



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

# Três resultados de sistemas dinâmicos em dimensões baixas

*Filipe Balduino Pires Fernandes*

Orientador: *Benito Frazão Pires*

Co-orientador: *Francisco Braun*

São Carlos  
Dezembro de 2020

# Três resultados de sistemas dinâmicos em dimensões baixas

*Filipe Balduino Pires Fernandes*

Orientador: *Benito Frazão Pires*

Co-orientador: *Francisco Braun*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para  
o título de Doutor em Matemática.

São Carlos  
Dezembro de 2020



---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Filipe Balduino Pires Fernandes, realizada em 18/12/2020.

**Comissão Julgadora:**

*Benito Frazão Pires*

Prof. Dr. Benito Frazão Pires (USP)

*Francisco Braun*

Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCar)

*Tiago de Carvalho*

Prof. Dr. Tiago de Carvalho (USP)

*Rafael Andres Rosales Mitrowsky*

Prof. Dr. Rafael Andres Rosales Mitrowsky (USP)

*Ricardo Miranda Martins*

Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins (UNICAMP)

*“Tudo isso está muito bem dito, mas devemos cultivar nosso jardim” -Cândido.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Benito Frazão Pires, e ao meu coorientador Francisco Braun por todo apoio e dedicação neste trabalho. Agradeço à banca pelas sugestões e correções deste trabalho. Também agradeço à minha família, amigos e aos funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar envolvidos em todo esse processo. Por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

# Abstract

This work contains three independent results that can be framed within the research area named low-dimensional dynamics. The first result is a lower bound for the maximal number of inseparable leaves of non-singular polynomial foliations of the plane. The second consists in a new class of counter-examples to the Real Jacobian Conjecture. The third is a switched server system with a Cantor attractor.

# Resumo

Este trabalho contém três resultados independentes que podem ser enquadrados dentro da área denominada dinâmica em dimensões baixas. O primeiro resultado é uma cota inferior para o número máximo de folhas inseparáveis de folheações polinomiais não-singulares no plano. O segundo consiste em uma nova classe de contraexemplos para a conjectura Jacobiana real. O terceiro é um switched server system com atrator de Cantor.

---

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Folheações Polinomiais do Plano</b>	<b>5</b>
1.1 Definições e Resultados Preliminares . . . . .	5
1.2 Estimativas para $s(n)$ . . . . .	10
<b>2 Contraexemplos mais simples para a conjectura Jacobiana real</b>	<b>17</b>
2.1 A Construção dos Exemplos . . . . .	17
<b>3 Um switched server system semiconjugado a uma IET minimal</b>	<b>22</b>
3.1 Switched Server Systems . . . . .	22
3.2 Transformações de Intercâmbio de Intervalos (IETs) . . . . .	28
3.2.1 Transformações de Poincaré de IETs . . . . .	29
3.2.2 IETs auto-similares . . . . .	33
3.3 O Modelo Isométrico . . . . .	38
3.3.1 Lema de Redução . . . . .	39
3.3.2 A Aplicação $S$ . . . . .	41
3.4 Contrações por Partes . . . . .	45
<b>Bibliografia</b>	<b>54</b>

# Lista de Figuras

1.1	Folhas inseparáveis. . . . .	6
1.2	Hamiltoniano de $(x^2 - 1)e^{-y}$ . . . . .	8
1.3	Algumas órbitas de $F$ e $TF$ . . . . .	10
1.4	Níveis de $\tilde{p}$ e $p$ ( $\text{grau}(H_p) = 4$ ). . . . .	16
1.5	Níveis de $\tilde{p}$ e $p$ ( $\text{grau}(H_p) = 7$ ). . . . .	16
3.1	O switched server system, o pseudo bilhar e a aplicação de Poincaré. . . . .	23
3.2	Partição de $\partial\Delta$ . . . . .	26
3.3	Parametrização de $\partial\Delta$ . . . . .	27
3.4	O gráfico de $g = g_{u,\ell}$ . . . . .	50

# Lista de Tabelas

3.1	Análise numérica de $x'_i$ . . . . .	40
3.2	Análise numérica e itinerário de $c_i$ . . . . .	40
3.3	Análise numérica de $y'_i$ . . . . .	43
3.4	Análise numérica de $d'_i$ . . . . .	44
3.5	Itinerário de $d'_i$ . . . . .	44

---

# Introdução

Nesta tese apresentamos três resultados independentes dentro da área de sistemas dinâmicos. No primeiro deles, apresentamos uma cota inferior para o número de folhas inseparáveis de folheações polinomiais não-singulares no plano. No segundo construímos uma nova classe de contraexemplos para a conjectura Jacobiana real que possui o exemplo de menor grau conhecido até agora. Já no último trabalho, apresentamos a construção de um switched server system semiconjugado a uma IET minimal.

Um dos resultados iniciais relacionados ao primeiro trabalho dessa tese foi obtido no início da década de 40 por W. Kaplan. Ele publicou dois artigos sobre famílias regulares de curvas que cobrem o plano, ver [25] e [26]. Essas famílias de curvas aparecem naturalmente no âmbito das equações diferenciais: o conjunto das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias planar sem pontos singulares que possui a propriedade de unicidade local forma uma família de curvas que folheia o plano. Em particular, os sistemas polinomiais sem singularidades possuem essa propriedade.

Esses sistemas foram estudados por L. Markus em [33]. Em seu artigo, o autor mostra que, a menos de equivalência topológica, a quantidade de sistemas é finita se limitarmos pelo grau. Além disso uma estimativa assintótica para essa quantidade em relação ao grau do sistema é obtida. Um passo importante para demonstrar tal resultado é determinar a quantidade máxima de folhas inseparáveis  $s(n)$  que um sistema de grau  $n$  pode ter. A estimativa obtida nesse artigo é  $n \leq s(n) \leq 6n$ . Outros resultados importantes obtidos nesse artigo mostram que, em certo sentido, esse é o ambiente correto para se estudar essas famílias de curvas. Mais precisamente, se trocarmos a hipótese de sistema polinomial por analítico, ou se trocarmos  $\mathbb{R}^2$  por  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , ou se trocarmos equivalência topológica por conjugação, obtemos uma quantidade não-enumerável de classes de equivalência.

Ao longo do tempo, as estimativas para  $s(n)$  foram melhoradas. M-P. Muller em [35] mostrou que  $s(n) \leq 2n$ . S. Schecter e M.F. Singer em [47], desconhecendo o resultado de M-P. Muller, redemonstraram que  $s(n) \leq 2n$  e também mostraram que  $s(n) \geq 2n - 4$  para todo  $n \geq 4$  par. Já no trabalho de X. Jarque e J. Llibre [24], os autores mostram que  $s(n) \geq 2n - 4$  para todo  $n \geq 4$ , não somente para  $n$  par. Neste trabalho, eles também estudam a estabilidade desses campos em termos de número de folhas inseparáveis. Mais

precisamente, eles mostraram que se um sistema polinomial cordal planar de grau  $n$  for estruturalmente estável, então  $n$  será par e a quantidade de folhas inseparáveis pertencerá ao conjunto  $\{0, 4, 6, \dots, n\}$ . Nesse sentido, este resultado mostra a raridade dos sistemas com muitas folhas inseparáveis. Para alguns valores específicos de  $n$  se sabe exatamente o valor de  $s(n)$ : é fácil mostrar que  $s(0) = s(1) = 0$ , e por consequência da classificação dos sistemas de graus 2 e 3 obtemos que  $s(2) = s(3) = 3$  ver [11] e [20].

Um dos resultados novos obtidos neste trabalho e que será demonstrado no primeiro capítulo foi uma melhor estimativa para  $s(n)$ :

$$s(n) \geq 2n - 1 \text{ para todo } n \geq 4.$$

Para esse fim, construiremos para cada  $n \geq 4$ , um sistema que possui  $2n - 1$  folhas inseparáveis. De fato, esses sistemas pertencem a uma classe especial, pois são todos Hamiltonianos. Definindo  $s_H(n)$  como sendo a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um campo polinomial cordal Hamiltoniano de grau  $n$  pode ter, mostraremos que

$$s_H(n) \geq 2n - 1 \text{ para todo } n \geq 4.$$

Como o conjunto dos campos polinomiais Hamiltonianos cordais de grau  $n$  é um subconjunto dos campos polinomiais cordais de grau  $n$ , concluímos que  $2n - 1 \leq s_H(n) \leq s(n)$ . Este resultado é o principal resultado do artigo “New lower bounds for the maximal number of inseparable leaves of nonsingular polynomial foliations of the plane” publicado em 2020, ver [6].

Já o segundo resultado está relacionado com a conjectura Jacobiana real. Essa conjectura afirmava que um difeomorfismo local polinomial  $F = (p, q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  deveria ser invertível. Ela foi provada falsa por meio da construção de uma classe de contraexemplos, as *aplicações de Pinchuk*, construídos por Pinchuk em seu célebre artigo [40]. Uma aplicação de Pinchuk  $F = (p, q)$  é tal que o polinômio  $p$  é sempre o mesmo polinômio, e o polinômio  $q$  varia como a soma de um polinômio fixado e outro que satisfaz uma equação diferencial adequada. O grau de  $p$  é 10 e o menor grau possível de  $q$  em uma aplicação de Pinchuk é 25 [10].

Com o intuito de entendermos o cerne do problema da injetividade global de difeomorfismos polinomiais locais, seria interessante encontrar um contraexemplo mais simples para a conjectura Jacobiana real. Nessa direção surge naturalmente uma pergunta: Qual é o menor grau possível para um contraexemplo para essa conjectura? Uma primeira resposta para esse problema foi dada por J. Gwoździewicz em [22]. Ele mostrou que qualquer difeomorfismo local polinomial  $F = (f, g)$  com  $\deg(f) \leq 3$  e  $\deg(g) \leq 3$  é um difeomorfismo global (e portanto não é um contraexemplo para a conjectura). F. Braun e R. dos Santos melhoraram esse resultado em [5], mostrando

que apenas se  $\deg(f) \leq 3$  então  $F$  é um difeomorfismo global. Já em [7], F. Braun e B. Okamoto provaram esse mesmo resultado para o caso em que  $\deg(f) = 4$ . Um passo importante na demonstração desses dois últimos resultados, foi a classificação das submersões polinomiais de graus 3 e 4, respectivamente. Curiosamente, no processo da classificação das submersões polinomiais de grau 5, que até a data da apresentação desta tese ainda está incompleto, surgiu o primeiro exemplo de campo Hamiltoniano de grau 4 com 7 folhas inseparáveis, mostrando que  $s_H(4) \geq 7$ , exemplo que foi a motivação e inspiração para a realização do primeiro trabalho dessa tese. Por fim, um recente resultado relacionado com a pergunta proposta nesse parágrafo foi dado novamente por J. Gwoździwicz em [23]. Nesse artigo ele mostra que se  $\deg(f) \leq 5$  e  $\deg(g) \leq 6$ , não há contraexemplo.

Por outro lado, até o atual momento não se conhecia nenhuma outra classe de contraexemplos para a conjectura Jacobiana real. No Capítulo 2 construímos uma nova família que generaliza a construção de Pinchuk a menos de automorfismos triangulares. Dentro dessa família de exemplos, o polinômio  $p$  é o mesmo da construção de Pinchuk, mas agora é possível tomar  $q$  com grau 15, exemplo mais simples conhecido até então. Esse resultado pode ser encontrado em [17].

Já o último resultado contido nesta tese é baseado no modelo switched server system, que é usado em modelagem de produção, tráfego e filas. Esse modelo, proposto por Chase, Serrano e Ramadage em [12] tem sido estudado desde o início de 1990. Nesse artigo, os autores mostraram que a menos de um conjunto de medida nula de parâmetros, o sistema é estruturalmente estável e admite uma quantidade finita de ciclos limites que atraem todas as órbitas.

Como será apresentado, a transformação de Poincaré de um switched server system é conjugada a uma contração  $\frac{1}{2}$ -afim por partes. Com isso, avanços no entendimento de contrações por partes podem trazer novos resultados envolvendo o modelo proposto. Nessa direção, por consequência do trabalho apresentado por Nogueira, Pires e Rosales em [38], conclui-se o mesmo resultado mencionado no parágrafo anterior, porém para uma classe ainda mais ampla de parâmetros. Dessa discussão surge uma pergunta natural: é possível encontrar parâmetros de modo que o sistema não possua ciclos limites? Até agora não apresentamos argumentos favoráveis a uma resposta negativa. Contudo, Pires em [42] mostra, dentre outras coisas, que existem contrações  $\frac{1}{2}$ -afim por partes com um “gap” sem órbitas periódicas. Para adaptar essa demonstração para o nosso contexto, é necessário obter uma 4-IET  $T$  minimal, unicamente ergódica, com 4 flips e 3 descontinuidades  $0 < x_1 < x_2 < x_3$  satisfazendo  $T(x_2) < T(0) < T(x_3) < T(x_1)$ . Esse passo é complexo, pois Nogueira provou em [36] que genericamente IETs com flips não são minimais. Apesar disso, apresentamos no Capítulo 3, uma IET  $T$  com tais propriedades e

com isso encontramos parâmetros para o sistema, satisfazendo as seguintes propriedades:

- a) O switched server system não possui órbitas periódicas;
- b) a aplicação de Poincaré do switched server system é topologicamente semiconjugada a  $T$ ;
- c) o  $\omega$ -limite de qualquer ponto do plano de fase do sistema é um conjunto de Cantor.

Além disso, obtivemos a frequência com que cada tanque estava conectado ao servidor. Os resultados mencionados foram publicados em [18].

# Capítulo 1

## Folheações Polinomiais do Plano

Neste capítulo estudaremos os *sistemas polinomiais cordais planares*. Para tanto, faremos uma pequena conexão com a teoria de folheações, e definiremos o conceito de *folhas inseparáveis*. Por fim, daremos estimativas para a função  $s(n)$  que é a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um sistema polinomial cordal planar pode ter.

### 1.1 Definições e Resultados Preliminares

Nesta seção, introduziremos as definições iniciais e alguns teoremas que utilizaremos ao longo do capítulo, e também faremos uma pequena relação com conceitos da teoria folheações.

**Definição 1.1.** Dizemos que um campo vetorial planar

$$(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

é **não singular** ou **cordal** se  $(f_1(x, y), f_2(x, y)) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , é **polinomial** se  $f_1$  e  $f_2$  forem polinômios, e é **Hamiltoniano** se existir uma função  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p_x = -f_2$  e  $p_y = f_1$ . No último caso denotamos o campo por  $H_p$ .

O termo “cordal” pode não parecer muito natural em um primeiro momento, contudo em um campo vetorial cordal de classe  $C^r$ , as órbitas desse campo são variedades diferenciais de dimensão 1, parecendo cordas, justificando esta denominação. Veremos que essa família de órbitas constitui uma folheação de dimensão 1 em  $\mathbb{R}^2$ , conforme a seguinte definição:

**Definição 1.2.** Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $m$ . Uma **folheação** de dimensão  $p$  de  $M$  de classe  $C^r$  é uma decomposição de  $M$  em uma união disjunta de subconjuntos

conexos  $\mathcal{F} = \{l_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , chamados **folhas**, com a seguinte propriedade: existe uma vizinhança  $U$  de cada ponto de  $M$  e uma carta de classe  $C^r$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que para cada folha  $l_\alpha$  as componentes de  $U \cap l_\alpha$  são descritas pelas equações  $x_{p+1} = \text{constante}, \dots, x_m = \text{constante}$ .

De fato, considerando um campo de vetores cordal planar de classe  $C^r$  e definindo por  $\phi$  o fluxo por esse campo, dados  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva transversal de classe  $C^r$  por  $p$  com  $f(0) = p$ , por consequência do teorema do fluxo tubular,  $F(t, u) = \phi(t, f(u))$  é um difeomorfismo local de classe  $C^r$ . Observemos que a descrição das órbitas por meio do difeomorfismo  $F$  é dada por  $u = \text{constante}$ . Assim concluímos que as órbitas desse campo induzem uma folheação no plano.

**Definição 1.3.** Seja  $F$  um campo vetorial planar cordal localmente Lipschitz e  $\mathcal{F}$  a folheação induzida por  $F$ . Dizemos que  $l_1$  e  $l_2 \in \mathcal{F}$  são **inseparáveis** ou  $l_1$  é **inseparável** de  $l_2$  se para quaisquer duas transversais  $m_1$  e  $m_2$  por  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente, existir  $l_3 \in \mathcal{F}$  de modo que  $l_3 \cap m_1 \neq \emptyset$  e  $l_3 \cap m_2 \neq \emptyset$ . Diremos simplesmente que  $l_1$  é **inseparável**, se existir  $l_2$  de modo que  $l_1$  e  $l_2$  são inseparáveis.

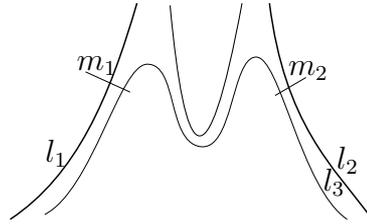


Figura 1.1: Folhas inseparáveis.

Podemos justificar a denominação “inseparável” considerando o espaço quociente  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$ . Um espaço topológico é chamado Hausdorff se dados dois pontos existem vizinhanças disjuntas desses pontos, ou seja, que os “separam”. Já a negação disso é que existem dois pontos tais que a intersecção de quaisquer vizinhanças desses dois pontos é não vazia. Na seguinte proposição, denotaremos por  $[l]$  a classe de equivalência de  $l \in \mathcal{F}$  em  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$ .

**Proposição 1.4.** *Seja  $F$  um campo vetorial planar cordal localmente Lipschitz e  $\mathcal{F}$  a folheação induzida por  $F$ , então  $l_1$  e  $l_2 \in \mathcal{F}$  são inseparáveis se e somente se quaisquer vizinhanças de  $[l_1]$  e  $[l_2]$  no espaço quociente  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  possui intersecção não vazia.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $l_1$  e  $l_2$  sejam inseparáveis e consideremos as vizinhanças  $B_1$  e  $B_2$  de  $[l_1]$  e  $[l_2]$ . Pela definição de topologia quociente  $\pi^{-1}(B_1)$  e  $\pi^{-1}(B_2)$  são abertos de  $\mathbb{R}^2$  e contém  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente. Consideremos duas transversais por  $l_1$  e  $l_2$  contidas

em  $\pi^{-1}(B_1)$  e  $\pi^{-1}(B_2)$  respectivamente. Desse modo, pela definição de inseparáveis, existe uma terceira folha  $l_3$  que intersecta ambas as transversais. Sendo assim  $[l_3] \in B_1 \cap B_2$ . Reciprocamente, sejam  $t_1$  e  $t_2$  duas transversais abertas por  $l_1$  e  $l_2$ . Afirmamos que o conjunto das folhas que passam por cada uma das transversais é aberto. De fato, seja  $A_i$  o conjunto de todas as folhas que passam por  $t_i$  e seja  $p \in A_i$ . Temos  $p = \phi_t(q)$  para algum  $q$  pertencente à transversal. Como  $\phi_t$  é contínua, tomando uma vizinhança suficientemente pequena de  $q$  contida em  $A_i$  (garantida pelo teorema do fluxo tubular), segue pela continuidade do fluxo que sua imagem inversa por  $\phi_t$  é uma vizinhança de  $p$  contida em  $A_i$ . Observemos que pela definição de  $A_i$ ,  $\pi^{-1} \circ \pi(A_i) = A_i$ , logo  $\pi(A_1)$  e  $\pi(A_2)$  são abertos em  $\mathbb{R}^2/\mathcal{F}$  que contém  $[l_1]$  e  $[l_2]$ , respectivamente. Por hipótese existe  $[l_3]$  tal que  $[l_3] \in \pi(A_1) \cap \pi(A_2)$ . Logo  $l_3$  é uma órbita que intersecta ambas as transversais, como queríamos demonstrar.  $\square$

Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são variedades diferenciáveis é uma **submersão** se  $Df_p$  for sobrejetiva para todo  $p \in M$ . Ao longo do texto sempre consideraremos  $M = \mathbb{R}^2$  e  $N = \mathbb{R}$ . Nesse caso,  $f$  é submersão se e somente se  $\nabla(f)(p) \neq 0$  para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ . Assim verificamos que se uma aplicação diferenciável  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for uma submersão, então  $H_p$  é cordal. A seguinte proposição relaciona níveis de  $p$  com órbitas de  $H_p$ .

**Proposição 1.5.** *Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^1$  e  $H_p$  o campo hamiltoniano associado a  $p$ . Então  $p$  é constante ao longo das órbitas de  $H_p$ . Mais ainda, se  $H_p$  for cordal, então as suas órbitas são as componentes conexas das curvas de nível de  $p$ .*

*Demonstração.* Afirmamos que  $p$  é constante ao longo das soluções de  $H_p$ . De fato, seja  $\varphi$  solução de  $H_p$ . Então  $\varphi'(t) = (-p_y(\varphi(t)), p_x(\varphi(t)))$ . Mas

$$(p \circ \varphi)'(t) = Dp_{\varphi(t)} D\varphi(t) = (p_x(\varphi(t)), p_y(\varphi(t))) \cdot (-p_y(\varphi(t)), p_x(\varphi(t)))^T = 0.$$

Logo  $p$  é constante ao longo das soluções de  $H_p$ , portanto cada órbita de  $H_p$  está contida numa componente conexa de uma curva de nível  $p^{-1}\{c\}$ . Como  $\nabla p(x) \neq (0, 0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , segue do Teorema da Função Implícita que  $p^{-1}\{c\}$  é uma variedade de dimensão 1. Logo cada componente conexa de  $p^{-1}\{c\}$  também o é. Como  $H_p$  não tem pontos singulares, por consequência do Teorema de Poincaré-Bendixon (veja [16], Teorema 1.25) segue que o  $\omega$ - e o  $\alpha$ -limites de cada órbita contida nesta componente conexa são vazios, e portanto uma tal órbita é toda a componente conexa.  $\square$

**Exemplo 1.6.** Consideremos a função  $p = (x^2 - 1)e^{-y}$ . Observemos que  $p$  é uma submersão, pois  $\nabla(p) = (2xe^{-y}, -(x^2 - 1)e^{-y}) \neq (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . A folheação induzida por  $H_p$  possui duas retas que são folhas inseparáveis que correspondem ao nível

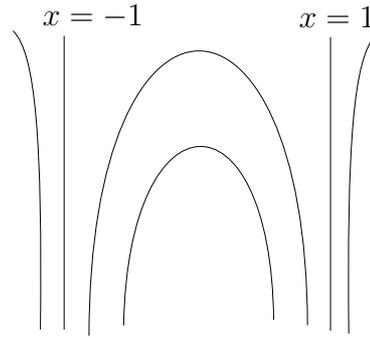


Figura 1.2: Hamiltoniano de  $(x^2 - 1)e^{-y}$ .

0:  $x = -1$  e  $x = 1$ , ver Figura 1.2. De fato, dadas duas transversais por  $x = -1$  e  $x = 1$ , a imagem dessas transversais por  $p$  são intervalos abertos contendo a origem. Logo existe algum  $\epsilon < 0$  suficientemente pequeno de modo que  $\epsilon$  pertence a imagem por  $p$  de ambas as transversais. Como  $p^{-1}(\epsilon)$  possui apenas uma componente conexa, segue que  $p^{-1}(\epsilon)$  é uma folha que intersecta ambas as transversais, portanto  $x = -1$  e  $x = 1$  são inseparáveis, como queríamos.

Durante o restante dessa seção, apresentaremos um método para produzir folhas inseparáveis.

Denotaremos por  $\Gamma = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}\}$  o eixo  $y$ . O complemento de  $\Gamma$ , ou seja,  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , será denotado por  $\Gamma^c$ . Dado um campo de vetores no plano e um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , denotaremos por  $F|_U$  o campo  $F$  restrito ao aberto  $U$ .

Seja  $T : \Gamma^c \rightarrow \Gamma^c$  o difeomorfismo definido por  $T(x, y) = (x, y/x)$ , com inversa  $T^{-1}(x, y) = (x, xy)$ . Dado um campo de vetores no plano  $F = (F_1, F_2)$ , denotamos por  $TF$  o campo de vetores em  $\Gamma^c$  que é conjugado a  $F|_{\Gamma^c}$  por  $T$  a menos de um fator adequado (multiplicação por  $x$ ), que torna  $TF$  bem definido em  $\mathbb{R}^2$ . Precisamente,  $TF$  é definido por

$$TF_1(x, y) = xF_1(x, xy), \quad TF_2(x, y) = F_2(x, xy) - yF_1(x, xy) \quad (1.1)$$

O próximo resultado é de verificação imediata.

**Lema 1.7.** *Seja  $F = (F_1, F_2)$  um campo de vetores no plano de modo que  $F_1(x, y)$  e  $F_2(x, y)$  não possuem zeros comuns em  $\Gamma^c$ . Então o campo de vetores  $TF$  definido por (1.1) é cordal se e somente se  $F_1(0, 0) = 0$  e  $F_2(0, 0) \neq 0$ .*

Observe que se  $\tilde{p}(x, y)$  for um polinômio e  $p(x, y) = \tilde{p}(x, xy)$ , então  $H_p = TH_{\tilde{p}}$ . O próximo resultado relaciona órbitas de  $F$  com órbitas de  $TF$ .

A técnica de blow-up, a qual é detalhadamente explicada em [1], é amplamente utilizada na desingularização de singularidades degeneradas em sistemas planares.

Intuitivamente, a técnica do blow-up vertical consiste em “explodir” uma singularidade na origem em  $\Gamma$ . Usaremos esta técnica de uma maneira pouco usual: Intuitivamente, o que ocorre é que  $\Gamma \setminus \{(0, 0)\}$  é “levado para o infinito” pelo blow-up vertical, e em certo sentido, singularidades finitas são levadas para o infinito. O próximo teorema ilustra essas ideias, relacionando as órbitas de  $F$  e  $TF$ .

**Teorema 1.8.** *Sejam  $F$  e  $TF$  satisfazendo as hipóteses do Lema 1.7. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) Cada par de folhas inseparáveis de  $F|_{\Gamma^c}$  induz um par de folhas inseparáveis em  $TF$ .*
- ii) Qualquer setor hiperbólico de um ponto singular  $(0, y_0)$  de  $F$  contido  $\Gamma^c \cup \{(0, y_0)\}$  induz um par de folhas inseparáveis em  $TF$ .*
- iii) Cada órbita de  $F$ , diferente de  $\Gamma$ , mas tangente a  $\Gamma$  e contida em  $x > 0$  ou  $x < 0$  em uma vizinhança dessa tangência induz um par de folhas inseparáveis em  $TF$ .*
- iv) Uma órbita regular de  $F$  intersectando  $\Gamma$  em exatamente  $k$  pontos induz  $k + 1$  órbitas em  $TF$ .*
- v) A curva  $\Gamma$  é uma órbita de  $TF$ .*
- vi) Se  $y \mapsto F_1(0, y)$  não for o polinômio nulo, então existem duas órbitas de  $TF$  que são inseparáveis com  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Está claro que, fora de  $\Gamma$ , as propriedades qualitativas do fluxo de  $F$  e  $TF$  são as mesmas. Em particular, folhas inseparáveis de  $F$  distantes de  $\Gamma$  são levadas por  $T$  em folhas inseparáveis de  $TF$ , provando a afirmação i). A afirmação ii) segue diretamente da afirmação i) visto que as separatrizes do setor hiperbólico  $(0, y_0)$  são folhas inseparáveis de  $F$ . A afirmação iii) também segue diretamente da afirmação i), pois se  $\gamma$  for uma órbita de  $F$  tangente a  $\Gamma$  em um ponto  $(0, y_0)$ , então os dois intervalos abertos maximais de  $\gamma$  de  $(0, y_0)$  até uma intersecção com  $\Gamma$  ou a um fim de  $\gamma$  são folhas inseparáveis de  $F|_{\Gamma^c}$ . Para verificarmos a afirmação iv), basta notarmos que dada uma órbita  $\gamma$  que intersecta  $\Gamma$  em  $k$  pontos,  $\gamma \setminus \Gamma$  é dividido em  $k + 1$  intervalos maximais que correspondem as  $k + 1$  órbitas em  $TF$ . A afirmação v) é válida, pois  $\Gamma$  é invariante por  $TF|_{\Gamma}$ .

Resta agora demonstrar a afirmação vi). As hipóteses nos garantem que nenhum dos eixos coordenados são órbitas de  $F$ . Seja  $\gamma$  a órbita de  $F$  por  $(0, 0)$  e denote por  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$  os dois intervalos abertos de  $\gamma$  de  $(0, 0)$  até encontrar  $\Gamma$  novamente ou termine no infinito. Sejam  $\beta^+$  e  $\beta^-$  as órbitas de  $TF$  induzidas por  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$  respectivamente. Afirmamos que  $\beta^+$  e  $\beta^-$  são inseparáveis com  $\Gamma$ . Sem perda de generalidade suponhamos que  $\gamma^+$  entra no primeiro quadrante próxima a  $(0, 0)$ . Logo  $\beta^+$  está completamente contida em  $x > 0$  e um

de seus fins se aproxima assintoticamente a  $\Gamma$  quando  $y > 0$ . Seja  $S$  uma seção transversal de  $\beta^+$  inteiramente contida em  $\Gamma^c$  e  $S'$  a metade de uma seção transversal de  $\Gamma$  contida em  $x \geq 0$ . Então  $T^{-1}(S)$  é uma seção transversal de  $\gamma^+$  e  $T^{-1}(S' \setminus \Gamma) \cup \{(0, 0)\}$  é a metade de uma seção transversal de  $\gamma^+$ , que também é uma curva começando da origem. Assim, por dependência contínua, existem intervalos de órbitas de  $F$  inteiramente contidas em  $x > 0$  conectando  $T^{-1}(S)$  a  $T^{-1}(S')$ . Logo existem órbitas de  $TF$  conectando  $S$  e  $S'$ , provando que  $\beta^+$  e  $\Gamma$  são folhas inseparáveis. De maneira análoga podemos argumentar que  $\beta^-$  e  $\Gamma$  são inseparáveis. Isso prova a afirmação vi). Observe que se  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$  estão na mesma região  $x > 0$  ou  $x < 0$ , então já vimos pela afirmação iii) que  $\beta^+$  e  $\beta^-$  também são inseparáveis entre si.  $\square$

A Figura 1.3 ilustra algumas propriedades do Teorema 1.8.

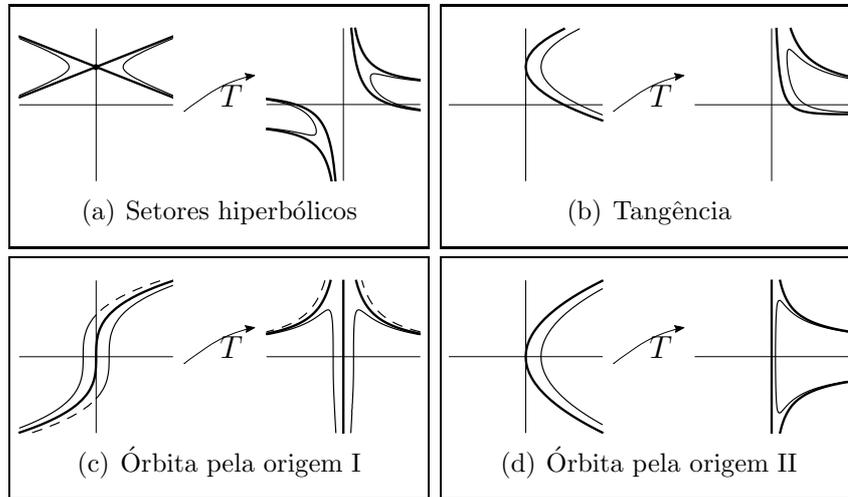


Figura 1.3: Algumas órbitas de  $F$  e  $TF$ .

*Observação 1.9.* A demonstração do teorema se mantém válida se  $\tilde{p}$  for uma função de classe  $C^2$  com a hipótese extra de que  $\tilde{p}$  não seja constante em nenhum intervalo de  $\Gamma$  para valer o item vi).

## 1.2 Estimativas para $s(n)$ .

Nesta seção obteremos estimativas para  $s(n)$ , que é a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um campo polinomial planar cordal de grau  $n$  pode ter.

O seguinte teorema demonstrado por M-P Muller em [35] (ver também [47]) nos dá uma cota superior para  $s(n)$ .

**Teorema 1.10.** *Seja  $s(n)$  a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um campo polinomial planar cordal de grau  $n$  pode ter, então  $s(n) \leq 2n$ .*

*Demonstração.* Seja

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y)$$

um sistema polinomial planar cordal de grau  $n$ . Dada uma circunferência de raio  $R$  centrada na origem, o conjunto dos pontos do sistema os quais são tangentes a esfera é dado por:

$$\begin{cases} xf_1(x, y) + yf_2(x, y) = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} .$$

Por consequência do teorema de Bézout, como essas equações representam curvas algébricas de graus  $n + 1$  e  $2$ , respectivamente, existem no máximo  $2n + 2$  soluções para tal sistema. Então considerando a compactificação a um ponto desse campo, segue que o infinito é a única singularidade composta por setores elípticos, hiperbólicos e parabólicos e  $e + h \leq 2n + 2$ , onde  $e$  é o número de setores elípticos e  $h$  o número de setores hiperbólicos. Por outro lado, pelo fato de termos apenas uma singularidade isolada, e por consequência do teorema do índice, obtemos que  $e - h = 2$ . Logo  $h \leq n$ . Na melhor das hipóteses, cada folha inseparável é fronteira de um único setor hiperbólico. Nesse caso, obtemos que  $s(n) \leq 2n$ , pois para cada setor hiperbólico temos duas folhas inseparáveis.  $\square$

Definindo  $s_H(n)$  como a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um campo polinomial planar cordal hamiltoniano de grau  $n$  pode ter, enunciamos o principal teorema deste capítulo.

**Teorema 1.11.** *Seja  $s_H(n)$  a quantidade máxima de folhas inseparáveis que um campo polinomial planar cordal hamiltoniano de grau  $n$  pode ter, então  $s_H(n) \geq 2n - 1$  para todo  $n \geq 4$ .*

Para tanto, construiremos explicitamente uma família de polinômios que demonstram a validade do teorema. Com essa finalidade, para cada  $k > 2$ , precisaremos de polinômios auxiliares  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de grau  $k + 1$  com as seguintes propriedades:

- I)  $f(0) = 0$  e  $f(1) \neq 0$ ;
- II) As raízes reais de  $f$  são simples;
- III) Sejam  $A_1, \dots, A_r$  os zeros de  $f$ , e defina  $c_0 = \int_0^1 f(s)ds$  e  $c_i = \int_0^{A_i} f(s)ds, i = 1, \dots, r$ . Então  $c_0, \dots, c_r$  são dois a dois distintos.

No seguinte lema, exibimos explicitamente um polinômio  $f$  de grau  $k + 1$  com  $k + 1$  raízes satisfazendo as hipóteses acima.

**Lema 1.12.** Para cada  $z_0$  transcendente, o polinômio de grau  $k + 1$  com  $k + 1$  zeros

$$f_{z_0}(y) = y \prod_{i=1}^k (y - z_0^i)$$

satisfaz as propriedades (I) - (III).

*Demonstração.* Observemos que

$$f_z(y) = \sum_{i=1}^k z^{(k-i)(k-i+1)/2} v_i(z) y^{i+1},$$

onde  $v_i(z)$  são polinômios na variável  $z$  com  $v_i(0) = (-1)^{k-i}$ . Para cada  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ , considere os seguintes polinômios na variável  $z$ :

$$C(z^j, z) = \int_0^{z^j} f_z(s) ds = \sum_{i=1}^k z^{\tau(i)} \frac{v_i(z)}{i+2},$$

onde  $\tau(i) = (k-i)(k-i+1)/2 + j(i+2)$ . O ponto de mínimo de  $\tau$  é  $k-j+1/2$ , que não é um inteiro. Então  $\tau(k-j) = \tau(k-j+1) = -j^2 + (k+5/2)j$  é o valor mínimo da função  $\tau$  em valores inteiros. Também temos

$$C(z^j, z) = z^{\tau(k-j)} \left( \frac{(-1)^j}{(k-j+2)(k-j+3)} + z m_j(z) \right),$$

onde  $m_j(z)$  é um polinômio com coeficientes racionais. Como  $j \mapsto \tau(k-j)$  é estritamente crescente para todo  $j < k+5/2$ , segue que os polinômios  $z \mapsto C(z^j, z)$  são dois a dois distintos, para  $j = 0, 1, \dots, k$  e possuem coeficientes racionais. Tomando  $z_0$  transcendente, segue que  $C(z_0^j, z_0)$  são dois a dois distintos e diferentes de zero. Logo o polinômio de grau  $k+1$   $f_{z_0}(y)$  satisfaz as propriedades que queríamos e possui  $k+1$  zeros.  $\square$

Consideraremos a seguinte fatoraço para  $f$ :

$$f(y) = yg(y)h(y),$$

onde  $g$  e  $h$  são polinômios, podendo  $h$  ser constante. Então definimos o polinômio  $\tilde{p} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{p}(x, y) = g(y)(y-1)^2 x + \int_0^y f(s) ds.$$

Calculando suas derivadas parciais, obtemos

$$\tilde{p}_x(x, y) = g(y)(y - 1)^2, \quad (1.2)$$

$$\tilde{p}_y(x, y) = (g'(y)(y - 1) + 2g(y))(y - 1)x + f(y). \quad (1.3)$$

Observemos que  $\tilde{p}_x(0, 0) = g(0) \neq 0$  pois  $f$  não possui raízes duplas e que  $\tilde{p}_y(0, 0) = 0$ , logo se tomarmos  $p(x, y) = \tilde{p}(x, xy)$ ,  $p$  e  $\tilde{p}$  satisfazem as hipóteses do Lema 1.7. Em particular,  $H_p$  é um sistema polinomial Hamiltoniano cordal de grau par  $n = 2(k + 2)$ , se  $h$  for constante, e de grau ímpar  $n = 2(k + 2) - 1$  se  $h$  não for constante. Estudaremos as propriedades de  $\tilde{p}$  tendo em vista o Teorema 1.8 com o objetivo de obter o maior número possível de folhas inseparáveis de  $H_p$ .

**Lema 1.13.** *Os pontos singulares de  $H_{\tilde{p}}$  são  $(0, A_i)$ ,  $i = 1, \dots, u$ ,  $u \leq r$ , onde  $A_1, \dots, A_u$  são as raízes de  $g(y)$ . Cada um deles é uma sela com duas separatrizes na região  $x < 0$  e duas separatrizes na região  $x > 0$ .*

*Demonstração.* Pelas equações (1.2) e pelas propriedades (I) e (II), segue que os pontos singulares de  $H_{\tilde{p}}$  são  $(0, A_i)$ , onde  $g(A_i) = 0$ . Como  $\tilde{p}_{xx} = 0$  e  $\tilde{p}_{xy}(0, A_i) = g'(A_i)(A_i - 1)^2 \neq 0$ , novamente por (II), segue pelo teorema de Hartmann-Grobman que essas singularidades são selas de  $H_{\tilde{p}}$ . Seja  $i \in \{1, \dots, u\}$  e considere  $c_i$  definido na propriedade (III). Observemos que cada componente conexa de  $\tilde{p}^{-1}(c_i)$  contendo o ponto  $(0, A_i)$  é formado pela reta  $y = A_i$  e pelo gráfico da função

$$x = m(y) := \frac{\int_y^{A_i} f(s) ds}{g(y)(y - 1)^2}$$

para  $y$  em um intervalo maximal contendo  $A_i$  onde  $m(y)$  pode ser definida. Logo as separatrizes da sela estão contidas nessas duas curvas. Como  $m(y)$  troca de sinal em  $y = A_i$ , temos duas separatrizes em  $x < 0$  e duas separatrizes em  $x > 0$  como queríamos.  $\square$

Observemos que por consequência da propriedade (III), separatrizes de diferentes selas dadas pelo Lema (1.13) estão em diferentes níveis de  $\tilde{p}$ , logo não se conectam. Portanto segue diretamente do lema e do item (ii) do Teorema (1.8) que

$H_p$  possui pelo menos  $4u$  folhas inseparáveis,

onde  $u$  é o número de raízes de  $g(y)$ .

Agora estudamos o nível  $c_0$  de  $\tilde{p}$ . Observemos que  $y = 1$  é uma das componentes conexas de  $\tilde{p}^{-1}(c_0)$ . As outras componentes conexas desse nível podem ser parametrizadas por

$$x = \frac{F(y)}{g(y)(y - 1)^2}, \quad (1.4)$$

onde  $F(y) = \int_y^1 f(s)ds$ . Segue das propriedades (I) e (III) que a função  $F(y)$  se anula de ordem 1 em  $y = 1$  e  $F(A_i) \neq 0$  nos zeros  $A_i$  de  $g(y)$ . Isso mostra em particular que existem intervalos  $(a^-, 1)$  e  $(a^+, 1)$  onde  $a^-$  ( $a^+$ , respectivamente) é a raiz de  $g(y)$  mais próxima de 1 porém menor que 1 (respectivamente maior que 1) se houver uma, ou  $-\infty$  ( $+\infty$ , respectivamente) caso contrário, de modo que em cada faixa  $\mathbb{R} \times (a^-, 1)$  e  $\mathbb{R} \times (a^+, 1)$  existe exatamente uma componente conexa de  $p^{-1}(c_0)$  assintótica a  $y = 1$  e parametrizada por (1.4). Denotaremos por  $\gamma^-$  e  $\gamma^+$  essas componentes, respectivamente.

**Lema 1.14.**  $\gamma^-$  e  $\gamma^+$  são inseparáveis à reta  $y = 1$ .

*Demonstração.* Como  $F$  não se anula nas raízes de  $g(y)$ , para cada  $A_i$  raiz de  $g(y)$ , existe  $b > 0$  tal que  $F(A_i) + \epsilon \neq 0$  sempre que  $b > |\epsilon|$ . Logo as componentes conexas de  $c_0 + \epsilon$  podem ser parametrizadas por

$$x = \frac{F(y) + \tilde{\epsilon}}{g(y)(y-1)^2},$$

para  $y$  no mesmo domínio da parametrização dada por (1.4). Em particular, em cada uma das faixas  $\mathbb{R} \times (a^-, 1)$  e  $\mathbb{R} \times (a^+, 1)$  existe exatamente uma componente conexa de  $\tilde{p}^{-1}(c_0 + \epsilon)$ , para cada  $|\epsilon| < b$ .

Agora provaremos que  $\gamma^-$  e a reta  $y = 1$  são inseparáveis. Seja  $S$  uma transversal de  $\gamma^-$  e  $S'$  a metade de uma seção transversal de  $y = 1$ , morando na região  $y \leq 1$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $S$  e  $S'$  estão na faixa  $\mathbb{R} \times (a^-, 1]$  e que  $\tilde{p}(S) = (c_0 - b, c_0 + b)$  e  $\tilde{p}(S') = [0, c_0 + b)$ . Logo para cada  $0 < \epsilon < b$ , a única componente conexa de  $\tilde{p}^{-1}(c_0 + \epsilon)$  que mora na faixa  $\mathbb{R} \times (a^-, 1]$  deve intersectar  $S$  e  $S'$ . Isso prova que  $\gamma^-$  e a reta  $y = 1$  são inseparáveis. Um argumento análogo mostra que  $\gamma^+$  e a reta  $y = 1$  são inseparáveis, como queríamos.  $\square$

Logo, por consequência do item (i) do Teorema (1.8) e pela propriedade (III) segue que

$H_p$  possui mais 4 folhas inseparáveis.

Agora suponhamos que  $h(y)$  não seja constante e que  $A_i$  seja um de seus zeros. Seja  $c_i$  conforme definimos na propriedade (III). A componente conexa de  $\tilde{p}^{-1}(c_i)$  contendo o ponto  $(0, A_i)$  é a componente conexa da curva parametrizada por

$$x = \frac{\int_y^{A_i} f(s)ds}{g(y)(y-1)^2},$$

para  $y$  definida no intervalo maximal contendo  $A_i$  onde essa expressão faz sentido. Pela propriedade (II) segue que essa expressão possui o mesmo sinal quando  $y \neq A_i$  e  $y$  está próximo de  $A_i$ . Logo a órbita de  $H_{\tilde{p}}$  é tangente a  $\Gamma$  e está em  $x > 0$  ou  $x < 0$  em uma vizinhança, e então, pelo item (iii) do Teorema (1.8) e propriedade (III), segue que

$H_p$  possui mais  $2v$  folhas inseparáveis,

onde  $v$  é o número de raízes de  $h$ .

Finalmente, adicionando as 3 folhas inseparáveis dadas pelo item (v) do Teorema (1.8), que são diferentes de todas as outras folhas inseparáveis já encontradas, por causa da propriedade (III), segue que  $H_p$  possui pelo menos

$$4u + 4 + 2v + 3$$

folhas inseparáveis, onde  $u$  é o número de raízes reais de  $g$  e  $v$  é o número de reais de  $h$ . Tomando  $f$  com a quantidade máxima de zeros reais (que é sempre possível pelo Lema 1.12), segue que  $k = u + v$ . Nesse caso, se  $h$  for o polinômio constante, ou seja  $v = 0$ , temos  $4k + 7$  folhas inseparáveis. Nesse caso o grau de  $H_p$  é  $n = 2(k + 2)$ , e o número de folhas inseparáveis em termos do grau é  $2n - 1$ . Por outro lado, se assumirmos que  $f$  possui a quantidade máxima de raízes reais e que  $h$  possui grau 1, isto é  $v = 1$ , segue que  $H_p$  possui  $4k + 5$  folhas inseparáveis. Nesse caso o grau de  $H_p$  é  $n = 2(k + 2) - 1$ . Logo, em termos de  $n$ , a quantidade de folhas inseparáveis é  $2n - 1$ . Como no caso *par* consideramos  $k \geq 0$ , e no caso *ímpar* consideramos  $k \geq 1$ , obtemos o Teorema 1.11.

Nos seguintes exemplos vamos ilustrar, seguindo a notação utilizada neste capítulo, um polinômio de grau 5 e outro de grau 8 da nossa construção (hamiltonianos de graus 4 e 7 respectivamente), tal que seus campos hamiltonianos possuem 7 e 13 folhas inseparáveis respectivamente.

**Exemplo 1.15.** Considere  $g(y) = 1$  e  $h(y) = 2$ . Assim  $f(y) = 2y$  e

$$\tilde{p}(x, y) = (y - 1)^2 x + \int_0^y 2s \, ds.$$

Assim  $A_1 = 0$  é a única raiz de  $f$ . Temos também  $c_0 = 1$  e  $c_1 = 0$ . O nível  $c_0$  possui folhas inseparáveis de  $\tilde{p}$ , e o nível  $c_1$  tangencia  $\Gamma$  na origem. Assim, tomando  $p(x, y) = \tilde{p}(x, y)$ , segue que  $\text{grau}(p) = 5$ , o nível  $c_0$  de  $p$  possui 4 folhas inseparáveis, e o nível  $c_1$  possui 3 folhas inseparáveis. Portanto  $H_p$  possui 7 folhas inseparáveis. A Figura 1.4 ilustra curvas de níveis de  $\tilde{p}$  e  $p$  através de um difeomorfismo do plano no disco unitário.

**Exemplo 1.16.** Consideremos  $g(y) = 4y + 3$  e  $h(y) = 4y - 2$ . Assim  $f(y) = y(4y + 3)(4y - 2)$  e

$$\tilde{p}(x, y) = (y - 1)^2(4y + 3)x + \int_0^y s(4y + 3)(4s - 2) \, ds.$$

Denotamos por  $A_1 = -\frac{3}{4}$ ,  $A_2 = \frac{1}{2}$  e  $A_3 = 0$  as raízes de  $f$ . Assim  $c_0 = \frac{7}{3}$ ,  $c_1 = -\frac{63}{64}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{3}$  e  $c_3 = 0$ . O nível  $c_0$  possui folhas inseparáveis de  $\tilde{p}$ , o nível  $c_1$  possui as variedades invariantes de uma sela no ponto  $(0, A_1)$ . Já o nível  $c_2$  tangencia  $\Gamma$  no ponto  $(0, A_2)$ . Por

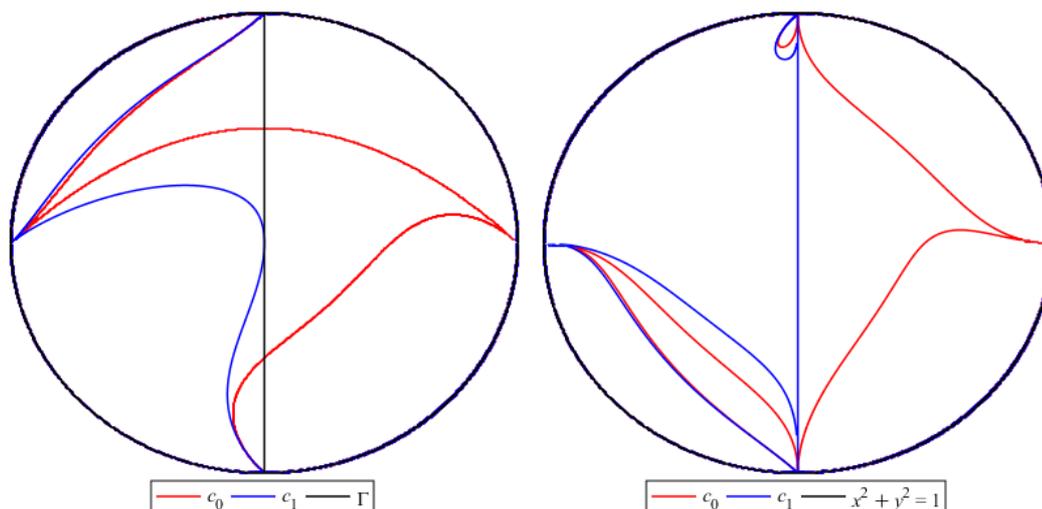


Figura 1.4: Níveis de  $\tilde{p}$  e  $p$  ( $\text{grau}(H_p) = 4$ ).

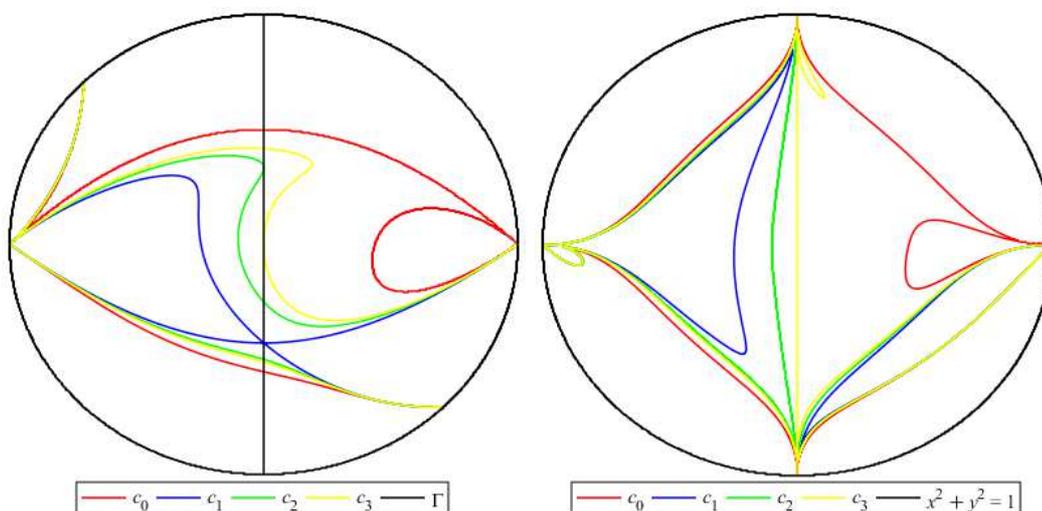


Figura 1.5: Níveis de  $\tilde{p}$  e  $p$  ( $\text{grau}(H_p) = 7$ ).

fim, o nível  $c_3$  tangencia  $\Gamma$  na origem. Assim, tomando  $p(x, y) = \tilde{p}(x, xy)$ , segue que  $\text{grau}(p) = 8$ , os níveis  $c_0$  e  $c_1$  de  $p$  possuem 4 folhas inseparáveis, o nível  $c_2$  possui 2 folhas inseparáveis e o nível  $c_3$  possui 3 folhas inseparáveis. Portanto  $H_p$  possui 13 folhas inseparáveis. A Figura 1.5 ilustra curvas de níveis de  $\tilde{p}$  e  $p$  através de um difeomorfismo do plano no disco unitário.

## Capítulo 2

# Contraexemplos mais simples para a conjectura Jacobiana real

Neste capítulo construiremos uma família de contraexemplos para a conjectura Jacobiana real fazendo algumas modificações na construção de S. Pinchuk em [40]. Com essa generalização conseguimos produzir uma família de exemplos que contém um exemplo em que o grau da componente de maior grau é 15, o menor grau conhecido até então. O resultado deste capítulo pode ser encontrado em [17].

### 2.1 A Construção dos Exemplos

Para a construção da família de exemplos, consideramos os mesmos três polinômios auxiliares definidos por Pinchuk:

$$t = xy - 1, \quad h = xt^2 + t, \quad f = \frac{h^3 + h^2}{h - t} = (xt + 1)^2(t^2 + y).$$

De agora em diante, denotamos por  $J(a, b)$  o determinante Jacobiano de uma aplicação  $(a, b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Como em [40, Lema 2.1]:

**Proposição 2.1.** *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

1.  $J(h, t) = h - t$ ,
2.  $J(f, h) = -f$

*Demonstração.* Ambos os itens seguem de computação direta utilizando as regras da cadeia e do produto, linearidade da diferenciação e também as propriedades de

determinante. Para o item 1, temos

$$J(h, t) = J(xt^2 + t, t) = t^2 J(x, t) = xt^2 = h - t.$$

Para o item 2,

$$\begin{aligned} J(f, h) &= J\left(\frac{h^3 + h^2}{h - t}, h\right) = (h^3 + h^2)J((h - t)^{-1}, h) \\ &= -\frac{h^3 + h^2}{(h - t)^2}J(-t, h) \\ &= -f, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do item 1.  $\square$

Como no exemplo de Pinchuk, tomamos a primeira coordenada do nosso exemplo

$$p = f + h$$

o qual podemos mostrar, a menos de escala, ser a única combinação linear de  $f$  e  $h$  de modo que  $p$  seja uma submersão. Mais ainda, como o nível  $p = 0$  é desconexo, pois  $xt + 1$  é um fator de  $p$  e  $xt + 1 = 0$  é equivalente a  $y = (x - 1)/x^2$  possui duas componentes conexas, podemos concluir do resultado principal de [2] que para qualquer  $q$  polinomial de modo que  $J(p, q) > 0$ , a aplicação  $(p, q)$  não é um difeomorfismo global.

**Proposição 2.2.** *Seja  $m \in \mathbb{Z}$  e  $G$  uma função de uma variável real diferenciável, vale o seguinte:*

$$J(p, G(h)f^m) = -f^{m+1}G'(h) + mf^mG(h)$$

*Demonstração.* Agindo de maneira análoga a demonstração da Proposição 2.1,

$$\begin{aligned} J(p, G(h)f^m) &= J(f, G(h)f^m) + J(h, G(h)f^m) \\ &= f^m J(f, G(h)) + G(h)J(h, f^m) \\ &= f^m G'(h)J(f, h) + mG(h)f^{m-1}J(h, f), \end{aligned}$$

e assim a identidade segue do item 2 da Proposição 2.1.  $\square$

O próximo passo na construção é tomar  $q$  da forma

$$q = \sum_{i=-2}^1 f^i M_i(h), \tag{2.1}$$

onde  $M_i(h), i \in \{-2, -1, 0, 1\}$ , são funções diferenciáveis. Escolher  $q$  desse modo é conveniente pois, após computar  $J(p, q)$ , podemos procurar condições sobre  $M_i(h)$  para que o Jacobiano seja positivo e para que  $q$  seja polinomial.

**Proposição 2.3.** *Seja  $q$  como em (2.1), então*

$$J(p, q) = -2 \frac{M_{-2}(h)}{f^2} + \sum_{i=-1}^1 f^i (iM_i(h) - M'_{i-1}(h)) - M'_1(h) f^2. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2 temos

$$J(p, q) = \sum_{i=-2}^1 J(p, f^i M_i(h)) = \sum_{i=-2}^1 (-f^{i+1} M'_i(h) + i f^i M_i(h)),$$

e assim obtemos o resultado coletando as potências de  $f$ .  $\square$

Nosso objetivo agora é encontrar hipóteses sobre  $q$  de modo que  $J(p, q) > 0$ . Na sua construção, Pinchuk usa o fato de que  $f$  e  $t$  não se anulam simultaneamente para construir  $q$  de modo que  $J(p, q) = t^2 + f^2 + M(f, h, t)^2 > 0$  onde  $M$  é um polinômio adequado. Ao invés disso procuramos outras combinações algébricas de  $t$  e  $h$  de modo que essas combinações não se anulassem simultaneamente com  $f$ . Utilizando bases de Groebner, verificamos que o ideal gerado por  $f$  e  $c(h^2 + h) - t = \frac{h^3 + h^2}{f} - h + c(h + h^2)$  é todo o anel  $R[x, y]$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ , concluindo que esses dois polinômios não se anulam simultaneamente. Na seguinte proposição daremos uma demonstração elementar para esse fato.

**Proposição 2.4.** *Seja  $c \in \mathbb{R}$ , então  $f$  e  $c(h^2 + h) - t$  não se anulam simultaneamente.*

*Demonstração.* Pela definição de  $f$ , se  $f = 0$ , temos  $xt + 1 = 0$  ou  $t^2 + y = 0$ . Em ambos os casos  $t \neq 0$ . Por outro lado, se  $xt + 1 = 0$  então  $h = 0$ , e se  $t^2 + y = 0$  então  $h + 1 = 0$ . Em ambos os casos  $c(h^2 + h) = 0$  concluindo que  $f$  e  $c(h^2 + h) - t$  não se anulam simultaneamente.  $\square$

O seguinte teorema provê condições sobre  $q$ , definido por (2.1), de modo que

$$J(p, q) = \left( \frac{h^3 + h^2}{f} - h + c(h^2 + h) \right)^2 + \left( \frac{h^3 + h^2}{f} + N_0(h) + N_1(h) f \right)^2 + f^2, \quad (2.3)$$

onde  $N_0$  e  $N_1$  são funções diferenciáveis adequadas, e assim  $J(p, q) > 0$ . Também mostraremos condições para que  $q$  seja um polinômio.

**Teorema 2.5.** *Seja  $q$  como em (2.1), e  $N_0$  uma função diferenciável, definindo*

$$\begin{aligned} M_{-2}(h) &= -(h^3 + h^2)^2, \\ M_{-1}(h) &= 2(h^3 + h^2) \left( (3-c)(h^2 + h) - N_0(h) \right), \\ N_1(h) &= -\frac{M'_{-1}(h) + h^2(ch + c - 1)^2 + N_0(h)^2}{2(h^3 + h^2)}, \\ M_1(h) &= -\int_0^h N_1(s)^2 ds - h, \\ M_0(h) &= \int_0^h (M_1(s) - 2N_0(s)N_1(s)) ds, \end{aligned}$$

então  $J(p, q)$  satisfaz (2.3). Mais ainda, dado qualquer  $K(h) \in \mathbb{R}[h]$ , se supusermos adicionalmente que

$$N_0(h) = -h + (h^2 + h)K(h),$$

então  $q$  é um polinômio nas variáveis  $(x, y)$ .

*Demonstração.* Agindo como se  $f$  e  $h$  fossem variáveis independentes, é suficiente comparar os coeficientes de  $f^m$  em (2.2) e (2.3) para verificar a primeira parte do resultado. Para a segunda parte, observamos que  $M_{-2}(h)/f^2$  e  $M_{-1}(h)/f$  são polinômios em  $(x, y)$ , pois  $(h^3 + h^2)/f$  é um polinômio em  $(x, y)$ . Expandindo a expressão de  $M'_{-1}(h)$  e completando quadrados de  $N_0(h)$  na expressão de  $N_1$  segue que

$$N_1(h) = -\frac{(3h^2 + 2h - N_0(h))^2}{2(h^3 + h^2)} - \frac{1}{2}(c-3)(ch + c - 7h - 5) + N'_0(h).$$

Sob a hipótese adicional segue que  $N_1$  é um polinômio em  $h$ , logo  $M_0$  e  $M_1$  também são polinômios, e portanto  $q$  é um polinômio como queríamos.  $\square$

**Corolário 2.6.** *Se tomarmos  $p = f + h$  e*

$$q = -\frac{(h^3 + h^2)^2}{f^2} - \frac{2h^2(h^3 + h^2)}{f} + 4h^3 + \frac{3h^2}{2} - 5hf,$$

a aplicação  $(p, q)$  é um difeomorfismo local polinomial não injetor. O grau de  $p$  é 10 e de  $q$  é 15.

*Demonstração.* É suficiente tomar  $c = 1$  e  $K(h) = 3$ , logo  $N_0(h) = 3h^2 + 2h$ , no Teorema 2.5. O polinômio  $q$  possui grau 15 pois os graus de  $h$  e  $f$  são 5 e 10, respectivamente.  $\square$

*Observação 2.7.* Se tomarmos  $(p, q)$  como no Corolário 2.6, temos

$$J(p, q) = \left( \frac{h^3 + h^2}{f} + h^2 \right)^2 + \left( \frac{h^3 + h^2}{f} + 3h^2 + 2h - 2f \right)^2 + f^2.$$

---

*Observação 2.8.* Observamos que fixando  $c = 0$  e  $K(h) = 0$  no Teorema 2.5,  $q$  é a aplicação de Pinchuk de grau 25 que pode ser encontrado em [10, 48], logo nossa construção generaliza a construção de Pinchuk a menos de automorfismos triangulares (ver [10, Seção 2]).

## Capítulo 3

# Um switched server system semiconjugado a uma IET minimal

### 3.1 Switched Server Systems

Certos aspectos relacionados à manufatura de produtos, tráfego de veículos e sistemas de filas podem ser representados pelo modelo matemático denominado **switched server system**, introduzido por Chase et al. em [12, Seção II.B, p. 72]. Esse modelo é um sistema a tempo-contínuo discretamente controlado via realimentação de estados, também conhecido como sistema dinâmico híbrido (ver [46]). Ele também pode ser considerado um **pseudo-bilhar** (ver [3]).

O modelo que consideraremos neste capítulo consiste em três reservatórios numerados 1, 2, 3, e um servidor. É conveniente pensar que cada reservatório  $i$  está parcialmente cheio com um fluido (trabalho a ser processado pelo servidor). Em cada instante  $t \geq 0$ , cada reservatório  $i$  é alimentado com fluido a uma taxa constante  $\rho_i = \frac{1}{3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) enquanto um reservatório  $i$  previamente selecionado  $i \in \{1, 2, 3\}$  é esvaziado pelo servidor a uma taxa constante de  $\rho = 1$ . Denotaremos o volume do fluido no reservatório  $i$  no instante  $t$  por  $v_i(t)$ . Quando o reservatório  $i$  é esvaziado pelo sistema no instante  $t$ , o servidor muda sua posição para o reservatório  $j \neq i$  com o maior volume ponderado  $d_{ij}v_j(t)$ , onde  $\{d_{ij} : 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$  são parâmetros do sistema. Assumimos que  $\sum_{i=1}^3 v_i(0) = 1$ . Como o sistema é fechado, isto é,  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \rho$ , segue que  $\sum_{i=1}^3 v_i(t) = 1$  para todo  $t \geq 0$ . Logo, o estado  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$  do sistema no instante  $t$  é um vetor de probabilidade e o espaço de fase é o conjunto  $\Delta = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : v_i \geq 0, \forall i \text{ e } v_1 + v_2 + v_3 = 1\}$ . Denotemos por  $l(t)$  a posição do servidor no instante  $t$ . Assumimos que  $t \mapsto l(t)$  é contínua pela direita. A Figura 3.1.(a) mostra um **switched server system** com o servidor localizado na posição  $l = 1$ .

A trajetória  $t \in [0, \infty) \mapsto \mathbf{v}(t) \in \Delta$  descreve a posição de uma partícula que se move

com velocidade constante dentro de  $\Delta$  e troca sua velocidade quando a partícula bate na fronteira  $\partial\Delta$ , sofrendo uma reflexão especular. Logo é um *pseudo-bilhar* (ver [3]). Os instantes  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \dots$  nos quais algum reservatório está vazio são chamados de *instantes de chaveamento*. No instante inicial  $t = 0$ , o servidor deverá estar conectado a um reservatório não-vazio. Note que  $\mathbf{v}(t) \in \partial\Delta$  (a fronteira do espaço de fase) se e somente se  $t \in \{t_1, t_2, \dots\}$  (ou seja, se  $t$  for um instante de chaveamento). Em outras palavras, nos instantes de chaveamento, a trajetória do pseudo-bilhar atinge a fronteira  $\partial\Delta$ . Observando o sistema nos instantes de chaveamento, obtemos uma aplicação  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  chamada de *aplicação de primeiro retorno ou de Poincaré induzida pelo switched server system* (ver Figura 3.1.(b)).

A dinâmica do switched server system com parâmetros  $\{d_{ij} > 0 : 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}$  depende apenas da proporcionalidade entre pares de parâmetros. Mais especificamente, os switched server systems que possuem as mesmas razões  $d_{13}/d_{12}$ ,  $d_{21}/d_{23}$  e  $d_{32}/d_{31}$  possuem a mesma dinâmica. Desse modo, se assumirmos que  $(d_1, d_2, d_3)$  seja um vetor com entradas positivas, então os parâmetros do sistema  $d_{ij}$  são escolhidos de acordo com as seguintes condições:

$$\frac{d_{13}}{d_{12}} = d_1, \quad \frac{d_{21}}{d_{23}} = d_2, \quad \frac{d_{32}}{d_{31}} = d_3. \quad (3.1)$$

A Figura 3.1.(b) mostra o caso em que  $d_1 = d_2 = d_3 = 1$  e  $d_{ij} = 1$  para todo  $i \neq j$ . Nesse caso,  $\{(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)\}$  é um ciclo limite do sistema.

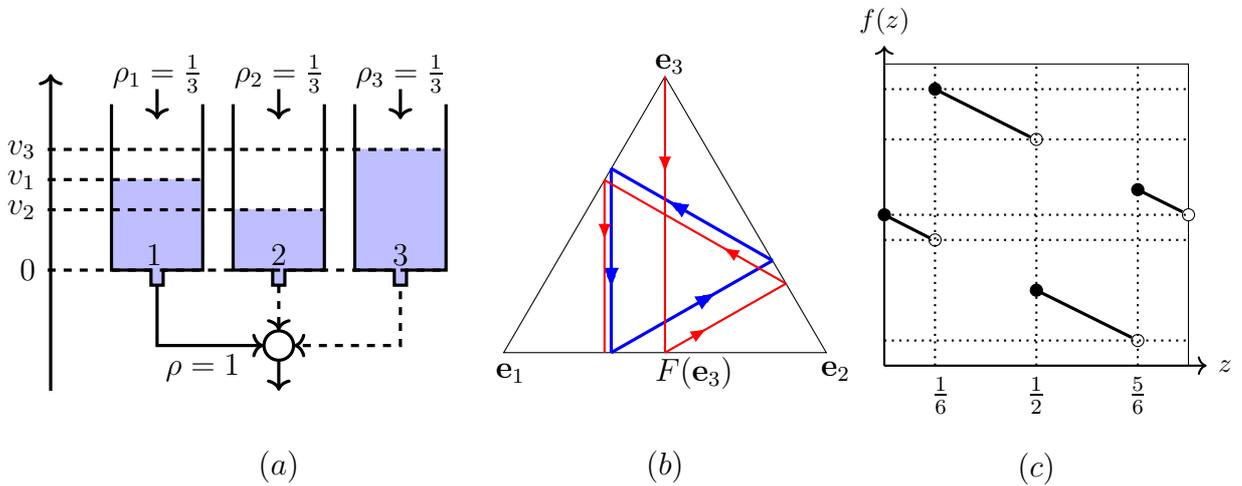


Figura 3.1: O switched server system, o pseudo bilhar e a aplicação de Poincaré.

A dinâmica de um switched server system é completamente determinada pela aplicação de Poincaré  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  induzida pelo sistema na fronteira  $\partial\Delta$  do espaço de fase. A aplicação de Poincaré  $F$  é topologicamente conjugada à aplicação suave por partes no intervalo  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$ , onde  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \partial\Delta$  denota a parametrização de  $\partial\Delta$  dada em (3.10). O seguinte lema nos dá a expressão explícita

dessa aplicação  $f$ .

**Lema 3.1.** *Dados  $d_1, d_2, d_3 > 0$ , seja  $f_{d_1, d_2, d_3} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a aplicação definida por*

$$f_{d_1, d_2, d_3}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & \text{se } z \in [z_0, z_1) \\ -\frac{1}{2}z + 1 & \text{se } z \in [z_1, z_2) \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & \text{se } z \in [z_2, z_3) \\ -\frac{1}{2}z + 1 & \text{se } z \in [z_3, z_4] \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{1}{3(1+d_1)}, \quad z_2 = \frac{1}{3(1+d_2)} + \frac{1}{3}, \quad z_3 = \frac{1}{3(1+d_3)} + \frac{2}{3}, \quad z_4 = 1. \quad (3.3)$$

Então a transformação de Poincaré  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  de qualquer switched server system com parâmetros  $d_{ij}$  satisfazendo (3.1) é topologicamente conjugada a  $f_{d_1, d_2, d_3}$ .

*Demonstração.* Considere o switched server system de parâmetros  $d_{ij}$  escolhidos de acordo com (3.1). Denote por  $0 \leq t_1 < t_2 \dots$  os instantes de chaveamento. Se no instante de chaveamento  $t_m$  o servidor está conectado ao reservatório  $j$ , então ele se mantém conectado ao reservatório  $j$  durante o intervalo de tempo  $[t_m, t_{m+1})$ . Mais ainda,

$$t_{m+1} - t_m = \frac{v_j(t_m)}{\rho - \rho_j} = \frac{v_j(t_m)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}v_j(t_m). \quad (3.4)$$

Para cada  $m \geq 1$  e  $t_m \leq t \leq t_{m+1}$ , o nível  $v_k(t)$  de qualquer reservatório  $k \in \{1, 2, 3\}$  é determinado pelo conjunto de equações lineares

$$v_k(t) = \begin{cases} v_k(t_m) + \frac{1}{3}(t - t_m) & \text{se } k \neq j \\ v_j(t_m) - \frac{2}{3}(t - t_m) & \text{se } k = j \end{cases}, \quad (3.5)$$

onde  $j$  é a posição do servidor no instante  $t_m$ .

A equação (3.5) mostra que o estado  $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$  do sistema em qualquer tempo  $t \in [t_m, t_{m+1})$  descreve a posição de uma partícula que se move com velocidade constante. Mais precisamente, quando a partícula atinge  $\partial\Delta$  no instante de chaveamento  $t_m$ , ela possui velocidade  $\mathbf{v}'(t_m+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{v}(t_m+\epsilon) - \mathbf{v}(t_m)}{\epsilon}$  e se move com tal velocidade até atingir a fronteira novamente, no instante  $t_{m+1}$ , e então a velocidade muda para  $\mathbf{v}'(t_{m+1}+)$ . Desse modo,  $t \in [0, \infty) \mapsto \mathbf{v}(t) \in \Delta$  é a trajetória de um *pseudo-bilhar*.

Observando o sistema em instantes consecutivos de chaveamento  $t_1$  e  $t_2$ , obtemos a transformação de Poincaré  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  induzida pelo fluxo na fronteira de  $\Delta$ . Mais especificamente, considerando  $m = 1$  em (3.4) e (3.5),  $t = t_2$  em (3.5), e  $(v_1, v_2, v_3) = (v_1(t_1), v_2(t_1), v_3(t_1)) \in \partial\Delta$  obtemos

$$(F(v_1, v_2, v_3))_k = v_k(t_2) = \begin{cases} v_k + \frac{1}{2}v_j & \text{se } k \neq j \\ 0 & \text{se } k = j \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde  $j$  é a posição do servidor no instante  $t_1$ . Note que se denotarmos por  $i \neq j$  o número do reservatório vazio no instante  $t_1$ , então  $d_{ij}v_j = \max\{d_{ik}v_k : 1 \leq k \leq 3\}$ , isto é, no instante  $t_1$ , o servidor começa a esvaziar o reservatório  $j$  com maior volume ponderado  $d_{ij}v_j$ . Definamos uma fórmula por partes para  $F$ . Seja

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Dados  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , defina  $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ ,  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ,  $[\mathbf{p}, \mathbf{q})$  e  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}]$  como é feito usualmente, por exemplo,

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \{(1 - \alpha)\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} : 0 \leq \alpha \leq 1\}, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{(1 - \alpha)\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q} : 0 < \alpha < 1\}.$$

Note que

$$\partial\Delta = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \cup [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] \cup [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Mais ainda,

$$\begin{cases} (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \iff v_1 = 0 \\ (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] \iff v_2 = 0 \\ (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \iff v_3 = 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

Agora consideremos a decomposição de  $\partial\Delta$  dada por (ver Figure 3.2):

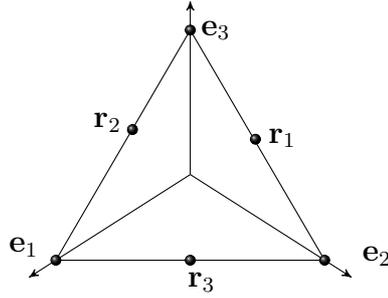
$$\partial\Delta = [\mathbf{r}_1, \mathbf{e}_3] \cup [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_2] \cup [\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_1] \cup [\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_3] \cup [\mathbf{r}_3, \mathbf{e}_2] \cup [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_1],$$

onde

$$\mathbf{r}_1 = \frac{d_{13}}{d_{12} + d_{13}}\mathbf{e}_2 + \frac{d_{12}}{d_{12} + d_{13}}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{d_{21}}{d_{23} + d_{21}}\mathbf{e}_3 + \frac{d_{23}}{d_{23} + d_{21}}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{d_{32}}{d_{31} + d_{32}}\mathbf{e}_1 + \frac{d_{31}}{d_{31} + d_{32}}\mathbf{e}_2.$$

Seja  $(v_1, v_2, v_3) \in (\mathbf{r}_1, \mathbf{e}_3]$ , então  $v_1 = 0$ , ou seja,  $i = 1$ . Além disso,

$$v_3 > \frac{d_{12}}{d_{12} + d_{13}}, \quad v_2 < \frac{d_{13}}{d_{12} + d_{13}} \quad \text{e} \quad d_{13}v_3 > \frac{d_{13}d_{12}}{d_{12} + d_{13}} = \frac{d_{12}d_{13}}{d_{12} + d_{13}} > d_{12}v_2,$$

Figura 3.2: Partição de  $\partial\Delta$ 

implicando que o reservatório 3 possui maior volume ponderado, ou seja,  $j = 3$ . Procedendo da mesma forma com respeito a  $[\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_2)$ ,  $[\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_1]$ , etc., e usando a convenção que  $l$  é contínua à direita, chegamos a seguinte conclusão.

$$\begin{cases} (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_1, \mathbf{e}_3] \cup [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_2) \iff j = 3 \\ (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_1] \cup [\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_3) \iff j = 1 \\ (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_3, \mathbf{e}_2] \cup [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_1) \iff j = 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Considerando (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos

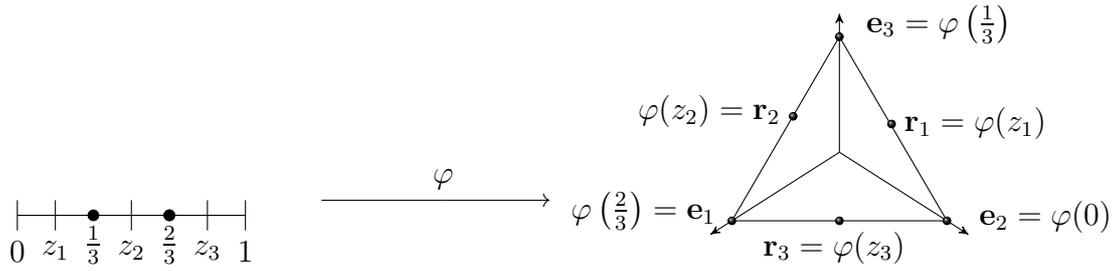
$$F(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} (v_1 + \frac{1}{2}v_2, 0, v_3 + \frac{1}{2}v_2) & \text{se } (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_3, \mathbf{e}_2] \cup [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_1) \\ (v_1 + \frac{1}{2}v_3, v_2 + \frac{1}{2}v_3, 0) & \text{se } (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_1, \mathbf{e}_3] \cup [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_2) \\ (0, v_2 + \frac{1}{2}v_1, v_3 + \frac{1}{2}v_1) & \text{se } (v_1, v_2, v_3) \in [\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_1] \cup [\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_3) \end{cases} \quad (3.9)$$

Seja  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \partial\Delta$  a parametrização de  $\partial\Delta$  definida abaixo por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - 3t)\mathbf{e}_2 + 3t\mathbf{e}_3 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{3}) \\ (2 - 3t)\mathbf{e}_3 + (3t - 1)\mathbf{e}_1 & \text{se } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (3 - 3t)\mathbf{e}_1 + (3t - 2)\mathbf{e}_2 & \text{se } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (3.10)$$

A inversa de  $\varphi$  é definida por

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{2}}\|\mathbf{p} - \mathbf{e}_2\| & \text{se } \mathbf{p} \in [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\|\mathbf{p} - \mathbf{e}_3\| + \frac{1}{3} & \text{se } \mathbf{p} \in [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\|\mathbf{p} - \mathbf{e}_1\| + \frac{2}{3} & \text{se } \mathbf{p} \in [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \end{cases} \quad (3.11)$$

Figura 3.3: Parametrização de  $\partial\Delta$ 

Segue por (3.9), (3.10), e (3.11) que a aplicação  $f = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$  é dada por

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & \text{se } z \in [z_0, z_1) \\ -\frac{1}{2}z + 1 & \text{se } z \in [z_1, z_2) \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & \text{se } z \in [z_2, z_3) \\ -\frac{1}{2}z + 1 & \text{se } z \in [z_3, z_4] \end{cases},$$

onde

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{d_{12}}{3(d_{12} + d_{13})}, \quad z_2 = \frac{d_{23}}{3(d_{23} + d_{21})} + \frac{1}{3}, \quad z_3 = \frac{d_{31}}{3(d_{31} + d_{32})} + \frac{2}{3}, \quad z_4 = 1. \quad (3.12)$$

Por (3.1), segue que (3.12) é equivalente a (3.3). Logo,  $f(z) = f_{d_1, d_2, d_3}(z)$  para todo  $z \in [0, 1]$ . Isso conclui a demonstração do Lema 3.1.  $\square$

Por [38, Teorema 1.4], para Lebesgue quase todo vetor  $(d_1, d_2, d_3)$  com entradas positivas, qualquer switched server system com parâmetros  $d_{ij}$  satisfazendo (3.1) é estruturalmente estável e admite uma quantidade finita de ciclos limites que atraem todas as órbitas. O mesmo resultado foi obtido em [12, Teorema 4.1] sob as seguintes restrições:  $d_{21} = d_{31}$ ,  $d_{12} = d_{32}$  e  $d_{13} = d_{23}$ . O principal objetivo deste capítulo é encontrar parâmetros de modo que o sistema possua um comportamento atípico. As seguintes definições esclarecerão como é esse comportamento procurado.

Dizemos que uma palavra infinita  $w = i_0 i_1 \dots$  sobre o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$  é um *itinerário simbólico* ou um *código natural* de  $f = f_{d_1, d_2, d_3}$  se existir  $z \in [0, 1]$  tal que, para cada  $k \geq 0$ ,

$$f^k(z) \in \begin{cases} [z_{i_k-1}, z_{i_k}) & \text{se } i_k < 4 \\ [z_3, z_4] & \text{se } i_k = 4 \end{cases}.$$

Um itinerário simbólico  $w$  (ou seja, uma palavra infinita sobre o alfabeto  $\mathcal{A}$ ) é

*eventualmente periódica* se existirem palavras finitas  $u$  e  $v$  sobre o alfabeto  $\mathcal{A}$  de modo que  $w = uvv \dots$ . Por exemplo, o itinerário simbólico  $w = 311\ 432\ 432\ 432 \dots$  é eventualmente periódico com  $u = 311$  e  $v = 432$ .

Enunciando mais precisamente o nosso objetivo, queremos encontrar parâmetros  $(d_1, d_2, d_3)$  de modo que  $f_{d_1, d_2, d_3}$  não possua nenhum itinerário simbólico eventualmente periódico (e portanto nenhuma órbita periódica e nenhum ciclo limite). Para esse fim, estudaremos as propriedades das transformações de intercâmbio que nos servirão de modelo para o nosso problema.

## 3.2 Transformações de Intercâmbio de Intervalos (IETs)

O estudo das transformações de intercâmbio de intervalos, também conhecidas por IETs, é um tópico clássico em sistemas dinâmicos. O uso dessas transformações como modelos isométricos de transformações com dinâmica complexa é um procedimento padrão, pois além de muito estudadas, são as transformações descontínuas que preservam medida de Lebesgue mais simples (ver [29]). Muitas transformações do intervalo suaves por partes são topologicamente semiconjugadas a alguma IET, como veremos na seção 3.4 e também nas referências [9, 15, 21, 41, 42]. Com o objetivo de construir um switched server system semiconjugado a uma IET minimal, reunimos nesta seção alguns resultados relacionados a construção de IETs topologicamente transitivas. A seguir definiremos os objetos que serão estudados ao longo deste capítulo.

Sejam  $a > 0$  e  $I = [0, a]$ . Seguindo a definição dada no artigo [27], dizemos que  $T : I \rightarrow I$  é uma  $n$ -transformação de intercâmbio de intervalos ( $n$ -IET) se existir uma partição  $I$  em intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_n$  com extremidades  $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\}$  satisfazendo  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$  e as seguintes condições:

- (i)  $T$  é injetora em  $I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ ;
- (ii)  $T(I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}) \cap T(\{x_0, \dots, x_n\}) = \emptyset$ ;
- (iii)  $T|_{(x_{i-1}, x_i)}$  é uma isometria para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Note que (ii) e (iii) são automaticamente satisfeitas se  $T|_{I_i}$  for uma isometria para cada  $(i = 1, 2, \dots, n)$ . O vetor  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  com  $\lambda_i = x_i - x_{i-1}$  é chamado de *vetor de comprimentos*. Além disso, existem  $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tais que

$$T(x) = T_i(x) := \varepsilon_i x + b_i \quad \text{para todo } x \in (x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.13)$$

O conjunto  $\mathcal{F} = \{1 \leq i \leq n : \varepsilon_i = -1\}$  é denominado *conjunto dos flips* de  $T$  (ver [36]). Se  $\mathcal{F} = \emptyset$ , então  $\varepsilon_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $T$  é chamada *padrão* ou *sem flips*. Do contrário,  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  e dizemos que  $T$  possui *flips*.

Vamos assumir que  $\mathcal{D}(T) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$  é o conjunto das descontinuidades de  $T$ , do contrário  $T$  seria uma  $m$ -IET com  $m < n$ .

Dizemos que uma medida  $\mu$  em  $I$  é uma **medida de probabilidade** se  $\mu(I) = 1$ . Seja  $A$  um conjunto  $\mu$ -mensurável. Dizemos que  $A$  é um **átomo** se  $\mu(A) > 0$ , e para qualquer  $B \subset A$  mensurável, temos  $\mu(B) = 0$ . Dizemos que  $\mu$  é **não-atômica** se não possuir átomos.

Dizemos que uma  $n$ -IET  $T : I \rightarrow I$  é **minimal** se toda órbita de  $T$  for densa, **topologicamente transitiva** se para quaisquer abertos  $U$  e  $V$  de  $I$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$  e **unicamente ergódica** se  $T$  possui uma única medida de probabilidade não-atômica  $T$ -invariante.

Existe uma relação íntima entre transitividade topológica e a existência de órbitas densas, como podemos verificar na seguinte proposição.

**Proposição 3.2.** *Seja  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET, se  $T$  possui alguma órbita densa então  $T$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Sejam  $U$  e  $V$  abertos em  $I$  e  $x \in I$  tal que  $\mathcal{O}(x)$  seja denso. Logo existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $T^m(x) \in U$ . Afirmamos que  $\mathcal{O}(T^m(x))$  é denso em  $I$ . De fato,  $\mathcal{O}(x) \setminus \mathcal{O}(T^m(x))$  é finito, e em qualquer espaço métrico sem pontos isolados, um conjunto denso permanece denso após removermos uma quantidade finita de pontos. Sendo  $\mathcal{O}(T^m(x))$  denso em  $I$ , existe  $n > m$  tal que  $T^n(x) \in V$ . Logo  $T^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$ .  $\square$

### 3.2.1 Transformações de Poincaré de IETs

Sejam  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a$  e  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET definida em  $I = [0, a]$  com descontinuidades  $\mathcal{D}(T) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ .

**Definição 3.3** (T-torre). Dado  $r \geq 1$ , dizemos que  $\{J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)\}$  é uma  $T$ -torre se  $J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)$  forem dois a dois disjuntos. Cada intervalo  $T^k(J)$ ,  $0 \leq k \leq r-1$ , é chamado de *andar*.

É um fato elementar que todos os andares de uma  $T$ -torre possuem o mesmo comprimento  $|J|$ . Desse modo,  $r \leq |I|/|J|$ . Equivalentemente, uma família  $\{J_1, J_2, \dots, J_r\}$  de intervalos abertos dois a dois disjuntos é uma  $T$ -torre se existir uma permutação  $\tau : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  tal que  $J_{\tau(i+1)} = T(J_{\tau(i)})$  para todo  $1 \leq i \leq r-1$ .

O seguinte resultado é uma consequência da injetividade de  $T$  em  $(0, a) \setminus \mathcal{D}(T)$ .

**Lema 3.4.** *Se  $\{J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)\}$  for uma  $T$ -torre com  $T^{r-1}(J) \cap \mathcal{D}(T) = \emptyset$ , então  $T^r(J) \cap J \neq \emptyset$  ou  $\{J, T(J), \dots, T^r(J)\}$  é uma  $T$ -torre.*

*Demonstração.* Seja  $U = (0, a) \setminus \mathcal{D}(T)$ . Como  $J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)$  são intervalos abertos e  $T^{r-1}(J) \cap \mathcal{D}(T) = \emptyset$ , segue que  $J \cup T(J) \cup \dots \cup T^{r-1}(J) \subset U$  e  $T^r(J) = T(T^{r-1}(J))$  é um intervalo aberto. Sem perda de generalidade, assumamos que  $r \geq 2$ . Afirmamos que  $T^r(J) \cap T^k(J) = \emptyset$  para todo  $1 \leq k \leq r-1$ . De fato,

$$T^r(J) \cap T^k(J) = T(A) \cap T(B), \quad \text{onde } A = T^{r-1}(J) \text{ e } B = T^{k-1}(J).$$

Como  $k-1 \leq r-2 < r-1$  e  $J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)$  são intervalos abertos dois a dois disjuntos, segue que  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B \subset U$ . Pela injetividade de  $T$  em  $U$ , concluímos que  $T(A) \cap T(B) = \emptyset$ , como queríamos.  $\square$

Sejam  $0 < a' < a$  e  $I' = [0, a']$ . Dado  $x \in I$ , seja  $N(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  definido por

$$N(x) = \inf \{N \geq 1 : T^N(x) \in I'\}, \quad (3.14)$$

onde  $\inf \emptyset = \infty$ . A aplicação  $T' : \text{dom}(T') \rightarrow I'$  com  $\text{dom}(T') = \{x \in I' : N(x) < \infty\}$  e

$$T'(x) = T^{N(x)}(x) = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{N(x) \text{ vezes}}(x)$$

é chamada de *transformação de Poincaré* ou *transformação de primeiro retorno de  $T$  em  $I'$* .

De modo geral, a transformação de Poincaré  $T'$  induzida pela  $n$ -IET  $T$  em um subintervalo  $I'$  de  $I$  pode ter mais descontinuidades do que  $T$ . Para contornar essa situação, introduzimos a noção de intervalo admissível (ver Corolário 3.9).

**Definição 3.5** (Intervalo Admissível). O intervalo  $I'$  é *admissível* se existirem  $0 = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_n = a'$  tais que  $N(x'_i) < \infty$  para todo  $1 \leq i \leq n$  e o conjunto  $B = \bigcup_{i=1}^n \{x'_i, T(x'_i), \dots, T^{N(x'_i)-1}(x'_i)\}$  satisfaz

$$(H1) \quad B \supset \mathcal{D}(T);$$

$$(H2) \quad a' \in T(B).$$

Daqui em diante, assumiremos que  $I'$  é um intervalo admissível.

**Lema 3.6.** *Seja  $K \subset I \setminus B$  um intervalo aberto. Então  $K \cap \mathcal{D}(T) = \emptyset$ . Mais ainda, uma das seguintes alternativas ocorre:*

- (i)  $T(K)$  é um subintervalo aberto de  $I'$ ;

(ii)  $T(K) \cap I' = \emptyset$  e  $T(K)$  é um subintervalo de  $I \setminus B$ .

*Demonstração.* Por (H1),  $\mathcal{D}(T) \subset B$ , logo  $K \cap \mathcal{D}(T) = \emptyset$  e  $T(K)$  é um intervalo aberto. Note que

$$T(K) \cap T(B) \subset [T(K) \cap T(\{x_0, \dots, x_n\})] \cup [T(K) \cap T(B \setminus \{x_0, \dots, x_n\})].$$

O primeiro termo na união é vazio pela propriedade (ii) na definição de  $n$ -IET e pelo fato de que  $K \subset I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . O segundo termo é vazio pela propriedade (i) na definição de  $n$ -IET e pelo fato de que  $K$  e  $B \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$  são subconjuntos disjuntos em  $I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ . Logo,  $T(K) \cap T(B) = \emptyset$ . Pela hipótese (H2),  $a' \notin T(K)$ , logo  $T(K) \subset I'$  ou  $T(K) \cap I' = \emptyset$ . No segundo caso,  $T(K) \cap B \subset B \setminus I' \subset T(B)$ , de onde obtemos que  $T(K) \subset I \setminus B$ .  $\square$

**Lema 3.7.** *Seja  $J$  um subintervalo aberto de  $I \setminus \{x'_1, \dots, x'_{n-1}\}$ , então existe  $r \geq 1$  tal que  $\{J, T(J), \dots, T^{r-1}(J)\}$  é uma  $T$ -torre,  $\bigcup_{k=0}^{r-1} T^k(J) \subset I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $I' \cap \bigcup_{k=1}^{r-1} T^k(J) = \emptyset$  e  $T^r(J)$  é um subintervalo de  $I'$ .*

*Demonstração.* Pela definição de  $B$ , segue que  $B \cap I' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ , logo  $J \subset I \setminus B$  e  $T(J)$  é um intervalo aberto por (H1). Se  $T(J) \subset I'$ , então tomamos  $r = 1$  e não há nada mais para demonstrar. Caso contrário, aplicando o Lema 3.6 com  $K = J$  obtemos que  $I' \cap T(J) = \emptyset$  e  $T(J) \subset I \setminus B$ . Mais ainda, nesse caso, segue que o conjunto

$$A = \left\{ \alpha \geq 1 : \{J, T(J), \dots, T^{\alpha-1}(J)\} \text{ é uma } \alpha\text{-torre com } I' \cap \bigcup_{k=1}^{\alpha-1} T^k(J) = \emptyset \right\}$$

é um subconjunto não vazio de  $\left[1, \frac{|I|}{|J|}\right]$ . Tomando  $r = \max A$  podemos assim, aplicar o Lema 3.6  $r - 1$  vezes concluindo que vale o resultado.  $\square$

**Proposição 3.8.** *Sejam  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET e  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$ . Então, para cada  $1 \leq i \leq n$ , existe  $r_i \geq 1$  e uma palavra  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  sobre o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$  de modo que o intervalo  $J_i = (x'_{i_{r_i-1}}, x'_i)$  satisfaz*

(A1)  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$  é uma  $T$ -torre com  $I' \cap \bigcup_{k=1}^{r_i-1} T^k(J_i) = \emptyset$ ;

(A2)  $T^{r_i}(J_i)$  é um subintervalo aberto de  $I'$ ;

(A3)  $T^k(J_i) \subset (x_{i_{k-1}}, x_{i_k})$  para cada  $0 \leq k \leq r_i - 1$ ;

(A4)  $N(x) = r_i$  para todo  $x \in J_i$ .

Além disso, os intervalos  $T^k(J_i), 0 \leq k \leq r_i - 1, 1 \leq i \leq n$ , são dois a dois disjuntos.

*Demonstração.* Aplicando o Lema 3.7 com  $J = J_i$  obtemos (A1), (A2) e (A3). O item (A4) segue de (A1) e (A2). Afirmamos que  $T^k(J_i)$ ,  $0 \leq k \leq r_i - 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  são dois a dois disjuntos. Do contrário, por (A1), existiria  $i \neq j$ ,  $0 \leq k_i \leq r_i - 1$ ,  $0 \leq k_j \leq r_j - 1$  com  $k_i \leq k_j$  tal que  $T^{k_i}(J_i) \cap T^{k_j}(J_j) \neq \emptyset$ . Pela injetividade de  $T$  em  $(0, a)$ , obtemos que  $J_i \cap T^{k_j - k_i}(J_j) \neq \emptyset$ , o que é uma contradição, pois  $J_i \subset I'$  enquanto  $T^{k_j - k_i}(J_j) \cap I' = \emptyset$ .  $\square$

Na Proposição 3.8, a palavra  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  é o *itinerário simbólico* da  $T$ -torre  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$ . Com respeito aos três próximos corolários, tomaremos  $J_i$ ,  $r_i$  e  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$ , como foram tomados na Proposição 3.8.

**Corolário 3.9.** *Sejam  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET e  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$ . Então a transformação de Poincaré  $T'$  de  $T$  em  $I'$  é a  $n'$ -IET,  $n' \leq n$ , definida por*

$$T'(x) = T_{i_{r_i-1}} \circ \dots \circ T_{i_1} \circ T_{i_0}(x) \quad \text{se } x \in (x'_{i-1}, x'_i),$$

onde  $T_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a transformação afim definida em (3.13). Note que  $\mathcal{D}(T') \subset \{x'_1, \dots, x'_{n-1}\}$ .

**Definição 3.10** (Família Exaustiva). A família de  $T$ -torres  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é *exaustiva* se os andares forem dois a dois disjuntos e  $I \setminus \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=0}^{r_i-1} T^k(J_i)$  for um conjunto finito.

**Corolário 3.11.** *Sejam  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET e  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$ . Suponha que*

$$(H3) \quad \sum_{i=1}^n r_i |J_i| = |I|,$$

então a família de  $T$ -torres  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , na Proposição 3.8, é *exaustiva*.

*Demonstração.* De fato, nesse caso, pela Proposição 3.8,  $S = I \setminus \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=0}^{r_i-1} T^k(J_i)$  é a união de uma quantidade finita de intervalos compactos e possui medida de Lebesgue zero, o que implica que  $S$  é um conjunto finito.  $\square$

**Corolário 3.12.** *Sejam  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET e  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$  e satisfaz a hipótese (H3). Se  $T'$  for topologicamente transitiva, então  $T$  também o é.*

*Demonstração.* Dados  $U$  e  $V$  abertos em  $I$ , por (H3) existem  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ,  $A$  e  $B$  abertos em  $I'$  tais que  $T^{k_1}(A) \subset U$  e  $T^{k_2}(B) \subset V$ . Como  $T'$  é topologicamente transitiva existe  $k > k_1 - k_2$  tal que  $T^k(A) \cap B \neq \emptyset$ . Considerando  $A' \subset A$  de modo que  $A'$  não intersekte as descontinuidades de  $T^k$  e que  $T^k(A') \cap B \neq \emptyset$ , podemos escrever  $T^k(A) = T^j(A')$  para algum  $j > k$ . Assim,  $T^{j+k_2-k_1}(U) \cap V \neq \emptyset$  como queríamos.  $\square$

### 3.2.2 IETs auto-similares

Seja  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$ . Pelo Corolário 3.9, a transformação de Poincaré  $T' : I' \rightarrow I'$  é uma  $n'$ -IET com conjunto de descontinuidades  $\mathcal{D}(T') \subset \{x'_1, \dots, x'_{n-1}\}$ .

**Definição 3.13** (IET auto-similar). Sejam  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET e  $I' \subset I$  um intervalo admissível para  $T$ . Dizemos que  $T$  é *auto-similar em  $I'$*  se  $T' = L \circ T \circ L^{-1}$  em  $I' \setminus \{x'_0, \dots, x'_n\}$ , onde  $L : I \rightarrow I'$  é a bijeção afim  $x \mapsto \frac{x'}{a}x$ .

Em outras palavras,  $T$  é auto-similar em  $I'$  se  $\mathcal{D}(T') = \{x'_1, \dots, x'_{n-1}\}$  e  $T'$  é uma cópia reescalada de  $T$ . Em particular, segue que  $\mathcal{D}(T') = L(\mathcal{D}(T))$ .

Denotemos por  $\mathcal{A}^*$  o conjunto das palavras finitas sobre o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Por (A3) na Proposição 3.8, ao par  $(T, I')$ , podemos associar a aplicação  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  definida por  $\sigma(i) = i_0 i_1, \dots, i_{r_i-1}$  chamada por *substituição associada a  $(T, I')$* . Desse modo, a substituição  $\sigma$  atribui a cada letra  $i \in \mathcal{A}$ , o itinerário simbólico da  $T$ -torre  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$ . Por meio da operação de concatenação, podemos pensar em  $\sigma$  como uma aplicação de  $\mathcal{A}^*$  em  $\mathcal{A}^*$ . A *matriz associada a  $(T, I')$*  é a matriz  $n \times n$   $M$  associada a  $\sigma$ , cuja entrada  $j, i$  é

$$m_{ji} = \#\{s : \sigma(i)_s = j\}, \quad (3.15)$$

onde  $\#$  denota a cardinalidade do conjunto. Note que  $m_{ji}$  é o número de vezes com a qual a  $T$ -órbita do intervalo  $J_i = (x'_{i-1}, x'_i)$  visita o intervalo  $(x_{j-1}, x_j)$  antes de intersectar  $I'$ . Em particular, segue que

$$r_i = \sum_{j=1}^n m_{ji}. \quad (3.16)$$

Denotemos por  $m_{ji}^{(k)}$  a entrada  $j, i$  de  $M^k$  e consideraremos  $J_i$  e  $r_i$  como na Proposição 3.8 até o final dessa seção.

**Proposição 3.14.** *Seja  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET auto-similar em um intervalo admissível  $I' \subset I$  de modo que (H3) seja satisfeito. Dado  $k \geq 1$ , seja  $J_i^{(k)} = L^{k-1}(J_i)$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Então*

$$\left\{ J_i^{(k)}, T(J_i^{(k)}), \dots, T^{(r_i^{(k)}-1)}(J_i^{(k)}) \right\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.17)$$

é uma família exaustiva de  $T$ -torres, com  $r_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n m_{ji}^{(k)}$ .

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.11, sabemos que  $\{J_i, T(J_i), \dots, T^{r_i-1}(J_i)\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é uma família exaustiva de  $T$ -torres. Logo, o resultado é válido para  $k = 1$ , pois  $J_i^{(1)} = J_i$

e  $r_i^{(1)} = r_i$ . Suponhamos que o resultado seja válido para  $k - 1$ . Como  $T$  é auto-similar em  $I'$ , sabemos que  $T'$  é uma cópia reescalada de  $T$ . Em particular,

$$\{L(J_i^{(k-1)}), T(L(J_i^{(k-1)})), \dots, (T)^{r_i^{(k-1)}-1}(L(J_i^{(k-1)}))\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

é uma família exaustiva de  $T'$ -torres, ou seja,

$$\{J_i^{(k)}, T'(J_i^{(k)}), \dots, (T')^{r_i^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)})\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{é uma família exaustiva de } T'\text{-torres.} \quad (3.18)$$

Para obtermos (3.17), trocamos cada conjunto  $(T')^\ell(J_i^{(k)})$ ,  $0 \leq \ell \leq r_i^{(k-1)} - 1$ , em (3.18) por uma  $T$ -torre. Fixe  $1 \leq i \leq n$  e observe que os itinerários simbólicos da  $T$ -torre  $\{J_i^{(k-1)}, T(J_i^{(k-1)}), \dots, (T)^{r_i^{(k-1)}-1}(J_i^{(k-1)})\}$  e da  $T'$ -torre  $\{J_i^{(k)}, T'(J_i^{(k)}), \dots, (T')^{r_i^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)})\}$  são os mesmos. Denote por  $i_0 i_1 \dots i_{r_i^{(k-1)}-1}$  esse itinerário simbólico. Observemos que

$$\begin{aligned} T'(J_i^{(k)}) &= T^{r_{i_0}^{(k-1)}}(J_i^{(k)}) \\ (T')^2(J_i^{(k)}) &= T^{r_{i_0}^{(k-1)}+r_{i_1}^{(k-1)}}(J_i^{(k)}) \\ &\vdots \\ (T')^{r_i^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}) &= T^{r_{i_0}^{(k-1)}+r_{i_1}^{(k-1)}+\dots+r_{i_{(r_i^{(k-1)}-2)}^{(k-1)}}}(J_i^{(k)}) \end{aligned}$$

Agora trocamos cada conjunto  $(T')^\ell(J_i^{(k)})$ ,  $0 \leq \ell \leq r_i^{(k-1)} - 1$ , em (3.18) por uma  $T$ -torre da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_i^{(k)} &\mapsto J_i^{(k)}, & \dots, & T^{r_{i_0}^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}), \\ T'(J_i^{(k)}) &\mapsto T^{r_{i_0}^{(k-1)}}(J_i^{(k)}), & \dots, & T^{r_{i_0}^{(k-1)}+r_{i_1}^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}) \\ &\vdots & & \vdots \\ (T')^{r_i^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}) &\mapsto T^{\sum_{j=0}^{r_i^{(k-1)}-2} r_{i_j}^{(k-1)}}(J_i^{(k)}), & \dots, & T^{\sum_{j=0}^{r_i^{(k-1)}-1} r_{i_j}^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}) \end{aligned}$$

Isso nos dá uma família exaustiva de  $T$ -torres:

$$\left\{ J_i^{(k)}, T(J_i^{(k)}), \dots, T^{r_{i_0}^{(k-1)}+r_{i_1}^{(k-1)}+\dots+r_{i_{(r_i^{(k-1)}-1)}^{(k-1)}-1}(J_i^{(k)}) \right\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observemos que o itinerário simbólico de  $J_i^{(k)}$  é igual a composição do itinerário simbólico de  $J_i^{(k-1)}$  com  $\sigma$ , ou seja,  $\sigma(i_0 i_1 \dots i_{r_i^{(k-1)}-1})$ . Para concluir a demonstração, observemos que

$$r_{i_0}^{(k-1)} + r_{i_1}^{(k-1)} + \dots + r_{i_{(r_i^{(k-1)}-1)}^{(k-1)}} = r_i^{(k)}.$$

De fato, por (3.16), pela hipótese de indução, e pelo fato do itinerário simbólico de  $J_i^{(k)}$  ser igual a composição do itinerário simbólico de  $J_i^{(k-1)}$  com  $\sigma$ , segue que

$$\begin{aligned} r_{i_0}^{(k-1)} + r_{i_1}^{(k-1)} + \dots + r_{i_{(r_i^{(k-1)}-1)}}^{(k-1)} &= \sum_{j=1}^n m_{j i_0}^{(k-1)} + \sum_{j=1}^n m_{j i_1}^{(k-1)} + \dots + \sum_{j=1}^n m_{j i_{(r_i^{(k-1)}-1)}}^{(k-1)} \\ &= m_{1i} \sum_{j=1}^n m_{j1}^{(k-1)} + m_{2i} \sum_{j=1}^n m_{j2}^{(k-1)} + \dots + m_{ni} \sum_{j=1}^n m_{jn}^{(k-1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{j\ell}^{(k-1)} m_{\ell i} = \sum_{j=1}^n m_{ji}^{(k)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Definição 3.15.** Dizemos que uma matriz real  $M$  é **positiva** se todas as suas entradas são números reais positivos.

**Corolário 3.16.** *Seja  $T : I \rightarrow I$  uma  $n$ -IET auto-similar em algum intervalo admissível  $I' \subset I$  de modo que (H3) seja satisfeito. Se a seguinte condição for satisfeita:*

(H4) *A matriz  $M$  associada a  $(T, I')$  é positiva,*

*então  $T$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Seja  $k \geq 1$ . Para cada  $1 \leq i \leq n$ , seja  $J_i^{(k)} = L^{k-1}(J_i)$  como em (3.17), onde  $L : I \rightarrow I'$  é a bijeção afim  $x \in I \mapsto \frac{x'}{a} \in I'$ . Seja

$$\mathcal{P}_k = \{T^\ell(J_i^{(k)}) : 0 \leq \ell \leq r_i^{(k)} - 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Então, pela Proposição 3.14, a união dos intervalos de  $\mathcal{P}_k$  é igual a  $I$  a menos de uma quantidade finita de pontos. Além disso, por (H4), cada intervalo  $J_i^{(k+1)}$  visita todos os intervalos em  $\mathcal{P}_k$  antes de retornar a intersectar  $\bigcup_{i=1}^n J_i^{(k+1)}$ . Sejam  $U, V \subset I$  intervalos abertos. Como  $\max_{J \in \mathcal{P}_k} |J| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , tomando  $k$  suficientemente grande, podemos assumir que existem intervalos  $J_U, J_V \in \mathcal{P}_k$  de maneira que  $J_U \subset U$  e  $J_V \subset V$ . Além disso, existem  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $1 \leq \ell_U \leq r_i^{(k+1)}$  e  $1 \leq \ell_V \leq r_j^{(k+1)}$  de maneira que  $T^{\ell_U}(J_i^{(k+1)}) \subset J_U \subset U$ ,  $T^{\ell_V}(J_j^{(k+1)}) \subset J_V \subset V$  e  $T^{r_i^{(k+1)}}(J_i^{(k+1)}) \cap J_j^{(k+1)}$  é um intervalo aberto. Desse modo, existe  $k \geq 0$  tal que  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$  como queríamos demonstrar.  $\square$

Os próximos lemas sobre matrizes quadradas vão nos ajudar a provar um resultado sobre unicidade ergódica.

**Proposição 3.17.** *Seja  $M$  uma matriz real  $n \times n$ . Suponhamos que  $M$  possua um único autovalor  $r$  com multiplicidade simples que é estritamente maior do que todos os outros autovalores de  $M$ . Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k / r^k$  existe e possui imagem unidimensional.*

*Demonstração.* Observemos que  $M/r$  possui a seguinte forma canônica de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(r_1/r) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(r_m/r) \end{pmatrix},$$

pois 1 é um autovalor simples de  $M/r$  e  $J(r_i/r)$  é o bloco de Jordan correspondente ao autovalor  $r_i/r$  de  $J$ , em que  $r_i$  é um autovalor de  $M$ . Logo

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(r_1/r)^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(r_m/r)^k \end{pmatrix}.$$

Como  $|r_i/r| < 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(r_i/r)^k = 0$ , e então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $M^k/r^k = S^{-1}J^kS$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k/r^k$  existe e sua imagem é unidimensional, pois é conjugada à matrix  $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k$ , que possui imagem unidimensional.  $\square$

**Proposição 3.18.** *Seja  $M$  como na Proposição 3.17, então a imagem de  $L = \lim_{k \rightarrow \infty} M^k/r^k$  está contida no subespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor  $r$  de  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $u \in \mathbb{R}^n$  e observemos que

$$MLu = \lim_{k \rightarrow \infty} M^{k+1}/r^k = r \lim_{k \rightarrow \infty} M^{k+1}/r^{k+1} = rLu,$$

portanto  $Lu$  pertence ao subespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor  $r$  de  $M$ .  $\square$

O seguinte teorema garante que matrizes positivas satisfazem as hipóteses das proposições 3.17 e 3.18.

**Teorema 3.19** (Perron-Frobenius). *Seja  $P$  uma matriz  $n \times n$  positiva. Então seu autovalor de maior módulo  $\lambda$  é único, real, positivo e simples. Mais ainda,  $\lambda$  possui um autovetor associado  $v$  estritamente positivo.*

**Proposição 3.20.** *Sejam  $T$  uma  $n$ -IET e  $I'$  e como na Proposição 3.14 satisfazendo (H4). Se  $M$  for invertível, então  $T$  será unicamente ergódica e  $m/m(I)$  será a única medida de probabilidade não-atômica  $T$ -invariante, onde  $m$  é a medida de Lebesgue.*

*Demonstração.* Seja  $\nu$  uma medida de probabilidade não-atômica  $T$ -invariante e  $\nu^0 = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  o vetor de probabilidade  $\nu_i = \nu(I_i)$ . Definindo  $\nu^{(k)} = (\nu_1^{(k)}, \dots, \nu_n^{(k)})$ , onde  $\nu_i^{(k)} = \nu(J_i^{(k)})$  e assumindo que  $J_i^{(k)}$  é como na Proposição 3.14, obtemos que

$$\nu^0 = M^k \nu^{(k)}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $M$  é positiva, vale o Teorema 3.19, conseqüentemente também vale a Proposição 3.18. Assim  $\nu^0$  pertence ao subespaço gerado pelo autovetor de Perron-Frobenius de  $M$ , e portanto  $\nu^0 = (m(I_1)/m(I), \dots, m(I_n)/m(I))$ . Denotando por  $\lambda$  o autovalor de Perron-Frobenius e utilizando a hipótese de que  $M$  é invertível, segue que

$$\nu^{(k)} = M^{-k}(\nu^0) = (m(I_1)/\lambda^k m(I), \dots, m(I_n)/\lambda^k m(I)), \quad (3.19)$$

e assim  $\nu_i^{(k)} = m(I_i)/\lambda^k m(I)$ . Seja  $A \subset I$  um intervalo aberto e  $\epsilon > 0$ . Tome  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo que  $\lambda^{-k} < \epsilon/m(I)$ . Pela Proposição 3.14, podemos cobrir  $I$ , a menos de uma quantidade finita de pontos, pela família exaustiva de  $T$ -torres dada em 3.17. Denotemos por  $\mathcal{J}$  essa família. Pela hipótese sobre  $k$ , qualquer intervalo  $\tilde{I} \subset \mathcal{J}$  satisfaz  $m(\tilde{I}) < m(I)\lambda^{-k} < \epsilon$ . Considerando exatamente os intervalos de  $\mathcal{J}$  contidos em  $A$ , segue pelo fato de  $\nu$  ser não atômica e da Equação (3.19) que  $\nu(A) > m(A)/m(I) - 2\epsilon$ . Considerando agora apenas as iterações que não intersectam  $A$ , obtemos que  $\nu(A) = 1 - \nu(A^c) < 1 - (m(A^c)/m(I) - 2\epsilon) = m(A) + 2\epsilon$ . Assim concluímos que  $\nu(A) = m(A)/m(I)$ , e então  $\nu = m/m(I)$ . Logo  $m/m(I)$  é a única medida não-atômica de probabilidade  $T$ -invariante, como queríamos demonstrar.  $\square$

### 3.3 O Modelo Isométrico

Nessa seção consideraremos as matrizes  $P$  e  $Q$  definidas por

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Perron-Frobenius (ver [45, Teorema 5.12]), como  $P$  possui entradas positivas, o autovalor de  $P$  de módulo máximo (chamado de *autovalor de Perron-Frobenius* e denotado por  $\eta$ ) é único, real, positivo e simples. Mais ainda, existe um único autovetor de probabilidade com entradas positivas associados a  $\eta$ .

Seja  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  o autovetor de probabilidade com entradas positivas associado ao autovalor de Perron-Frobenius  $\eta$  de  $P$ . Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  o vetor definido por  $\lambda = Q\nu$  cuja norma é  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 > 1$ . Considere a partição do intervalo  $[0, |\lambda|]$ :

$$I_1 = [0, \lambda_1), \quad I_2 = [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2), \quad I_3 = [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad I_4 = [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4].$$

Seja  $T : [0, |\lambda|] \rightarrow [0, |\lambda|]$  a aplicação (chamada de modelo isométrico) definida por

$$T(x) = \begin{cases} -x + \lambda_1 + \lambda_3 & \text{se } x \in I_1 \\ -x + \lambda_1 + |\lambda| & \text{se } x \in I_2 \\ -x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \text{se } x \in I_3 \\ -x + \lambda_1 + \lambda_3 + |\lambda| & \text{se } x \in I_4 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Observe que  $T$  é uma 4-IET com flips. Tipicamente uma  $n$ -IET com flips possui um intervalo formado por órbitas periódicas e portanto não é minimal (ver [36]). O principal objetivo dessa seção é mostrar que a transformação  $T$  é minimal e unicamente ergódica, portanto um exemplo não genérico.

Essa situação é completamente diferente do caso das IETs sem flips, também chamadas de IETs *padrão*. O exemplo mais simples é a rotação do círculo  $R_\alpha : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por  $R_\alpha(x) = \{x + \alpha\}$ , onde  $0 < \alpha < 1$ . Essa aplicação pode ser escrita como a 2-IET padrão  $T_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $T_\alpha(x) = x + 1 - \alpha$  se  $x \in [0, \alpha)$  e  $T_\alpha(x) = x - \alpha$  se  $x \in [\alpha, 1]$ . É amplamente conhecido que, quando  $\alpha$  é irracional,  $R_\alpha$  e  $T_\alpha$  são minimais e unicamente ergódicas. Relativo às  $n$ -IETs padrão irredutíveis com  $n \geq 2$ , a conjectura de Keane, respondida afirmativamente por vários autores (ver [4, 30, 34, 44, 49]), afirma

que tais aplicações são tipicamente minimais e unicamente ergódicas.

Um passo importante para a demonstração de que a aplicação  $T$  definida em (3.20) é minimal, é mostrar que ela é topologicamente transitiva. Infelizmente, não podemos aplicar o Corolário 3.16 diretamente, pois  $T$  não é auto-similar. Assim, ao invés de  $T$ , consideramos a transformação de Poincaré  $S = T'$  de  $T$  em  $I' = [0, 1]$ . Mais especificamente, mostramos que  $I'$  é um intervalo admissível para  $T$  que satisfaz (H3). Então, pelo Corolário 3.12,  $T$  será topologicamente transitiva se  $S$  o for. Essa redução é muito conveniente, pois como veremos,  $S$  é auto-similar no subintervalo  $\left[0, \frac{1}{\eta}\right]$  de  $[0, 1]$  e por consequência do Corolário 3.16 é topologicamente transitiva. Para concluir que  $T$  é minimal provaremos que  $T$  não possui órbita periódica. Esses são os próximos passos.

### 3.3.1 Lema de Redução

Como o modelo isométrico  $T : I \rightarrow I$  é uma aplicação definida por partes, para computar  $T^k(x)$ , é necessário saber a qual dos intervalos  $I_1, I_2, I_3, I_4$  o ponto  $T^{k-1}(x)$  pertence. Em outras palavras, precisamos saber o índice  $i_{k-1}$  determinado pela equação  $T^{k-1}(x) \in I_{i_{k-1}}$ . Por recursão, se soubermos a palavra  $i_0 i_1 \dots i_{k-1}$ , então podemos computar  $T^k(x)$  exatamente por meio do Corolário 3.9. Tudo que precisamos fazer é computar  $\{x, T(x), \dots, T^k(x)\}$  para uma quantidade finita de  $x$ 's e  $k$ 's.

**Lema 3.21.**  $I' = [0, 1]$  é um intervalo admissível para  $T$ . Além disso, a transformação de Poincaré  $T' : I' \rightarrow I'$  é dada pela equação

$$T'(x) = \begin{cases} -x + \lambda_1 + \lambda_3 = -x - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [x'_0, x'_1) \\ x + \lambda_3 = x - \nu_1 - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [x'_1, x'_2] \\ x + \lambda_2 + \lambda_3 - |\boldsymbol{\lambda}| = x - \nu_1 - \nu_2 & \text{se } x \in (x'_2, x'_3) \\ -x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -x + \nu_3 + 1 & \text{se } x \in [x'_3, x'_4] \end{cases},$$

onde

$$x'_0 = 0, \quad x'_1 = \nu_1, \quad x'_2 = \nu_1 + \nu_2, \quad x'_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad x'_4 = 1,$$

e  $\mathcal{D}(T') = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ .

*Demonstração.* Seja  $I_1, I_2, I_3, I_4$  a partição de  $[0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  definida por

$$I_1 = [x_0, x_1), \quad I_2 = [x_1, x_2), \quad I_3 = [x_2, x_3), \quad I_4 = [x_3, x_4],$$

onde

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad x_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = |\boldsymbol{\lambda}|.$$

Então

$$\begin{cases} I_1 \cong [0, 0.344446) \\ I_2 \cong [0.344446, 0.655553) \\ I_3 \cong [0.655553, 1.107159) \\ I_4 \cong [1.107159, 1.311107]. \end{cases}$$

Seja

$$x'_0 = 0, \quad x'_1 = \nu_1, \quad x'_2 = \nu_1 + \nu_2, \quad x'_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad x'_4 = 1.$$

Usando a igualdade  $\lambda = Q\nu$ , por (3.20) e alguma análise numérica, obtemos a Tabela 3.1.

$i$	$x'_i$	$\{T^k(x'_i) : 0 \leq k \leq N(x'_i) - 1\}$	$T^{N(x'_i)}(x'_i)$	$N(x'_i)$
0	0	0	0.796052...	1
1	$\nu_1$	$x_1$ 1.311107...	0.796052...	2
2	$\nu_1 + \nu_2$	0.548394... $x_3$	$x'_4$	2
3	$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$	$x_2$	0.451606...	1
4	1	1	0.107159...	1

Tabela 3.1: Análise numérica de  $x'_i$ .

A Tabela 3.1 nos mostra que (H1) e (H2) na Definição 3.5 são satisfeitas para  $B = \bigcup_{i=1}^4 \{x'_i, T(x'_i), \dots, T^{N(x'_i)-1}(x'_i)\}$  e  $a' = x'_4 = 1$ . De fato,  $\mathcal{D}(T) = \{x_1, x_2, x_3\} \subset B$  e  $a' \in T(B)$ . Logo  $I'$  é um intervalo admissível para  $T$ . Pela Proposição 3.8, para cada  $1 \leq i \leq 4$ , existe  $r_i \geq 1$  e uma palavra  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  sobre o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$  tal que (A1)-(A4) são verdadeiros. Em particular, temos  $r_i = N(c_i)$ , onde  $c_i = (x'_{i-1} + x'_i)/2$ . Os valores de  $r_i$  e  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  são dados na Tabela 3.2. Pelo Corolário 3.9, Tabela 3.2

$i$	$c_i = (x'_{i-1} + x'_i)/2$	$\{T^k(c_i) : 0 \leq k \leq r_i - 1\}$	$T^{r_i}(c_i)$	$N(c_i)$	$i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$
1	0.172223...	0.172223...	0.623829...	1	1
2	0.4464201...	0.446420...      1.209134...	0.898026...	2	24
3	0.601974...	0.601974...      1.053579...	0.053579...	2	23
4	0.827777...	0.827777...	0.2793829...	1	3

Tabela 3.2: Análise numérica e itinerário de  $c_i$ .

e a igualdade  $\lambda = Q\nu$ , segue que a transformação de Poincaré  $T'$  de  $T$  em  $I' = [0, 1]$  é

dada por

$$T'(x) = \begin{cases} -x + \lambda_1 + \lambda_3 = -x + \nu_1 + \nu_3 + \nu_4 = -x - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [x'_0, x'_1) \\ x + \lambda_3 = x + \nu_3 + \nu_4 = x - \nu_1 - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [x'_1, x'_2] \\ x + \lambda_2 + \lambda_3 - |\boldsymbol{\lambda}| = x - \lambda_1 - \lambda_4 = x - \nu_1 - \nu_2 & \text{se } x \in (x'_2, x'_3) \\ -x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -x + \nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4 = -x + \nu_3 + 1 & \text{se } x \in [x'_3, x'_4] \end{cases}.$$

Como queríamos.  $\square$

**Lema 3.22** (Lema de Redução). *Se  $T'$  for topologicamente transitiva, então  $T$  também o é.*

*Demonstração.* É suficiente verificar as hipóteses do Corolário 3.12. Pelo Lema 3.21,  $I'$  é um intervalo admissível para  $T$ . Além disso, pela penúltima coluna da Tabela 3.2 e pela igualdade  $\boldsymbol{\lambda} = Q\nu$ , obtemos que  $J_i = (x'_{i-1}, x'_i)$ ,

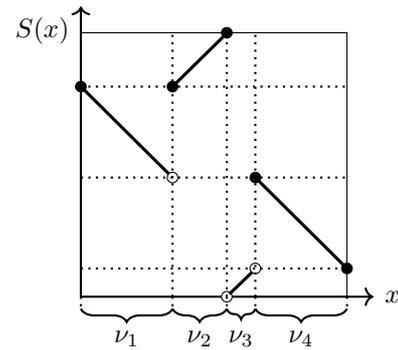
$$\sum_{i=1}^4 r_i |J_i| = \sum_{i=1}^4 r_i (x'_i - x'_{i-1}) = \sum_{i=1}^4 r_i \nu_i = \nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = |\boldsymbol{\lambda}|,$$

demonstrando que (H3) é verdadeiro.  $\square$

### 3.3.2 A Aplicação $S$

Seja  $S : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a 4-IET definida por

$$S(x) = \begin{cases} -x - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [y_0, y_1) \\ x - \nu_1 - \nu_2 + 1 & \text{se } x \in [y_1, y_2] \\ x - \nu_1 - \nu_2 & \text{se } x \in (y_2, y_3) \\ -x + \nu_3 + 1 & \text{se } x \in [y_3, y_4] \end{cases},$$



onde

$$y_0 = x'_0 = 0, \quad y_1 = x'_1 = \nu_1, \quad y_2 = x'_2 = \nu_1 + \nu_2, \quad y_3 = x'_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \quad y_4 = x'_4 = 1. \quad (3.21)$$

Então  $\mathcal{D}(S) = \{y_1, y_2, y_3\}$ . Na seção anterior, provamos que  $S = T'$ . Seja  $L : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{\eta}]$  a aplicação  $L(y) = \frac{1}{\eta}y$ . Se  $y'_i = L(y_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , então

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = \frac{1}{\eta}y_1, \quad y'_2 = \frac{1}{\eta}y_2, \quad y'_3 = \frac{1}{\eta}y_3, \quad y'_4 = \frac{1}{\eta}.$$

As demonstrações dos próximos três lemas estão no Apêndice.

**Lema 3.23.**  $[0, \frac{1}{\eta}]$  é um intervalo admissível para  $S$ .

*Demonstração.* A demonstração consiste em verificar as hipóteses (H1) e (H2) na Definição 3.5, para a aplicação  $S$  e o intervalo  $I' = [0, \frac{1}{\eta}] \cong [0, 0.096788]$ . Note que  $\mathcal{D}(S) = \{y_1, y_2, y_3\}$ , onde

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \nu_1 \cong 0.344446, \quad y_2 = \nu_1 + \nu_2 \cong 0.548394, \quad y_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0.655553, \quad y_4 = 1.$$

Seja

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = \frac{1}{\eta}y_1, \quad y'_2 = \frac{1}{\eta}y_2, \quad y'_3 = \frac{1}{\eta}y_3, \quad y'_4 = \frac{1}{\eta}.$$

Usando a desigualdade  $P\nu = \eta\nu$  e alguma análise numérica, obtemos a Tabela 3.3. Ela nos mostra que (H1) e (H2) na Definição 3.5 são satisfeitas para  $B = \bigcup_{i=1}^4 \{y'_i, S(y'_i), \dots, S^{N(y'_i)-1}(y'_i)\}$  e  $a' = y'_4 = \frac{1}{\eta}$ . De fato,  $\mathcal{D}(T) = \{y_1, y_2, y_3\} \subset B$  e  $a' \in S(B)$ . Logo,  $I' = [0, \frac{1}{\eta}]$  é um intervalo admissível para  $S$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Lema 3.24.**  $S$  é auto-similar em  $[0, \frac{1}{\eta}]$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 3.23 e Proposição 3.8, para cada  $1 \leq i \leq 4$ , existem  $r_i \geq 1$  e uma palavra  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  sobre o alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$  de modo que (A1)-(A4) são verdadeiros. Em particular, temos  $r_i = N(c_i)$ , onde  $c_i = (y'_{i-1} + y'_i)/2$ . As iteradas  $S^k(c_i)$  são mostradas na Tabela 3.4. Os valores de  $r_i$  e  $i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$  são dados na Tabela 3.5. Pelo Corolário 3.9, Tabela 3.5 e igualdade  $\lambda = Q\nu$ , segue que a transformação de Poincaré  $S'$  de  $S$  em  $[0, \frac{1}{\eta}]$  é dada por

$$S'(x) = \begin{cases} -x + 2 - 2\nu_1 - 5\nu_2 - 2\nu_3 & \text{se } x \in (y'_0, y'_1) \\ x + 2 - 3\nu_1 - 4\nu_2 - \nu_3 & \text{se } x \in (y'_1, y'_2) \\ x + 3 - 5\nu_1 - 6\nu_2 - \nu_3 & \text{se } x \in (y'_2, y'_3) \\ -x + \nu_3 & \text{se } x \in (y'_3, y'_4) \end{cases}. \quad (3.22)$$

$i$	$y'_i$	$\{S^k(y'_i) : 0 \leq k \leq N(y'_i) - 1\}$	$S^{N(y'_i)}(y'_i)$	$N(y'_i)$
0	0	0            0.796052...   0.311107...   0.484944... 0.936550...   0.170609...   0.625442...	0.077048...	7
1	$\frac{\nu_1}{\eta}$	0.033338...   0.762713... $y_1$ 0.796052... 0.311107...   0.484944...   0.936550...   0.170609... 0.625442...	0.077048...	9
2	$\frac{\nu_1 + \nu_2}{\eta}$	0.053078...   0.742974...   0.364185...   0.815791... 0.291368...   0.504683...   0.956289...   0.150869... 0.645182...	$y'_4$	9
3	$\frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}{\eta}$	0.063449...   0.732602...   0.374557...   0.826163... 0.280996...   0.515055...   0.966661...   0.140498... $y_3$ 0.451605...   0.903211...   0.203947 0.592104...	0.043710...	13
4	$\frac{1}{\eta}$	0.096788...   0.699263...   0.407895...   0.859501... 0.247658... $y_2$ 1            0.107159... 0.688892...   0.418267...   0.869873...   0.237286... 0.558765...	0.010371...	13

Tabela 3.3: Análise numérica de  $y'_i$ .

Por (3.22) e pela igualdade  $\frac{1}{\eta}\nu = P^{-1}\nu$ , segue que  $S' = L \circ S \circ L^{-1}$  em  $I' \setminus \{y'_0, \dots, y'_4\}$ , demonstrando que  $S$  é auto-similar em  $\left[0, \frac{1}{\eta}\right]$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

**Lema 3.25.**  $S$  é topologicamente transitiva.

*Demonstração.* É suficiente verificar as hipóteses do Corolário 3.16. Pelo Lema 3.23,  $\left[0, \frac{1}{\eta}\right]$  é um intervalo admissível para  $S$ . Pelo Lema 3.24,  $S$  é auto-similar em  $\left[0, \frac{1}{\eta}\right]$ . Denote por  $p_{ij}$  a entrada  $i, j$  da matriz  $P$ . Pela segunda coluna da Tabela 3.5 e pela igualdade  $P\nu = \eta\nu$ , tomando  $J_i = (y'_{i-1}, y'_i)$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^4 r_i |J_i| = \sum_{i=1}^4 r_i (y'_i - y'_{i-1}) = \sum_{i=1}^4 r_i \frac{\nu_i}{\eta} = \frac{1}{\eta} (7\nu_1 + 9\nu_2 + 15\nu_3 + 13\nu_4) \quad (3.23)$$

$$= \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 p_{ij} \nu_i = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \eta \nu_i = 1, \quad (3.24)$$

o que mostra que (H3) é verdadeiro. Aplicando (3.15) na terceira coluna da Tabela 3.5 obtemos  $M = P$ , onde  $M$  é a matriz associada a  $\left(S, \left[0, \frac{1}{\eta}\right]\right)$ . Logo,  $M$  é positiva e então

$i$	$d_i = \frac{(y'_{i-1} + y'_i)}{2}$	$\{S^k(d_i) : 0 \leq k \leq r_i - 1\}$	$S^{r_i}(d_i)$	$N(d_i)$
1	0.016669...	0.016669... 0.779382... 0.327776... 0.468275... 0.919881... 0.187278... 0.608773...	0.060379...	7
2	0.043208...	0.043208... 0.752843... 0.354315... 0.805921... 0.301237... 0.494814... 0.946420... 0.160739... 0.635312...	0.086918...	9
3	0.0582639...	0.058263... 0.737788... 0.369371... 0.820977... 0.286182... 0.509869... 0.961475... 0.145684... 0.650368... 0.101973... 0.694078... 0.413081... 0.864687... 0.242472... 0.553579...	0.005185...	15
4	0.08011894...	0.080118... 0.715933... 0.391226... 0.842832... 0.264327... 0.531724... 0.983330... 0.123829... 0.672223... 0.434936... 0.886542... 0.220617... 0.575434...	0.027040...	13

Tabela 3.4: Análise numérica de  $d'_i$ .

$i$	$r_i = N(d_i)$	$i_0 i_1 \dots i_{r_i-1}$
1	7	1 4 1 2 4 1 3
2	9	1 4 2 4 1 2 4 1 3
3	15	1 4 2 4 1 2 4 1 3 1 4 2 4 1 3
4	13	1 4 2 4 1 2 4 1 4 2 4 1 3

Tabela 3.5: Itinerário de  $d'_i$ .

(H4) é verdadeira. Pelo Corolário 3.16,  $S$  é topologicamente transitiva.  $\square$

**Lema 3.26.**  $S$  é unicamente ergódica.

*Demonstração.* Segue da demonstração de 3.25 que a matriz  $P$  associada a  $S$  é positiva e que  $S$  satisfaz todas as hipóteses da Proposição 3.20, portanto  $S$  é unicamente ergódica.  $\square$

**Lema 3.27.**  $T$  é topologicamente transitiva.

*Demonstração.* Pelo Lema 3.25,  $S$  é topologicamente transitiva. Como  $S = T'$ ,  $T'$  também é topologicamente transitiva. Para concluir a demonstração basta aplicar o Lema 3.22.  $\square$

**Teorema 3.28.** *A transformação  $T$  definida em (3.20) é minimal e unicamente ergódica.*

*Demonstração.* A dinâmica topológica de  $n$ -IETs é bem conhecida. Em particular, é bem conhecido que o domínio de  $T$  se divide em uniões de componentes periódicas, componentes minimais e  $T$ -conexões (ver [39, Teorema 3.2] e [28, pp. 470-480]). Pelo Lema 3.27,  $T$  é topologicamente transitiva, logo  $T$  não possui componente periódica e possui uma única componente minimal. Além disso, a componente minimal é também um conjunto quase-minimal no sentido de que cada órbita não periódica é densa nele. Desse modo,  $T$  será minimal se mostrarmos que  $T$  não possui órbita periódica. Suponhamos por contradição que  $T$  possui uma órbita periódica  $\gamma$ . Então  $\gamma$  contém ao menos uma descontinuidade de  $T$ , do contrário existiria uma componente periódica contendo  $\gamma$ . Em particular,  $T$  possui uma  $T$ -conexão, ou seja, existem  $k \geq 1$  e  $x_i, x_j \in \mathcal{D}(T)$  tais que  $T^k(x_i) = x_j$  e  $T^\ell(x_i) \notin \mathcal{D}(T)$  para todo  $0 < \ell < k$ . Logo, como  $D(T) \cap I' = \emptyset$  e  $I' = [0, 1]$  é admissível, a órbita de qualquer ponto de  $I'$  não poderia atingir  $x_i$  ou  $x_j$  o que é uma contradição, pois nesse caso a aplicação de primeiro retorno de  $T$  em  $I'$  teria no máximo 3 descontinuidades. Portanto  $T$  não possui nenhuma órbita periódica, mostrando que  $T$  é minimal.

Agora provemos que  $T$  é unicamente ergódica. Como  $T$  não possui órbitas periódicas, todas as medidas não-atômicas  $T$ -invariantes são suportadas em um conjunto não enumerável. Sejam  $\mu_1, \mu_2$  duas medidas de probabilidade de Borel não-atômicas  $T$ -invariantes, então  $\mu'_1 = \frac{1}{\mu_1([0,1])}\mu_1$  e  $\mu'_2 = \frac{1}{\mu_2([0,1])}\mu_2$  são medidas de probabilidade de Borel  $S$ -invariantes, logo pela Proposição 3.26  $\mu'_1 = \mu'_2$ . Mais ainda, pela demonstração do Lema 3.22,  $T$  satisfaz (H3) em  $[0, 1]$ , logo qualquer intervalo aberto de  $I$  pode ser decomposto a menos de uma quantidade finita de pontos como a união finita de imagens de intervalos abertos em  $[0, 1]$  por  $T^k$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Disso segue que  $\mu_1 = \mu_2$  e portanto  $T$  é unicamente ergódica.  $\square$

### 3.4 Contrações por Partes

Nesta seção construiremos um switched server system semiconjugado ao modelo isométrico. Pelo Lema 3.1 e Teorema 3.28, o que nos resta a fazer é encontrar parâmetros  $d_1, d_2, d_3 > 0$  de modo que a aplicação  $f_{d_1, d_2, d_3}$  definida em (3.2) seja topologicamente semiconjugada a  $T$ . A aplicação  $f_{d_1, d_2, d_3}$  é uma contração  $\frac{1}{2}$ -afim por partes conforme a seguinte definição:

**Definição 3.29** (contração  $\frac{1}{2}$ -afim por partes). Uma aplicação  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma *contração  $\frac{1}{2}$ -afim por partes* se existir uma partição de  $[0, 1]$  em intervalos  $J_1, \dots, J_n$ , números  $a_1, \dots, a_n \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$  e  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = a_i x + b_i$  para todo  $x \in J_i$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Diremos que uma aplicação  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é *topologicamente semiconjugada* ao modelo isométrico  $T : [0, |\boldsymbol{\lambda}|] \rightarrow [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  se existir uma aplicação  $h : [0, 1] \rightarrow [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  contínua, sobrejetora, não decrescente tal que  $h \circ f = T \circ h$ .

Nossa estratégia é a seguinte: inicialmente construímos uma classe  $\mathcal{C}$  de contrações  $\frac{1}{2}$ -afim por partes topologicamente semiconjugadas a  $T$  (Proposição 3.32). Então provamos que existem  $d_1, d_2, d_3 > 0$  de modo que  $f_{d_1, d_2, d_3} \in \mathcal{C}$  (Proposição 3.33). Para tanto, precisamos das definições seguintes. Sejam

$$p_1 = 0, \quad p_2 = T(\lambda_1 + \lambda_2), \quad p_3 = T(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad p_4 = |\boldsymbol{\lambda}|.$$

Para  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , sejam

$$K_{ij} = \{k \geq 0 : T^k(p_j) \in I_i\}, \quad c_{ij} = \sum_{k \in K_{ij}} \frac{1}{2^k}, \quad (3.25)$$

$$M = \begin{pmatrix} c_{11} - c_{14} & c_{12} - c_{14} & c_{13} - c_{14} \\ c_{21} - c_{24} & c_{22} - c_{24} & c_{23} - c_{24} \\ c_{31} - c_{34} & c_{32} - c_{34} & c_{33} - c_{34} \end{pmatrix},$$

$u_4 = 1 - u_1 - u_2 - u_3 > 0$ , onde  $u_1, u_2, u_3 > 0$  é a única solução do sistema linear

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} M \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix},$$

e

$$z_1 = u_1, \quad z_2 = u_1 + u_2, \quad z_3 = u_1 + u_2 + u_3. \quad (3.26)$$

**Definição 3.30** (A aplicação  $g_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\ell}}$ ). Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  e  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  com entradas positivas satisfazendo  $|\mathbf{u}| = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$  e  $|\boldsymbol{\ell}| = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \frac{1}{2}$ .

Seja  $g_{\mathbf{u},\boldsymbol{\ell}} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a contração  $\frac{1}{2}$ -afim por partes definida por

$$g_{\mathbf{u},\boldsymbol{\ell}}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{u_1}{2} + \frac{u_3}{2} + \ell_1 + \ell_2 & \text{se } x \in J_1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{u_1}{2} + \frac{1}{2} + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 & \text{se } x \in J_2 \\ -\frac{x}{2} + \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{2} + \ell_1 & \text{se } x \in J_3 \\ -\frac{x}{2} + \frac{u_1}{2} + \frac{u_3}{2} + \frac{1}{2} + \ell_1 + \ell_2 & \text{se } x \in J_4 \end{cases}, \quad (3.27)$$

onde  $J_1, J_2, J_3, J_4$  é a partição de  $[0, 1]$  dada por

$$J_1 = [0, u_1), \quad J_2 = [u_1, u_1 + u_2), \quad J_3 = [u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3), \quad J_4 = [u_1 + u_2 + u_3, 1].$$

Seja também

$$\mathcal{C} = \left\{ g_{\mathbf{u},\boldsymbol{\ell}} : u_i, \ell_i > 0, \forall i, \sum_{i=1}^4 u_i = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^4 \ell_i = \frac{1}{2} \right\}.$$

No que se segue, consideraremos  $T : [0, |\boldsymbol{\lambda}|] \rightarrow [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  como o modelo isométrico e  $I_1, I_2, I_3, I_4$  a partição de  $[0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  associada a  $T$  (ver (3.20)).

**Lema 3.31.** *As  $T$ -órbitas de  $p_1, p_2$  e  $p_3$  são duas a duas disjuntas.*

*Demonstração.* Denote por  $O(x) = \{x, T(x), \dots\}$  a  $T$ -órbita de  $x \in [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$ . Por (3.20),  $T(\lambda_1) = |\boldsymbol{\lambda}|$  e  $T(0) = T(|\boldsymbol{\lambda}|)$ . Logo,

$$O(p_1) \subset \{0\} \cup O(\lambda_1), \quad O(p_2) \subset O(\lambda_1 + \lambda_2), \quad O(p_3) \subset O(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Na demonstração do Teorema 3.28, mostramos que  $T$  não possui  $T$ -conexões. Logo, não existem  $T$ -órbitas que passam por duas descontinuidades de  $T$ . Isso junto com a injetividade de  $T$  em  $(0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  implica que  $O(\lambda_1)$ ,  $O(\lambda_1 + \lambda_2)$  e  $O(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$  são dois a dois disjuntos. Além disso, 0 não possui pré-imagem, o que conclui a demonstração  $\square$

**Proposição 3.32.** *Sejam  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  e  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  vetores com entradas positivas satisfazendo  $\sum_{i=1}^4 u_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^4 \ell_i = \frac{1}{2}$ , e*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

então  $g = g_{\mathbf{u},\boldsymbol{\ell}}$  é topologicamente semiconjugada a  $T$ .

*Demonstração.* Seja  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  o vetor com entradas positivas tal que  $\sum_{i=1}^4 \ell_i = \frac{1}{2}$ . Seja

$$\mathcal{P} = \{T^k(p_i) : k \geq 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 4\}.$$

Pelo Teorema 3.28,  $\mathcal{P}$  é um conjunto enumerável denso em  $[0, |\boldsymbol{\lambda}|]$ . Como  $T(p_1) = T(p_4)$ , podemos escrever  $\mathcal{P} = \{T^k(p_i) : k \geq 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 3\} \cup \{p_4\}$ . Seja  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow (0, 1)$  a aplicação definida por  $\phi(p_i) = \ell_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , e, para todo  $k \geq 1$ ,

$$\phi(T^k(p_1)) = \frac{\ell_1 + \ell_4}{2^k}, \quad \phi(T^k(p_2)) = \frac{\ell_2}{2^k}, \quad \phi(T^k(p_3)) = \frac{\ell_3}{2^k}.$$

Pelo Lema 3.31,  $\phi$  está bem definida. Para cada  $p \in \mathcal{P}$ , seja  $G_p \subset [0, 1]$  o intervalo compacto definido por  $G_{p_1} = [0, \ell_1]$ ,  $G_{p_4} = [1 - \ell_4, 1]$  e

$$G_p = \left[ \sum_{\substack{q < p \\ q \in \mathcal{P}}} \phi(q), \phi(p) + \sum_{\substack{q < p \\ q \in \mathcal{P}}} \phi(q) \right] \quad \text{se } p \notin \{p_1, p_4\}. \quad (3.29)$$

Note que  $G_p$  possui comprimento  $|G_p| = \phi(p)$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Logo,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} |G_p| = \sum_{i=1}^4 \ell_i + \sum_{k \geq 1} \frac{\ell_1 + \ell_4 + \ell_2 + \ell_3}{2^k} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \right) = 1. \quad (3.30)$$

Por (3.29) e pela densidade de  $\mathcal{P}$  em  $[0, |\boldsymbol{\lambda}|]$ , segue que  $\mathcal{P}$  e  $\{G_p\}_{p \in \mathcal{P}}$  compartilham a mesma ordem, isto é, se  $p, q \in \mathcal{P}$ , então

$$p < q \iff \sup G_p < \inf G_q. \quad (3.31)$$

Em particular, segue que os intervalos  $G_p$ ,  $p \in \mathcal{P}$  são dois a dois disjuntos e, por (3.30), sua união é densa em  $[0, 1]$ .

Seja  $\widehat{h} : \bigcup_{p \in \mathcal{P}} G_p \rightarrow [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$  a função tal que em  $G_p$  assume o valor constante igual a  $p$ . Por (3.30) e (3.31), segue que  $\widehat{h}$  é não-decrescente e possui domínio denso em  $[0, 1]$  e contradomínio denso em  $[0, |\boldsymbol{\lambda}|]$ . Logo,  $\widehat{h}$  admite uma única extensão contínua sobrejetiva não-decrescente  $h : [0, 1] \rightarrow [0, |\boldsymbol{\lambda}|]$ . Observemos que  $h^{-1}(\{p\}) = G_p$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Denotemos por  $J_1, J_2, J_3, J_4$  a partição de  $[0, 1]$  definida por  $J_i = h^{-1}(I_i)$ , onde  $I_1, I_2, I_3, I_4$  são como na definição do modelo isométrico  $T$ .

Seja  $\widehat{g} : \bigcup_{p \in \mathcal{P}} G_p \rightarrow \bigcup_{p \in \mathcal{P}} G_{T(p)}$  a função definida da seguinte maneira. Para cada  $p \in \mathcal{P} \setminus \{p_1, p_4\}$ ,  $\widehat{g}|_{G_p} : G_p \rightarrow G_{T(p)}$  é uma bijeção afim com inclinação  $-\frac{1}{2}$ . Para  $p \in \{p_1, p_4\}$ , denotando  $G_{T(p_1)} = G_{T(p_4)}$  por  $[a, b]$ , definimos  $\widehat{g}|_{G_{p_1}} : G_{p_1} \rightarrow [a, b - \ell_4/2]$  como sendo uma bijeção com inclinação  $-\frac{1}{2}$  e  $\widehat{g}|_{G_{p_4}} : G_{p_4} \rightarrow [b - \ell_4/2, b]$  de modo que análogo. Afirmamos

que para cada  $1 \leq i \leq 4$ , existe um subconjunto denso  $\widehat{J}_i$  de  $J_i$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  tal que

$$\widehat{g}(x) = -\frac{1}{2}x + b_i \quad \text{para todo } x \in \widehat{J}_i. \quad (3.32)$$

Seja  $1 \leq i \leq 4$ ,  $\widehat{I}_i = I_i \cap \mathcal{P}$ , and  $\widehat{J}_i = \bigcup_{p \in \widehat{I}_i} G_p$ , então, por (3.30) e (3.31), segue que

(i)  $J_i \cap \bigcup_{p \in \mathcal{P}} G_p$  é denso em  $J_i$ ;

(ii)  $J_i \cap \bigcup_{p \in \mathcal{P}} G_p = h^{-1}(I_i) \cap \bigcup_{p \in \mathcal{P}} h^{-1}(\{p\}) = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} h^{-1}(\{p\} \cap I_i) = \bigcup_{p \in \widehat{I}_i} G_p = \widehat{J}_i$ ,

mostrando que  $\widehat{J}_i$  é um subconjunto denso de  $J_i$ .

Além disso,  $\widehat{g}|_{G_p}$  tem derivada  $-\frac{1}{2}$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ , logo existe  $c_p \in \mathbb{R}$  tal que

$$\widehat{g}(x) = -\frac{1}{2}x + c_p \quad \text{para todo } x \in G_p \text{ e } p \in \mathcal{P}. \quad (3.33)$$

Provemos que  $\widehat{g}$  é estritamente decrescente em  $\widehat{J}_i = \bigcup_{p \in \widehat{I}_i} G_p$ . Sejam  $x < y$  dois pontos em  $\widehat{J}_i$ . Como  $\widehat{g}$  já é estritamente decrescente no intervalo  $G_p$ , podemos assumir que  $x \in G_p$  e  $y \in G_q$ , onde  $p, q \in \widehat{I}_i$  são tais que  $\sup G_p < \inf G_q$ . Por (3.31), segue que  $p < q$  e  $\{p, q\} \subset I_i$ . Logo, como  $T'(z) = -1$  para todo  $z \in I_i$ , segue que  $T|_{I_i}$  é decrescente, logo  $T(p) > T(q)$ . Por (3.31) novamente, obtemos  $\sup G_{T(q)} < \inf G_{T(p)}$ . Por definição,  $\widehat{g}(p) \in G_{T(p)}$  e  $\widehat{g}(q) \in G_{T(q)}$ , logo  $\widehat{g}(p) > \widehat{g}(q)$ . Isso prova que  $\widehat{g}$  é decrescente em  $\widehat{J}_i$ . Resta demonstrar que  $c_p$  em (3.33) é o mesmo para todo  $p \in \widehat{I}_i$ . Sejam  $p, q \in \widehat{I}_i$  com  $p \neq q$ . Podemos assumir que  $a = \sup G_p < \inf G_q = b$ . Como  $\widehat{g}$  é decrescente em  $\widehat{J}_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b - a) - (c_q - c_p) &= -(\widehat{g}(b) - \widehat{g}(a)) = \sum_{G_r \subset [a, b]} |\widehat{g}(G_r)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{G_r \subset [a, b]} |G_r| = \frac{1}{2}(b - a), \end{aligned}$$

obtemos que  $c_p = c_q$ . Logo, (3.32) é verdadeira.

Segue de (3.32) que  $\widehat{g}|_{\widehat{J}_i}$  admite uma única extensão contínua e monótona ao intervalo  $J_i = h^{-1}(I_i)$ . Essa extensão é também uma aplicação afim com inclinação igual a  $-\frac{1}{2}$ . Como  $i$  é arbitrário, obtemos uma extensão injetora contínua por partes  $\frac{1}{2}$ -afim  $g$  de  $\widehat{g}$  a todo o intervalo  $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^4 J_i$ .

Afirmamos que  $h \circ g = T \circ h$ . De fato, para cada  $y \in G_p$ , segue que

$$h(g(y)) = \widehat{h}(\widehat{g}(y)) = T(p) = T(\widehat{h}(y)) = T(h(y)). \quad (3.34)$$

Logo, (3.34) vale para um subconjunto denso de  $[0, 1]$ . Por continuidade, (3.34) vale para todo  $y \in [0, 1]$ . Assim obtemos que,  $g$  é topologicamente semiconjugada a  $T$ .

A Figura 3.4 nos dá o gráfico da aplicação  $g$ . Todas as inclinações são iguais a  $-\frac{1}{2}$ . É elementar verificar que  $g = g_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\ell}}$ , onde  $u_i = |J_i|$ . Logo a fórmula de  $g$  é aquela dada na Definição 3.30.

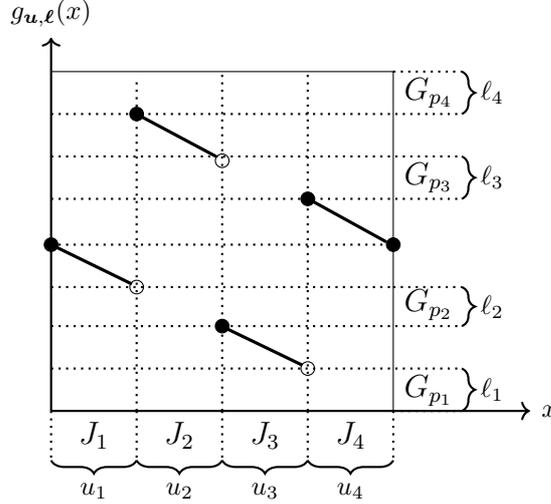


Figura 3.4: O gráfico de  $g = g_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\ell}}$ .

Resta demonstrar que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  satisfaz (3.28). De fato,  $\sum_{i=1}^4 u_i = \sum_{i=1}^4 |J_i| = 1$ . Além disso,

$$u_i = |J_i| = \sum_{G_p \subset J_i} |G_p| = \sum_{p \in \mathcal{P} \cap I_i} \phi(p) = \sum_{j=1}^4 \sum_{k \in K_{ij}} \frac{\ell_j}{2^k} = \sum_{j=1}^4 c_{ij} \ell_j.$$

Trocando  $\ell_4$  por  $\frac{1}{2} - \ell_1 - \ell_2 - \ell_3$  obtemos, para todo  $1 \leq i \leq 3$ ,

$$u_i = \sum_{j=1}^3 (c_{ij} - c_{i4}) \ell_j + \frac{1}{2} c_{i4},$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.33.** *Seja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  tal que  $u_1, u_2, u_3 > 0$ ,  $u_4 = 1 - u_1 - u_2 - u_3$ ,*

$$0 < u_1 < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < u_1 + u_2 < \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} < u_1 + u_2 + u_3 < 1, \quad (3.35)$$

e seja  $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$  o vetor com entradas positivas satisfazendo  $\sum_{i=1}^4 \ell_i = \frac{1}{2}$ . Se

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

$$z_1 = u_1, \quad z_2 = u_1 + u_2, \quad z_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad (3.37)$$

e

$$d_1 = \frac{1}{3z_1} - 1, \quad d_2 = \frac{2 - 3z_2}{3z_2 - 1}, \quad d_3 = \frac{3 - 3z_3}{3z_3 - 2}, \quad (3.38)$$

então  $g_{\mathbf{u},\ell} = f_{d_1, d_2, d_3}$ , isto é,  $g_{\mathbf{u},\ell}$  é a transformação de Poincaré de um switched server system.

*Demonstração.* Substituindo (3.36) em (3.27), e (3.37) e (3.38) em (3.2), podemos verificar facilmente que  $g_{\mathbf{u},\ell} = f_{d_1, d_2, d_3}$ .  $\square$

A seguir, temos o principal teorema do capítulo.

**Teorema 3.34.** *Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  as soluções de (3.26) e sejam  $d_1, d_2, d_3 > 0$  definidos por*

$$d_1 = \frac{1}{3z_1} - 1 = 0.213841\dots, \quad d_2 = \frac{2 - 3z_2}{3z_2 - 1} = 4.036935\dots, \quad d_3 = \frac{3 - 3z_3}{3z_3 - 2} = 1.428826\dots$$

Então para qualquer switched server system com parâmetros  $d_{ij}$  satisfazendo (3.1) as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) O switched server system não possui nenhuma órbita periódica;
- (b) A aplicação de Poincaré  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  do sistema é topologicamente semiconjugada a  $T$ ;
- (c)  $\omega_F(\mathbf{v})$  é o conjunto de Cantor para todo  $\mathbf{v} \in \partial\Delta$ ;
- (d) A frequência  $\text{freq}(i)$  a qual o servidor está conectado ao reservatório  $i$  nos instantes de chaveamento é

$$\text{freq}(1) = \frac{\lambda_3}{|\boldsymbol{\lambda}|} \cong 34.44\%, \quad \text{freq}(2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{|\boldsymbol{\lambda}|} \cong 41.82\%, \quad \text{freq}(3) = \frac{\lambda_2}{|\boldsymbol{\lambda}|} \cong 23.72\%.$$

*Demonstração.* Os itens (a) e (b) do Teorema 3.34 seguem imediatamente das Proposições 3.32, 3.33 e Teorema 3.28. Seja  $\mathbf{v} \in \partial\Delta$ . É evidente que  $\omega_F(\mathbf{v})$  é um conjunto fechado, e portanto compacto, para todo  $\mathbf{v} \in \partial\Delta$ . Pela injetividade de  $F : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$  (que é topologicamente conjugado a contração por partes  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  injetora em  $(0, 1]$ ) e por [42, Lema 4.1], existe uma quantidade finita de conjuntos abertos dois a dois disjuntos  $F_1, \dots, F_r$  de  $\partial\Delta$  tais que  $\bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k \geq 0} F^k(F_j)$  é denso em  $\partial\Delta$  e  $F^k(\mathbf{v}) \in \partial\Delta \setminus \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{\ell=0}^{k-1} F^\ell(F_j)$  para todo  $k \geq 1$ . Como  $\left\{ \partial\Delta \setminus \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{\ell=0}^{k-1} F^\ell(F_j) \right\}_{k \geq 1}$  é uma sequência de compactos encaixantes, segue que  $\omega_F(\mathbf{v})$  pertence ao conjunto  $\partial\Delta \setminus \bigcup_{j=1}^r \bigcup_{k \geq 0} F^k(F_j)$ , que possui interior vazio. Logo,  $\omega_F(\mathbf{v})$  possui interior vazio,

portanto  $\omega_F(\mathbf{v})$  é totalmente desconexo. Pelo item (b),  $F$  é topologicamente semiconjugada a  $T$ , logo  $\omega_F(\mathbf{v})$  é um conjunto perfeito. Portanto  $\omega_F(\mathbf{v})$  é um conjunto de Cantor. Isso demonstra o item (c). Provemos o item (d). Sejam  $0 \leq t_1 < t_2 \dots$  os tempos de chaveamento. Seja  $\mathbf{v}(t_k) = (v_1(t_k), v_2(t_k), v_3(t_k))$  o estado do servidor no instante  $t_k$ . Por (3.8), segue que  $l(t_k) = 1$  (isto é, o servidor está conectado ao reservatório 1) se e somente se  $\mathbf{v}(t_k) \in [\mathbf{r}_2, \mathbf{e}_1] \cup [\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_3]$ . Como  $F$  é topologicamente semiconjugado a  $T$ , isso se traduz na seguinte dinâmica de intervalos:  $l(t_k) = 1$  se e somente se  $w_k \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ , onde  $w_k = h(\mathbf{v}(t_k))$  é a projeção de  $\mathbf{v}(t_k)$  pela semiconjugação topológica  $h$ . Como  $T$  é unicamente ergódica, a medida de Lebesgue normalizada  $\mu$  é a única medida de probabilidade de Borel  $T$ -invariante, logo pela versão do Teorema Ergódico de Birkhoff para transformações unicamente ergódicas (ver [27, Proposição 4.1.13]), obtemos

$$\begin{aligned} \text{freq}(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : l(t_k) = 1\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : w_k \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : T^{k-1}(w_1) \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\} \\ &= \mu([\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) = \frac{\lambda_3}{|\boldsymbol{\lambda}|}. \end{aligned}$$

Similarmente,  $l(t_k) = 2$  se e somente se  $\mathbf{v}(t_k) \in [\mathbf{r}_3, \mathbf{e}_2] \cup [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_1]$ . Em termos de dinâmica de intervalos, isso significa que  $l(t_k) = 2$  se e somente se  $w_k \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, |\boldsymbol{\lambda}|] \cup [0, \lambda_1)$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{freq}(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : l(t_k) = 2\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : w_k \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, |\boldsymbol{\lambda}|] \cup [0, \lambda_1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : T^{k-1}(w_1) \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, |\boldsymbol{\lambda}|] \cup [0, \lambda_1)\} \\ &= \mu([\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, |\boldsymbol{\lambda}|]) + \mu([0, \lambda_1)) = \frac{\lambda_1 + \lambda_4}{|\boldsymbol{\lambda}|}. \end{aligned}$$

Finalmente,  $l(t_k) = 3$  se e somente se  $\mathbf{v}(t_k) \in [\mathbf{r}_1, \mathbf{e}_3] \cup [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}_2]$ . Em termos de dinâmica

de intervalos, isso significa que  $l(t_k) = 3$  se e somente se  $w_k \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{freq}(3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : l(t_k) = 2\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : w_k \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq k \leq n : T^{k-1}(w_1) \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)\} \\ &= \mu([\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)) = \frac{\lambda_2}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

□

---

## Referências Bibliográficas

- [1] M. J. ÁLVAREZ, A. FERRAGUT AND X. JARQUE, *A survey on the blow up technique*. Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng **21** (2011), 3103-3118.
- [2] A. BIALYNICKI-BIRULA AND M. ROSENBLIGHT, *Injective morphisms of real algebraic varieties*. Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 200–203.
- [3] M. BLANK AND L. BUNIMOVICH, *Switched flow systems: pseudo billiard dynamics*. Dyn. Syst. **19** (2004), 359–370.
- [4] M. BOSHERNITZAN, *A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic*. Duke Math. J. **52** (1985), 723–752.
- [5] F. BRAUN AND J.R. DOS SANTOS FILHO, *The real Jacobian conjecture on  $\mathbb{R}^2$  is true when one of the components has degree 3*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **26** (2010), 75–87.
- [6] F. BRAUN AND F. FERNANDES *New lower bounds for the maximal number of inseparable leaves of nonsingular polynomial foliations of the plane*, J. Math. Anal. Appl. **491** (2020), 124268.
- [7] F. BRAUN AND B. ORÉFICE–OKAMOTO, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in  $\mathbb{R}^2$* , J. Math. Anal. Appl. **443** (2016), 688–706.
- [8] M.I.T. CAMACHO AND C.F.B. PALMEIRA, *Polynomial foliations of degree 3 in the plane*, Pitman Res. Notes Math. Ser. **160** (1987), 27–58.
- [9] R. CAMELIER AND C. GUTIERREZ, *Affine interval exchange transformations with wandering intervals*. Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), 1315–1338.
- [10] L.A. CAMPBELL, *The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve*. Appl. Math. Lett. **24** (2011), 62–65.
- [11] M. CARBONELL AND J. LLIBRE, *Chordal cubic systems*, Publ. Mat. **33** (1989), 253–311.

- [12] C. CHASE, J. SERRANO, AND P.J. RAMADGE, *Periodicity and chaos from switched flow systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems*. IEEE Trans. Automat. Control **38** (1993), 70–83.
- [13] C. CHICONE AND J.H. TIAN, *On general properties of quadratic systems*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), 167–178.
- [14] A. CIMA AND J. LLIBRE, *Homogeneous cubic systems in the plane. (Spanish)*, Proceedings of the seventh congress on differential equations and applications (Granada, 1984), 97–103, Univ. Granada, Granada, 1985.
- [15] M. COBO, *Piece-wise affine maps conjugate to interval exchanges*. Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 375–407.
- [16] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, J. C. ARTÉS *Theory of Planar Differential Systems* Universitext, Springer-Verlag (2006).
- [17] F. FERNANDES, *A new class of non-injective polynomial local diffeomorphisms on the plane*, Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/2003.10226.pdf> (2020).
- [18] F. FERNANDES AND B. PIRES, *A switched server system semiconjugate to a minimal interval exchange*. Euro. J. of Applied Mathematics **31** (2020), 682–708.
- [19] A. GASULL AND J. LLIBRE, *On the nonsingular quadratic differential equations in the plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 793–794.
- [20] A. GASULL, L.R. SHENG AND J. LLIBRE, *Chordal quadratic systems*, Rocky Mountain J. Math. **16** (1986), 751–782.
- [21] C. GUTIERREZ, *Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences*. Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), 17–44.
- [22] J. GWOŹDZIEWICZ, *The real Jacobian conjecture for polynomials of degree 3*, Ann. Polon. Math. **76** (2001), 121–125.
- [23] J. GWOŹDZIEWICZ, *Real Jacobian pairs with components of low degrees*, Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/2003.06193.pdf> (2020).
- [24] X. JARQUE AND J. LLIBRE, *Polynomial foliations of  $\mathbb{R}^2$* , Pacific J. Math. **197** (2001), 53–72.
- [25] W. KAPLAN, *Regular curve-families filling the plane, I*, Duke Math. J. **7** (1940), 154–185.

- [26] W. KAPLAN, *Regular curve-families filling the plane, II*, Duke Math. J. **8** (1941), 11–46.
- [27] A. KATOK, *Interval exchange transformations and some special flows are not mixing*. Israel J. Math. **35** (1980), 301–310.
- [28] A. KATOK AND B. HASSELBLATT, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol **54** (1995). Cambridge University Press, Cambridge.
- [29] M. KEANE, *Interval exchange transformations*. Math. Z. **141** (1975), 25–31.
- [30] S.P. KERCKHOFF, *Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations*. Ergodic Theory Dynam. Systems **5** (1985), 257–271.
- [31] T. Y. LI AND J. A. YORKE, *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.
- [32] L. MARKUS, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 127–148.
- [33] L. MARKUS, *Topological types of polynomial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 157–178.
- [34] H. MASUR, *Interval exchange transformations and measured foliations*. Ann. of Math. **115** (1982), 169–200.
- [35] M-P. MULLER, *Quelques propriétés des feuilletages polynomiaux du plan*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **21** (1976), 6–14.
- [36] A. NOGUEIRA, *Almost all interval exchange transformations with flips are nonergodic*. Ergodic Theory Dynam. Systems **9** (1989), 515–525.
- [37] A. NOGUEIRA, B. PIRES AND R. A. ROSALES, *Asymptotically periodic piecewise contractions of the interval*. Nonlinearity **27** (2014), 1603–1610.
- [38] A. NOGUEIRA, B. PIRES AND R. A. ROSALES, *Topological dynamics of piecewise  $\lambda$ -affine maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems **38** (2018), 1876–1893.
- [39] A. NOGUEIRA, B. PIRES AND S. TROUBETZKOY, *Orbit structure of interval exchange transformations with flip*. Nonlinearity **26** (2013), 525–537.
- [40] S. PINCHUK, *A counterexample to the strong real Jacobian Conjecture*, Math. Z. **217** (1994), 1–4.

- 
- [41] B. PIRES, *Invariant measures for piecewise continuous maps*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **354** (2016), 717–722.
- [42] B. PIRES, *Symbolic dynamics of piecewise contractions*. Nonlinearity **32** (2019), 4871–4889.
- [43] F. PLUVINAGE, *Espaces des feuilles de certaines structures feuilletées planes*, Colloq. Math. **18** (1967), 89–102.
- [44] M. REES, *An alternative approach to the ergodic theory of measured foliations on surfaces*. Ergodic Theory Dynamical Systems **1** (1981), 461–488.
- [45] E. SALINELLI AND F. TOMARELLI, *Discrete dynamical models* vol. 76 (2014). *Unitext* Springer, Cham.
- [46] A. V. SAVKIN AND A. S. MATVEEV, *Hybrid dynamical systems: stability and chaos*. In *Perspectives in robust control (Newcastle, 2000)*, vol 268 of *Lect. Notes Control Inf. Sci.* (2001), 297–309. Springer, London.
- [47] S. SCHECTER AND M.F. SINGER, *Planar polynomial foliations*. Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 649–656.
- [48] A. VAN DEN ESSEN, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, vol. 190, Birkhäuser Verlag, Basel, (2000).
- [49] W. A. VEECH, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*. Ann. of Math. **115** (1982), 201–242.