

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre teoremas do tipo Tverberg

CARLOS HENRIQUE FELICIO PONCIO

SÃO CARLOS - SP

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre teoremas do tipo Tverberg

CARLOS HENRIQUE FELICIO PONCIO

Orientador: PROF. DR. EDIVALDO LOPES DOS SANTOS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

SÃO CARLOS - SP

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Carlos Henrique Felício Poncio, realizada em 17/12/2020.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos (UFSCar)

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar)

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi (UNESP)

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto (USP)

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (UNICAMP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus amados pais, Antonio e Jurandi, e à minha querida avó Derci.

*“Aquilo que escuto eu esqueço,
Aquilo que vejo eu lembro,
Aquilo que faço eu aprendo”.*
(Confúcio)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as coisas boas que tem ocorrido na minha vida, pela saúde e por sempre me guiar. Agradeço também à todas as pessoas que participaram da minha trajetória até este momento.

Em especial aos meus pais, Antonio e Jurandi, à minha avó Derci, aos meus irmãos, Claudinei, Cleverson e Ana, e aos meus sobrinhos, Alisson, Agatha e Aylla, por todo o apoio, educação e amor que sempre tiveram por mim.

Agradeço também à Ludimila, por me apoiar em todos os momentos, compartilhando as conquistas e me ajudando a enfrentar as adversidades.

Também agradeço aos meus amigos mais próximos e colegas do DM, cujo apoio e amizade foram fundamentais durante a jornada. Com certo destaque, agradeço ao Cristiano, Renan, Filipe, Flávia, Fernando, Mateus, Evandro e Marco.

Com todo o carinho agradeço à todos os educadores que desde minha infância me incentivaram a seguir em busca do conhecimento.

Em especial ao meu orientador Prof. Edivaldo pela orientação, conhecimentos compartilhados, pelas conversas sempre edificantes que tivemos e principalmente pelo exemplo como pessoa e como professor.

Também agradeço aos professores Günter Mathias Ziegler e Pavle Blagojević por me receberem no grupo de geometria discreta da Freie Universität Berlin durante o período de doutorado sanduíche.

Com certo destaque quero agradecer aos professores da UTFPR - campus Pato Branco, UNICAN - Espanha, Freie Universität Berlin - Alemanha e do DM-UFSCar, por todo conhecimento matemático que me proporcionaram.

Enfatizo que sem o apoio de todas as pessoas acima citadas, tal conquista seria muito mais árdua ou impossível de alcançar.

Agradeço à FAPESP, Processos n° 2016/06456-4 e n° 2017/21162-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é provar teoremas tipo Tverberg e resultados relacionados. Mais especificamente, apresentamos uma prova alternativa para a conjectura de Bárány-Larman para o caso $r = p - 1$ com p um primo, provamos versões generalizadas do teorema colorido de Tverberg e uma versão parametrizada do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para o caso $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = (\mathbb{S}^1)^m$ a qual está relacionada com a conjectura de Tverberg-Vrećica.

Palavras Chave: *G*-ações, *G*-índices, Teorema de Tverberg, Teoremas coloridos de Tverberg, Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang.

Abstract

The main objective of this work is to prove Tverberg-type theorems and related results. More specifically, we will present an alternative proof for the Bárány-Larman conjecture for the case $r = p - 1$ with p a prime, we prove generalized versions of the colorful Tverberg theorem and a parameterized version of the Borsuk-Ulam- Bourgin-Yang theorem for the case $G = \mathbb{Z}_p^m$ or $G = (\mathbb{S}^1)^m$ which is related to the Tverberg-Vrećica conjecture.

Keywords: *G-actions, G-index, Tverberg theorem, Colorful Tverberg theorems, Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang type theorems.*

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	9
1.1 Complexos Simpliciais Geométricos	9
1.2 Joins	11
1.3 Espaços k -conexos	14
1.4 Espaços classificantes	14
1.5 O Espaço de Borel	15
1.6 Teoria de cohomologia equivariante de Borel	15
1.7 Sequência Espectral	17
1.8 Índice de valor numérico e índice de valor ideal	21
1.8.1 O índice $i(\cdot)$ de G -espaços de Volovikov	21
1.8.2 Índice de valor ideal de Fadell-Husseini	22
2 A versão colorida do Teorema de Tverberg	23
2.1 O Teorema de Tverberg e suas versões topológicas	23
2.1.1 O caso bidimensional	25
2.2 Casos remanescentes da conjectura de Tverberg	27
2.3 O Problema de Bárány-Larman	28
2.4 O caso p primo	30
3 Generalizações do Teorema Colorido de Tverberg	40
3.1 Generalização do Teorema Colorido de Tverberg	40
3.2 Uma Versão da Conjectura Colorida de Tverberg	43
4 A Conjectura de Tverberg-Vrećica e versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang	47
4.1 A Conjectura de Tverberg-Vrećica versus o problema parametrizado de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang	47
4.2 A Conjectura de Tverberg-Vrećica	49
4.3 $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m$: propriedades importantes para G -esferas de cohomologia	52
4.4 Uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang	53

4.5 Principais consequências do Teorema 4.12	57
Referências Bibliográficas	58

Introdução

O nosso trabalho versa sobre teoremas (problemas) do tipo Tverberg. Tais teoremas (problemas) tem sua origem de formulação na Geometria Discreta e são considerados como um tema muito relevante nesta área de pesquisa em Matemática. Os problemas geométricos do tipo Tverberg podem ser abordados de um ponto de vista topológico e então surgiram as versões topológicas das conjecturas (teoremas) do tipo Tverberg. Neste sentido, são necessários métodos topológicos para a abordagem destes problemas. As ferramentas de Topologia Algébrica tem-se mostrado um eficiente aparato na busca da solução destes problemas.

Existe um relação muito grande entre os problemas topológicos do tipo Tverberg e os problemas do tipo Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang.

A ideia geral nos problemas topológicos do tipo Tverberg consiste em encontrar um determinado número de pontos (“pontos de Tverberg”) em faces disjuntas de um específico complexo simplicial que sejam colapsados em um mesmo ponto, através de uma dada função contínua do complexo simplicial em um espaço Euclidiano (no contexto dos teoremas do Tipo Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, estes pontos podem ser vistos como sendo os pontos antípodas, para o caso clássico, ou órbitas de um ponto através da ação de um grupo finito).

Em geral, como nos problemas do Tipo Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, o problema de encontrar tais pontos de Tverberg é equivalente a determinar a existência de aplicações G -equivariantes entre G -espaços apropriados, e é neste aspecto que as ferramentas de Topologia Algébrica se tornam determinantes e efetivas na abordagem destes problemas. Em especial, no nosso trabalho destacamos as seguintes ferramentas de Topologia Algébrica utilizadas:

- teorias de G -índices (índice de valor numérico de Volovikov e índice de valor ideal de Fadell-Fadell-Husseini);
- teoria equivariante de cohomologia (tais como teoria equivariante de cohomologia de Borel);
- sequências espectrais (em especial a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel).

Descrevemos a seguir com detalhes e formalismo os teoremas (problemas) que serão abordados neste trabalho.

O Teorema de Tverberg é uma generalização do Teorema de Radon. Este último, afirma que um conjunto de $d+2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em dois subconjuntos que possuem envoltórias convexas não disjuntas. Tais teoremas são importantes e interessantes teoremas da Geometria Discreta e, especificamente, afirmam que:

Teorema de Radon. *Todo conjunto X constituído de $d+2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos A_1 e A_2 de X com interseção não vazia de suas envoltórias convexas, i.e., $\text{conv}(A_1) \cap \text{conv}(A_2) \neq \emptyset$, onde $\text{conv}(A_i)$ denota a envoltória convexa ou fecho convexo de A_i .*

Teorema de Tverberg. *Para qualquer $d \geq 1$ e $r \geq 2$, qualquer conjunto constituído de $(d+1)(r-1)+1$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em r subconjuntos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_r de tal maneira que $\text{conv}(A_1) \cap \dots \cap \text{conv}(A_r) \neq \emptyset$. Tal partição é dita uma **partição de Tverberg**.*

A prova original do Teorema de Tverberg [60] apresentada em 1966 é considerada bastante técnica e complicada, no entanto, alguns anos depois, Tverberg em [61] publicou uma prova mais simples de seu teorema. Em 1992, Sarkaria em [54] também apresenta uma prova simples e elegante deste importante resultado.

Os teoremas de Radon e Tverberg podem ser reformulados em termos de aplicações afins, da seguinte forma:

Uma formulação equivalente do Teorema de Radon. *Para toda aplicação afim $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem duas faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq \Delta_{d+1}$ tais que*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset.$$

Uma formulação equivalente do Teorema de Tverberg. *Para toda aplicação afim $f : \Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \subseteq \Delta_{(d+1)(r-1)}$ tais que*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Sabendo das equivalências anteriores, faz sentido questionar se a afirmação continua válida ao exigir que f seja somente uma aplicação contínua ao invés de afim. Tal formulação dá origem a famosa Conjectura de Tverberg, a saber

Conjectura de Tverberg. *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ arbitrários e denote $N := (d+1)(r-1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \Delta_N \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

existem r faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \subseteq \Delta_N$ tais que

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Esta conjectura foi provada no caso $r = 2$ por Bajmóczy e Bárány em 1979 [1] e no caso em que r é um primo por Bárány, Schlosman e Szücs em 1981 [2]. Estes dois casos são conhecidos como **versão topológica do teorema de Radon** e **versão topológica do teorema de Tverberg para r primo**, respectivamente.

Versão topológica do teorema de Radon. *Seja $f : \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Então existem duas faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq \Delta_{d+1}$ tais que*

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \neq \emptyset.$$

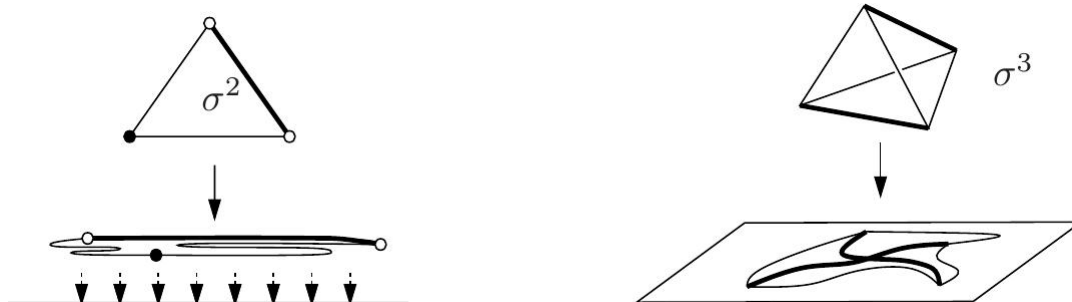
Versão topológica do teorema de Tverberg - Caso $r = p$ primo. *Sejam p um primo, $d \geq 1$ arbitrários e denote $N := (d + 1)(p - 1)$. Para cada aplicação contínua*

$$f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$$

existem p faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p \subseteq \Delta_N$ tais que

$$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) \cap \dots \cap f(\sigma_p) \neq \emptyset.$$

Aqui, vamos fazer uma observação interessante sobre estes teoremas: lembremos que o Teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma, em particular, que uma aplicação contínua de S^n em \mathbb{R}^n não pode ser injetiva. O Teorema topológico de Radon tem esta mesma propriedade, como mostram as ilustrações abaixo para $d = 1$ e $d = 2$:



Este fato nos diz que o Teorema topológico de Radon está fortemente relacionado com os problemas famosos de não existência de mergulhos topológicos de um complexo simplicial (grafos) sobre os espaços euclidianos, tal como o Teorema de Van-Kampen-Flores entre outros.

Voltando a Conjetura de Tverberg, temos também que a mesma é válida para o caso em que r é uma potência de primo e tal teorema foi provado de maneiras independentes por Volovikov [63] e por Sarkaria [55]. A demonstração deste caso, em ambas referências, requer o conhecimento de ferramentas avançadas de topologia algébrica, tais como sequências espectrais de uma fibração entre outras.

Desde 1996, quando foi provado por Volovikov [63] (e de 2000 quando foi provado por Sarkaria [55]) até 2015, apesar de várias tentativas que deram origem a novas técnicas e conjecturas equivalentes, não houve avanços para o caso em que r não seja potência de primo. Durante este período, a validade da Conjetura de Tverberg para tal caso foi considerada um dos problemas mais desafiadores na área de topologia combinatorial e geométrica. Em 2015, Florian Frick [24] sob algumas condições sobre os parâmetros r e d , mostrou a existência de um contra-exemplo para a Conjetura de Tverberg é apresentado, mostrando então que a Conjetura de Tverberg não é válida para o caso geral.

Relatamos a seguir um outro problema interessante relacionado com o Teorema de Tverberg. Sabendo que o teorema é válido, podemos afirmar que existe pelo menos uma partição de Tverberg. Porém, quantas partições de Tverberg existem para $(d + 1)(r - 1) + 1$ pontos em \mathbb{R}^d ? Sierksma conjecturou que existem $((r - 1)!)^d$ partições, mas até o momento tal afirmação ainda não pode ser provada. Entretanto, Vučić e Živaljević em [69] estabeleceram um limitante inferior para o número de partições se r for primo (no caso em que r é uma potência de primo, também existe uma estimativa similar [33]).

Teorema (Partições de Tverberg[69]). *Seja p um primo. Para qualquer aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, onde $N = (d + 1)(p - 1)$, o número de p -uplas não ordenadas $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ de faces disjuntas de Δ_N com $\bigcap_{i=1}^p f(\sigma_i) \neq \emptyset$ é ao menos*

$$\frac{1}{(p - 1)!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{(d+1)(p-1)/2}.$$

O teorema de Tverberg nos garante a existência de uma partição de Tverberg, porém, podemos nos perguntar o que acontece ao restringirmos as partições de um conjunto de pontos X , pedindo que as partições tenham pontos de diferentes partes de X . Tais tipos de problemas são denominados versões coloridas do teorema de Tverberg.

O principal problema em aberto nessa direção é a conjectura de Bárány–Larman, na qual é atribuída uma coloração ao conjunto de pontos. Para maiores informações ver em [4].

O problema de Bárány-Larman. Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Determine o menor número $n = n(d, r)$ tal que para toda aplicação afim(contínua) $f : \Delta_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices \mathcal{C} do simplexo Δ_{n-1} por $d + 1$ cores, sendo o tamanho de cada cor ao menos r , existam r faces coloridas duas a duas disjuntas

$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_{n-1} cujas f -imagens se interseccionam, isso é

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Notemos que um limitante inferior para a função $n(d, r)$ é $(d + 1)r$ e, portanto, é natural a seguinte conjectura.

Conjectura de Bárány-Larman. Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Então $n(d, r) = (d+1)r$.

Entretanto, a conjectura de Bárány-Larman não implica diretamente a conjectura de Tverberg, porém, o teorema a seguir generaliza ambas conjecturas para o caso onde $r - 1$ é um primo.

Teorema ótimo colorido de Tverberg Sejam $d \geq 1$, $r \geq 2$ um primo e $N \geq (d+1)(r - 1)$, e consideremos $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Se os vértices do simplexo Δ_N são coloridos por m cores, onde cada classe de cor tem cardinalidade no máximo $r - 1$, então existem r faces coloridas e disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N tais que,

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

O objetivo principal deste trabalho é provar teoremas tipo Tverberg e resultados relacionados. Especificaremos a seguir a organização do trabalho e os principais resultados obtidos.

No Capítulo 1, são apresentados os conceitos preliminares para a abordagem do tema. Nas Seções 1.1, 1.2 e 1.3 são apresentados os principais conceitos geométricos que utilizaremos através do trabalho, tais como complexos simpliciais geométricos e joins. Nas Seções 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8 são apresentadas as principais ferramentas de Topologia Algébrica utilizadas no trabalho, tais como espaços classificantes, teoria equivariante de Borel, sequências espectrais e os índices de valor numérico de Volovikov e o índice de valor ideal de Fadell-Husseini, os quais foram fundamentais para a obtenção dos principais resultados da tese.

No Capítulo 2, apresentamos uma prova alternativa para a conjectura de Bárány-Larman para o caso $r = p - 1$ com p um primo. De forma mais específica, na Seção 2.1 revisitamos o problema topológico de Tverberg, mostrando o estado atual da arte, em especial para o caso bidimensional. Na Seção 2.2, provamos o Teorema 2.16, o qual está relacionado com alguns casos remanescentes da Conjectura topológica de Tverberg. Os principais resultados do capítulo são provados nas Seções 2.3 e 2.4 onde apresentamos uma prova alternativa para a conjectura de Bárány-Larman para o caso $r = p - 1$ com p um primo. A nossa principal contribuição nesta direção foi dar uma prova alternativa do \mathbb{Z}_p -índice do complexo chessboard $\Delta_{p,p-1}$. Este é o ponto central na demonstração da conjectura de Bárány-Larman para o caso $r = p - 1$ com p um primo. Para o caso de r arbitrário, o cálculo do G -índice do complexo chessboard $\Delta_{r,r-1}$ (com G apropriado, por exemplo $G = (\mathbb{Z}_p^k)$ ou $G = (\mathbb{Z}_{p^k})$) é um desafiador problema em aberto, cuja solução

conduzirá a conjectura de Bárány-Larman para outros r 's.

Teorema 2.28 $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1} = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p)$.

A estratégia principal para provar o Teorema 2.28 foi usar as propriedades de um determinado homomorfismo transfer definido por Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov em [29].

No Capítulo 3, provamos versões generalizadas do teorema colorido de Tverberg. De forma mais específica, na Seção 3.1, provamos uma generalização do Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica (ver Teorema 3.1). Sabendo que o Teorema topológico colorido de Tverberg é válido, desde que o tamanho de cada cor seja ao menos $2r - 1$, onde r é uma potência de primo, mostramos através de outros métodos, que é possível restringir um pouco mais o tamanho das cores que é dado no Teorema 3.1, pedindo então que apenas uma cor tenha ao menos tamanho $2r - 1$, onde as restantes devem ter ao menos tamanho $2r - 4$.

Teorema 3.2 [Generalização do Teorema Colorido de Tverberg] *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ uma potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices C do simplexo Δ por $d + 1$ cores, sem perda de generalidade, suponhamos que a cardinalidade de C_1 é ao menos $2r - 1$ e as demais cores tenham cardinalidade ao menos $2r - 4$. Então, existe r faces coloridas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo,*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Mais ainda, na Seção 3.2 provamos uma versão da conjectura de Bárány-Larman, a qual também generaliza o Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica. O diferencial nesta generalização foi considerar r um inteiro qualquer e usar a estratégia de pontos de (H, G) -coincidências definido por Gonçalves, Jaworowski e Pergher em [30].

Teorema 3.3 [Uma Versão da Conjectura Colorida de Tverberg] *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 1$ inteiros, onde $r = s \cdot p^k$ com p um primo. Dada qualquer aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e qualquer coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices C do simplexo Δ por $d + 1$ cores, onde a cardinalidade de cada conjunto C_i seja ao menos $2r - 1$, existem s conjuntos $F_i = \{\sigma_{i,j}; 1 \leq j \leq p^k\}$ com $1 \leq i \leq s$, tais que as faces $\sigma_{i,j}$ são coloridas e disjuntas, satisfazendo*

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{i,p^k}) \neq \emptyset,$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

No Capítulo 4, provamos um versão parametrizada do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para o caso $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = (\mathbb{S}^1)^m$. Tal resultado está relacionado com a conjectura de Tverberg-Vrećica. De maneira mais específica, na Seção 4.1, fazemos um paralelo entre a Conjectura de Tverberg-Vrećica e o problema parametrizado de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, com um breve relato histórico sobre o problema parametrizado de

Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang. Na Seção 4.2 descrevemos o estado atual da arte sobre a Conjectura de Tverberg-Vrećica, relatando principalmente os resultados mais recentes provados por Blagojević, Matschke e Ziegler em [5]. Em [5], os autores com o intuito de provar casos da Conjectura de Tverberg-Vrećica, provaram uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam em termos de fibrados para o caso $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ (ver Teorema 4.8). Tal resultado se baseou em uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam em termos de fibrados para o caso $G = \mathbb{Z}_p$ provada por Živaljević em [72]. Nesta direção, na Seção 4.4 apresentaremos uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang relacionada com o Teorema 4.8, a qual aborda fibrados mais gerais (adicionalmente o caso $G = (\mathbb{S}^1)^m$ é considerado, e determinamos uma estimativa para dimensão (topológica ou cohomológica) do conjunto $S := M^{-1}(\Delta)$). A saber, provamos a seguinte versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para o caso $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m$.

Teorema 4.12 *Sejam*

- $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m$,
- B um G -espaço trivial e conexo,
- $E \xrightarrow{p} B$ e $E' \xrightarrow{p'} B$ dois G -fibrados vetoriais (todas as fibras tem a mesma G -representação),
- $\Delta := E^G \rightarrow B$ e $\Delta' := E'^G \rightarrow B$ os subfibrados de pontos fixos de $E \rightarrow B$ e $E' \rightarrow B$, respectivamente,
- $C \rightarrow B$ e $C' \rightarrow B$ os subfibrados G -invariantes complementos ortogonais ($E = C \oplus \Delta$) e ($E' = C' \oplus \Delta'$),
- F e F' as fibras dos fibrados esfera $S(C) \rightarrow B$ e $S(C') \rightarrow B$.

Suponha que

- $k = \text{rank}(C)$ e $n = \text{rank}(C')$, com $k \geq n$,
- $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F)$ e $H^*(F')$ (isso é, $C \rightarrow B$ e $C' \rightarrow B$ são orientáveis se $p \neq 2$),
- $H_G^*(S(C)) \cong H^*(B) \otimes H_G^*(F)$ (o que implica $\text{Index}_G^B(S(C)) \subseteq \text{Index}_G^{\text{pt}}(F) \otimes H^*(BG)$), e
- seja f uma G -aplicação entre os fibrados, tal que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{f} & E' = C' \oplus \Delta' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array} .$$

Então a aplicação

$$H^{\leq k-n}(BG) \otimes H^*(B) \xrightarrow{p^*} H_G^*(f^{-1}(\Delta'))$$

é injetiva. Consequentemente,

$$\text{coh.dim}(f^{-1}(\Delta')) \geq \text{coh.dim}(B) + k - n.$$

Finalizando o trabalho, na Seção 4.5, mostramos as principais consequências do Teorema 4.12. Uma primeira consequência é considerar o caso em que $B = \{\text{pt}\}$ para obter a versão clássica do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para p -toros e toros provada recentemente em [42, Theorem 2.1] (ver Teorema 4.13). Outra consequência do Teorema 4.12, é considerar $m = 1$ para obter as versões parametrizadas do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang provadas por A. Dold em [20], Nakaoka em [49] e Izydorek-Rybicki em [38]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns requisitos de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Se G é um grupo topológico atuando em espaços topológicos X e Y , uma G -aplicação ou uma aplicação G -equivariante é uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ que preserva a G -ação, ou seja, $f(gx) = gf(x)$, para qualquer $g \in G$ e para qualquer $x \in X$. Observamos que se H é um subgrupo de G e se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação G -equivariante, então f é H -equivariante. Uma aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação entre os espaços de órbitas $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$.

1.1 Complexos Simpliciais Geométricos

Definição 1.1. Sejam v_0, v_1, \dots, v_k pontos em \mathbb{R}^d . Dizemos que esses pontos são geometricamente dependentes se existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, não todos nulos tal que $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i = 0$ e $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$. Caso contrário v_0, v_1, \dots, v_k são chamados geometricamente independentes.

Exemplo 1.2. Temos que:

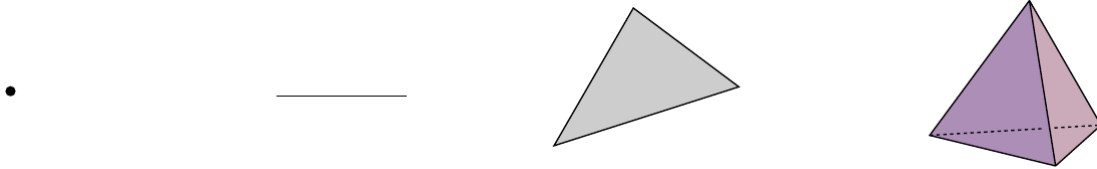
- Dois pontos v_0 e v_1 são geometricamente independentes se $v_1 \neq v_0$.
- Três pontos v_0, v_1 e v_2 são geometricamente independentes se não estão numa mesma reta.
- Quatro pontos v_0, v_1, v_2 e v_3 são geometricamente independentes se não estão num mesmo plano.

Lema 1.3 ([44], Lemma 1.3.2). *As seguintes condições são equivalentes aos pontos $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ serem geometricamente independentes:*

- Os vetores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0$ são linearmente independentes.
- Os vetores $(d+1)$ -dimensionais $(1, v_0), (1, v_1), \dots, (1, v_k) \in \mathbb{R}^{d+1}$ são linearmente independentes.

Definição 1.4. Um simplexo σ é a envoltória convexa de um conjunto finito $A \subset \mathbb{R}^d$ de pontos geometricamente independentes. Os pontos de A são chamados de vértices de σ . A dimensão de σ é $\dim \sigma := |A| - 1$. Assim, cada k -simplexo (simplexo k -dimensional) tem $k + 1$ vértices.

Exemplo 1.5. São exemplos de simplexos: um ponto, um segmento de reta, um triângulo, um tetraedro:



Estes exemplos têm dimensão 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

Definição 1.6. A envoltória convexa de um subconjunto arbitrário dos vértices de um simplexo σ é uma face de σ , deste modo, cada face é um simplexo.

O interior relativo de um simplexo σ é construído a partir de σ pela remoção de todas as faces de dimensão menor que $\dim \sigma$.

Definição 1.7. Uma família não vazia Δ de simplexos é um complexo simplicial se as duas seguintes condições são satisfeitas:

- Cada face de qualquer simplexo $\sigma \in \Delta$ é também um simplexo de Δ .
- A interseção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de quaisquer dois simplexos $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ é uma face de ambos σ_1 e σ_2 .

A união de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ é denominada **poliedro** de Δ e é denotado por $||\Delta||$.

A **dimensão** de um complexo simplicial é a maior dimensão dos simplexos que o compõem: $\dim \Delta := \max\{\dim \sigma \in \Delta\}$.

O **conjunto de vértices** de Δ , denotado por $V(\Delta)$, é a união dos conjuntos de vértices de todos os simplexos de Δ .

Exemplo 1.8. Abaixo temos três figuras, onde a da esquerda representa um complexo simplicial e as outras duas não representam complexos simpliciais:



Os interiores relativos de todos os simplexos de um complexo simplicial Δ formam uma partição do poliedro $||\Delta||$, pois, para cada $x \in ||\Delta||$ existe exatamente um simplexo $\sigma \in \Delta$ tal que x está em seu interior relativo. Este simplexo é denotado por $\text{supp}(x)$ e chamado de *suporte* do ponto x .

1.2 Joins

O produto cartesiano de dois espaços topológicos X, Y é também um espaço topológico, entretanto, se X e Y são simplexes de dimensão ao menos 1, então $X \times Y$ não é um simplexo.

Definiremos nesta seção o join, que nos permite operar complexos simpliciais e obter um complexo simplicial.

Definição 1.9. Sejam K e L dois complexos simpliciais. O join $K * L$ é o complexo simplicial com conjunto de vértices $V(K) \uplus V(L) := V(K) \times \{1\} \cup V(L) \times \{2\}$ e conjunto de simplexes $\{F \uplus G : F \in K, G \in L\}$ (aqui \uplus denota a união disjunta).

Podemos definir o n -join de um complexo simplicial K ,

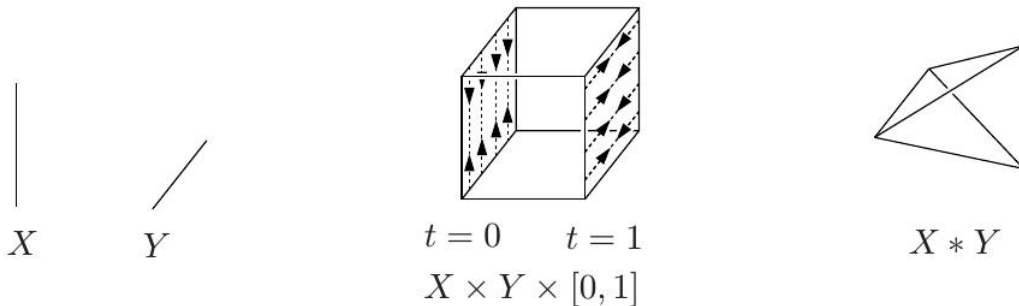
$$K^{*n} := \underbrace{K * K * \dots * K}_{n\text{-vezes}} \cong \{F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_n : F_1, \dots, F_n \in K\}.$$

Exemplo 1.10. Seja $D_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ o complexo simplicial correspondente ao espaço discreto com dois pontos. Como definido temos que $\|D_2\|$ é homeomorfo a S^0 . Que tipo de espaço é o n -join D_2^{*n} ?

Podemos identificar o conjunto dos vértices de D_2^{*n} com o conjunto $[2] \times [n]$. Dessa forma um subconjunto de $[2] \times [n]$ será um simplexo se, e somente se, não contém ambos $(1, i)$ e $(2, i)$ com $i \in [n]$. Assim, o complexo simplicial D_2^{*n} é isomorfo ao complexo fronteira do n -dimensional crosspolytope. Portanto temos que $\|D_2^{*n}\| \cong S^{n-1}$.

Definição 1.11 (Join de espaços). Sejam X e Y espaços topológicos. O join $X * Y$ é o espaço quociente $X \times Y \times [0, 1] / \approx$, onde a relação de equivalência \approx é dada por $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ para todo $x, x' \in X$ e $y \in Y$ e $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ para todo $x \in X$ e $y, y' \in Y$.

Exemplo 1.12. Quando X e Y são simplexes de dimensão 1.



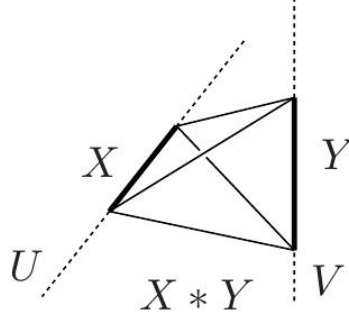
Uma útil interpretação geométrica do join é dada pela seguinte proposição (ver [44, Proposition 4.2.4]).

Proposição 1.2.1 (Interpretação geométrica do join). Suponha que X_1, \dots, X_p são subespaços de um mesmo espaço euclidiano, que $X_i \subseteq U_i$, onde $U_1 \cap \dots \cap U_p = \emptyset$ e

que a envoltória convexa de $U_1 \cup \dots \cup U_p$ tem dimensão $\dim(U_1) + \dots + \dim(U_p) + p - 1$. Além disso, suponha X_1, \dots, X_p limitados. Então, o espaço

$$Z := \{t_1x_1 + \dots + t_px_p : t_i \in [0, 1], x_i \in X_i\} \subset \mathbb{R}^n,$$

é homeomorfo a $X_1 * \dots * X_p$.



Observações 1.2.1. Com esta interpretação geométrica, mostra-se a equivalência da definição do join de complexos simpliciais com a do join de espaços topológicos, no seguinte sentido, a realização geométrica do join de complexos simpliciais $\|K * L\|$ é homeomorfa ao join das realizações geométricas dos complexos simpliciais $\|K\| * \|L\|$, ou seja, $\|K * L\| \cong \|K\| * \|L\|$ para quaisquer complexos simpliciais K e L (ver [44]).

Podemos escrever um ponto de um join que é uma classe de equivalência $[(x, y, t)]$ como $tx \oplus (1 - t)y$. Notamos que mesmo tendo $X = Y$ e $a, b \in X, a \neq b$ essa soma não é comutativa, pois, $\frac{1}{2}a \oplus \frac{1}{2}b \neq \frac{1}{2}b \oplus \frac{1}{2}a$.

De maneira análoga usaremos a notação $t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \dots \oplus t_nx_n$ para um ponto de $X^{*n} = \underbrace{X * X * \dots * X}_{n\text{-vezes}}$.

Definição 1.13. Dadas duas aplicações contínuas $f : X_1 \rightarrow X_2$ e $g : Y_1 \rightarrow Y_2$, o join de f e g denotado por $f * g$ é a aplicação contínua

$$f * g : X_1 * Y_1 \rightarrow X_2 * Y_2,$$

dada por $tx \oplus (1 - t)y \mapsto tf(x) \oplus (1 - t)g(y)$.

Ainda mais, dada a aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$, podemos definir a aplicação contínua $f^{*n} = \underbrace{f * f * \dots * f}_{n\text{-vezes}} : X^{*n} \rightarrow Y^{*n}$.

Observações 1.2.2 (Joins e produtos). O produto $X \times Y$ pode ser mergulhado em $X * Y$ por $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y$. Ou de maneira geral, X^n mergulha em X^{*n} por $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}x_1 \oplus \frac{1}{n}x_2 \oplus \dots \oplus \frac{1}{n}x_n$.

Definição 1.14. Sejam $n \geq k \geq 2$ inteiros. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) é dita **k -distinta** se quaisquer k elementos dentre os x_i não são todos iguais.

Definição 1.15. O n -produto k -deletado de um espaço X é

$$X_{\Delta(k)}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n : (x_1, \dots, x_n) k\text{-distinta}\}.$$

Definição 1.16. O n -join n -deletado de X é

$$X_{\Delta}^{*n} := X^{*n} \setminus \left\{ \frac{1}{n}x \oplus \frac{1}{n}x \oplus \dots \oplus \frac{1}{n}x : x \in X \right\}.$$

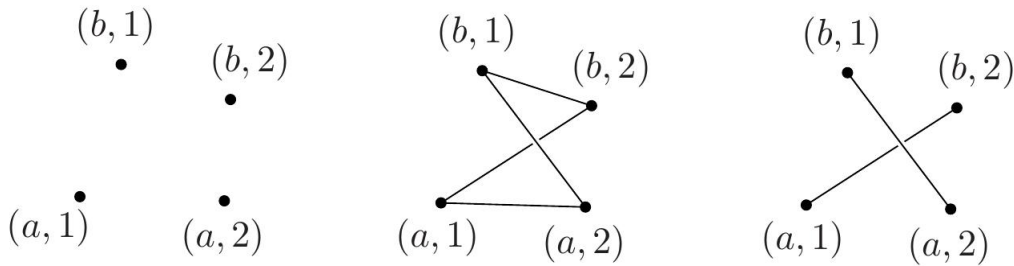
Definição 1.17. Para um complexo simplicial K , o n -join k -deletado de K é

$$K_{\Delta(k)}^n := \{F_1 \uplus F_2 \uplus \dots \uplus F_n \in K^{*n} : (F_1, F_2, \dots, F_n) \text{ é } k\text{-disjunta}\},$$

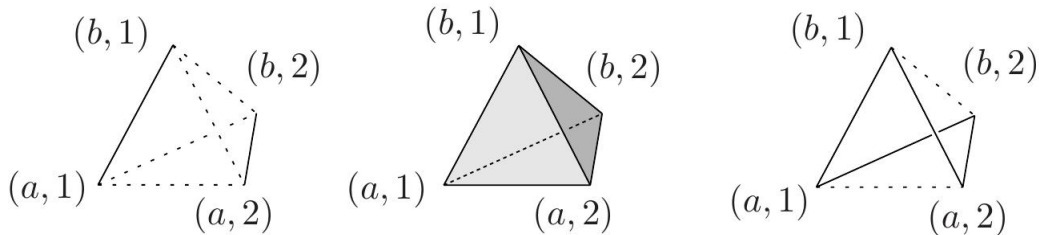
onde uma n -upla (F_1, F_2, \dots, F_n) de conjuntos é k -disjunta se cada k conjuntos dentre os F_i tem interseção vazia.

Para $k = n$ escrevemos X_{Δ}^n para $X_{\Delta(n)}^n$ e K_{Δ}^n para $K_{\Delta(n)}^n$.

Exemplo 1.18. Seja $D_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ o complexo simplicial discreto de dois pontos. Temos que $(D_2)_{\Delta}^{*2}$ é a união disjunta de dois segmentos. Abaixo temos três figuras, onde a primeira representa duas cópias de D_2 , a segunda o join e a terceira o join deletado.



Exemplo 1.19. Seja σ^1 um simplexo de dimensão 1, ou seja, um segmento de reta com vértices a e b . O join deletado $(\sigma^1)_{\Delta}^{*2}$ é a fronteira de um quadrado de lado σ^1 . Como no exemplo anterior temos abaixo três figuras, onde a primeira representa a união disjunta de dois segmentos de reta, a segunda um tetraedro que é o join $\sigma^1 * \sigma^1$ e a terceira o join deletado $(\sigma^1)_{\Delta}^{*2}$.



1.3 Espaços k -conexos

Definição 1.20. Seja $k \geq -1$. Um espaço topológico X é k -conexo se para cada $l = -1, 0, \dots, k$, cada aplicação contínua $f : S^l \rightarrow X$ pode ser estendida a uma aplicação contínua $\bar{f} : B^{l+1} \rightarrow X$, ou seja, cada aplicação $f : S^l \rightarrow X$ é homotopicamente nula.

Equivalentemente, um espaço X é k -conexo se $\pi_i(X) \cong 0$, para $1 \leq i \leq k$, onde $\pi_i(X)$ denota o i -ésimo grupo de homotopia de X .

O seguinte teorema caracteriza a k -conectividade em termos de grupos de homologia.

Teorema 1.21. *Seja X um espaço topológico não nulo e $k \geq 1$. Então X é k -conexo se, e somente se, é simplesmente conexo (isto é, o grupo fundamental $\pi(X)$) e $\tilde{H}_i(X) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, k$.*

O seguinte lema é uma consequência do Teorema de Hurewicz ([44], Theorem 4.4.1).

Lema 1.22 ([44], Proposition 4.4.3). *Supondo X k -conexo e Y l -conexo, onde X e Y são triangularizáveis. Então $X * Y$ é $(k + l + 2)$ -conexo.*

1.4 Espaços classificantes

Uma construção direta do espaço classificante BG , para qualquer grupo topológico G , foi dada primeiramente por Milnor [46]. Dado qualquer grupo topológico G , existe um espaço BG e um G -fibrado principal universal $EG \rightarrow BG$ tal que para qualquer espaço paracompacto Hausdorff B , a construção pullback induz uma bijeção entre o conjunto $[B, BG]$ das classes de homotopia de aplicações de B em BG e a classe dos isomorfismos de G -fibrados principais sobre B . Denotaremos o G -fibrado principal universal $EG \rightarrow BG$ por ω_G .

Em ([37, Chap. 4, Theorems 12.2, 12.4]), foram provados os seguintes teoremas:

Teorema 1.23. *Para qualquer G -fibrado principal $\eta = (G, G, E, p, B)$ sobre um espaço paracompacto Hausdorff B , existe uma aplicação $f : B \rightarrow BG$ tal que η e o fibrado pullback $f^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre B . A aplicação $f : B \rightarrow BG$ é chamada uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $p : E \rightarrow B$.*

Teorema 1.24. *Sejam $f_0, f_1 : B \rightarrow BG$ duas funções contínuas tais que $f_0^*(\omega_G)$ e $f_1^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre B . Então f_0 é homotópica a f_1 .*

No caso em que G é um grupo compacto de Lie, é válido o seguinte teorema fundamental, cuja prova pode ser encontrada em ([11, Chap.II, Theorem 5.8]).

Teorema 1.25. *Suponhamos que X seja um espaço paracompacto Hausdorff e que G seja um grupo compacto de Lie atuando livremente sobre X . Então $X \rightarrow X/G$ é um G -fibrado principal.*

Proposição 1.26 ([43, Observação 1.1.4]). *Sejam G um grupo de Lie compacto e X, Y G -espaços livres e paracompactos. Considere $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação G -equivariante e $\bar{f}: X/G \rightarrow Y/G$ a induzida de f . Se $q_Y: Y/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para $Y \rightarrow Y/G$, então $q_Y \circ \bar{f}: X/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para $X \rightarrow X/G$.*

1.5 O Espaço de Borel

Suponhamos que G seja um grupo compacto de Lie atuando livremente em um espaço topológico X Hausdorff, paracompacto. Então, podemos tomar

$$h: X/G \rightarrow BG$$

uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$, onde $EG \rightarrow BG$ é o G -fibrado principal universal para G .

Agora, suponhamos que G seja um grupo compacto de Lie atuando em um espaço topológico X Hausdorff. Denotemos por X_G o espaço de Borel $EG \times_G X$ de X , obtido da seguinte forma: G age livremente sobre $EG \times X$ pela ação $g(e, x) = (ge, gx)$ e $EG \times_G X = (EG \times X)/G$. A aplicação entre os espaços de órbitas

$$p: X_G \rightarrow (EG)/G = BG, \tag{1.1}$$

induzida pela projeção na primeira coordenada $EG \times X \rightarrow EG$ é uma fibração com fibra X e espaço base BG sendo o espaço classificante de G ; p é chamada uma *fibração de Borel* associada ao G -espaço X .

Observação 1.5.1. Se G age livremente sobre X , então a aplicação

$$s: X_G \rightarrow X/G,$$

induzida pela projeção na segunda coordenada $EG \times X \rightarrow X$, é uma fibração com fibra contrátil EG e portanto uma equivalência de homotopia (para detalhes, ver [19]).

1.6 Teoria de cohomologia equivariante de Borel

Os resultados principais desta seção são apresentados com detalhes em [19, Chap III, Section 1].

Definição 1.27. Seja G um grupo de Lie compacto. Dado um G -par (X, A) tal que X é paracompacto e A é subespaço fechado, podemos associar o par de espaços (X_G, A_G) , conhecido como *par de Borel*. Dada uma aplicação G -equivariante $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, a aplicação $\text{Id}_{EG} \times f: (EG \times X, EG \times A) \rightarrow (Y, B)$ induz uma bem definida aplicação $f_G = \text{Id}_{EG} \times_G f: (X_G, A_G) \rightarrow (Y_G, B_G)$, conhecida como *aplicação de Borel*.

Temos que $\text{Id}_G = \text{Id}_{X_G}$ e $(f \circ g)_G = f_G \circ g_G$, para quaisquer aplicações G -equivariante f, g e aplicação identidade Id . Assim, temos um funtor covariante $\cdot_G: G\text{-Top}^2 \rightarrow \text{Top}^2$ que associa um G -par (X, A) ao par (X_G, A_G) e uma aplicação G -equivariante $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ a uma aplicação contínua $f_G: (X_G, A_G) \rightarrow (Y_G, B_G)$, nos quais \mathbf{Top}^2 , $G\text{-}\mathbf{Top}^2$ são as categorias dos pares de espaços topológicos e G -pares, respectivamente. Este funtor é conhecido como *funtor construção de Borel*.

Seja R um anel comutativo com unidade 1_R . Para um G -par (X, A) defina

$$H_G^*(X, A) := \check{H}^*(X_G, A_G) = \check{H}^*(EG \times_G X, EG \times_G A),$$

no qual $\check{H}^*(-; R)$ é a cohomologia de Čech (veja [56]). Dada uma G -aplicação $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, induzimos $f^* := f_G^* = \check{H}^*(f_G; R)$.

Denotaremos $\check{H}(-; R)$ simplesmente por $H(-; R)$ (sem "Čech") e quando não gerar confusão, omitiremos o anel de coeficientes R .

De acordo com [19, Chap III, Section 1], para todo inteiro q , $H_G^q(-; R)$ é um funtor contravariante, no qual associa G -pares e G -aplicações a R -módulos e R -homomorfismos, respectivamente. Além disso, satisfaz os axiomas da *Invariância homotópica*, *Exatidão*, *Excisão* e *Continuidade*. Mais ainda, para pares (X, A) , (X, B) adequados temos que o produto $\text{cup} \cup$ em $H^*(-; R)$ é induzido em $H_G^*(-; R)$, isto é, existe a aplicação

$$H_G^m(X, A) \otimes H_G^n(X, B) \rightarrow H_G^{m+n}(X, A \cup B),$$

satisfazendo as propriedades usuais do produto cup .

Dizemos que H_G^* é uma teoria de cohomologia G -equivariante e cada H_G^q é chamado *q-functor cohomologia G-equivariante de Borel*.

A teoria de cohomologia G -equivariante de Borel, diferentemente de uma teoria de cohomologia clássica, como por exemplo, a singular ou a de Čech, não satisfaz o axioma da dimensão. Tais teorias de cohomologia também são chamadas de teoria de cohomologia generalizada. Note que se $X = \{\text{pt}\}$, então

$$H_G^*(\text{pt}) = H^*(EG \times_G \{\text{pt}\}) \cong H^*(BG).$$

O anel de cohomologia $H^*(BG)$ possui rica estrutura e será de fundamental importância para a definição das principais ferramentas que serão utilizadas neste trabalho. Apresentamos a seguir o anel de cohomologia $H^*(BG)$ dos espaços classificantes BG , para $G = \mathbb{Z}_2^m$, \mathbb{Z}_p^m ou $(\mathbb{S}^1)^m$ os quais serão os exemplos mais importantes para o contexto deste trabalho.

Proposição 1.28 ([19], Proposition 2.2, Theorem 2.5, Exercise 2.7.4). *Seja $m \geq 1$.*

1. Para $p = 2$, $G = (\mathbb{Z}_2)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_m]$, nos quais cada $t_i \in H^1(BG; \mathbb{Z}_2)$.

2. Para $p > 2$, $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_m] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1, \dots, s_m)$, nos quais $t_i \in H^2(BG; \mathbb{Z}_p)$, $s_i \in H^1(BG; \mathbb{Z}_p)$ e $s_i^2 = 0$.
3. Para $p = 0$, $G = (S^1)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_k]$, nos quais cada $t_i \in H^2(BG; \mathbb{Q})$.

Um outro fato muito importante é que $H_G^*(X, A)$ é um módulo graduado sobre $H^*(BG)$ de uma maneira canônica, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 1.29. A aplicação $p: X_G \rightarrow BG$ induz uma estrutura de $H^*(BG)$ -módulo graduado sobre $H_G^*(X, A)$.

Prova. Dados $a \in H^m(BG)$ e $\gamma \in H_G^n(X, A)$ basta definir $a\gamma = p^*(a) \cup \gamma \in H_G^{m+n}(X, A)$. □

1.7 Sequência Espectral

Definição 1.7.1. Um módulo diferencial bigraduado sobre um anel R , é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$ (ou $\{E_{p,q}\}$), para todo par de inteiros p e q , junto com uma aplicação R -linear $d: E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, o diferencial, de bigrau $(r, -r+1)$ (ou $d: E_{*,*} \rightarrow E_{*,*}$, de bigrau $(-r, r-1)$), para algum inteiro r , satisfazendo $d \circ d = 0$.

Definição 1.7.2. O módulo de cohomologia $H(E)$ é o módulo bigraduado

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\text{Ker}(d: E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q-r+1})}{\text{Im}(d: E^{p-r, q+r-1} \rightarrow E^{p,q})}.$$

Definição 1.7.3. Uma sequência espectral do tipo cohomológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais têm bigrau $(r, -r+1)$ e $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Observação 1.7.1. Embora a sequência espectral esteja indexada para $r = 1, 2, \dots$, essa indexação pode começar em qualquer inteiro e para as nossas aplicações a sequência começa em $r = 2$.

Para definir o termo limite de uma sequência espectral cohomológica, para todo $k \geq r$, denotemos por

$$Z_r^{p,q} = \text{Ker}(d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1})$$

$$B_r^{p,q} = \text{Im}(d_r: E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}).$$

A condição $d_r \circ d_r = 0$, implica que $B_r \subset Z_r \subset E_r$, e segue da Definição 1.7.2 que $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. Sejam

$$Z(E_{r+1})^{p,q} = \text{Ker}(d_{r+1}: E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p+r+1, q-r})$$

$$B(E_{r+1})^{p,q} = \text{Im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,q+r} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}).$$

Segue de [35, Theorem 1.10, p.173], que existem submódulos bigraduados Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r , contendo B_r , tais que $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/Z_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$, para todo p, q . Assim, $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$ e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

Além disso, $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando esse processo por indução, obtemos uma sequência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

com a propriedade que $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$.

Definição 1.7.4. Definimos os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \quad e \quad B_\infty = \bigcup_n B_n.$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$ é chamado o *limite da sequência espectral* E .

Definição 1.7.5. Uma sequência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ *colapsa* no N -ésimo termo se o diferencial $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.

Observação 1.7.2. Uma consequência imediata do fato de uma sequência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsar no N -ésimo termo, é que $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \cong \dots \cong E_\infty^{*,*}$.

Definição 1.7.6. Uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\dots \subset F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \dots \subset A.$$

Definição 1.7.7. Dada uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , o módulo graduado associado $E_0^*(A)$ é dado por

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A).$$

Definição 1.7.8. Se H^* é um R -módulo graduado e se F é uma filtração sobre H^* , então $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}$ é dado por

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q}).$$

Definição 1.7.9. Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para um R -módulo graduado H^* , se existe uma filtração F sobre H^* tal que

$$E_{\infty}^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde $E_{\infty}^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral.

Definição 1.7.10. Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é uma sequência espectral do primeiro quadrante, se existe r tal que $E_r^{p,q} = 0$, para $p < 0$ ou $q < 0$.

Recordemos agora o seguinte teorema de Leray-Serre para fibrações (para demonstração, ver [45, Theorem 6.7]).

Teorema 1.30 (A Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre). *Seja R um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, com*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)),$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia de F , a fibra de p , e convergindo para $H^*(E; R)$. Além disso, essa sequência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

Observação 1.7.3. Se $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F; R)$ então o sistema de coeficientes locais é trivial e o E_2 -termo tem a forma mais simples

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F; R)).$$

Observação 1.7.4. A sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel

$$X \hookrightarrow EG \times_G X = X_G \xrightarrow{p} BG$$

será uma das principais ferramentas utilizadas no trabalho. Por este motivo, apresentaremos a seguir alguns detalhes sobre esta sequência.

Seja G um grupo de Lie compacto agindo sobre um espaço paracompacto de Hausdorff X . Considere a fibração de Borel

$$\pi : X_G \longrightarrow BG,$$

com fibra X . Se G age livremente sobre X , já observamos que os anéis de cohomologia $H^*(X_G)$ e $H^*(X/G)$ são isomorfos. Do Teorema 1.30, associado à fibração de Borel $X \hookrightarrow EG \times_G X = X_G \xrightarrow{p} BG$, temos uma sequência espectral do primeiro quadrante, $\{E_r, d_r\}$, convergindo para $H^*(X_G)$, com

$$E_2^{p,q} = H^p(BG; \mathcal{H}^q(X)),$$

onde os coeficientes são locais e determinados pela ação do grupo fundamental $\pi_1(BG)$ sobre $H^*(X)$. Como mencionado anteriormente, se $\pi_1(BG)$ age trivialmente sobre $H^*(X)$,

o E_2 -termo possui a seguinte forma mais adequada

$$E_2^{p,q} = H^p(BG) \otimes H^q(X).$$

Quando restrito para as subálgebras $E_2^{*,0}$ e $E_2^{0,*}$, a estrutura produto na sequência espectral coincide com o produto cup sobre $H^*(BG)$ e $H^*(X)$, respectivamente. Também, os homomorfismos

$$H^p(BG) \cong E_2^{p,0} \rightarrow E_3^{p,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_{p+1}^{p,0} \cong E_\infty^{p,0} \subset H^p(X_G) \quad (1.2)$$

e

$$H^q(X_G) \rightarrow E_\infty^{0,q} \cong E_{q+2}^{0,q} \hookrightarrow E_{q+1}^{0,q} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_2^{0,q} \cong H^q(X) \quad (1.3)$$

são, respectivamente, os homomorfismos (também chamados de homomorfismos edge e transgressão, respectivamente)

$$p^* : H^p(BG) \longrightarrow H^p(X_G)$$

e

$$i^* : H^q(X_G) \longrightarrow H^q(X),$$

onde $i : X \longrightarrow X_G$ é a inclusão.

A construção de Borel e a fibração de Borel associada são naturais com respeito à aplicações equivariantes, ou seja, qualquer aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$ entre G -espaços X e Y induz o seguinte morfismo de fibrados

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G X & \xrightarrow{\text{Id} \times_G f} & EG \times_G Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \xrightarrow{=} & BG. \end{array} \quad (1.4)$$

Este morfismo de fibrados induz um morfismo entre as sequências espectrais associadas

$$E_r^{p,q}(f) : E_r^{p,q}(EG \times_G Y) \rightarrow E_r^{p,q}(EG \times_G X)$$

tal que

$$E_r^{p,0}(f) : E_r^{p,0}(EG \times_G Y) \rightarrow E_r^{p,0}(EG \times_G X)$$

é a identidade.

Através do trabalho, usaremos a notação $E_*^{*,*}(X)$ para indicar a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel

$$X \hookrightarrow EG \times_G X = X_G \xrightarrow{p} BG$$

1.8 Índice de valor numérico e índice de valor ideal

Finalizaremos este capítulo com a definição de dois importantes índices na literatura, a saber, o índice numérico $i(\cdot)$ de G -espaços definido por Volovikov em [66] e índice de valor ideal definido por Fadell-Husseini [22].

Provavelmente, a primeira vez que um índice (co)homológico apareceu de forma explícita foi em um artigo de Yang [74], para espaços com ações livres de \mathbb{Z}_2 . Este índice está próximo a conceitos como gênero e categoria e têm aplicações em várias áreas da matemática. Para ações livres de grupos finitos arbitrários, índices homológicos e geométricos foram introduzidos por Švarc em [57, 58] e por Conner e Floyd em [17].

1.8.1 O índice $i(\cdot)$ de G -espaços de Volovikov

Recordamos agora um índice numérico definido por Volovikov em [66]. Este índice é uma função sobre G -espaços cujo valor ou é positivo ou ∞ . Para a definição do índice $i(\cdot)$ a seguir, vamos usar a Cohomologia de Čech com coeficientes em um corpo \mathbb{K} , o qual não será indicado por nossa notação. Além disso, no caso em que G é um p -toro, isto é, $G = \mathbb{Z}_p^m = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, para um primo p , sempre usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, e no caso em que G é um grupo conexo de Lie, usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. A definição do índice $i(X)$ usa a sequência espectral do fibrado $p_X : X_G \rightarrow BG$ com fibra X (a construção de Borel). A sequência espectral converge para a cohomologia equivariante $H^*(X_G)$. Seja Λ^* a cohomologia equivariante de álgebra $H^*(\text{pt}_G) = H^*(BG; R)$ de um ponto. Suponha que X é conexo por caminhos. Logo $E_2^{*,0} = \Lambda^*$. Assumindo que $E_2^{*,0} = \dots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$, então, por definição, $i(X) = s$. Se $E_2^{*,0} = \dots = E_\infty^{*,0}$ então, por definição, $i(X) = \infty$.

Apresentamos a seguir algumas propriedades deste índice (ver [66]).

Proposição 1.31. *Sejam X, Y e Z G -espaços.*

- (i) *Se existe uma aplicação G -equivariante de X para Y , então $i(X) \leq i(Y)$.*
- (ii) *Se $\tilde{H}^j(X) = 0$ para todo $j \leq n - 1$, então $i(X) \geq n + 1$.*
- (iii) *Se $H^j(Z) = 0$ para todo $j \geq n - 1$ e $i(Z) < \infty$, então $i(Z) \leq n$.*
- (iv) *Se X é compacto ou finito dimensional e tal que $H^*(X) = H^*(S^n)$, e G age sem pontos fixos sobre X , então $i(X) = n + 1$.*

Observação 1.8.1. Pela Proposição 1.31-(ii) e pelo Teorema 1.21, temos que

$$i(X) \geq \text{conn}(X) + 2, \text{ onde } \text{conn}(X) \text{ representa a conectividade de } X. \quad (1.5)$$

1.8.2 Índice de valor ideal de Fadell-Husseini

Nesta seção, como na seção anterior, H^* denotará a cohomologia de Čech com coeficientes em um corpo \mathbb{K} , o qual não será indicado por nossa notação. Além disso, no caso em que G é um p -toro, isto é, $G = \mathbb{Z}_p^m$, para um primo p , sempre usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, e no caso em que G é um grupo conexo de Lie (por exemplo, $G = (\mathbb{S}^1)^m = \mathbb{T}^m$), usaremos $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Recordamos da Seção 1.6 que a cohomologia equivariante de um G -espaço X é definida como

$$H_G^*(X) := H^*(EG \times_G X).$$

Se $p : X \rightarrow B$ é uma projeção em um G -espaço trivial B , denotamos o *índice cohomológico* de X sobre B , também chamado o *índice de Fadell-Husseini* [22], por

$$\text{Index}_G^B(X) := \ker(H_G^*(B) \xrightarrow{p^*} H_G^*(X)) \subseteq H_G^*(B) \cong H^*(BG) \otimes H^*(B).$$

Se $B = \text{pt}$ é um ponto então $H_G^*(\text{pt}) = H^*(G)$ e $\text{Index}_G(X) := \text{Index}_G^{\text{pt}}(X)$.

O índice cohomológico tem as seguintes quatro propriedades

- Monotocidade: Se existe uma aplicação entre fibrados $X \rightarrow_G Y$ então

$$\text{Index}_G^B(X) \supseteq \text{Index}_G^B(Y).$$

- Aditividade: Se $(X_1 \cup X_2, X_1, X_2)$ é uma terna excisiva, então

$$\text{Index}_G^B(X_1) \cdot \text{Index}_G^B(X_2) \subseteq \text{Index}_G^B(X_1 \cup X_2).$$

- Joins:

$$\text{Index}_G^B(X) \cdot \text{Index}_G^B(Y) \subseteq \text{Index}_G^B(X * Y).$$

- Subfibrados: Da continuidade da cohomologia de Čech H^* segue que se existe uma aplicação entre fibrados $f : X \rightarrow_G Y$ e um subfibrado fechado $Z \subseteq Y$ então

$$\text{Index}_G^B(f^{-1}(Z)) \cdot \text{Index}_G^B(Y) \subseteq \text{Index}_G^B(X). \quad (1.6)$$

Para mais informações sobre este índice veja [23] e [22].

Capítulo 2

A versão colorida do Teorema de Tverberg

Nesse capítulo iremos falar sobre o Teorema de Tverberg e algumas de suas generalizações. Em particular daremos uma prova alternativa para a validade da Conjectura de Bárány–Larman no caso onde $r + 1$ é um primo.

2.1 O Teorema de Tverberg e suas versões topológicas

O Teorema de Radon afirma que, qualquer conjunto com $d + 2$ pontos em \mathbb{R}^d pode ser particionado em duas partes tais que seus respectivos fechos convexos se intersectam. Uma generalização dessa afirmação é conhecida como Teorema de Tverberg, que por sua vez tem um gama de variações no campo de Geometria Combinatorial.

Mais especificamente o Teorema de Radon afirma o seguinte:

Teorema 2.1 (Teorema de Radon). *Para qualquer subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^d$ com ao menos $d + 2$ elementos, existem subconjuntos disjuntos S e T de X com a propriedade de que $\text{conv}(S) \cap \text{conv}(T) \neq \emptyset$.*

O Teorema de Radon tem uma reformulação equivalente em termos de aplicação afim do $(d + 1)$ -dimensional simplexo padrão Δ_{d+1} no \mathbb{R}^d :

Teorema 2.2 (Teorema Afim de Radon). *Para toda a aplicação afim $f: \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem faces disjuntas σ e τ de Δ_{d+1} com a propriedade de $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.*

Primeiro, podemos perguntar se a hipótese da aplicação ser afim é mesmo essencial.

É suficiente assumir que f é apenas contínua?

Essa questão foi respondida por Bajmóczy & Bárány em 1979, [1], fazendo uso do teorema de Borsuk–Ulam:

Teorema 2.3 (Teorema Topológico de Radon). *Para qualquer aplicação contínua $f: \Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem faces disjuntas σ e τ do simplexo Δ_{d+1} com a propriedade que $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$.*

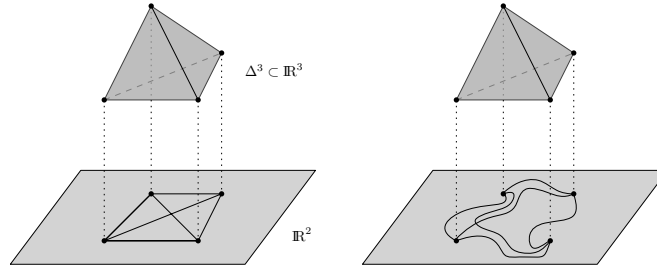


Figura 2.1: Teorema de Radon, versões afim e topológica em \mathbb{R}^2 .

Em outras palavras, o $(d + 1)$ -simplexo não pode ser mergulhado em \mathbb{R}^d sem colapsar dois pontos de faces disjuntas.

Acabamos de ver que o teorema de Radon nos garante que há duas faces do simplexo de uma determinada dimensão que devem se colapsar por uma aplicação dada. Poderíamos pedir que um número qualquer de faces se colapsem? Em caso afirmativo, qual seria a dimensão do simplexo? A resposta para essas perguntas são dadas pelo teorema de Tverberg, que generaliza o teorema de Radon.

Teorema 2.4 (Teorema de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$, qualquer conjunto com $(d + 1)(r - 1) + 1$ em \mathbb{R}^d pode ser particionado em r subconjuntos A_1, \dots, A_r de tal maneira que $\text{conv}(A_1) \cap \dots \cap \text{conv}(A_r) \neq \emptyset$. Tal partição é dita uma partição de Tverberg.*

O Teorema de Tverberg, como enunciado acima, tem uma formulação equivalente em termos de aplicações afins:

Teorema 2.5 (Teorema de Tverberg (versão afim)). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$, tomando $n = (d + 1)(r - 1)$ e dada uma aplicação afim $f: \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_n de tal maneira que*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Sabendo que a versão afim do Teorema de Tverberg é válida, surge de maneira natural o questionamento da validade do Teorema 2.5 ao pedir que f seja apenas contínua ao invés de afim. Surpreendentemente a validade de tal fato depende da divisibilidade do número r .

O questionamento da validade do Teorema 2.5 tomando f contínua ao invés de afim, ficou conhecido como Conjectura topológica de Tverberg.

Conjectura 2.6 (Conjectura topológica de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$, tomando $n = (d + 1)(r - 1)$ e dada uma aplicação contínua $f: \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^d$, existem r faces disjuntas*

$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_n de tal maneira que

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$$

.

A validade da Conjectura 2.6 foi primeiramente provada para os casos onde $d = 1$ ou $r = 2$. Com o passar dos anos a validade para os casos onde r é uma potência de um número primo também pôde ser verificada, no entanto, os casos onde r não é uma potência de um primo ficaram em aberto por décadas e chegou a ser considerado, ver [44], um dos problemas mais desafiadores na área de Topologia combinatorial. Até que em 2015, em [24], foi estabelecido que a Conjectura topológica de Tverberg não é válida quando r não é uma potência de primo e $d \geq 2r + 1$.

A seguir será detalhada a conjectura para o caso onde $d = 2$, que permanece em aberto, e logo após mostraremos como esse problema pode ser abordado por métodos topológicos.

2.1.1 O caso bidimensional

A Conjectura 2.6 é facilmente verificada para $d = 1$, porém, o caso bidimensional ($d = 2$) segue em aberto por décadas. Apresentaremos agora um estudo desse caso especial da conjectura de Tverberg.

Em [59] foi apresentada uma versão equivalente da conjectura de Tverberg a qual evidencia propriedades sobre aplicações que cumprem a afirmação da Conjectura 2.6. Para isso, foi feito uso da noção de *Número de voltas de f* (*winding number*).

Conjectura 2.7 (Conjectura de Tverberg, caso $d = 2$). *Seja $r \geq 2$, tomando $n = 3(r - 1)$ e dada uma aplicação contínua $f : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, existem r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_n de tal maneira que*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Observemos aqui que essa conjectura continua em aberto quando $r \neq p^k$, com p um primo. Assim, um contra exemplo pode aparecer com $r = 6$ e uma aplicação contínua

$$f : \Delta_{15} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

A seguir, definiremos o número de voltas de uma aplicação em relação a um ponto e a qual nos dará um sentido mais geométrico a conjectura de Tverberg.

Definição 2.8 (Número de voltas de f com respeito a um ponto). *Seja $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua e p um ponto em \mathbb{R}^d . Se a imagem de f não contém p , então f define um ciclo (singular) $[f]$ no grupo de homologia reduzida $\tilde{H}_{d-1}(\mathbb{R}^d \setminus \{p\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, e*

assim definimos o *Número de voltas de f* com respeito ao ponto p como

$$W(f, p) := [f] \in \mathbb{Z}.$$

O sinal de $W(f, p)$ depende da orientação de S^{d-1} e de \mathbb{R}^d , mas a expressão

$$“W(f, x) = 0,”$$

é independente dessa escolha. Em particular, para $d = 1$ temos que $W(f, p)$ é zero se os dois pontos $f(S^0)$ pertencem a mesma componente de $\mathbb{R} \setminus \{p\}$. Caso contrário dizemos que $W(f, p) \neq 0$.

Para qualquer d -simplexo Δ_d temos que $\partial\Delta_d = \Delta_d^{\leq d-1} \cong S^{d-1}$, o número de voltas $W(f, x)$ para aplicações $f : \partial\Delta_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e pontos $x \notin f(\partial\Delta_d)$ é definido da mesma maneira.

Novamente será bem definido dependendo da orientação mas a condição “ $W(f, x) = 0$ ” é independente de orientação.

Posto isso, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 2.9 (Conjectura do número de voltas, [59]). *Para quaisquer inteiros positivos d e q e qualquer aplicação contínua $f : \Delta_{(d+1)(q-1)}^{\leq d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem q faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ de $\Delta_{(d+1)(q-1)}^{\leq d}$ e um ponto $p \in \mathbb{R}^d$ tais que para cada i , uma das seguintes afirmações é válida:*

- $\dim(\sigma_i) \leq d - 1$ e $p \in f(\sigma_i)$,
- $\dim(\sigma_i) = d$, e $p \in f(\partial\sigma_i)$, ou $p \notin f(\partial\sigma_i)$ e $W(f|_{\partial\sigma_i}, p) \neq 0$.

Outra versão equivalente da Conjectura 2.9 é a seguinte.

Conjectura 2.10 (Conjectura do número de voltas, versão equivalente, [59]). *Dada uma aplicação contínua $f : \Delta_{(d+1)(q-1)}^{\leq d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem q faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ de $\Delta_{(d+1)(q-1)}^{\leq d}$ tais que*

$$\bigcap_{\dim(\sigma_i) < d} f(\sigma_i) \cap \bigcap_{\dim(\sigma_i) = d} W_{\neq 0}(f|_{\partial\sigma_i}) \neq \emptyset,$$

onde para uma aplicação contínua $f : \partial\Delta_d \rightarrow \mathbb{R}^d$, definimos

$$W_{\neq 0}(f) := f(\partial\Delta_d) \cup \{x \in \mathbb{R}^d \setminus f(\partial\Delta_d) : W(f, x) \neq 0\}.$$

Em [59] foi estabelecido que a Conjectura 2.10 é equivalente a conjectura de Tverberg.

Assim, se considerarmos $d = 2$ e uma aplicação contínua $f : \Delta_{3r-3}^{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$, a qual é um desenho do grafo completo K_{3r-2} no plano, pelo Teorema 2.9 temos que a conjectura de Tverberg para $d = 2$ é equivalente a validade de uma das seguintes afirmativas,

- $r - 1$ triângulos cercam um vértice, onde cada triângulo é a imagem de K_3 como subgrafo de K_{3r-2} , ou
- $r - 2$ triângulos cercam a interseção de duas arestas.

Portanto, o caso bidimensional da conjectura de Tverberg para $d = 2$ e $r = 6$ é equivalente a um problema de desenho de grafos. Mais especificamente, ao questionamento de se em todo “desenho” do grafo completo K_{16} em \mathbb{R}^2 exista: um vértice “cercado” por 5 “triângulos” ou a interseção de duas arestas “cercado” por 4 “triângulos”. Para mais detalhes ver [59].

2.2 Casos remanescentes da conjectura de Tverberg

Sabemos que a Conjectura de Tverberg não é válida quando o número de faces não é uma potência de um primo. Em [3], foi conjecturado um novo número para a dimensão do simplexo Δ , a fim de garantir que existam r faces de Δ que se intersectam sobre uma aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Provaremos nessa seção um resultado relacionado com esta nova conjectura para um caso especial.

Definição 2.11. Denotaremos por $N_r(d)$ o menor inteiro N tal que para qualquer aplicação contínua $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ existam r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N com a propriedade que

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Quando r não é uma potência de um primo a Conjectura de Tverberg não é válida e, portanto, $N_r(d) > (d+1)(r-1)$.

Temos a seguinte conjectura sobre o número $N_r(d)$.

Conjectura 2.12. *[[3], Conjecture 5.5] Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Então*

$$N_r(d) = \begin{cases} (d+1)(r-1), & \text{se } r \text{ é uma potência de um primo ou } d \leq r, \\ (d+1)r-1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostraremos agora que uma parte da Conjectura 2.12 é válida para o caso onde $r = p^n - 1$, com p um primo.

Definição 2.13. Seja X um G -espaço, onde G é um grupo finito, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Para $2 \leq k \leq |G|$ definimos o conjunto de coincidência parcial de f por

$$A(f, k) := \{x \in X \mid f(g_1x) = \dots = f(g_kx), \text{ para distintos elementos } g_1, \dots, g_k \in G.\}$$

Teorema 2.14. *[67, Theorem 4] Seja X um G -espaço, onde $G = \mathbb{Z}_p^n$ é um p -torus, e $2 \leq k \leq p^n, k \neq 3$. Assumindo que X é conexo e que $i(X) \geq (m-1)(p^n-1) + k$, então para qualquer aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ temos que $A(f, k) \neq \emptyset$.*

Lema 2.15. *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros e $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Definindo $h : (\Delta)_{\Delta(2)}^{*p^n} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ por $h(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p) = (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1))$, temos que se $A(h, r) \neq \emptyset$, então existem r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ tais que*

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Tome $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p^n} x_{p^n} \in A(h, r) \neq \emptyset$. Logo, existem $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{Z}_p^n$ tais que,

$$h(g_1 x) = \cdots = h(g_r x).$$

Assim, dentre os elementos do conjunto $\{x_1, \dots, x_{p^n}\}$, existem r elementos x_{i_1}, \dots, x_{i_r} tais que $f(x_{i_1}) = \cdots = f(x_{i_r})$.

Como $x \in (\Delta)_{\Delta(2)}^{*p^n}$, temos que $\sigma_{i_j} \cap \sigma_{i_k} = \emptyset$, onde σ_{i_m} é o suporte de x_{i_m} , se $i_j \neq i_k$.

Portanto, as faces $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r}$ são faces disjuntas de Δ , satisfazendo

$$f(\sigma_{i_1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{i_r}) \neq \emptyset.$$

□

Teorema 2.16. *Sejam $d \geq 1$ um inteiro e $r = p^n - 1$, onde p é um primo. Então*

$$N_r(d) \leq (d+1)r - 1.$$

Demonstração. Tome $N = (d+1)r - 1$ e $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua.

Pelo Lema 2.15, se $A(h, r) \neq \emptyset$, então existem r faces disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N tais que

$$f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset,$$

onde $h : (\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*p^n} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ é dada por $h(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p^n} x_{p^n}) = (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1))$.

Por outro lado, como a conectividade de $(\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*p^n}$ é $N - 1$, ver [44], da Observação 1.8.1 temos que $i((\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*p^n}) \geq N + 1 = (d+1)r$.

Assim, pelo Teorema 2.14 concluímos que $A(h, r) \neq \emptyset$, pois

$$i((\Delta_N)_{\Delta(2)}^{*p^n}) \geq N + 1 = (d+1)r = d(p^n - 1) + r.$$

□

2.3 O Problema de Bárány-Larman

O teorema de Tverberg nos garante a existência de uma partição de Tverberg, porém, podemos nos perguntar o que acontece ao restringirmos as partições de um conjunto de pontos X , pedindo que as partições tenham pontos de diferentes partes de X . Tais tipos de problemas são denominados versões coloridas do teorema de Tverberg.

O principal problema em aberto nessa direção é a conjectura de Bárány–Larman, na qual é atribuída uma coloração ao conjunto de pontos. Para maiores informações ver em [4].

Definição 2.17. Sejam $N \geq 1$ um inteiro e \mathcal{C} o conjunto dos vértices do simplexo Δ_N .

- Uma *coloração* do conjunto dos vértices \mathcal{C} por ℓ cores é uma partição (C_1, \dots, C_ℓ) de \mathcal{C} , de tal modo que $\mathcal{C} = C_1 \cup \dots \cup C_\ell$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq \ell$.
- Os elementos da partição (C_1, \dots, C_ℓ) são chamados *classe de cores*.
- Uma face σ do simplexo Δ_N é uma face *colorida* se $|\sigma \cap C_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq \ell$.
- O subcomplexo de todas as faces coloridas do simplexo Δ_N induzido pela coloração (C_1, \dots, C_ℓ) será denotado por $R_{(C_1, \dots, C_\ell)}$ e será chamado de *subcomplexo colorido*.

Problema 2.18 (O problema de Bárány-Larman / O problema colorido de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Determine o menor número $n = n(d, r)$ tal que, para toda aplicação afim(contínua) $f : \Delta_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices \mathcal{C} do simplexo Δ_{n-1} por $d + 1$ cores, sendo o tamanho de cada cor ao menos r , existam r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_{n-1} cujas f -imagens se interseccionam, isto é*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Notemos que um limitante inferior para a função $n(d, r)$ é $(d + 1)r$ e, portanto, é natural a seguinte conjectura.

Conjectura 2.19 (Conjectura de Bárány-Larman). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Então $n(d, r) = (d + 1)r$.*

Apesar de parecer uma generalização, a conjectura de Bárány-Larman não implica diretamente na conjectura de Tverberg, entretanto, em [6] foi formulado um teorema que generaliza ambas as conjecturas, para o caso onde r é um primo, e foi nomeado Teorema ótimo colorido de Tverberg.

Teorema 2.20 (Teorema ótimo colorido de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$, $r \geq 2$ um primo, $N \geq (d + 1)(r - 1)$ e consideremos $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Se os vértices do simplexo Δ_N são coloridos por m cores, onde cada classe de cor tem cardinalidade no máximo $r - 1$, então existem r faces coloridas e disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ_N tais que,*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Proposição 2.21. *O Teorema ótimo colorido de Tverberg para r um primo, implica na validade da Conjectura de Bárány-Larman para $r - 1$.*

Demonstração. Sejam $d \geq 1$ um inteiro, $r \geq 2$ um primo, uma dada aplicação contínua $f : \Delta_{(d+1)(r-1)-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ e uma coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices \mathcal{C} do simplexo $\Delta_{(d+1)(r-1)-1}$ por $d+1$ cores, sendo $|C_i| = r$ para $1 \leq i \leq d+1$.

Consideremos o simplexo Δ' como uma pirâmide sobre $\Delta_{(d+1)(r-1)-1}$, e tomando C_{d+2} sendo uma classe de cor adicional contendo apenas o ápice da pirâmide, temos que (C_1, \dots, C_{d+2}) é uma coloração dos vértices do simplexo Δ' .

Por outro lado, podemos considerar $f' : \Delta' \rightarrow \mathbb{R}^d$, uma extensão de f e então o Teorema 2.20 nos garante a existência de r faces coloridas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ' , tais que

$$f'(\sigma_1) \cap \dots \cap f'(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que σ_r contém o vértice adicionado que pertence a C_{d+2} , assim temos que $\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}$ são faces de $\Delta_{(d+1)(r-1)-1}$ e satisfazem

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_{r-1}) \neq \emptyset.$$

Em outras palavras, provamos que $n(d, r-1) = (d+1)(r-1)$ e por conseguinte que a Conjectura de Bárány-Larman é válida para $r-1$, onde r é um primo. \square

2.4 O caso p primo

A Conjectura de Bárány-Larman foi provada apenas quando o parâmetro $r+1$ é um número primo e o Teorema ótimo colorido de Tverberg foi provado apenas no caso onde r é primo. Esses resultados foram provados em [4] usando ferramentas de topologia algébrica, em particular sequência espectral. Até o momento não há uma prova não topológica para essas conjecturas, se $r \geq 3$. Vale ressaltar que essa conjectura permanece em aberto para os demais casos e mesmo quando a aplicação f é considerada afim.

Portanto, um contraexemplo da conjectura de Bárány-Larman poderia aparecer ao considerarmos $d=2$ e $r=3$.

Daremos a seguir uma prova alternativa à prova dada em [4] para esses resultados, mais especificamente, mostraremos usando uma estratégia diferente, o seguinte fato: $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1} = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p)$, onde p é um número primo. O espaço $\Delta_{p,p-1}$ está definido a seguir.

Definição 2.22. O $m \times n$ complexo chessboard $\Delta_{m,n}$ é o complexo simplicial cujo conjunto de vértices é $[m] \times [n]$, e onde o conjunto de vértices $\{(i_0, j_0), \dots, (i_k, j_k)\}$ gera um k -simplexo se, e somente se, $\prod_{0 \leq a < b \leq k} (i_a - i_b)(j_a - j_b) \neq 0$. Portanto, $\Delta_{m,n}$ é isomorfo a $[n]_{\Delta(2)}^{*m}$.

Definição 2.23. W_r é o subespaço de \mathbb{R}^r definido por,

$$W_r := \{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r t_i = 0\}.$$

O seguinte teorema relaciona a existência de uma aplicação equivariante entre determinados espaços à existência de uma partição de Tverberg colorida.

Teorema 2.24. *Seja (C_1, \dots, C_m) uma coloração do simplexo Δ por m cores. Se não existe aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante*

$$\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_m|,r} \cong (R_{(C_1, \dots, C_m)})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}),$$

então para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ cujas f -imagens se interseccionam,

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponhamos que $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ seja um contraexemplo para o teorema acima, portanto, podemos definir uma aplicação join como segue,

$$J_f : (\Delta)_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \mapsto (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1)) \oplus \dots \oplus (\lambda_r, \lambda_r f(x_r)).$$

Tanto o domínio quanto o contradomínio da aplicação J_f são munidos de ação do grupo simétrico \mathfrak{S}_r de tal maneira que J_f é uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante. O join deletado do complexo colorido $(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}$ é um subcomplexo \mathfrak{S}_r -invariante de $(\Delta)_{\Delta(2)}^{*r}$. Assim, a restrição

$$J'_f := J_f|_{(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}} : (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$$

é também uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante.

Tome a diagonal

$$D_J = \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} : z_1 = \dots = z_r\},$$

que é um subespaço \mathfrak{S}_r -invariante de $(\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r}$. Com isso, a aplicação J'_f tem a propriedade de que, para qualquer aplicação contínua que seja um contraexemplo $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, tem-se $\text{im}(J'_f) \cap D_J = \emptyset$. Assim J'_f induz uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \quad (2.1)$$

a qual denotaremos mais uma vez por J'_f . Além disso, tome

$$R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \rightarrow D_J^\perp \setminus \{0\} \rightarrow S(D_J^\perp) \quad (2.2)$$

sendo uma composição de uma projeção e um retrato por deformação. Assim, a aplicação R_J é \mathfrak{S}_r -equivariante. Também temos que existe um isomorfismo de \mathfrak{S}_r -representações reais $D_J^\perp \cong W_r^{\oplus(d+1)}$, onde $W_r = \{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r t_i = 0\}$ e é provido de ação a esquerda pelo grupo simétrico \mathfrak{S}_r dada por permutação das coordenadas. Logo, a aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante R_J definida em (2.2) tem a seguinte forma

$$R_J : (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus r} \setminus D_J \rightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}). \quad (2.3)$$

Portanto, a composição de J'_f com R_J é uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante.

Em suma, a existência de uma aplicação f que seja um contraexemplo para o teorema, implica na existência de uma aplicação \mathfrak{S}_r -equivariante

$$(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}). \quad (2.4)$$

□

Vejam agora que a não existência de uma determinada aplicação equivariante implica a validade da conjectura de Bárány-Larman.

Teorema 2.25. *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ inteiros. Se não existe aplicação \mathfrak{S}_{r+1} -equivariante*

$$\Delta_{r,r+1}^{*(d+1)} * [r+1] \rightarrow S(W_{r+1}^{\oplus(d+1)}),$$

então $n(d, r) = (d+1)r$.

Demonstração. Seja (C_1, \dots, C_{d+1}) uma coloração dos vértices do simplexo Δ com $|C_1| = \dots = |C_{d+1}| = r$, e $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Considerando o simplexo Δ' como uma pirâmide sobre Δ , e tomando C_{d+2} sendo uma classe de cor adicional contendo apenas o ápice da pirâmide. Assim, (C_1, \dots, C_{d+2}) é uma coloração dos vértices do simplexo Δ' .

Vamos assumir que não exista uma aplicação \mathfrak{S}_{r+1} -equivariante $\Delta_{r,r+1}^{*(d+1)} * [r+1] \rightarrow S(W_{r+1}^{\oplus(d+1)})$. A não existência de tal aplicação juntamente com o Teorema 2.24 implica que existem $r+1$ faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_{r+1}$ do simplexo Δ' cujas f -imagens se interseccionam, $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_{r+1}) \neq \emptyset$.

Sem perda de generalidade nós podemos assumir que $\sigma_{r+1} \cap C_{d+2} \neq \emptyset$. Então, as faces $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são faces coloridas do simplexo Δ com respeito a coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) e

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Assim, $n(d, r) = (d+1)r$. □

Na sequência vamos desenvolver as ferramentas necessárias para cálculo de $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1}$.

Lema 2.26. [4, Lemma 6.5] *Seja p um primo ímpar. Existe uma aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante $f : \Delta_{p-1,p} \rightarrow S(W_p)$ tal que, sua induzida em cohomologia $f^* : H^{p-2}(S(W_p); \mathbb{F}) \rightarrow H^{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{F})$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ a base canônica de \mathbb{R}^p , $\mathbf{e} := \frac{1}{p}(\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_p)$ e $v_i := \mathbf{e}_i - \mathbf{e}$ para $1 \leq i \leq p$. Denote agora por $\Delta_{p-1} \subseteq W_p$ o simplexo $\text{conv}\{v_1, \dots, v_p\}$, o qual é invariante com respeito a ação do grupo cíclico \mathbb{Z}/p . Com isso, temos que seu bordo $\partial\Delta_{p-1}$ é equivalentemente homeomorfo a esfera de representação $S(W_p)$.

Defina a aplicação contínua $f : \Delta_{p-1,p} \rightarrow \partial\Delta_{p-1} \cong S(W_p)$ sendo a aplicação simplicial \mathbb{Z}/p -equivariante dada sobre o conjunto de vértices de $\Delta_{p-1,p}$ por $(i, j) \mapsto v_j$, onde $(i, j) \in [p-1] \times [p]$. Agora, resta provar que $f^* : H^{p-2}(S(W_p); \mathbb{F}_p) \rightarrow H^{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{F}_p)$ é um isomorfismo.

Desde que $p \geq 3$, o complexo chessboard $\Delta_{p-1,p}$ é uma pseudo-variedade de dimensão $p-2$, conexa e orientável, ver em [39, p. 145]. Portanto, $H_{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e uma classe de orientação é dada pela cadeia

$$z_{p-1,p} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} (\text{sgn } \pi) \langle (1, \pi(1)), \dots, (p-1, \pi(p-1)) \rangle.$$

Então sobre o nível de cadeia, temos que

$$\begin{aligned} f_{\#}(z_{p-1,p}) &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} (\text{sgn } \pi) \langle v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p-1)} \rangle = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} (\text{sgn } \pi) \langle v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p-1)}, \widehat{v_{\pi(p)}} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p: \pi(p)=k} (-1)^{p+k} (\text{sgn } \pi)^2 \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_p \rangle \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p: \pi(p)=k} \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_p \rangle = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} (p-1)! \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_p \rangle \\ &= (p-1)! \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_p \rangle. \end{aligned}$$

Lembremos que p é um primo ímpar. A cadeia $\sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_p \rangle$ é um gerador da homologia top da esfera $\partial\Delta_{p-1} \cong S(W_p)$. Portanto, a aplicação induzida em homologia

$$f_* : H_{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{p-2}(S(W_p); \mathbb{Z})$$

é justamente a multiplicação por $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Usando a naturalidade do isomorfismo de coeficientes universais [10, Cor. 7.5] nós temos que a aplicação induzida em homologia com coeficientes no corpo \mathbb{F}_p

$$f_* : H_{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_{p-2}(S(W_p); \mathbb{F}_p)$$

é também a multiplicação por $(p-1)!$. Por serem $(p-1)!$ e p primos entre si, a multiplicação

por $(p-1)!$ é um isomorfismo. Usando ainda o isomorfismo de coeficientes universais [10, Cor. 7.2] para os coeficientes em um corpo nós temos que a aplicação induzida em cohomologia com coeficientes em \mathbb{F}_p

$$f^* : H^{p-2}(S(W_p); \mathbb{F}_p) \rightarrow H^{p-2}(\Delta_{p-1,p}; \mathbb{F}_p)$$

é um isomorfismo. □

O teorema a seguir foi provado em [29].

Teorema 2.27. [29, Lemma 3] *Seja X um espaço Hausdorff, conexo, localmente conexo por caminhos e G um grupo finito atuando livremente em X . Temos que, $\forall i \geq 0$ e R anel com identidade, existe um homomorfismo transfer*

$$\tau_X : H^i(X; R) \longrightarrow H^i(X/G; R)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) *Se X for um G -CW complexo de dimensão k , então $H^k(X; R) \longrightarrow H^k(X/G; R)$ é sobrejetor.*
- ii) *Se Y for um espaço nas mesmas hipóteses de X , $h : X \rightarrow Y$ sendo uma aplicação G -equivariante e $\bar{h} : X/G \rightarrow Y/G$ a induzida de h , então $\tau_X \circ h^* = \bar{h}^* \circ \tau_Y$.*

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y) & \xrightarrow{h^*} & H^i(X) \\ \tau_Y \downarrow & & \downarrow \tau_X \\ H^i(Y/G) & \xrightarrow{\bar{h}^*} & H^i(X/G) \end{array}$$

Figura 2.2: Diagrama 1

A seguir, apresentamos o principal resultado que nos fornece uma prova alternativa da Conjectura de B\'ar\'any–Larman.

Teorema 2.28. $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1} = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p)$.

Demonstração. Como f é equivariante, seja $\bar{f} : \Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p \rightarrow S(W_p)/\mathbb{Z}_p$ a induzida nos espaços de órbitas. Mais ainda, se $q' : S(W_p)/\mathbb{Z}_p \rightarrow B\mathbb{Z}_p$ é aplicação classificante para o \mathbb{Z}_p fibrado principal $S(W_p) \rightarrow S(W_p)/\mathbb{Z}_p$, então $q' \circ \bar{f} : \Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p \rightarrow B\mathbb{Z}_p$ é uma aplicação classificante para o \mathbb{Z}_p -fibrado principal $\Delta_{p,p-1} \rightarrow \Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p$.

Sejam

$$\tau_{S(W_p)} : H^{p-2}(S(W_p)) \rightarrow H^{p-2}(S(W_p)/\mathbb{Z}_p)$$

e

$$\tau_{\Delta_{p,p-1}} : H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}) \rightarrow H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p)$$

os homomorfismos transfer definidos no Teorema 2.27.

Mais ainda, como f é equivariante, pelo Teorema 2.27-(ii) temos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^{p-2}(S(W_p)) & \xrightarrow{f^*} & H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}) \\ \tau_{S(W_p)} \downarrow & & \downarrow \tau_{\Delta_{p,p-1}} \\ H^{p-2}(S(W_p)/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Figura 2.3: Diagrama 2

ou seja,

$$\tau_{\Delta_{p,p-1}} \circ f^* = \bar{f}^* \circ \tau_{S(W_p)}. \quad (2.5)$$

Segue do Lema 2.26, que f^* é um isomorfismo. Do Teorema 2.27-(ii), o homomorfismo transfer $\tau_{\Delta_{p,p-1}}$ é sobrejetor e concluimos que a composição $\tau_{\Delta_{p,p-1}} \circ f^*$ não é o homomorfismo nulo, ou seja,

$$\tau_{\Delta_{p,p-1}} \circ f^* \neq 0. \quad (2.6)$$

Assim, de (2.5) e (2.6), temos $0 \neq \tau_{\Delta_{p,p-1}} \circ f^* = \bar{f}^* \circ \tau_{S(W_p)}$, implicando que o homomorfismo \bar{f}^* é não trivial, ou seja,

$$\bar{f}^* \neq 0. \quad (2.7)$$

Agora consideremos o seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} H^{p-2}(S(W_p)) & \xrightarrow{f^*} & H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}) \\ \tau_{S(W_p)} \downarrow & & \downarrow \tau_{\Delta_{p,p-1}} \\ H^{p-2}(S(W_p)/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & H^{p-2}(\Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p) \\ & \swarrow q^* & \nwarrow q^* \\ & H^{p-2}(B\mathbb{Z}_p) & \end{array}$$

Figura 2.4: Diagrama 3

onde q e q' são aplicações classificantes.

Além disso, sabemos que $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p)$, e portanto temos que

$$\text{o homomorfismo } q^* \text{ no nível } p-2 \text{ é um isomorfismo.} \quad (2.8)$$

De (2.7), (2.8) e o Diagrama 3, concluímos que

$$\text{o homomorfismo } q^* \text{ no nível } p-2 \text{ é um isomorfismo.} \quad (2.9)$$

Temos que o gerador $\mu \in H^i(B\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ é da forma

$$\mu = \begin{cases} xy^{(i-1)/2}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ y^{i/2}, & \text{se } i \text{ é par,} \end{cases}$$

onde $x \in H^1(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ e $y \in H^2(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ são os geradores nos níveis 1 e 2, respectivamente. Deste modo, de (2.9) segue que

$$q^*(xy^{p-3/2}) \neq 0. \quad (2.10)$$

Como $f : \Delta_{p-1,p} \rightarrow S(W_p)$ é equivariante, temos que

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p) \subseteq \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1}. \quad (2.11)$$

Consideremos agora a aplicação $q^* : H^i(B\mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(\Delta_{p,p-1}/\mathbb{Z}_p)$, onde $i < p-2$, e mostremos que q^* é não nula e, portanto, $\ker(q^*) = 0$, para todo $i < p-2$. Deste modo, temos que

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1} = \ker(q^*) \subseteq H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p), \quad (2.12)$$

e concluímos o resultado

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p,p-1} = H^{\geq p-1}(B\mathbb{Z}_p).$$

De fato, se i é ímpar suponha que

$$q^*(xy^{(i-1)/2}) = 0. \quad (2.13)$$

Assim,

$$\begin{aligned} q^*(xy^{(p-3)/2}) &= q^*(xy^{(i-1)/2}y^{(p-i-2)/2}) \\ &= q^*(xy^{(i-1)/2})q^*(y^{(p-i-2)/2}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que contraria (2.10).

Se i é par, suponha que

$$q^*(y^{i/2}) = 0. \quad (2.14)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} q^*(xy^{(p-3)/2}) &= q^*(xy^{(p-i-3)/2}y^{i/2}) \\ &= q^*(xy^{(p-i-3)/2})q^*(y^{i/2}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

contrariando (2.10). □

Usando as propriedades do join e do índice temos o seguinte:

Corolário 2.29. *Seja $m \geq 1$ um inteiro. Então*

- (i) $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} \Delta_{p-1,p}^{*m} = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus m}) = H^{\geq m(p-1)}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p)$,
- (ii) $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (\Delta_{p-1,p}^{*m} * [p]) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (S(W_p^{\oplus m}) * [p]) = H^{\geq m(p-1)+1}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p)$,
- (iii) $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (\Delta_{p-1,p}^{*m} * \Delta_{2p-1,p}) = \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (S(W_p^{\oplus m}) * [p]^{*p-1}) = H^{\geq m(p-1)+p}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p)$.

A conjectura de B\'ar\'any-Larman e o teorema \u00f3timo colorido de Tverberg

Apresentamos uma prova para a validade da Conjectura 2.19 para o caso onde $r + 1 = p$, com p um primo.

Teorema 2.30. *Seja $d \geq 1$ um inteiro e p um primo \u00edmpar. N\u00e3o existe aplica\u00e7\u00e3o \mathfrak{S}_p -equivariante*

$$\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p] \rightarrow S(W_{r+1}^{\oplus(d+1)}).$$

Demonstra\u00e7\u00e3o. \u00c9 suficiente provar que n\u00e3o existe aplica\u00e7\u00e3o \mathbb{Z}_p -equivariante $\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p] \rightarrow S(W_p^{\oplus(d+1)})$, onde \mathbb{Z}_p \u00e9 um subgrupo do grupo de simetrias \mathfrak{S}_p gerado pelo ciclo $(12 \dots p)$. Na prova usaremos a monotocidade do \u00edndice de Fadell-Husseini.

Assim, como o $\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus(d+1)}) = \langle b \rangle$, para um apropriado b , e pela propriedade do join de esferas, o \u00edndice da esfera $S(W_p^{\oplus(d+1)})$ \u00e9

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus(d+1)}) = \langle t^{(d+1)(p-1)/2} \rangle = H^{\geq (d+1)(p-1)}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p).$$

Usando o Corol\u00e1rio 2.29 n\u00f3s temos que

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p]) = H^{\geq (d+1)(p-1)+1}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p),$$

e conseq\u00fcentemente $t^{(d+1)(p-1)/2} \notin \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p])$. Assim,

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus(d+1)}) \not\subseteq \text{Index}_{\mathbb{Z}_p} (\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p]),$$

implicando que uma aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante $\Delta_{p-1,p}^{*(d+1)} * [p] \rightarrow S(W_p^{\oplus(d+1)})$ não pode existir. \square

Um corolário direto dos Teoremas 2.25 e 2.30 é que a Conjectura de Bárány–Larman vale para todo o inteiro r tal que $r + 1$ é um primo.

Corolário 2.31 (A Conjectura de Bárány–Larman para primos -1). *Seja $r \geq 2$ e $d \geq 1$ inteiros tais que, $r + 1 =: p$ é um primo. Então $n(d, r) = (d + 1)r$.*

Demonstração. Provaremos a validade da Conjectura de Bárány–Larman para o caso onde $r + 1 = p$ com p um primo e r é o número de faces coloridas que devem se colapsar por uma aplicação contínua.

Pelo Teorema 2.30, se $d \geq 1$ é um inteiro e p um primo ímpar, então não existe aplicação \mathfrak{S}_{r+1} -equivariante

$$\Delta_{r,r+1}^{*(d+1)} * [r + 1] \rightarrow S(W_{r+1}^{\oplus(d+1)}).$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.25, se não existe aplicação \mathfrak{S}_{r+1} -equivariante

$$\Delta_{r,r+1}^{*(d+1)} * [r + 1] \rightarrow S(W_{r+1}^{\oplus(d+1)}),$$

então $n(d, r) = (d + 1)r$. \square

Teorema 2.32 (Teorema ótimo colorido de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$, $p \geq 2$ um primo, $N \geq (d + 1)(p - 1)$ e consideremos $f : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma aplicação contínua. Se os vértices do simplexo Δ_N são coloridos por m cores (C_1, \dots, C_m) , onde cada classe de cor tem cardinalidade no máximo $p - 1$, então existem p faces coloridas e disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ de Δ_N tais que,*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_p) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Do Teorema 2.24, a fim de provarmos o Teorema ótimo colorido de Tverberg, nas hipóteses acima, basta mostrarmos que não existe aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante

$$\Delta_{|C_1|,p} * \dots * \Delta_{|C_m|,p} \rightarrow S(W_p^{\oplus(d+1)}).$$

Como acabamos de calcular na prova do Teorema 2.30, temos que

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus(d+1)}) = \langle t^{(d+1)(p-1)/2} \rangle = H^{\geq(d+1)(p-1)}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p).$$

Por [4, Cor. 6.10] e observando que $\sum_{i=1}^m |C_i| = N + 1 \geq (d + 1)(p - 1) + 1$, temos que

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{|C_1|,p} * \dots * \Delta_{|C_m|,p}) = H^{\geq N+1}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p) \subseteq H^{\geq(d+1)(p-1)+1}(\mathbb{B}(\mathbb{Z}_p); \mathbb{F}_p),$$

e conseqüentemente $t^{(d+1)(p-1)/2} \notin \text{Index}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{|C_1|,p} * \cdots * \Delta_{|C_m|,p})$. Assim,

$$\text{Index}_{\mathbb{Z}_p} S(W_p^{\oplus(d+1)}) \not\subseteq \text{Index}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{|C_1|,p} * \cdots * \Delta_{|C_m|,p}),$$

implicando que uma aplicação \mathbb{Z}_p -equivariante $\Delta_{|C_1|,p} * \cdots * \Delta_{|C_m|,p} \rightarrow S(W_p^{\oplus(d+1)})$ não pode existir. \square

Capítulo 3

Generalizações do Teorema Colorido de Tverberg

Como vimos no capítulo anterior, a conjectura de Bárány–Larman foi provada apenas para o caso onde $r + 1 = p$, com p um primo, mostrando-se um problema complexo.

Com isso, no decorrer dos anos surgiram várias versões fracas da referida conjectura, uma delas é o Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica, o qual flexibiliza o tamanho das classes de cores na conjectura de Bárány–Larman e foi provado para o caso onde r é uma potência de um primo.

Neste capítulo, iremos mostrar que a flexibilização imposta no Tverberg de Živaljević e Vrećica pode ser mais justa do que originalmente requerida.

Além disso, exibiremos uma versão da conjectura de Bárány–Larman, a qual generaliza o Tverberg de Živaljević e Vrećica, onde o parâmetro r pode tomar qualquer valor inteiro positivo.

3.1 Generalização do Teorema Colorido de Tverberg

Em [71], foi provada uma versão da conjectura de Bárány–Larman exigindo que o tamanho de cada classe de cor seja ao menos $2r - 1$ ao invés de ao menos r . Tal versão ficou conhecida como Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica.

Teorema 3.1 (Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica). *Sejam $d \geq 1$ um inteiro e $r \geq 2$ uma potência de um primo. Dada qualquer aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e uma coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices \mathcal{C} do simplexo Δ por $d + 1$ cores, sendo o tamanho de cada cor ao menos $2r - 1$, existem r faces coloridas duas a duas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ cujas f -imagens se interseccionam, isso é*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Sabendo que o Teorema topológico colorido de Tverberg é válido, desde que o tamanho de cada cor seja ao menos $2r - 1$, onde r é uma potência de primo, mostraremos agora, através de outros métodos, que é possível restringir um pouco mais o tamanho das cores, pedindo então que apenas uma cor tenha ao menos tamanho $2r - 1$, onde as restantes devem ter ao menos tamanho $2r - 4$.

Teorema 3.2 (Generalização do Teorema Colorido de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 2$ uma potência de primo. Para toda aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e toda coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices C do simplexo Δ por $d + 1$ cores, sem perda de generalidade, suponhamos que a cardinalidade de C_1 é ao menos $2r - 1$ e as demais cores tenham cardinalidade ao menos $2r - 4$. Então, existem r faces coloridas disjuntas $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de Δ satisfazendo,*

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.24, basta mostrarmos que não existe uma aplicação equivariante,

$$\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r} \cong (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})}_{\Delta(2)})^{*r} \rightarrow S(W_r^{\oplus(d+1)}).$$

Da Proposição 1.31-(i), sabemos que não pode existir uma aplicação equivariante onde o índice do domínio é maior que o índice do contradomínio de tal aplicação. Portanto, basta mostrarmos que $i(\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) > i(S(W_r^{\oplus(d+1)}))$.

Pela Proposição 1.31-(ii), temos que

$$i(X) \geq \text{conn}(X) + 2, \text{ onde } \text{conn}(X) \text{ representa a conectividade de } X. \quad (3.1)$$

Mais ainda, por [8], temos que a conectividade do complexo chessboard $\Delta_{m,n}$ é o mínimo entre $\{m, n \lfloor \frac{m+n+1}{3} \rfloor\}$ menos 2, ou seja,

$$\text{conn}(\Delta_{m,n}) = \min \left\{ m, n \left\lfloor \frac{m+n+1}{3} \right\rfloor \right\} - 2. \quad (3.2)$$

Também sabemos do Lema 1.22, que $\text{conn}(X * Y) \geq \text{conn}(X) + \text{conn}(Y) + 2$, e assim obtemos o seguinte,

$$\text{conn}(\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) \geq \sum_{j=1}^{d+1} \text{conn}(\Delta_{|C_j|,r}) + 2d. \quad (3.3)$$

Assim, por (3.2) temos que

$$\begin{aligned}
\text{conn}(\Delta_{|C_1|,r}) &= \min \left\{ |C_1|, r, \left\lfloor \frac{|C_1| + r + 1}{3} \right\rfloor \right\} - 2 \\
&= \min \left\{ 2r - 1, r, \left\lfloor \frac{2r - 1 + r + 1}{3} \right\rfloor \right\} - 2 \\
&= r - 2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{conn}(\Delta_{|C_j|,r}) &= \min \left\{ |C_j|, r, \left\lfloor \frac{|C_j| + r + 1}{3} \right\rfloor \right\} - 2 \\
&= \min \left\{ 2r - 4, r, \left\lfloor \frac{2r - 4 + r + 1}{3} \right\rfloor \right\} - 2 \\
&= r - 3,
\end{aligned}$$

para todo $2 \leq j \leq d + 1$.

Ou seja,

$$\text{conn}(\Delta_{|C_j|,r}) = \begin{cases} r - 2, & \text{se } j = 1 \\ r - 3, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim, por (3.3) e (3.4) temos que

$$\begin{aligned}
\text{conn}(\Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) &\geq \sum_{j=1}^{d+1} \text{conn}(\Delta_{|C_i|,r}) + 2d \\
&= (r - 2) + d(r - 3) + 2d \\
&= (d + 1)(r - 3) + 2d + 1 \\
&= (d + 1)(r - 1) - 1.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo, usando (3.1) e (3.5) temos o seguinte

$$i(\Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) \geq (d + 1)(r - 1) + 1.$$

Portanto, como

$$i(S(W_r^{\oplus(d+1)})) = (d + 1)(r - 1),$$

da Proposição 1.31-(iv), concluímos que,

$$i(\Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) \geq (d + 1)(r - 1) + 1 > (d + 1)(r - 1) = i(S(W_r^{\oplus(d+1)})),$$

como desejávamos. □

3.2 Uma Versão da Conjectura Colorida de Tverberg

Até o momento, a validade da Conjectura colorida de Tverberg foi verificada apenas no caso quando o número de faces, somando um, é um número primo. Notemos que mesmo o caso discreto desse teorema só foi provado para o caso citado.

Em [71], foi provada uma versão da conjectura de Bárány–Larman exigindo que o tamanho de cada classe de cor seja ao menos $2r - 1$ ao invés de ao menos r . Tal versão ficou conhecida como Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica.

Nessa seção, iremos exibir uma versão da conjectura de Bárány–Larman, a qual, generaliza o Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica.

Teorema 3.3 (Uma Versão da Conjectura Colorida de Tverberg). *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 1$ inteiros, onde $r = s \cdot p^k$ com p um primo. Dada qualquer aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e qualquer coloração (C_1, \dots, C_{d+1}) do conjunto de vértices C do simplexo Δ por $d + 1$ cores, onde a cardinalidade de cada conjunto C_i seja ao menos $2r - 1$, existem s conjuntos $F_i = \{\sigma_{i,j}; 1 \leq j \leq p^k\}$ com $1 \leq i \leq s$, tais que as faces $\sigma_{i,j}$ são coloridas e disjuntas, satisfazendo*

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{i,p^k}) \neq \emptyset,$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

Para obter esse resultado, iremos fazer uso do seguinte lema.

Consideremos G um grupo finito agindo livremente sobre um espaço X , $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e H um subgrupo de G .

Definição 3.4. Um ponto $x \in X$ é dito ponto de (H, G) -coincidência de f se f aplica cada órbita de uma ação de H (sobre a G -órbita de x), em um único ponto.

Denotaremos por $A(f, H, G)$ o conjunto de todos os pontos de (H, G) -coincidência de f .

Lema 3.5. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ uma aplicação contínua. Supondo que $i(X) \geq N \geq (d + 1)(r - s)$, onde $s = r/p^k$, com p^k uma potência de primo que divide r . Então*

$$i(A(f, \mathbb{Z}_p^k, G)) \geq N - (d + 1)(r - s)$$

Demonstração. Denotaremos por a_1, \dots, a_p um conjunto de representantes das classes laterais de G/\mathbb{Z}_p^k . Consideremos a aplicação $F : X \rightarrow \mathbb{R}^{p(d+1)}$ definida por

$$F = (f_1 \times \dots \times f_s) \circ D,$$

onde $D : X \rightarrow X^p$ é a aplicação diagonal e $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ é dada por $f_i(x) = f(a_i x)$, $i = 1, \dots, p$.

Temos que, $F^* : H^i(\mathbb{R}^{d+1}; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z}_p)$ é nula para $i \geq 1$, portanto, o índice de $A(F) = \{x \in X : F(x) = F(gx), \forall g \in \mathbb{Z}_p^k\}$ é maior ou igual que $N - s(d+1)(p^k - 1)$, por [64, Theorem 1]. Desde que, $A(F) \subset A(f, \mathbb{Z}_p^k, G)$ e pela inclusão $A(F) \hookrightarrow A(f, \mathbb{Z}_p^k, G)$ ser uma aplicação equivariante, temos que $i(A(f, \mathbb{Z}_p^k, G)) \geq i(A(F))$. Portanto,

$$i(A(f, \mathbb{Z}_p^k, G)) \geq N - (d+1)(r-s).$$

□

Demonstração do Teorema 3.3. Seja G o grupo simétrico de r elementos. Consideremos a ação de G em $(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}$ por permutação das coordenadas, a qual é uma ação livre.

Tome $F : (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ dada por $F(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r) = (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1))$.

Agora, calcularemos a conectividade de $\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}$, pois $(R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r} \cong \Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}$.

Temos que,

$$\begin{aligned} \text{conn}(\Delta_{|C_1|,r} * \dots * \Delta_{|C_{d+1}|,r}) &\geq \sum_{j=1}^{d+1} \text{conn}(\Delta_{|C_j|,r}) + 2d \\ &= (d+1)(r-2) + 2d \\ &= (d+1)r - 2. \end{aligned}$$

Assim, $i((R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}) \geq (d+1)r$.

Portanto, pelo Lema 3.5, temos que

$$i(A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)) \geq (d+1)r - (d+1)(r-s) > 0.$$

Em particular $A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)$ é não vazio.

Portanto, podemos tomar $y = (y_1, \dots, y_r) \in A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)$.

Ao tomarmos $\mathbb{Z}_p^k = \{h_1, \dots, h_{p^k}\}$ e denotando por a_1, \dots, a_s um conjunto de representantes da classe lateral de G/\mathbb{Z}_p^k , temos que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{p^k}$$

e

$$\lambda_1 F(a_i h_1^{-1} \cdot y) = \dots = \lambda_{p^k} F(a_i h_{p^k}^{-1} \cdot y).$$

Portanto,

$$F(a_i h_1^{-1} \cdot y) = \dots = F(a_i h_{p^k}^{-1} \cdot y), 1 \leq i \leq s.$$

Assim,

$$f(y_{\tau_{i1}(1)}) = \cdots = f(y_{\tau_{ip^k}(1)}), 1 \leq i \leq s,$$

onde τ_{mn} é uma permutação.

Como $y \in (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}$, então para cada $i \neq i'$ ou $j \neq j'$ temos que $y_{\tau_{ij}(1)}$ e $y_{\tau_{i'j'}(1)}$ estão em suportes disjuntos. Logo, denotando por $\sigma_{i,j}$ a face que consiste no suporte de $y_{\tau_{ij}(1)}$, concluímos que

$$\sigma_{i,j} \neq \sigma_{i',j'},$$

para cada $i \neq i'$ ou $j \neq j'$.

Deste modo, os conjuntos $F_i = \{\sigma_{i,j}; 1 \leq j \leq p^k\}$ satisfazem que

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{i,p^k}) \neq \emptyset,$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

□

Também obtivemos o seguinte teorema, o qual é uma modificação do Teorema 3.3 e generaliza o Teorema colorido de Tverberg de Živaljević e Vrećica tipo B [70, Theorem 4].

Teorema 3.6. *Sejam $d \geq 1$ e $r \geq 1$ inteiros, onde $r = s \cdot p^k$ com p um primo. Dada qualquer aplicação contínua $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^d$, e qualquer coloração (C_1, \dots, C_s) do conjunto de vértices C do simplexo Δ por k cores, onde a cardinalidade de cada conjunto C_i seja ao menos $2r - 1$ e $kr \geq (d + 1)(r - 1) + 1$, existem s conjuntos $F_i = \{\sigma_{i,j}; 1 \leq j \leq p^k\}$ com $1 \leq i \leq s$, tais que as faces $\sigma_{i,j}$ são coloridas e disjuntas, satisfazendo*

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \cdots \cap f(\sigma_{i,p^k}) \neq \emptyset,$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

A prova desse teorema segue de maneira análoga a prova do teorema anterior.

Demonstração. Seja G o grupo simétrico de r elementos. Consideremos a ação de G em $(R_{(C_1, \dots, C_k)})_{\Delta(2)}^{*r}$ por permutação das coordenadas, a qual é uma ação livre.

Tome $F : (R_{(C_1, \dots, C_k)})_{\Delta(2)}^{*r} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ dada por $F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r) = (\lambda_1, \lambda_1 f(x_1))$.

Agora, calcularemos a conectividade de $\Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_k|,r}$, pois $(R_{(C_1, \dots, C_k)})_{\Delta(2)}^{*r} \cong \Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_k|,r}$.

Temos que,

$$\begin{aligned} \text{conn}(\Delta_{|C_1|,r} * \cdots * \Delta_{|C_k|,r}) &\geq \sum_{j=1}^k \text{conn}(\Delta_{|C_j|,r}) + 2(k-1) \\ &= k(r-2) + 2(k-1) \\ &= kr - 2. \end{aligned}$$

Assim, $i((R_{(C_1, \dots, C_k)})_{\Delta(2)}^{*r}) \geq kr$.

Portanto, pelo Lema 3.5, temos que

$$i(A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)) \geq kr - (d+1)(r-s) > 0.$$

Em particular, $A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)$ é não vazio.

Portanto, podemos tomar $y = (y_1, \dots, y_r) \in A(F, \mathbb{Z}_p^k, G)$.

Ao tomarmos $\mathbb{Z}_p^k = \{h_1, \dots, h_{p^k}\}$ e denotando por a_1, \dots, a_s um conjunto de representantes da classe lateral de G/\mathbb{Z}_p^k , temos que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{p^k}$$

e

$$\lambda_1 F(a_i h_1^{-1} \cdot y) = \dots = \lambda_{p^k} F(a_i h_{p^k}^{-1} \cdot y).$$

Portanto,

$$F(a_i h_1^{-1} \cdot y) = \dots = F(a_i h_{p^k}^{-1} \cdot y), 1 \leq i \leq s.$$

Assim,

$$f(y_{\tau_{i1}(1)}) = \dots = f(y_{\tau_{ip^k}(1)}), 1 \leq i \leq s,$$

onde τ_{mn} é uma permutação.

Como $y \in (R_{(C_1, \dots, C_{d+1})})_{\Delta(2)}^{*r}$, então para cada $i \neq i'$ ou $j \neq j'$ temos que $y_{\tau_{ij}(1)}$ e $y_{\tau_{i'j'}(1)}$ estão em suportes disjuntos. Logo, denotando por $\sigma_{i,j}$ a face que consiste no suporte de $y_{\tau_{ij}(1)}$, concluimos que

$$\sigma_{i,j} \neq \sigma_{i',j'},$$

para cada $i \neq i'$ ou $j \neq j'$.

Deste modo, os conjuntos $F_i = \{\sigma_{i,j}; 1 \leq j \leq p^k\}$ satisfazem que

$$f(\sigma_{i,1}) \cap \dots \cap f(\sigma_{i,p^k}) \neq \emptyset,$$

para todo $1 \leq i \leq s$.

□

Capítulo 4

A Conjectura de Tverberg-Vrećica e versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang

Neste capítulo, discutiremos a relação entre Conjectura de Tverberg-Vrećica e versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang. Mais precisamente, provaremos uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang considerando G -ações dos grupos $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = (\mathbb{S}^1)^m$.

4.1 A Conjectura de Tverberg-Vrećica versus o problema parametrizado de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang

Na sequência vamos apresentar outra variação do problema de Tverberg, conhecida como Conjectura de Tverberg-Vrećica. As demonstrações dos teoremas topológicos tipo Tverberg envolvem, em geral, algum teorema tipo Borsuk-Ulam (ou teoremas tipo Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang). Os teoremas de Borsuk-Ulam possuem generalizações no contexto de fibrados, conhecidas como versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam (ou versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang).

A seguir, destacaremos que em alguns casos para os quais a Conjectura de Tverberg-Vrećica é válida, é utilizado na demonstração alguma adaptação de versões parametrizadas do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang. Neste sentido, podemos dizer que a Conjectura de Tverberg-Vrećica é como uma “versão parametrizada” do problema de Tverberg. Blagojević, Matschke e Ziegler em [5], para provar a conjectura de Tverberg-Vrećica para determinados casos, demonstraram um teorema tipo Borsuk-Ulam, no contexto de G -fibrados, com $G = (\mathbb{Z}_p)^m$, $m \geq 1$, p primo. Os resultados em [5], generalizaram os resultados provados por Živaljević em [72], o qual provou a conjectura

de Tverberg-Vrećica no contexto de G -fibrados, com $G = \mathbb{Z}_p$, p primo, usando uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang provada por Izydorek e Rybicki em [38].

Neste capítulo, como resultado principal obteremos o Teorema 4.12, o qual é uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para o caso onde G é o toros \mathbb{T}^m , ou G é o p -toros $(\mathbb{Z}_p)^m$, $p \geq 2$, p primo.

Recordemos que o clássico teorema de Borsuk-Ulam[9], afirma que:

Teorema 4.1 (Teorema de Borsuk-Ulam). *Se $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Versões equivalentes do teorema clássico de Borsuk-Ulam são obtidas considerando $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Observamos assim a construção de uma aplicação equivariante (ímpar), isto é, $g(-x) = -g(x)$, e o problema agora passa a se verificar a existência de $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$.

Teorema 4.2. *Se $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua ímpar, então existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = 0$. Ou equivalentemente, não existe aplicação equivariante $S^n \rightarrow S^{n-1}$.*

Yang[74] e, independentemente, Bourgin[7] em 1955 provaram o seguinte teorema.

Teorema 4.3 (Teorema clássico de Bourgin-Yang). *Sejam S^k, \mathbb{R}^n com ação antipodal de \mathbb{Z}_2 . Se $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação \mathbb{Z}_2 -equivariante então*

$$\dim Z_f \geq k - n - 1,$$

onde $Z_f = f^{-1}(0)$ e “dim” significa dimensão de cobertura.

Consequentemente, se $k > n$, então $\dim Z_f \neq \emptyset$, o que implica o teorema de Borsuk-Ulam. Em particular, se considerarmos no Teorema clássico de Borsuk-Ulam um aplicação contínua $f: S^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, o problema de determinar a dimensão do conjunto de coincidências antipodais (ou \mathbb{Z}_2 -coincidências) é equivalente a determinar a dimensão do conjunto de zeros de aplicações equivariantes.

Em [41] e [42], Marzantowiz, de Mattos e dos Santos resolveram o problema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para os casos quando G é um grupo cíclico de ordem potência de um primo, $G = \mathbb{Z}_p^m$, $m \geq 1$, G é o toros \mathbb{T}^m , ou G é o p -toros \mathbb{Z}_p^m , ou seja, para tais grupos G , foram determinadas estimativas para dimensão do conjunto $Z_f := \{v \in S(V) \mid f(v) = 0\}$, onde $f: S(V) \rightarrow W$ é uma aplicação G equivariante, V e W são representações ortogonais de G com $V^G = W^G = \{0\}$.

Na direção do problema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, em determinar a dimensão de conjuntos de zeros, vários artigos foram publicados no contexto de fibrados, substituindo-se esferas canônicas por fibrados em esferas (de cohomologia) e espaços euclidianos por fibrados vetoriais, isto é, considerando $\pi: E \rightarrow B$, $\pi': E' \rightarrow B$ fibrados vetoriais com

mesma base e $f: S(E) \rightarrow E'$, aplicação equivariante satisfazendo $\pi' \circ f = \pi$. Destacamos os resultados obtidos por A. Dold [20] para ações de \mathbb{Z}_2 , os quais foram motivados pelos trabalhos de Jaworowski [25, 26], Fadell e Husseini [22, 23]; em 1989, Nakaoka [49] tratando os casos \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_p e S^1 , Izydorek e Rybicki [38]). Em 2007, De Mattos e Dos Santos [13] consideraram fibrados com fibras com mesmo tipo de homotopia que produto de esferas. Pergher, de Mattos e dos Santos em [50] provaram um teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, para espaços fibras do tipo (a, b) . Em 2016, no artigo [52], foi considerado o problema parametrizado para fibrados cujas fibras são um produto de uma quantidade finita de esferas equipado com a ação diagonal de \mathbb{Z}_2 . Uma importante ferramenta para a obtenção destes resultados é a definição de determinados polinômios característicos associados a certos fibrados e o teorema de Leray-Hirsch (ver [11, Chapter VII, Theorem 1.4]).

Através deste capítulo, $\dim X$ denota a dimensão de cobertura de um espaço X e $\text{coh.dim} X$ denota a dimensão cohomológica de um espaço X , i.e.,

$$\text{coh.dim} X = \max\{n \mid H^n(X) \neq 0\}$$

onde $H^n(-)$ denota a cohomologia de Čech com coeficientes $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, dependendo se $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = (S^1)^m$. Observamos que, como estamos trabalhando com a teoria de cohomologia de Čech, temos $\text{coh.dim} X \leq \dim X$.

4.2 A Conjectura de Tverberg-Vrećica

Nesta seção, apresentaremos a Conjectura de Tverberg-Vrećica e casos para os quais a conjectura é verdadeira.

Conjectura 4.4 (Conjectura de Tverberg-Vrećica). *Sejam $0 \leq k \leq d$ e C^0, \dots, C^k conjuntos finitos de pontos em \mathbb{R}^d de cardinalidade $|C^l| = (r_l - 1)(d - k + 1) + 1$. Então é possível particionar cada C^l em r_l conjuntos $F_1^l, \dots, F_{r_l}^l$ tal que exista um k -plano P em \mathbb{R}^d que intersecte todas as envoltórias convexas $\text{conv}(F_j^l)$, $0 \leq l \leq k$, $1 \leq j \leq r_l$.*

A Conjectura de Tverberg-Vrećica foi verificada para os seguintes casos:

- $k = d$ (trivial),
- $k = 0$ (Teorema de Tverberg)
- $k = d - 1$ (Tverberg & Vrećica [62]),
- for $k = d - 2$ uma versão fraca foi mostrada em [62] (foi requerido dois pontos a mais em cada C^ℓ),
- k e d são ímpares, e $r_0 = \dots = r_k$ é um primo ímpar (Živaljević [72]),

- $r_0 = \dots = r_k = 2$ (Vrećica [68]), e
- $r_\ell = p^{a_\ell}$, $a_\ell \geq 0$, para algum primo p , e $p(d-k)$ é par ou $k = 0$ (Karasev [40]).

Existe uma generalização da Conjectura de Tverberg-Vrećica, que consiste em uma versão colorida da referida conjectura.

Conjectura 4.5. *Sejam $0 \leq k \leq d$, $r_\ell \geq 2$ ($\ell = 0, \dots, k$) e C^ℓ ($\ell = 0, \dots, k$) subconjuntos de \mathbb{R}^d de cardinalidade $|C^\ell| = (r_\ell - 1)(d - k + 1) + 1$. Considerando uma coloração de C^ℓ por,*

$$C^\ell = \bigsqcup C_i^\ell,$$

tal que as classes de cores não sejam muito grandes, $|C_i^\ell| \leq r_\ell - 1$, então é possível particionar cada C^ℓ em conjuntos $F_1^\ell, \dots, F_{r_\ell}^\ell$ que são coloridos (no sentido que $|C_i^\ell \cap F_j^\ell| \leq 1$ para todos os i, j, ℓ) e encontrar um k -plano P que intersecta todas as envoltórias convexas $\text{conv}(F_j^\ell)$.

Observamos que a Conjectura 4.4 é um caso especial da conjectura anterior onde todas as classes de cores são formadas por apenas um elemento. Uma resposta parcial para a Conjectura 4.5 foi dada em [5], e é o seguinte teorema.

Teorema 4.6. *Sejam r um primo e $0 \leq k \leq d$ tais que $r(d-k)$ é par ou $k = 0$. Tomando C^ℓ ($\ell = 0, \dots, k$) subconjuntos de \mathbb{R}^d de cardinalidade $|C^\ell| = (r - 1)(d - k + 1) + 1$, onde cada C^ℓ é colorido,*

$$C^\ell = \bigsqcup C_i^\ell,$$

tal que nenhuma classe de cor é muito grande, $|C_i^\ell| \leq r - 1$, então é possível particionar cada C^ℓ em conjuntos coloridos $F_1^\ell, \dots, F_r^\ell$ e encontrar um k -plano P que intersecta todas as envoltórias convexas $\text{conv}(F_j^\ell)$.

Ainda em [5], foi apresentado uma versão topológica que estende o resultado do Teorema 4.6.

Teorema 4.7 (Versão topológica do Teorema 4.6.). *Sejam r um primo e $0 \leq k \leq d$ tais que $r(d-k)$ é par ou $k = 0$. Considerando C^ℓ ($\ell = 0, \dots, k$) sendo conjuntos de cardinalidade $|C^\ell| = (r - 1)(d - k + 1) + 1$, os quais identificamos com o conjunto de vértices dos simplexes $\Delta_{|C^\ell|-1}$. Ainda, tomando uma coloração*

$$C^\ell = \bigsqcup C_i^\ell,$$

tal que nenhuma classe de cor seja muito grande, $|C_i^\ell| \leq r - 1$. Se

$$f_\ell : \Delta_{|C^\ell|-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

é uma aplicação contínua. Então podemos encontrar r faces coloridas disjuntas $F_1^\ell, \dots, F_r^\ell$ em cada simplexo $\Delta_{|C^\ell|-1}$ (ou seja, $|F_j^\ell \cap C_i^\ell| \leq 1$) e encontrar um k -plano $P \subseteq \mathbb{R}^d$ que intersecte todos os conjuntos $f_\ell(\text{conv}(F_j^\ell))$.

Notemos que o Teorema 4.6 é uma consequência imediata do Teorema 4.7 ao tomar as aplicações f_ℓ como sendo afins e, portanto, contínuas.

Blagojević, Matschke e Ziegler em [5], com o intuito de provar o Teorema 4.7, provaram uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam em termos de fibrados para o caso $G = (\mathbb{Z}_p)^m$, a qual apresentaremos a seguir. Tal resultado se baseou em uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam em termos de fibrados para o caso $G = \mathbb{Z}_p$ provada por Živaljević em [72].

Teorema 4.8 (Versão do Teorema de Borsuk-Ulam em termos de fibrados). *Sejam*

- $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ um grupo abeliano elementar (portanto, p é um primo),
- K um G -CW-complexo com $\text{Index}_G^{\text{pt}}(K) \subseteq H^{*\geq n+1}(BG; \mathbb{Z}_p)$,
- B um G -espaço trivial e conexo,
- $E \xrightarrow{\phi} B$ um G -fibrado vetorial (todas as fibras tem a mesma G -representação),
- $\Delta := E^G \rightarrow B$ o subfibrado de pontos fixos de $E \rightarrow B$,
- $C \rightarrow B$ o G -invariante subfibrado complemento ortogonal ($E = C \oplus \Delta$),
- F a fibra do fibrado em esfera $S(C) \rightarrow B$.

Suponha que

- $n = \text{rank}(C)$,
- $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F; \mathbb{Z}_p)$ (i.e., $C \rightarrow B$ é orientável se $p \neq 2$), e
- M é uma G -aplicação entre fibrados,

$$\begin{array}{ccc} B \times K & \xrightarrow{M} & E = C \oplus \Delta \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \phi \\ & & B \end{array} .$$

Então para $S := M^{-1}(\Delta)$ e $T := M(S) = \text{im}(M) \cap \Delta$ as aplicações induzidas pelas projeções

$$H^*(B; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\text{pr}_1^*} H_G^*(S; \mathbb{Z}_p) \quad \text{e} \quad H^*(B; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\phi|_T^*} H^*(T; \mathbb{Z}_p)$$

são injetivas.

O Teorema 4.8 mostra algumas propriedades do conjunto $S := M^{-1}(\Delta)$ as quais são importantes para provar casos da Conjectura de Tverberg-Vrećica. No entanto, nos teoremas parametrizados de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang, um dos objetivos principais é determinar uma estimativa para dimensão (topológica ou cohomológica) do conjunto $S := M^{-1}(\Delta)$.

Nesta direção, na seção 4.4 apresentaremos uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang relacionada com o Teorema 4.8, a qual aborda fibrados mais gerais (adicionalmente o caso $G = (\mathbb{S}^1)^m$ é considerado), e determina uma estimativa para dimensão (topológica ou cohomológica) do conjunto $S := M^{-1}(\Delta)$.

4.3 $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m$: propriedades importantes para G -esferas de cohomologia

Recordemos inicialmente nesta seção o anel de cohomologia $H^*(BG)$ dos espaços classificantes BG , para $G = \mathbb{Z}_2^m, \mathbb{Z}_p^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m, m \geq 1$. De acordo com a Proposição 1.28 temos,

1. Para $p = 2, G = (\mathbb{Z}_2)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t_1, \dots, t_m]$, nos quais cada $t_i \in H^1(BG; \mathbb{Z}_2)$.
2. Para $p > 2, G = (\mathbb{Z}_p)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t_1, \dots, t_m] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda(s_1, \dots, s_m)$, nos quais $t_i \in H^2(BG; \mathbb{Z}_p), s_i \in H^1(BG; \mathbb{Z}_p)$ e $s_i^2 = 0$.
3. Para $p = 0, G = (\mathbb{S}^1)^m$ então $H^*(BG; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_k]$, nos quais cada $t_i \in H^2(BG; \mathbb{Q})$.

O resultado abaixo resume algumas propriedades no estudo do fibrado

$$X \hookrightarrow X_G \longrightarrow BG$$

no qual a fibra típica X é um G -espaço e $(\text{mod } p)$ -esfera em cohomologia.

Diremos que um espaço compacto Hausdorff X é uma $(\text{mod } p)$ -esfera em cohomologia de dimensão n quando $H^*(X; \mathbb{F}) \cong H^*(S^n; \mathbb{F})$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ ou \mathbb{Q} para $p \geq 2$ ou $p = 0$. Para $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(\mathbb{S}^1)^m$, o teorema clássico de Smith afirma que o conjunto dos pontos fixos X^G da ação de G sobre X , é uma $(\text{mod } p)$ -esfera em cohomologia de dimensão r , onde $-1 \leq r \leq n$, e $r = -1$ quando $X^G = \emptyset$. Seja $e(X, X^G) \in H^{n-r}(BG)$ a classe de Euler do par orientado (X, X^G) como definido em [19, Chapter III, 4.25]. Em particular, se $X^G = \emptyset$, temos que a classe de Euler

$$e(X) \in H^{n+1}(BG) \tag{4.1}$$

Neste sentido, temos os seguintes importantes resultados.

Teorema 4.9. *Consideremos G e X como acima:*

- i) ([19, Chapter III, Theorem 4.40]) *Fórmula de Borel*
 Seja $\mathcal{H} = \{H \subset G; H \text{ tem rank } k-1\}$ então $n-r = \sum_{H \in \mathcal{H}} n(H) - r$, onde $n(H)$ é a dimensão da esfera de cohomologia X^H .
- ii) ([19, Chapter III, page 205]) *Existe um $H^*(BG)$ -isomorfismo*

$$H_G^*(X, X^G) \cong H^*(BG)/(e(X, X^G)).$$

Como uma consequência imediata do Teorema 4.9 ii) temos

Teorema 4.10. *Seja $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(S^1)^m$. Se X é um G -espaço o qual é uma $(\text{mod } p)$ -esfera em cohomologia de dimensão n , com $X^G = \emptyset$, então*

$$\text{Index}_G^{\text{pt}}(X) = H^{\geq n+1}(BG)$$

Demonstração. Como $X^G = \emptyset$, de (4.1) temos que $e(X) \in H^{n+1}(BG)$. Logo, do Teorema 4.9 ii), concluímos que

$$\text{Index}_G^{\text{pt}}(X) = \ker\{H^*(BG) \rightarrow H_G^*(X)\} = (e(X)) = H^{\geq n+1}(BG).$$

□

Finalizamos esta seção com um importante resultado o qual garante que quando o conjunto $X^G = \emptyset$, deveremos ter $\ker p^* \neq 0$, isto é, garante a existência de um elemento não nulo $\alpha \in \text{Index}_G^{\text{pt}}(X)$.

Proposição 4.11. ([19, Prop. 3.14, p. 196]) *Seja X um G -espaço compacto (ou paracompacto com dimensão cohomológica finita) e com tipo de órbitas finito. Então são equivalentes:*

- (i) $X^G \neq \emptyset$;
- (ii) $p: EG \times_G X \rightarrow BG$ tem uma seção;
- (iii) $p^*: H^*(BG) \rightarrow H_G^*(X)$ é injetora

4.4 Uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang

Nesta seção provaremos o resultado principal deste capítulo, uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para o caso $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(S^1)^m$.

Teorema 4.12. *Sejam*

- $G = (\mathbb{Z}_p)^m$ ou $(S^1)^m$,
- B um G -espaço trivial e conexo,
- $E \xrightarrow{p} B$ e $E' \xrightarrow{p'} B$ dois G -fibrados vetoriais (todas as fibras tem a mesma G -representação),
- $\Delta := E^G \rightarrow B$ e $\Delta' := E'^G \rightarrow B$ os subfibrados de pontos fixos de $E \rightarrow B$ e $E' \rightarrow B$, respectivamente,
- $C \rightarrow B$ e $C' \rightarrow B$ os subfibrados G -invariantes complementos ortogonais ($E = C \oplus \Delta$) e ($E' = C' \oplus \Delta'$),
- F e F' as fibras dos fibrados esfera $S(C) \rightarrow B$ e $S(C') \rightarrow B$.

Suponha que

- $k = \text{rank}(C)$ e $n = \text{rank}(C')$, com $k \geq n$,
- $\pi_1(B)$ age trivialmente sobre $H^*(F)$ e $H^*(F')$ (isso é, $C \rightarrow B$ e $C' \rightarrow B$ são orientáveis se $p \neq 2$),
- $H_G^*(S(C)) \cong H^*(B) \otimes H_G^*(F)$ (o que implica $\text{Index}_G^B(S(C)) \subseteq \text{Index}_G^{\text{pt}}(F) \otimes H^*(BG)$),
e
- seja f uma G -aplicação entre os fibrados, tal que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{f} & E' = C' \oplus \Delta' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array} .$$

Então a aplicação

$$H^{\leq k-n}(BG) \otimes H^*(B) \xrightarrow{p^*} H_G^*(f^{-1}(\Delta'))$$

é injetiva. Consequentemente,

$$\text{coh.dim}(f^{-1}(\Delta')) \geq \text{coh.dim}(B) + k - n.$$

Demonstração. Apresentaremos a prova para o caso $G = (\mathbb{Z}_p)^m$. A demonstração do resultado para o caso $G = (S^1)^m$ segue de maneira análoga. Seja $C' \rightarrow B$ o fibrado complemento ortogonal de Δ' em E' com respeito a uma métrica G -invariante (tal que C' torna-se um G -fibrado). Denotamos por $S(C')$ o fibrado em esfera associado e por F' a fibra em $S(C')$ sobre algum ponto base $b \in B$. Conforme Observação 1.7.4, consideramos $E_{*,*}^{*,*}(F')$ e $E_{*,*}^{*,*}(S(C'))$ as sequências espectrais de Leray–Serre associadas as fibrações

$$F' \hookrightarrow EG \times_G F' \rightarrow BG \times b \quad (4.2)$$

e

$$F' \hookrightarrow EG \times_G S(C') \rightarrow BG \times B, \quad (4.3)$$

respectivamente.

A E_2 -página $E_2^{*,*}(F')$ tem somente duas linhas não nulas, a 0-linha e a $(n-1)$ -linha. Os coeficientes locais em $E_2^{p,q}(F') = H^p(BG, H^q(F'))$ são dados pela estrutura de $\pi_1(BG)$ -módulo sobre $H^q(F')$. Desde que $G = \pi_1(BG)$ é um grupo abeliano elementar e F' é uma esfera, a estrutura de $H^*(BG)$ -módulo sobre $H^q(F')$ é trivial. Portanto

$$E_2^{p,q}(F') = H^p(BG, H^q(F')) = H^p(BG) \otimes H^q(F').$$

Os diferenciais são $H^*(BG)$ -homomorfismos, e

$$E_n^{*,n-1}(F') = E_2^{*,n-1}(F') = H^*(BG) \otimes H^{n-1}(F')$$

é um $H^*(BG)$ -módulo gerado por

$$1 \in E_n^{0,n-1}(F') = H^0(BG) \otimes H^{n-1}(F'),$$

onde 1 é considerado como o gerador de $H^{n-1}(F')$. Assim, existe um diferencial não nulo em $E_*^{*,*}(F')$ se, e somente se, o diferencial $d_n : E^{0,n-1}(F') \rightarrow E^{n,0}(F')$ é não nulo. Desde que F' é livre de pontos fixos, segue da Proposição 4.11(iii) que o homomorfismo edge $H^*(BG) \rightarrow H_G^*(F')$ não é injetivo. Por outro lado, da equação (1.2) (Seção 1.7) o homomorfismo edge é dado por

$$H^*(BG) \cong E_2^{*,0} \rightarrow E_3^{*,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_{*+1}^{*,0} \cong E_\infty^{*,0} \subset H^*(F'_G)$$

Dessa forma, se todos os diferenciais fossem nulos em $E_*^{*,*}(F')$, teríamos o homomorfismo edge

$$H^*(BG) \cong E_2^{*,0} \cong E_3^{*,0} \cong \dots \cong E_{*+1}^{*,0} \cong E_\infty^{*,0} \subset H^*(F'_G)$$

injetor, o que é uma contradição. Assim, deve existir um diferencial não nulo em $E_*^{*,*}(F')$ e, conseqüentemente, o diferencial $d_n : E^{0,n-1}(F') \rightarrow E^{n,0}(F')$ é não nulo. Portanto, existe um elemento não nulo $\alpha' = d_n(1) \in \text{Index}_G^{\text{pt}}(F') = \ker(H^*(BG) \rightarrow H_G^*(F'))$ de grau n .

Agora, a inclusão $F' \hookrightarrow S(C')$ nos dá uma aplicação entre as fibrações (4.2) e (4.3),

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G F' & \longrightarrow & EG \times_G S(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG \times b & \longrightarrow & BG \times B \end{array} \quad (4.4)$$

a qual induz um morfismo de seqüências espectrais de Leray–Serre associadas $E_*^{*,*}(S(C')) \rightarrow E_*^{*,*}(F')$.

A E_2 -página de $E_*^{*,*}(S(C'))$ é da forma $E_2^{p,q}(S(C')) = H^p(BG \times B, H^q(F'))$, onde os coeficientes locais são dados pela estrutura de $\pi_1(BG \times B)$ -módulo sobre $H^q(F')$. Desde que $H^*(F')$ é um $G \times \pi_1(B)$ -módulo trivial, as 0- e $(n-1)$ -linhas dessa seqüência espectral são dadas por

$$E_2^{p,q}(S(C')) = H^p(BG \times B; H^q(F')) = H^p(BG \times B) = \bigoplus_{i=0}^p H^i(BG) \otimes H^{p-i}(B), \quad q \in \{0, n-1\}.$$

O morfismo de seqüências espectrais $E_*^{*,*}(S(C')) \rightarrow E_*^{*,*}(F')$ sobre 0-linha e sobre a $(n-1)$ -linha da E_2 -página,

$$\bigoplus_{i=0}^p H^i(BG) \otimes H^{p-i}(B) \rightarrow H^p(BG),$$

é zero sobre $\bigoplus_{i=1}^{p-1} H^i(BG) \otimes H^{p-i}(B)$. Sobre $H^p(BG) \otimes H^0(B) = H^p(BG)$ é justamente a identidade. O diferencial do gerador $1 \otimes 1 \in H^0(BG) \otimes H^0(B)$ de $E_n^{0,n-1}(S(C'))$ atinge um elemento $\gamma' \in E_n^{n-1,0}(S(C'))$ da linha inferior $\bigoplus_{i=0}^n H^i(BG) \otimes H^{n-i}(B)$. Desde que os diferenciais comutam com morfismos de sequências espectrais, γ' é um elemento em $\text{Index}_G^B(S(C')) \subseteq H^*(BG) \otimes H^*(B)$ que restringe a α' sob a aplicação

$$\bigoplus_{i=0}^n H^i(BG) \otimes H^{n-i}(B) \rightarrow H^n(BG),$$

e assim $\gamma' \neq 0$. Desde que α' e γ' são de grau n , γ' tem a forma $\alpha' \otimes 1 + \sum_i \delta'_i \otimes \varepsilon'_i$, onde $\deg \delta'_i + \deg \varepsilon'_i = n$ e $\deg \delta'_i \leq n - 1$.

Por hipótese e usando a propriedade do índice para subfibrados (Propriedade do índice para Subfibrados (1.6), Seção 1.8.2), temos a seguinte fórmula

$$\text{Index}_G^B(f^{-1}(\Delta')) \cdot \text{Index}_G^B(S(C')) \subseteq \text{Index}_G^B(S(C)) \subseteq \text{Index}_G^{\text{pt}}(F) \otimes H^*(BG) \quad (4.5)$$

Agora, afirmamos que $\text{Index}_G^B(f^{-1}(\Delta')) \subseteq H^*(BG) \otimes H^*(B)$ não contém elemento da forma $\lambda \otimes \beta$, com $0 \neq \lambda \in H^*(BG)$, $0 \neq \beta \in H^*(B)$, $\deg(\lambda) < k - n$ e $\deg(\beta) > 0$. De fato, se existisse um tal elemento $\lambda \otimes \beta \in \text{Index}_G^B(f^{-1}(\Delta'))$, então teríamos

$$(\lambda \otimes \beta) \cdot \gamma' = (-1)^{\deg(\beta) \deg(\alpha')} (\lambda \cdot \alpha') \otimes \beta + \sum_i (-1)^{\deg(\beta) \deg(\delta'_i)} (\lambda \cdot \delta'_i) \otimes (\beta \cdot \varepsilon'_i) \in \text{Index}_G^{\text{pt}}(F) \otimes H^*(BG).$$

Desde que $\deg(\delta'_i) < \deg(\alpha') = n$ e $\deg(\lambda) < k - n$, segue que

$$\deg(\lambda \cdot \delta'_i) < \deg(\lambda \cdot \alpha') < (k - n) + n = k$$

Isso implica que

$$\lambda \cdot \alpha' \in \text{Index}_G^{\text{pt}}(F), \quad (4.6)$$

contradizendo o fato que $\text{Index}_G^{\text{pt}}(F) = H^{*\geq k}(BG)$ (Teorema 4.10).

Assim, a aplicação

$$H^{\leq k-n-1}(BG) \otimes H^*(B) \xrightarrow{p^*} H_G^*(f^{-1}(\Delta'))$$

é injetiva.

Dessa forma, temos

$$\text{coh.dim}(EG \times_G f^{-1}(\Delta')) \geq \text{coh.dim}(B) + k - n - 1. \quad (4.7)$$

Por [12, Theorem 1.4]

$$\text{coh.dim } (f^{-1}(\Delta')) \geq \text{coh.dim } (EG \times_G f^{-1}(\Delta')). \quad (4.8)$$

Conseqüentemente, combinando (4.7) e (4.8), obtemos

$$\text{coh.dim } (f^{-1}(\Delta')) \geq \text{coh.dim } (B) + k - n - 1.$$

□

4.5 Principais consequências do Teorema 4.12

Finalizamos este trabalho com as principais consequências do Teorema 4.12. Uma primeira consequência é considerar o caso em que $B = \{\text{pt}\}$ para obter a versão clássica do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang para p -toros e toros provada recentemente em [42, Theorem 2.1].

Teorema 4.13. [42, Theorem 2.1] *Sejam V, W duas representações ortogonais do grupo $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = G = (\mathbb{S}^1)^m$ tais que $V^G = W^G = \{0\}$. Se $f : S(V) \rightarrow W$ é uma aplicação G -equivariante, então*

$$\text{coh.dim } Z_f \geq \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W - 1.$$

Em particular, se $\dim_{\mathbb{R}} W < \dim_{\mathbb{R}} V$, então não existe aplicação G -equivariante de $S(V)$ em $S(W)$.

Demonstração. Fazendo no Teorema 4.12, $E = V$, $E' = W$ representações ortogonais do grupo $G = \mathbb{Z}_p^m$ ou $G = (\mathbb{S}^1)^m$ tais que $V^G = W^G = \{0\}$, temos que $\Delta = \Delta' = \{0\}$, com $F = S(V)$ e

$$\begin{array}{ccc} S(V) & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & \{\text{pt}\} & \end{array} .$$

Assim, todas as hipóteses do Teorema 4.12 são trivialmente satisfeitas e pondo $Z_f = f^{-1}(0) = f^{-1}(\Delta')$, concluímos que

$$\text{coh.dim } Z_f = \text{coh.dim } f^{-1}(\Delta') \geq \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W - 1.$$

□

Observação 4.5.1. Outra consequência do Teorema 4.12, é considerar $m = 1$ e fazendo as devidas considerações como na prova acima, obtemos as versões parametrizadas do teorema de Borsuk-Ulam-Bourgin-Yang provadas por A. Dold em [20], Nakaoka em [49] e Izydorek-Rybicki em [38]).

Referências Bibliográficas

- [1] Bajmóczy, E. G., Bárány, I. *A common generalization of Borsuk's and Radon's theorem*, Acta Math. Hungarica, (1979) 34, 347-350.
- [2] Bárány, I., Shlosman, S.B., Szücs, A. *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, J. London Math. Soc., II. Ser. 23 (1981) 158-164.
- [3] Blagojević, P., Frick, F., Ziegler, G. *Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints* J. Europ. Math. Soc., Volume 21, Issue 7, 2019, pp. 2107–2116.
- [4] Blagojević, P., Ziegler, G. *Beyond the Borsuk–Ulam Theorem: The Topological Tverberg Story*, A Journey Through Discrete Mathematics: A Tribute to Jiří Matoušek (Martin Loeb, Jaroslav Nešetřil, and Robin Thomas, eds.), Springer International Publishing, Cham, 2017, pp. 273–341.
- [5] Blagojević, P., Matschke, B., Ziegler, G. *Optimal bounds for a colorful Tverberg–Vrećica type problem*, Advances in Mathematics, Volume 226, Issue 6, 2011, 5198-5215.
- [6] Blagojević, P., Matschke, B., Ziegler, G. *Optimal bounds for the colored Tverberg problem*, J. Eur. Math. Soc. 17, 739–754.
- [7] Bourgin, DG, *On some separation and mapping theorems*, Commentarii Mathematici Helvetici, Volume 29, Issue 1, 1955, 199–214.
- [8] Björner, A., Lovász, L., Vrećica, S., Živaljević, R. *Chessboard complexes and matching complexes*, J. London Math. Soc. **49** (1994), 25–39.
- [9] Borsuk, K. *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. 20 177-190, 1933.
- [10] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 139, Springer, New York, 1993.
- [11] Bredon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups*. New York and London: Pure and Applied Mathematics 46 Academic Press, 1972.

- [12] Bredon, G. E. *Cohomological aspects of transformation groups*. in: Proceedings of the Conference on Transformation Groups, New Orleans 1967, Springer-Verlag, 1968, pp. 247–280.
- [13] Biasi, C., De Mattos, D. *A Borsuk-Ulam theorem for compact Lie group actions*, Bull Braz Math Soc, New Series 37(1) (2006) 127-137.
- [14] De Mattos, D., Dos Santos, E. L., Souza, T. O. *(H, G) -Coincidence Theorems for Manifolds and a Topological Tverberg Type Theorem for Any Natural Number r* . Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24 (2017), no. 4, 567-579.
- [15] Coelho, F. R. C., De Mattos, D., Dos Santos, E. L. *On the existence of equivariant maps*, Bull. of the Braz. Math. Soc., **43** (2012), no. 3, 407-421.
- [16] Conner, P.E., Floyd, E.E. *Differentiable Periodic Maps*. Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin **33**, 1964.
- [17] Conner, P.E., Floyd, E.E. *Fixed point free involutions and equivariant maps*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 66 (1960), 416-441.
- [18] Crabb, M. C. *The topological Tverberg theorem and related topics*. J. Fixed Point Theory Appl. 12 (2012), no. 1-2, 1-25.
- [19] Dieck, t. T., *Transformation Groups*. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1987.
- [20] Dold, A. *Parametrized Borsuk-Ulam theorems*. Commentarii Mathematici Helvetici 63 (1988), no. 1, 275–285.
- [21] Engelking, R. *Dimension Theory*. New York: North-Holland Pub. Co., 1978.
- [22] Fadell, E., Husseini, S. *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 8* (1988), 73-85.
- [23] Fadell, E., Husseini, S. *Relative cohomological index theories*, Advances in Math. **64** (1987), 1-87.
- [24] Frick, F. *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*, Oberwolfach Reports 12 (2015), no. 1, 318–321.
- [25] Jaworowski, J. *A continuous version of the Borsuk-Ulam theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society 82 (1981), 112–114.
- [26] Jaworowski, J. *Fibre preserving maps of sphere bundles into vector space bundles*, Fixed point theory (1981), 154–162.

- [27] Izydorek, M., Jaworowski, J. *Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1947-1950.
- [28] Jaworowski, J. *Periodic coincidence for maps of spheres*, Kobe J. Math. **17** (2000), 21-26.
- [29] Gonçalves, D.L., Jaworowski J., Pergher, P.L.Q., Volovikov, A.Y. *Coincidences for maps of spaces with finite group actions*. Topology and its Appl. **145** n.1-3 61-68, 2004.
- [30] Gonçalves, D.L., Jaworowski, J., Pergher, P.L.Q. *Measuring the size of the coincidence set*. Topology App. **125** n.3 465-470, 2002.
- [31] Gonçalves, D.L., Pergher, P.L.Q. \mathbb{Z}_p -coincidences for maps of spheres into CW complexes. Kobe J. Math. **15** n.2 191-195, 1998.
- [32] Greenberg, M. J., Harper J.R. *Algebraic Topology, a first course*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York Amsterdam, 1981.
- [33] Hell, S. *On the number of Tverberg partitions in the prime power case*. European J. Combin. **28** (2007), no. 1, 347-355.
- [34] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [35] Hungerford, T.W. *Algebra*. New York: Springer Verlag, 1974.
- [36] Hurewicz, W., Wallman, H. *Dimension Theory*. Princeton Univ. Press Princeton, 1941.
- [37] Husemoller, D. *Fibre Bundles Second Edition*, New York: Springer-Verlag, 1966.
- [38] Izydorek, M., Rybicki, S. *On parametrized Borsuk-Ulam theorem for free \mathbb{Z}_p -action*. Algebraic Topology Homotopy and Group Cohomology (1992), Springer , 227-234.
- [39] Jonsson, J. *Simplicial Complexes of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1928, Springer, Berlin, 2008.
- [40] Karasev, R. N. *Tverberg's transversal conjecture and analogues of nonembeddability theorems for transversals*, Discrete Comput. Geometry **38** (2007), 513-525.
- [41] Marzantowicz, W., De Mattos, D., Dos Santos, E. L. *Bourgin-Yang version of the Borsuk-Ulam theorem for \mathbb{Z}_{p^k} -equivariant maps*. Algebr. Geom. Topol **12** (2012), no. 4, 2245-2258.
- [42] Marzantowicz, W., De Mattos, D., Dos Santos, E. L. *Bourgin-Yang Versions of the Borsuk-Ulam Theorem for p -Toral Groups*. J. Fixed Point Theory Appl. **19** (2017), no. 2, 1427-1437.

- [43] De Mattos, D. *Sobre teoremas do tipo Borsuk-Ulam*. Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2005.
- [44] Matoušek, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, in: Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [45] McCleary, J. *User's Guide to Spectral Sequences*. Wilmington, Delaware (U.S.A): Publish or Perish, Inc., 1985.
- [46] Milnor, J. *Construction of Universal Bundles I*, Ann. of Math. 63 n.2 272-284, 1956.
- [47] Mimura, M., Toda, H. *Topology of Lie Groups I and II*. American Mathematical Society Providence Rhode Island, 1991.
- [48] Munkres, J.R. *Elements of Algebraic Topology*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge Massachusetts, 1984.
- [49] Nakaoka, M. *Parametrized Borsuk-Ulam theorems and characteristic polynomials*, Topological Fixed Point Theory and Applications 155–170, 1989.
- [50] De Mattos, D., Pergher, P. L. Q. Dos Santos, E. L. *Borsuk-Ulam theorems and their parametrized versions for spaces of type (a, b)* . Algebr. Geom. Topol. **13** n.5 2827–2843, 2013.
- [51] Pergher, P.L.Q., De Mattos, D., Dos Santos, E.L. *The Borsuk-Ulam Theorem for General Spaces*. Arch. Math. **81** n.1 96-102, 2003.
- [52] De Mattos, D., Pergher, P. L. Q., Dos Santos, E.L., Singh, M. *Zero sets of equivariant maps from products of spheres to Euclidean spaces*. Topology Appl. **202** 7-20, 2016.
- [53] Dos Santos, E.L., Coelho, F.R.C. *Coincidence theorems for maps of free \mathbb{Z}_p -spaces*, Topology Appl. 159 (2012), 2146 – 2151.
- [54] Sarkaria, K. S. *Tverberg's theorem via number fields*. Israel J. Math. 79 (1992), no. 2-3, 317-320.
- [55] Sarkaria, K.S. *Tverberg partitions and Borsuk-Ulam theorems*, Pacific J. Math. 196 (2000) 231-241.
- [56] Spanier, E.H. *Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1966.
- [57] Švarc, A.S. *Some estimates of the genus of a topological space in the sense of Krasnosel'skiĭ*. Uspekhi Mat. Nauk 12 : 4 (1957), 209-214. (Russian)
- [58] Švarc, A.S. *The genus of a fiber space*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 11 (1962), 99-126; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 55 (1966).

- [59] Schöneborn, T., Ziegler, G. M. *The Topological Tverberg Theorem and winding numbers*. Journal of Combinatorial Theory, Series A. (2005) 82-104.
- [60] Tverberg, H. *A generalization of Radon's Theorem*, J. London Math. Soc. 41 (1966) 123-128.
- [61] Tverberg, H. *A generalization of Radon's theorem. II*. Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), no. 3, 321-325.
- [62] Tverberg, H., Vrećica, S. *On generalizations of Radon's theorem and the ham sandwich theorem*, Europ. J. Combinatorics **14** (1993), 259-264.
- [63] Volovikov, A. Y. *On a topological generalization of the Tverberg theorem*, Math. Notes 3 (1996) 324-326.
- [64] Volovikov, A. Y. *A theorem of Bourgin-Yang type for \mathbb{Z}_p^n -action*, Mat. Sb. 183:7 (1992), 115-144; English Transl. in Russian Acad. Sci. Math. 76 (1993).
- [65] Volovikov, A. Y. *On the van Kampen-Flores Theorem*, Mat. Zametki 59:5 (1996), 663-670; English Transl. in *Math. Notes* 59 (1996).
- [66] Volovikov, A. Y. *On the index of G -spaces*, Sb. Math. 191 (9-10) (2000) 1259-1277.
- [67] Volovikov, A. Y. *On the Cohen-Lusk Theorem*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 159, N°. 6, 2009.
- [68] Vrećica, S. *Tverberg's Conjecture*. Discrete Comput Geom 29, 505–510 (2003).
- [69] Vučić, A., Živaljević, R. *Notes on a conjecture of Sierksma*, Discrete Comput. Geom. 9 (1993) 339-349.
- [70] Živaljević, R., Vrećica, S. *New cases of the colored Tverberg theorem*, Jerusalem Combinatorics '93 (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), Contemp. Math., vol. 178, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 325–325.
- [71] Živaljević, R., Vrećica, S. *The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions*, J. Combin. Theory Ser. A 61 (1992), 309–318.
- [72] Živaljević, R. *The Tverberg–Vrećica problem and the combinatorial geometry on vector bundles*, Israel J. Math. **111** (1999), 53-76.
- [73] Whitehead, G. W. *Elements of Homotopy Theory*. New York: Heidelberg and Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [74] Yang, C.T. *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. I*, Ann. of Math. 60:2 (1954), 262-282.