau.$$

Para concluir a prova, resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{4\rho}} d\xi \le c, \ \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, recorde a definição de ϕ_1 que é dada por

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \sum_{j=1}^{N_2} (-1)^j a_j\, \xi|\xi|^{2j-1} + \sum_{j=0}^{N_2} (-1)^j b_j\, \xi^{2j+1} \\ &= \operatorname{sign}(\xi)\ \sum_{j=1}^{N_2} (-1)^j a_j\, \xi^{2j} + \sum_{j=0}^{N_2} (-1)^j b_j\, \xi^{2j+1}. \end{aligned}$$

Além disso, note que além de ϕ_1 ser uma função ímpar, é também um polinômio de grau ímpar, a saber: $2N_2+1$.

Uma vez que $0 \leq k \leq N_1$ e $N_1 \leq N_2$ e supondo $x > 0$ fora dos zeros de ϕ_1', obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} &\leq \frac{\left[|x|\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\right]^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j\ x^{2j-1}+\sum_{j=0}^{N_2}\tilde{b}_j x^{2j}\right|} \\
&\leq \frac{|x|^{2N_2}\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j\ x^{2j-1}+\sum_{j=0}^{N_2}\tilde{b}_j x^{2j}\right|} \\
&= \frac{\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{2N_2}}{\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N_2}\tilde{a}_j\ x^{2j-2N_2-1}+\sum_{j=0}^{N_2}\tilde{b}_j x^{2j-2N_2}\right|} \longrightarrow \frac{1}{|\tilde{b}_{N_2}|},
\end{aligned}$$

quando $|x| \longrightarrow \infty$. O mesmo vale para $x < 0$.

Desse modo, temos que o termo $(1+|x|)^{2k}/|\phi_1'(x)|$ é limitado para x suficientemente grande. Assim, existe $\delta > 0$ de tal modo que $(-\delta, \delta)$ contenha os zeros de ϕ_1' e tal que

$$\frac{(1+|x|)^{2k}}{|\phi_1'(x)|} \leq M, \ \ \forall \ \ |x| > \delta.$$

Dessa parte para frente, a prova segue as ideias apresentadas no Lema 2.3.6. □

Lema 5.3.2. *Para $\rho > 1/2$ e $s > \frac{1}{2} + k$. Então, existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^\infty L_t^\infty} \leq c\ \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. A prova é análoga ao do Lema 2.3.4. □

Lema 5.3.3. *Se $\rho > 1/2$ e $s \geq (2N+1)\rho + k$, então existe uma constante c, dependendo somente de ρ e s, tal que*

$$\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\ \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}.$$

Demonstração. Como no Lema 2.2.5, podemos mostrar que

$$\|A^{k-s}F_\rho^1\|_{L_x^2 L_t^\infty} \leq c\ \left\|\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right\|_{L_{x,t}^\infty} \|f\|_{L_{x,t}^2}.$$

Logo, é suficiente mostrar que

$$\left\|\frac{(1+|\tau|)^\rho}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^\rho}\right\|_{L_{x,t}^\infty} \leq c.$$

Com efeito, temos que

$$\frac{(1+|\tau|)^{\rho}}{(1+|\xi|)^{s-k}(1+|\tau+\phi_1(\xi)|)^{\rho}} \leq \left[1+\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}}\right]^{\rho}.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}|\phi_1(\xi)| &\leq \sum_{j=1}^{N_2}|a_j|(1+|\xi|)^{2j}+\sum_{j=0}^{N_2}|b_j|(1+|\xi|)^{2j+1}\\ &= (1+|\xi|)^{2N_2+1}\left[\sum_{j=1}^{N_2}|a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2-1}+\sum_{j=0}^{N_2}|b_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2}\right]\\ &= (1+|\xi|)^{2N_2+1}B(\xi),\end{aligned}$$

onde

$$B(\xi)=\sum_{j=1}^{N_2}|a_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2-1}+\sum_{j=0}^{N_2}|b_j|(1+|\xi|)^{2j-2N_2}.$$

Logo,

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} \leq (1+|\xi|)^{2N_2+1-\frac{s-k}{\rho}}B(\xi) \leq B(\xi),$$

pois $s \geq (2N_2+1)\rho+k$, ou seja, $2N_2+1-(s-k)/\rho \leq 0$. Mas, B satisfaz

$$\lim_{\xi\to\infty} B(\xi)=|b_{N_2}|,$$

e, então, existe $\delta>0$ tal que $|B(\xi)| \leq M_1$ para todo $|x| \geq \delta$, para algum $M_1>0$. Por outro lado, B é contínua, logo limitada sobre $B(0,\delta)$, isto é, $|B(\xi)| \leq M_2$, para todo $|x|<\delta$, para algum $M_2>0$. Logo

$$\frac{|\phi_1(\xi)|}{(1+|\xi|)^{\frac{s-k}{\rho}}} < M, \ \ \forall \ \xi \in \mathbb{R},$$

se $M=\max\{M_1,M_2\}>0$ e isso encerra a prova. □

Teorema 5.3.1. *Dado $N_1 \in \mathbb{N}$, sejam $0 \leq k \leq N_1$ e $0 \leq \ell \leq N_1-k$. Sejam $b>1/2$, $b'<-1/4$ e $s>(2N_1+1)b+N_1$. Sejam $p,q \in \mathbb{N}$, $u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q \in X_1^{\sigma,s,b}$ e $0 \leq \alpha_j \leq N_1-k$, para $j=1,\cdots,p$. Então existe uma constante c dependendo somente de p,q,s,b e b' tal que*

$$\left\|\partial_x^k\left\{\prod_{j=1}^{p}\partial_x^{\alpha_j}u_j\prod_{i=1}^{q}\partial_x^{\ell}v_i\right\}\right\|_{X_1^{\sigma,s,b'}} \leq c\prod_{j=1}^{p}\|u_j\|_{X_1^{\sigma,s,b}}\prod_{i=1}^{q}\|v_i\|_{X_1^{\sigma,s,b}}.$$

Demonstração. A prova é análoga ao Teorema 2.3.1 e segue do Lema 5.3.1, Lema 5.3.2 e Lema 5.3.3. □

5.4 Existência de uma Solução

O objtivo dessa seção é provar a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (5.1.1)-(5.1.2) sobre um subespaço do espaço de Bourgain. Como já mencionado, o espaço em questão é

$$B_1 \doteq \{w \in X_1^{\sigma,s,b_1} : \|w\|_{X_1^{\sigma,s,b_1}} \leq 2cr_1, \ \text{ onde } \ r_1 = \|u_0\|_{G^{\sigma,s}}\}.$$

Formalmente, para um par $u \in B_1$, definimos

$$\Gamma(u) = \psi(t)U(t)u_0 - \sum_{I_{N_1}} \psi_T(t) \int_0^t U(t-t')\partial_x^k \{\partial_x^m u P_{k,\ell,m}(\partial_x^\ell u)\} dt'. \tag{5.4.1}$$

O próximo passo é provar que Γ está bem definido e, em seguida, que Γ_1 satisfaz a propriedade da contração para algum $T > 0$. Assim, temos:

Lema 5.4.1. *Existe um valor positivo T tal que o operador Γ, definido em* (5.4.1)*, é tal que se $u \in B_1$, então $\Gamma(u) \in B_1$.*

Demonstração. Seja $(u, v) \in B_1 \times B_2$. Procedendo como no Lema 2.4.1, obtemos a partir das aplicações do Lema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 5.3.1 que

$$\|\Gamma(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b}} \leq c\, r_1 + c\, T^{1-b-b'}(2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} \tilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_1).$$

Escolhendo $T > 0$ tal que

$$T^{1-b+b'} \leq \frac{r_1}{(2cr_1)^p \sum_{I_{N_1}} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha^m \tilde{P}_{k,\ell,m}(2cr_1)},$$

temos que

$$\|\Gamma(u,v)\|_{X_1^{\sigma,s,b}} \leq 2cr_1,$$

como queríamos provar. $\square$

Teorema 5.4.1. *A aplicação $\Gamma : B_1 \to B_1$ é uma contração.*

Demonstração. Queremos provar que existe $0 < c < 1$ tal que

$$\|\Gamma(u) - \Gamma(v)\|_{B_1} \leq c\, \|u - v\|_{B_1}.$$

De maneira análoga ao Capítulo 2, no Teorema 2.4.1, pelas aplicações do Lema 2.3.1, Lema 2.3.2 e Teorema 5.3.1, obtemos que

$$\|\Gamma(u)-\Gamma(v)\|_{B_1} \le c\, T^{1-b+b'}\|u-v\|_{X_1^{\sigma,s,b}}\Big[R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}} c^m P_{k,\ell,m}(2cr_1)$$
$$+(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_1,2cr_1)\Big].$$

Assim, escolhendo $T>0$ tal que

$$T^{1-b+b'} < \frac{1}{2\Big[R_{p-1}(2cr_1,2cr_1)\sum_{I_{N_1}} c^m P_{k,\ell,m}(2cr_1)+(2cr_1)^p\sum_{I_{N_1}} c^m \sum_{i=1}^{d_P} R_{i-1}(2cr_1,2cr_1)\Big]},$$

temos que

$$\|\Gamma(u)-\Gamma(v)\|_{B_1} \le \frac{1}{2}\|u-v\|_{B_1},$$

provando que a aplicação Γ é uma contração. □

Desde que Γ é uma contração, segue que Γ possui um unico ponto fixo u em B_1, o qual é a única solução para o problema de valor inicial (5.1.1)-(5.1.2). Como mencionado na Observação 1.2.1, o espaço $X_\phi^{\sigma,s,b}$ é mergulhado continuamente em $C([-T,T],G^{\sigma,s})$ se $b>1/2$, e portanto o par $u\in C([-T,T],G^{\sigma,s})$, mas isso não implica na unicidade sobre no espaço $C([-T,T],G^{\sigma,s})$. Este é o assunto da próxima seção.

5.5 Unicidade e Dependência Contínua do Dado Inicial

Para provar a unicidade da solução para o equação (5.1.1)-(5.1.2), provaremos um resultado análogo ao Lema 2.5.1. A sua demonstração também segue de modo análogo. Além disso o mecanismo e técnica para provarmos a unicidade é a mesma apresentada nos capítulos prévios.

Lema 5.5.1. *Seja $b>1/2$, $s>2N+1/2$ e $0<\epsilon<\sigma$. Se $u\in C([-T,T],G^{\sigma,s})$ satisfaz (5.1.1)-(5.1.2), então $\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b}}$ é finito.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.1 e Lema 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned}\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b}} &= \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2\sigma}(1+|\xi|)\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda^b(\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t))|^2 dtd\xi\\ &\le c\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 dtd\xi\\ &+ c\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}e^{2(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_t[\psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t)]|^2 dtd\xi.\end{aligned}$$

Diferenciando com respeito a t o segundo termo, temos que

$$\frac{2}{T}\psi'_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t) + \psi_{\frac{T}{2}}(t)i\phi_1(\xi)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u(\xi,t) + \psi_{\frac{T}{2}}(t)e^{i\phi_1(\xi)t}\mathcal{F}_x u_t(\xi,t).$$

e recordando a definição de ϕ_1, em (5.2.5), temos que

$$|i\phi_1(\xi)e^{i\phi_1(\xi)t}| \le c\,(1+|\xi|)^{2N_2+1}.$$

Usando propriedades do suporte de ψ, obtemos que

$$\begin{aligned}\|\psi_{\frac{T}{2}}u\|_{X_1^{\sigma-\epsilon,s,b}} \le c\,T \sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} + c \sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} \\ + c\,T \sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s+2N_2+1}} + c\,T \sup_{-T\le t\le T}\|u_t(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}}.\end{aligned}$$

O último termo, contendo u_t, é finito pois estamos supondo (u,v) uma solução de (2.1.1). Os restantes termos são finitos uma vez que

$$\begin{aligned}\sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s}} &= \sup_{-T\le t\le T}\|(1+|\xi|)^s e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\ &\le c \sup_{-T\le t\le T}\|(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\ &= c \sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma,s}} \\ &= c\,|u|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} < \infty.\end{aligned}$$

Também, verifica-se que

$$\begin{aligned}\sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma-\epsilon,s+2N_2+1}} &= \sup_{-T\le t\le T}\|(1+|\xi|)^{s+2N_2+1}e^{(\sigma-\epsilon)(1+|\xi|)}\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\ &= \sup_{-T\le t\le T}\|(1+|\xi|)^s e^{\sigma(1+|\xi|)}[(1+|\xi|)^{s+2N_2+1}e^{-\epsilon(1+|\xi|)}]\,\widehat{u}(\cdot,t)\|_{L^2_\xi} \\ &\le c \sup_{-T\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{G^{\sigma,s}} \\ &= c\,|u|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} < \infty,\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Como visto na Observação 1.2.1, temos uma solução em $C([-T,T],G^{\sigma,s})$ do problema de Cauchy (5.1.1)-(5.1.2), que *a priori* não é única. O Lema 5.5.1 implicará a unicidade.

De fato, vamos supor u_1, $u_2 \in C([-T,T],G^{\sigma,s})$, duas soluções de (5.1.1)-(5.1.2). Então, pelo Lema 5.5.1, temos que $\psi_{T/2}u_j \in X_1^{\sigma-\epsilon,s,b}$, para $j=1,2$.

Então

$$\Gamma(u_1) = u_1 \ \text{ e } \ \Gamma(u_2) = u_2. \tag{5.5.1}$$

Por outro lado, por (5.2.7), temos que

$$\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1\right) = \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1\right) \ \text{ e } \ \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2\right) = \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2\right).$$

Se B_1^ϵ corresponde a bola fechada de raio $2cr_1$ sobre $X_1^{\sigma-\epsilon,s,b}$, então usando as estimativas na Seção 5.4, obtemos que

$$\begin{aligned}\left\|\psi_{\frac{T}{2}} u_1 - \psi_{\frac{T}{2}} u_2\right\|_{B_1^\epsilon} &= \left\|\Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1\right) - \Gamma\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\left(\psi_{\frac{T}{2}} u_1\right) - \left(\psi_{\frac{T}{2}} u_2\right)\right\|_{B_1^\epsilon}.\end{aligned}$$

Portanto, $u_1 \equiv u_2$ onde $\psi_{\frac{T}{2}} \equiv 1$, isto é, no intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, provando a unicidade de nosso problema sobre o espaço desejado.

Finalmente, para provar a dependencia contínua dos dados iniciais, consideramos u e $\tilde{u}$ soluções de (5.1.1) correspondendo aos dados iniciais u_0 e $\tilde{u}_0$, respectivamente. Logo

$$\|u - \tilde{u}\|_{B_1} \leq c\, \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{G^{\sigma,s}} + (1/2)\, \|u - \tilde{u}\|_{B_1}$$

e portanto

$$\|u - \tilde{u}\|_{B_1} \leq 2c\, \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{G^{\sigma,s}}.$$

Novamente, pela Observação 1.2.1, obtemos que

$$|u - \tilde{u}|_{\mathcal{C}_{T,\sigma,s}} \leq c\, \|u - \tilde{u}\|_{B_1} \leq c\, \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{G^{\sigma,s}},$$

concluindo a prova do Teorema 5.1.1.

Referências Bibliográficas

[1] Alarcon, E., Angulo, J., Montenegro, J.F., *Stability instability of solitary waves for a nonlinear dispersive system*, Nonlinear Analysis, 1999, pp. 1015-1035.

[2] Álvarez-Caudevilla, P., Colorado, E., Falebo, Rasiel., *A higher order system of some coupled nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries equations*, Journal of Mathematical Physics, 2017.

[3] Benedek, A., Panzone, R., *The spaces L^p, with mixed norm*, Duke Mathematical Journal, 28, 1961, nº3, 1961, pp. 301-324.

[4] Benjamin, T. B., *A new kind of solitary wave*, Journal of Fluid Mechanics, 1992, vol. 245, pp. 401-411.

[5] Bona, J. L., Cohen, J., Wang, G., *Global well-posedness for a system of KDV-type Equations with coupled quadratic nonlinearities*, Nagoya Mathematical Journal, 2014, pp. 67-149.

[6] Bona, J. L., Ponce, G., Saut, J., Tom, M. M., *A model system for strong interaction between internal solitary waves*, Communications in Mathematical Physics, 1992, 143, pp. 287-313.

[7] Bourgain, J., *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I. Schröndiger equations*, Geometric and Functional Analysis, 1993, pp. 107-156.

[8] Bourgain, J., *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations II. The KdV-equation*, Geometric and Functional Analysis, 1993, pp. 209-262.

[9] Brezis, H., *Functional Analysis, Sololev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2010.

[10] Carvajal, X., Panthee, M., *Sharp well-posedness for a coupled system of mKdV type equations*, Journal of Evolution Equations, 2019, 1167-1197.

[11] Corcho, A., Panthee, M., *Global well-posedness for a coupled modified KdV system*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series 43(1), 2012, pp. 27-57.

[12] Corcho, A., Linares, F., *Well-posedness for the Schrödinger-Korteweg-de Vries system*, American Mathematical Society, Vol. 359, Number 9, 2007, pp. 4089-4106.

[13] Craig, W., Groves, M. D., *Hamiltonian long-wave approximations to the water-wave problem*, Wave Motion, 19(4), 1994, pp. 367-389.

[14] Duoandikoetxea, J., *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2000.

[15] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, 2^{nd} edition, American Mathematical Society, 1998.

[16] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, 2^{nd} edition, John Wiley and Sons, 1999.

[17] Gear, J. A., *Strong interactions between solitary waves belonging to different wave modes*, Studies in Applied Mathematics, 1985, 72, pp. 95-124.

[18] Gear, J. A., Grimshaw, R., *Weak and strong interactions between internal solitary waves*, Studies in Applied Mathematics, 1984, 70, pp. 235-258.

[19] Ginibre, J., Tsutsumi, Y., Velo, G., *On the Cauchy problem for the Zakharov system* Journal of Functional Analysis, 151(2), 1997, pp. 384-436.

[20] Grimshaw, R., *Evolution equations for long, nonlinear internal waves in stratified shear flows*, Applied Mathematics, 1981, 65, pp. 159-188.

[21] Grujić, Z., Kalisch, H., *Gevrey regularity for a class of water-wave models*, Nonlinear Analysis, 2009, pp. 1160-1170.

[22] Grujić, Z., Kalisch, H., *Local well-posedness of the generalized Kortweg-de Vries equation in spaces of analytic functions*, Differential and Integral Equations, 2002, vol. 15, pp. 1325-1334.

[23] Hounie, J. G., *Teoria Elementar das distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[24] Kalisch, H., *Derivation and comparison of model equations for interfacial capillary-gravity waves in deep water*, Mathematics and Computers in Simulation, 74, 2007, pp 168-178.

[25] Kawahara, T., *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, Journal of the Physical Society of Japan, 33, 1972, pp. 260-264.

[26] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Mathematical Journal , 71(1), 1993, pp. 1-21.

[27] Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L., *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana University Mathematics Journal, 40, 1991, pp. 33-69.

[28] Kenig, C. E., Pilod, D., *Well-podesness for the fifth-order KdV equation in the energy space*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 367, number 4, 2015, pp. 2551-2612.

[29] Koop, C. G., Butler, G., *An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system*, Journal of Fluid Mechanics, 1981, vol. 112, pp. 225-251.

[30] Lee, C. Y., Beardsley, R. C., *The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow*, Journal of Geophysical Research, 1974, vol. 79, pp. 453-462.

[31] Linares, F., Ponce, G., *Introduction to nonlinear dispersive equations*, 2^{nd} edition, Springer-Verlag, 2015, NewYork.

[32] Oh, T., *Diophantine conditions in global well-posedness for coupled KdV-type systems*, Electronic Journal of Differential Equations, 2009, vol. 52, pp. 48.

[33] Olver, P. J., *Hamiltonian and non-Hamiltonian models for water waves*, em Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics, 1983, Lecture Notes in Physics, vol. 195, Springer, Berlin, 1984, pp. 273-290.

[34] Sawada, K., Kotera, T., *A method for finding N-soliton solutions of the KdV equation and KdV-like equation*, Progress of Theoretical Physics, 1974, vol. 51, pp. 1355-1367.

[35] Tian, C., *Well-Posedness of a Seventh-Order Shallow Water Wave Equation*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, vol. 8, number 14, 2013, pp. 653-665.

[36] Zhanga, Z., Liub, Z., Suna, M., Lia, S., *Well-posedness and unique continuation property for the solutions to the generalized Kawahara equation below the energy space*, Applicable Analysis, vol. 97, number 15, 2018, pp. 2655-2685.