Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Identidades e polinômios centrais com involução para a álgebra de Grassmann e álgebra das matrizes triangulares de ordem 3

Dalton Couto Silva

Orientador: Dimas José Gonçalves

São Carlos
Novembro de 2020

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Identidades e polinômios centrais com involução para a álgebra de Grassmann e álgebra das matrizes triangulares de ordem 3

Dalton Couto Silva

Orientador: Dimas José Gonçalves

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos
Novembro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Dalton Couto Silva, realizada em 30/11/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (UNICAMP)

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov (UnB)

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Waldeck Schützer (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

... encontra-se arquivado junto ao Programa de

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida, pela sabedoria e por ter me sustentado em todas as adversidades que encontrei pelo caminho. Agradeço ainda mais por ter colocado pessoas tão especiais em minha vida.

Aos meus pais, Delton e Isa, meu irmão Danilo, e minha avó Alice, que sempre me incentivaram a seguir os estudos, torcendo de longe pelo meu melhor. Tudo isso não seria possível sem o carinho e o amor irrestrito de vocês!

Ao meu orientador Dimas José Gonçalves. Muito obrigado por ter me ensinado tantas lições valiosas, muito além da matemática. Levarei sempre comigo seu exemplo de dedicação, cuidado e respeito ao trabalho e às pessoas!

À minha amada companheira, Laiz Valim, pelo carinho, pela amizade, pelos conselhos e pelo apoio em todos os momentos e em todas as difíceis decisões que precisamos tomar. Você é minha inspiração para continuar crescendo. Muito obrigado!

À todos os amigos que fizeram parte da minha caminhada na UFSCar, em especial: Wagner, Karina, Renato, Bárbara, Renan e Vinícius. Obrigado por todos os momentos especiais que passei com cada um de vocês!

Ao Prof. Lucio Centrone, pela oportunidade de trabalho em conjunto, pela dedicação, por todas as sugestões e trocas de experiências.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2. Nesta tese, vamos estudar identidades polinomiais e polinômios centrais com involução para duas importantes classes de álgebras. Mais precisamente, descrevemos completamente o conjunto das identidades polinomiais com involução e o conjunto dos polinômios centrais com involução para a álgebra de Grassmann E, quando a involução $*$ considerada é qualquer.

Em seguida, descrevemos o conjunto das identidades polinomiais com involução para a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 3, $UT_3(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica $p \geq 3$ e a involução considerada é do primeiro tipo. Por fim, dada uma involução qualquer do primeiro tipo para $UT_n(\mathbb{F})$, com $n \geq 3$, verificamos que os seus únicos polinômios centrais com involução são os triviais.

Abstract

Let $\mathbb{F}$ be an infinite field of characteristic different from 2. In this thesis we will study the polynomial identities and central polynomials with involution for two important classes of algebras. More precisely, we describe completely the set of all polynomial identities with involution and the set of all central polynomials with involution for the Grassmann algebra E, when the involution $*$ is arbitrary.

Afterwards, we describe the set of all polynomial identities with involution for the algebra of upper triangular matrices of order 3, $UT_3(\mathbb{F})$, when $\mathbb{F}$ is an infinite field of characteristic $p \geq 3$ and the involution is of the first type. Finally, given an arbitrary involution of the first type for $UT_n(\mathbb{F})$, with $n \geq 3$, we verify that its only central polynomials with involution are the trivial ones.

Sumário

Introdução

Consideremos um corpo $\mathbb{F}$. Dada uma álgebra A associativa e unitária, sobre $\mathbb{F}$, dizemos que um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n)$ em variáveis não comutativas $x_1,\ldots,x_n$ é uma identidade polinomial para A se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$, para $a_1,\ldots,a_n$ arbitrários em A. Dizemos ainda que A é uma PI-álgebra se A satisfaz alguma identidade polinomial não nula. As definições acima são a base para iniciar os estudos da chamada teoria de álgebras que satisfazem identidades polinomiais. A partir delas, muitos outros conceitos interessantes foram derivados, entre eles: polinômios centrais, identidades polinomiais e polinômios centrais com involução, identidades polinomiais e polinômios centrais graduados, identidades polinomiais e polinômios centrais diferenciais. Entre esses conceitos, as identidades com involução têm sido motivo de extensa pesquisa nos últimos anos, e elas serão o assunto principal desta tese.

Se $\mathbb{F}$ for um corpo de característica diferente de 2, consideremos a álgebra associativa livre $\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$, livremente gerada pelo conjunto de variáveis $Y\cup Z=\{y_i,z_i\mid i\in\mathbb{N}\}$, com uma involução $*$ tal que $y_i^*=y_i$ e $z_j^*=-z_j$, para todos i,j. Chamamos os elementos desta álgebra apenas de polinômios. As definições formais de $*$-identidades polinomiais e $*$-polinômios centrais serão dadas no Capítulo 1 desta tese, mas, para um melhor entendimento desta introdução, enunciamos rapidamente esses conceitos: Um polinômio $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$ é dito ser uma $*$-identidade polinomial para uma álgebra com involução $(A,*)$ se $f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)=0$ para todos $a_i\in A^+$, $b_j\in A^-$, onde $A^+=\{a\in A\mid a^*=a\}$ e $A^-=\{a\in A\mid a^*=-a\}$. Dizemos que um polinômio $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$ é um $*$-polinômio central para $(A,*)$ se $f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)\in Z(A)$ para todos $a_i\in A^+$, $b_j\in A^-$, em que $Z(A)$ denota o centro da álgebra A.

Neste trabalho, vamos estudar as $*$-identidades polinomiais e os $*$-polinômios centrais de duas classes de álgebras: a álgebra de matrizes triangulares superiores, $UT_n(\mathbb{F})$, e a álgebra de Grassmann E, sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Nosso principal objetivo é encontrar uma família de geradores (de preferência finita e minimal) para os seguintes conjuntos: $Id(A,*)$, o conjunto das $*$-identidades polinomiais da álgebra A considerada; $C(A,*)$, o conjunto dos $*$-polinômios centrais da álgebra A considerada.

A escolha das álgebras de matrizes e a álgebra de Grassmann para este trabalho fica clara quando vemos a relevância histórica que elas possuem dentro da teoria de identidades e polinômios centrais para álgebras. Historicamente, muitos resultados envolvendo essas álgebras foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria. Podemos citar, por exemplo, o célebre Teorema de Amitsur-Levitzki, que diz que as matrizes quadradas de ordem n satisfazem a identidade *standard* de grau $2n$. Este teorema intensificou uma procura pela descrição do conjunto de todas as identidades polinomiais para as álgebras $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$. Nessa mesma época, Wilhelm Specht levantou a seguinte questão: Será que toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais? Este problema, que abordaremos com mais detalhes a frente, foi fundamental no desenvolvimento de vários resultados dessa área, que surgiram décadas a seguir.

Não podemos deixar de citar a importância das álgebras matriciais para o desenvolvimento dos polinômios centrais. A existência de polinômios centrais não triviais para as álgebras $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ foi conjecturada por Kaplansky, em 1957, e se tornou verdadeira através de dois trabalhos independentes, de Formanek [15] e Razmyslov [27], na primeira parte da década de 1970. Nestes trabalhos, Formanek e Razmyslov desenvolveram métodos para construir os seus polinômios centrais, e estes métodos abriram caminho para diversos trabalhos que o seguiram.

Voltando às identidades polinomiais, após o Teorema de Amitsur-Levitzki, em 1973 Razmyslov [28] apresentou um conjunto gerador com nove polinômios para as identidades polinomiais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ possui característica zero e em 1981, Drensky [13] reduziu esse número de geradores a apenas dois. Um pouco antes, em 1978, Maltsev e Kuzmin [26] descreveram as identidades polinomiais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ é finito. Em 2001, Koshlukov [21] descreveu as identidades polinomiais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ é infinito de característica diferente de 2. O caso restante, em que $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica dois resiste às tentativas dos matemáticos e permanece em aberto até hoje, assim como a descrição das identidades polinomiais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, com $n > 2$ e $\mathbb{F}$ infinito, e isso nos mostra que, em geral, procurar uma base de identidades polinomiais para uma dada álgebra é uma tarefa nada fácil.

Apesar das dificuldades apontadas acima para as álgebras matriciais, as álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n(\mathbb{F})$ são bem conhecidas com respeito às suas identidades polinomiais. De fato, Yu N. Maltsev [25] encontrou, em 1971, uma base para as identidades polinomiais de $UT_n(\mathbb{F})$, quando $\mathbb{F}$ possui característica zero. Em particular, Maltsev provou que todas as identidades polinomiais de $UT_n(\mathbb{F})$ são consequências do seguinte polinômio:

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Em 1981, Siderov [32] descreveu o conjunto das identidades polinomiais de $UT_n(\mathbb{F})$ sobre qualquer corpo $\mathbb{F}$. Após essas descrições iniciais, as álgebras de matrizes triangulares superiores se tornaram objeto de pesquisa para vários outros tipos de identidades, como por exemplo: as identidades polinomiais graduadas de $UT_n(\mathbb{F})$, as identidades polinomiais da álgebra de Lie $UT_n(\mathbb{F})$, as identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UT_n(\mathbb{F})$, entre outros. Dado o volume de conhecimento sobre os diversos tipos de identidades dessas álgebras, é natural se perguntar sobre as identidades com involução para $UT_n(\mathbb{F})$. Porém, como veremos durante esta tese, a descrição dessas identidades está longe de ser uma tarefa simples. Os motivos para esta dificuldade ainda não estão exatamente claros, mas fato é que muito pouco se sabe nesse sentido.

Voltemos agora ao problema enunciado por Specht, nos anos 50: "Será que toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?" Este problema se tornou notório na área, ficando conhecido como Problema de Specht, e impulsionou diversas subáreas de pesquisa. Uma resposta a este problema só surgiu no final dos anos 80. Em 1987, A. R. Kemer [19], provou que, sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero, todo conjunto de identidades polinomiais de uma dada álgebra A é finitamente gerado. Em particular, as identidades polinomiais de uma álgebra A são as mesmas identidades polinomiais do envelope de Grassmann de uma superálgebra finitamente gerada. A álgebra de Grassmann infinitamente gerada E já era um objeto importante de estudo antes mesmo de aparecer nos trabalhos de Kemer. De fato, ela foi uma das primeiras álgebras a ter seu conjunto de identidades polinomiais descrito. Krakowski e Regev [22], em 1973, mostraram que, sobre um corpo de característica zero, todas as identidades polinomiais de E são consequências do comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$. P. Koshlukov e A. Giambruno [16], em 2001, estenderam este mesmo resultado para corpos infinitos com característica $p > 2$.

Mais recentemente, verificou-se que a álgebra de Grassmann possui o mesmo papel verificado por Kemer para outros tipos de identidades, como as identidades graduadas [2] e as identidades com involução [1, 33]. Estes resultados evidenciam a importância da álgebra de Grassmann na teoria de PI-álgebras, e nos motivam a estudar a estrutura dos seus conjuntos de identidades polinomiais e polinômios centrais em outros tipos de identidades.

Nos parágrafos anteriores, esperamos ter convencido o leitor da importância das álgebras de matrizes e da álgebra de Grassmann para a teoria, justificando nossa escolha. Resta agora falar de outro conceito fundamental em nosso trabalho: as álgebras com involução.

O estudo de álgebras com involução não é recente, havendo artigos datando dos anos 1930 e, como se pode observar em [20], há um grande interesse no estudo dessas estruturas por conta de suas diversas relações com áreas diversas da matemática, física, entre outros. As identidades polinomiais com involução passaram a ser um objeto de estudo por volta dos anos 60, nos trabalhos de Herstein e Martindale (separadamente) sobre anéis simples com involuções satisfazendo identidades polinomiais. Quase 60 anos depois, ainda conhecemos pouco sobre a estrutura de $Id(A,*)$ e $C(A,*)$ para uma dada álgebra A. O primeiro conjunto de $*$-identidades polinomiais não triviais foi descrito em 1982, no artigo (em russo) [23], onde Diana Levchenko descreveu $Id(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}),*)$, sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero. Dois anos depois, em [24], a autora descreveu $Id(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}),*)$ quando $\mathbb{F}$ é um corpo finito.

As pesquisas nessa direção pararam por algum tempo, até que em 2001, Anisimov, em [4] descreveu o conjunto das $*$-identidades polinomiais para a álgebra de Grassmann E, quando o corpo $\mathbb{F}$ possui característica zero. Neste artigo, Anisimov estava interessado em descrever as $\mathbb{Z}_p$-codimensões das $\mathbb{Z}_p$-identidades de E, e nesse sentido, uma de suas ideias foi relacionar os automorfismos e os anti-automorfismos quaisquer de E com uma classe de automorfismos e anti-automorfismos que age de forma mais simples em E. Como não há uma classificação das involuções de E, essa relação criada por Anisimov foi fundamental em nosso trabalho, pois nos permitiu lidar apenas com involuções φ de E que levam os geradores básicos em uma combinação linear dos próprios geradores básicos.

Em 2005, Colombo e Koshlukov, em [11] estudaram as $*$-identidades polinomiais de $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$ quando $\mathbb{F}$ é corpo infinito de característica maior do que 2. Um ano depois, Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala, em [12] iniciaram os estudos para a álgebra de matrizes triangulares superiores. Os autores descreveram $Id(UT_2(\mathbb{F}),*)$ quando $\mathbb{F}$ é um corpo infinito com característica $p \neq 2$ e $Id(UT_3(\mathbb{F}),*)$ quando $\mathbb{F}$ possui característica zero. Continuando este estudo, Gonçalves e Urure, em [34], descreveram $Id(UT_2(\mathbb{F}),*)$ quando $\mathbb{F}$ é corpo finito de característica diferente de 2.

O artigo de Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala, que iniciou a descrição das $*$-identidades polinomiais para as álgebras de matrizes triangulares superiores também é notável por apresentar uma diferença substancial no estudo de identidades polinomiais e $*$-identidades polinomiais em $UT_n(\mathbb{F})$. De fato, como vimos mais acima, sobre um corpo infinito, todas as identidades polinomiais de $UT_n(\mathbb{F})$ são consequências do polinômio $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]$. Ao considerar a estrutura com involução, o número de geradores encontrados em [12] para as $*$-identidades polinomiais é muito maior e mais difícil de descrever. Motivados por este artigo, nos propusemos a estudar as $*$-identidades polinomiais de $UT_3(\mathbb{F})$ quando o corpo é infinito de característica diferente de dois.

Com relação aos $*$-polinômios centrais, os resultados são ainda mais esparsos. Em 2006, Brandão e Koshlukov, em [7] descreveram o conjunto $C(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}),*)$, quando $\mathbb{F}$ é corpo infinito de característica diferente de dois, e até onde sabemos, a descrição de $C(\mathbb{M}_2(\mathbb{F}),*)$, quando $\mathbb{F}$ é corpo finito ainda é um problema em aberto.

Para a álgebra $UT_2(\mathbb{F})$, um estudo completo foi realizado por Gonçalves e Urure, em 2019 [35], tendo sido descritos $C(UT_2(\mathbb{F}),*)$, quando $\mathbb{F}$ é qualquer corpo com característica diferente de dois. É interessante mencionar que, ao considerar polinômios centrais ordinários, as álgebras de matrizes triangulares superiores possuem apenas os triviais. Em [35], os autores garantiram a existência de $*$-polinômios centrais não triviais para $UT_2(\mathbb{F})$, abrindo espaço para a possibilidade de existência de $*$-polinômios centrais não triviais para $UT_n(\mathbb{F})$, com $n > 2$. Deixamos o leitor com essa interrogação até as últimas páginas desta tese, onde fazemos uma descrição completa de $C(UT_n(\mathbb{F}), *)$.

No primeiro capítulo desta tese, seguimos a tradição da área e fazemos uma exposição dos conceitos básicos da teoria de PI-álgebras. Em especial, nas Seções 1.3 e 1.4, apresentamos as definições, os resultados e os principais exemplos em $*$-identidades polinomiais e $*$-polinômios centrais, a fim de manter nosso texto o mais autossuficiente possível.

Em seguida, no Capítulo 2, partimos para um estudo mais detalhado das identidades com involução para a álgebra de Grassmann. Como vimos mais acima, este estudo se iniciou em 2001, quando Anisimov, em [4], descreveu $Id(E, *)$, quando o corpo possui característica zero. Neste Capítulo, vamos apresentar uma demonstração mais curta e direta para este resultado de Anisimov, e também estenderemos esta descrição para os corpos infinitos com característica $p > 2$. Em ambos os casos, obtemos um conjunto finito de geradores para $Id(E, *)$.

Ainda neste capítulo, vamos descrever os $*$-polinômios centrais de E. Sem a estrutura da involução, os polinômios centrais de E foram descritos recentemente, em 2009, em [8]. Neste artigo, os autores mostraram que o T-espaço dos polinômios centrais de E é finitamente gerado em característica zero, e não é finitamente gerado em característica positiva, descrevendo um conjunto infinito de geradores. Vale ressaltar que este resultado é bastante surpreendente, uma vez que poucos T-espaços não finitamente gerados eram conhecidos até aquele momento. Para os $*$-polinômios centrais, exibiremos um conjunto finito de geradores de $C(E, *)$ quando o corpo possui característica zero e um conjunto infinito de geradores quando a característica é maior do que 2. Também provamos que, nesse último caso, $C(E, *)$ não é finitamente gerada, sendo assim o primeiro exemplo de uma álgebra cujo conjunto de $*$-polinômios centrais não é finitamente gerado.

O principal resultado do Capítulo 3 é a descrição de $Id(UT_3(\mathbb{F}), *)$ quando $\mathbb{F}$ é infinito de característica maior do que 2. Para esse resultado, seguimos uma abordagem parecida com a apresentada em [12], fazendo algumas alterações de ordem teórica e prática. Apesar das modificações, os cálculos realizados neste capítulo ainda são complicados, principalmente no caso de característica 3, onde uma nova $*$-identidade polinomial surge.

As páginas finais do Capítulo 3, e da tese, são dedicadas à descrição dos $*$-polinômios centrais de $UT_n(\mathbb{F})$, quando $n > 2$ e $\mathbb{F}$ é corpo qualquer, de característica diferente de 2.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições Iniciais

Neste trabalho, as álgebras estudadas serão associativas e unitárias sobre um corpo infinito $\mathbb{F}$, de característica diferente de 2. O foco deste trabalho será o estudo das *identidades polinomiais e polinômios centrais com involução* de determinadas álgebras com involução, e assim, um bom ponto de partida para essa investigação é a teoria ordinária de identidades polinomiais e polinômios centrais para álgebras. Comecemos por definir a álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$:

Definição 1.1.1. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle$ a *álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por* X, ou seja, o espaço vetorial $\mathbb{F}\langle X\rangle$ possui uma base formada por 1 e pelos monômios

$$x_{i_1} \dots x_{i_n},$$

onde $x_{i_j} \in X$, $n \geq 1$, e a multiplicação é definida sobre os monômios por

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n})(x_{j_1} \dots x_{j_m}) = x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}.$$

Chamamos os elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ por *polinômios*.

A álgebra livre $\mathbb{F}\langle X\rangle$ possui a seguinte *propriedade universal*: Se A é uma álgebra associativa e unitária, e $\tilde{\varphi} : X \to A$ uma aplicação qualquer, existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi|_X = \tilde{\varphi}$, a saber,

$$\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\tilde{\varphi}(x_1), \dots, \tilde{\varphi}(x_n)).$$

Definição 1.1.2. Sejam A uma álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotamos por $Id(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A.

Para encurtar a notação, muitas vezes diremos apenas que A satisfaz f. Observemos que, dados um polinômio $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e uma *substituição* $f(a_1,\ldots,a_n)$, onde $a_1,\ldots,a_n \in A$, existe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$ tal que $f(a_1,\ldots,a_n) = \varphi(f)$. De fato, seja $\tilde{\varphi} : X \to A$ uma aplicação tal que $\tilde{\varphi}(x_i) = a_i$, para $i = 1,\ldots,n$. A propriedade universal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ nos garante que existe um homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi|_X = \tilde{\varphi}$. Sendo um homomorfismo, obtemos

$$\varphi(f) = f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = f(\tilde{\varphi}(x_1),\ldots,\tilde{\varphi}(x_n)) = f(a_1,\ldots,a_n).$$

Dessa forma, cada substituição em um polinômio é equivalente a um homomorfismo entre $\mathbb{F}\langle X\rangle$ e A aplicado no polinômio, e vice-versa.

Dado o comentário anterior, f é uma identidade polinomial para A se, e somente se, $f \in \ker\varphi$ para todo homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$.

Como o polinômio nulo $f = 0$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra A, temos a seguinte definição:

Definição 1.1.3. Se $Id(A) \neq \{0\}$, então dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

Um dos problemas centrais da teoria das identidades polinomiais em álgebras é entender a estrutura de $Id(A)$, e nesse sentido, alguns polinômios se destacaram por auxiliar nessa tarefa. Um desses polinômios, e talvez o que mais aparecerá neste trabalho, será o *comutador*, que recordamos agora. Em $\mathbb{F}\langle X\rangle$, os *comutadores de comprimento* n, com $n > 1$, são definidos da seguinte forma:

$$[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i \quad \text{e} \quad [x_{i_1},\ldots,x_{i_n}] = [[x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-1}}], x_{i_n}].$$

Outro polinômio de grande importância teórica é o *polinômio standard de grau* k, definido da seguinte forma:

$$s_k(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{\sigma \in Sym(k)} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)},$$

onde $Sym(k)$ indica o grupo simétrico de grau k.

Exemplo 1.1.4. Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio $[x_1, x_2]$.

Exemplo 1.1.5. Seja $M_2(\mathbb{F})$ a álgebra das matrizes de ordem 2, com entradas em $\mathbb{F}$. Então $M_2(\mathbb{F})$ satisfaz o polinômio

$$[[x_1, x_2]^2, x_3].$$

De fato, relembre que, se $p(x)$ é o polinômio característico de uma matriz A, então, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $p(A) = 0$. Com isso em mente, observe que, para uma matriz A de ordem 2, seu polinômio característico é da forma:

$$p(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)I,$$

onde $\mathrm{tr}(A)$ indica o traço de A, $\det(A)$ indica o determinante de A e I é a matriz identidade de ordem 2. Assim, se $A = [B, C]$, onde $B, C \in M_2(\mathbb{F})$, então $\mathrm{tr}(A) = 0$, e

$$p(A) = A^2 + \det(A)I = 0.$$

Logo, $A^2 = -\det(A)I$, ou seja, A^2 é uma matriz diagonal escalar, e portanto comuta com todas as matrizes de ordem 2. A identidade $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ é conhecida como *Identidade de Hall*.

O próximo resultado é um dos grandes marcos na história da teoria das PI-álgebras. Ele foi primeiramente demonstrado por Amitsur e Levitzki em [3], e posteriormente várias outras demonstrações foram desenvolvidas.

Teorema 1.1.6. A álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ satisfaz a *identidade standard de grau* $2n$:

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in Sym(2n)} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}.$$

Exemplo 1.1.7. Seja $UT_n := UT_n(\mathbb{F})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n, com entradas em $\mathbb{F}$. Então UT_n satisfaz o polinômio

$$[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

De fato, observe que, dadas $A_1, A_2 \in UT_n$, $[A_1, A_2]$ é uma matriz triangular superior com diagonal nula, e o produto de n matrizes triangulares superiores com diagonais nulas é sempre 0.

Definição 1.1.8. Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica diferente de 2. A álgebra unitária e associativa gerada pelo conjunto infinito de elementos $\{1, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$, satisfazendo as relações

$$\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0,$$

é chamada *álgebra de Grassmann*, e será denotada por E. Ao retirar o elemento 1 do conjunto de geradores, obtemos a *álgebra de Grassmann sem unidade*, denotada por E'.

A álgebra E' possui base $\mathcal{B}'$ formada pelos elementos

$$v = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k},$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, enquanto E possui base $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{1\}$. Dado um elemento $v = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k} \in \mathcal{B}'$, dizemos que k é o seu *comprimento*.

Denotamos por E_0 o centro de E, que é gerado pelos elementos da base de comprimento par e denotamos por E_1 o conjunto gerado pelos elementos da base de comprimento ímpar. Temos que

$$E = E_0 \oplus E_1$$

é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para E.

Exemplo 1.1.9. A álgebra de Grassmann E satisfaz o comutador triplo

$$[x_1, x_2, x_3].$$

Para verificar isso, comecemos por observar que o comutador triplo é linear em cada uma de suas variáveis, e portanto, é suficiente verificar que $[v_1, v_2, v_3] = 0$, para todos os elementos básicos $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{B}$. Se algum v_i possui comprimento par, então v_i é central, e portanto a identidade se verifica. Suponhamos agora que $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{B}$ possuem comprimento ímpar. Então

$$[v_1, v_2] = 2v_1v_2,$$

e possui comprimento par. Logo,

$$[v_1, v_2, v_3] = 2[v_1v_2, v_3] = 0.$$

Dada uma álgebra A, não é difícil verificar que $Id(A)$ é um ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, e que, se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A)$ e $g_1, \ldots, g_n$ são polinômios quaisquer em $\mathbb{F}\langle X\rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in Id(A)$.

Definição 1.1.10. Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é dito um *T-ideal* se $\varphi(I) \subset I$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Pelas observações feitas acima sobre o conjunto $Id(A)$, vemos que ele é um exemplo de T-ideal. Reciprocamente, todo T-ideal é da forma $Id(A)$ para alguma álgebra A. Vamos analisar essa última afirmação com um pouco mais de atenção. Seja I um T-ideal qualquer, e tomemos

$$A = \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle}{I}.$$

Temos que $Id(A) \subset I$, pois, se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A)$, então

$$0 = f(x_1 + I, \ldots, x_n + I) = f(x_1, \ldots, x_n) + I,$$

ou seja, $f \in I$. Reciprocamente, se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$, então dados $g_1 + I, \ldots, g_n + I \in A$,

$$f(g_1 + I, \ldots, g_n + I) = f(g_1, \ldots, g_n) + I = 0,$$

pois como I é T-ideal, segue que $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$. Logo, $I = Id(A)$.

Dado um conjunto $S \subset \mathbb{F}\langle X\rangle$, definimos o *$T$-ideal gerado por S*, denotado por $\langle S\rangle^T$ como sendo a interseção de todos os T-ideais que contêm S. Note que $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contém S. Quando S é finito e $I = \langle S\rangle^T$, dizemos que I é um *T-ideal finitamente gerado.*

Deixamos para o leitor a demonstração do próximo lema.

Lema 1.1.11. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{F}\langle X\rangle$, o T-ideal $\langle S\rangle^T$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares de polinômios da seguinte forma:

$$g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1},$$

onde $g_0, g_1, \ldots, g_{n+1} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$.

Agora, vamos deduzir algumas identidades conhecidas para E. Para mais detalhes, veja [14, 16].

Lema 1.1.12. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2 e I um T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $[x_1, x_2, x_3] \in I$. Então os polinômios

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \qquad \text{e} \qquad [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

pertencem a I.

Demonstração. Vamos utilizar a seguinte relação conhecida dos comutadores:

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w].$$

Como $[x_1, x_2^2, x_3] \in I$, pela relação acima, temos

$$\begin{aligned} [x_1, x_2^2, x_3] &= [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] \\ &= [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3] \\ &= [x_1, x_2, x_3]x_2 + 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3, [x_1, x_2]] + x_2[x_1, x_2, x_3], \end{aligned}$$

ou seja, $2[x_1, x_2][x_2, x_3] \in I$. Como o corpo é de característica diferente de 2, segue que $[x_1, x_2][x_2, x_3] \in I$.

Para o segundo polinômio, basta observar que a linearização de $[x_1, x_2][x_2, x_3]$ será:

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2 + x_3][x_2 + x_3, x_4] - [x_1, x_2][x_2, x_4] - [x_1, x_3][x_3, x_4] \\ =&[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \end{aligned}$$

e assim, segue o resultado. $\square$

Outra identidade que podemos deduzir, e que nos será útil mais a frente é:

Lema 1.1.13. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2 e I um T-ideal tal que $[x_1, x_2, x_3] \in I$. Então o polinômio

$$[x_1, x_2]x_3[x_2, x_4] \in I.$$

Demonstração. De fato, basta observar que, pelo Lema 1.1.12, $[x_1x_3, x_2][x_2, x_4] \in I$, e

$$[x_1x_3, x_2][x_2, x_4] = [x_1, x_2]x_3[x_2, x_4] + x_1[x_3, x_2][x_2, x_4].$$

Como $x_1[x_3, x_2][x_2, x_4] \in I$, segue que $[x_1, x_2]x_3[x_2, x_4] \in I$. □

Em 1950, W. Specht levantou a seguinte questão: Se I é um T-ideal em $\mathbb{F}\langle X\rangle$, com $\mathbb{F}$ corpo qualquer, existe um conjunto S finito tal que $I = \langle S\rangle^T$? Essa se tornou uma questão central na teoria de PI álgebras, e um avanço revolucionário foi feito em 1987, quando Kemer em [19] respondeu positivamente à questão de Specht, quando o corpo $\mathbb{F}$ possui característica zero. Para característica positiva, a resposta em geral é negativa, e exemplos de T-ideais não finitamente gerados foram construídos por Shchigolev [30], Grishin [18] e Belov [6], em 1999.

Apesar dos exemplos de T-ideais não finitamente gerados, em algumas álgebras o T-ideal de suas identidades polinomiais é finitamente gerado, mesmo em característica positiva. O teorema abaixo descreve precisamente a estrutura de $Id(E)$, e sua demonstração pode ser encontrada em [22, 16].

Teorema 1.1.14. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, então

$$Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T.$$

O próximo resultado descreve o T-ideal das identidades polinomiais para a álgebra das matrizes triangulares superiores, e sua demonstração pode ser encontrada em [25] e [32].

Teorema 1.1.15. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, então

$$Id(UT_n) = \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle^T.$$

Passemos agora ao estudo dos polinômios centrais de uma álgebra A.

Definição 1.1.16. Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Dizemos que f é um *polinômio central* para A se $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$, para todos $a_1, \dots, a_n \in A$, onde $Z(A)$ indica o centro de A.

A partir da definição acima, podemos deduzir duas informações importantes. A primeira delas é que, dada uma álgebra A, $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio central para A se, e somente se, $[f, x_{n+1}] \in Id(A)$. A outra informação é que, se f for uma identidade polinomial de A ou um polinômio constante, então f claramente é um polinômio central para A. Denotamos o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra A por $C(A)$. Assim, a segunda informação nos diz que $Id(A) + \mathbb{F} \subset C(A)$, e esses polinômios são chamados polinômios centrais triviais.

Exemplo 1.1.17. O polinômio $f(x_1,x_2) = [x_1,x_2]^2$, conhecido como *polinômio de Wagner-Hall*, é um polinômio central não trivial para $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$. De fato, basta recordarmos do Exemplo 1.1.5, onde foi mostrado que $[[x_1,x_2]^2,x_3]$ é uma identidade polinomial para $\mathbb{M}_2(\mathbb{F})$.

Exemplo 1.1.18. O polinômio $f(x_1,x_2) = [x_1,x_2]$ é polinômio central não trivial para a álgebra de Grassmann E. Novamente, esse exemplo é uma consequência do Exemplo 1.1.9, onde verificamos que $[x_1,x_2,x_3]$ é uma identidade polinomial para E.

Lema 1.1.19. (Regev, 1991) Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$ e E' a álgebra de Grassmann sem unidade. Então $x^p \in Id(E')$. Em particular, $x^p \in C(E)$.

Demonstração. De fato, dado um elemento qualquer $g \in E'$, podemos reescrevê-lo como combinação linear de elementos da base,

$$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}$ e $w_i \in \mathcal{B}'$. Temos

$$g^p = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i\right)^p = \sum_{1\le i_1,\dots,i_p\le k} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p} w_{i_1}\dots w_{i_p}.$$

Se $k < p$, ao menos dois w_i em cada produto $w_{i_1}\dots w_{i_p}$ são iguais, e portanto $g^p = 0$. Se $k \ge p$, observe que

$$g^p = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le k} \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_p} u_p(w_{i_1},\dots,w_{i_p}),$$

onde

$$u_p(x_1,\dots,x_p) = \sum_{\sigma\in Sym(p)} x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(p)}.$$

Dessa forma, basta verificar que $u_p(w_{i_1},\dots,w_{i_p}) = 0$. Se $w_i \ne w_j$ são dois elementos de comprimento ímpar, então segue que $w_i b w_j = -w_j b w_i$ para qualquer $b \in E$, assim, $u_p(w_{i_1},\dots,w_{i_p}) = 0$. Agora, se todos os elementos têm comprimento par, isto é, comutam dois a dois, temos

$$u_p(w_{i_1},\dots,w_{i_p}) = p! w_{i_1}\dots w_{i_p} = 0,$$

pois $\mathbb{F}$ tem característica p. Portanto, segue que $g^p = 0$. Por fim, se $g = \alpha + g_1$, com $\alpha \in \mathbb{F}$ e $g_1 \in E'$,

$$g^p = (\alpha + g_1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} g_1^k = \alpha^p + g_1^p = \alpha^p,$$

ou seja, $x^p \in C(E)$. $\square$

O próximo resultado é uma consequência quase direta do lema anterior. Apesar de enunciar uma identidade polinomial para E, este resultado nos será útil ao estudar os polinômios centrais de E em característica positiva.

Lema 1.1.20. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica $p > 2$, então

$$(x_1x_2)^p - x_1^px_2^p \in Id(E).$$

Demonstração. Sejam $g_1 = \alpha_1 + h_1$, $g_2 = \alpha_2 + h_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, $h_1, h_2 \in E'$. Então $g_1g_2 = \alpha_1\alpha_2 + h_3$, onde $h_3 \in E'$ e, pelo Lema 1.1.19,

$$\begin{aligned}(g_1g_2)^p - g_1^pg_2^p &= (\alpha_1\alpha_2 + h_3)^p - (\alpha_1 + h_1)^p(\alpha_2 + h_2)^p \\ &= (\alpha_1\alpha_2)^p + h_3^p - (\alpha_1^p + h_1^p)(\alpha_2^p + h_2^p) \\ &= \alpha_1^p\alpha_2^p - (\alpha_1^p)(\alpha_2^p) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Para $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, com $n > 2$, Kaplansky conjecturou a existência de polinômios centrais não triviais. Esta conjectura foi demonstrada ser verdadeira em dois trabalhos independentes, de Formanek [15] e Razmyslov [27], onde os autores construíram (de maneiras distintas) polinômios centrais não triviais para $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$.

O mesmo não pode ser dito para a álgebra de matrizes triangulares superiores, $UT_n(\mathbb{F})$. O exemplo a seguir nos mostra que os únicos polinômios centrais dessa álgebra são os triviais.

Exemplo 1.1.21. Sejam $n \geq 2$ e $\mathbb{F}$ um corpo qualquer. Então $C(UT_n) = \mathbb{F} + Id(UT_n)$. De fato, seja $f = f(x_1, \ldots, x_t) \in C(UT_n)$, e sem perda de generalidade, suponhamos $f(0, \ldots, 0) = 0$, ou seja, f não possui termo constante. Escreva $UT_n = \mathcal{D} \oplus \mathcal{N}$, onde $\mathcal{D}$ é a subálgebra das matrizes diagonais e $\mathcal{N}$ a subálgebra (e também um ideal) das matrizes com diagonal nula.

Afirmação: $f \in Id(\mathcal{D})$.

Prova da Afirmação: Se $A_i = a_{11}^{(i)}e_{11} + a_{22}^{(i)}e_{22} + \cdots + a_{nn}^{(i)}e_{nn}$, para $i = 1, \ldots, t$ e $a_{jj}^{(i)} \in \mathbb{F}$, então

$$f(A_1, \ldots, A_t) = f(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{11}^{(t)})e_{11} + \cdots + f(a_{nn}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(t)})e_{nn}.$$

Assim, para provar a afirmação, é suficiente verificar que $f \in Id(\mathbb{F})$. Para isso, se $a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{F}$, então

$$f(a_1e_{11}, a_2e_{11}, \ldots, a_te_{11}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_t)e_{11}.$$

Como $f \in C(UT_n)$, temos $f(a_1, a_2, \ldots, a_t) = 0$, e portanto, segue a afirmação.

Por fim, tomemos $A_1, \dots, A_t \in UT_n$. Podemos reescrever as matrizes como $A_i = D_i + N_i$, onde $D_i \in \mathcal{D}$ e $N_i \in \mathcal{N}$. Assim,

$$f(A_1, \dots, A_t) = f(D_1, \dots, D_t) + B = B,$$

onde $B \in \mathcal{N}$. Como $f \in C(UT_n)$, então devemos ter $B = 0$, e portanto, $f \in Id(UT_n)$.

Definição 1.1.22. Um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é dito ser um T-*espaço* se $\varphi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Dada uma álgebra A, $Id(A)$ e $C(A)$ são exemplos de T-espaços. Dado um conjunto $S \subset \mathbb{F}\langle X\rangle$, definimos o T-*espaço gerado por* S, denotado por $\langle S\rangle^{TS}$, como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S. Note que $\langle S\rangle^{TS}$ é o menor T-espaço que contém S.

Não é difícil demonstrar o seguinte lema:

Lema 1.1.23. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{F}\langle X\rangle$, o T-espaço $\langle S\rangle^{TS}$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares de polinômios da seguinte forma:

$$f(g_1, \dots, g_n),$$

onde $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in S$.

Diferentemente da álgebra UT_n, a álgebra de Grassmann admite polinômios centrais não triviais. Em característica zero, a estrutura de $C(E)$ foi descrita em [8]:

Teorema 1.1.24. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica 0, então

$$C(E) = \langle 1,\ [x_1, x_2],\ x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}.$$

Lembremos que $Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$ e $Id(E) \subset C(E)$. Para indicar este conjunto como um T-espaço, o polinômio gerador precisa ser um pouco diferente. Efetivamente,

$$\langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T = \langle x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}. \tag{1.1}$$

De fato, pelo Lema 1.1.11, é suficiente verificar a inclusão $\subset$ para polinômios da forma $f = g_0[g_1, g_2, g_3]g_4$, onde $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Temos que

$$f = g_0[[g_1, g_2], g_3, g_4] + g_0 g_4 [g_1, g_2, g_3],$$

e pela definição de T-espaço, vemos que os polinômios do lado direito da igualdade acima estão em $\langle x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}$, logo $f \in \langle x_1[x_2, x_3, x_4]\rangle^{TS}$. Para a inclusão contrária, o Lema 1.1.23 nos garante que basta tomar polinômios da forma $f =$

$g_1[g_2, g_3, g_4]$, onde $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. Pela definição de T-ideal, é claro que $f \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, e portanto, a igualdade (1.1) é válida.

Um T-espaço $\mathcal{V}$ de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é dito ser *finitamente gerado* como T-espaço se existe um subconjunto finito S de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ tal que $\mathcal{V} = \langle S \rangle^{TS}$.

Para o caso de característica positiva, um conjunto infinito de polinômios é necessário para descrever $C(E)$, e temos o seguinte teorema, provado em [8]:

Teorema 1.1.25. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito com característica $p > 2$,

$$q(x_1, x_2) \coloneqq x_1^{p-1}[x_1, x_2]x_2^{p-1},$$

e para cada $n \geq 1$,

$$q_n = q_n(x_1, \dots, x_{2n}) \coloneqq q(x_1, x_2)q(x_3, x_4)\dots q(x_{2n-1}, x_{2n}). \tag{1.2}$$

Então

$$C(E) = \langle \{x_1[x_2, x_3, x_4],\ x_0^p,\ x_0^p q_n \mid n \geq 1\} \rangle^{TS}.$$

Ainda, $C(E)$ não é finitamente gerado como um T-espaço.

1.2 Involuções

Definição 1.2.1. Uma *involução* em uma álgebra unitária associativa A é uma função $* : A \to A$ tal que, para todos $a, b \in A$, satisfaz:

a) $(a + b)^* = a^* + b^*$.

b) $(ab)^* = b^* a^*$.

c) $(a^*)^* = a$.

Denotamos o par formado pela álgebra A e a involução $*$ por $(A, *)$.

Observação 1.2.2. Com a definição de involução dada acima, podemos deduzir duas rápidas observações:

a) $1^* = 1$.

De fato, se $1^* = a$, então, pelo item c) da definição de involução, $a^* = 1$, e pelo item b) da definição, segue que

$$1 = a^* = (a \cdot 1)^* = 1^* \cdot a^* = a \cdot 1 = a.$$

b) Se $u \in A$ é invertível, então $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

De fato,

$$u^* \cdot (u^{-1})^* = (u^{-1} \cdot u)^* = 1^* = 1 = u^* \cdot (u^*)^{-1}$$

implica no desejado.

Dada uma álgebra com involução $(A, \circ)$, dizemos que um elemento $a \in A$ é *simétrico* se $a^\circ = a$ e dizemos que é *antissimétrico* se $a^\circ = -a$. Dado um conjunto $S \subset A$, o subconjunto dos elementos simétricos de S é denotado por $S^{(+,\circ)}$ e o subconjunto dos elementos antissimétricos de S é denotado por $S^{(-,\circ)}$. Quando não houver confusão quanto à involução utilizada, denotaremos $S^{(+,\circ)} = S^+$ e $S^{(-,\circ)} = S^-$.

Exemplo 1.2.3. Sendo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, a função transposta dada por

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

é um exemplo de involução.

Exemplo 1.2.4. Em UT_2, as duas funções a seguir são exemplos de involuções:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Este exemplo é bastante importante, e vamos generalizá-lo para UT_n. Dado $n \geq 1$, sejam $J \in M_n(\mathbb{F})$ e $D \in M_{2m}(\mathbb{F})$ (se $n = 2m$) as seguintes matrizes:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix},$$

onde I_m é a matriz identidade. Defina as funções $* : UT_n \to UT_n$ e $s : UT_n \to UT_n$ (se n é par) por

$$A^* = JA^tJ \quad \text{e} \quad A^s = DA^*D,$$

onde A^t é a matriz transposta de A. Verifica-se (veja [12]) que $*$ e s são involuções em UT_n.

Exemplo 1.2.5. Vamos construir um exemplo de involução $*$ para a álgebra de Grassmann E. Defina $1^* = 1$ e para cada gerador ξ_i de E,

$$\xi_i^* = \begin{cases} \xi_i, & \text{se } i \text{ é par.} \\ -\xi_i, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para um elemento básico de comprimento ≥ 2, $v = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_n} \in \mathcal{B}'$, definimos

$$v^* = \xi_{i_n}^* \dots \xi_{i_2}^* \xi_{i_1}^*.$$

Agora, como $*$ está definida em toda a base $\mathcal{B}$ de E, estendemos $*$ para toda a álgebra E de forma linear. Assim, não é difícil verificar que $*$ é um exemplo de involução para a álgebra de Grassmann E.

Definição 1.2.6. Dizemos que uma involução $*$ em uma álgebra A é do 1° *tipo* se $a^* = a$, para todo $a \in Z(A)$, o centro de A. Caso contrário, dizemos que $*$ é do 2° *tipo*.

Os Exemplos 1.2.3 e 1.2.4 são exemplos de involuções do 1° tipo. Já a involução do Exemplo 1.2.5 não é do 1° tipo, pois, por exemplo, $\xi_1\xi_3 \in Z(E)$, mas

$$(\xi_1\xi_3)^* = \xi_3\xi_1 = -\xi_1\xi_3.$$

Definição 1.2.7. Dizemos que uma função $\varphi : (A, \bullet) \to (B, \circ)$ é um *homomorfismo de álgebras com involução* (ou $*$-homomorfismo) se φ for um homomorfismo de álgebras e, para todo $a \in A$,

$$\varphi(a^\bullet) = (\varphi(a))^\circ.$$

Duas álgebras com involução $(A, \bullet)$, $(B, \circ)$ são ditas *isomorfas*, e escrevemos $(A, \bullet) \cong (B, \circ)$, se houver um $*$-isomorfismo $\varphi : (A, \bullet) \to (B, \circ)$, ou seja, um $*$-homomorfismo bijetor.

Em [12], Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala obtiveram uma classificação das involuções do 1° tipo para a álgebra UT_n:

Teorema 1.2.8. Sejam $*$ e s as involuções do 1° tipo em UT_n definidas no Exemplo 1.2.4. Se $\circ$ é uma involução do 1° tipo para UT_n, então, se n é par,

$$(UT_n, \circ) \cong (UT_n, *) \text{ ou } (UT_n, \circ) \cong (UT_n, s),$$

e $(UT_n, *)$ não é isomorfa a (UT_n, s). Se n é ímpar, então

$$(UT_n, \circ) \cong (UT_n, *).$$

1.3 Identidades e Polinômios Centrais com Involução

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots\}$ dois conjuntos infinitos enumeráveis e disjuntos. Denotemos por $\mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ a álgebra associativa livre unitária, livremente gerada por $X \cup X^*$. Vamos definir uma involução $\circ$ sobre essa álgebra.

Para os geradores, defina $1^\circ = 1$, $x_i^\circ = x_i^*$ e $(x_i^*)^\circ = x_i$. Em um monômio qualquer $v = w_1w_2 \dots w_n$, onde $w_i \in X \cup X^*$, defina

$$v^\circ = (w_1w_2 \dots w_n)^\circ = (w_n)^\circ \dots (w_2)^\circ(w_1)^\circ,$$

e estenda $\circ$ para toda a álgebra $\mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ de forma linear. Para evitar confusão, vamos denotar $\circ = *$. Os elementos de $\mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ são chamados $*$-*polinômios*, mas neste trabalho, vamos chamá-los apenas por polinômios.

Definição 1.3.1. Seja $(A, \circ)$ uma álgebra com involução. Um polinômio $f \in \mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ é dito ser uma *$*$-identidade polinomial* (ou identidade polinomial com involução) para $(A, \circ)$ se f pertence ao núcleo de todo $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle \to A$. Denotamos por $Id(A, \circ)$ o conjunto de todas as $*$-identidades polinomiais de $(A, \circ)$.

Mais a frente veremos alguns exemplos de $*$-identidades polinomiais. Antes disso, vamos obter uma caracterização mais familiar para as $*$-identidades polinomiais.

Lema 1.3.2. Sejam $(A, \circ)$ uma álgebra com involução e $f = f(x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^*) \in \mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ um polinômio. Então $f \in Id(A, \circ)$ se, e somente se,

$$f(a_1, a_1^\circ, \ldots, a_n, a_n^\circ) = 0,$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Demonstração. Primeiro, provaremos a recíproca. Se $\varphi : \mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle \to A$ é um $*$-homomorfismo qualquer, e $a_i = \varphi(x_i)$, então $a_i^\circ = \varphi(x_i)^\circ = \varphi(x_i^*)$, e assim,

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1, a_1^\circ, \ldots, a_n, a_n^\circ) \\ &= f(\varphi(x_1), \varphi(x_1^*), \ldots, \varphi(x_n), \varphi(x_n^*)) \\ &= \varphi(f(x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^*)), \end{aligned}$$

ou seja, $f \in \ker\varphi$, e portanto, $f \in Id(A, \circ)$.

Por outro lado, suponhamos que $f = f(x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^*) \in Id(A, \circ)$ e sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$. Tomemos uma aplicação $X \cup X^* \to A$ que leva $x_i \mapsto a_i$ e $x_i^* \mapsto a_i^\circ$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $\mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle$ é associativa livre, essa aplicação se estende a um homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle \to A$, que por sua vez é um $*$-homomorfismo.

Como φ é um $*$-homomorfismo, temos que $\varphi(f) = f(a_1, a_1^\circ, \ldots, a_n, a_n^\circ)$, mas, por hipótese, $f \in Id(A, \circ)$, logo $\varphi(f) = 0$, e portanto, temos o resultado. □

Apesar da caracterização obtida acima, para estudar as $*$-identidades polinomiais e os $*$-polinômios centrais de uma álgebra com involução, é mais conveniente definirmos os polinômios de outra forma. Sejam $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$, onde

$$y_i = x_i + x_i^* \text{ e } z_i = x_i - x_i^*,$$

para todo $i \geq 1$. Observe que cada y_i é um elemento simétrico, enquanto cada z_i é um elemento antissimétrico, e podemos considerar a álgebra livre unitária $\mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$, livremente gerada por $Y \cup Z$. Assim, $\mathbb{F}\langle X \cup X^* \rangle = \mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$, e, a partir de agora, utilizaremos apenas os polinômios em $\mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$. O próximo lema é uma observação fácil de se verificar.

Lema 1.3.3. Se $\varphi : (\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle, *) \to (A, \circ)$ é um $*$-homomorfismo de álgebras, então φ leva elementos simétricos de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ em elementos simétricos de A e elementos antissimétricos de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ em elementos antissimétricos de A.

Proposição 1.3.4. Se $a_1, a_2, \ldots$ são elementos simétricos de A, $b_1, b_2, \ldots$ são elementos antissimétricos de A, então existe um $*$-homomorfismo de álgebras $\varphi : (\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle, *) \to (A, \circ)$ tal que $\varphi(y_i) = a_i$ e $\varphi(z_i) = b_i$ para todo $i \geq 1$.

Demonstração. Comecemos criando a aplicação $\phi : Y \cup Z \to A$, tal que $y_i \mapsto a_i$ e $z_i \mapsto b_i$. Como a álgebra $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é livre, a aplicação ϕ se estende a um homomorfismo de álgebras

$$\varphi : \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle \to A.$$

Resta-nos mostrar que φ é um $*$-homomorfismo, ou seja, verificar que $\varphi(f^*) = (\varphi(f))^\circ$. Como φ é homomorfismo, basta verificar para um elemento $w_i \in Y \cup Z$, mas isto é claro pela forma como φ foi definida. □

Teorema 1.3.5. Seja $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$. Então $f \in Id(A, \circ)$ se, e somente se, $f(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_m \in A^+$ e $b_1, \ldots, b_n \in A^-$.

Demonstração. Tomemos $a_1, \ldots, a_m \in A^+$ e $b_1, \ldots, b_n \in A^-$. Pela Proposição 1.3.4, existe um $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle \to A$ tal que $\varphi(y_i) = a_i$ e $\varphi(z_i) = b_i$. Como $f \in Id(A, \circ)$, segue que $\varphi(f) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)) &= f(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m), \varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n)) \\ &= f(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $\varphi : \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle \to A$ um $*$-homomorfismo qualquer. Pelo Lema 1.3.3, temos que $\varphi(y_i) = a_i \in A^+$ e $\varphi(z_i) = b_i \in A^-$, logo

$$\begin{aligned} \varphi(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)) &= f(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_m), \varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n)) \\ &= f(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e como φ foi tomada de forma arbitrária, segue que $f \in Id(A, \circ)$. □

Agora sim, temos a bagagem necessária para vermos alguns exemplos de $*$-identidades polinomiais.

Exemplo 1.3.6. Seja UT_2 munida da involução $*$ definida no Exemplo 1.2.4 e dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} c & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Observe que $\{1, e_{12}\}$ forma uma base para UT_2^+, enquanto $\{e_{11} - e_{22}\}$ forma uma base para UT_2^-. Assim,

• $[z_1, z_2] \in Id(UT_2, *)$, pois, se $b_1 = \alpha_1(e_{11} - e_{22})$ e $b_2 = \alpha_2(e_{11} - e_{22})$ são elementos quaisquer de UT_2^-,

$$[b_1, b_2] = [\alpha_1(e_{11} - e_{22}), \alpha_2(e_{11} - e_{22})] = 0,$$

e assim, o resultado segue do Teorema 1.3.5.

• $[y_1, y_2] \in Id(UT_2, *)$, pois, se $a_1 = \alpha_1 1 + \alpha_2 e_{12}$ e $a_2 = \alpha_3 1 + \alpha_4 e_{12}$ são elementos quaisquer de UT_2^+,

$$[a_1, a_2] = [\alpha_1 1 + \alpha_2 e_{12}, \alpha_3 1 + \alpha_4 e_{12}] = [\alpha_2 e_{12}, \alpha_4 e_{12}] = 0,$$

e assim, o resultado segue do Teorema 1.3.5.

Exemplo 1.3.7. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p > 2$ e E a álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{F}$. Veremos mais a frente (no Capítulo 2), que, dada uma involução qualquer φ para E, então $E^- \subset E'$, ou seja, os elementos antissimétricos não possuem termo constante. Com isso, pelo Lema 1.1.19, temos que

$$z_1^p \in Id(E, \varphi).$$

Definição 1.3.8. Dada uma álgebra com involução $(A, *)$, dizemos que um ideal I de A é um $*$-*ideal* se $a^* \in I$, para todo $a \in I$.

Definição 1.3.9. Um $*$-ideal I de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é dito um $T(*)$-ideal se $\varphi(I) \subset I$ para todo $*$-endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$.

Assim como no caso ordinário, não é difícil verificar que $Id(A, *)$ é um exemplo de $T(*)$-ideal, e reciprocamente, todo $T(*)$-ideal é da forma $Id(A, *)$ para alguma álgebra com involução $(A, *)$.

Definição 1.3.10. Se $S \subset \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, então o $T(*)$-*ideal gerado por* S , denotado por $\langle S\rangle^{T(*)}$, é a interseção de todos os $T(*)$-ideais que contêm S.

Note que $\langle S\rangle^{T(*)}$ é o menor $T(*)$-ideal que contém S. Quando S é finito e $I = \langle S\rangle^{T(*)}$, dizemos que I é *finitamente gerado.*

Lema 1.3.11. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, o $T(*)$-ideal $\langle S\rangle^{T(*)}$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares de polinômios da seguinte forma:

$$g_0 f(h_1, \ldots, h_m, w_1, \ldots, w_n) g_1,$$

onde $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in S \cup S^*$, $g_0, g_1 \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^+$ e $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^-$.

Demonstração. Denotemos por W o conjunto formado por todas as combinações lineares definidas acima, e mostremos que $W = \langle S\rangle^{T(*)}$.

Para mostrar a inclusão "$\subset$", como $\langle S\rangle^{T(*)}$ é um ideal, é suficiente verificar que cada

$$f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}.$$

Lembremos também que $\langle S\rangle^{T(*)}$ é um $*$-ideal, logo, se $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in S\cup S^*$, segue que $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}$. Agora, pela Proposição 1.3.4, existe um $*$-endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle \to \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$ tal que $\varphi(y_i) = h_i$ para todo $i = 1,\ldots,m$ e $\varphi(z_j) = w_j$, para todo $j = 1,\ldots,n$. Como $\langle S\rangle^{T(*)}$ é fechado por $*$-endomorfismos, segue que

$$\varphi(f) = f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n) \in \langle S\rangle^{T(*)}.$$

Para a inclusão contrária, é suficiente verificar que W é um $T(*)$-ideal.

Afirmação 1: W é um $*$-ideal.

Prova da Afirmação 1: Claramente W é um ideal, agora, para provar que é fechado para a involução, basta verificar que $p^* \in W$, onde p é um polinômio da forma

$$p = g_0 f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n)g_1.$$

Sendo φ o $*$-endomorfismo de $\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$ tal que $\varphi(y_i) = h_i$ e $\varphi(z_j) = w_j$ para todo i, j, temos que

$$\begin{aligned} p^* &= (g_0 f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n)g_1)^* \\ &= g_1^*(\varphi(f))^* g_0^* \\ &= g_1^*\varphi(f^*)g_0^* \\ &= g_1^* f^*(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n)g_0^* \in W. \end{aligned}$$

Afirmação 2: W é fechado por $*$-endomorfismos de $\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$.

Prova da Afirmação 2: Novamente, basta mostrar que, se

$$p = g_0 f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n)g_1,$$

então $\varphi(p) \in W$, para qualquer $*$-endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle$. Observemos que $\varphi(h_i) \in \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle^+$ para todo $i = 1,\ldots,m$ e $\varphi(w_j) \in \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle^-$ para todo $j = 1,\ldots,n$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \varphi(g_0 f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n)g_1) \\ &= \varphi(g_0)\varphi(f(h_1,\ldots,h_m,w_1,\ldots,w_n))\varphi(g_1) \\ &= \varphi(g_0)f(\varphi(h_1),\ldots,\varphi(h_m),\varphi(w_1),\ldots,\varphi(w_n))\varphi(g_1) \in W, \end{aligned}$$

e portanto, W é um $T(*)$-ideal. $\square$

Em 2005, Di Vincenzo, Koshlukov e La Scala, em [12], iniciaram os estudos das identidades polinomiais com involução para as álgebras de matrizes triangulares superiores. Pelo Teorema 1.2.8, se $\circ$ é uma involução sobre UT_n, então $Id(UT_n,\circ) = Id(UT_n,*)$ ou $Id(UT_n,\circ) = Id(UT_n,s)$. Os três autores descreveram $Id(UT_2,\circ)$ quando $\mathbb{F}$ é infinito e $Id(UT_3,\circ)$ quando $\mathbb{F}$ tem característica zero, que detalhamos agora:

Teorema 1.3.12. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, então

$$Id(UT_2,*) = \langle [y_1,y_2],\ [z_1,z_2],\ [y_1,z_1][y_2,z_2],\ z_1y_1z_2 - z_2y_1z_1\rangle^{T(*)},$$

$$Id(UT_2,s) = \langle [y_1,y_2],\ [z_1,y_1],\ [z_1,z_2][z_3,z_4],\ z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\rangle^{T(*)}.$$

Teorema 1.3.13. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero, então $Id(UT_3,*)$ é gerado, como $T(*)$-ideal pelos seguintes polinômios:

(i) $s_3(z_1,z_2,z_3) = z_1[z_2,z_3] - z_2[z_1,z_3] + z_3[z_1,z_2]$,

(ii) $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4][x_1,x_2]$,

(iii) $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_1x_3|}[x_1,x_3][x_2,x_4] + (-1)^{|x_1x_4|}[x_1,x_4][x_2,x_3]$,

(iv) $z_1[x_3,x_4]z_2 + (-1)^{|x_3x_4|}z_2[x_3,x_4]z_1$,

(v) $[x_1,x_2]z_5[x_3,x_4]$,

(vi) $z_1[x_4,x_5]z_2x_3 + (-1)^{|x_3|}x_3z_1[x_4,x_5]z_2$,

onde $x_i \in \{y_i,z_i\}$, $|f| = 1$ se $f \in \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle^+$, $|g| = 0$ se $g \in \mathbb{F}\langle Y\cup Z\rangle^-$ e $|x_ix_j| = |[x_i,x_j]|$.

É interessante ressaltar que, recentemente, Gonçalves e Urure, em [34], descreveram as identidades polinomiais com involução para UT_2, quando o corpo $\mathbb{F}$ é finito, que era o caso restante.

Neste trabalho, vamos descrever $Id(UT_3,*)$ quando $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica $p > 2$.

Para a álgebra de Grassmann, Anisimov, em [4], descreveu as identidades polinomiais com involução quando o corpo é de característica zero:

Teorema 1.3.14. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero e φ uma involução qualquer em E, então $Id(E,\varphi) = \langle [y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3]\rangle^{T(*)}$.

Neste trabalho, vamos seguir uma abordagem diferente do trabalho de Anisimov, e obter uma nova demonstração para o teorema acima. Seguindo essa nova abordagem, vamos também obter uma descrição do $T(*)$-ideal das identidades polinomiais com involução de E quando $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica $p > 2$.

Passemos agora ao estudo dos $*$-polinômios centrais.

Definição 1.3.15. Dizemos que $f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é um *polinômio central com involução* (ou $*$-polinômio central) para uma álgebra com involução $(A,\circ)$ se, para quaisquer $a_1,\dots,a_m \in A^+$ e $b_1,\dots,b_n \in A^-$,

$$f(a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n) \in Z(A).$$

Denotamos por $C(A,\circ)$ o conjunto de todos os $*$-polinômios centrais de $(A,\circ)$.

Assim como no caso ordinário, temos que $Id(A,\circ)+\mathbb{F} \subset C(A,\circ)$, e dizemos que esses são os $*$-polinômios centrais triviais. Dada uma álgebra com involução $(A,\circ)$, temos interesse em descobrir se existem $*$-polinômios centrais não triviais. Comecemos com um belo e simples exemplo:

Exemplo 1.3.16. Seja UT_2 com a involução simplética s dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^s = \begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Então $f(y_1)=y_1$ é um $*$-polinômio central para UT_2.

Exemplo 1.3.17. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p>2$ e (E,φ) a álgebra de Grassmann com uma involução φ qualquer. Pelo Teorema 1.1.25, podemos concluir que $f(y_1)=y_1^p$ é um $*$-polinômio central para (E,φ).

Definição 1.3.18. Um subespaço vetorial V de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é dito um $T(*)$-*espaço* se $\varphi(V)\subset V$ para todo $*$-endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$.

Assim como no caso das $*$-identidades polinomiais, não é difícil ver que $C(A,\circ)$ sempre é um $T(*)$-espaço, e um dos problemas na área de PI-álgebras é tentar descrever o conjunto de $*$-polinômios centrais para uma dada álgebra com involução $(A,\circ)$. Dessa forma, faz-se necessária a seguinte definição:

Definição 1.3.19. Se $S \subset \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, então o $T(*)$-*espaço gerado por* S, denotado por $\langle S\rangle^{TS(*)}$, é a interseção de todos os $T(*)$-espaços que contêm S.

Lema 1.3.20. Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, o $T(*)$-espaço $\langle S\rangle^{TS(*)}$ é o conjunto formado por todas as combinações lineares de polinômios da seguinte forma:

$$f(g_1,\dots,g_m,h_1,\dots,h_n),$$

onde $f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)\in S$, $g_1,\dots,g_m \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^+$ e $h_1,\dots,h_n \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^-$.

Demonstração. Para demonstrar este Lema, basta utilizar argumentos bastante similares à demonstração do Lema 1.3.11. □

Recentemente, Gonçalves e Urure descreveram, em [35], os $*$-polinômios centrais de UT_2, quando $\mathbb{F}$ é qualquer corpo e $*$ qualquer involução. Em particular, eles verificaram a existência de $*$-polinômios centrais não triviais. No Capítulo 3 desta tese vamos mostrar que, independente do corpo $\mathbb{F}$, os únicos $*$-polinômios centrais para UT_n são os triviais, com $n \geq 3$. No Capítulo 2, vamos descrever o $T(*)$-espaço dos $*$-polinômios centrais de E, sobre um corpo infinito de característica diferente de 2.

1.4 Polinômios Multilineares e Multi-homogêneos

Até aqui definimos dois dos conceitos centrais desta tese: as $*$-identidades polinomiais e os $*$-polinômios centrais. Agora, veremos alguns resultados de grande utilidade no estudo da estrutura dos $T(*)$-ideais e $T(*)$-espaços, de acordo com o tipo de corpo $\mathbb{F}$ utilizado. Observe que todo $T(*)$-ideal também é um $T(*)$-espaço, e portanto, alguns dos resultados que veremos a seguir valem em ambos os contextos.

Definição 1.4.1. Um polinômio $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é *homogêneo de grau b em x_i*, se é uma combinação linear de monômios, tais que, em cada monômio a variável x_i aparece b vezes, onde $x_i \in Y \cup Z$. Dizemos que f é um polinômio *multi-homogêneo* se for homogêneo de grau b_i em cada variável y_i, e grau c_j em cada variável z_j, e ainda, dizemos que seu multigrau é $(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$. Por fim, se $b_1 = \cdots = b_m = c_1 = \cdots = c_n = 1$, então dizemos que f é um polinômio *multilinear*.

Teorema 1.4.2. a) Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2 e

$$f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{k} f_i \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle,$$

onde $f_1, \ldots, f_k$ são as componentes multi-homogêneas de f, então o $T(*)$-espaço gerado por f é igual ao $T(*)$-espaço gerado por $f_1, \ldots, f_k$.

b) Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero e $f \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ um polinômio multi-homogêneo, então o $T(*)$-espaço gerado por f é igual ao $T(*)$-espaço gerado por algum polinômio multilinear.

Demonstração. A demonstração é bastante similar à encontrada em [14, Proposition 4.2.3]. □

Em outras palavras, o resultado anterior nos diz que, se $\mathbb{F}$ é infinito e H é um $T(*)$-espaço em $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, então H é gerado pelos seus elementos multi-homogêneos. Mais ainda, se $\mathbb{F}$ possui característica zero, então H é gerado pelos seus elementos multilineares.

Definição 1.4.3. Um polinômio $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ é dito ser *Y-próprio* se for uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n} c_1 c_2 \ldots c_t,$$

onde $n, t \geq 0$, $r_1, \ldots, r_n \geq 0$ e $c_1, \ldots, c_t \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ são comutadores de comprimento ≥ 2. Denotamos por B o conjunto de todos os polinômios Y-próprios.

Utilizando os polinômios Y-próprios definidos acima, conseguimos uma descrição ainda mais precisa para os $T(*)$-ideais. De fato, utilizando argumentos similares a [14, Proposition 4.3.3] e pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, todo elemento $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ pode ser escrito como combinação linear de polinômios da forma

$$y_1^{s_1} \cdots y_m^{s_m} g_\alpha,$$

onde $s_1, \ldots, s_m \geq 0$ e $g_\alpha \in B$. Ainda, prova-se o seguinte resultado:

Proposição 1.4.4. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2 e H um $T(*)$-ideal, então H é gerado (como $T(*)$-ideal) por seus elementos Y-próprios multi-homogêneos. Se $\mathbb{F}$ for de característica zero, H é gerado por seus elementos Y-próprios multilineares.

Demonstração. A demonstração é similar à encontrada em [14, Prop. 4.3.3.(ii)]. □

Quando estamos lidando com um corpo $\mathbb{F}$ infinito de característica $p > 2$, obtemos o próximo resultado, que refina ainda mais o Teorema 1.4.2. Ao considerar T-ideais da álgebra de Lie livre, um resultado similar ao seguinte é obtido em [5, Theorem 6, Chapter 4].

Proposição 1.4.5. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Se H é um T($*$)-espaço, então H é gerado, como T($*$)-espaço, por seus elementos multi-homogêneos $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in H$ de multigrau $(p^{a_1}, \ldots, p^{a_m}, p^{b_1}, \ldots, p^{b_n})$, onde $a_i, b_j \geq 0$ para todos i, j.

Demonstração. Denotemos por H_M o conjunto dos polinômios multi-homogêneos de H e H_P o conjunto dos polinômios multi-homogêneos $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ de H com multigrau

$$(p^{a_1}, \ldots, p^{a_m}, p^{b_1}, \ldots, p^{b_n}),$$

com $a_i, b_j \geq 0$, $m \geq 0$ e $n \geq 0$.

Pela Proposição 1.4.2, sabemos que

$$H = \langle H_M\rangle^{TS(*)},$$

e assim, para provar que $H = \langle H_P \rangle^{TS(*)}$, é suficiente verificar que $H_M \subset \langle H_P \rangle^{TS(*)}$.

Tomemos $g = g(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in H_M$. Se $g \in H_P$, então $g \in \langle H_P \rangle^{TS(*)}$. Dessa forma, suponhamos que $g \notin H_P$, e denotemos por

$$d = (d_{y_1}, \ldots, d_{y_m}, d_{z_1}, \ldots, d_{z_n})$$

o multigrau de g. Sem perda de generalidade, podemos supor que o grau de y_1 não seja uma potência de p, ou seja, $d_{y_1} = p^k q$, com $q > 1$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$.

Denotemos por $\overline{g} = \overline{g}(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, z_1, \ldots, z_n)$ a componente multi-homogênea de

$$g(y_1 + y_{m+1}, y_2, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n),$$

com

$$\deg_{y_1} \overline{g} = p^k \qquad \deg_{y_{m+1}} \overline{g} = p^k q - p^k,$$

$\deg_{y_i} \overline{g} = d_{y_i}$ e $\deg_{z_j} \overline{g} = d_{z_j}$ para todo $i \neq 1,\ m+1$ e $j = 1, \ldots, n$. Como o corpo $\mathbb{F}$ é infinito, temos que $\overline{g} \in \langle g \rangle^{TS(*)}$. Agora, pelo Teorema de Lucas para coeficientes binomiais módulo um número primo p, temos que

$$\binom{p^k q}{p^k} \equiv q \not\equiv 0 \pmod{p},$$

e como

$$\overline{g}(y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1, z_1, \ldots, z_n) = \binom{p^k q}{p^k} g(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n),$$

segue que $g \in \langle \overline{g} \rangle^{TS(*)}$. Com isso, provamos que $\langle g \rangle^{TS(*)} = \langle \overline{g} \rangle^{TS(*)}$, e agora podemos utilizar o mesmo argumento em $\overline{g}$. Após um número finito de passos, teremos que $\langle g \rangle^{TS(*)} = \langle h \rangle^{TS(*)}$ para algum $h \in H_P$. Portanto, $g \in \langle H_P \rangle^{TS(*)}$, e o resultado fica provado. $\square$

1.5 Linearização Parcial

Nesta pequena seção, estudaremos brevemente o processo de linearização parcial de um polinômio, que nos será útil ao estudar as identidades polinomiais com involução para a álgebra de Grassmann. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo. Dados $a_1, \ldots, a_t \geq 1$, tomemos $x_{ij} \in X$ variáveis distintas, onde $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, a_i$. Uma componente multi-homogênea de

$$f\left(\sum_{j=1}^{a_1} x_{1j}, \sum_{j=1}^{a_2} x_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{a_t} x_{tj}\right)$$

é chamada de *linearização parcial* de f e denotamos por $\mathrm{Lin}(f)$ o conjunto de todas as linearizações parciais de f.

Exemplo 1.5.1. Seja $f = f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Então $f(x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22})$ é igual a

$$\begin{aligned}
&\left(x_{11}^2 x_{21}^2\right) + \left(x_{11}^2 x_{22}^2\right) + \left(x_{12}^2 x_{21}^2\right) + \left(x_{12}^2 x_{22}^2\right) + \\
&\left(x_{11}^2 x_{21} x_{22} + x_{11}^2 x_{22} x_{21}\right) + \left(x_{11} x_{12} x_{21}^2 + x_{12} x_{11} x_{21}^2\right) + \\
&\left(x_{11} x_{12} x_{22}^2 + x_{12} x_{11} x_{22}^2\right) + \left(x_{12}^2 x_{21} x_{22} + x_{12}^2 x_{22} x_{21}\right) + \\
&\left(x_{11} x_{12} x_{21} x_{22} + x_{11} x_{12} x_{22} x_{21} + x_{12} x_{11} x_{21} x_{22} + x_{12} x_{11} x_{22} x_{21}\right)
\end{aligned}$$

e cada um dos polinômios entre parêntesis é uma linearização parcial de f.

A importância das linearizações parciais no estudo das identidades polinomiais é apresentada no próximo resultado:

Lema 1.5.2. Sejam A uma álgebra com base D, $\mathbb{F}$ um corpo infinito e $f = f(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo. Então $f \in Id(A)$ se, e somente se,

$$\hat{f}(v_1, \ldots, v_l) = 0$$

para toda $\hat{f} \in \mathrm{Lin}(f)$ e $v_1, \ldots, v_l \in D$.

Esboço da Demonstração: Se $f \in Id(A)$, então, como o corpo é infinito, $\mathrm{Lin}(f) \subset Id(A)$ pois toda linearização parcial é componente multi-homogênea de um polinômio obtido a partir de f.

Reciprocamente, suponhamos que $f \notin Id(A)$, ou seja, existem $g_1, \ldots, g_t \in A$ tais que

$$f(g_1, \ldots, g_t) \neq 0.$$

Escrevemos cada $g_i = \alpha_{i1} v_{i1} + \cdots + \alpha_{ia_i} v_{ia_i}$, onde $v_{ij} \in D$. Assim, $f(g_1, \ldots, g_t)$ pode ser escrito como combinação linear de avaliações de linearizações parciais em elementos básicos, e algum

$$\hat{f}(v_1, \ldots, v_l) \neq 0.$$

Para mais detalhes, veja [9, Lemma 2]. □

Agora, vamos passar os resultados acima para o contexto de involuções. Sejam $\mathbb{F}$ corpo infinito de característica diferente de 2 e $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$ um polinômio multi-homogêneo. Dados $a_i \geq 1$ com $i = 1, \ldots, m$ e $c_i \geq 1$ com $i = 1, \ldots, n$, tomemos variáveis distintas y_{ij} com $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, a_i$ e z_{ij}, com $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, c_i$.

Uma componente multi-homogênea de

$$f\left(\sum_{j=1}^{a_1} y_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{a_m} y_{mj}, \sum_{j=1}^{c_1} z_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{c_n} z_{nj}\right)$$

é chamada uma *yz-linearização parcial* de f e denotamos por $\mathrm{Lin}_{yz}(f)$ o conjunto de todas as yz-linearizações parciais de f. De forma análoga ao Lema 1.5.2, obtemos o seguinte resultado:

Lema 1.5.3. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2, A uma álgebra com involução $*$, B^+ uma base para A^+, B^- uma base para A^- e $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$ um polinômio multi-homogêneo. Então $f \in Id(A, *)$ se, e somente se,

$$\hat{f}(v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_k) = 0$$

para todo $\hat{f}(y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_k) \in \mathrm{Lin}_{yz}(f)$, $v_1, \ldots, v_l \in B^+$ e $w_1, \ldots, w_k \in B^-$.

Capítulo 2

Álgebra de Grassmann

Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo infinito $\mathbb{F}$ de característica p diferente de 2. Dada uma involução φ de E, denote por $Id(E,\varphi)$ e $C(E,\varphi)$ os subconjuntos de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ formados por todas as $*$-identidades polinomiais e $*$-polinômios centrais de (E,φ), respectivamente. Neste capítulo vamos exibir um conjunto finito de geradores de $Id(E,\varphi)$ como $T(*)$-ideal. Ainda, vamos exibir um conjunto finito de geradores de $C(E,\varphi)$ como $T(*)$-espaço quando $p = 0$ e um conjunto infinito de geradores quando $p > 2$. Observamos que Anisimov descreveu $Id(E,\varphi)$ quando $p = 0$, veja [4], mas aqui daremos uma nova prova. Também provaremos que $C(E,\varphi)$ não é finitamente gerado como $T(*)$-espaço quando $p > 2$ e este é o primeiro exemplo de uma álgebra cujos $*$-polinômios centrais não são finitamente gerados como um $T(*)$-espaço. É importante ressaltar que os resultados apresentados neste capítulo são frutos de um trabalho em conjunto com o Prof Dimas José Gonçalves e o Prof Lucio Centrone, veja [10].

2.1 Involuções em E: Uma simplificação

Antes de estudar as $*$-identidades e os $*$-polinômios centrais de E, precisamos ter algum conhecimento sobre as possíveis involuções dessa álgebra. Essa é uma questão delicada, pois devido à sua estrutura, diversas involuções distintas são possíveis e, diferentemente de UT_n, não há uma classificação sequer para as involuções do primeiro tipo.

O objetivo desta seção é estudar uma simplificação que nos permitirá realizar toda a nossa análise posterior apenas com involuções φ_l tais que $\varphi_l(L) \subset L$, onde L é o espaço vetorial gerado por $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Vamos considerar involuções quaisquer (de primeiro e segundo tipos) e estudar detalhadamente essa simplificação.

Nesta seção, quando não houver indicação, o corpo $\mathbb{F}$ considerado é qualquer, finito ou infinito, desde que possua característica diferente de 2.

Neste parágrafo, vamos relembrar algumas notações: Sejam E e E' as álgebras de Grassmann unitária e não unitária, respectivamente, geradas pelo conjunto infinito $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$. E' possui base $\mathcal{B}'$ formada por todos os elementos

$$\xi = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k},$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, enquanto E possui base $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{1\}$. Dado um elemento $\xi = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_k} \in \mathcal{B}'$, dizemos que k é o seu *comprimento*.

Lema 2.1.1. Se φ é uma involução em E, então temos as seguintes afirmações:

a) $\varphi(\xi_j) \in E'$, para todo $j = 1, 2, \dots$.

b) Se $u \in \mathcal{B}'$ possui comprimento k, então $\varphi(u)$ é uma combinação linear de elementos de E' de comprimento $\geq k$.

Demonstração. a) Seja $\varphi(\xi_j) = \alpha_j + u_j$, com $\alpha_j \in \mathbb{F}$ e $u_j \in E'$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\xi_j\xi_j) \\ &= \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) \\ &= (\alpha_j + u_j)(\alpha_j + u_j) \\ &= \alpha_j^2 + u \end{aligned}$$

onde $u \in E'$. Logo, segue que $\alpha_j^2 = 0$, ou seja, $\alpha_j = 0$.

b) Se $u = \xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}$, então $\varphi(u) = \varphi(\xi_{i_k})\dots\varphi(\xi_{i_1})$. Agora o resultado segue do item (a) e de observar que, se $u, v \in \mathcal{B}'$ são de comprimento m e n, respectivamente, então $uv = 0$ ou $uv \in \mathcal{B}'$ tem comprimento $m + n$. □

Observação 2.1.2. Se φ é uma involução em E, pelo Lema 2.1.1, podemos escrever

$$\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j,$$

onde c_j é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$ com comprimento ≥ 2, $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ e apenas uma quantidade finita deles é não nula.

Denotemos por L o espaço vetorial gerado por $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Com as notações da Observação 2.1.2, vamos definir uma nova transformação linear $\varphi_l : L \to L$, agindo na base da seguinte forma:

$$\varphi_l(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i.$$

Lema 2.1.3. A transformação linear φ_l definida acima é um isomorfismo linear.

Demonstração. Para provar que φ_l é sobrejetora, é suficiente verificar que $\xi_j \in \varphi_l(L)$ para todo j. Comecemos por observar que, se $u \in L$, então $\varphi(u) = \varphi_l(u) + c$, onde c é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$ com comprimento ≥ 2. Agora, dado ξ_j, temos

$$\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j,$$

onde c_j é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$ com comprimento ≥ 2, e assim

$$\begin{aligned}
\xi_j = \varphi(\varphi(\xi_j)) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) + \varphi(c_j) \\
&= \left[\varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) + c\right] + \varphi(c_j)
\end{aligned}$$

onde c e $\varphi(c_j)$ são combinações lineares de elementos de $\mathcal{B}'$ com comprimento ≥ 2, ou seja,

$$\varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) = \xi_j,$$

e portanto, φ_l é sobrejetora.

Suponha agora $\varphi_l(u) = 0$. Então $\varphi(u) = \varphi_l(u) + c = c$, e $u = \varphi(\varphi(u)) = \varphi(c)$. Mas pelo Lema 2.1.1-(b), $\varphi(c)$ é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$ com comprimento ≥ 2, enquanto $u \in L$, ou seja, $u = 0$, e portanto, φ_l é injetora. □

Agora, queremos construir uma involução para E a partir de φ_l, e para evitar criar mais notações, vamos estender φ_l para E e também chamaremos essa função de φ_l. Faremos a extensão da seguinte forma: Nos elementos da base, definimos $\varphi_l(1) = 1$ e se $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k} \in \mathcal{B}'$,

$$\varphi_l(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k}) = \varphi_l(\xi_{i_k})\ldots\varphi_l(\xi_{i_2})\varphi_l(\xi_{i_1}).$$

Por fim, estendemos φ_l em um elemento qualquer de forma linear.

Lema 2.1.4. A transformação linear $\varphi_l : E \to E$ definida acima é uma involução.

Demonstração. *a*) $\varphi_l(ab) = \varphi_l(b)\varphi_l(a)$, para todos $a, b \in E$.

Como φ_l é, por definição, linear, é suficiente tomar $a, b \in \mathcal{B}$. Se $a = 1$ ou $b = 1$, o resultado é claro. Tomemos agora $a = \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}$ e $b = \xi_{j_1}\ldots\xi_{j_n}$. Se $ab \neq 0$, então $ab = \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\ldots\xi_{j_n}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_l(ab) &= \varphi_l(\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\ldots\xi_{j_n}) \\
&= \varphi_l(\xi_{j_n})\ldots\varphi_l(\xi_{j_1})\varphi_l(\xi_{i_m})\ldots\varphi_l(\xi_{i_1}) \\
&= \varphi_l(b)\varphi_l(a).
\end{aligned}$$

Se $ab = 0$, significa que algum $\xi_{i_k} = \xi_{j_l}$. Logo $\varphi_l(\xi_{i_k}) = \varphi_l(\xi_{j_l})$ e como estes elementos pertencem a L, segue que $\varphi_l(\xi_{i_k})\varphi_l(\xi_{j_l}) = 0$, e assim, a igualdade se verifica.

b) $\varphi_l(\varphi_l(a)) = a$ para todo $a \in E$.

Comecemos por lembrar que, se $\varphi(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i + c_j$, então $\varphi_l(\xi_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i$, e pela demonstração do Lema 2.1.3,

$$\varphi_l(\varphi_l(\xi_j)) = \varphi_l\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_i\right) = \xi_j.$$

Como φ_l é, por definição, linear, é suficiente tomar $a \in \mathcal{B}$. Se $a = 1$, o resultado é válido. Agora, seja $a = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}$. Pelo item (a), obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_m})) &= \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_m}) \dots \varphi_l(\xi_{i_1})) \\
&= \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_1})) \dots \varphi_l(\varphi_l(\xi_{i_m})) \\
&= \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.5. O espaço vetorial L possui uma base $\Omega = \{e_1, e_2, \dots\}$ consistindo de elementos simétricos e antissimétricos com respeito a φ_l, ou seja, para todo j,

$$\varphi_l(e_j) = \pm e_j.$$

Demonstração. Todo elemento $v \in L$ pode ser escrito como

$$v = \frac{v + \varphi_l(v)}{2} + \frac{v - \varphi_l(v)}{2},$$

onde $\frac{v+\varphi_l(v)}{2} \in L^{(+,\varphi_l)}$ e $\frac{v-\varphi_l(v)}{2} \in L^{(-,\varphi_l)}$, e como $L^{(+,\varphi_l)} \cap L^{(-,\varphi_l)} = \{0\}$, temos que

$$L = L^{(+,\varphi_l)} \oplus L^{(-,\varphi_l)}.$$

Assim, tomando bases dos subespaços $L^{(+,\varphi_l)}$ e $L^{(-,\varphi_l)}$, e as unindo, obtemos uma base $\Omega = \{e_1, e_2, \dots\}$ de L, que satisfaz a propriedade desejada, como queríamos.

□

Observação 2.1.6. A partir de agora, fixemos essa base Ω de L como no Lema 2.1.5. Observemos que:

(a) A subálgebra unitária de E gerada por Ω é E e $e_ie_j = -e_je_i$, para todos i, j.

(b) Seja D o conjunto formado por 1 e por todos os elementos da forma

$$v = e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k},$$

com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k$, $k \geq 1$. Então D é uma base de E e, se $v \in D$ possui comprimento ≥ 1, então

$$\varphi(v) = \varphi_l(v) + v' = \pm v + v',$$

onde v' é uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de v.

Lema 2.1.7. Sejam $v \in D$ e $e_i, e_j \in \Omega$ tais que $ve_ie_j \neq 0$. Então:
a) Se $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.
b) Se $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.
c) Se $v \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$.
d) Se $v \in D^{(-,\varphi_l)}$ e $e_i, e_j \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, então $ve_ie_j \in D^{(+,\varphi_l)}$.

Demonstração. a) Como φ_l é uma involução, temos que

$$\varphi_l(ve_ie_j) = \varphi_l(e_j)\varphi_l(e_i)\varphi_l(v) = e_je_iv = ve_je_i = -ve_ie_j.$$

Assim, $ve_ie_j \in D^{(-,\varphi_l)}$ e o resultado segue.
Os itens b), c) e d) são análogos. □

O próximo resultado relaciona as identidades multilineares com involução de (E, φ_l) com as identidades ordinárias de E.

Lema 2.1.8. Seja $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ um polinômio multilinear. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica diferente de 2, então $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$ se, e somente se, $f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \in Id(E)$.

Demonstração. Observe que, como Ω é um conjunto infinito e todo elemento $e_i \in \Omega^{(+,\varphi_l)} \cup \Omega^{(-,\varphi_l)}$, é necessário dividir a prova em dois casos: $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito e $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito. As demonstrações para ambos os casos são bastante parecidas, por isso faremos apenas o primeiro, e comentaremos a modificação necessária para o segundo caso.

Para o primeiro caso, isto é, $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito, é claro que se

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \in Id(E),$$

então $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$. Para provar a implicação contrária, suponhamos que $f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \notin Id(E)$. Neste caso, como o polinômio é multilinear, existem elementos $v_1, \ldots, v_{m+n} \in D$ tais que

$$f(v_1, \ldots, v_{m+n}) \neq 0.$$

Dado $v = e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \in D$, denotemos por $\delta(v)$ o conjunto $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\}$. Então, existe um índice θ tal que

$$\delta(v_1) \cup \delta(v_2) \cup \cdots \cup \delta(v_{m+n}) \subset \{e_1, e_2, \ldots, e_\theta\}.$$

Como estamos supondo que $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é infinito, existe um subconjunto

$$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{2(m+n)-1}}, e_{i_{2(m+n)}}\} \subset \Omega^{(+,\varphi_l)}, \tag{2.1}$$

onde $\theta < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2(m+n)-1} < i_{2(m+n)}$. Defina $\overline{v_j} = v_j u_j$ da seguinte forma:

(a) Se $j = 1, \ldots, m$ e $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tome $u_j = 1$.

(b) Se $j = 1, \ldots, m$ e $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tome $u_j = e_{i_{2j-1}} e_{i_{2j}}$.

(c) Se $j = m+1, \ldots, m+n$ e $v_j \in D^{(+,\varphi_l)}$, tome $u_j = e_{i_{2j-1}} e_{i_{2j}}$.

(d) Se $j = m+1, \ldots, m+n$ e $v_j \in D^{(-,\varphi_l)}$, tome $u_j = 1$.

Pelo Lema 2.1.7, temos que

$$\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m} \in D^{(+,\varphi_l)} \text{ e } \overline{v_{m+1}}, \ldots, \overline{v_{m+n}} \in D^{(-,\varphi_l)}.$$

Como $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in Id(E, \varphi_l)$ e u_j são elementos centrais de E, temos que

$$0 = f(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_{m+n}}) = f(v_1, \ldots, v_{m+n}) u_1 \ldots u_{m+n} \neq 0,$$

o que é um absurdo. Logo, $f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \in Id(E)$, como queríamos.

Para o segundo caso, ou seja, $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito, basta trocar $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ por $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ em (2.1). □

Lema 2.1.9. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, então

$$f(u_1, \ldots, u_n) \in \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)},$$

para todos $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$.

Demonstração. Como $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$, podemos escrever

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum \alpha_g g_0 [g_1, g_2, g_3] g_4,$$

onde $\alpha_g \in \mathbb{F}$, $g = (g_0, \ldots, g_4)$ e $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ para todo i. Logo

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum \alpha_g \overline{g_0} [\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}] \overline{g_4},$$

onde $\overline{g_i} = g_i(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$ para todo i. Portanto, segue que

$$f(u_1, \ldots, u_n) \in \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

□

Em $Y \cup Z$ consideremos a seguinte ordem $<$ nas variáveis:

$$z_i < z_{i+1} < \cdots < y_i < y_{i+1}, \text{ para todo } i.$$

Lema 2.1.10. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2 e J um $T(*)$-ideal tal que
$$[y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \in J.$$
Então o espaço vetorial quociente $B_Y/(B_Y \cap J)$ possui conjunto gerador
$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J,$$
onde $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} \in Y \cup Z$, $a_i \geq 0$ para todo i e $m, n \geq 0$.

Demonstração. Comecemos por observar que todo comutador tripo, da forma $[x_1, x_2, x_3]$, com $x_1, x_2, x_3 \in Y \cup Z$, está em J. Sabemos que os geradores de B_Y são polinômios da forma $f = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m} c_1 c_2 \dots c_t$, com $a_i \geq 0$, c_j comutadores, e $t \geq 0$.

Se algum c_i for um comutador de comprimento ≥ 3, então $f \in J$, e $f + B_Y \cap J = B_Y \cap J$. Assim, suponha que todos os comutadores c_i são de comprimento 2, ou seja,
$$f + B_Y \cap J = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J.$$

Pelos Lemas 1.1.12 e 2.1.9, é claro que os polinômios
$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \qquad \text{e} \qquad [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$
com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in Y \cup Z$ pertencem a J. Assim, utilizando os polinômios acima e a lei de anticomutatividade $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$, podemos trocar a ordem das variáveis dentro dos comutadores livremente, e se algum $x_i = x_j$, então $f \in J$. Logo, podemos reescrever
$$f + B_Y \cap J = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + B_Y \cap J,$$
com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$, e o resultado segue. □

Agora temos condições de enunciar o resultado principal desta seção. Este resultado nos diz que todas as identidades com involução de (E, φ) também são identidades com involução para (E, φ_l), e, mais a frente, isso nos permitirá estudar apenas o conjunto $Id(E, \varphi_l)$ para descrever completamente o conjunto $Id(E, \varphi)$.

Lema 2.1.11. Se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, então
$$Id(E, \varphi) \subset Id(E, \varphi_l).$$

Demonstração. Como $\mathbb{F}$ é infinito, sabemos, pela Proposição 1.4.4, que $Id(E, \varphi)$ é gerado por seus elementos multi-homogêneos Y-próprios. Seja $f \in Id(E, \varphi)$ um polinômio multi-homogêneo Y-próprio, e suponhamos que $f \notin Id(E, \varphi_l)$. Denotemos por J o seguinte $T(*)$-ideal:

$$J = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Observe que $J \subset Id(E, \varphi)$ e $J \subset Id(E, \varphi_l)$. Pelo Lema 2.1.10, segue que $f = g + h$, onde $h \in J$ e g é uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m} [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}],$$

com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$ em $Y \cup Z$, $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$, $m \geq 0$ e $n \geq 0$. Ainda, note que $g \in Id(E, \varphi)$ e $g \notin Id(E, \varphi_l)$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, podemos supor que g é multi-homogêneo com mesmo multigrau de f.

Pelo Lema 1.5.3, existem $\hat{g}(y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_k) \in \mathrm{Lin}_{yz}(g)$, $v_1, \dots, v_l \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $w_1, \dots, w_k \in D^{(-,\varphi_l)}$ tais que

$$\hat{g}(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_k) \neq 0. \tag{2.2}$$

Note que, se $l \geq 1$, então $\deg_{y_i} \hat{g} = 1$ para todo $i = 1, \dots, l$ e y_i está dentro de um comutador. Logo, $\hat{g}(y_1, \dots, 1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_k) = 0$. Em particular, $v_1, \dots, v_l \in D - \{1\}$. Como $1 \in D^{(+,\varphi_l)}$, temos que $w_1, \dots, w_k \in D - \{1\}$ também. Ainda, como $\hat{g}$ é multi-homogêneo e $w_i^2 = 0$, segue que $\hat{g}$ é multilinear.

Como $\mathbb{F}$ é corpo infinito e $g \in Id(E, \varphi)$, temos que $\hat{g} \in Id(E, \varphi)$. Agora, tomemos

$$\frac{v_i + \varphi(v_i)}{2} \in E^{(+,\varphi)} \text{ e } \frac{w_j - \varphi(w_j)}{2} \in E^{(-,\varphi)}$$

para todo i, j. Assim, temos que

$$\hat{g}\left(\frac{v_1 + \varphi(v_1)}{2}, \dots, \frac{v_l + \varphi(v_l)}{2}, \frac{w_1 - \varphi(w_1)}{2}, \dots, \frac{w_k - \varphi(w_k)}{2}\right) = 0.$$

Pela Observação 2.1.6, sabemos que

$$\frac{v_i + \varphi(v_i)}{2} = v_i + v_i' \text{ e } \frac{w_j - \varphi(w_j)}{2} = w_j + w_j',$$

onde v_i' é uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de v_i, w_j' é uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de w_j. Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{g}\left(\frac{v_1 + \varphi(v_1)}{2}, \dots, \frac{v_l + \varphi(v_l)}{2}, \frac{w_1 - \varphi(w_1)}{2}, \dots, \frac{w_k - \varphi(w_k)}{2}\right) \\
&= \hat{g}(v_1 + v_1', \dots, v_l + v_l', w_1 + w_1', \dots, w_k + w_k') \\
&= \hat{g}(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_k) + u,
\end{aligned}$$

onde u é uma combinação linear de elementos de D com comprimento estritamente maior do que o comprimento de $\hat{g}(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_k)$. Segue que $\hat{g}(v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_k) = 0$ e, por (2.2), temos um absurdo. □

2.2 $Id(E,*)$ quando $\mathbb{F}$ é de característica 0

Com as observações feitas na seção anterior, podemos estudar a estrutura do conjunto $Id(E,\varphi)$. O primeiro caso a se analisar é quando o corpo possui característica zero. Em 2001, N. Anisimov em [4] estudou as sequências de $\mathbb{Z}_p$-codimensões das $\mathbb{Z}_p$-identidades de E e mostrou que todas as $*$-identidades polinomiais seguem do comutador triplo. Aqui, por consequência dos Lemas 2.1.8 e 2.1.11, trazemos uma nova demonstração, bastante curta, para o mesmo resultado.

Teorema 2.2.1. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero e φ é uma involução em E, então

$$Id(E,\varphi) = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Demonstração. Denote por J o seguinte $T(*)$-ideal:

$$J = \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)}.$$

Como $[x_1, x_2, x_3] \in Id(E)$, segue que $J \subset Id(E,\varphi)$. Pelo Lema 2.1.11, temos que $Id(E,\varphi) \subset Id(E,\varphi_l)$, então resta provar que $Id(E,\varphi_l) \subset J$.

Seja $f = f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in Id(E,\varphi_l)$. Como $\mathbb{F}$ possui característica zero, pelo Teorema 1.4.2, é suficiente supor f multilinear. Pelo Lema 2.1.8,

$$f(x_1, \dots, x_{m+n}) \in Id(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^{T}.$$

Dessa forma, segue do Lema 2.1.9 que

$$f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in J,$$

como queríamos demonstrar. □

2.3 $Id(E,*)$ quando $\mathbb{F}$ é infinito de característica $p > 2$

Até o momento verificamos que, quando a característica do corpo é zero, suas $*$-identidades polinomiais seguem do comutador triplo $[y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3]$, o que é bastante similar ao caso ordinário, onde todas as identidades polinomiais de E seguem do comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$.

Nesta seção veremos que, em característica positiva, um novo polinômio é necessário para descrever as $*$-identidades polinomiais de E, apresentando uma diferença significativa entre o caso ordinário e com involução. Durante toda a seção, $\mathbb{F}$ denotará um corpo infinito de característica $p > 2$.

Lema 2.3.1. Se φ é uma involução em E, então $E^{(-,\varphi)} \subset E'$.

Demonstração. Seja $u = \alpha + v \in E^{(-,\varphi)}$, onde $\alpha \in \mathbb{F}$ e $v \in E'$. Pelo Lema 1.1.19, temos que $u^p = (\alpha + v)^p = \alpha^p + v^p = \alpha^p$. Assim,

$$-(\alpha^p) = -(u^p) = (-u)^p = (\varphi(u))^p = \varphi(u^p) = \varphi(\alpha^p) = (\varphi(\alpha))^p = \alpha^p,$$

ou seja, $2\alpha^p = 0$. Logo $\alpha = 0$, e o resultado segue. □

Combinando os Lemas 1.1.19 e 2.3.1, obtemos o seguinte resultado, que será fundamental em nosso estudo.

Proposição 2.3.2. Se φ é uma involução em E, então $z_1^p \in Id(E,\varphi)$.

Notação 2.3.3. Até o fim desta seção, denotaremos por I o $T(*)$-ideal:

$$I = \langle z_1^p, [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3] \rangle^{T(*)},$$

e por Id o T($*$)-ideal $Id(E,\varphi_l)$, onde φ é uma involução sobre E.

Nosso objetivo é mostrar que $I = Id(E,\varphi)$. É claro que $I \subset Id(E,\varphi)$, e pela Proposição 2.1.11, $Id(E,\varphi) \subset Id$. Resta-nos provar que $Id \subset I$.

Primeiro lembremos que, pela Proposição 1.4.5, é suficiente provar que

$$Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN},$$

para todo $M = (p^{c_1}, \ldots, p^{c_m})$ e todo $N = (p^{b_1}, \ldots, p^{b_n})$, onde B_{MN} denota o subespaço de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z \rangle$ formado por todos os polinômios multi-homogêneos Y-próprios $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ com $\deg_{y_i} f = p^{c_i}$ e $\deg_{z_j} f = p^{b_j}$.

Seja

$$B_{MN}(I) := \frac{B_{MN}}{I \cap B_{MN}}.$$

Pelo Lema 2.1.10, o espaço vetorial $B_{MN}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \ldots z_n^{a_n} [x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}] + I \cap B_{MN},$$

onde $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Com estas informações em mãos, vamos agora provar que $Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$, dividindo em alguns casos:

Lema 2.3.4. Se $M = (p^{c_1}, \ldots, p^{c_m})$, N é qualquer, e algum $c_i \geq 1$, então $Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Demonstração. De fato, basta observar que, como as variáveis y_i aparecem apenas dentro dos comutadores, e $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k}$, devemos ter $B_{MN}(I) = 0$, ou seja, $Id \cap B_{MN} \subset B_{MN} = I \cap B_{MN}$. □

Em outras palavras, o lema anterior nos diz que todo polinômio multi-homogêneo Y-próprio com uma variável simétrica de grau maior do que 1 está em I, e com isso é suficiente supor, a partir de agora, $M = (1,\dots,1)$.

Lema 2.3.5. Se $M = (1,\dots,1)$, $N = (p^{b_1},\dots,p^{b_n})$ e algum $b_j \geq 2$, então $Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Se algum $b_j \geq 2$, então, dado um polinômio da forma

$$g = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n}[x_1,x_2][x_3,x_4]\dots[x_{2k-1},x_{2k}],$$

com $x_1 < x_2 < \dots < x_{2k}$, devemos ter $a_j \geq p^2-1 > p$, ou seja, $g \in I$. Logo, $B_{MN}(I) = 0$ e $Id \cap B_{MN} \subset B_{MN} = I \cap B_{MN}$. □

Lema 2.3.6. Se $M = (1,\dots,1)$ e $N = (1,\dots,1)$, então $Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Seja $f = f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n) \in Id \cap B_{MN}$. Como f é um polinômio multilinear, podemos utilizar o mesmo argumento do Teorema 2.2.1, e assim, obtemos que $f \in I \cap B_{MN}$. □

Lema 2.3.7. Sejam $M = (1,\dots,1)$ e $N = (p^{b_1},\dots,p^{b_n})$, com $0 \leq b_j \leq 1$ para todo j. Se $b_j = 1$ para algum j, então $Id \cap B_{MN} \subset I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Tomemos $f = f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n) \in Id \cap B_{MN}$ e denote por d a cardinalidade do conjunto

$$\{j \in \{1,\dots,n\} | b_j = 1\}.$$

Vamos provar, por indução em d, que $f \in I \cap B_{MN}$.

O caso $d = 0$ foi provado no Lema 2.3.6. Suponha $d \geq 1$. Como $z_i z_j = z_j z_i + [z_i,z_j]$, pelos Lemas 1.1.12, 1.1.13 e 2.1.9, podemos supor $b_1 = 1$. Logo, $B_{MN}(I)$ possui como conjunto gerador elementos da forma

$$z_1^{p-1} z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n}[z_1,x_2][x_3,x_4]\dots[x_{2k-1},x_{2k}] + I \cap B_{MN},$$

onde $x_2 < x_3 < \dots < x_{2k} \in Y \cup Z$. Assim, existe $g \in B_{M\hat{N}}$ e $h \in I$ tais que

$$f = z_1^{p-1} g + h,$$

onde $\hat{N} = (1, p^{b_2},\dots,p^{b_n})$ e g é uma combinação linear de polinômios

$$z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n}[z_1,x_2]\dots[x_{2k-1},x_{2k}].$$

Afirmação: $g \in Id$.

Prova da Afirmação: Suponha que $g \notin Id$. Comecemos por observar que, como $h \in I$ e $I \subset Id$, segue que $z_1^{p-1} g \in Id$. Novamente temos de dividir a prova em dois casos: $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ infinito ou $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ infinito. Vamos estudar apenas o primeiro caso, pois o segundo é análogo.

Assim como no Lema 2.1.8, dado $u = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} \in D$, denote por $\delta(u)$ o conjunto $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$, e se $h = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$ é um elemento qualquer de E, com $\alpha_i \in \mathbb{F}$ e $u_i \in D$, denote por $\delta(h)$ o conjunto $\delta(u_1) \cup \cdots \cup \delta(u_r)$.

Como $g \notin Id$, existem $v_1, \dots, v_m \in E^{(+,\varphi_l)}$ e $w_1, \dots, w_n \in E^{(-,\varphi_l)}$ tais que

$$g(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n) \neq 0.$$

Observe que w_1 pode ser tomado em $D^{(-,\varphi_l)}$, e ainda, de comprimento ímpar.

Seja $s \geq 1$ tal que

$$\delta(v_1) \cup \cdots \cup \delta(v_m) \cup \delta(w_1) \cup \cdots \cup \delta(w_n) \subset \{e_1, e_2, \dots, e_s\}.$$

Como $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é infinito, existem $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{2p-3}}, e_{i_{2p-2}}\} \subset \Omega^{(+,\varphi_l)}$, com $s < i_1 < i_2 < \cdots < i_{2p-3} < i_{2p-2}$. Defina

$$w_1' = e_{i_1}e_{i_2}, \ \dots \ , w_{p-1}' = e_{i_{2p-3}}e_{i_{2p-2}}.$$

Pelo Lema 2.1.7, $w_i' \in E^{(-,\varphi_l)}$ para todo i.

Como $z_1^{p-1}g \in Id$, substituindo z_1 por $w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_i'$, temos que

$$u = \left(w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_i'\right)^{p-1} g\left(v_1, \dots, v_m, w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_i', w_2, \dots, w_n\right) = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u &= \left(w_1 + \sum_{i=1}^{p-1} w_i'\right)^{p-1} g\left(v_1, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n\right) \\ &= (p-1)!(w_1' \dots w_{p-1}')g(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n) \neq 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Assim, a afirmação está provada, ou seja, $g \in Id$.

Por hipótese de indução, segue que $g \in I$, e assim, em particular,

$$f = z_1^{p-1}g + h \in I,$$

como queríamos. □

Combinando os Lemas 2.3.4, 2.3.5, 2.3.6 e 2.3.7, temos o principal resultado desta seção:

Teorema 2.3.8. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Se φ é uma involução sobre E, então

$$Id(E, \varphi) = \langle z_1^p, [y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3]\rangle^{T(*)}.$$

2.4 $C(E,*)$ quando $\mathbb{F}$ é de característica 0

Comecemos a estudar os $*$-polinômios centrais de E com a seguinte observação: Nas seções anteriores, vimos que, se $\mathbb{F}$ é infinito, independente da característica, sempre vale a igualdade $Id(E,\varphi) = Id(E,\varphi_l)$, onde φ é uma involução qualquer de E. Assim, segue que $C(E,\varphi) = C(E,\varphi_l)$, pois, dado $f = f(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)$,

$$\begin{aligned} f \in C(E,\varphi) &\Leftrightarrow [f, y_{m+1} + z_{n+1}] \in Id(E,\varphi) \\ &\Leftrightarrow [f, y_{m+1} + z_{n+1}] \in Id(E,\varphi_l) \\ &\Leftrightarrow f \in C(E,\varphi_l) \end{aligned}$$

Agora, dada uma involução φ de E, defina o seguinte $T(*)$-espaço:

$$W = \mathbb{F} + \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2] \rangle^{TS(*)} + Id(E,\varphi),$$

e note que $W \subset C(E,\varphi)$. Note ainda que W é um candidato natural para ser o conjunto $C(E,\varphi)$ pois contém os polinômios centrais triviais $\mathbb{F} + Id(E,\varphi)$ e um polinômio central não trivial, o comutador. Vamos mostrar nesta seção que a igualdade $W = C(E,\varphi)$ realmente ocorre.

Lema 2.4.1. Sejam $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica diferente de 2 e φ uma involução em E. Se $f \in C(E,\varphi)$ e existe $x \in Y \cup Z$ tal que f é homogênea de grau 1 em x, então $f \in W$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $\varphi = \varphi_l$. O polinômio f é uma combinação linear de monômios $m = m_1 x m_2$, onde m_1 e m_2 são monômios que não dependem de x. Como $m = x m_2 m_1 + [m_1, x m_2]$, podemos escrever

$$f = xg + h,$$

onde $\deg_x g = 0$ e $h \in \langle [y_1 + z_1, y_2 + z_2] \rangle^{TS(*)}$. Assim, em particular, $xg \in C(E,\varphi_l)$.

Afirmação: $g \in Id(E,\varphi_l)$.

Prova da Afirmação: Seja $g = g(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)$ e suponha que $g \notin Id(E,\varphi_l)$. Então existem $v_1,\dots,v_m \in E^{(+,\varphi_l)}$ e $w_1,\dots,w_n \in E^{(-,\varphi_l)}$ tais que

$$g(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n) = g_0 + g_1 \neq 0,$$

onde g_0 e g_1 são combinações lineares de elementos da base D cujos comprimentos são pares e ímpares, respectivamente. Utilizaremos a mesma notação δ do Lema 2.3.7. Seja $s \geq 1$ tal que

$$\delta(v_1) \cup \dots \cup \delta(v_m) \cup \delta(w_1) \cup \dots \cup \delta(w_n) \subset \{e_1, e_2, \dots, e_s\}.$$

Então, existem $s < i_1 < i_2 < i_3$ tais que:

a) $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3} \in \Omega^{(+,\varphi_l)}$, se $\Omega^{(+,\varphi_l)}$ é um conjunto infinito,

b) $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3} \in \Omega^{(-,\varphi_l)}$, se $\Omega^{(-,\varphi_l)}$ é um conjunto infinito.

Pelo Lema 2.1.7, temos que:

No caso (a), $1, e_{i_1} \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_{i_1}e_{i_2}, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(-,\varphi_l)}$.

No caso (b), $1, e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3} \in D^{(+,\varphi_l)}$ e $e_{i_1}, e_{i_1}e_{i_2} \in D^{(-,\varphi_l)}$.

Agora, suponha que $g_0 \neq 0$. Se estivermos no caso (a) e x for uma variável simétrica, então

$$e_{i_1}g(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n) = e_{i_1}g_0 + e_{i_1}g_1 \notin Z(E),$$

e se x for uma variável antissimétrica, então

$$e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n) = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_0 + e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_1 \notin Z(E).$$

Se estivermos no caso (b) e x for uma variável simétrica, então

$$e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n) = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_0 + e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}g_1 \notin Z(E),$$

e se x for uma variável antissimétrica, então

$$e_{i_1}g(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_n) = e_{i_1}g_0 + e_{i_1}g_1 \notin Z(E).$$

Podemos fazer uma análise análoga à anterior para o caso em que $g_1 \neq 0$, e assim, em todos os casos, obtemos um absurdo, pois $xg \in C(E,\varphi_l)$. Portanto, $g \in Id(E,\varphi_l)$ e

$$f = xg + h \in W,$$

como queríamos. $\square$

Teorema 2.4.2. Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero e φ é uma involução em E, então

$$C(E,\varphi) = \langle 1, [y_1+z_1, y_2+z_2], (y_1+z_1)[y_2+z_2, y_3+z_3, y_4+z_4] \rangle^{TS(*)}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.1, temos que

$$W = \langle 1, [y_1+z_1, y_2+z_2], (y_1+z_1)[y_2+z_2, y_3+z_3, y_4+z_4] \rangle^{TS(*)},$$

e $W \subset C(E,\varphi)$.

Como o corpo $\mathbb{F}$ é de característica zero, todo $T(*)$-espaço é gerado por seus elementos multilineares. Assim, dado $f \in C(E,\varphi)$ multilinear, pelo Lema 2.4.1, segue que $f \in W$, ou seja, $C(E,\varphi) \subset W$, e o teorema fica provado. $\square$

2.5 $C(E,*)$ quando $\mathbb{F}$ é infinito de característica $p > 2$

Nesta seção, vamos descrever o conjunto dos $*$-polinômios centrais de E e mostrar que esse conjunto não é finitamente gerado como $T(*)$-espaço. Para provar este fato, vamos precisar da seguinte observação técnica:

Observação 2.5.1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$ e denotemos por $\mathbb{I}$ o ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelos elementos f^p, onde $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e $f(0,\ldots,0) = 0$. Defina W_n como o T-espaço em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado por

$$x_0^p,\ x_0^p q_1,\ x_0^p q_2,\ldots,x_0^p q_n,$$

onde

$$q_i = q_i(x_1,\ldots,x_{2i}) = x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\ldots x_{2i-1}^{p-1}[x_{2i-1},x_{2i}]x_{2i}^{p-1}.$$

Utilizando o Lema 13 de [31], foi provado em [8, Página 136] que

$$q_{n+1} \notin W_n + Id(E) + \mathbb{I}.$$

Vamos definir os seguintes polinômios em $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$, que são análogos aos polinômios q_n em $\mathbb{F}\langle X\rangle$:

$$\hat{q}_1 = \hat{q}(y_1,y_2,z_1,z_2) := (y_1+z_1)^{p-1}[y_1+z_1,y_2+z_2](y_2+z_2)^{p-1}$$

e para cada $n \geq 1$, sejam

$$\hat{q}_n := \hat{q}(y_1,y_2,z_1,z_2)\ldots\hat{q}(y_{2n-1},y_{2n},z_{2n-1},z_{2n}).$$

Teorema 2.5.2. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Então o conjunto $C(E,\varphi)$ dos $*$-polinômios centrais de E com uma involução φ é gerado, como um $T(*)$-espaço, pelos polinômios:

(1) $(y_1+z_1)z_2^p(y_3+z_3)$,

(2) $(y_1+z_1)[y_2+z_2,y_3+z_3,y_4+z_4]$,

(3) $y_0^p,\ y_0^p\hat{q}_1,\ \ldots,\ y_0^p\hat{q}_n,\ldots$

Demonstração. Denotemos por U o $T(*)$-espaço gerado pelos polinômios (1), (2) e (3). Como $y_0^p\hat{q}_1 \in U$, temos que

$$g = (1)^p(1+y_1+z_1)^{p-1}[1+y_1+z_1,1+y_2+z_2](1+y_2+z_2)^{p-1} \in U,$$

e cada componente multi-homogênea de g pertence a U também. Logo,

$$[y_1,y_2],\ [y_1,z_2],\ [z_1,y_2],\ [z_1,z_2] \in U,$$

e assim, $W \subset U$.

Pelo Teorema 1.1.25, temos que $U \subset C(E,\varphi)$. Vamos agora provar que $C(E,\varphi) \subset U$. Pela Proposição 1.4.5, $C(E,\varphi)$ é gerada por seus elementos multi-homogêneos $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ de multigrau $(p^{b_1},\ldots,p^{b_m},p^{c_1},\ldots,p^{c_n})$, onde cada c_i e $b_j \geq 0$. Então tomemos $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in C(E,\varphi)$ dessa forma.

Se $b_i = 0$ ou $c_i = 0$ para algum i, então segue do Lema 2.4.1 que $f \in W$, e logo, $f \in U$.

Suponhamos agora que $b_i > 0$ e $c_i > 0$ para todo i. Pelo Lema 2.1.10, o elemento $f + I$ em $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle/I$, onde I é o $T(*)$-ideal definido na Notação 2.3.3, é uma combinação linear de elementos $h + I$ onde

$$h = y_1^{d_1}\ldots y_m^{d_m} z_1^{a_1}\ldots z_n^{a_n}[x_1,x_2][x_3,x_4]\ldots[x_{2k-1},x_{2k}]$$

e $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k}$ estão em $Y \cup Z$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, podemos supor que h possui o mesmo multigrau que f. Assim, se $c_i \geq 2$ para algum i, então $h \in Id(E,\varphi)$ e $f \in U$, como desejado.

Suponhamos agora que $b_i > 0$ e $c_i = 1$ para todo i. Neste caso, note que $a_i = p-1$ para todo i e assim,

$$h = y_1^{d_1}\ldots y_m^{d_m} z_1^{p-1}\ldots z_n^{p-1}[x_1,x_2][x_3,x_4]\ldots[x_{2k-1},x_{2k}].$$

Sabemos que, se $u \in C(E,\varphi)$, então $uv + I = vu + I$ para todo polinômio v, e como

$$[x_{2i-1},x_{2i}],\ [x_{2i-1},x_{2i}]x_{2i}^{p-1}, x_{2i-1}^{p-1}[x_{2i-1},x_{2i}]x_{2i}^{p-1} \in C(E,\varphi),$$

podemos reescrever cada h como

$$h = y_{i_1}^{p^{b_{i_1}}}\ldots y_{i_r}^{p^{b_{i_r}}} y_{j_1}^{p^{b_{j_1}}-p}\ldots y_{j_s}^{p^{b_{j_s}}-p} x_1^{p-1}[x_1,x_2]x_2^{p-1}\cdots x_{2n-1}^{p-1}[x_{2n-1},x_{2n}]x_{2n}^{p-1}.$$

Por fim, como $(uv)^p + I = u^p v^p + I$ (Lema 1.1.20), obtemos que

$$h \in \langle y_0^p \hat{q}_n\rangle^{TS(*)} + I.$$

Portanto, $f \in U$, como desejado. □

No teorema anterior descrevemos um conjunto infinito de polinômios que geram o $T(*)$-espaço $C(E,\varphi)$. Vamos mostrar agora que não é possível descrever o mesmo $T(*)$-espaço utilizando um subconjunto finito daqueles polinômios. Em particular, provaremos que $C(E,\varphi)$ não é finitamente gerado.

Corolário 2.5.3. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito de característica $p > 2$. Se φ é uma involução em E, então $C(E,\varphi)$ não é finitamente gerado como um $T(*)$-espaço.

Demonstração. Seja C_n o $T(*)$-espaço de $F\langle Y \cup Z\rangle$ gerado pelos polinômios

$$(y_1 + z_1)z_2^p(y_3 + z_3),\ (y_1 + z_1)[y_2 + z_2, y_3 + z_3, y_4 + z_4],\ y_0^p,\ y_0^p\widehat{q_1},\ \dots,\ y_0^p\widehat{q_n}.$$

Suponha que $C(E,\varphi)$ é finitamente gerado como $T(*)$-espaço. Então existe um conjunto finito S tal que $C(E,\varphi) = \langle S\rangle^{TS(*)}$. Como

$$C(E,\varphi) = \bigcup_n C_n,$$

para cada $f \in S$ existe n_f tal que $f \in C_{n_f}$. Logo, se $N = max\{n_f |\ f \in S\}$, então $C(E,\varphi) = C_N$. Em particular,

$$f = f(y_1,\dots,y_{2(N+1)}) = 1^p\widehat{q}_{N+1}(y_1,\dots,y_{2(N+1)},0,\dots,0) \in C_N.$$

Assim, f é uma combinação linear de polinômios da forma

$$f_1f_2^pf_3, \quad g_1[g_2,g_3,g_4],$$

$$h_0^p, \quad h_1^p\widehat{q_1}(h_{1,1},h_{1,2},h_{1,3},h_{1,4}), \quad \dots, \quad h_N^p\widehat{q_N}(h_{N,1},\dots,h_{N,4N}),$$

para alguns $f_i, g_i, h_i, h_{i,j} \in F\langle Y \cup Z\rangle$. Como f_2 é um polinômio antissimétrico e 1 é um polinômio simétrico, temos que $f_2(0,\dots,0) = 0$, ou seja, f_2 não possui termo escalar. Ainda, substituindo as variáveis $z_1,\ z_2,\ \dots$ por 0, podemos supor que $f_i, g_i, h_i, h_{i,j} \in F\langle Y\rangle$.

Agora, substituímos as variáveis y_j por x_j. Logo, $f_1f_2^pf_3 \in \mathbb{I}$, $g_1[g_2,g_3,g_4] \in Id(E)$, $h_0^p \in W_N$,

$$h_i^p\widehat{q_i}(h_{i,1},\dots,h_{i,4i}) = h_i^pq_i(h_{i,1} + h_{i,2i+1},\dots,h_{i,2i} + h_{i,4i}) \in W_N$$

e

$$q_{N+1} = f(x_1,\dots,x_{2(N+1)}) \in W_N + Id(E) + \mathbb{I}$$

que é um absurdo pela Observação 2.5.1.

Portanto, $C(E,\varphi)$ não é finitamente gerado como $T(*)$-espaço. $\square$

Capítulo 3

Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores

Neste capítulo, nosso objetivo será estudar dois problemas: (1) descrever as $*$-identidades polinomiais de UT_3, quando $\mathbb{F}$ é infinito de característica $p \geq 3$ e (2) descrever os $*$-polinômios centrais de UT_n, com $n > 2$ e $\mathbb{F}$ qualquer.

A primeira seção deste capítulo será dedicada ao primeiro problema. Em [12], os autores listaram os geradores de $Id(UT_3, *)$ quando $\mathbb{F}$ possui característica zero. Neste trabalho, vamos provar que a mesma lista de polinômios gera o conjunto $Id(UT_3, *)$ quando $\mathbb{F}$ possui característica positiva.

Na segunda seção, mais curta, vamos provar que os únicos $*$-polinômios centrais de UT_n são os triviais, quando $n > 2$.

3.1 $*$-Identidades Polinomiais para UT_3

Seja $*$ a involução em $UT_3(\mathbb{F})$ definida no Exemplo 1.2.4, dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} f & e & c \\ 0 & d & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Daqui em diante, $\mathbb{F}$ denotará um corpo infinito de característica $p > 2$. Para facilitar a notação, denotemos

$$UT_3(\mathbb{F}) = UT_3 \quad \text{e} \quad Id(UT_3(\mathbb{F}), *) = Id.$$

Nesta seção vamos descrever Id.

Para criar uma nova $*$-identidade polinomial ou para verificar que um dado polinômio pertence à Id, é importante conhecer uma base para os espaços vetoriais dos elementos simétricos e antissimétricos de UT_3:

$$UT_3^+ = \text{span}\ \{e_{11}+e_{33},\ e_{22},\ e_{12}+e_{23},\ e_{13}\} \ \text{ e } \ UT_3^- = \text{span}\ \{e_{11}-e_{33},\ e_{12}-e_{23}\}.$$

O próximo lema nos fornece um método para construir $*$-identidades polinomiais para UT_3.

Lema 3.1.1. Se $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ e

$$f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) \in \text{span}\{e_{13}\}$$

para todos $a_1,\ldots,a_m \in UT_3^+,\ \ b_1,\ldots,b_n \in UT_3^-$, então

$$(f - f^*) \in Id.$$

Demonstração. Como $f - f^*$ é um polinômio antissimétrico, temos que

$$(f - f^*)(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)$$

é um elemento antissimétrico. Mas

$$(f - f^*)(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n) = \alpha e_{13}$$

é uma matriz simétrica, com $\alpha \in \mathbb{F}$. Logo, $\alpha = 0$ e $(f - f^*) \in Id$. □

Se $f \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^+$ e $g \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^-$, denotamos $|f| = 1$ e $|g| = 0$. Assim, se $h \in \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^+ \cup \mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle^-$, então

$$h^* = -(-1)^{|h|}h. \tag{3.1}$$

Daqui em diante, denotamos por x_i qualquer elemento de $\{y_i, z_i\}$ e escrevemos $|[x_i,x_j]| = |x_ix_j|$.

Proposição 3.1.2. Os seguintes polinômios pertencem a Id:

(i) $s_3(z_1,z_2,z_3) = z_1[z_2,z_3] - z_2[z_1,z_3] + z_3[z_1,z_2]$,

(ii) $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4][x_1,x_2]$,

(iii) $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_1x_3|}[x_1,x_3][x_2,x_4] + (-1)^{|x_1x_4|}[x_1,x_4][x_2,x_3]$,

(iv) $z_1[x_3,x_4]z_2 + (-1)^{|x_3x_4|}z_2[x_3,x_4]z_1$,

(v) $[x_1,x_2]z_5[x_3,x_4]$,

(vi) $z_1[x_4,x_5]z_2x_3 + (-1)^{|x_3|}x_3z_1[x_4,x_5]z_2$.

Demonstração. Como s_3 é o polinômio standard e alternado nas suas três variáveis, e $\dim UT_3^- = 2$, segue que $s_3(z_1, z_2, z_3) \in Id$.

Por (3.1), o polinômio (ii) tem a forma $f - f^*$, onde $f = (-1)^{|x_1 x_2|}[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Logo, pelo Lema 3.1.1, ele é uma $*$-identidade para UT_3.

Definindo $f = z_1[x_3, x_4]z_2$, podemos usar o mesmo argumento de (ii) para provar que (iv) pertence a Id.

Definindo $f = z_1[x_4, x_5]z_2 x_3$, podemos usar (3.1), o Lema 3.1.1 e a identidade (iv) para provar que (vi) pertence a Id.

A prova de que (iii) e (v) são $*$-identidades para UT_3 pode ser obtida via verificação direta, utilizando matrizes genéricas, e assim, deixamos para o leitor. □

Notação 3.1.3. Daqui em diante, denotaremos por I o $T(*)$-ideal em $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ gerado pelos polinômios da Proposição 3.1.2. Agora, vamos deduzir algumas consequências dessas identidades:

A demonstração do próximo lema é a mesma dos Lemas 5.2, 5.3 e 5.5 em [12].

Lema 3.1.4. Os seguintes polinômios pertencem a I:

i) $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$,

ii) $[x_1, x_2][x_3, x_4]x_5 + (-1)^{|x_5|}x_5[x_1, x_2][x_3, x_4]$,

iii) $[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] - (-1)^{|x_5|}[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$.

Demonstração. i) Se x_3 e x_4 são ambas variáveis simétricas ou ambas antissimétricas, então $[x_3, x_4]$ é um polinômio antissimétrico, $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$ é uma consequência da Proposição 3.1.2-(v), e portanto, pertence a I.

Assim, resta-nos verificar o caso em que x_3 é uma variável simétrica e x_4 uma variável antissimétrica. Utilizando a Proposição 3.1.2-(v) e o fato de que o comutador induz uma derivação, obtemos, módulo I:

$$\begin{aligned}
0 &= [y_3, [x_1, x_2]z_4[x_5, x_6]] \\
&= [x_1, x_2]z_4[y_3, [x_5, x_6]] + [x_1, x_2][y_3, z_4][x_5, x_6] + [y_3, [x_1, x_2]]z_4[x_5, x_6] \\
&= [x_1, x_2][y_3, z_4][x_5, x_6].
\end{aligned}$$

ii) Comecemos supondo que x_5 é uma variável antissimétrica, ou seja, $x_5 = z_5$. Nesse caso, substituindo x_1 por $[x_1, x_2]$ e x_2 por z_5 na identidade (ii) da Proposição 3.1.2, utilizando a Proposição 3.1.2-(v) e (ii) para trocar a ordem dos comutadores, obtemos, módulo I:

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{|x_1 x_2|}[x_1, x_2, z_5][x_3, x_4] - (-1)^{|x_3 x_4|}[x_3, x_4][x_1, x_2, z_5] \\
&= -(-1)^{|x_1 x_2|}z_5[x_1, x_2][x_3, x_4] - (-1)^{|x_3 x_4|}[x_3, x_4][x_1, x_2]z_5 \\
&= -(-1)^{|x_1 x_2|}z_5[x_1, x_2][x_3, x_4] - (-1)^{|x_1 x_2|}[x_1, x_2][x_3, x_4]z_5,
\end{aligned}$$

ou seja, $z_5[x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_2][x_3,x_4]z_5 \in I$.

Agora, suponhamos $x_5 = y_5$. Observamos que $(-1)^{|[[x_1,x_2],y_5]|} = -(-1)^{|x_1x_2|}$, assim, utilizando a Proposição 3.1.2-(ii), obtemos

$$f_1 = -(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2,y_5][x_3,x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4][x_1,x_2,y_5] \in I,$$

$$f_2 = (-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4,y_5] + (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4,y_5][x_1,x_2] \in I.$$

Somando os polinômios f_1 e f_2, obtemos, módulo I:

$$0 = y_5g - 2(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2]y_5[x_3,x_4] + 2(-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4]y_5[x_1,x_2] + gy_5,$$

onde $g = (-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4][x_1,x_2] \in I$. Dessa forma, temos que o polinômio $-(-1)^{|x_1x_2|}[x_1,x_2]y_5[x_3,x_4] + (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4]y_5[x_1,x_2]$ pertence a I.

A prova se encerra ao desenvolver o polinômio f_1, utilizar o fato de o polinômio acima pertencer a I e utilizar também a Proposição 3.1.2-(ii) para trocar a ordem dos comutadores.

iii) Se x_5 é uma variável antissimétrica, temos

$$\begin{aligned} &[x_1,x_2,z_5][x_3,x_4] - [x_1,x_2][x_3,x_4,z_5] \\ =&2[x_1,x_2]z_5[x_3,x_4] - (z_5[x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_2][x_3,x_4]z_5). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2-(v), o polinômio $[x_1,x_2]z_5[x_3,x_4] \in I$, e pelo item (ii) acima, o polinômio entre parêntesis também pertence a I. A análise é análoga para o caso em que x_5 é uma variável simétrica. □

Lema 3.1.5. Considere a álgebra quociente $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle/I$. Se $\sigma \in Sym(n)$ e $\rho \in Sym(m)$, então

a) $[z_a,z_b,z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}] + I = [z_a,z_b,z_1,\ldots,z_n] + I$,

b) $z_{\rho(1)}\ldots z_{\rho(m)}[x_a,x_b,x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}][x_c,x_d] + I =$
$z_1\ldots z_m[x_a,x_b,x_1,\ldots,x_n][x_c,x_d] + I$,

c) $[x_a,x_b,x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},y_i] + I = [x_a,x_b,x_1,\ldots,x_n,y_i] + I$,

d) $x_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)}z_j[x_a,x_b] + I = x_1\ldots x_nz_j[x_a,x_b] + I$,

e) $[x_a,x_b]z_jx_{\sigma(1)}\ldots x_{\sigma(n)} + I = [x_a,x_b]z_jx_1\ldots x_n + I$.

Demonstração. a) Observemos que é suficiente verificar que, módulo I,

$$[z_a,z_b,z_1,\ldots,z_i,z_{i+1},\ldots,z_n] = [z_a,z_b,z_1,\ldots,z_{i+1},z_i,\ldots,z_n]. \tag{3.2}$$

Aplicando a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}[z_a, z_b, z_1, \dots, z_i, z_{i+1}] &= [[z_a, z_b, z_1, \dots, z_{i-1}], z_i, z_{i+1}] \\ &= -[[z_i, z_{i+1}], [z_a, z_b, z_1, \dots, z_{i-1}]] \\ &\quad + [[z_a, z_b, z_1, \dots, z_{i-1}], z_{i+1}, z_i].\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2-(ii), temos que $[[z_i, z_{i+1}], [z_a, z_b, z_1, \dots, z_{i-1}]] \in I$, ou seja, módulo I,

$$[z_a, z_b, z_1, \dots, z_i, z_{i+1}] = [z_a, z_b, z_1, \dots, z_{i+1}, z_i],$$

e voltando em (3.2), o resultado fica provado.

b) Este item nos diz que podemos reordenar as variáveis fora dos comutadores e dentro do primeiro comutador, a partir da terceira variável. Comecemos analisando as variáveis fora dos comutadores. Observe que é suficiente verificar que, módulo I,

$$z_1 \dots z_i z_{i+1} \dots z_m c_1 c_2 = z_1 \dots z_{i+1} z_i \dots z_m c_1 c_2,$$

onde c_1 e c_2 são comutadores. Mas isso é uma consequência do Lema 3.1.4-(i),(ii).

Para as variáveis dentro do primeiro comutador, é suficiente verificar que, módulo I,

$$[x_a, x_b, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n][x_c, x_d] = [x_a, x_b, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n][x_c, x_d].$$

Aplicando a identidade de Jacobi no primeiro comutador, obtemos:

$$\begin{aligned}[x_a, x_b, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n] &= -[[x_i, x_{i+1}, [x_a, x_b, \dots, x_{i-1}]], \dots, x_n] \\ &\quad + [x_a, x_b, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n].\end{aligned}$$

Portanto, basta-nos verificar que

$$[x_i, x_{i+1}, [x_a, x_b, \dots, x_{i-1}], \dots, x_n][x_c, x_d] \in I.$$

De fato, desenvolvendo o primeiro comutador, é possível escrevê-lo como combinação linear de produtos de dois comutadores, e pelo Lema 3.1.4-(i), segue o resultado.

c) Assim como nos casos anteriores, vamos verificar que, módulo I,

$$[x_a, x_b, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, y_j] = [x_a, x_b, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n, y_j].$$

Aplicando a identidade de Jacobi no comutador do lado esquerdo da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}[x_a, x_b, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, y_j] &= -[[x_i, x_{i+1}, [x_a, x_b, \dots, x_{i-1}]], \dots, x_n, y_j] \\ &\quad + [x_a, x_b, x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n, y_j].\end{aligned}$$

Logo, resta-nos verificar que

$$[[x_i, x_{i+1}, [x_a, x_b, \ldots, x_{i-1}], \ldots, x_n], y_j] \in I. \tag{3.3}$$

Assim como no item (b), $[x_i, x_{i+1}, [x_a, x_b, \ldots, x_{i-1}], \ldots, x_n]$ pode ser escrito como combinação linear de produtos de dois comutadores, e dessa forma, o polinômio em (3.3) pode ser reescrito como combinação linear de elementos $[[u, v][w, t], y_j]$, mas pelo Lema 3.1.4-(ii), esses polinômios pertencem a I, e o resultado fica provado.

d) Assim como nos casos anteriores, é suficiente verificar que, módulo I,

$$x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_n z_j [x_a, x_b] = x_1 \ldots x_{i+1} x_i \ldots x_n z_j [x_a, x_b].$$

Observemos que

$$\begin{aligned} x_1 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_n z_j [x_a, x_b] = & x_1 \ldots [x_i, x_{i+1}] \ldots x_n z_j [x_a, x_b] + \\ & x_1 \ldots x_{i+1} x_i \ldots x_n z_j [x_a, x_b]. \end{aligned}$$

Logo, basta-nos verificar que $p = x_1 \ldots [x_i, x_{i+1}] \ldots x_n z_j [x_a, x_b] \in I$. Temos que

$$\begin{aligned} x_1 \ldots [x_i, x_{i+1}] x_{i+2} \ldots x_n z_j [x_a, x_b] = & x_1 \ldots [[x_i, x_{i+1}], x_{i+2} \ldots x_n] z_j [x_a, x_b] + \\ & x_1 \ldots x_{i+2} \ldots x_n [x_i, x_{i+1}] z_j [x_a, x_b], \end{aligned}$$

e pela Proposição 3.1.2-(v), segue que p pertence a I, e portanto, o resultado fica provado.

e) Análogo ao item anterior. □

O próximo resultado pode ser encontrado em [12, Lemma 5.6]. Na página 554, linha 6, há um pequeno erro de sinal, o qual corrigimos abaixo:

Lema 3.1.6. Para todo $n \geq 0$, o seguinte polinômio pertence a I:

$$\begin{aligned} &(-1)^{|x_4 x_3|}[x_4, x_3, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}][x_2, x_1] \\ -&(-1)^{|x_4 x_2|}[x_4, x_2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}][x_3, x_1] \\ +&(-1)^{|x_3 x_2|}[x_3, x_2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}][x_4, x_1]. \end{aligned}$$

Demonstração. A prova será feita por indução em n. Note que é suficiente provar que o seguinte polinômio está em I:

$$\begin{aligned} g = &+ (-1)^{|x_4 x_3|}[x_4, x_3] x_5 [x_2, x_1] \\ &- (-1)^{|x_4 x_2|}[x_4, x_2] x_5 [x_3, x_1] \\ &+ (-1)^{|x_3 x_2|}[x_3, x_2] x_5 [x_4, x_1]. \end{aligned}$$

Se x_5 for uma variável antissimétrica, então $g \in I$ pela Proposição 3.1.2-(v).

Suponha que x_5 é uma variável simétrica, e a denote por y_5. Escreva

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = &+(-1)^{|x_4x_3|}[x_4,x_3][x_2,x_1] \\ &-(-1)^{|x_4x_2|}[x_4,x_2][x_3,x_1] \\ &+(-1)^{|x_3x_2|}[x_3,x_2][x_4,x_1]. \end{aligned}$$

Pelas identidades (ii) e (iii) da Proposição 3.1.2, temos que $f \in I$, e portanto, $f(y_5x_1,x_2,x_3,x_4) \in I$. Agora, utilizando a igualdade

$$[x_i, y_5x_1] = y_5[x_i,x_1] + [x_i,y_5]x_1$$

obtemos que $g \in I$. □

A demonstração do próximo lema é análoga à [12, Lemma 5.10].

Lema 3.1.7. Os seguintes polinômios pertencem a I:

i) $[z_1,z_2][x_3,x_4] - z_1[x_3,x_4]z_2$, quando $|x_3| = |x_4|$.

ii) $[z_1,z_2][z_3,y_4] + z_1[z_2,y_4]z_3 - z_2[z_1,y_4]z_3$.

Demonstração. i) Seja $f = [z_1,z_2][x_3,x_4] - z_1[x_3,x_4]z_2$, onde $|x_3| = |x_4|$. Tomemos

$$\begin{aligned} g_1 &= [z_1,z_2][x_3,x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3,x_4][z_1,z_2] \\ g_2 &= z_1[x_3,x_4]z_2 + (-1)^{|x_3x_4|}z_2[x_3,x_4]z_1. \end{aligned}$$

Pelas identidades (ii) e (iv) da Proposição 3.1.2, segue que $g_1, g_2 \in I$. Por hipótese, $|x_3| = |x_4|$, logo, substituindo z_3 por $[x_3,x_4]$ na identidade (i) da Proposição 3.1.2, obtemos

$$g_3 = z_1[z_2,[x_3,x_4]] - z_2[z_1,[x_3,x_4]] + [x_3,x_4][z_1,z_2] \in I,$$

e assim, verifica-se que, módulo I, $g_1 - g_2 + g_3 = 2f$, ou seja, $f \in I$.

ii) Seja $f = [z_1,z_2][z_3,y_4] + z_1[z_2,y_4]z_3 - z_2[z_1,y_4]z_3$. Tomemos

$$\begin{aligned} g_1 &= s_3(z_1,z_2,z_3); \qquad g_2 = z_1[z_3,y_4]z_2 - z_2[z_3,y_4]z_1 \\ g_3 &= z_1[z_2,y_4]z_3 - z_3[z_2,y_4]z_1 \\ g_4 &= z_2[z_1,y_4]z_3 - z_3[z_1,y_4]z_2 \\ g_5 &= s_3(z_1y_4,z_2,z_3); \qquad g_6 = s_3(z_1,z_2y_4,z_3) \\ g_7 &= s_3(z_1,z_2,z_3y_4). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.2, sabemos que $g_1,g_2,g_3,g_4 \in I$, e após alguns cálculos, verifica-se que

$$g_1y_4 + g_2 + g_3 - g_4 - g_5 - g_6 + g_7 = 2f.$$

Dessa forma, para provar que $f \in I$, é suficiente verificar que $g_5, g_6, g_7 \in I$. Vamos verificar apenas que $g_5 \in I$, pois os outros dois casos são análogos.

Observemos que o polinômio $z_1y_4 + y_4z_1$ é antissimétrico, logo

$$s_3(z_1y_4 + y_4z_1, z_2, z_3) \in I.$$

Por outro lado,

$$s_3(z_1y_4 - y_4z_1, z_2, z_3) = [z_1, y_4][z_2, z_3] + [z_2, z_3][z_1, y_4] + z_3[z_1, y_4]z_2 - z_2[z_1, y_4]z_3,$$

e, pela Proposição 3.1.2, também pertence a I. Somando esses dois polinômios, obtemos que, módulo I, $2g_5 \in I$, ou seja, $g_5 \in I$. □

Lema 3.1.8. Para todo $n \geq 3$, o seguinte polinômio pertence a I:

$$f_n = z_1[z_3, z_2, x_4, \ldots, x_n] - z_2[z_3, z_1, x_4, \ldots, x_n] + z_3[z_2, z_1, x_4, \ldots, x_n].$$

Demonstração. Faremos indução em $n \geq 3$. Se $n = 3$, então $f_3 = -s_3(z_1, z_2, z_3)$, e assim, pertence a I.

Suponhamos que $f_n \in I$. Então $[f_n, x_{n+1}] \in I$, e este polinômio é igual a

$$\begin{aligned} f_{n+1} &+ [z_1, x_{n+1}][z_3, z_2, x_4, \ldots, x_n] \\ &- [z_2, x_{n+1}][z_3, z_1, x_4, \ldots, x_n] \\ &+ [z_3, x_{n+1}][z_2, z_1, x_4, \ldots, x_n]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pelo Lema 3.1.6, sabemos que

$$\begin{aligned} g = &+ [z_3, z_2, x_4, \ldots, x_n][z_1, x_{n+1}] \\ &- [z_3, z_1, x_4, \ldots, x_n][z_2, x_{n+1}] \\ &+ [z_2, z_1, x_4, \ldots, x_n][z_3, x_{n+1}] \in I, \end{aligned}$$

e aplicando a identidade (ii) da Proposição 3.1.2 em g, obtemos

$$\begin{aligned} g = (-1)^{|x_{n+1}|}\big(&+ [z_1, x_{n+1}][z_3, z_2, x_4, \ldots, x_n] \\ &- [z_2, x_{n+1}][z_3, z_1, x_4, \ldots, x_n] \\ &+ [z_3, x_{n+1}][z_2, z_1, x_4, \ldots, x_n]\big). \end{aligned}$$

Voltando em (3.4), segue que $f_{n+1} \in I$. □

A demonstração do próximo lema é análoga a [12, Lemmas 5.13, 5.14, 5.15]:

Lema 3.1.9. Para todo $m \geq 2$, os seguintes polinômios pertencem a I:

a) $z_1z_2[y_1, y_2, \ldots, y_m] - z_2[y_2, z_1, y_1, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_1, y_2, \ldots, y_m]$.

b) $z_1z_2[y_1, z_3, y_2, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_3, z_1, y_2, \ldots, y_m]$.

c) $z_1z_2[z_3, z_4, y_1, \ldots, y_m] + z_2[z_3, z_4, z_1, y_1, \ldots, y_m]$.

Demonstração. a) Seja

$$f_m = z_1z_2[y_1, y_2, \ldots, y_m] - z_2[y_2, z_1, y_1, y_3, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_1, y_2, \ldots, y_m].$$

Pela identidade de Jacobi, segue que

$$f_m = z_1z_2[y_1, y_2, \ldots, y_m] + z_2[y_1, y_2, z_1, y_3, \ldots, y_m].$$

Vamos mostrar que $f_m \in I$ para todo $m \geq 2$ por indução. Para $m = 2$, utilizando o Lema 3.1.7-(i) e a Proposição 3.1.2-(iv), temos, módulo I,

$$\begin{aligned} f_2 &= z_1z_2[y_1, y_2] + z_2[y_1, y_2, z_1] \\ &= z_1z_2[y_1, y_2] + z_2[y_1, y_2]z_1 - z_2z_1[y_1, y_2] \\ &= [z_1, z_2][y_1, y_2] + z_2[y_1, y_2]z_1 \\ &= z_1[y_1, y_2]z_2 + z_2[y_1, y_2]z_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $f_m \in I$, assim $[f_m, y_{m+1}] \in I$. Utilizando a propriedade $[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$ e a Proposição 3.1.2-(v), temos, módulo I,

$$\begin{aligned} [f_m, y_{m+1}] &= [z_1z_2[y_1, \ldots, y_m] + z_2[y_1, y_2, z_1, \ldots, y_m], y_{m+1}] \\ &= z_1z_2[y_1, \ldots y_{m+1}] + [z_1z_2, y_{m+1}][y_1, \ldots, y_m] \\ &\quad + z_2[y_1, y_2, z_1, \ldots, y_{m+1}] + [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, z_1, \ldots, y_m] \\ &= f_{m+1} + z_1[z_2, y_{m+1}][y_1, \ldots, y_m] + [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, z_1, \ldots, y_m]. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.5-(b) e a Proposição 3.1.2-(v) no último polinômio acima, obtemos

$$\begin{aligned} [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, z_1, \ldots, y_m] &= [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, \ldots, y_m, z_1] \\ &= [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, \ldots y_m]z_1, \end{aligned}$$

e assim, pelo Lema 3.1.4-(ii), obtemos, módulo I,

$$\begin{aligned} 0 &= f_{m+1} + z_1[z_2, y_{m+1}][y_1, \ldots, y_m] + [z_2, y_{m+1}][y_1, y_2, \ldots, y_m]z_1 \\ &= f_{m+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $f_{m+1} \in I$.

b) Pelo item anterior, sabemos que

$$z_1z_2[y_1, y_2, \ldots, y_m] - z_2[y_2, z_1, y_1, y_3, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_1, y_2, \ldots, y_m] \in I.$$

Substituindo y_1 por $[y_1, z_3]$, obtemos

$$z_1z_2[y_1, z_3, y_2, \ldots, y_m] - z_2[y_2, z_1, [y_1, z_3], y_3, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_3, z_1, y_2, \ldots, y_m] \in I,$$

mas observemos que, pela Proposição 3.1.2-(ii), $[[y_2, z_1], [y_1, z_3]] \in I$, ou seja,

$$z_2[y_2, z_1, [y_1, z_3], y_3, \ldots, y_m] \in I$$

e portanto, segue que

$$z_1z_2[y_1, z_3, y_2, \ldots, y_m] + z_2[y_1, z_3, z_1, y_2, \ldots, y_m] \in I.$$

c) Argumento análogo ao item anterior, substituindo y_1 por $[z_3, z_4, y_1]$. □

Seja B o subespaço de $\mathbb{F}\langle Y \cup Z\rangle$ formado pelos polinômios Y-próprios, como na Definição 1.4.3. Como $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, pelo Teorema 1.4.4, temos que Id e I são gerados, como $T(*)$-ideais, por seus elementos multi-homogêneos em B. Se $M = (m_1, \ldots, m_k)$ e $N = (n_1, \ldots, n_s)$, denote por B_{MN} o seguinte subespaço de B:

$$B_{MN} = \{f(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_s) \in B : \ \deg_{y_i} f = m_i, \ \deg_{z_j} f = n_j\}.$$

Queremos provar que $I = Id$, e portanto, é suficiente verificar que, para todos M, N,

$$I \cap B_{MN} = Id \cap B_{MN}.$$

Observação 3.1.10. Sejam $\sigma \in Sym(k)$ e $\rho \in Sym(s)$. Como os $T(*)$-ideais gerados por

$$f(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_s) \quad \text{e} \quad f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(k)}, z_{\rho(1)}, \ldots, z_{\rho(s)})$$

são iguais, é suficiente provar que $I \cap B_{MN} = Id \cap B_{MN}$ para

$$1 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_k \quad \text{e} \quad 1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_s.$$

A partir de agora, vamos assumir que estamos na condição enunciada acima.

Denote

$$B_{MN}(I) = B_{MN}/I \cap B_{MN} \text{ e } B_{MN}(Id) = B_{MN}/Id \cap B_{MN}.$$

Quando $m_1 = \cdots = m_k = n_1 = \cdots = n_s = 1$, escrevemos $B_{MN} = \Gamma_{ks}$.

Suponha $m_1, \ldots, m_k \geq 1$ e $n_1, \ldots, n_s \geq 1$. Escreva $m_1 + \cdots + m_k = m$ e $n_1 + \cdots + n_s = n$. Seja $\varphi_{MN} : \Gamma_{mn}(I) \to B_{MN}(I)$ a transformação linear definida por

$$\varphi_{MN}(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) + I \cap \Gamma_{mn}) =$$

$$f(\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{y_k, \ldots, y_k}_{m_k}, \underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{z_s, \ldots, z_s}_{n_s}) + I \cap B_{MN}.$$

Como φ_{MN} é sobrejetora, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.11. Considere as notações definidas acima. Se o espaço vetorial $\Gamma_{mn}(I)$ possui um conjunto gerador S, então $B_{MN}(I)$ possui conjunto gerador $\varphi_{MN}(S)$.

Fixe em $Y \cup Z$ a seguinte ordem:

$$z_1 < z_2 < \ldots < y_1 < y_2 < \ldots$$

Definição 3.1.12. Seja S_1 o conjunto formado pelos seguintes polinômios

$$f = z_{i_1} \ldots z_{i_t}[x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}][x_{k_1}, \ldots, x_{k_q}],$$

onde $t,\ l,\ q \geq 0$, $l \neq 1$, $q \neq 1$, $z_{i_1} \leq \ldots \leq z_{i_t}$, $x_{j_1} > x_{j_2} \leq \ldots \leq x_{j_l}$ e $x_{k_1} > x_{k_2} \leq \ldots \leq x_{k_q}$. Dizemos que f é um *polinômio S_1-standard*.

Como $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \in I$, utilizando argumentos análogos à [14, Theorem 5.2.1], verifica-se que $B_{MN}(I)$ possui como conjunto gerador os elementos da forma $f + I \cap B_{MN}$, onde $f \in B_{MN}$ é S_1-standard.

Definição 3.1.13. Seja $S_2 \subset S_1$ o conjunto formado pelos seguintes polinômios

$$f = z_{i_1} \ldots z_{i_t}[x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}][x_{k_1}, \ldots, x_{k_q}] \in S_1$$

tais que: se $l \geq 2$, então $q = 0$ ou $q = 2$, e quando $q = 2$, temos que $x_{j_1} \geq x_{k_1}$ e $x_{j_2} \geq x_{k_2}$. Se $f \in S_2$, dizemos que f é um *polinômio S_2-standard*.

Proposição 3.1.14. O espaço vetorial $B_{MN}(I)$ possui conjunto gerador formado por todos os elementos da forma $f + I \cap B_{MN}$, onde $f \in B_{MN}$ é S_2-standard.

Demonstração. Para demonstrar o resultado, é suficiente verificar que, módulo I, todo polinômio $f \in B_{MN}$ S_1-standard pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_2-standard. A partir de agora, faremos os cálculos em $B_{MN}(I)$, e para evitar deixar a notação carregada, vamos omitir a expressão (mod I).

Seja $f \in B_{MN}$ um polinômio S_1-standard. Se f for da forma

$$z_1^{n_1} \ldots z_s^{n_s} \quad \text{ou} \quad z_{i_1} \ldots z_{i_t}[x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}]$$

então f também é S_2-standard. Para o caso restante, é suficiente verificar para f S_1-standard da seguinte forma:

$$f = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}][x_{k_1}, \ldots, x_{k_q}],$$

com $x_{j_1} > x_{j_2} \leq \cdots \leq x_{j_l}$, $x_{k_1} > x_{k_2} \leq \cdots \leq x_{k_q}$, $l, q > 0$. A menos de aplicar a identidade (ii) da Proposição 3.1.2, podemos supor $x_{j_2} \geq x_{k_2}$, ou seja, x_{k_2} é a menor entre todas as variáveis. Pelo Lema 3.1.4-(iii), podemos reduzir o comprimento do segundo comutador a 2, passando as variáveis $x_{k_3}, \ldots, x_{k_q}$ para o primeiro comutador e, utilizando o Lema 3.1.5-(b) e a identidade de Jacobi se necessário, podemos supor

$$f = [x_c, x_b, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}][x_d, x_a],$$

onde $x_b \leq x_{i_1} \leq \cdots \leq x_{i_s}$, $x_c > x_b$, $x_d > x_a$ e $x_b \geq x_a$. Se $x_c \geq x_d$, então f é S_2-standard.

Suponhamos que $x_c < x_d$. Utilizando o Lema 3.1.6, podemos reescrever f como

$$f = \pm[x_d, x_b, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}][x_c, x_a] \pm [x_d, x_c, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}][x_b, x_a].$$

O primeiro polinômio é S_2-standard, e se $x_c \leq x_{i_1}$, o segundo polinômio também será. Caso tenhamos $x_c > x_{i_1}$, basta aplicar a identidade de Jacobi, e o Lema 3.1.5-(b) se necessário, e obtemos polinômios S_2-standards. Assim, o resultado fica provado. $\square$

Observação 3.1.15. Seja $F[y_{ij}^k, z_{ij}^k] = F[y_{ij}^k, z_{ij}^k \,:\, i, j, k \geq 1]$ a álgebra comutativa livre, livremente gerada pelo conjunto de variáveis $L = \{y_{ij}^k, z_{ij}^k \,:\, i, j, k \geq 1\}$. Dada uma ordem $>$ em L, considere a ordem nos monômios de $F[y_{ij}^k, z_{ij}^k]$ induzida por $>$ como segue: se $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$, $w_1' \geq w_2' \geq \ldots \geq w_m'$ pertencem a L, então

$$w_1 w_2 \ldots w_n > w_1' w_2' \ldots w_m'$$

se, e somente se,

- $w_1 = w_1', \ \ldots, w_l = w_l', \ w_{l+1} > w_{l+1}'$ para algum l,
- ou $w_1 = w_1', \ \ldots, w_m = w_m'$ e $n > m$.

Dado $f \in F[y_{ij}^k, z_{ij}^k]$, denotamos por $m(f)$ o seu monômio líder.

Apesar de todos os lemas enunciados e notações criadas até agora, lembremos que nosso objetivo é mostrar que $I = Id$. Para isso, já mencionamos ser suficiente verificar que $I \cap B_{MN} = Id \cap B_{MN}$, para todos M, N. A partir de agora, vamos dividir esse estudo em alguns casos. Nas próximas subseções, vamos procurar um conjunto que seja gerador para $B_{MN}(I)$ e provar que o conjunto correspondente em $B_{MN}(Id)$ é linearmente independente. Apesar da similaridade em alguns argumentos, procuramos detalhar suficientemente bem cada caso, pois, ao utilizar polinômios multi-homogêneos, os cálculos se tornam bastante complexos.

Comecemos com os subespaços de polinômios multi-homogêneos apenas em variáveis simétricas.

3.1.1 Subespaços B_{MN} com $N = (0)$

Neste subespaço, temos polinômios Y-próprios da forma $f = f(y_1, \ldots, y_k)$ com $\deg_{y_i} f = m_i$, $1 \le i \le k$, e vamos denotar $B_{MN} = B_{M0}$. Pelo Lema 3.1.14, sabemos que $B_{M0}(I)$ é gerado por elementos da forma $f + I \cap B_{M0}$, onde f é S_2-standard, ou seja, f pode ser de uma das duas formas abaixo:

$$f^{(i_1)} = [y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_m}] \quad \text{ou} \quad f^{(i_1,j_1)} = [y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{m-2}}][[y_{j_1}, y_{j_2}] \tag{3.5}$$

onde $i_1 > i_2 \le i_3 \le \ldots \le i_m$ para $f^{(i_1)}$; $i_1 > i_2 \le i_3 \le \ldots \le i_{m-2}$, $i_1 \ge j_1 > j_2$ e $i_2 \ge j_2$ para $f^{(i_1,j_1)}$.

Em $UT_3(\mathbb{F}[y_{ij}^k, z_{ij}^k])$, considere as seguintes matrizes:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Y_l = \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^l & 0 \\ 0 & 0 & y_{12}^l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

para todo $l \ge 2$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.16. Se $f(y_1, \ldots, y_k) \in Id$ e $Y_1, \ldots, Y_k$ são como em (3.6), então

$$f(Y_1, \ldots, Y_k) = 0.$$

Proposição 3.1.17. O conjunto $\{f + Id \cap B_{M0} : f \in S_2 \cap B_{M0}\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{M0}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{M0} = I \cap B_{M0}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, temos

$$B_{M0}(Id) = \operatorname{span}\{f + Id \cap B_{M0} : f \in S_2 \cap B_{M0}\}.$$

Temos de verificar que esses elementos geradores são linearmente independentes. Antes disso, façamos algumas observações. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$y_{12}^{i+1} > y_{12}^i$$

para todo $i \ge 1$. Utilizando as matrizes em (3.6), obtemos as seguintes igualdades:

- $[Y_{i_1}, Y_1, \ldots, Y_{i_{2l}}] = -y_{12}^{i_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $[Y_{i_1}, Y_1, \ldots, Y_{i_{2l+1}}] = y_{12}^{i_1}(e_{12} + e_{23}) - 2y_{12}^{i_1}y_{12}^{i_{2l+1}}e_{13}$,
- $[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_{2l-2}}][Y_{j_1}, Y_1] = -(y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1})y_{12}^{j_1}e_{13}$,
- $[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_{2l-1}}][Y_{j_1}, Y_1] = (y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1})y_{12}^{j_1}e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}$, $f^{(i_1,j_1)}$ como em (3.5). Escreva

$$f^{(i_1)}(Y_1,\ldots,Y_k) = \sum f_{ij}^{(i_1)} e_{ij} \text{ e } f^{(i_1,j_1)}(Y_1,\ldots,Y_k) = \sum f_{ij}^{(i_1,j_1)} e_{ij}.$$

Agora, suponhamos que

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)} \in Id,$$

onde α_{i_1}, $\alpha_{i_1,j_1} \in \mathbb{F}$. Pelo Lema 3.1.16, temos que

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)}(Y_1,\ldots,Y_k) + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)}(Y_1,\ldots,Y_k) = 0.$$

Analisemos os monômios líderes das entradas da matriz acima. Os monômios líderes de $f_{12}^{(i_1)}$ e $f_{13}^{(i_1,j_1)}$ são

$$m(f_{12}^{(i_1)}) = y_{12}^{i_1} \quad \text{e} \quad m(f_{13}^{(i_1,j_1)}) = y_{12}^{i_1} y_{12}^{j_1},$$

respectivamente. Ainda, os coeficientes de $y_{12}^{i_1}$ e $y_{12}^{i_1} y_{12}^{j_1}$ em $f_{12}^{(i_1)}$ e $f_{13}^{(i_1,j_1)}$ são, respectivamente, $\pm\alpha_{i_1}$ e $\pm\alpha_{i_1,j_1}$, dependendo da paridade do número de variáveis.

Como $f_{12}^{(i_1,j_1)} = 0$, temos que $\sum \alpha_{i_1} f_{12}^{(i_1)} = 0$. Logo, o coeficiente do maior monômio do conjunto $\{y_{12}^{i_1} : i_1 > 1\}$ tem de ser 0. Por indução, todos os coeficientes α_{i_1} são 0. Com isso, temos que $\sum \alpha_{i_1,j_1} f_{13}^{(i_1,j_1)} = 0$, e utilizando um argumento indutivo análogo ao anterior, obtemos que todo $\alpha_{i_1,j_1} = 0$. Assim, o resultado fica provado. □

3.1.2 Subespaços B_{MN} onde $M = (0)$

Consideremos polinômios apenas nas variáveis antissimétricas $f = f(z_1,\ldots,z_s)$ Y-próprios com $\deg_{z_i} f = n_i$, para todo $i = 1,\ldots,s$ e vamos denotar $B_{MN} = B_{0N}$. Pelo Lema 3.1.14, sabemos que S_2 possui a seguinte propriedade: os elementos da forma $f + I \cap B_{MN}$, $f \in S_2$, formam um conjunto gerador para $B_{MN}(I)$. Vamos agora definir um subconjunto $S_3 \subset S_2$ que possui a mesma propriedade:

Definição 3.1.18. Seja $S_3 \subset S_2$ o conjunto dos polinômios $f, f^{(j_1)}, f^{(i_1,j_1)} \in B_{0N}$ tais que:

$$\begin{aligned} &\bullet\ f = z_1^{n_1} \ldots z_s^{n_s} \in S_2, \\ &\bullet\ f^{(j_1)} = [z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_n}] \in S_2, \\ &\bullet\ f^{(i_1,j_1)} = z_{i_1}[z_{j_1}, \ldots, z_{j_{n-1}}] \in S_2 \ \text{ onde } i_1 \le j_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se $f \in S_3$, dizemos que f é um polinômio S_3-standard.

Proposição 3.1.19. O espaço vetorial $B_{0N}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{0N}$, onde $f \in B_{0N}$ é S_3-standard.

Demonstração. Observemos que é suficiente verificar que, módulo I, todo polinômio $f \in B_{0N}$ S_2-standard pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standard. Como anteriormente, vamos omitir a expressão (mod I), para evitar carregar a notação.

Os polinômios S_2-standard em B_{0N} são das formas

$$z_1^{n_1}\dots z_s^{n_s};\quad z_{i_1}\dots z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}];\quad z_{i_1}\dots z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}][z_{t_1},z_{t_2}],$$

onde $r \geq 0$. Observemos que o primeiro polinômio já é S_3-standard. Utilizando a Proposição 3.1.2-(ii), os polinômios da forma $z_{i_1}\dots z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}][z_{t_1},z_{t_2}]$ podem ser escritos como combinação linear de polinômios $f = z_{i_1}\dots z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}]$, onde os índices $i_1,\dots,i_r$ não estão necessariamente ordenados. Dessa forma, é suficiente verificar que f pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standards. Observemos que é possível levar as variáveis $z_{i_1},\dots,z_{i_{r-1}}$ para dentro do comutador, utilizando o Lema 3.1.7-(i) e os seguintes cálculos, módulo I:

$$\begin{aligned} z_{i_1}\dots z_{i_{r-1}}z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}] &= z_{i_1}\dots[z_{i_{r-1}},z_{i_r}][z_{j_1},\dots,z_{j_s}] + z_{i_1}\dots z_{i_r}z_{i_{r-1}}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}]\\ &= -z_{i_1}\dots[z_{i_r},z_{i_{r-1}}][z_{j_1},\dots,z_{j_s}] + z_{i_1}\dots z_{i_r}z_{i_{r-1}}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}]\\ &= -z_{i_1}\dots z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}]z_{i_{r-1}} + z_{i_1}\dots z_{i_r}z_{i_{r-1}}[z_{j_1},\dots,z_{j_s}]\\ &= -z_{i_1}\dots z_{i_{r-2}}z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s},z_{i_{r-1}}]. \end{aligned}$$

Repetindo os cálculos acima, podemos escrever

$$f = (-1)^{r-1}z_{i_r}[z_{j_1},\dots,z_{j_s},z_{i_{r-1}},\dots,z_{i_1}].$$

Sem perda de generalidade, podemos esquecer o sinal, e utilizando o Lema 3.1.5-(a), podemos supor

$$f = z_{i_r}[z_{j_1},z_{j_2},z_{k_1},\dots,z_{k_l}],$$

onde $j_1 > j_2$ e $k_1 \leq \dots \leq k_l$. Se $j_2 > k_1$, então, aplicando a identidade de Jacobi, obtemos

$$f = -z_{i_r}[z_{j_2},z_{k_1},z_{j_1},\dots,z_{k_l}] + z_{i_r}[z_{j_1},z_{k_1},z_{j_2},\dots,z_{k_l}].$$

Aplicando o Lema 3.1.5-(a) para reordenar as variáveis dentro dos comutadores, se necessário, temos que f pode ser escrita como combinação linear de polinômios da forma $g = z_i[z_{l_1},z_{l_2},\dots,z_{l_p}]$, com $l_1 > l_2 \leq \dots \leq l_p$. Se $i \leq l_1$, então g é S_3-standard.

Se $i > l_1$, aplicamos o Lema 3.1.8 em g, obtendo, módulo I

$$g = z_{l_1}[z_i,z_{l_2},\dots,z_{l_p}] - z_{l_2}[z_i,z_{l_1},\dots,z_{l_p}].$$

O primeiro polinômio do lado direito da equação acima é S_3-standard e o segundo polinômio pode não ser S_3-standard, caso $l_1 > l_3$. Nesse caso, basta aplicar a identidade de Jacobi e o Lema 3.1.5-(a), se necessário, e obtemos polinômios S_3-standard. Dessa forma, o resultado fica provado. □

Em $UT_3(\mathbb{F}[y_{ij}^k, z_{ij}^k])$, considere as seguintes matrizes:

$$Z_l = \begin{bmatrix} 1 & z_{12}^l & 0 \\ 0 & 0 & -z_{12}^l \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

para todo $l \geq 1$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.20. Se $f(z_1, \dots, z_s) \in Id$ e $Z_1, \dots, Z_s$ são como em (3.8), então

$$f(Z_1, \dots, Z_s) = 0.$$

Proposição 3.1.21. O conjunto $\{f + Id \cap B_{0N} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{0N}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{0N} = I \cap B_{0N}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, então

$$B_{0N}(Id) = \operatorname{span}\{f + Id \cap B_{0N} : f \in S_3 \cap B_{0N}\}.$$

Agora, temos de verificar que os elementos geradores são linearmente independentes. Antes disso, façamos algumas observações. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$z_{12}^{i+1} > z_{12}^i$$

para todo $i \geq 1$. Utilizando as matrizes em (3.8), obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{j_1}, Z_1, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_{n-1}}] = (-1)^n (z_{12}^1 - z_{12}^{j_1})(e_{12} - e_{23})$,
- $Z_{i_1}[Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_{n-1}}] = (-1)^{n-1}(z_{12}^{j_2} - z_{12}^{j_1})\left(e_{12} - z_{12}^{i_1} e_{13}\right)$.

Sejam $f, f^{(j_1)}$ e $f^{(i_1,j_1)}$ como em (3.7). Escreva $f(Z_1, \dots, Z_s) = \sum f_{ij} e_{ij}$,

$$f^{(j_1)}(Z_1, \dots, Z_s) = \sum f_{ij}^{(j_1)} e_{ij} \text{ e } f^{(i_1,j_1)}(Z_1, \dots, Z_s) = \sum f_{ij}^{(i_1,j_1)} e_{ij}.$$

Agora, suponhamos que

$$\alpha f + \sum \alpha_{j_1} f^{(j_1)} + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)} \in Id,$$

onde $\alpha, \alpha_{j_1}, \alpha_{i_1,j_1} \in \mathbb{F}$. Pelo Lema 3.1.20, temos que

$$\alpha f(Z_1, \dots, Z_s) + \sum \alpha_{j_1} f^{(j_1)}(Z_1, \dots, Z_s) + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)}(Z_1, \dots, Z_s) = 0.$$

Vamos analisar os monômios líderes das entradas da matriz acima. Como $f_{11}^{(j_1)} = f_{11}^{(i_1,j_1)} = 0$, obtemos que $\alpha f_{11} = 0$, e assim, $\alpha = 0$. Note que

$$m(f_{23}^{(j_1)}) = z_{12}^{j_1} \quad \text{e} \quad m(f_{13}^{(i_1,j_1)}) = z_{12}^{j_1} z_{12}^{i_1}.$$

Ainda, os coeficientes de $m(f_{23}^{(j_1)})$ e $m(f_{13}^{(i_1,j_1)})$ em $f_{23}^{(j_1)}$ e $f_{13}^{(i_1,j_1)}$ são $\pm\alpha_{j_1}$ e $\pm\alpha_{i_1,j_1}$, respectivamente, onde o sinal depende de n.

Como $f_{23}^{(i_1,j_1)} = 0$, temos que $\sum \alpha_{j_1} f_{23}^{(j_1)} = 0$. Logo, o coeficiente do maior monômio do conjunto $\{m(f_{23}^{(j_1)}) : j_1 > 1\}$ tem de ser 0. Por indução, todos os coeficientes α_{j_1} são 0. Utilizando o mesmo argumento indutivo, obtemos que todo $\alpha_{i_1,j_1} = 0$, e assim, o resultado fica provado. □

3.1.3 Subespaços B_{MN} onde $M \neq (0), (1)$ e $N = (1)$

Nesta seção, consideraremos polinômios Y-próprios $f = f(y_1, \dots, y_k, z_1)$, com $\deg_{y_i} f = m_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ e $\deg_{z_1} f = 1$. Ainda, vamos supor que $m_1 > 1$ ou $k > 1$. Denotemos $B_{MN} = B_{M1}$.

Definição 3.1.22. Seja $S_3 \subset S_2$ o conjunto dos polinômios $f^{(i_1)}, g^{(i_1)}, f^{(i_1,j_1)} \in B_{M1}$ tais que:

$$\begin{aligned} &\bullet\ f^{(i_1)} = [y_{i_1}, z_1, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}] \in S_2,\\ &\bullet\ g^{(i_1)} = z_1[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}] \in S_2,\\ &\bullet\ f^{(i_1,j_1)} = [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m-1}}][y_{j_1}, z_1] \in S_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se $f \in S_3$, dizemos que f é um polinômio S_3-standard.

Proposição 3.1.23. O espaço vetorial $B_{M1}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{M1}$, onde f é S_3-standard.

Demonstração. É suficiente verificar que, módulo I, todo polinômio $f \in B_{M1}$ S_2-standard pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standard. A partir de agora, vamos fazer os cálculos em $B_{M1}(I)$ e omitir a expressão (mod I).

Os polinômios $f \in B_{M1}$ S_2-standard podem ser de uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} &[y_{i_1}, z_1, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}], && [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m-1}}][y_{j_1}, z_1],\\ &z_1[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}], && z_1[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m-2}}][y_{j_1}, y_{j_2}], \end{aligned}$$

onde os índices satisfazem as condições necessárias para o polinômio ser S_2-standard. Assim, é suficiente verificar que os polinômios da forma

$$f = z_1[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m-2}}][y_{j_1}, y_{j_2}] \in S_2$$

podem ser escritos, módulo I, como combinação linear de polinômios S_3-standard.

Aplicando o Lema 3.1.4-(ii) e a Proposição 3.1.2-(v), podemos supor $f = [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{m-2}}][y_{j_1}, y_{j_2}, z_1]$. Aplicando a identidade de Jacobi no segundo comutador de f, o Lema 3.1.4-(iii) e o Lema 3.1.5-(b), obtemos

$$f = \pm[y_{i_1}, y_{i_2}, y_{j_1}, \dots][y_{j_2}, z_1] \pm [y_{i_1}, y_{i_2}, y_{j_2}, \dots][y_{j_1}, z_1]. \tag{3.10}$$

Se $i_2 \leq j_1$ e $i_2 = j_2$ então podemos arrumar as variáveis nos primeiros comutadores, utilizando o Lema 3.1.5-(b), e f fica escrita como combinação de polinômios S_3-standard.

Se $i_2 > j_1$, e assim, $i_2 > j_2$, aplicando a identidade de Jacobi nos primeiros comutadores acima, obtemos

$$\begin{aligned} f = &\pm [y_{i_2}, y_{j_1}, \dots][y_{j_2}, z_1] \pm [y_{i_1}, y_{j_1}, \dots][y_{j_2}, z_1]\\ &\pm [y_{i_2}, y_{j_2}, \dots][y_{j_1}, z_1] \pm [y_{i_1}, y_{j_2}, \dots][y_{j_1}, z_1], \end{aligned}$$

e todos os polinômios do lado direito da igualdade são S_3-standard.

Por fim, suponhamos que $i_2 \leq j_1$ e $i_2 > j_2$. Neste caso, o primeiro polinômio do lado direito da equação (3.10) é S_3-standard. Vamos analisar agora o segundo polinômio. Aplicando a identidade de Jacobi nele, obtemos

$$\pm[y_{i_2}, y_{j_2}, \dots][y_{j_1}, z_1] \pm [y_{i_1}, y_{j_2}, \dots][y_{j_1}, z_1].$$

O segundo polinômio acima é S_3-standard, e para o primeiro, se $i_2 < j_1$ basta aplicar o Lema 3.1.6 e obtemos polinômios S_3-standard, finalizando a demonstração. $\square$

Em $UT_3(\mathbb{F}[y_{ij}^k, z_{ij}^k])$, considere as seguintes matrizes:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_l = \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^l & 0 \\ 0 & 0 & y_{12}^l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

onde $l \geq 1$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.24. Se $f(y_1, \dots, y_k, z_1) \in Id$ e $Y_1, \dots, Y_k, Z_1$ são como em (3.11), então $f(Y_1, \dots, Y_k, Z_1) = 0$.

Proposição 3.1.25. O conjunto $\{f + Id \cap B_{M1} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{M1}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{M1} = I \cap B_{M1}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, então

$$B_{M1}(Id) = \text{span}\{f + Id \cap B_{M1} : f \in S_3 \cap B_{M1}\}.$$

Temos de verificar que os elementos geradores são linearmente independentes. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$y_{12}^{i+1} > y_{12}^i$$

para todo $i \geq 1$. Utilizando as matrizes de (3.11), obtemos as seguintes igualdades:

- $[Y_{i_1}, Z_1, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l}}] = y_{12}^{i_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $[Y_{i_1}, Z_1, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l+1}}] = -y_{12}^{i_1}\left((e_{12} + e_{23}) - 2y_{12}^{i_{2l+1}}e_{13}\right)$,
- $Z_1[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l}}] = (y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1})e_{12}$,
- $Z_1[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l+1}}] = -(y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1})(e_{12} - 2y_{12}^{i_{2l+1}}e_{13})$,
- $[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l-1}}][Y_{i_{2l}}, Z_1] = (y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1})y_{12}^{i_{2l}}e_{13}$,

- $[Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_{2l}}][Y_{i_{2l+1}}, Z_1] = -(y_{12}^{i_2} - y_{12}^{i_1}) y_{12}^{i_{2l+1}} e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}$, $g^{(i_1)}$, $f^{(i_1,j_1)}$ como em (3.9), e escreva

$$f^{(i_1)}(Y_1, \dots, Y_k, Z_1) = \sum f_{ij}^{(i_1)} e_{ij}$$
$$g^{(i_1)}(Y_1, \dots, Y_k, Z_1) = \sum g_{ij}^{(i_1)} e_{ij}$$
$$f^{(i_1,j_1)}(Y_1, \dots, Y_k, Z_1) = \sum f_{ij}^{(i_1,j_1)} e_{ij}$$

Agora, suponhamos que

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \beta_{i_1} g^{(i_1)} + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)} \in Id,$$

onde $\alpha_{i_1}, \beta_{i_1}, \alpha_{i_1,j_1} \in \mathbb{F}$. Note que

$$m(f_{23}^{(i_1)}) = y_{12}^{i_1},$$

e seu coeficiente em $f_{23}^{(i_1)}$ é $-\alpha_{i_1}$. Como $g_{23}^{(i_1)} = f_{23}^{(i_1,j_1)} = 0$, temos que $\sum \alpha_{i_1} f_{23}^{(i_1)} = 0$. Logo, o coeficiente do maior monômio do conjunto $\{m(f_{23}^{(i_1)}) : i_1 \geq 1\}$ tem de ser 0. Por indução, todos os coeficientes α_{i_1} são 0. Dessa forma, temos

$$\sum \beta_{i_1} g^{(i_1)} + \sum \alpha_{i_1,j_1} f^{(i_1,j_1)} \in Id.$$

Observe que

$$m(g_{12}^{(i_1)}) = y_{12}^{i_1},$$

e seu coeficiente em $g_{12}^{(i_1)}$ é $\pm\beta_{i_1}$. Como $f_{12}^{(i_1,j_1)} = 0$, temos que $\sum \beta_{i_1} g_{12}^{(i_1)} = 0$. Logo, o coeficiente do maior monômio do conjunto $\{m(g_{12}^{(i_1)}) : i_1 > 1\}$ tem de ser 0. Por indução, todos os coeficientes β_{i_1} são 0. Isso significa que $\sum \alpha_{i_1,j_1} f_{13}^{(i_1,j_1)} = 0$. Como

$$m(f_{13}^{(i_1,j_1)}) = y_{12}^{i_1} y_{12}^{j_1},$$

e seu coeficiente em $f_{13}^{(i_1,j_1)}$ é $\pm\alpha_{i_1,j_1}$, podemos utilizar o mesmo argumento indutivo utilizado anteriormente para provar que todo α_{i_1,j_1} é 0. □

3.1.4 Subespaços B_{MN} onde $M = (1)$ e $N \neq (0)$

Nesta seção, consideraremos apenas polinômios Y-próprios $f(y_1, z_1, \dots, z_s)$, com $\deg_{y_1} f = 1$ e $\deg_{z_i} f = n_i$ para todo $i = 1, \dots, s$. Denotemos $B_{MN} = B_{1N}$.

Queremos provar que $I = Id$, mostrando que $I \cap B_{MN} = Id \cap B_{MN}$. Pela Proposição 1.4.5, é suficiente considerar nesta seção que $n_i = p^{b_i}$. Como $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \geq 3$, vamos dividir o estudo em dois casos: $n_s = 1$ ou $n_s \geq 3$.

Definição 3.1.26. Seja S_3 o conjunto dos polinômios $f^{(j)}$, $g^{(j)}$, $h^{(j)}$, $f^{(i,j)} \in B_{1N}$ tais que

(a) $f^{(j)} = z_1^{n_1} \dots z_j^{n_j - 1} \dots z_s^{n_s}[y_1, z_j]$, onde $1 \le j \le s$.

(b) $g^{(j)} = [y_1, z_j] z_1^{n_1} \dots z_j^{n_j - 1} \dots z_s^{n_s}$, onde $1 \le j \le s$.

(c) $h^{(j)} = z_1^{n_1} \dots z_j^{n_j - 1} \dots z_s^{n_s - 1}[y_1, z_j] z_s$, onde $1 \le j \le s$.

(d) $f^{(i,j)} = z_1^{n_1} \dots z_i^{n_i - 1} \dots z_j^{n_j - 1} \dots z_s^{n_s} z_i [y_1, z_j]$, onde:

  (d1) $1 \le i \le j \le s$ e $i < s$ se $n_s > 1$,

  (d2) $1 \le i \le j \le s - 1$ se $n_s = 1$.

Se $f \in S_3$, dizemos que f é um polinômio S_3-standard.

Proposição 3.1.27. O espaço vetorial $B_{1N}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{1N}$, onde $f \in B_{1N}$ é S_3-standard.

Demonstração. Comecemos por observar que, nesse caso específico, os polinômios S_2-standard serão das seguintes formas:

$$\begin{array}{ll} z_{i_1} \dots z_{i_r}[y_1, z_{j_1}, \dots, z_{j_l}], & \qquad z_{i_1} \dots z_{i_r}[y_1, z_{j_1}, \dots, z_{j_l}][z_{t_1}, z_{t_2}], \\ z_{i_1} \dots z_{i_r}[z_{j_1}, \dots, z_{j_l}, y_1], & \qquad z_{i_1} \dots z_{i_r}[z_{j_1}, \dots, z_{j_l}, y_1][z_{t_1}, z_{t_2}], \end{array}$$

onde $r \ge 0$. Aplicando a identidade de Jacobi repetidas vezes no primeiro comutador dos polinômios da segunda linha, podemos levar a variável y_1 para a primeira entrada, e assim, não é difícil ver que todos esses polinômios, da primeira e segunda linhas, podem ser escritos como combinação linear de polinômios da forma

$$z_{i_1} \dots z_{i_r}[y_1, z_j] z_{k_1} \dots z_{k_l}, \tag{3.12}$$

onde os índices fora do comutador não estão necessariamente ordenados. Dessa forma, para provar o resultado é suficiente verificar que os polinômios da forma (3.12) podem ser escritos, módulo I, como combinação linear de polinômios S_3-standard.

Faremos o caso $n_s \ge 3$. Comecemos tomando um polinômio f da forma (3.12) com $l = 0$, ou seja,

$$f = z_{i_1} \dots z_{i_r}[y_1, z_j].$$

Pelo Lema 3.1.5-(d), podemos supor $i_1 \le \dots \le i_{r-1}$. Se $i_{r-1} \le i_r$, então f é S_3-standard. Caso contrário, teremos $i_{r-1} > i_r$, e como $n_s \ge 3$, devemos ter $i_{r-1} = s$.

Nesse caso, temos duas situações possíveis: Se $i_r \leq j$, então f é S_3-standard. Caso contrário, teremos $s > i_r > j$, e aplicando o Lema 3.1.6, obtemos, módulo I:

$$\begin{aligned} f &= z_{i_1} \dots z_{i_r} z_s [y_1, z_j] + z_{i_1} \dots [z_s, z_{i_r}][y_1, z_j] \\ &= z_{i_1} \dots z_{i_r} z_s [y_1, z_j] \pm z_{i_1} \dots [z_s, z_j][y_1, z_{i_r}] \pm z_{i_1} \dots [z_j, z_{i_r}][y_1, z_s]. \end{aligned}$$

Observemos que o primeiro polinômio do lado direito da igualdade acima é S_3-standard, a menos de aplicar o Lema 3.1.5-(d). Para o segundo e terceiro polinômios, basta desenvolver o primeiro comutador de cada um, e utilizar o Lema 3.1.5-(d) quando necessário, para que todos se tornem S_3-standard. Logo, f pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standard, módulo I.

Tomemos agora um polinômio da forma (3.12) com $r = 0$, ou seja,

$$f = [y_1, z_j] z_{k_1} \dots z_{k_l}.$$

Pelo Lema 3.1.5-(e), podemos supor $k_2 \leq \cdots \leq k_l$. Se $k_1 \leq k_2$, então f é S_3-standard. Caso contrário, podemos reescrever f da seguinte forma:

$$f = [y_1, z_j] z_{k_2} z_{k_1} \dots z_{k_l} + [y_1, z_j][z_{k_1}, z_{k_2}] \dots z_{k_l}.$$

Utilizando o Lema 3.1.5-(e), se necessário, o primeiro polinômio do lado direito da igualdade acima é S_3-standard. Utilizando o Lema 3.1.4-(ii) e a Proposição 3.1.2-(ii), podemos reescrever o segundo polinômio do lado direito da igualdade acima como um polinômio da forma (3.12) com as variáveis do lado esquerdo do comutador, ou seja, com $l = 0$, e como já estudamos esse caso, segue que f pode ser escrita como combinação linear de polinômios S_3-standard, módulo I.

Tomemos agora um polinômio da forma (3.12) com $r, l \neq 0$, ou seja,

$$f = z_{i_1} \dots z_{i_r} [y_1, z_j] z_{k_1} \dots z_{k_l}.$$

Pela Proposição 3.1.2-(vi), podemos passar as variáveis $z_{k_2}, \dots, z_{k_l}$ para o outro lado do comutador, e assim, é suficiente supor $l = 1$. Ainda, pelo Lema 3.1.5-(d) e a Proposição 3.1.2-(iv), é suficiente supor

$$f = z_{i_1} \dots z_{i_r} [y_1, z_j] z_{k_1},$$

com $i_1 \leq \cdots \leq i_{r-1}$ e $i_r \leq k_1$.

Se $i_{r-1} \neq s$, então, como $n_s \geq 3$, segue que $i_r = j = k_1 = s$, e portanto, $f \in S_3$.

Suponhamos agora que $i_{r-1} = s$. Temos dois casos a analisar:

- Se $i_{r-1} \leq i_r$, então $i_{r-1} = i_r = k_1 = s$, e portanto, $f \in S_3$.
- Se $i_{r-1} > i_r$, denote $w = z_{i_1} \dots z_{i_{r-2}}$. Então,

$$w z_s z_{i_r} [y_1, z_j] z_{k_1} = w z_{i_r} z_s [y_1, z_j] z_{k_1} + w [z_s, z_{i_r}][y_1, z_j] z_{k_1}.$$

Observemos que, no segundo polinômio do lado direito da igualdade, podemos passar a variável z_{k_1} para o lado esquerdo dos comutadores, utilizando o Lema 3.1.4-(ii), e então esse polinômio se tornará da forma (3.12) com $l = 0$, o qual já estudamos. Dessa forma, resta-nos verificar que $g = wz_{i_r}z_s[y_1, z_j]z_{k_1}$ pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standard, módulo I.

Utilizando a Proposição 3.1.2-(iv), temos, módulo I:

$$g = wz_{i_r}z_{k_1}[y_1, z_j]z_s.$$

Se $k_1 = s$, então g é S_3-standard. Caso contrário, como $n_s \geq 3$, utilizando o Lema 3.1.5-(ii) para reordenar as variáveis antes do comutador, teremos

$$g = z_{l_1} \dots z_{l_q} z_s z_{k_1}[y_1, z_j]z_s,$$

e denotando $w = z_{l_1} \dots z_{l_q}$, podemos reescrever

$$g = wz_{k_1}z_s[y_1, z_j]z_s + w[z_s, z_{k_1}][y_1, z_j]z_s.$$

O primeiro polinômio do lado direito da igualdade é S_3-standard, a menos de aplicar o Lema 3.1.5-(ii) e para o segundo polinômio, podemos passar a variável z_s para o lado esquerdo dos comutadores, e esse polinômio será do tipo (3.12) com $l = 0$, o qual já foi estudado. Portanto, o resultado fica provado.

Para o caso em que $n_s = 1$, os argumentos são bastante similares ao anterior, com pequenas modificações, as quais deixamos ao leitor. $\square$

Em $UT_3(F[y_{ij}^k, z_{ij}^k])$, considere as seguintes matrizes:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_{13}^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_l = \begin{bmatrix} 1 & z_{12}^l & 0 \\ 0 & 0 & -z_{12}^l \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

para todos $l \geq 1$. Como $\mathbb{F}$ é infinito, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.28. Sejam $Y_1, Z_1, \dots, Z_s$ matrizes como em (3.13). Se $f(y_1, z_1, \dots, z_s) \in Id$, então $f(Y_1, Z_1, \dots, Z_s) = 0$.

Na definição dos polinômios S_3-standard, o número de polinômios da forma $f^{(i,j)}$ muda de acordo com o grau da variável z_s. Assim, vamos dividir nosso estudo em dois casos:

Caso 1: Subespaços B_{1N} com $n_s \geq 3$.

Queremos provar que $I = Id$, mostrando que $I \cap B_{MN} = Id \cap B_{MN}$. Nesta subseção assumimos $n_s \geq 3$.

Definição 3.1.29. Seja S_4 o conjunto dos polinômios $f^{(j)}$, $g^{(j)}$, $h^{(s)}$, $p^{(i,j)} \in B_{1N}$ tais que:

$$\bullet\ f^{(j)}, g^{(j)}, h^{(s)} \in S_3 \text{ como na Definição 3.1.26,} \tag{3.14}$$
$$\bullet\ p^{(i,j)} = z_1^{n_1} \dots z_i^{n_i-1} \dots z_j^{n_j-1} \dots z_s^{n_s-1}[z_s, z_i][y_1, z_j],\ 1 \le i \le j \le s \text{ e } i < s.$$

Se $f \in S_4$, dizemos que f é um polinômio S_4-standard.

Proposição 3.1.30. Se $n_s \ge 3$, então o espaço vetorial $B_{1N}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{1N}$, onde f é S_4-standard.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.27, é suficiente provar que $h^{(j)} + I \cap B_{1N}$, $j < s$ e $f^{(i,j)} + I \cap B_{1N}$ pertencem ao subespaço Λ gerado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{1N}$, onde f é S_4-standard. De fato, pelo Lema 3.1.5-(d), temos que $f^{(i,j)} = p^{(i,j)} + f^{(j)}$, módulo I, ou seja, $f^{(i,j)} + I \cap B_{1N} \in \Lambda$.

Escreva $h^{(j)} = wz_sz_s[y_1, z_j]z_s$ onde $w = z_1^{n_1} \dots z_j^{n_j-1} \dots z_s^{n_s-3}$. Pelos Lemas 3.1.7-(ii), 3.1.5-(d) e 3.1.4-(ii), obtemos, módulo I:

$$\begin{aligned}
h^{(j)} &= wz_sz_j[y_1, z_s]z_s + wz_s[z_j, z_s][y_1, z_s] \\
&= wz_jz_s[y_1, z_s]z_s + w[z_s, z_j][y_1, z_s]z_s - wz_s[z_s, z_j][y_1, z_s] \\
&= h^{(s)} - wz_s[z_s, z_j][y_1, z_s] - wz_s[z_s, z_j][y_1, z_s] \\
&= h^{(s)} - 2p^{(j,s)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $h^{(j)} + I \cap B_{MN} \in \Lambda$. □

Proposição 3.1.31. Se $n_s \ge 3$, o conjunto $\{f + Id \cap B_{1N} : f \in S_4\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{1N}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{1N} = I \cap B_{1N}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, segue da última proposição que:

$$B_{1N}(Id) = \text{span}\{f + Id \cap B_{1N} : f \in S_4\}.$$

Agora, temos de verificar que os elementos geradores são linearmente independentes. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$z_{12}^{l+1} > z_{12}^{l} > z_{12}^{s}$$

para todo $1 \le l \le s-2$. Utilizando as matrizes como em (3.13), obtemos as seguintes igualdades:

$$\bullet Z_1 \dots \hat{Z}_j \dots Z_m[Y_1, Z_j] = z_{12}^{j}e_{12} + ue_{13},$$
$$\bullet [Y_1, Z_j]Z_1 \dots \hat{Z}_j \dots Z_m = (-1)^{m-1}z_{12}^{j}e_{23} + ve_{13},$$
$$\bullet Z_1 \dots Z_{s-1}Z_s[Y_1, Z_s]Z_s = (-2z_{12}^{s}z_{12}^{s} + 2y_{13}^{1})e_{13},$$
$$\bullet Z_1 \dots \hat{Z}_i \dots \hat{Z}_j \dots Z_s[Z_s, Z_i][Y_1, Z_j] = (z_{12}^{i} - z_{12}^{s})z_{12}^{j}e_{13},$$

para alguns polinômios $u, v \in \mathbb{F}[y_{ij}^k, z_{ij}^k]$.

Sejam $f^{(j)}, g^{(j)}, h^{(s)}, p^{(i,j)}$ como em (3.14), e escreva

$$f^{(j)}(Y_1, Z_1, \dots, Z_s) = \sum f_{ab}^{(j)} e_{ab}\ , \quad g^{(j)}(Y_1, Z_1, \dots, Z_s) = \sum g_{ab}^{(j)} e_{ab}\ ,$$
$$h^{(s)}(Y_1, Z_1, \dots, Z_s) = \sum h_{ab}^{(s)} e_{ab}\ , \quad p^{(i,j)}(Y_1, Z_1, \dots, Z_s) = \sum p_{ab}^{(i,j)} e_{ab}.$$

Suponhamos

$$\sum \alpha_j f^{(j)} + \sum \beta_j g^{(j)} + \gamma h^{(s)} + \sum \beta_{i,j} p^{(i,j)} \in Id,$$

onde $\alpha_j,\ \beta_j,\ \gamma, \beta_{i,j} \in \mathbb{F}$. Agora, vamos utilizar os mesmos argumentos das demonstrações das Proposições 3.1.17, 3.1.21 e 3.1.25, e assim, resumimos a análise na seguinte tabela:

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(1,2)$	$g_{12}^{(j)} = h_{12}^{(s)} = p_{12}^{(i,j)} = 0$	z_{12}^j	α_j
$(2,3)$	$h_{23}^{(s)} = p_{23}^{(i,j)} = 0$	z_{12}^j	$\pm\beta_j$
$(1,3)$		y_{13}^1	2γ
$(1,3)$		$z_{12}^i z_{12}^j$	$\beta_{i,j}$

Seguindo a tabela, temos que $\alpha_j = 0,\ \beta_j = 0,\ \gamma = 0,\ \beta_{i,j} = 0$, respectivamente. □

Caso 2: Subespaços B_{1N} com $n_s = 1$.

Pela Observação 3.1.10, se $n_s = 1$, então $n_1 = \cdots = n_s = 1$, e nesse caso, $B_{1N} = \Gamma_{1s}$.

Definição 3.1.32. Seja S_4 o conjunto dos polinômios $f^{(j)},\ g^{(j)},\ h^{(j)},\ p^{(i,j)} \in \Gamma_{1s}$ tais que

- $f^{(j)},\ g^{(j)},\ h^{(j)} \in S_3$ como na Definição 3.1.26,
- $p^{(i,j)} = z_1 \dots \hat{z}_i \dots \hat{z}_j \dots z_{s-1}[z_s, z_i][y_1, z_j]$, $1 \le i < j \le s-1$.

Se $f \in S_4$, dizemos que f é um polinômio S_4-standard.

Proposição 3.1.33. Se $n_s = 1$, então o espaço vetorial $\Gamma_{1s}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap \Gamma_{1s}$, onde f é S_4-standard.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.27, é suficiente provar que $f^{(i,j)} + I \cap \Gamma_{1s}$ pertence ao subespaço gerado pelos elementos da forma $f + I \cap \Gamma_{1s}$, onde f é S_4-standard. De fato, é suficiente observar que, módulo I, $f^{(i,j)} = f^{(j)} + p^{(i,j)}$, e o resultado fica provado. □

Proposição 3.1.34. Se $n_s = 1$, então o conjunto $\{f + Id \cap \Gamma_{1s} : f \in S_4\}$ é uma base para o espaço vetorial $\Gamma_{1s}(Id)$. Em particular, $I \cap \Gamma_{1s} = Id \cap \Gamma_{1s}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, então

$$\Gamma_{1s}(Id) = \text{span}\{f + Id \cap \Gamma_{1s} : f \in S_4\}.$$

Agora, temos de verificar que os elementos geradores são linearmente independentes. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem > em L tal que

$$z_{12}^{l+1} > z_{12}^{l} > z_{12}^{s},$$

para $l = 1, \ldots, s-2$. Utilizando as matrizes definidas em (3.13), obtemos as seguintes igualdades:

- $Z_1 \ldots \hat{Z}_j \ldots Z_s[Y_1, Z_j] = z_{12}^{j} e_{12} + u e_{13}$,
- $[Y_1, Z_j]Z_1 \ldots \hat{Z}_j \ldots Z_s = (-1)^{s-1} z_{12}^{j} e_{23} + v e_{13}$,
- $Z_1 \ldots \hat{Z}_j \ldots Z_{s-1}[Y_1, Z_j]Z_s = \left(-z_{12}^{j} z_{12}^{s} + 2y_{13}^{1} - z_{12}^{s-1} z_{12}^{j}\right) e_{13}$,
- $Z_1 \ldots \hat{Z}_i \ldots \hat{Z}_j \ldots [Z_s, Z_i][Y_1, Z_j] = (z_{12}^{i} - z_{12}^{s}) z_{12}^{j} e_{13}$,

para alguns polinômios $u, v \in \mathbb{F}[y_{ij}^{k}, z_{ij}^{k}]$.

Sejam $f^{(j)}, g^{(j)}, h^{(j)}, p^{(i,j)}$ como na Definição 3.1.32, e escreva

$$f^{(j)}(Y_1, Z_1, \ldots, Z_s) = \sum f_{ab}^{(j)} e_{ab} \ , \quad g^{(j)}(Y_1, Z_1, \ldots, Z_s) = \sum g_{ab}^{(j)} e_{ab} \ ,$$
$$h^{(j)}(Y_1, Z_1, \ldots, Z_s) = \sum h_{ab}^{(j)} e_{ab} \ , \quad p^{(i,j)}(Y_1, Z_1, \ldots, Z_s) = \sum p_{ab}^{(i,j)} e_{ab}.$$

Suponhamos

$$\sum \alpha_j f^{(j)} + \sum \beta_j g^{(j)} + \sum \gamma_j h^{(j)} + \sum \beta_{i,j} p^{(i,j)} \in Id,$$

onde $\alpha_j,\ \beta_j,\ \gamma_j, \beta_{i,j} \in \mathbb{F}$. Agora, vamos utilizar os mesmos argumentos das demonstrações das Proposições 3.1.17, 3.1.21 e 3.1.25, e assim, resumimos a análise na seguinte tabela:

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(1,2)$	$g_{12}^{(j)} = h_{12}^{(j)} = p_{12}^{(i,j)} = 0$	z_{12}^{j}	α_j
$(2,3)$	$h_{23}^{(j)} = p_{23}^{(i,j)} = 0$	z_{12}^{j}	$\pm\beta_j$
$(1,3)$	$j \leq s-2$	$z_{12}^{i} z_{12}^{j}$	$\beta_{i,j}$
$(1,3)$	$j \leq s-2$	$z_{12}^{j} z_{12}^{s}$	γ_j
$(1,3)$	$j = s-1$	y_{13}^{1}	$2\gamma_{s-1}$
$(1,3)$	$j = s-1$	$z_{12}^{i} z_{12}^{s-1}$	$\beta_{i,s-1}$

Seguindo a tabela, temos que $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 0$, $\beta_{i,j} = 0$ para $j \leq s-2$, $\gamma_j = 0$ para $j \leq s-2$, $\gamma_{s-1} = 0$ e $\beta_{i,s-1} = 0$, respectivamente. $\square$

3.1.5 Subespaços B_{MN} onde $M \neq (0),(1)$ e $N \neq (0),(1)$

Sejam $M = (m_1,\dots,m_k)$ e $N = (n_1,\dots,n_s)$. Nesta seção

$$m = m_1 + \dots + m_k \geq 2 \quad \text{e} \quad n = n_1 + \dots + n_s \geq 2.$$

Definição 3.1.35. Seja $S_3 \subset S_2$ o conjunto dos polinômios

$$f^{(i_1)},\ g^{(i_1)},\ f^{(i,i_1)},\ g^{(i,i_1)},\ h^{(j_1,p_1)} \in B_{MN}$$

tais que:

$$\begin{aligned}
&\bullet\ f^{(i_1)} = [z_{i_1}, z_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_{t-1}}] \in S_2,\\
&\bullet\ g^{(i_1)} = [y_{i_1}, z_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_{t-1}}] \in S_2,\\
&\bullet\ f^{(i,i_1)} = z_i[z_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{t-1}}] \in S_2 \quad \text{e} \quad z_i \leq z_{i_1},\\
&\bullet\ g^{(i,i_1)} = z_i[y_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{t-1}}] \in S_2,\\
&\bullet\ h^{(j_1,p_1)} = [y_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{t-2}}][y_{p_1}, z_1] \in S_2,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $t = m + n$. Se $f \in S_3$, dizemos que f é um polinômio S_3-standard.

Proposição 3.1.36. O espaço vetorial $B_{MN}(I)$ possui conjunto gerador formado pelos elementos da forma $f + I \cap B_{MN}$, onde f é S_3-standard.

Demonstração. É suficiente verificar que, módulo I, todo polinômio $f \in B_{MN}$ S_2-standard pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_3-standard. A partir de agora, vamos omitir a expressão (mod I).

Os polinômios S_2-standard podem ser das seguintes formas:

a) $[x_{j_1},\dots,x_{j_s}]$
b) $z_{i_1}\dots z_{i_r}[x_{j_1},\dots,x_{j_s}]$
c1) $[x_{j_1},\dots,x_{j_s}][z_{k_1},z_1]$
c2) $[x_{j_1},\dots,x_{j_s}][y_{k_1},z_1]$
d1) $z_{i_1}\dots z_{i_r}[x_{j_1},\dots,x_{j_s}][z_{k_1},z_{k_2}]$
d2) $z_{i_1}\dots z_{i_r}[x_{j_1},\dots,x_{j_s}][y_{k_1},x_{k_2}]$

Comecemos por observar que os polinômios dos tipos (a) e $(c2)$ já são S_3-standard. Utilizando a identidade (ii) da Proposição 3.1.2, podemos trocar a ordem dos comutadores nos polinômios $(c1)$ e $(d1)$, e desenvolvendo o comutador $[z_{k_1}, z_j]$, temos que os polinômios dos tipos (b), $(c1)$ e $(d1)$ podem ser escritos como combinação linear de polinômios da forma

$$f = z_{i_1}\dots z_{i_r}[x_{j_1},\dots,x_{j_s}],$$

onde $r > 0$, as variáveis fora do comutador não estão necessariamente ordenadas e $x_{j_1} > x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_s}$. Assim, provemos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: O polinômio f definido acima pode ser escrito como combinação linear, módulo I, de polinômios S_3-standard.

Prova da afirmação 1: Lembremos que, em f, temos mais de uma variável simétrica e mais de uma variável antissimétrica. Com isso, se x_{j_2} for uma variável simétrica, temos que $r \geq 2$, e utilizando o Lema 3.1.9-(a), podemos levar uma variável antissimétrica para dentro do comutador, no lugar de x_{j_2}. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor $x_{j_2} = z_{j_2}$.

Utilizando repetidamente o Lema 3.1.9-(b) ou (c), podemos levar as variáveis $z_{i_1}, \ldots, z_{i_{r-1}}$ para dentro do comutador, obtendo

$$f = (-1)^{r-1} z_{i_r} [x_{j_1}, z_{j_2}, z_{i_{r-1}}, \ldots, z_{i_1}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_s}].$$

Como o número de variáveis simétricas é ≥ 2, devemos ter $x_{j_s} = y_{j_s}$. Assim, aplicando o Lema 3.1.5-(c), podemos reordenar as variáveis dentro do comutador, obtendo

$$f = (-1)^{r-1} z_{i_r} [x_{j_1}, z_{j_2}, x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}],$$

onde $x_{l_1} \leq \cdots \leq x_{l_t}$. Se $z_{j_2} > x_{l_1}$, aplicamos a identidade de Jacobi e o Lema 3.1.5-(c), e escrevemos f como combinação linear de polinômios do tipo

$$g = z_{i_r} [x_{j_1}, x_{p_1}, \ldots, x_{p_{t+1}}],$$

onde $x_{j_1} > x_{p_1} \leq \cdots \leq x_{p_{t+1}}$. Se $z_{i_r} \leq x_{j_1}$, então g é S_3-standard. Caso contrário, temos que x_{j_1} tem de ser uma variável antissimétrica, e aplicando o Lema 3.1.8 obtemos polinômios S_3-standard, completando a demonstração da afirmação 1.

Com isso, resta-nos verificar que os polinômios do tipo $(d2)$ também podem ser reescritos como combinação linear de polinômios S_3-standard. Seja

$$g = z_{i_1} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][y_{k_1}, x_{k_2}]$$

S_2-standard. Se $x_{k_2} \neq z_1$, então z_1 aparece fora dos comutadores, e como as variáveis estão ordenadas, $z_{i_1} = z_1$. Pelo Lema 3.1.5-(b), podemos trocar as variáveis fora dos comutadores, e assim, podemos supor que z_1 aparece na última posição fora dos comutadores. Utilizando o Lema 3.1.4-(ii), a Proposição 3.1.2-(v) e a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} f &= z_{i_2} \ldots z_{i_r} z_1 [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][y_{k_1}, x_{k_2}] \\ &= -z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][y_{k_1}, x_{k_2}] z_1 \\ &= -z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][y_{k_1}, x_{k_2}, z_1] \\ &= z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][x_{k_2}, z_1, y_{k_1}] - z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][y_{k_1}, z_1, x_{k_2}]. \end{aligned}$$

Agora, utilizamos o Lema 3.1.4-(iii) para jogar uma variável do segundo comutador para o primeiro, obtendo

$$f = \pm z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, y_{k_1}][x_{k_2}, z_1] \pm z_{i_2} \ldots z_{i_r} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}, x_{k_2}][y_{k_1}, z_1].$$

Uma vez que a variável z_1 está na posição correta, resta rearranjar as variáveis dentro dos comutadores, e isto pode ser feito utilizando o Lema 3.1.5, a identidade de Jacobi, e o Lema 3.1.6, se necessários. Dessa forma, podemos supor

$$f = z_{i_1} \dots z_{i_r}[x_{j_1}, \dots, x_{j_s}][y_k, z_1],$$

onde $r > 0$, $x_{j_1} > x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_s}$, $x_{j_1} \geq y_k$.

Utilizando a Proposição 3.1.2-(v), podemos mover as variáveis $z_{i_1}, \dots, z_{i_r}$ para dentro do primeiro comutador, ou seja,

$$f = \pm[x_{j_1}, \dots, x_{j_s}, z_{i_r}, \dots, z_{i_1}][y_k, z_1].$$

Agora, resta-nos organizar as variáveis dentro dos comutadores novamente. Mas assim como anteriormente, isso pode ser feito utilizando o Lema 3.1.5, a identidade de Jacobi e o Lema 3.1.6, se necessários. □

Em $UT_3(F[y_{ij}^k, z_{ij}^k])$, considere as seguintes matrizes:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Z_l = \begin{bmatrix} 1 & z_{12}^l & 0 \\ 0 & 0 & -z_{12}^l \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_j = \begin{bmatrix} 1 & y_{12}^j & y_{13}^j \\ 0 & 0 & y_{12}^j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

para todos $l \geq 2$ e $j \geq 1$. Se $w(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_s)$ é S_3-standard, então escreva

$$w(Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_s) = \sum_{a,b=1}^{3} w_{ab} e_{ab}.$$

Como $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, temos o seguinte lema:

Lema 3.1.37. Sejam $Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_s$ as matrizes definidas em (3.16). Se $f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_s) \in Id$, então $f(Y_1, \dots, Y_k, Z_1, \dots, Z_s) = 0$.

Caso 1: m par e $n_1 > 1$

Proposição 3.1.38. Se m é par e $n_1 > 1$, então $\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{MN}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, então

$$B_{MN}(Id) = \text{span}\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}.$$

Agora, temos de verificar que os elementos geradores são linearmente independentes. Utilizaremos as notações da Observação 3.1.15. Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$z_{12}^{i+1} > z_{12}^i > y_{12}^{i+1} > y_{12}^i$$

para todo $i \geq 1$. Sejam Z_l e Y_l matrizes como em (3.16), onde $l \geq 1$. Obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $Z_i[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n z_{12}^{i_1} e_{12} - (-1)^n z_{12}^{i} z_{12}^{i_1} e_{13}$,
- $Z_i[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n y_{12}^{j_1} e_{12} - (-1)^n z_{12}^{i} y_{12}^{j_1} e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_{m-1}}][Y_{p_1}, Z_1] = (-1)^n y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1} e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}, g^{(j_1)}, f^{(i,i_1)}, g^{(i,j_1)}, h^{(j_1,p_1)}$ como em (3.15) e suponha

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \beta_{j_1} g^{(j_1)} + \sum \alpha_{i,i_1} f^{(i,i_1)} + \sum \beta_{i,j_1} g^{(i,j_1)} + \sum \gamma_{j_1,p_1} h^{(j_1,p_1)} \in Id,$$

onde $\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}, \alpha_{i,i_1}, \beta_{i,j_1}, \gamma_{j_1,p_1} \in \mathbb{F}$. Agora, utilizamos os mesmos argumentos das proposições anteriores. Resumimos a argumentação na seguinte tabela:

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i_1}$
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{j_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^{i} z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i,i_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^{i} y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{i,j_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{1,i_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{1,j_1}$
$(1,3)$		$y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1}$	$\pm\gamma_{j_1,p_1}$

Seguindo a tabela, temos que $\alpha_{i_1} = 0$, $\beta_{j_1} = 0$, $\alpha_{i,i_1} = 0$, $\beta_{i,j_1} = 0$, $\alpha_{1,i_1} = 0$, $\beta_{1,j_1} = 0$, $\gamma_{j_1,p_1} = 0$, respectivamente. $\square$

Caso 2: m par e $n_1 = 1$

Proposição 3.1.39. Se m é par e $n_1 = 1$, então $\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{MN}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$, temos que

$$B_{MN}(Id) = \operatorname{span}\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}.$$

Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$y_{12}^{i+1} > y_{12}^{i} > z_{12}^{i+1} > z_{12}^{i}$$

para todo $i \geq 1$. Sejam Z_l e Y_l matrizes como em (3.16), com $l \geq 1$. Obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1}(e_{12} - e_{23})$,
- $Z_i[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n z_{12}^{i_1} e_{12} - (-1)^n z_{12}^i z_{12}^{i_1} e_{13}$,
- $Z_1[Z_{i_1}, Z_2, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n-1}(z_{12}^2 - z_{12}^{i_1}) e_{12}$,
- $Z_i[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n y_{12}^{j_1} e_{12} - (-1)^n z_{12}^i y_{12}^{j_1} e_{13}$,
- $Z_1[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n-1}(z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) e_{12}$,
- $[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_{j_{m-1}}][Y_{p_1}, Z_1] = (-1)^{n-1}(z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) y_{12}^{p_1} e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}, g^{(j_1)}, f^{(i,i_1)}, g^{(i,i_1)}, h^{(j_1,p_1)}$ como em (3.15) e suponha

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \beta_{j_1} g^{(j_1)} + \sum \alpha_{i,i_1} f^{(i,i_1)} + \sum \beta_{i,j_1} g^{(i,j_1)} + \sum \gamma_{j_1,p_1} h^{(j_1,p_1)} \in Id,$$

onde $\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}, \alpha_{i,i_1}, \beta_{i,j_1}, \gamma_{j_1,p_1} \in \mathbb{F}$. Agora, vamos utilizar os mesmos argumentos das proposições anteriores, e resumimos o processo na seguinte tabela:

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{j_1}$
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i_1}$
$(1,3)$		$y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1}$	$\pm\gamma_{j_1,p_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^i y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{i,j_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^i z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i,i_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{1,j_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{1,i_1}$

Seguindo a tabela, temos que $\beta_{j_1} = 0$, $\alpha_{i_1} = 0$, $\gamma_{j_1,p_1} = 0$, $\beta_{i,j_1} = 0$, $\alpha_{i,i_1} = 0$, $\beta_{1,j_1} = 0$, $\alpha_{1,i_1} = 0$, respectivamente. □

Caso 3: m **ímpar e** $n_1 > 1$

Proposição 3.1.40. Se m é ímpar e $n_1 > 1$, então $\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{MN}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Sejam Z_l e Y_l matrizes como em (3.16), com $l \geq 1$. Obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n z_{12}^{i_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n z_{12}^{i_1} y_{12}^{j_m} e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n y_{12}^{j_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n y_{12}^{j_1} y_{12}^{j_m} e_{13}$,
- $Z_i[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1} e_{12} + (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1}(-2y_{12}^{j_m} + z_{12}^{i})e_{13}$,
- $Z_i[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1} e_{12} + (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1}(-2y_{12}^{j_m} + z_{12}^{i})e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_{m-1}}][Y_{p_1}, Z_1] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1} e_{13}$.

Agora, utilizamos a mesma ordem $>$, tabela e monômios líderes como na Proposição 3.1.38, e o resultado fica provado. □

Caso 4: m ímpar, $n_1 = 1$ e $m_k > 1$

Proposição 3.1.41. Se m é ímpar, $n_1 = 1$ e $m_k > 1$, então $\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{MN}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$,

$$B_{MN}(Id) = \text{span}\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_3\}.$$

Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$z_{12}^{i+1} > z_{12}^{i} > y_{12}^{i+1} > y_{12}^{i}$$

para todo $i \geq 1$. Sejam Z_l e Y_l matrizes como em (3.16), com $l \geq 1$. Obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^n z_{12}^{i_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n z_{12}^{i_1} y_{12}^{k} e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^n y_{12}^{j_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n y_{12}^{j_1} y_{12}^{k} e_{13}$,
- $Z_i[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1} e_{12} + (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1}(-2y_{12}^{k} + z_{12}^{i})e_{13}$,
- $Z_1[Z_{i_1}, Z_2, \ldots, Y_k] = (-1)^n (z_{12}^2 - z_{12}^{i_1})e_{12} - 2(-1)^n (z_{12}^2 - z_{12}^{i_1}) y_{12}^{k} e_{13}$,
- $Z_i[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1} e_{12} + (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1}(-2y_{12}^{k} + z_{12}^{i})e_{13}$,
- $Z_1[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_k] = (-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1})e_{12} - 2(-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) y_{12}^{k} e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_{j_{m-1}}][Y_{p_1}, Z_1] = (-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) y_{12}^{p_1} e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}, g^{(j_1)}, f^{(i,i_1)}, g^{(i,j_1)}, h^{(j_1,p_1)}$ como em (3.15) e suponha

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \beta_{j_1} g^{(j_1)} + \sum \alpha_{i,i_1} f^{(i,i_1)} + \sum \beta_{i,j_1} g^{(i,j_1)} + \sum \gamma_{j_1,p_1} h^{(j_1,p_1)} \in Id,$$

onde $\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}, \alpha_{i,i_1}, \beta_{i,j_1}, \gamma_{j_1,p_1} \in \mathbb{F}$. Pela seguinte tabela

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i_1}$
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{j_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^{i_1} z_{12}^{i}$	$\pm\alpha_{i,i_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{1,i_1}$
$(1,3)$	$i > 2$	$y_{12}^{j_1} z_{12}^{i}$	$\pm\beta_{i,j_1}$
$(1,3)$	$j_1 < k$	$y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1}$	$\pm\gamma_{j_1,p_1}$

obtemos $\alpha_{i_1} = 0$, $\beta_{j_1} = 0$, $\alpha_{i,i_1} = 0$ para $i > 1$, $\alpha_{1,i_1} = 0$, $\beta_{i,j_1} = 0$ para $i > 2$ e $\gamma_{j_1,p_1} = 0$ para $j_1 < k$, respectivamente. Assim, agora temos

$$v = \sum \beta_{2,j_1} g^{(2,j_1)} + \sum \beta_{1,j_1} g^{(1,j_1)} + \sum \gamma_{k,p_1} h^{(k,p_1)} \in Id.$$

O coeficiente de $y_{12}^{j_1}$ em v_{12} é

$$\beta_{1,j_1} + \beta_{2,j_1} = 0 \tag{3.17}$$

para todo $j_1 = 1, \ldots, k$; e o coeficiente de $y_{12}^{l} y_{12}^{k}$ em v_{13} é

$$-2\beta_{1,l} - 2\beta_{2,l} + \gamma_{k,l} = 0 \tag{3.18}$$

para todo $l = 1, \ldots, k$. Das equações (3.17) e (3.18), temos que $\gamma_{k,l} = 0$ para todo $l = 1, \ldots, k$.

Para os coeficientes restantes, pela seguinte tabela

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(1,3)$	$j_1 < k$	$y_{12}^{j_1} z_{12}^{2}$	$\pm\beta_{2,j_1}$
$(1,3)$	$j_1 < k$	$y_{12}^{j_1} y_{12}^{k}$	$\pm 2\beta_{1,j_1}$
$(1,2)$	$j_1 = k$	z_{12}^{2}	$\pm\beta_{1,k}$
$(1,2)$	$j_1 = k$	y_{12}^{k}	$\pm\beta_{2,k}$

obtemos $\beta_{2,j_1} = 0$, $\beta_{1,j_1} = 0$, $\beta_{1,k} = 0$ e $\beta_{2,k} = 0$, respectivamente. □

Caso 5: m ímpar, $n_1 = m_k = 1$ e char$(\mathbb{F}) > 3$

Proposição 3.1.42. Se m é ímpar, $n_1 = m_k = 1$ e char$(\mathbb{F}) > 3$, então $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Pela Observação 3.1.10, temos que $m_1 = \cdots = m_{k-1} = m_k = 1$.

Se $n_s = 1$, então $n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 1$, e podemos utilizar a mesma demonstração de [12, Lemma 6.4].

Suponha $n_s > 1$. Por uma mudança de variáveis $z_1 \leftrightarrow z_s$, podemos supor $n_1 > 1$. Note que

$$n_s \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_{s-1} \leq n_1,$$

mas a Proposição 3.1.40 vale neste caso, e assim, utilizamos a mesma demonstração. □

Caso 6: m ímpar, $n_1 = m_k = 1$ e char$(\mathbb{F}) = 3$
Relembremos que S_3 é o conjunto de polinômios definido em (3.15).

Definição 3.1.43. Denote por S_4 o conjunto

$$S_4 = S_3 - \{g^{(1,k)}\}.$$

Dizemos que os polinômios em S_4 são S_4-standard.

Proposição 3.1.44. O espaço vetorial $B_{MN}(I)$ possui como conjunto gerador os elementos da forma $f + I \cap B_{MN}$, onde $f \in B_{MN}$ é S_4-standard.

Demonstração. Todos os cálculos nesta demonstração serão feitos em $B_{MN}(I)$, e para evitar carregar a notação, vamos omitir escrever $(\mathrm{mod}\ I)$. Pela Proposição 3.1.36, é suficiente verificar que $g^{(1,k)}$ pode ser escrito como combinação linear de polinômios S_4-standard. De fato, vamos provar que

$$g^{(1,k)} - g^{(1,k-1)} = g^{(2,k)} - g^{(2,k-1)}. \tag{3.19}$$

Pelo Lema 3.1.9-(b,c), temos que

$$z_{l_n} \dots z_{l_3} z_1 [y_k, z_{l_2}, y_1, \dots, y_{k-1}] = (-1)^n z_1 [y_k, z_{l_2}, z_{l_3}, \dots, z_{l_n}, y_1, \dots, y_{k-1}].$$

Assim, é suficiente provar (3.19) quando $n = 2$, ou seja,

$$\begin{aligned} &z_1[y_k, z_2, y_1, \dots, y_{k-1}] - z_1[y_{k-1}, z_2, y_1, \dots, y_k] = \\ &z_2[y_k, z_1, y_1, \dots, y_{k-1}] - z_2[y_{k-1}, z_1, y_1, \dots, y_k]. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.9-(a) duas vezes e o Lema 3.1.5-(b), obtemos:

$$\begin{aligned} g^{(1,k)} &= \underbrace{z_1[y_1, z_2, y_k, \dots, y_{k-1}]}_{f_1} - z_2 z_1 [y_k, y_1, \dots, y_{k-1}] \\ &= f_1 - z_1 z_2 [y_k, y_1, \dots, y_{k-1}] - \underbrace{[z_2, z_1][y_k, y_1, y_{k-1}, \dots]}_{f_3} \\ &= f_1 - \underbrace{z_2[y_1, z_1, y_k, \dots, y_{k-1}]}_{f_2} + g^{(2,k)} - f_3 \\ &= f_1 - f_2 + g^{(2,k)} - f_3. \end{aligned}$$

Trocando a posição das variáveis y_k e y_{k-1}, e repetindo os mesmos cálculos acima, obtemos $g^{(1,k-1)} = g_1 - g_2 + g^{(2,k-1)} - g_3$, onde $g_1 = z_1[y_1, z_2, y_{k-1}, \dots, y_k]$, $g_2 = z_2[y_1, z_1, y_{k-1}, \dots, y_k]$ e $g_3 = [z_2, z_1][y_{k-1}, y_1, y_k, \dots]$.

Pelo Lema 3.1.5-(c), podemos jogar as variáveis y_k e y_{k-1} para as penúltimas posições dos comutadores em f_1 e g_1, respectivamente. Assim, aplicando a identidade de Jacobi, a Proposição 3.1.2-(ii) e o Lema 3.1.4-(ii), obtemos

$$\begin{aligned} f_1 - g_1 &= z_1[y_1, z_2, \dots, y_k, y_{k-1}] - z_1[y_1, z_2, \dots, y_{k-1}, y_k] \\ &= -z_1[[y_k, y_{k-1}], [y_1, z_2, \dots]] \\ &= -2z_1[y_k, y_{k-1}][y_1, z_2, \dots] \\ &= 2[y_k, y_{k-1}][y_1, z_2, z_1, \dots]. \end{aligned}$$

Utilizando os mesmos argumentos acima, verifica-se que

$$f_2 - g_2 = 2[y_k, y_{k-1}][y_1, z_1, z_2, \dots].$$

Pela identidade de Jacobi,

$$(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) = -2[y_k, y_{k-1}][z_2, z_1, y_1, \dots].$$

Resta-nos analisar $f_3 - g_3$. Utilizando a identidade de Jacobi, a Proposição 3.1.2-(ii) e o Lema 3.1.4-(iii), obtemos

$$\begin{aligned} f_3 - g_3 &= [z_2, z_1][y_k, y_1, y_{k-1}, \dots] - [z_2, z_1][y_{k-1}, y_1, y_k, \dots] \\ &= -[z_2, z_1][y_{k-1}, y_k, y_1, \dots] \\ &= [y_{k-1}, y_k, y_1, \dots][z_2, z_1] \\ &= -[y_{k-1}, y_k][z_2, z_1, y_1, \dots] \\ &= [y_k, y_{k-1}][z_2, z_1, y_1, \dots]. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 3$, segue que $(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) - (f_3 - g_3) = 0$, e portanto,

$$g^{(1,k)} - g^{(1,k-1)} = g^{(2,k)} - g^{(2,k-1)}.$$

□

Proposição 3.1.45. Se m é ímpar, $n_1 = m_k = 1$ e $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 3$, então o conjunto $\{f + Id \cap B_{MN} | f \in S_4\}$ é uma base para o espaço vetorial $B_{MN}(Id)$. Em particular, $Id \cap B_{MN} = I \cap B_{MN}$.

Demonstração. Como $I \subset Id$,

$$B_{MN}(Id) = \mathrm{span}\{f + Id \cap B_{MN} : f \in S_4\}.$$

Considere uma ordem $>$ em L tal que

$$z_{12}^{i+1} > z_{12}^{i} > y_{12}^{i+1} > y_{12}^{i}$$

para todo $i \geq 1$. Sejam Z_l e Y_l matrizes como em (3.16), com $l \geq 1$. Obtemos as seguintes igualdades:

- $[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^n z_{12}^{i_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n z_{12}^{i_1} y_{12}^k e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_{j_m}] = (-1)^n y_{12}^{j_1}(e_{12} + e_{23}) - 2(-1)^n y_{12}^{j_1} y_{12}^{j_m} e_{13}$,
- $Z_i[Z_{i_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1} e_{12} + (-1)^{n+1} z_{12}^{i_1}(-2y_{12}^k + z_{12}^i)e_{13}$,
- $Z_1[Z_{i_1}, Z_2, \ldots, Y_k] = (-1)^n (z_{12}^2 - z_{12}^{i_1})e_{12} - 2(-1)^n (z_{12}^2 - z_{12}^{i_1}) y_{12}^k e_{13}$,
- $Z_i[Y_{j_1}, Z_1, \ldots, Y_k] = (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1} e_{12} + (-1)^{n+1} y_{12}^{j_1}(-2y_{12}^k + z_{12}^i)e_{13}$,
- $Z_i[Y_k, Z_1, \ldots, Y_{k-1}] = (-1)^{n+1} y_{12}^k e_{12} + (-1)^{n+1} y_{12}^k(-2y_{12}^{k-1} + z_{12}^i)e_{13}$,
- $Z_1[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_k] = (-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1})e_{12} - 2(-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) y_{12}^k e_{13}$,
- $[Y_{j_1}, Z_2, \ldots, Y_{j_{m-1}}][Y_{p_1}, Z_1] = (-1)^n (z_{12}^2 - y_{12}^{j_1}) y_{12}^{p_1} e_{13}$.

Sejam $f^{(i_1)}, g^{(j_1)}, f^{(i,i_1)}, g^{(i,j_1)}, h^{(j_1,p_1)}$ polinômios S_4-standard, e suponha que

$$\sum \alpha_{i_1} f^{(i_1)} + \sum \beta_{j_1} g^{(j_1)} + \sum \alpha_{i,i_1} f^{(i,i_1)} + \sum \beta_{i,j_1} g^{(i,j_1)} + \sum \gamma_{j_1,p_1} h^{(j_1,p_1)} \in Id,$$

onde $\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}, \alpha_{i,i_1}, \beta_{i,j_1}, \gamma_{j_1,p_1} \in \mathbb{F}$. Agora, utilizamos os mesmos argumentos das proposições anteriores. Pela seguinte tabela,

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{i_1}$
$(2,3)$	$f_{23}^{(i,i_1)} = g_{23}^{(i,j_1)} = h_{23}^{(j_1,p_1)} = 0$	$y_{12}^{j_1}$	$\pm\beta_{j_1}$
$(1,3)$	$i > 1$	$z_{12}^{i_1} z_{12}^i$	$\pm\alpha_{i,i_1}$
$(1,2)$	$i = 1$	$z_{12}^{i_1}$	$\pm\alpha_{1,i_1}$
$(1,3)$	$i > 2$	$y_{12}^{j_1} z_{12}^i$	$\pm\beta_{i,j_1}$
$(1,3)$	$j_1 < k$	$y_{12}^{j_1} y_{12}^{p_1}$	$\pm\gamma_{j_1,p_1}$
$(1,2)$	$i = 2$	y_{12}^k	$\pm\beta_{2,k}$

obtemos $\alpha_{i_1} = 0$, $\beta_{j_1} = 0$, $\alpha_{i,i_1} = 0$ para $i > 1$, $\alpha_{1,i_1} = 0$, $\beta_{i,j_1} = 0$ para $i > 2$, $\gamma_{j_1,p_1} = 0$ para $j_1 < k$ e $\beta_{2,k} = 0$, respectivamente.

Assim, agora temos

$$\sum_{j_1=1}^{k-1} \beta_{2,j_1} g^{(2,j_1)} + \sum_{j_1=1}^{k-1} \beta_{1,j_1} g^{(1,j_1)} + \sum_{p_1=1}^{k-1} \gamma_{k,p_1} h^{(k,p_1)} \in Id.$$

Pelo monômio $y_{12}^{j_1}$ na entrada $(1,2)$, temos

$$\beta_{1,j_1} + \beta_{2,j_1} = 0 \tag{3.20}$$

para todo $j_1 = 1, \ldots, k-1$, e pelo monômio $y_{12}^l y_{12}^k$ na entrada $(1,3)$, temos

$$-2\beta_{1,l} - 2\beta_{2,l} + \gamma_{k,l} = 0 \tag{3.21}$$

para todo $l = 1, \ldots, k-1$. Das equações (3.20) e (3.21), temos que $\gamma_{k,l} = 0$ para todo $l = 1, \ldots, k-1$.

Para os coeficientes restantes, pela seguinte tabela

Entrada	Informação	Monômio	Seu coeficiente
$(1,3)$		$y_{12}^{j_1} z_{12}^2$	$\pm\beta_{2,j_1}$
$(1,3)$		$y_{12}^{j_1} y_{12}^k$	$\pm 2\beta_{1,j_1}$

obtemos $\beta_{2,j_1} = 0$ e $\beta_{1,j_1} = 0$, respectivamente. □

3.1.6 Conclusão

Como $\mathbb{F}$ é um corpo infinito e $B_{MN} \cap Id = B_{MN} \cap I$ para todos M, N, obtemos o resultado principal desta seção:

Teorema 3.1.46. Seja $\mathbb{F}$ um corpo infinito com $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > 2$. Se $*$ é uma involução do 1° tipo em UT_3, então $Id(UT_3, *)$ é o $T(*)$-ideal gerado pelos polinômios da Proposição 3.1.2.

3.2 $*$-Polinômios Centrais para UT_n

No Exemplo 1.1.21, verificamos que os únicos polinômios centrais de UT_n são os triviais. Essa situação mudou ao estudar os $*$-polinômios centrais de UT_2. Por exemplo, não é difícil verificar que $z_1 z_2 \in C(UT_2, *)$ e $y_1 \in C(UT_2, s)$ são exemplos de $*$-polinômios centrais não triviais. Em [35], Urure e Gonçalves descreveram completamente os $T(*)$-espaços $C(UT_2, *)$ e $C(UT_2, s)$.

Nesta seção, vamos provar que, assim como no caso ordinário, não há $*$-polinômios centrais não triviais para $n > 2$ se $\mathbb{F}$ é um corpo qualquer de característica $\neq 2$.

Teorema 3.2.1. Se $\circ$ é uma involução do primeiro tipo em UT_n e $n > 2$, então

$$C(UT_n, \circ) = Id(UT_n, \circ) + \mathbb{F}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.8, podemos supor $\circ = *$ ou $\circ = s$. Em ambos os casos, temos $e_{11}^{\circ} = e_{nn}$. Em particular, segue que $A = e_{11} + e_{nn}$ é um elemento simétrico e $B = e_{11} - e_{nn}$ é um elemento antissimétrico. Como

$$C(UT_n, \circ) \supset Id(UT_n, \circ) + \mathbb{F},$$

vamos provar a inclusão $\subset$. Seja $f = f(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_t) \in C(UT_n, \circ)$, e sem perda de generalidade, suponhamos $f(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, e mostremos que:

Afirmação: $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+t}) \in Id(\mathbb{F})$.

De fato, sendo $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_t \in \mathbb{F}$, temos

$$f(a_1A, a_2A, \dots, a_kA, b_1B, b_2B, \dots, b_tB) = \sum \alpha_{ij}e_{ij}.$$

Como $\alpha_{11} = f(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_t)$, $\alpha_{22} = 0$ e $f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_t) \in C(UT_n, \circ)$, temos que $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, e a afirmação fica provada.

Agora, para finalizar, tomemos $A_1, \dots, A_k \in UT_n^+$ e $B_1, \dots, B_t \in UT_n^-$, onde

$$A_l = \sum a_{ij}^l e_{ij} \text{ e } B_l = \sum b_{ij}^l e_{ij}.$$

Escreva

$$f(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_t) = \sum \alpha_{ij}e_{ij}.$$

Como $f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_t) \in C(UT_n, \circ)$, também podemos escrever

$$f(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha e_{ii},$$

onde $\alpha = \alpha_{11} = \cdots = \alpha_{nn}$. Como $\alpha_{11} = f(a_{11}^1, \dots, a_{11}^k, b_{11}^1, \dots, b_{11}^t) = 0$, temos que $\alpha = 0$. Portanto, $f \in Id(UT_n, \circ)$ e o resultado está provado. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. Aljadeff, A. Giambruno, Y. Karasik, Polynomial identities with involution, superinvolutions and the Grassmann envelope, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 1843-1857.

[2] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, Representability and Specht problem for G-graded algebras, Adv. Math. 225(5) (2010), 2391-2428.

[3] S. A. Amitsur, J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 449-463.

[4] N. Anisimov, $\mathbb{Z}_p$-codimensions of $\mathbb{Z}_p$-identities of Grassmann algebra, Commun. Algebra, 29(9) (2001), 4211-4230.

[5] Yu. A. Bahturin, Identical Relations in Lie Algebras, Translated from the Russian by Bahturin. VNU Science Press, b.v., Utrecht, 1987.

[6] A. Ya. Belov, On non-Specht varieties (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999), 47-66.

[7] A. P. Brandão Jr., P. Koshlukov, Central polynomials for $\mathbb{Z}_2$-graded algebras and for algebras with involution, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), no. 3, 877-886.

[8] A, P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, E. A. da Silva, The central polynomials for the Grassmann algebra, Israel J. Math. 179 (2010), 127-144.

[9] M. Brešar, V. Drensky, Central polynomials for matrices over finite fields, Linear Mult. Alg. 61(7) (2013), 939-944.

[10] L. Centrone, D. J. Gonçalves, D. C. Silva, Identities and central polynomials with involution for the Grassmann algebra, J. Algebra 560 (2020), 219-240.

[11] J. Colombo, P. Koshlukov, Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p, Israel J. Math. 146 (2005), 337-355.

[12] O. M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, R. La Scala, Involutions for upper triangular matrix algebras, Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 4, 541-568.

[13] V. Drensky, A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0 (Russian), Algebra i Logika 20 (1981), 282-290. Translation: Algebra Logic 20 (1981), 188-194.

[14] V. Drensky, Free algebras and PI-algebras, Graduate course in algebra, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[15] E. Formanek, Central polynomials for matrix rings, J. Algebra 23 (1972), 129-132.

[16] A. Giambruno, P. Koshlukov, On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$, Israel J. Math. 122 (2001), 305-316.

[17] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods, Mathematical Surveys and Monograph, 122, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.

[18] A. V. Grishin, Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic 2 without the finite basis property, Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999), 101-118.

[19] A.R. Kemer, Finite basis property of identities of associative algebras, Algebra Logic 26 (5), 1987, 362-397.

[20] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, The Book of Involutions, Amer. Math. Soc., 1998.

[21] P. Koshlukov, Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$, J. Algebra 241 (2001), 410-434.

[22] D. Krakowski, A. Regev, The polynomial identities of the Grassmann algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973), 429-438.

[23] D. V. Levchenko, Finite basis property of identities with involution of a second-order matrix algebra, (Russian) Serdica 8 (1982), no. 1, 42-56.

[24] D. V. Levchenko, Bases of identities with involution of second-order matrix algebras over finite fields, (Russian) Serdica 10 (1984), no. 1, 55-67.

[25] Yu. N. Maltsev, A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices, Algebra i Logika 10 (1971) 393-400 (Russian). Translation: Algebra Logic 10 (1971) 242-247.

[26] Yu. N. Maltsev, E. N. Kuzmin, A basis for identities of the algebra of second order matrices over a finite field, Algebra Logic 17 (1978), 18-21.

[27] Ju. P. Razmyslov, A certain problem of Kaplansky (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973), 483-501.

[28] Ju. P. Razmyslov, Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero (Russian), Algebra i Logika 12 (1973), 83-113. Translation: Algebra Logic 12 (1973), 47-63.

[29] A. Regev, Grassmann algebras over finite fields, Commun. Algebra, 19(6) (1991), 1829-1849.

[30] V. V. Shchigolev, Examples of infinitely based T-ideals (Russian), Fundam. Prikl. Mat. 5 (1999), 307-312.

[31] V. V. Shchigolev, Examples of infinitely basable T-spaces (Russian), Mat. Sbornik 191 (2000), 143-160; Translation: Sbornik Mat. 191 (2000), 459-476.

[32] P. N. Siderov, A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field (Russian), Pliska Stud. Math. Bulgar. 2 (1981), 143-152.

[33] I. Sviridova, Finite basis problem for identities with involution, (2014), arXiv: 1410.2233.

[34] R. I. Q. Urure, D. J. Gonçalves, Identities with involution for 2×2 upper triangular matrices algebra over a finite field, Linear Algebra Appl. 544 (2018), 223-253.

[35] R. I. Q. Urure, D. J. Gonçalves, Central polynomials with involution for the algebra of 2×2 upper triangular matrices, Lin. and Mult. Alg., DOI: 10.1080/03081087.2019.1648374.