

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Uma construção de cópulas semilineares bivariadas baseada nas famílias AMH, FGM e Plackett

Átila Prates Correia

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Átila Prates Correia

Uma construção de cópulas semilineares bivariadas baseada nas famílias AMH, FGM e Plackett

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Adriano Kamimura Suzuki

USP – São Carlos
Março de 2021

Átila Prates Correia

**A construction of bivariate semilinear copulas based on
AMH, FGM and Plackett families**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP and to the Departamento de Estatística – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Master in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Adriano Kamimura Suzuki

**USP – São Carlos
March 2021**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Átila Prates Correia, realizada em 26/02/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Adriano Kamimura Suzuki (USP)

Prof. Dr. Paulo Henrique Ferreira da Silva (UFBA)

Prof. Dr. Marcio Luis Lanfredi Viola (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

Dedico esse trabalho ao meu pai, Abimael Pires Correia, à minha mãe, Maria Inês Prates Correia, ao meu irmão, Tales Prates Correia, e a Ana Maria Serra.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer imensamente à minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente a fim de que eu pudesse atingir meus objetivos pessoais e profissionais. Gostaria também de agradecer a Ana Maria Serra cuja persistência, dedicação e profissionalismo foram imprescindíveis para que eu chegasse até aqui. Por fim, não poderia deixar de agradecer ao meu orientador Adriano Kamimura Suzuki por sempre ter sido muito solícito comigo e ter depositado confiança no meu potencial, além de ter sido um exemplo de profissional.

Sou grato também a USP e a UFSCar por proporcionarem as condições materiais e intelectuais necessárias à aquisição e ao desenvolvimento do conhecimento, seja através das aulas expositivas, seminários e toda a infraestrutura disponibilizada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Dito isso, gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro oferecido, o qual tornou possível a realização dessa empreitada.

RESUMO

CORREIA, A.P. **Uma construção de cópulas semilineares bivariadas baseada nas famílias AMH, FGM e Plackett.** 2021. 73 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Cópulas são funções de distribuição conjuntas definidas no quadrado unitário cujas marginais são uniformes. Nesse trabalho, apresentamos três novas famílias de cópulas semilineares baseadas nas cópulas AMH, FGM e Plackett. Mais precisamente, utilizamos as funções diagonais advindas de cada uma destas a fim de propor as novas expressões em questão. Além disso, calculamos os respectivos coeficientes ρ de Spearman das cópulas transformadas, e estudamos o comportamento de cada um deles.

Palavras-chave: Cópulas semilineares bivariadas, cópulas AMH, FGM e Plackett, coeficiente ρ de Spearman.

ABSTRACT

CORREIA, A.P. **A construction of bivariate semilinear copulas based on AMH, FGM and Plackett families.** 2021. 73 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Copulas are cumulative distribution functions defined on the unit square whose margins are uniform. In the context of the present work, we have provided three new families of semilinear copulas based on the copulas AMH, FGM and Plackett. More precisely, we have applied the diagonal functions related to each of them with the purpose of obtaining the expressions of the new families. Besides that, it has been calculated the respective Spearman ρ coefficient from each transformed copula, whose values have been studied thoroughly.

Keywords: Semilinear bivariate copulas, AMH, FGM and Plackett copulas, Spearman ρ coefficient.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagramas representativos de cópulas semilineares. Fonte: elaborada pelo autor.	44
Figura 2 – Quatro categorias de cópulas semiquadráticas com diagonal conhecida. Fonte: elaborada pelo autor.	46
Figura 3 – Diagrama representativo do método em questão. Fonte: elaborada pelo autor.	51
Figura 4 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta,\varphi}^{AMH}$. Fonte: elaborada pelo autor.	55
Figura 5 – Gráficos ilustrativos relativos à densidade $c_{\theta,\varphi}^{AMH}$. Fonte: elaborada pelo autor.	56
Figura 6 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta,\varphi}^{FGM}$. Fonte: elaborada pelo autor.	57
Figura 7 – Gráficos ilustrativos relativos à densidade $c_{\theta,\varphi}^{FGM}$. Fonte: elaborada pelo autor.	58
Figura 8 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta,\varphi}^{Plackett}$. Fonte: elaborada pelo autor.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	UMA BREVE REVISÃO TEÓRICA	19
2.1	O que são cópulas?	19
2.2	Cópulas bivariadas	19
2.3	Cópulas multivariadas	25
2.4	Teoria da medida: uma breve revisão	28
2.5	Versão probabilística	35
2.6	Coeficientes de correlação	41
3	RESULTADOS DA LITERATURA	43
3.1	Cópulas semilineares	43
3.2	Cópulas semiquadráticas	46
4	APRESENTAÇÃO DO MÉTODO	51
4.1	Heurística da metodologia empregada	51
4.2	Descrição do método	52
4.3	Verificação da validade do método	52
4.4	Transformação das cópulas AMH	54
4.5	Transformação das cópulas FGM	56
4.6	Transformação das cópulas Plackett	58
4.7	Coeficientes rho de Spearman	60
4.8	Comparação dos resultados	70
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Conforme em [Quesada-Molina et al \(2003\)](#), a noção de cópula foi introduzida por A. Sklar em 1959 como resposta à pergunta “qual a relação entre uma função de probabilidade multidimensional e suas marginais de menores dimensão?”, feita por M. Fréchet. No começo, a teoria de cópulas era prioritariamente utilizada no contexto da teoria de espaços métricos probabilísticos. Posteriormente, tal teoria foi aplicada para definir o que se entende por medidas de dependências não paramétricas entre variáveis aleatórias, e desde então a teoria de cópulas ganhou importância dentro da estatística.

Mais precisamente, a vantagem da teoria de cópulas com relação a aplicações dentro da estatística está no fato de que ela permite modelar e estimar a distribuição de vetores aleatórios através da estimativa das distribuições marginais — graças ao teorema de Sklar, conforme consta em [Nelsen \(2006\)](#), por exemplo. Existem muitas famílias paramétricas de cópulas à disposição na literatura, em que os parâmetros de cada uma dessas famílias estão relacionados ao grau de dependência que se deseja modelar. Dentre as aplicações dessa teoria, podemos mencionar as áreas de finança quantitativa, engenharia civil, engenharia de confiabilidade, análise de dados de garantia, medicina, pesquisa de hidrologia, pesquisa de clima e tempo, variabilidade da irradiância solar, processamento de sinais e tantas outras que não mencionaremos aqui. Além das famílias de cópulas Gaussianas, Arquimedianas, AMH, FGM, Plackett, Clayton, Frank, Gumbel, Joe, existem muitas outras maneiras de se obter cópulas conforme consta no capítulo três da referência [Harry Joe \(2015\)](#). Na tentativa de fabricar nosso próprio método gerador, encontramos aquilo que é conhecido na literatura como cópulas semilineares. Precisamente, tais construções podem ser encontradas em [Durante et al \(2007\)](#). Em concordância com esse artigo, aplicamos a metodologia correspondente aos casos particulares das famílias de cópulas AMH, FGM e Plackett em virtude de suas importâncias teóricas e científicas. Finalizamos o trabalho em questão por calcular os coeficientes ρ de Spearman de cada uma das cópulas transformadas.

A organização desse trabalho foi dividida em quatro capítulos. No Capítulo 2, apresentamos a definição de cópulas bivariadas e multivariadas conforme consta em [Nelsen \(2006\)](#). O intuito de assim fazê-lo reside no fato de que tal leitura é mais aprazível em uma primeira abordagem. Em seguida, discutimos conceitos e resultados correlatos à teoria da medida, como presentes em [Durante \(2016\)](#) e [Krishna \(2006\)](#), para que pudéssemos discutir as definições e propriedades de cópulas em termos abstratos. Por fim, terminamos o Capítulo 2 dissertando sobre o coeficiente de correlação ρ de Spearman ([Spearman, 1904](#)) o qual será aplicado no Capítulo 4 devido à sua importância científica.

No Capítulo 3, fazemos uma apresentação dos resultados presentes na literatura que embasam as construções que serão feitas mais adiante. Em particular, serão apresentados conceitos e resultados relativos a cópulas semilineares e semiquadráticas.

No Capítulo 4, começamos com a motivação sobre como construir novas famílias de cópulas bivariadas baseadas nas cópulas AMH, FGM e Plackett. Na sequência, descrevemos o método em si e verificamos a sua validade. Feito isso, transformamos as famílias de cópulas citadas segundo o método proposto. Por fim, calculamos os coeficientes ρ de Spearman das cópulas geradas.

No Capítulo 5, fazemos um resumo do trabalho e tecemos algumas considerações finais sobre os espectros de valores dos coeficientes ρ de Spearman das famílias de cópulas transformadas AMH, FGM e Plackett.

UMA BREVE REVISÃO TEÓRICA

2.1 O que são cópulas?

Informalmente, cópulas bivariadas são funções de distribuição conjuntas definidas no quadrado unitário $\mathbb{I}^2 = [0, 1]^2$, cujas distribuições marginais são uniformes. Ou ainda, em vista do Teorema de Sklar — conforme consta na página 18 da referência [Nelsen \(2006\)](#) —, cópulas são aplicações que acoplam funções de distribuição marginais univariadas à sua respectiva distribuição conjunta. Apesar do seu apelo intuitivo, tais afirmações precisam ser formalizadas. Em decorrência disso, faremos uma exposição dos conceitos e propriedades relacionados à sua definição, que serão utilizados para abarcar as ideias a serem discutidas. Em sua maioria, os resultados apresentados neste capítulo advêm das referências [Nelsen \(2006\)](#), [Krishna \(2006\)](#), [Robert \(2000\)](#) e [Durante \(2016\)](#).

2.2 Cópulas bivariadas

Essa seção, assim como a próxima, apresentam o conceito de cópula bivariada (multivariada) em um contexto mais geral que não se apoia diretamente na definição de variáveis aleatórias. A escolha de assim fazê-lo reside no fato de que essa abordagem permite entender a teoria envolvida sem apelar para a teoria da medida (pelo menos em um primeiro momento). Uma vez assimilados os conceitos e resultados envolvidos, a segunda abordagem complementa a primeira. Com base nisso, começaremos pela definição:

Definição 1. Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não-vazios da reta real estendida $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e seja H uma função a valores reais tal que $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2$, em que o símbolo Dom designa o domínio de uma função. Seja, ainda, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ um retângulo cujos vértices estão em $\text{Dom}(H)$. Então o H -volume de B é dado por

$$V_H(B) := H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

A função H é dita ser 2-crescente caso $V_H(\mathbf{B}) \geq 0$ para todo conjunto \mathbf{B} conforme descrito na Definição 1.

Vale ressaltar que tal propriedade não deve ser confundida com a propriedade de ser não-decrescente em cada entrada. De fato, existem funções que são não-decrescentes em cada argumento da função, mas não são 2-crescentes e vice-versa. Contudo existe uma restrição adicional que torna funções 2-crescentes em funções não-decrescentes em cada argumento. Tal propriedade é denominada *groundedness*. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 2. Consideremos que $a \in S_1 \subset \overline{\mathbb{R}}$ seja o elemento mínimo de S_1 e que $b \in S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$ seja o elemento mínimo de S_2 . Diz-se que a função $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é *grounded* se $H(x, b) = H(a, y) = 0$ para todos os pares ordenados $(x, b), (a, y) \in S_1 \times S_2$.

Com base nessa definição, temos a seguinte proposição:

Proposição 1. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos não-vazios da reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função *grounded* e 2-crescente tal que $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2$. Então H é não-decrescente em cada argumento.

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 elementos de S_1 tais que $x_1 \leq x_2$. Sejam também y_1 e y_2 elementos de S_2 tais que $y_1 \leq y_2$. Então a função $f(t) = H(t, y_2) - H(t, y_1)$ é não-decrescente. De fato, por conta de ser 2-crescente, tem-se que

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1)) - (H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1). \end{aligned}$$

Agora, basta tomar y_1 como o elemento mínimo de S_2 que o resultado segue. Raciocínio totalmente análogo se aplica à função $g(t) = H(x_2, t) - H(x_1, t)$. Conclui-se, assim, que H é não-decrescente em cada argumento, como queríamos demonstrar. \square

Na sequência, especificaremos aquilo que entendemos por distribuições *marginais* no presente contexto. Para ser exato, temos a seguinte definição:

Definição 3. Sejam $a \in S_1 \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $b \in S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$ os elementos máximos de S_1 e S_2 , respectivamente. Dizemos, então, que $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem *marginais*, e que tais marginais F e G são dadas por

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x, b), \text{ para todos } x \in \text{Dom}(F) = S_1, \\ G(y) &= H(a, y), \text{ para todos } y \in \text{Dom}(G) = S_2. \end{aligned}$$

Exemplo 1. Seja H a função cujo domínio é $\text{Dom}(H) = [-a, a] \times [b, \infty]$ dada por

$$H(x, y) = \frac{(x+a)(e^{y-b} - 1)}{x + 2ae^{y-b} - a}.$$

Então H é *grounded*, pois $H(x, b) = H(-a, y) = 0$, e H tem marginais $F(x)$ e $G(y)$ em que

$$\left(F(x) = H(x, \infty) = \frac{x+a}{2a} \right) \wedge \left(G(a, y) = 1 - e^{b-y} \right).$$

em que \wedge denota o operador lógico *e*. O próximo resultado é de suma importância, pois é a partir dele que demonstramos que cópulas (e suas secções) são funções *Lipschitz*, cuja definição consta na página 340 de [Garling \(2014\)](#).

Proposição 2. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos não-vazios da reta real estendida $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função *grounded* 2-crescente, com marginais F e G , tal que $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2$. Consideremos, ainda, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) como pontos de $S_1 \times S_2$. Então

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demonstração. Começemos por considerar a desigualdade triangular

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Sem perda de generalidade, consideremos que $x_2 \geq x_1$. Em virtude da [Proposição 1](#), a função dada por $f(t) = H(x_2, t) - H(x_1, t)$ é não-decrescente. Sejam a_2 o elemento mínimo, e b_2 o elemento máximo de S_2 , respectivamente. Então vale que $f(a_2) \leq f(y_2) \leq f(b_2)$, isto é,

$$0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1).$$

Caso $x_1 \geq x_2$, seja $g(t) = H(x_1, t) - H(x_2, t)$. Nesse caso, $g(a_2) \leq g(y_2) \leq g(b_2)$, ou seja,

$$0 \leq H(x_1, y_2) - H(x_2, y_2) \leq F(x_1) - F(x_2).$$

Combinando os dois resultados, chegamos à conclusão desejada. O mesmo raciocínio pode ser empregado para a segunda parcela da desigualdade. \square

Dessa maneira, estamos aptos a definir adequadamente o que são cópulas. Mais precisamente, podemos expressar sua definição como segue.

Definição 4. Uma cópula bivariada é uma função $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ com as propriedades:

1. Para todos x e y pertencentes a $[0, 1]$, vale

$$(C(x, 0) = C(0, y) = 0) \wedge ((C(x, 1) = x) \wedge (C(1, y) = y)).$$

2. Para quaisquer (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes a $\text{Dom}(C)$ tais que $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$,

$$C(x_2, y_2) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_1, y_1) \geq 0.$$

Na definição anterior, desde que C seja duas vezes diferenciável, a segunda propriedade pode ser substituída por $C_{xy}(x, y) = C_{yx}(x, y) \geq 0$, conforme consta na seção dois da referência [Bekrizadeh et al \(2016\)](#). Faremos extensa utilização desse fato para provar que expressões candidatas a serem cópulas realmente o são.

Por fim, temos que cópulas são funções Lipschitz.

Corolário 1. Seja C uma cópula. Então dados dois pares quaisquer (x_1, x_2) e (y_1, y_2) que pertençam a $\text{Dom}(C)$, vale que:

$$|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Demonstração. Basta aplicar a [Proposição 2](#). □

Tal resultado é de suma importância para quando formos discutir secções (funções) diagonais de cópulas.

Continuaremos nossa discussão apresentando o principal resultado da teoria de cópulas, o qual é conhecido como teorema de Sklar. Mas, antes disso, discutiremos algumas definições essenciais ao seu bom entendimento. A começar, temos a seguinte definição:

Definição 5. Uma função de distribuição é uma função F com domínio $\overline{\mathbb{R}}$ e contradomínio em \mathbb{R} , de modo que

1. F é não-decrescente,
2. $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Exemplo 2. Uma função de distribuição simples (porém ilustrativa) encontrada na estatística é a distribuição uniforme. Sua caracterização é dada pela função de distribuição:

$$U_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\infty, a), \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x \in (b, +\infty]. \end{cases}$$

Definição 6. Uma *função de distribuição conjunta* é uma função H com domínio $\overline{\mathbb{R}}^2$ e contradomínio em \mathbb{R} , tal que:

1. H é 2-crescente,
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$, e $H(\infty, \infty) = 1$.

Cabe aqui uma observação. Como H é 2-crescente e *grounded*, e suas marginais são dadas por $F(x) = H(x, \infty)$ e $G(y) = H(\infty, y)$, concluímos que F e G são não-decrescentes, $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = G(\infty) = 1$. Logo, F e G são distribuições também.

Exemplo 3. Seja H a função com domínio $\overline{\mathbb{R}}^2$, cuja expressão é dada por:

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+a)(e^{y-b}-1)}{x+2ae^{y-b}-a}, & (x,y) \in [-a,a] \times [b,\infty], \\ 1 - e^{b-y}, & (x,y) \in (a,\infty] \times [b,\infty], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É possível demonstrar que H é uma função de distribuição conjunta. As marginais de H , nesse caso, são dadas por:

$$F(x) = U_{[-a,a]}(x) \quad \text{e} \quad G(y) = \begin{cases} 0, & y \in [-\infty, b), \\ 1 - e^{b-y}, & y \in [b, \infty]. \end{cases}$$

Teorema 1 (Teorema de Sklar). Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma cópula C tal que, para qualquer $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$,

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)).$$

Se F e G são contínuas, então C é única. Caso contrário, C está unicamente determinada em $\text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$, em que Ran^1 indica a imagem de uma aplicação. Reciprocamente, se C é uma cópula e F e G são funções de distribuição, então a expressão de H na fórmula definida acima é uma função de distribuição conjunta com marginais F e G .

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada na página 21 da referência dada por [Nelsen \(2006\)](#). \square

Entre outras interpretações, esse teorema nos diz que, dada uma distribuição conjunta e suas marginais, existe uma única cópula que acopla as marginais para gerar a distribuição conjunta. Sendo assim, sempre que nos for dada uma distribuição conjunta, podemos associá-la equivalentemente à sua cópula. Outra importante consequência do teorema de Sklar nos diz que, dada uma função de distribuição acumulada e suas respectivas marginais, é possível construir uma cópula a partir delas. Para enunciá-lo, no entanto, precisamos do conceito de quasi-inversa, conforme descrito na definição a seguir:

Definição 7. Seja F uma função de distribuição. Então a *quasi-inversa* de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio $[0, 1]$ tal que:

1. Se $t \in \text{Ran}(F)$, então $F^{(-1)}(t)$ é qualquer número $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, isto é, para todos valores $t \in \text{Ran}(F)$, $F(F^{(-1)}(t)) = t$.
2. Caso $t \notin \text{Ran}(F)$, então $F^{(-1)}(t) = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(x) \geq t\} = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid F(x) \leq t\}$.

¹ Do inglês *range*.

No caso em que F é estritamente crescente, então F é bijetora e $F^{(-1)} = F^{-1}$.

Corolário 2. Sejam H uma função de distribuição conjunta, em que F e G são suas marginais. Sendo $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ as quasi-inversas de F e G , então para qualquer par de valores $(x, y) \in [0, 1]^2$, a seguinte expressão de C representa uma cópula:

$$C(x, y) = H(F^{(-1)}(x), G^{(-1)}(y)).$$

Demonstração. Aplique o teorema de Sklar e as respectivas mudanças de variável. \square

Esse resultado representa um método inesgotável para construção de cópulas baseado em funções de distribuição conjuntas conhecidas.

Vamos continuar essa seção com a discussão sobre as desigualdades universais de Fréchet-Hoeffding, assim como consta na página 30 da referência [Nelsen \(2006\)](#). Essas desigualdades fornecem limites inferior e superior para uma cópula independentemente de sua natureza, de modo que os próprios limitantes são cópulas.

Proposição 3 (Desigualdade de Fréchet-Hoeffding). Seja C uma cópula. Então para qualquer par de valores $(x, y) \in \text{Dom}(C)$, vale que

$$W(x, y) := \max\{x + y - 1, 0\} \leq C(x, y) \leq \min\{x, y\} =: M(x, y).$$

Demonstração. Seja $(x, y) \in \text{Dom}(C)$ um par de valores qualquer. Uma vez que C é uma função não-decrescente em cada argumento, e $x \leq 1$ e $y \leq 1$, tem-se que $C(x, y) \leq C(x, 1) = x$ e $C(x, y) \leq C(1, y) = y$. Conseqüentemente, $C(x, y) \leq \min\{x, y\}$. Por outro lado, sabe-se que $V_C([1, x] \times [1, y]) = C(x, y) - C(x, 1) - C(1, y) + C(1, 1) \geq 0$, ou seja, $C(x, y) \geq x + y - 1$. Dado que $C(x, y) \geq 0$, decorre que $C(x, y) \geq \max\{x + y - 1, 0\}$, como queríamos demonstrar. \square

Trataremos, agora, da definição daquilo que entendemos por secções de determinada cópula. A apresentação desse conceito é de suma importância para a discussão do método a ser proposto, uma vez que a caracterização teórica das expressões candidatas a serem cópulas se baseia nas definições de secções horizontais e verticais. Sem mais delongas, temos a seguinte definição:

Definição 8. Seja C uma cópula, e seja $a \in [0, 1]$ um número real qualquer. A *secção horizontal* de C em a é a função que parte de $[0, 1]$ e chega a $[0, 1]$ dada por $t \mapsto C(t, a)$. Por outro lado, a *secção vertical* de C em a é a função que parte de $[0, 1]$ e chega a $[0, 1]$ dada por $t \mapsto C(a, t)$. E, por fim, a *secção diagonal* de C é a função $\delta_C(t)$ que parte de $[0, 1]$ e chega em $[0, 1]$, dada por $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Temos, ainda, as seguintes propriedades referentes às derivadas parciais de primeira ordem de cópulas bivariadas.

Teorema 2. Seja C uma cópula. Para todo $x \in [0, 1]$, a derivada parcial $C_x(x, y)$ existe para quase todos os valores de x , e, para tais y e x , $0 \leq C_x(x, y) \leq 1$. Resultado análogo vale para $C_y(x, y)$. Mais ainda, as funções $x \mapsto C_x(x, y)$ e $y \mapsto C_y(x, y)$ estão definidas e são não-decrescentes em $[0, 1]$.

Demonstração. A prova desse teorema, conforme consta, pode ser encontrada na página 14 da referência [Nelsen \(2006\)](#). \square

2.3 Cópulas multivariadas

Na discussão que se segue, apresentaremos as definições, propriedades e teoremas que generalizam o conceito de cópula bivariada para o caso multivariado ($n \geq 3$). Começaremos por estabelecer algumas notações que serão utilizadas para caracterizá-las.

Assim como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ indica a reta real estendida, a notação $\overline{\mathbb{R}}^n$ será utilizada para indicar o hiperplano estendido. Dado $\mathbf{a} \in \overline{\mathbb{R}}^n$ e $\mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}}^n$, diremos que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ quando $a_j \leq b_j$. Raciocínio análogo vale para $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Supondo que $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, o símbolo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ compreende o hipercubo $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Os vértices de B , por sua vez, serão indicados por $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ em que $c_j \in \{a_j, b_j\}$. Similarmente, $\mathbb{I} := [0, 1]$. Com base nessas considerações, podemos fazer a nossa primeira definição:

Definição 9. Sejam S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos não-vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função real a n variáveis reais tal que $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Seja $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ um hipercubo cujos vértices estão em $\text{Dom}(H)$. O H -volume de B é dado por:

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}),$$

em que a soma percorre todos os vértices possíveis \mathbf{c} , e a função $\text{sgn}(\mathbf{c})$ é dada por:

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} +1, & \text{se } c_j = a_j \text{ para um número par de } j\text{'s,} \\ -1, & \text{se } c_j = a_j \text{ para um número ímpar de } j\text{'s.} \end{cases}$$

No que segue, daremos um exemplo ilustrativo dessa definição.

Exemplo 4. Seja H uma função real a três variáveis reais com domínio $\overline{\mathbb{R}}^3$, e seja o cubo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$. O H -volume de B dá-se por

$$\begin{aligned} V_H(B) = & +H(x_2, y_2, z_2) - H(x_2, y_2, z_1) - H(x_2, y_1, z_2) - H(x_1, y_2, z_2) \\ & + H(x_2, y_1, z_1) + H(x_1, y_2, z_1) + H(x_1, y_1, z_2) - H(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Assim como acontece no caso bivariado, essa propriedade nos permite definir o que se entende por uma função ser n -crescente. Precisamente, temos a definição:

Definição 10. Uma função real H a n -variáveis reais é dita ser n -crescente se o H -volume $V_H(B) \geq 0$ para quaisquer hipercubos $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ cujos vértices estão em $\text{Dom}(H)$.

Uma vez entendida a propriedade que uma função H tem de ser n -crescente, estudaremos as versões análogas das definições e resultados correspondentes ao caso bivariado.

Definição 11. Suponhamos que H seja uma função real a n variáveis reais cujo domínio é dado por $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, em que cada conjunto S_j tem um elemento mínimo a_j . Dizemos que H é *grounded* se $H(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \text{Dom}(H)$ tal que $x_j = a_j$ para ao menos um valor de j .

Definição 12. Seja H uma função real a n variáveis reais cujo domínio é dado por $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, em que cada conjunto S_j tem um elemento máximo b_j . Nesse caso, dizemos que H tem *marginais*, e as *marginais unidimensionais* de H são as funções F_j , em que $\text{Dom}(F_j) = S_j$, dadas por:

$$F_j(x) = H(b_1, \dots, b_{j-1}, x, b_{j+1}, \dots, b_n) \text{ para todo } x \in S_j.$$

Proposição 4. Sejam S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos não-vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, e H uma função *grounded* e n -crescente com domínio $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Então H é não-decrescente em cada argumento, isto é, dados $\mathbf{t}_1 = (t_1, \dots, t_{j-1}, x, t_{j+1}, \dots, t_n)$ e $\mathbf{t}_2 = (t_1, \dots, t_{j-1}, y, t_{j+1}, \dots, t_n)$ pertencentes ao domínio de H em que $x < y$, então $H(\mathbf{t}_1) \leq H(\mathbf{t}_2)$.

Proposição 5. Sejam S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos não-vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função *grounded* e n -crescente com marginais cujo domínio é dado por $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Considerando $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ como quaisquer elementos de $\text{Dom}(H)$, resulta que:

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{j=1}^n |F_j(x_j) - F_j(y_j)|.$$

Definição 13. Uma cópula n -dimensional (ou, simplesmente, n -cópula) é uma função $C: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ com as seguintes propriedades:

1. Para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, $C(\mathbf{x}) = 0$ quando pelo menos um $x_j = 0$,
2. Tem-se que $C(\mathbf{x}) = x_j$ quando $x_i = 1$ para todo $i \neq j$ (marginais uniformes),
3. Para quaisquer $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{I}^n$ com $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, vale que $V_C[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \geq 0$.

Em outras palavras, n -cópulas são funções de distribuição definidas em hipercubos, *grounded*, n -crescentes com marginais uniformes.

Corolário 3. Seja C uma n -cópula. Então, para quaisquer \mathbf{x} e \mathbf{y} em \mathbb{I}^n , vale que:

$$|C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{y})| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

Demonstração. Basta aplicar a [Proposição 5](#) no caso particular em que a distribuição tem marginais que seguem distribuição uniforme. \square

A seguir, apresentaremos a versão multivariada do teorema de Sklar. Mas, antes disso, discutiremos as definições necessárias ao seu bom entendimento. Começaremos pela seguinte definição:

Definição 14. Uma *função de distribuição n -dimensional* é uma função H com domínio $\overline{\mathbb{R}}^n$ e contradomínio \mathbb{R} tal que:

1. H é n -crescente e *grounded*,
2. $H(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$.

Como consequência do fato de que uma função de distribuição n -dimensional é *grounded* e n -crescente, decorre que suas marginais são não-decrescentes. Aliando-se a esse resultado o fato de que cada marginal satisfaz $F_j(-\infty) = 0$ e $F_j(+\infty) = 1$, $1 \leq j \leq n$, conclui-se que tais marginais são elas próprias funções de distribuição também.

Teorema 3 (Teorema de Sklar). Seja H uma função de distribuição n -dimensional com marginais F_1, F_2, \dots, F_n . Então existe uma n -cópula C tal que, para todo $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n$,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (2.1)$$

Se F_1, F_2, \dots, F_n são contínuas, então C é única. Caso contrário, C está unicamente determinada sobre $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$. Reciprocamente, se C é uma n -cópula e F_1, F_2, \dots, F_n são funções de distribuição, então a função H definida em (2.1) é uma função de distribuição n -dimensional com marginais F_1, F_2, \dots, F_n .

Demonstração. A demonstração desse teorema, conforme consta, pode ser encontrada na página 52 da referência [Durante \(2016\)](#). \square

Como consequência do teorema de Sklar, temos um resultado que, assim como acontece no caso de cópulas bivariadas, fornece um método inesgotável para se gerar cópulas multivariadas. Mais precisamente, segue o seu enunciado:

Corolário 4. Sejam $H, C, F_1, F_2, \dots, F_n$ como no Teorema de Sklar, em que $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ são as quasi-inversas de F_1, F_2, \dots, F_n , respectivamente. Então, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, vale

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = H(F_1^{(-1)}(x_1), F_2^{(-1)}(x_2), \dots, F_n^{(-1)}(x_n)).$$

Proposição 6 (Desigualdade FH). Seja C uma n -cópula. Então, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$,

$$W^n(\mathbf{x}) := \max\{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n + 1, 0\} \leq C(\mathbf{x}) \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} =: M^n(\mathbf{x}).$$

Demonstração. Começaremos por provar a segunda desigualdade. Seja $C : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ uma n -cópula. Dado, portanto, que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (1, 1, \dots, 1)$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, vale que

$$C(\mathbf{x}) \leq C(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \leq C(x_1, x_2, \dots, 1, 1) \leq \dots \leq C(x_1, 1, \dots, 1, 1) = x_1.$$

posto que cópulas são funções não-decrescentes em cada argumento e possuem marginais uniformes. Uma vez que o mesmo raciocínio se aplica aos demais argumentos, o resultado $C(\mathbf{x}) \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ segue.

A segunda parte dessa demonstração se fundamenta na versão da definição de cópulas baseada na teoria da medida. Dito isso, sugere-se que o leitor volte aqui após tê-la revisado. Uma vez que $C(\mathbf{x})$ é uma função de distribuição conjunta de um vetor aleatório $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ em que cada marginal $X_j \sim U_{[0,1]}$, dado $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, vale que:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \leq x_j\}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^n \{X_j > x_j\}\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j > x_j) = 1 - \sum_{j=1}^n (1 - x_j) = 1 - n + \sum_{j=1}^n x_j. \end{aligned}$$

Posto que $C(\mathbf{x}) \geq 0$, o resultado segue. □

2.4 Teoria da medida: uma breve revisão

Antes de rerepresentar as definições de cópulas bivariadas, multivariadas, conceitos e resultados correlatos, discutiremos conceitos e resultados relacionados à teoria da medida, para que possamos fundamentar a abordagem que será feita adiante. Em primeiro lugar, começaremos com a definição de álgebra e σ -álgebra.

Definição 15. Dado um conjunto não-vazio Ω , uma classe de subconjuntos $\Sigma \subseteq 2^\Omega$ é dita uma álgebra se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $\Omega \in \Sigma$,
- (b) Se $A \in \Sigma$, então $A^c \in \Sigma$,
- (c) Se $A, B \in \Sigma$, então $A \cup B \in \Sigma$.

Definição 16. Seja $\Sigma \subseteq 2^\Omega$, em que Ω é um conjunto não-vazio. Nós dizemos que Σ é uma σ -álgebra se, e somente se, Σ é uma álgebra que também é fechada com relação à união enumerável, isto é:

- (d) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$, então $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \Sigma$.

Muitas vezes, estamos interessados em certa classe de subconjuntos de Ω que não necessariamente consiste em uma σ -álgebra. A fim de fazer a transição entre a classe de interesse e a σ -álgebra desejada, precisamos do conceito de σ -álgebra gerada por um conjunto $\mathbb{A} \subseteq 2^\Omega$.

Definição 17. Seja Ω um conjunto não-vazio e $\mathbb{A} \subseteq 2^\Omega$ uma classe de subconjuntos de Ω . Denotamos por $\sigma\langle\mathbb{A}\rangle$, a menor σ -álgebra gerada por \mathbb{A} , como sendo

$$\sigma\langle\mathbb{A}\rangle = \bigcap_{\Sigma \in S(\mathbb{A})} \Sigma,$$

em que $S(\mathbb{A})$ é o conjunto de todas as σ -álgebras definidas sobre Ω que contêm \mathbb{A} .

Note que tal conceito está bem definido, pois sempre temos $\mathbb{A} \subseteq 2^\Omega$, em que 2^Ω é uma σ -álgebra. Para uso *posteriori*, dado um espaço topológico (X, τ) , chamamos de σ -álgebra de Borel associada à σ -álgebra gerada pelos abertos da topologia τ .

Uma vez que já definimos o conceito de álgebra, podemos agora tratar do problema de atribuir medidas a cada um de seus conjuntos.

Definição 18. Sejam Ω um conjunto não-vazio e Σ uma álgebra sobre Ω . Dizemos que a aplicação $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$ é uma medida se, e somente se,

- (a) $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$,
- (b) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (c) (Aditividade contável) Se $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definição 19. Uma medida μ é finita ou infinita se $\mu(\Omega) < \infty$ ou $\mu(\Omega) = +\infty$, respectivamente. Além disso, uma medida μ sobre uma σ -álgebra Σ é dita σ -finita se existe uma coleção contável $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$ (não necessariamente disjunta) tal que

- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$,
- $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Por fim, além dos resultados mencionados até o presente momento, é possível demonstrar que uma medida cumpre as seguintes propriedades: monotonicidade, subaditividade finita, aditividade finita, subaditividade contável, continuidade monótona por baixo, continuidade monótona por cima, e a fórmula de inclusão-exclusão. As demonstrações dessas propriedades estão em [Terence Tao \(2015\)](#) e [Krishna \(2006\)](#).

Trataremos agora do problema mencionado anteriormente. Mais precisamente, se partirmos de um conjunto “interessante”, como podemos estendê-lo a um espaço em que possamos trabalhar mais “confortavelmente”²? A fim de responder a essa pergunta, começaremos por descrever o que entendemos por conjunto “interessante”, bem como definiremos o conceito de medida sobre ele.

Definição 20. Seja Ω um conjunto não-vazio e $\mathbb{S} \subset 2^\Omega$ uma classe de subconjuntos de Ω . Dizemos que \mathbb{S} é uma semiálgebra se, e somente se,

- (a) Se $A, B \in \mathbb{S}$, então $A \cap B \in \mathbb{S}$,
- (b) Se $A \in \mathbb{S}$, então existe uma coleção finita e disjunta de elementos $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathbb{S}$ tal que $A^c = \bigcup_{i=1}^k B_i$.

Definição 21. Seja Ω um conjunto não-vazio e \mathbb{S} uma semiálgebra definida sobre ele. Dizemos que $\mu : \mathbb{S} \rightarrow [0, +\infty)$ é uma medida se, e somente se,

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (b) μ satisfaz a propriedade de aditividade contável, isto é,

$$(\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{S}) \wedge \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S} \right) \wedge (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para } i \neq j) \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A fim de transportar a medida μ da semiálgebra \mathbb{S} para um “conjunto confortável” para se trabalhar, precisamos de um conceito intermediário chamado medida exterior. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 22. Dada uma medida μ sobre uma semiálgebra \mathbb{S} , a medida exterior induzida por μ é a função $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{S}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}. \quad (2.2)$$

Embora a medida exterior μ^* seja uma boa aproximação do conceito de medida que desejamos utilizar, nós não a empregamos porque ela não satisfaz todas as propriedades que esperamos de uma medida. Mais precisamente, ela não cumpre a aditividade finita e a aditividade contável. Porém existe uma maneira (proposta por Caratheodory) de contornar esse problema utilizando o conceito de conjunto μ^* -mensurável, cuja descrição é dada pela seguinte definição:

Definição 23. Um conjunto $A \subseteq \Omega$ é dito μ^* -mensurável se

$$\mu^*(A) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ para todos } E \subset \Omega.$$

² Tal conjunto é denominado espaço de medida. Apresentaremos sua definição mais adiante.

Mais genericamente, qualquer função $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo as propriedades

- (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (b) (Monotonicidade) Se $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- (c) (Subaditividade contável) Para qualquer coleção $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset 2^\Omega$,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

é denominada uma medida exterior.

Assim sendo, temos o seguinte resultado devido ao Caratheodory cuja demonstração pode ser encontrada na página 22 da referência [Krishna \(2006\)](#).

Teorema 4. Seja $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty)$ uma medida exterior sobre 2^Ω . Consideremos, ainda, o conjunto $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\mu^*} = \{A \in 2^\Omega : A \text{ é } \mu^* \text{-mensurável}\}$. Então,

- (a) \mathbb{M} é uma σ -álgebra,
- (b) μ^* restrita a \mathbb{M} é uma medida, e
- (c) $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow 2^A \subset \mathbb{M}$.

Tal teorema evidencia a importância do conceito de σ -álgebra no contexto da teoria das probabilidades (e, portanto, também no contexto da teoria da medida): a classe de subconjuntos do espaço amostral Ω constituída daqueles conjuntos que consideramos mensuráveis se trata de uma σ -álgebra.

Podemos, agora, apresentar o resultado que formaliza a ideia previamente mencionada de estender a terna $(\Omega, \mathbb{S}, \mu)$ para a terna $(\Omega, \mathbb{M}_{\mu^*}, \mu^*)$:

Teorema 5 (Teorema da extensão de Caratheodory). Seja μ uma medida sobre uma semiálgebra \mathbb{S} e seja μ^* uma função como definida em (2.2). Então

- (a) μ^* é uma medida exterior,
- (b) $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}_{\mu^*}$, e
- (c) $\mu^* = \mu$ quando restrita a \mathbb{S} .

Demonstração. A demonstração desse teorema, conforme consta, pode ser encontrada na página 24 da referência [Krishna \(2006\)](#). □

Com base nesse resultado, apresentaremos a medida de Lebesgue-Stieltjes em \mathbb{R}^2 . Mas antes descreveremos sua versão em \mathbb{R} . Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sejam $F(x+)$ e $F(x-)$ os limites laterais à direita e à esquerda de x , respectivamente. Além disso, sejam $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ e $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Consideremos também a seguinte classe de subconjuntos de Ω dada por

$$\mathbb{S} := \{(a, b] \in \mathbb{R} : -\infty \leq a \leq b < \infty\} \cup \{(a, \infty) : -\infty \leq a < \infty\}.$$

Mais ainda, definamos que

$$\begin{cases} \mu_F((a, b]) = F(b+) - F(a+), \\ \mu_F((a, \infty)) = F(\infty) - F(a+). \end{cases}$$

Então pode ser demonstrado que \mathbb{S} é uma semiálgebra e μ_F é uma medida sobre \mathbb{S} . Em decorrência do teorema da extensão de Caratheodory, temos a seguinte definição:

Definição 24. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. O espaço $(\mathbb{R}, \mathbb{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$ é designado *espaço de medida de Lebesgue-Stieltjes* e a medida μ_F^* é chamada *medida de Lebesgue-Stieltjes* gerada por F .

Aqui, vale ressaltar que $\sigma(\mathbb{S}) = \mathbf{B}(\mathbb{R})$, a σ -álgebra de Borel. Uma vez que $\mathbb{M}_{\mu_F^*} \supset \mathbb{S}$, decorre que toda medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F^* também é uma medida em $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$. Em particular, quando $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, μ_F^* é chamada de *medida de Lebesgue* e a σ -álgebra $\mathbb{M}_{\mu_F^*}$ é conhecida como a classe de conjuntos *Lebesgue mensuráveis*.

Dito isso, podemos prosseguir. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1) \geq 0 \quad \wedge \quad F(a_2, b_2) - F(a_1, b_1) \geq 0,$$

em que $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$. Consideremos, ainda, a seguinte classe de subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{S}_2 := \{I_1 \times I_2 : I_1, I_2 \in \mathbb{S}\},$$

em que \mathbb{S} corresponde à semiálgebra previamente definida. Além disso, consideremos a seguinte função sobre \mathbb{S}_2 , cuja definição é induzida por F :

$$\mu_F(I_1 \times I_2) = F(a_2+, b_2+) - F(a_2+, b_1+) - F(a_1+, b_2+) + F(a_1+, b_1+),$$

com $I_1 = (a_1, b_1]$ e $I_2 = (a_2, b_2]$. Tal definição pode ser estendida naturalmente para conjuntos ilimitados de \mathbb{S}_2 , conforme consta na página 27 da referência (Krishna, 2006). Mais ainda, vale ressaltar que, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, vale a definição:

$$F(a+, b+) = \lim_{x \downarrow a, y \downarrow b} F(x, y).$$

Assim sendo, é possível demonstrar que \mathbb{S}_2 é uma semiálgebra sobre \mathbb{R}^2 e μ_F é uma medida com relação a ela.

A tripla $(\mathbb{R}^2, \mathbb{M}_{\mu_F^*}, \mu_F^*)$ correspondente ao teorema da extensão de Caratheodory é conhecida como espaço de medida de Lebesgue-Stieltjes em \mathbb{R}^2 . Novamente, uma vez que $\mathbb{M}_{\mu_F^*} \supset \mathbb{S}_2$, podemos restringir μ_F^* à σ -álgebra de Borel $\mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$, donde obtemos o espaço de medida $(\mathbb{R}^2, \mathbf{B}(\mathbb{R}^2), \mu_F^*)$. Adicionalmente, se $F(a, b) = ab$, a função μ_F é conhecida com *medida de Lebesgue* sobre \mathbb{R}^2 .

Definição 25. Seja Ω um conjunto não-vazio. Se Σ é uma σ -álgebra sobre Ω , o par (Ω, Σ) é denominado um *espaço mensurável*. Além disso, se tivermos uma medida μ sobre Σ , a terna (Ω, Σ, μ) é conhecida como espaço de medida. Adicionalmente, se μ é uma medida de probabilidade, então a terna (Ω, Σ, μ) é designada *espaço de probabilidade*.

Definição 26. Sejam (Ω_1, Σ_1) e (Ω_2, Σ_2) dois espaços mensuráveis e $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ uma aplicação. Dizemos que T é mensurável se, e somente se, a pré-imagem de conjuntos mensuráveis é mensurável. Isto é, se $A \in \Sigma_2$, então $T^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Nesse caso, dizemos que T é (Σ_1, Σ_2) -mensurável.

Definição 27. Dado um espaço mensurável (Ω, Σ) , dizemos que a função $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é *simples* se existe uma coleção finita $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset \overline{\mathbb{R}}$, bem como conjuntos mensuráveis A_1, A_2, \dots, A_n , tal que f pode ser escrita como:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}.$$

Em outras palavras, dada um espaço mensurável (Ω, Σ) , dizemos que uma função é simples quando ela é combinação linear de funções indicadoras de conjuntos mensuráveis. Quando se trata de integração, cabe a seguinte pergunta natural: como podemos integrar uma função simples? A resposta é dada pela seguinte definição:

Definição 28. Seja $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ uma função simples não-negativa sobre um espaço de medida (Ω, Σ, μ) . A integral de f com relação à medida μ é descrita por:

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i),$$

de acordo com a mesma notação da definição anterior.

Antes de definir a integral de uma função mensurável não-negativa, precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 6. Toda função Borel-mensurável não-negativa f é o limite pontual de uma sequência crescente de funções simples não-negativas.

Demonstração. A demonstração desse resultado, conforme consta, pode ser encontrada na página 40 da referência (Robert, 2000). \square

Definição 29. Seja $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ uma função mensurável não-negativa sobre (Ω, Σ, μ) . Então a integral de f com relação a μ é dada por:

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu,$$

em que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é qualquer sequência de funções simples, crescentes e não-negativas que convergem pontualmente para f .

É possível demonstrar que tal integral está bem definida, isto é, ela independe da escolha da sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$, desde que ela cumpra as restrições impostas.

Temos, enfim, a definição de integral para uma função Borel-mensurável qualquer, isto é, uma função mensurável não necessariamente não-negativa. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 30. Seja f uma função mensurável a valores reais definida sobre o espaço de medida (Ω, Σ, μ) . Sejam $f^+ = f\chi_{\{f \geq 0\}}$ e $f^- = -f\chi_{\{f < 0\}}$ as partes positiva e negativa de f , respectivamente. Então a integral de f com relação à medida μ é definida por:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

desde que ao menos uma das integrais do lado direito seja finita.

Temos, enfim, um resultado (cuja demonstração consta na página 57 de (Robert, 2000)) que nos auxilia a calcular integrais de Lebesgue:

Teorema 7. Seja f uma função limitada a valores reais definida sobre $[a, b]$.

- (a) A função f é Riemann integrável em $[a, b]$ se, e somente se, f é contínua quase sempre sobre $[a, b]$ em relação à medida de Lebesgue.
- (b) Se f é Riemann integrável em $[a, b]$, então f é integrável em relação à medida de Lebesgue sobre $[a, b]$, e as duas integrais são iguais.

Uma vez que todas as integrais a serem calculadas futuramente são Riemann integráveis, não precisaremos apelar para o teorema da convergência monótona ou resultados afins para encontrar as integrais propostas. De qualquer maneira, escolhemos registrar as definições da integral de Lebesgue nessa dissertação por conta da sua importância teórica na discussão da teoria de cópulas.

Antes de finalizar essa seção, precisamos discutir o teorema de Radon-Nikodym e conceitos relacionados ao seu bom entendimento. Começaremos pela seguinte definição:

Definição 31. Sejam (Ω, Σ) um espaço mensurável, μ e ν duas medidas sobre (Ω, Σ) . A medida μ é dita *dominada* por ν ou *absolutamente contínua* com relação a ν (e escrevemos $\mu \ll \nu$) se $\nu(A) = 0$ implica que $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \Sigma$.

Exemplo 5. Seja m a medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$ e seja μ a distribuição

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dm,$$

então $m(A) = 0$ implica que $\mu(A) = 0$ e, portanto, $\mu \ll m$.

Exemplo 6. Seja f uma função mensurável não-negativa sobre o espaço de medida (Ω, Σ, ν) . Seja

$$\mu(A) = \int_A f d\nu, \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Então μ é uma medida sobre (Ω, Σ) tal que $\nu(A) = 0$ implica $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \Sigma$.

O teorema de Radon-Nikodym diz quais condições são necessárias para que valha o contrário. Mais precisamente, tal resultado afirma que se μ e ν são medidas σ -finitas sobre um espaço mensurável (Ω, Σ) e se $\mu \ll \nu$, então existe uma função mensurável não-negativa f sobre (Ω, Σ) tal que a recíproca da afirmação acima valha.

Definição 32. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável e sejam μ e ν duas medidas sobre (Ω, Σ) . Então μ é dita *singular* com relação a ν (e escrevemos $\mu \perp \nu$) se existe um $B \in \Sigma$ tal que $\mu(B) = 0$ e $\nu(B^c) = 0$. Tal relação é sempre recíproca.

Teorema 8 (Teorema da decomposição de Lebesgue e teorema de Radon-Nikodym). Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável e sejam μ_1 e μ_2 duas medidas σ -finitas sobre (Ω, Σ) .

(a) A medida μ_1 pode ser unicamente decomposta como:

$$\mu_1 = \mu_{1a} + \mu_{1s},$$

em que μ_{1a} e μ_{1s} são medidas σ -finitas sobre (Ω, Σ) tais que $\mu_{1a} \ll \mu_2$ e $\mu_{1s} \perp \mu_2$.

(b) Existe uma função mensurável não-negativa h sobre (Ω, Σ) tal que:

$$\mu_{1a}(A) = \int_A h d\mu_2 \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Demonstração. As demonstrações desses resultados, conforme constam, podem ser encontradas na página 115 da referência [Krishna \(2006\)](#). \square

2.5 Versão probabilística

Os resultados que serão apresentados nessa seção foram retirados, em sua maior parte, das referências [Durante \(2016\)](#) e [Krishna \(2006\)](#). Antes de discutirmos cópulas propriamente ditas, vamos apresentar a noção de variáveis e vetores aleatórios bem como conceitos correlatos.

Dizemos que X é uma variável aleatória se X é uma função $\langle \Sigma, \mathbf{B}(\mathbb{R}) \rangle$ -mensurável, em que $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade. Em vista dessa definição, faz sentido medir os conjuntos da forma $X^{-1}(A)$ em que $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$, pois $X^{-1}(A) \in \Sigma$. Conseqüentemente, podemos considerar a função dada por

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)).$$

A pergunta que naturalmente cabe fazer é: será que a função \mathbb{P}_X é uma medida também? A resposta se encontra na seguinte proposição:

Proposição 7. Sejam (Ω_1, Σ_1) e (Ω_2, Σ_2) dois espaços mensuráveis, e seja $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ uma função $\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle$ -mensurável. Então, dada qualquer medida μ sobre (Ω_1, Σ_1) , a função dada por μT^{-1} definida por

$$\mu T^{-1}(A) := \mu(T^{-1}(A)), \text{ em que } A \in \Sigma_2,$$

é uma medida em Σ_2 .

Demonstração. Nitidamente, temos $\mu T^{-1}(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(B) \geq 0$ para algum $B \in \Sigma_1$, e a primeira condição da definição de medida é satisfeita. Ainda, também temos que $\mu T^{-1}(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$, e a segunda condição da definição de medida também é satisfeita. Finalmente, se $\{A_n\}_{n \geq 1} \in \Sigma_2$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, temos

$$\mu T^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu \left(T^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A_n)),$$

e temos a aditividade contável, como queríamos demonstrar. \square

Em particular, se μ é uma medida de probabilidade, então μT^{-1} também é. Mais precisamente, se $\mu(\Omega_1) = 1$, então $\mu T^{-1}(\Omega_2) = \mu(T^{-1}(\Omega_2)) = \mu(\Omega_1) = 1$. Podemos, agora, enunciar as seguintes definições:

Definição 33. Dada uma variável aleatória X definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, a *distribuição de probabilidade* de X , denotada por \mathbb{P}_X , é a medida de probabilidade induzida sobre o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$ através da variável aleatória X .

Definição 34. Seja a tripla $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um *vetor aleatório* n -dimensional \mathbf{X} é uma aplicação mensurável de Ω em \mathbb{R}^n . Aqui, a palavra *mensurável* deve ser entendida como previamente descrito, isto é, \mathbf{X} é mensurável se

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \Sigma \text{ sempre que } B \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^n),$$

em que o símbolo $\mathbf{B}(\mathbb{R}^n)$ indica a σ -álgebra gerada pelos abertos de uma topologia (\mathbb{R}^n, τ) .

Dada uma variável aleatória X sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, e a definição de distribuição de probabilidade \mathbb{P}_X induzida por X , construção análoga pode ser feita no caso de um vetor aleatório. A diferença está no fato de que, agora, o contradomínio é dado por $(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}(\mathbb{R}^n))$.

Com base nessas considerações, podemos definir quando duas ou mais variáveis aleatórias são independentes. Precisamente, as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ são ditas *independentes* se, para quaisquer n escolhas de conjuntos borelianos B_1, B_2, \dots, B_n , tem-se que

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j^{-1}(B_j)) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X_j \in B_j).$$

Em virtude das vantagens que o conhecimento da função de distribuição traz quando do estudo de \mathbb{P}_X , antes de tudo, começaremos por descrever a definição de funções de distribuição univariadas.

Definição 35. A *função de distribuição* F_X de uma variável aleatória X sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ é a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t),$$

em que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

Além da caracterização probabilística de funções de distribuição, temos a seguinte caracterização analítica:

Teorema 9. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- Existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ e uma variável aleatória X sobre ele tal que F é a função de distribuição de X ;
- F satisfaz as seguintes propriedades:
 - a) F é contínua à direita,
 - b) F é não-crescente,
 - c) F satisfaz os seguintes limites: $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

Podemos, agora, estudar a versão generalizada da definição de funções de distribuição.

Definição 36. A função de distribuição de um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ é definida como:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n),$$

para quaisquer valores x_1, x_2, \dots, x_n em \mathbb{R} .

Dois vetores aleatórios \mathbf{X} e \mathbf{Y} são ditos *iguais em distribuição* se a função de distribuição de \mathbf{X} é igual à função de distribuição de \mathbf{Y} . Assim como foi feito no caso univariado, o próximo resultado caracteriza analiticamente funções de distribuição de vetores aleatórios.

Teorema 10. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- Existe um vetor aleatório \mathbf{X} sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ tal que F é a função de distribuição de \mathbf{X} .
- F satisfaz as seguintes propriedades:
 - a) Para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e para todos x_1, x_2, \dots, x_n em \mathbb{R} , a função

$$t \mapsto F(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

é contínua à direita,

- b) F é n -crescente,
- c) $F(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, se ao menos um dos argumentos de \mathbf{x} tende a $-\infty$,
- d) $\lim_{\min\{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.

Aqui cabe um comentário probabilístico. Em decorrência da fórmula para inclusão e exclusão de probabilidades, se o vetor aleatório $\mathbf{X} \sim F$, então $V_F([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, em que \mathbf{a} e \mathbf{b} são elementos de \mathbb{R}^n e $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

A seguir, temos a definição de distribuição marginal correspondente a uma função de distribuição H dada. Para ser exato, temos a seguinte definição:

Definição 37. Seja H uma função de distribuição n -dimensional e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Designamos por *distribuição marginal* de H a função de distribuição $F_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ definida por meio da fixação de $n - 1$ argumentos de H no valor $+\infty$. Precisamente, para quaisquer valores $x_j \in \mathbb{I}$,

$$F_j(x_j) = H(+\infty, \dots, +\infty, x_j, +\infty, \dots, +\infty),$$

Podemos, similarmente, definir a distribuição k -marginal ($1 \leq k \leq n - 1$) fixando $n - k$ argumentos de H em $+\infty$.

Com base nessas considerações, se as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, e cada uma das variáveis X_j tem função de distribuição dada por F_j , então a distribuição de \mathbf{X} é dada por

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n F_j(x_j).$$

Proposição 8. Seja H uma função de distribuição n -dimensional, e sejam F_1, F_2, \dots, F_n suas distribuições marginais. Então, para quaisquer pares de vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , temos

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{j=1}^n |F_j(x_j) - F_j(y_j)|.$$

Demonstração. A demonstração dessa proposição, conforme consta, pode ser encontrada na página 9 da referência Durante (2016). \square

Particularmente, dizemos que F tem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ se $F(t) = t$ para todo $t \in [0, 1]$, $F(t) = 0$ para $t < 0$ e $F(t) = 1$ para $t > 1$. Baseando-se nessa consideração, temos a seguinte definição:

Definição 38. Para todo natural $n \geq 2$, uma cópula n -dimensional (ou uma n -cópula) é uma função de distribuição n -dimensional concentrada em \mathbb{I}^n (isto é, $C(\mathbb{I}^n) = 1$) cujas marginais univariadas estão uniformemente distribuídas em \mathbb{I} . O conjunto de n -cópulas é designado por \mathcal{C}_n .

Corolário 5. Uma n -cópula C é Lipschitz. Isto é, para quaisquer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{I}^n , vale que

$$|C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{y})| \leq \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

Demonstração. A demonstração dessa afirmação consiste em aplicar o resultado correspondente à Proposição 8. \square

Como consequência do Teorema 10, a cada cópula C corresponde um vetor aleatório \mathbf{X} definido sobre um espaço de probabilidade de modo que a função de distribuição conjunta de \mathbf{X} é dada por C . Baseando-se nesse fato, podemos descrever a cópula produto, a qual caracteriza distribuições independentes. Precisamente, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 7 (Cópulas produto Π^n). Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes definidas sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Suponha que cada X_j esteja uniformemente distribuída em \mathbb{I} . Considere agora o vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Então, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x_n) = \prod_{j=1}^n x_j. \quad (2.3)$$

Portanto, a função de distribuição dada por (2.3), em que $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, a qual designaremos por Π^n , é uma cópula, usualmente denominada de *cópula produto*.

Em virtude do Teorema 10, cópulas podem ser caracterizadas equivalentemente em termos das suas propriedades analíticas. Nesse sentido, pode ser demonstrado que a definição apresentada em Definição 13 é equivalente àquela oferecida em Definição 38. De fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 11. Uma função $C : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ é uma n -cópula sse as seguintes condições valem:

- a) $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ se ao menos um x_j for igual a zero.
- b) $C(1, \dots, 1, x_j, 1, \dots, 1) = x_j$.
- c) C é n -crescente.

Teorema 12. O conjunto \mathcal{C}_n é convexo, isto é, para todos $\varphi \in \mathbb{I}$, C_0 e C_1 em \mathcal{C}_n , $C = \varphi C_0 + (1 - \varphi)C_1 \in \mathcal{C}_n$.

Demonstração. A demonstração desse resultado, conforme consta, pode ser encontrada na página 16 da referência Durante (2016). \square

Teorema 13 (Teorema de Sklar). Seja $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um vetor aleatório definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, e $H(\mathbf{x}) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$ uma função de distribuição conjunta de \mathbf{X} , em que $F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j)$ são suas marginais ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Portanto existe uma n -cópula $C = C_{\mathbf{X}}$ tal que, para todo ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Caso as marginais F_1, F_2, \dots, F_n sejam contínuas, então C é unicamente determinada.

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Durante (2016). \square

Em outras palavras, o que esse teorema diz (em termos probabilísticos) é que, dada um vetor aleatório $\mathbf{X} \sim H$, existe uma única cópula que associa suas distribuições marginais F_j com a sua respectiva distribuição conjunta H . Desse modo, sempre que for dado um vetor aleatório, podemos (equivalentemente) pensar na sua cópula associada.

Definição 39. Uma cópula $C \in \mathcal{C}_n$ é dita *absolutamente contínua* se ela satisfizer

$$C(\mathbf{x}) = \int_{[0, \mathbf{x}]} c(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

para alguma função convenientemente integrável $c : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Teorema 14. As derivadas parciais de uma n -cópula são Borel-mensuráveis e satisfazem

$$0 \leq \frac{\partial C(\mathbf{x})}{\partial x_j} \leq 1.$$

Demonstração. A prova desse resultado está na página 21 de Durante (2016). \square

2.6 Coeficientes de correlação

Em Spearman (1904), é proposta a seguinte fórmula para expressar a correlação entre as componentes do vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} \rho_S &= \frac{\text{Cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))}{\sqrt{\text{Var}(F_1(X_1))}\sqrt{\text{Var}(F_2(X_2))}} = \frac{\text{Cov}(U_1, U_2)}{\sqrt{\text{Var}(U_1)}\sqrt{\text{Var}(U_2)}} \quad (2.4) \\ &= \frac{\mathbf{E}[U_1 U_2] - \mathbf{E}[U_1]\mathbf{E}[U_2]}{\sqrt{\text{Var}(U_1)}\sqrt{\text{Var}(U_2)}} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{12}} \times \sqrt{\frac{1}{12}}} = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) du dv - 3. \end{aligned}$$

em que $X \sim F$, $X_1 \sim F_1$, $X_2 \sim F_2$, $\mathbf{U} = (U_1, U_2) \sim C$ e C é a cópula associada a \mathbf{X} .

Em vista do conceito de concordância, podemos fornecer uma interpretação para o coeficiente ρ_S de Spearman em acordo com a referência Kruskal (1958). Seja $\mathbf{X} = (X, Y)$ um vetor aleatório. Consideremos, pois, um par de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) . Dizemos que tais observações são concordantes caso $x_i < x_j$ implicar que $y_i < y_j$ ou caso $x_i > x_j$ implicar $y_i > y_j$. Em outras palavras, valores grandes de realizações de X estão associados a valores grandes de realizações de Y , e o mesmo vale para valores pequenos. Dizemos, enfim, que as observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são discordantes caso contrário. Equivalentemente, as observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se, e somente, $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ e discordantes se, e somente se, $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

Se denotarmos por (X, Y) o par de variáveis aleatórias de interesse e por (x_0, y_0) um valor previamente fixado, uma possível (e simples) medida de correlação é dada por $\mathbb{P}((X - x_0)(Y - y_0) > 0)$. Cabe, portanto, a seguinte pergunta: quais deveriam ser os valores de x_0 e y_0 ? Talvez, a melhor maneira de evitar arbitrariedades na escolha de x_0 e y_0 consista em ponderar $\mathbb{P}((X - x_0)(Y - y_0) > 0)$ sobre todos os valores possíveis de (x_0, y_0) cujos pesos são dados pela distribuição conjunta do par (X, Y) . Ou ainda, nós deveríamos ponderar $\mathbb{P}((X - x_0)(Y - y_0) > 0) - \mathbb{P}((X - x_0)(Y - y_0) < 0)$. É aqui que entram as probabilidades de concordância e discordância. Mais precisamente, as probabilidades de concordância e discordância são dadas por

$$\Pi_c = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0), \quad \Pi_d = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0),$$

em que (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) são dois vetores aleatórios independentes, cada qual com a mesma função de distribuição conjunta em consideração. Uma medida plausível de associação em termos de Π_c e Π_d é dada por $\tau = \Pi_c - \Pi_d = 2\Pi_c - 1 = 1 - 2\Pi_d$. Temos, assim, as seguintes consequências. Primeiramente, $\tau \in [-1, 1]$, de modo que $\tau = -1$ se o par de variáveis aleatórias são 100% discordantes, $\tau = 1$ se o par de variáveis aleatórias é 100% concordante, e $\tau = 0$ se as variáveis aleatórias são independentes. Além disso, τ é invariante a transformações monótonas de X e Y , isto é, $\tau_{X,Y} = \tau_{\alpha(X),\beta(Y)}$ caso α e β sejam ambas estritamente crescentes ou estritamente decrescentes. Tal medida de correlação é conhecida como *tau de Kendall*.

Em ressonância com o que foi apresentado anteriormente, soa razoável ponderar $\mathbb{P}((X - x_0)(Y - y_0))$ com relação às suas distribuições marginais, tomadas independentemente. Precisamente, consideraremos $\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0)$, em que $X_2 \sim X_1$, $Y_3 \sim Y_1$, e as variáveis aleatórias X_2 e Y_3 bem como o vetor aleatório (X, Y) são independentes. Informalmente falando, suponhamos que três observações independentes (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) da distribuição de interesse tenham sido realizadas. Consideremos, a seguir, a probabilidade de concordância entre (X_1, Y_1) e a observação cruzada (X_2, Y_3) ,

$$\pi_c = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0).$$

Similarmente, consideraremos a probabilidade de discordância π_d entre (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3) , e subtrairemos a segunda da primeira, isto é,

$$\begin{aligned} \pi_c - \pi_d &= \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0) \\ &= 2\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - 1 = 2\pi_c - 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assim como acontece com o coeficiente de correlação τ , a expressão em 2.5 admite uma interpretação em termos de concordância e discordância. Similarmente a τ , $\pi = \pi_c - \pi_d$ é igual a zero quando X e Y são independentes. Contudo, $\pi \in [-1/3, 1/3]$: π admite seu valor mínimo quando Y é uma função monótona decrescente de X e atinge seu valor máximo quando Y é uma função monótona crescente de X . A fim de transformar a medida de correlação π de modo que ela meça associações entre -1 e 1 , é conveniente que a multipliquemos por três, donde obtemos

$$\rho_S = 3\pi = 6\pi_c - 3 = 6 - 3\pi_d. \quad (2.6)$$

Essa é a versão populacional do conhecido coeficiente de correlação de Spearman. O próximo resultado relaciona a expressão em (2.6) com aquela proposta em (2.4), mostrando que as duas expressões representam o mesmo objeto — o que valida nossa interpretação.

Teorema 15. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas cuja cópula associada é C . Então a versão populacional do coeficiente rho de Spearman entre X e Y é dada por

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= 3 \times [\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)] \\ &= 12 \iint_{\mathbb{I}^2} C(u, v) du dv - 3, \end{aligned}$$

em que (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) satisfazem as restrições supracitadas.

RESULTADOS DA LITERATURA

3.1 Cópulas semilineares

Cabe ressaltar que boa parte dos resultados que serão apresentados neste capítulo foram retirados de [Durante et al \(2007\)](#). Dito isso, podemos prosseguir com a nossa discussão. Lembremos, inicialmente, que a secção diagonal de uma cópula C é a função $\delta_C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ descrita por $\delta_C(t) = C(t, t)$, a qual satisfaz as seguintes propriedades

P1. $\delta_C(0) = 0, \delta_C(1) = 1,$

P2. $\delta_C(t) \leq t$ para todo $t \in [0, 1],$

P3. δ_C é não-decrescente, e

P4. δ_C é 2-Lipschitz, isto é, $|\delta_C(a) - \delta_C(b)| \leq 2|a - b|$ para todos a e b em $\mathbf{I} = [0, 1].$

Os elementos do conjunto formado por todas as funções $\delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as propriedades de P1 a P4 será nomeado de *funções diagonais* e o respectivo conjunto será indicado por \mathcal{D} . Estamos aptos, agora, a definir o que são cópulas semilineares (inferior e superior). Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 40. Uma cópula C é denominada *semilinear inferior* se, para quaisquer a e b em $]0, 1],$ as aplicações

$$h_b : [0, b] \rightarrow [0, 1], \quad h_b(t) := C(t, b),$$

$$v_a : [0, a] \rightarrow [0, 1], \quad v_a(t) := C(a, t),$$

são lineares. Similarmente, uma cópula C é denominada *semilinear superior* se, para quaisquer a e b em $]0, 1],$ as seguintes aplicações são lineares:

$$h_b : [b, 1] \rightarrow [0, 1], \quad h_b(t) := C(t, b),$$

$$v_a : [a, 1] \rightarrow [0, 1], \quad v_a(t) := C(a, t).$$

Informalmente, dizemos que uma cópula C é semilinear inferior se o seu comportamento ao longo dos segmentos de reta que partem da diagonal principal e chegam perpendicularmente à lateral esquerda ou à lateral inferior do quadrado unitário pode ser descrito linearmente. De maneira semelhante, dizemos que a cópula C é semilinear superior se o seu comportamento ao longo dos segmentos de reta que partem da diagonal principal e chegam perpendicularmente à lateral direita ou lateral superior do quadrado unitário pode ser descrito linearmente. Segue adiante a Figura 1 ilustrativa das duas categorias de cópulas semilineares:



(a) Cópula semilinear inferior.

(b) Cópula semilinear superior.

Figura 1 – Diagramas representativos de cópulas semilineares. Fonte: elaborada pelo autor.

Graças à secção diagonal δ_C , é possível caracterizar explicitamente quando cópulas são semilineares (inferiores ou superiores). Precisamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 9. Seja $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma cópula. Então temos a seguinte equivalência:

$$C \text{ é semilinear inferior} \iff C(a, b) = \begin{cases} \frac{a\delta_C(b)}{b}, & b \geq a, \\ \frac{b\delta_C(a)}{a}, & b < a. \end{cases} \quad (3.1)$$

em que vale a convenção $0/0 := 0$.

Demonstração. A demonstração está na página 65 da referência [Durante et al \(2007\)](#). \square

Resultado análogo vale para cópulas semilineares superiores. De fato, temos a seguinte proposição:

Proposição 10. Seja $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma cópula. Então temos a seguinte equivalência

$$C \text{ é semilinear superior} \iff C(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [\delta_C(a) - a] + a, & b \geq a, \\ \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [\delta_C(b) - b] + b, & b < a. \end{cases}$$

em que vale a mesma convenção acima.

Demonstração. A demonstração está na página 66 da referência [Durante et al \(2007\)](#). \square

Cabe aqui uma observação. Note que toda cópula semilinear superior C_U^δ , com secção diagonal δ , é dada por

$$C_U^\delta(a, b) = a + b - 1 + C_L^\delta(1 - a, 1 - b),$$

em que C_L^δ é a cópula semilinear inferior determinada pela secção diagonal $\hat{\delta}(t) = 2t - 1 + \delta(1 - t)$. De fato, para $1 - a < 1 - b$, vale que

$$\begin{aligned} a + b - 1 + C_L^\delta(1 - a, 1 - b) &= a + b - 1 + \left(\frac{1 - a}{1 - b}\right) [2(1 - b) - 1 + \delta(b)] \\ &= \left(\frac{1 - a}{1 - b}\right) [2(1 - b) - 1 - (1 - b) + \delta(b)] + b \\ &= \left(\frac{1 - a}{1 - b}\right) [\delta(b) - b] + b = C_U^\delta(a, b). \end{aligned}$$

Analogamente, quando $1 - a \geq 1 - b$, tem-se que

$$\begin{aligned} a + b - 1 + C_L^\delta(1 - a, 1 - b) &= a + b - 1 + \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right) [2(1 - a) - 1 + \delta(a)] \\ &= \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right) [2(1 - a) - 1 - (1 - a) + \delta(a)] + a \\ &= \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right) [\delta(a) - a] + a = C_U^\delta(a, b). \end{aligned}$$

Devido a essa relação, nós trataremos somente do primeiro caso, e nos restringiremos a denominá-las apenas como cópulas semilineares. A função C definida em (3.1) será denotada por S_δ .

Feitas essas considerações, apresentaremos quais restrições sobre $\delta \in \mathcal{D}$ devemos impor para que a expressão correspondente se comporte como uma cópula de fato. Temos, assim, o seguinte teorema.

Teorema 16 (Restrições semilineares). Dada uma função diagonal $\delta \in \mathcal{D}$, seja a função $S_\delta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$S_\delta(a, b) = \begin{cases} \frac{a\delta(b)}{b}, & \text{se } b \geq a, \\ \frac{b\delta(a)}{a}, & \text{se } b < a. \end{cases}$$

em que $0/0 := 0$. Então S_δ é uma cópula semilinear se, e somente se, as funções φ_δ e η_δ definidas em $]0, 1]$ sobre $[0, 1]$ de acordo com as expressões $\varphi_\delta(t) := \delta(t)/t$ e $\eta_\delta(t) = \delta(t)/t^2$ são não-decrescentes e não-crescentes, respectivamente.

Demonstração. A prova desse teorema encontra-se em ([Durante et al, 2007](#)). \square

Exemplo 8. Para cada valor $\theta \in [0, 1]$, seja $\delta_\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\delta_\theta(t) = \theta t^2 + (1 - \theta)t.$$

Então todas as funções φ_{δ_θ} e η_{δ_θ} , em que $\theta \in [0, 1]$, satisfazem as condições do teorema anterior. De fato, por um lado, temos

$$\varphi_{\delta_\theta}(t) = \frac{\theta t^2 + (1 - \theta)t}{t} = \theta t + 1 - \theta \implies \varphi'_{\delta_\theta}(t) = \theta \geq 0,$$

enquanto, pelo outro lado, temos

$$\eta_{\delta_\theta}(t) = \frac{\theta t^2 + (1 - \theta)t}{t^2} = \theta + \frac{1 - \theta}{t} \implies \eta'_{\delta_\theta}(t) = \frac{\theta - 1}{t^2} \leq 0,$$

mostrando que as condições do teorema são satisfeitas. A família de cópulas semilineares $(S_{\delta_\theta})_{\theta \in [0, 1]}$ descreve a família de cópulas de Fréchet, as quais são apenas combinações convexas das cópulas $\Pi(a, b) = ab$ e $M(a, b) = \min\{a, b\}$, como se pode ver

$$S_{\delta_\theta}(a, b) = \begin{cases} \frac{a\delta(b)}{b}, & b \geq a, \\ \frac{b\delta(a)}{a}, & b < a. \end{cases} = \begin{cases} \theta ab + (1 - \theta)a, & b \geq a, \\ \theta ab + (1 - \theta)b, & b < a. \end{cases}$$

3.2 Cópulas semiquadráticas

Antes de continuarmos, cabe ressaltar que essa seção se baseia essencialmente no artigo de [Jwaid et al \(2014\)](#). Dito isso, dado que conhecemos a secção diagonal de uma cópula, por exemplo, podemos construir quatro tipos de cópulas semiquadráticas. Tal afirmação decorre do fato de que a diagonal principal divide o quadrado unitário em dois triângulos: $T = \{(x, y) \in [0, 1] \mid y \geq x\}$ e $T^c = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y < x\}$. Em cada um deles, é possível interpolar horizontal ou verticalmente: ou se parte da diagonal e se chega à lateral esquerda (superior) ou se parte da diagonal e se chega à lateral inferior (direita). A cópula é dita quadrática porque sua expressão ao longo dos segmentos de reta previamente descritos apresenta um comportamento quadrático. Na Figura 2, apresentamos tais segmentos.

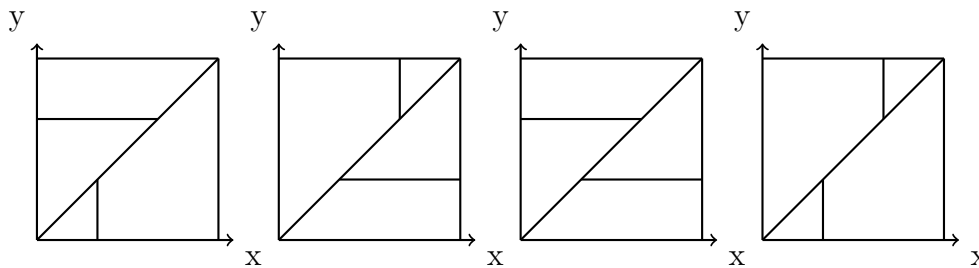


Figura 2 – Quatro categorias de cópulas semiquadráticas com diagonal conhecida. Fonte: elaborada pelo autor.

Tais interpolações quadráticas exigem uma ou duas funções auxiliares: uma função $f(b)$ (respectivamente $g(a)$) correspondente ao coeficiente de a^2 (ao coeficiente de b^2) no caso de interpolação horizontal (vertical). Os coeficientes dos termos lineares e as constantes são determinados de acordo com as condições de bordo que definem cópulas.

Dada uma função diagonal δ e duas funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, temos as seguintes expressões associadas a possíveis cópulas semiquadráticas (inferior e superior, respectivamente):

$$C_{\delta,1}^{f,g}(a,b) = \begin{cases} \frac{a\delta(b)}{b} + a(a-b)f(b), & \text{se } (a,b) \in T, \\ \frac{b\delta(a)}{a} + b(b-a)g(a), & \text{se } (a,b) \in T^c. \end{cases} \quad (3.2)$$

bem como

$$C_{\delta,2}^{f,g}(a,b) = \begin{cases} a + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [\delta(a) - a] + (1-b)(a-b)g(a), & \text{se } (a,b) \in T, \\ b + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [\delta(b) - b] + (1-a)(b-a)f(b), & \text{se } (a,b) \in T^c. \end{cases}$$

Assim como acontece com cópulas semilineares, podemos descrever a segunda expressão em termos da primeira. Mais precisamente, seja δ uma função diagonal e seja δ_1 a função diagonal definida por $\delta_1(t) = 2t - 1 + \delta(1-t)$. Consideremos, ainda, duas funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bem como \hat{f} e \hat{g} definidas por $\hat{f}(t) = f(1-t)$ e $\hat{g}(t) = g(1-t)$. Podemos mostrar que $C_{\delta,2}^{f,g}(a,b) = a + b - 1 + C_{\delta_1,1}^{\hat{f},\hat{g}}(1-a,1-b)$. De fato, se $1-b \leq 1-a$, vale afirmar que

$$\begin{aligned} a + b - 1 + C_{\delta_1,1}^{\hat{f},\hat{g}}(1-a,1-b) &= a + b - 1 + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) \delta_1(1-a) + (1-b)(a-b)\hat{g}(1-a) \\ &= a + b - 1 + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [2(1-a) - 1 + \delta(a)] + (1-b)(a-b)g(a) \\ &= a + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [2 - 2a - 1 - (1-a) + \delta(a)] + (1-b)(a-b)g(a) \\ &= a + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [\delta(a) - a] + (1-b)(a-b)g(a) = C_{\delta,2}^{f,g}(a,b). \end{aligned}$$

Analogamente, quando $1-b \geq 1-a$, decorre que

$$\begin{aligned} a + b - 1 + C_{\delta_1,1}^{\hat{f},\hat{g}}(1-a,1-b) &= a + b - 1 + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) \delta_1(1-b) + (1-a)(b-a)\hat{f}(1-b) \\ &= a + b - 1 + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [2(1-b) - 1 + \delta(b)] + (1-a)(b-a)f(b) \\ &= a + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [2 - 2b - 1 - (1-b) + \delta(b)] + (1-a)(b-a)f(b) \\ &= a + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [\delta(b) - b] + (1-a)(b-a)f(b) = C_{\delta,2}^{f,g}(a,b). \end{aligned}$$

As outras duas cópulas semiquadráticas, referentes às duas outras possibilidades das quatro que foram mencionadas anteriormente, têm suas expressões descritas pelas sentenças:

$$C_{\delta,3}^f(a,b) = \begin{cases} \frac{a\delta(b)}{b} + a(a-b)f(b), & \text{se } (a,b) \in T, \\ b + \left(\frac{1-b}{1-a}\right) [\delta(b) - b] + (1-a)(b-a)f(b), & \text{se } (a,b) \in T^c. \end{cases}$$

$$C_{\delta,4}^g(a,b) = \begin{cases} a + \left(\frac{1-a}{1-b}\right) [\delta(a) - a] + (1-b)(a-b)g(a), & \text{se } (a,b) \in T, \\ \frac{b\delta(a)}{a} + b(b-a)g(a), & \text{se } (a,b) \in T^c. \end{cases}$$

Cabe, assim, a seguinte pergunta: quais são as restrições que devemos impor sobre f , g e δ de modo que as expressões descritas acima se comportem como cópulas? Em primeiro lugar, deve-se destacar que a função $C_{\delta,1}^{f,g}$, conforme definida previamente, é uma função semiquadrática com diagonal δ , uma vez que $C_{\delta,1}^{f,g}(t,t) = \delta(t)$ para todos os valores de $t \in [0,1]$, e é horizontalmente quadrática em T e verticalmente quadrática em T^c . Além disso, em virtude da relação entre as cópulas $C_{\delta,1}^{f,g}$ e $C_{\delta,2}^{f,g}$, assim como a relação análoga entre $C_{\delta,3}^{f,g}$ e $C_{\delta,4}^{f,g}$, precisamos apenas estudar restrições para a primeira e a terceira delas. Começaremos por aquelas restrições referentes ao primeiro par:

Proposição 11. Seja δ uma função diagonal e sejam $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções absolutamente contínuas. Convencionando que $\lambda_\delta(t) = \delta(t)/t$, a função semiquadrática $C_{\delta,1}^{f,g}$ definida em (3.2) é uma cópula com secção diagonal δ se, e somente se,

1. $f(1) = g(1) = 0$,
2. $\max\{|f(t) + t|f'(t)|, |g(t) + t|g'(t)|\} \leq \lambda_\delta(t)$,
3. $f(t) + g(t) \geq t \left(\frac{\delta(t)}{t^2}\right)'$.

Demonstração. A demonstração encontra-se em (Jwaid et al, 2014). □

Exemplo 9. Seja δ_Π a secção diagonal da cópula produto $\Pi(a,b) = ab$, isto é, $\delta_\Pi(t) = t^2$ para todos os valores de $t \in [0,1]$. Sejam f e g definidas por $f(t) = g(t) = 1 - t$ para todo $t \in]0,1[$. Segue, assim, que as restrições da Proposição 11 são satisfeitas e, portanto, $C_{\delta_\Pi,1}^{f,g}$ é uma cópula. De fato, $f(1) = g(1) = 0$. Além disso,

$$\max\{|f(t) + t|f'(t)|, |g(t) + t|g'(t)|\} = \max\{|1 - t + t| - 1|, |1 - t + t| - 1|\} = 1 \leq 1 = \lambda'_{\delta_\Pi}(t).$$

e, por fim, temos que

$$t \left(\frac{\delta_\Pi(t)}{t^2}\right)' = t \times 0 = 0 \leq 2 - 2t = (1 - t) + (1 - t) = f(t) + g(t).$$

Vamos estudar na sequência as restrições referentes ao segundo par de funções $C_{\delta,3}^{f,g}$ e $C_{\delta,4}^{f,g}$. Assim como acontece no primeiro caso, $C_{\delta,3}^{f,g}$ é uma função semiquadrática com secção diagonal δ , uma vez que vale a relação $C_{\delta,3}^{f,g}(t) = \delta(t)$ para todos valores de $t \in [0, 1]$, e tal expressão é horizontalmente quadrática tanto em T^c como em T . Trataremos a seguir quais condições sobre δ e f tornam $C_{\delta,3}^f$ uma cópula. Antes, porém, necessitamos da seguinte convenção: seja $\mu_\delta : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mu_\delta(t) = \frac{t - \delta(t)}{1 - t}.$$

Proposição 12. Seja δ uma função diagonal e seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Então a função semiquadrática $C_{\delta,3}^f$ é uma cópula com secção diagonal δ se, e somente se,

1. $f(0) = f(1) = 0$,
2. $f(t) + t|f'(t)| \leq \lambda'_\delta(t)$,
3. $f(t) + (1-t)|f'(t)| \leq \mu'_\delta(t)$,
4. $f(t) \geq \frac{t^2 - \delta(t)}{t(1-t)}$,

para todos os valores de $t \in]0, 1[$ em que as derivadas existem.

Demonstração. Basta checar a referência (Jwaid et al, 2014). □

Exemplo 10. Consideremos novamente a função diagonal da cópula produto δ_Π . Seja $f(t) := t(1-t)$ para todos os valores de $t \in [0, 1]$. Assim sendo, as restrições da [Proposição 12](#) são satisfeitas. De fato, $f(0) = f(1) = 0$. Além disso, temos

$$f(t) + t|f'(t)| = t(1-t) + t|1-2t| = \begin{cases} 2t - 3t^2 \leq 1 = \lambda'_{\delta_\Pi}(t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ t^2 \leq 1 = \lambda'_{\delta_\Pi}(t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Mais ainda, também vale que

$$f(t) + (1-t)|f'(t)| = t(1-t) + (1-t)|1-2t| = \begin{cases} (1-t)^2 \leq 1 = \mu'_{\delta_\Pi}(t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ -3t^2 + 4t - 1 \leq 1 = \mu'_{\delta_\Pi}(t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

E, por fim, a última condição é igualmente cumprida

$$f(t) = t(1-t) \geq 0 = \frac{t^2 - t^2}{t(1-t)} = \frac{t^2 - \delta_\Pi(t)}{t(1-t)}.$$

Embora existam mais resultados referentes à construção de cópulas semiquadráticas baseados em funções diagonais opostas, a discussão a seu respeito foi omitida e tais resultados não serão contemplados nessa dissertação. O estudo dessa seção visa a ilustrar que existem extensões do conceito de cópulas semilineares. Conforme consta em [Nelsen et al \(1997\)](#), ressalta-se que cópulas com seções quadráticas não são capazes de modelar forte correlação entre as variáveis marginais. Embora cópulas semipolinomiais possam medir maiores graus de associação, a complexidade do modelo também aumenta com o grau do polinômio. Para generalizações referentes a cópulas semipolinomiais, o leitor é convidado a consultar a referência [Sánchez \(2013\)](#).

APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

4.1 Heurística da metodologia empregada

Antes de propor o método em si, vamos apresentar as ideias que motivaram a sua criação. Primeiramente, deve-se ressaltar que a transformação proposta tem como argumento cópulas (ou família delas), de forma que a cópula transformada torna-se (ou se preserva) simétrica. Portanto nosso trabalho se reduz em defini-la no triângulo $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \geq x\}$, pois, devido à simetria, decorre que a mesma transformação fica imediatamente definida no seu complemento T^c . Para tanto, fixado um elemento $(a, b) \in T$, parametrizamos os segmentos de reta $\mathcal{S}_1 = \{(x, b) \mid 0 \leq x \leq b\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{(a, y) \mid a \leq y \leq 1\}$ a fim de construir as homotopias lineares que constituirão os alicerces da aplicação proposta. Mais precisamente, dada uma família de cópulas bivariadas C_θ , a homotopia na direção de \mathcal{S}_1 parte da função nula em $(0, b)$ e chega à função $C_\theta(b, b)$ em (b, b) . Analogamente, a homotopia na direção de \mathcal{S}_2 parte da função $C_\theta(a, a)$ em (a, a) e chega à função $C_\theta(a, 1)$ em $(a, 1)$. Uma vez construída a expressão da transformação de cópulas, resta verificar se a mesma se comporta, de fato, como uma cópula. Segue adiante a Figura 3 que ilustra do que foi discutido até agora:

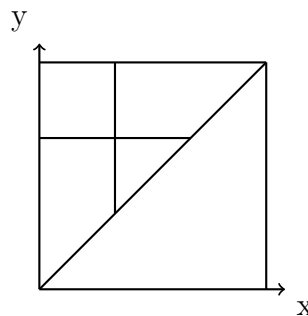


Figura 3 – Diagrama representativo do método em questão. Fonte: elaborada pelo autor.

4.2 Descrição do método

A justificativa para a escolha da expressão proposta, referente à homotopia horizontal, consiste no fato de que cópulas são funções *grounded*. Consequentemente, a função associada ao ponto $(0, b)$ com relação a essa deformação deve ser igual à função nula. Similarmente, cópulas são funções de distribuição conjuntas definidas no quadrado unitário de forma que suas marginais são uniformes. Dessa forma, deve-se ter obrigatoriamente que o valor da homotopia na direção vertical correspondente ao ponto $(a, 1)$ seja igual a $C_\theta(a, 1) = a$. De posse dessas considerações, podemos descrever as homotopias desejadas ao longo dos segmentos previamente apresentados. Seja $(a, b) \in T$. A homotopia na direção de \mathcal{S}_1 deve ser dada por

$$C_{H\theta}(a + \lambda(b - a), b) = \frac{(a + \lambda(b - a))C_\theta(b, b)}{b}, \text{ em que } \frac{a}{a - b} \leq \lambda \leq 1.$$

em que $C_{H\theta}(0, 0) = 0$. Identicamente, a homotopia na direção de \mathcal{S}_2 deve ser dada por

$$C_{V\theta}(a, b + t(1 - b)) = \left[\frac{(1 - t)(1 - b)}{1 - a} \right] [C_\theta(a, a) - a] + a, \text{ em que } \frac{a - b}{1 - b} \leq t \leq 1,$$

em que $C_{V\theta}(1, 1) = 1$, e C_θ é o argumento da transformação, de modo que $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Antes de prosseguir, observemos que tanto $C_{H\theta}$ quanto $C_{V\theta}$ pertencem ao intervalo $[0, 1]$. De fato, vale que $0 \leq C_{H\theta}(a, b) \leq C_\theta(b, b) \leq 1$, uma vez que cópulas são funções não-negativas e $C_{H\theta}$ é uma combinação entre a função nula e a função $C_\theta(b, b)$ para cada valor de b permitido e fixado. Além disso, temos que $0 \leq C_\theta(a, a) \leq C_{V\theta}(a, b) \leq a \leq 1$, posto que $C_{V\theta}$ também é uma combinação entre $C_\theta(a, a)$ e $C_\theta(a, 1) = a$ para cada valor de a permitido e fixado, e $C_\theta(a, a) \leq \min\{a, a\} = a$ de acordo com a desigualdade de Fréchet-Hoeffding. Dessa forma, se definirmos $C_{\theta, \varphi}(a, b) = \varphi C_{H\theta}(a, b) + (1 - \varphi)C_{V\theta}(a, b)$, segue que $0 \leq C_{\theta, \varphi}(a, b) \leq 1$, pois se trata de uma combinação convexa entre $C_{H\theta}$ e $C_{V\theta}$. Assim sendo, as (possíveis) novas famílias de cópulas são dadas por

$$C_{\theta, \varphi}(a, b) = \varphi \left[\frac{aC_\theta(b, b)}{b} \right] + (1 - \varphi) \left\{ \left(\frac{1 - b}{1 - a} \right) [C_\theta(a, a) - a] + a \right\},$$

em que $0 \leq a \leq b \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $C_{\theta, \varphi}(0, 0) = 0$ e $C_{\theta, \varphi}(1, 1) = 1$. Aqui, convencionamos que $C_{\theta, \varphi}(b, a) := C_{\theta, \varphi}(a, b)$, para todo $(a, b) \in [0, 1]^2$.

4.3 Verificação da validade do método

Na sequência, vamos verificar e propor relações para que a cópula transformada se comporte, igualmente, como uma cópula. Primeiramente, notemos que $C_{\theta, \varphi}$ tem marginais uniformes. De fato,

$$\begin{aligned} C_{\theta, \varphi}(a, 1) &= \varphi a C_\theta(1, 1) + (1 - \varphi) \left\{ \left(\frac{1 - 1}{1 - a} \right) [C_\theta(a, a) - a] + a \right\} \\ &= \varphi a + (1 - \varphi)a = a. \end{aligned}$$

Devido à simetria, vale também que $C_\theta(1, b) = b$. Além disso, $C_{\theta, \varphi}$ é *grounded*, pois

$$C_{\theta, \varphi}(0, b) = \varphi \left[\frac{0C_\theta(b, b)}{b} \right] + (1 - \varphi) \left\{ \left(\frac{1-b}{1-0} \right) [C_\theta(0, 0) - 0] + 0 \right\} = 0 = C_{\theta, \varphi}(a, 0),$$

em que a última igualdade também se justifica pela simetria das funções transformadas.

Como se sabe, as derivadas de primeira ordem de uma cópula bivariada estão entre zero e um, segundo consta no Teorema 2. Nesse sentido, o que será demonstrado a seguir não faz parte da prova em que estamos interessados, mas é um indício de que estamos no caminho certo. Precisamente falando, tem-se que

$$\frac{\partial C_{H\theta}(a, b)}{\partial a} = \frac{C_\theta(b, b)}{b}.$$

Tal expressão está entre zero (razão entre valores não-negativos) e um (Proposição 3). Similarmente, tem-se também que a seguinte expressão

$$\frac{\partial C_{V\theta}(a, b)}{\partial b} = \frac{a - C_\theta(a, a)}{1 - a}.$$

está entre zero e um, pois

$$\begin{cases} \frac{a - C_\theta(a, a)}{1 - a} \leq \frac{a - \max\{2a - 1, 0\}}{1 - a} \leq 1, \\ 0 \leq C_\theta(a, a) \leq \min\{a, a\} = a \implies \frac{a - C_\theta(a, a)}{1 - a} \geq 0. \end{cases}$$

Dado que as expressões das derivadas parciais de segunda ordem das cópulas $C_{H\theta}$ e $C_{V\theta}$ são descritas por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 C_{H\theta}}{\partial b \partial a} = \frac{\partial^2 C_{H\theta}}{\partial a \partial b} = -\frac{C_\theta(b, b)}{b^2} + \frac{1}{b} \left[\frac{\partial C_\theta(b, b)}{\partial u} + \frac{\partial C_\theta(b, b)}{\partial v} \right], \\ \frac{\partial^2 C_{V\theta}}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 C_{V\theta}}{\partial b \partial a} = \frac{a - C_\theta(a, a)}{(1 - a)^2} - \frac{1}{1 - a} \left[\frac{\partial C_\theta(a, a)}{\partial u} + \frac{\partial C_\theta(a, a)}{\partial v} - 1 \right], \end{cases}$$

seguem aqui as restrições sobre elas para que a fórmula $C_{\theta, \varphi}$ em questão corresponda à definição de cópula:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_\theta(b, b)}{\partial u} b + \frac{\partial C_\theta(b, b)}{\partial v} b = \langle \nabla C_\theta(b, b), (b, b) \rangle \geq C_\theta(b, b), \\ \frac{a - C_\theta(a, a)}{1 - a} \geq \left[\frac{\partial C_\theta(a, a)}{\partial u} + \frac{\partial C_\theta(a, a)}{\partial v} - 1 \right]. \end{cases}$$

Uma vez que tais restrições sejam satisfeitas, deduz-se que $C_{\theta, \varphi}$ é 2-crescente e, portanto, uma cópula. Em suma, essas são as restrições que procuramos a fim de validar o método proposto.

4.4 Transformação das cópulas AMH

A família de cópulas de Ali-Mikhail-Haq (AMH) com parâmetro $\theta \in [-1, 1]$ é dada por $C_\theta(u, v) = uv(1 - \theta(1 - u)(1 - v))^{-1}$. Aplicando o nosso método à cópula em questão, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{H\theta}^{AMH}(a, b) = \frac{ab}{1 - \theta(1 - b)^2}, \\ C_{V\theta}^{AMH}(a, b) = \frac{a(b - 1)(1 - \theta(1 - a))}{1 - \theta(1 - a)^2} + a, \\ \frac{\partial C_{H\theta}^{AMH}}{\partial b}(a, b) = \frac{a(1 - \theta + b^2\theta)}{(1 - \theta(1 - b)^2)^2}, \\ \frac{\partial C_{V\theta}^{AMH}}{\partial a}(a, b) = \frac{(b - 1)((a^2 + 2a - 2)\theta + (1 - a)^2\theta^2 + 1)}{(1 - \theta(1 - a)^2)^2} + 1. \end{array} \right.$$

Consequentemente, as derivadas parciais de segunda ordem satisfazem as restrições desejadas. Mais precisamente, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 C_{H\theta}^{AMH}}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial^2 C_{H\theta}^{AMH}}{\partial b \partial a}(a, b) = \frac{(1 - \theta + b^2\theta)}{(1 - \theta(1 - b)^2)^2} \geq 0, \\ \frac{\partial^2 C_{V\theta}^{AMH}}{\partial b \partial a}(a, b) = \frac{\partial^2 C_{V\theta}^{AMH}}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{((a^2 + 2a - 2)\theta + (1 - a)^2\theta^2 + 1)}{(1 - \theta(1 - a)^2)^2} \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A validade da primeira afirmação em (4.1) decorre do fato de que o conjunto-solução da inequação proposta é o mesmo que aquele correspondente à inequação $1 - \theta + b^2\theta \geq 0$. A expressão à esquerda dessa inequação, por sua vez, é decrescente como função de θ . Assim sendo, ela atinge seu valor mínimo quando $\theta = 1$, que corresponde a $b^2 \geq 0$. Logo, segue a veracidade da afirmação feita a princípio.

De maneira similar, a validade da segunda afirmação em (4.1) decorre do fato de que o conjunto-solução da inequação proposta é o mesmo conjunto-solução que aquele correspondente à inequação $(a^2 + 2a - 2)\theta + (1 - a)^2\theta^2 + 1 \geq 0$. A expressão à esquerda dessa inequação, por sua vez, pode ser rearranjada como um polinômio de segundo grau com coeficientes dependentes de θ . Precisamente, temos a inequação equivalente $p(a, \theta) := (\theta^2 + \theta)a^2 + 2(\theta - \theta^2)a + (1 - \theta)^2 \geq 0$, cujo discriminante é dado por $\Delta = -4\theta(1 - \theta)^2$. Dessa maneira, caso o coeficiente dominante seja positivo e o valor de Δ seja negativo, garante-se que a inequação é satisfeita para todos os valores permitidos de a . Podemos descrever essa situação por meio do seguinte sistema (lembrando que $\theta \in [-1, 1]$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^2 + \theta > 0 \\ \theta(1 - \theta)^2 > 0 \end{array} \right. \iff 0 < \theta < 1.$$

Assim sendo, fica demonstrado que, para $0 < \theta < 1$, a desigualdade proposta é válida. Mais ainda, verifica-se por inspeção que $\theta = -1$, $\theta = 0$ e $\theta = 1$ também geram expressões válidas. Sendo assim, só falta checar se os valores $-1 < \theta < 0$ também são válidos, conforme faremos a seguir.

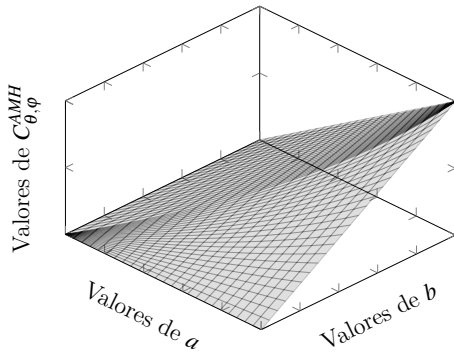
Nessas circunstâncias ($-1 < \theta < 0$), fixado o valor de θ , o gráfico correspondente à expressão $p(a, \theta)$ é uma parábola côncava. Por conseguinte, basta mostrar a não-negatividade da expressão envolvida para $a = 0$ e $a = 1$, haja visto a concavidade da função em questão. De fato, esse é o caso, como podemos ver a seguir

$$\begin{cases} p(0, \theta) = (1 - \theta)^2 > 0, \\ p(1, \theta) = 1 + \theta > 0. \end{cases}$$

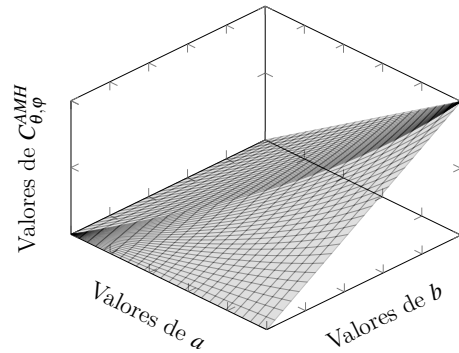
Em vista dessas considerações, tem-se que a família de cópulas AMH transformada é dada pela seguinte família de cópulas:

$$C_{\theta, \varphi}^{AMH}(a, b) = \varphi \left[\frac{ab}{1 - \theta(1 - b)^2} \right] + (1 - \varphi) \left[\frac{a(b - 1)(1 - \theta(1 - a))}{1 - \theta(1 - a)^2} + a \right] =: C_{\theta, \varphi}^{AMH}(b, a).$$

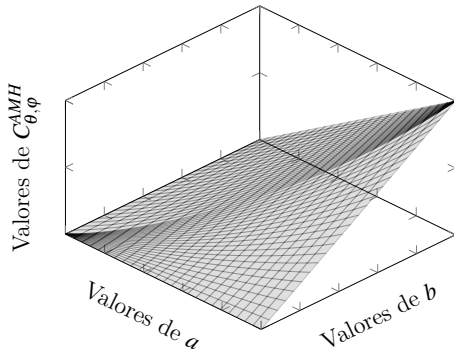
em que $(a, b) \in [0, 1]^2$. Nas figuras a seguir, ilustramos o gráfico da cópula transformada para diversos valores dos parâmetros envolvidos. Para ser mais exato, temos a Figura 4:



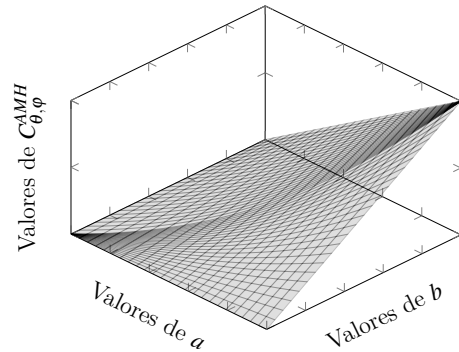
(a) Valores de $\varphi = 0$ e $\theta = 1$.



(b) Valores de $\varphi = 1$ e $\theta = 1$.



(c) Valores de $\varphi = 0,25$ e $\theta = 0,5$.



(d) Valores de $\varphi = 0,75$ e $\theta = -0,5$.

Figura 4 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta, \varphi}^{AMH}$. Fonte: elaborada pelo autor.

Para concluir esse seção, vamos apresentar os gráficos das funções densidades de probabilidade associadas às famílias de cópulas previamente plotadas. Mais precisamente, dispomos a seguir os gráficos relativos à Figura 5:

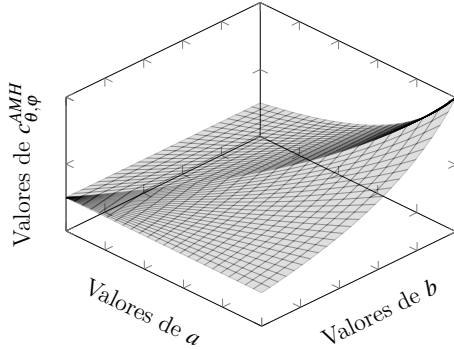
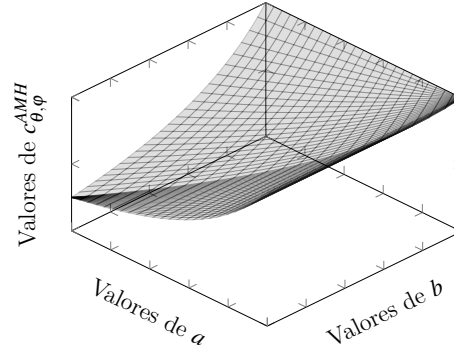
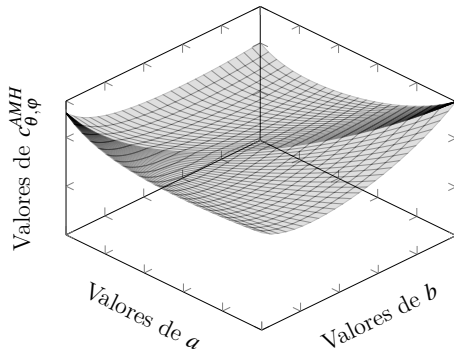
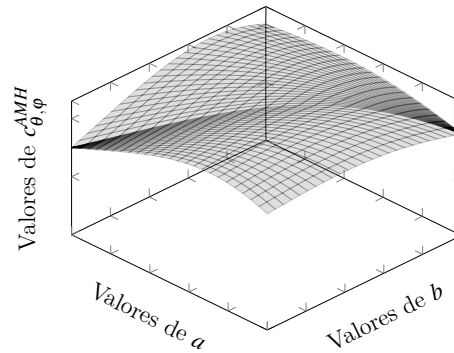
(a) Valores de $\varphi = 0$ e $\theta = 1$.(b) Valores de $\varphi = 1$ e $\theta = 1$.(c) Valores de $\varphi = 0,25$ e $\theta = 0,5$.(d) Valores de $\varphi = 0,75$ e $\theta = -0,5$.

Figura 5 – Gráficos ilustrativos relativos à densidade $c_{\theta, \varphi}^{AMH}$. Fonte: elaborada pelo autor.

4.5 Transformação das cópulas FGM

A família de cópulas FGM (sigla para Farlie–Gumbel–Morgenstern) com parâmetro $\theta \in [-1, 1]$ é dada por $C_{\theta}(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$. Como resultado da aplicação da metodologia em questão à família de cópulas sob consideração, nós obtemos as expressões

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{H\theta}^{FGM}(a, b) = a(b + \theta(b - 2b^2 + b^3)), \\ C_{V\theta}^{FGM}(a, b) = (1 - b)(\theta(a^2 - a^3) - a) + a, \\ \frac{\partial C_{H\theta}^{FGM}}{\partial b}(a, b) = a(1 + \theta(1 - 4b + 3b^2)), \\ \frac{\partial C_{V\theta}^{FGM}}{\partial a}(a, b) = (1 - b)(\theta(2a - 3a^2) - 1) + 1. \end{array} \right.$$

Consequentemente, temos as seguintes fórmulas relativas a $C_{H\theta}^{FGM}$ e $C_{V\theta}^{FGM}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 C_{H\theta}^{FGM}}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial^2 C_{H\theta}^{FGM}}{\partial b \partial a}(a, b) = 1 + \theta(1 - 4b + 3b^2), \\ \frac{\partial^2 C_{V\theta}^{FGM}}{\partial b \partial a}(a, b) = \frac{\partial^2 C_{V\theta}^{FGM}}{\partial a \partial b}(a, b) = 1 - \theta(2a - 3a^2). \end{cases}$$

Como vale $-1 \leq -1/3 \leq 1 - 4b + 3b^2 \leq 1$ para $0 \leq b \leq 1$, conclui-se que

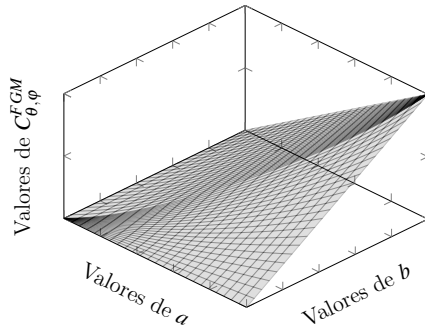
$$(|\theta| \leq 1) \wedge (|1 - 4b + 3b^2| \leq 1) \Rightarrow |\theta(1 - 4b + 3b^2)| \leq 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 C_{H\theta}}{\partial a \partial b} = 1 + \theta(1 - 4b + 3b^2) \geq 0.$$

Similarmente, como vale que $-1 \leq 2a - 3a^2 \leq 1/3 \leq 1$ para $0 \leq a \leq 1$, temos

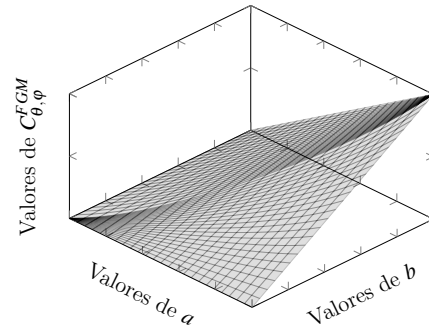
$$(|\theta| \leq 1) \wedge (|2a - 3a^2| \leq 1) \Rightarrow |-\theta(2a - 3a^2)| \leq 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 C_{V\theta}^{FGM}}{\partial b \partial a} = 1 - \theta(2a - 3a^2) \geq 0.$$

Em virtude dessas considerações, a família de cópulas transformadas é dada por $C_{\theta, \varphi}^{FGM}(a, b) = \varphi[a(b + \theta(b - 2b^2 + b^3))] + (1 - \varphi)[(1 - b)(\theta(a^2 - a^3) - a) + a] =: C_{\theta, \varphi}^{FGM}(b, a)$.

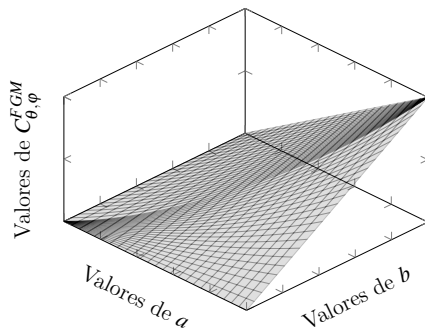
em que $(a, b) \in [0, 1]^2$. Além disso, temos os seguintes gráficos ilustrativos na Figura 6:



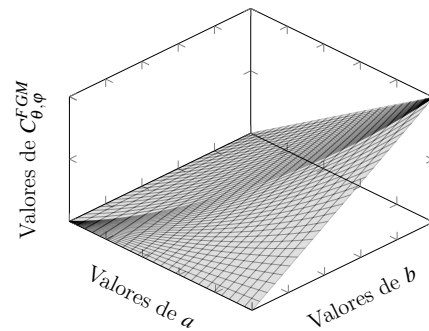
(a) Valores de $\varphi = 0$ e $\theta = 1$.



(b) Valores de $\varphi = 1$ e $\theta = 1$.



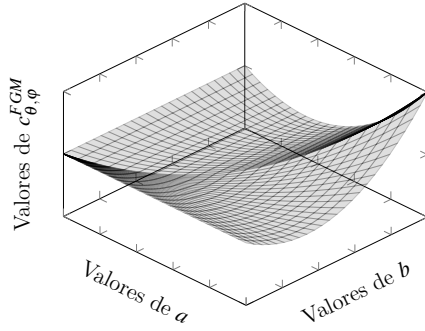
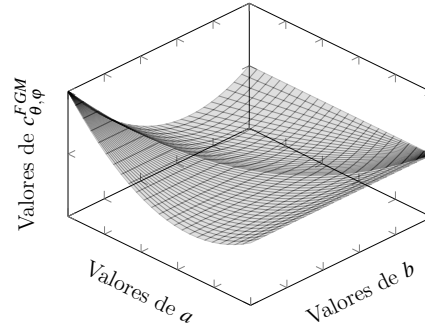
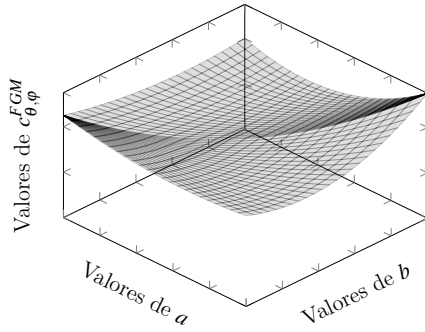
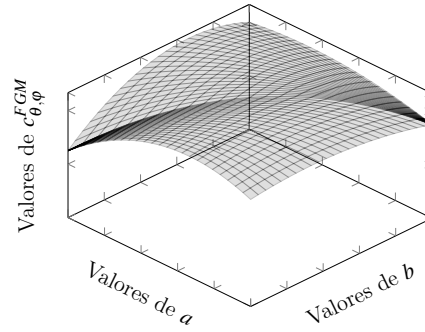
(c) Valores de $\varphi = 0,25$ e $\theta = 0,5$.



(d) Valores de $\varphi = 0,75$ e $\theta = 0,5$.

Figura 6 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta, \varphi}^{FGM}$. Fonte: elaborada pelo autor.

Enfim, apresentamos os gráficos das respectivas densidades na Figura 7:

(a) Valores de $\varphi = 0$ e $\theta = 1$.(b) Valores de $\varphi = 1$ e $\theta = 1$.(c) Valores de $\varphi = 0,25$ e $\theta = 0,5$.(d) Valores de $\varphi = 0,75$ e $\theta = -0,5$.Figura 7 – Gráficos ilustrativos relativos à densidade $c_{\theta, \varphi}^{FGM}$. Fonte: elaborada pelo autor.

4.6 Transformação das cópulas Plackett

Conforme Zhang (2019), as cópulas Plackett com parâmetro $\theta > 0$ e $\theta \neq 1$ são dadas por

$$C_{\theta}(a, b) = \frac{[1 + (\theta - 1)(a + b) - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(a + b)]^2 - 4\theta(\theta - 1)ab}]}{2(\theta - 1)}.$$

Aplicando nosso método à cópula em questão, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{H\theta}^{Plackett}(a, b) = a \left[\frac{1 + 2(\theta - 1)b - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)b]^2 - 4\theta(\theta - 1)b^2}}{2b(\theta - 1)} \right], \\ C_{V\theta}^{Plackett}(a, b) = \left(\frac{1 - b}{1 - a} \right) \left[\frac{1 - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)a]^2 - 4\theta(\theta - 1)a^2}}{2(\theta - 1)} \right] + a, \\ \frac{\partial C_{H\theta}^{Plackett}}{\partial b}(a, b) = a \left[\frac{2b - 1}{b\sqrt{(1 - \theta)(2b - 1)^2 + \theta}} + \frac{\sqrt{(1 - \theta)(2b - 1)^2 + \theta - 1}}{2b^2(\theta - 1)} \right], \\ \frac{\partial C_{V\theta}^{Plackett}}{\partial a}(a, b) = (1 - b) \left[\frac{1}{2(1 - a)^2(\theta - 1)} - \frac{\theta + (1 - \theta)(2a - 1)}{2(1 - a)^2(\theta - 1)\sqrt{(1 - \theta)(2a - 1)^2 + \theta}} \right] + 1. \end{array} \right.$$

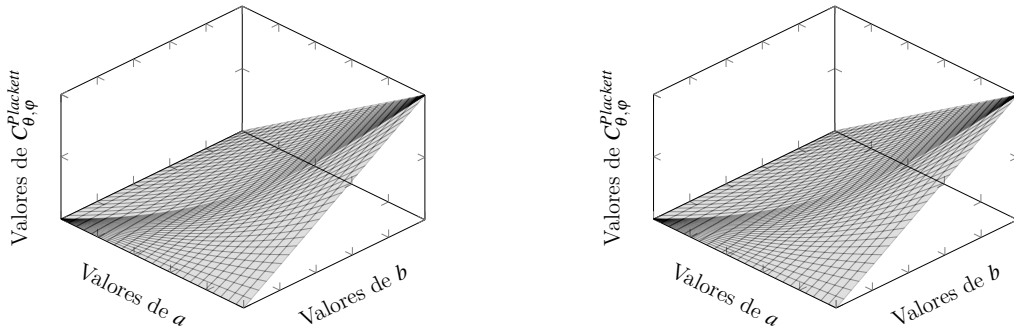
em que utilizamos a relação $[1 + 2(\theta - 1)x]^2 - 4\theta(\theta - 1)x^2 = (1 - \theta)(2x - 1)^2 + \theta$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{H\theta}^{Plackett}}{\partial b \partial a} = \frac{\partial C_{H\theta}^{Plackett}}{\partial a \partial b} = \frac{2b-1}{b\sqrt{(1-\theta)(2b-1)^2 + \theta}} + \frac{\sqrt{(1-\theta)(2b-1)^2 + \theta} - 1}{2b^2(\theta-1)}, \\ \frac{\partial C_{V\theta}^{Plackett}}{\partial a \partial b} = \frac{\partial C_{V\theta}^{Plackett}}{\partial b \partial a} = -\frac{1}{2(1-a)^2(\theta-1)} + \frac{\theta + (1-\theta)(2a-1)}{2(1-a)^2(\theta-1)\sqrt{(1-\theta)(2a-1)^2 + \theta}}. \end{array} \right.$$

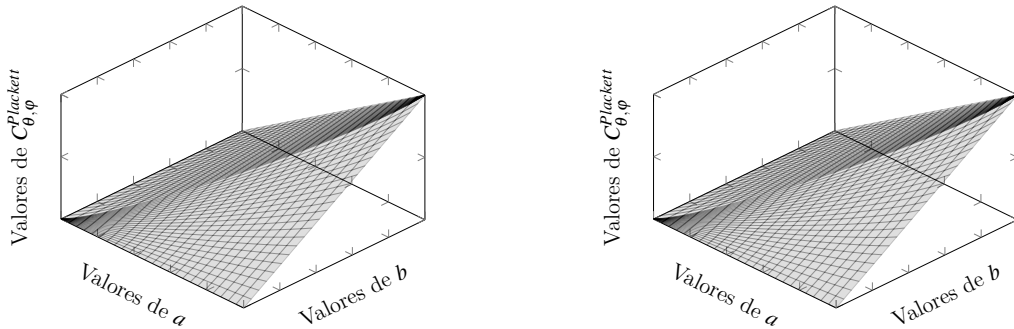
Em virtude da complexidade das expressões envolvidas, utilizamos o WolframAlpha para confirmar que tais derivadas são não-negativas para todos os valores das variáveis e parâmetros envolvidos. Com efeito, nós temos que a família de cópulas transformadas relacionada à família de cópulas Plackett, para todo $(a, b) \in [0, 1]^2$, é dada por:

$$C_{\theta, \varphi}^{Plackett}(a, b) = \varphi a \left[\frac{1 + 2(\theta - 1)b - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)b]^2 - 4\theta(\theta - 1)b^2}}{2b(\theta - 1)} \right] + (1 - \varphi) \left\{ \left(\frac{1 - b}{1 - a} \right) \left[\frac{1 - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)a]^2 - 4\theta(\theta - 1)a^2}}{2(\theta - 1)} \right] + a \right\}.$$

Não exibiremos os gráficos das respectivas densidades, pois elas são ilimitadas. Assim sendo, apresentaremos somente a Figura 8 como a seguir:



(a) Valores dos parâmetros: $\varphi = 0$ e $\theta = 0,5$. (b) Valores dos parâmetros: $\varphi = 1$ e $\theta = 0,5$.



(c) Valores dos parâmetros: $\varphi = 0,25$ e $\theta = 10$. (d) Valores dos parâmetros: $\varphi = 0,75$ e $\theta = 10$.

Figura 8 – Gráficos ilustrativos relativos à família $C_{\theta, \varphi}^{Plackett}$. Fonte: elaborada pelo autor.

4.7 Coeficientes rho de Spearman

Nesta seção, dedicar-nos-emos a determinar os coeficientes de correlação das novas famílias de cópulas encontradas a fim de descobrir o quão bem elas conseguem capturar relações de concordância. Mais explicitamente, preocupar-nos-emos somente em determinar o valor do coeficiente ρ de Spearman associado a cada uma delas.

Para começar, lidaremos com o caso da família de cópulas FGM transformada obtida anteriormente, em virtude da simplicidade de sua expressão. Graças à simetria das cópulas em questão, basta integrarmos sobre o triângulo $T = \{(a, b) \in [0, 1]^2 \mid b \geq a\}$, multiplicar o resultado por vinte e quatro e subtrair três. Dito isso, vamos dividir o problema em duas partes. Primeiramente, iremos calcular os valores correspondentes às componentes $C_{H\theta}^{FGM}$ e $C_{V\theta}^{FGM}$, respectivamente. E, depois, combinaremos os resultados. Precisamente, temos

$$\begin{aligned}
 \rho_{C_{H\theta}^{FGM}} + 3 &= 24 \iint_T a(b + \theta(b - 2b^2 + b^3)) da db \\
 &= 24 \int_0^1 \int_0^b a(b + \theta(b - 2b^2 + b^3)) db da \\
 &= 12 \int_0^1 b^2(b + \theta(b - 2b^2 + b^3)) db \\
 &= 12 \left[\frac{b^4}{4} + \theta \left(\frac{b^4}{4} - \frac{2b^5}{5} + \frac{b^6}{6} \right) \right] \Big|_0^1 = 3 + \frac{\theta}{5} \\
 &\Rightarrow \rho_{C_{H\theta}^{FGM}} = \frac{\theta}{5} \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right]
 \end{aligned}$$

Similarmente, temos

$$\begin{aligned}
 \rho_{C_{V\theta}^{FGM}} + 3 &= 24 \iint_T [(1-b)(\theta(a^2 - a^3) - a) + a] db da \\
 &= 24 \int_0^1 \int_a^1 [(1-b)(\theta(a^2 - a^3) - a) + a] db da \\
 &= 12 \int_0^1 [(1-a)^2(\theta(a^2 - a^3) - a) + 2a(1-a)] da \\
 &= 12 \int_0^1 [a^2(1-a)^3\theta - a(1-a)^2 + 2a(1-a)] da \\
 &= 12[\theta B(3, 4) - B(2, 3) + 2B(2, 2)] = \frac{\theta}{5} + 3 \\
 &\Rightarrow \rho_{C_{V\theta}^{FGM}} = \frac{\theta}{5} \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right].
 \end{aligned}$$

Concluí-se que $\rho_{C_{\theta, \varphi}^{FGM}} = \varphi \rho_{C_{H\theta}^{FGM}} + (1 - \varphi) \rho_{C_{V\theta}^{FGM}} \in [-0, 2; 0, 2]$, em que B é a função beta.

Estudaremos, a seguir, como se comporta o coeficiente de correlação ρ de Spearman para o caso da família de cópulas AMH transformada. Aplicaremos o mesmo passo a passo que anteriormente. Porém, em virtude da expressão transformada, dividiremos tal procedimento em cinco casos: $\theta = -1$, $-1 < \theta < 0$, $\theta = 0$, $0 < \theta < 1$ e $\theta = 1$.

Quando $\theta = 0$, temos a cópula produto. Logo, $\rho_{C_{0,\varphi}^{AMH}} = 0$. Consideremos, assim, o caso em que $\theta = 1$. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{H1}^{AMH}} + 3}{24} &= \iint_T \frac{a}{2-b} da db = \int_0^1 \int_0^b \frac{a}{2-b} da db = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{b^2}{2-b} db \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{4-b^2}{2-b} db + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{4}{2-b} db = -\frac{1}{2} \int_0^1 (2+b) db + \int_0^1 \frac{2}{2-b} db \\ &= -\frac{1}{2} \left(2b + \frac{b^2}{2} \right) \Big|_0^1 - 2 \ln(2-b) \Big|_0^1 = -\frac{5}{4} + 2 \ln(2) \implies \\ \rho_{C_{H1}^{AMH}} &= -30 + 48 \ln(2) - 3 \approx 0,271 \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{V1}^{AMH}} + 3}{24} &= \iint_T \left[\frac{(b-1)a}{2-a} + a \right] db da = \int_0^1 \int_a^1 \left[\frac{(b-1)a}{2-a} + a \right] db da \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{b^2}{2} - b \right) \frac{a}{2-a} + ab \right] \Big|_a^1 da \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2-a} \right) + a - \left(\frac{a^2}{2} - a \right) \frac{a}{2-a} - a^2 \right] da \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2-a} \right) + a - \frac{1}{2} \left[\frac{(a^2-2a)a}{2-a} \right] - a^2 \right\} da \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{a}{2-a} + a^2 - 2a \right] da = -\frac{1}{2} \left[-a - 2 \ln(2-a) + \frac{a^3}{3} - a^2 \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{6} - \ln(2) \implies \rho_{C_{V1}^{AMH}} = 20 - 24 \ln(2) - 3 \approx 0,364 \end{aligned}$$

Portanto $\rho_{C_{1,\varphi}^{AMH}} = \varphi \rho_{C_{H1}^{AMH}} + (1-\varphi) \rho_{C_{V1}^{AMH}} = \varphi \left(-\frac{5}{4} + 2 \ln(2) \right) + (1-\varphi) \left(\frac{5}{6} - \ln(2) \right)$.

Uma vez que resolvemos o problema de determinar $\rho_{C_{1,\varphi}^{AMH}}$, concentrar-nos-emos, a seguir, no problema de determinar $\rho_{C_{-1,\varphi}^{AMH}}$. Com essa finalidade, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{H-1}^{AMH}} + 3}{12} &= 2 \iint_T \frac{ab}{1+(1-b)^2} da db = 2 \int_0^1 \int_0^b \frac{ab}{1+(1-b)^2} da db \\ &= \int_0^1 \frac{b^3}{1+(1-b)^2} db = \int_0^1 \frac{(1-u)^3}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{1-3u+3u^2-u^3}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du - 3 \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du + 3 \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du - \int_0^1 \frac{u^3}{1+u^2} du \\ &= \left\{ \arctan(u) - \frac{3}{2} \ln(1+u^2) + [3u - 3 \arctan(u)] - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \right\} \Big|_0^1 \\ &= \left[-2 \arctan(u) - \ln(1+u^2) + 3u - \frac{u^2}{2} \right] \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2} - \ln(2) + \frac{5}{2} \implies \\ \rho_{C_{H-1}^{AMH}} &= -6\pi - 12 \ln(2) + 30 - 3 \approx -0,167. \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\frac{\rho_{C_{V-1}^{AMH}} + 3}{12} = 2 \iint_T \left[\frac{a(b-1)(2-a)}{1+(1-a)^2} + a \right] dbda = \int_0^1 \left[\frac{a(1-a)^2(a-2)}{1+(1-a)^2} + 2(a-a^2) \right] da$$

Dado que a integral $\int_0^1 [2(a^2 - a)] da = 1/3$, vamos nos concentrar no primeiro integrando. Para tanto, faremos a seguinte mudança de variável $u = 1 - a$. Assim sendo, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{a(1-a)^2(a-2)}{1+(1-a)^2} da &= \int_0^1 \frac{(u-1)u^2(u+1)}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{u^2(u^2-1)}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2} du - \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 u^2 du - 2 \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 u^2 du - 2 \int_0^1 1 du + 2 \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \left[\frac{u^3}{3} - 2u + 2 \arctan(u) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + \frac{\pi}{2} \implies \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_{C_{V-1}^{AMH}} + 3}{12} = -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} \implies \rho_{C_{V-1}^{AMH}} = -16 + 6\pi - 3 \approx -0,150$$

Por fim, $\rho_{C_{-1,\varphi}^{AMH}} = \varphi \rho_{C_{H-1}^{AMH}} + (1-\varphi) \rho_{C_{V-1}^{AMH}} = \varphi(-6\pi - 12 \ln(2) + 27) + (1-\varphi)(-19 + 6\pi)$.

Já que estudamos os casos em que $\theta \in \{-1, 0, 1\}$, resta analisar os valores de θ que pertencem aos intervalos $(-1, 0)$ ou $(0, 1)$. Começaremos por determinar $\rho_{C_{\theta,\varphi}^{AMH}}$ quando $\theta \in (0, 1)$. Precisamente,

$$\frac{\rho_{C_{H\theta}^{AMH}} + 3}{12} = 2 \iint_T \frac{ab}{1-\theta(1-b)^2} dadb = 2 \int_0^1 \int_0^b \frac{ab}{1-\theta(1-b)^2} dadb = \int_0^1 \frac{b^3}{1-\theta(1-b)^2} db.$$

A fim de resolver essa integral, vamos manipular algebricamente o numerador do integrando para facilitar os cálculos. Precisamente, temos:

$$\begin{aligned} b^3 &= b \times b^2 = \frac{b}{\theta} \times \theta b^2 = \frac{b}{\theta} \times [(\theta - 2b\theta + \theta b^2 - 1) - (-1 + \theta - 2b\theta)] \\ &= \frac{b}{\theta} \times [\theta(1-b)^2 - 1 + (1 - \theta + 2b\theta)]. \end{aligned}$$

Consequentemente, vale que:

$$\int_0^1 \frac{b^3}{1-\theta(1-b)^2} db = -\frac{1}{\theta} \int_0^1 b db + \frac{1}{\theta} \int_0^1 \frac{b}{1-\theta(1-b)^2} db + \int_0^1 \frac{2b^2 - b}{1-\theta(1-b)^2} db \quad (4.2)$$

Uma vez que a integral da primeira parcela é trivial, vamos nos ater à resolução da segunda e terceira parcelas de (4.2). Começaremos pela segunda.

Conforme a substituição $u = \sqrt{\theta}(1-b)$, decorre que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{b}{1-\theta(1-b)^2} db &= -\int_0^1 \frac{1-b}{1-\theta(1-b)^2} db + \int_0^1 \frac{1}{1-\theta(1-b)^2} db \\
 &= -\frac{1}{\theta} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u}{1-u^2} du + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{1}{1-u^2} du \\
 &= \left[\frac{1}{2\theta} \ln(1-u^2) + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \right] \Big|_0^{\sqrt{\theta}} \\
 &= \frac{1}{2\theta} \ln(1-\theta) + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Resolveremos a terceira parcela da equação (4.2), conforme a substituição $u = \sqrt{\theta}(1-b)$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{2b^2-b}{1-\theta(1-b)^2} db &= \int_0^1 \frac{(2b^2-4b+2)+(3b-2)}{1-\theta(1-b)^2} db \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1-\theta(1-b)^2} db - 2 \int_0^1 \frac{1}{1-\theta(1-b)^2} db + 3 \int_0^1 \frac{b}{1-\theta(1-b)^2} db
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Como podemos verificar, a segunda e a terceira parcelas desta integral (4.4) foram resolvidas em (4.3). Com efeito, nos preocuparemos somente com a primeira delas. Novamente, de acordo com a substituição $u = \sqrt{\theta}(1-b)$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1-\theta(1-b)^2} db &= \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^2}{1-u^2} du \\
 &= -\frac{1}{\theta\sqrt{\theta}} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{1-u^2}{1-u^2} du + \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{1}{1-u^2} du \\
 &= -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \Big|_0^{\sqrt{\theta}} \\
 &= -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\theta\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por fim, juntando os resultados de (4.3) e (4.5), e levando em consideração as expressões de (4.4), chegamos à integral desejada em (4.2):

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{b^3}{1-\theta(1-b)^2} db &= -\frac{1}{\theta} \int_0^1 b db + \left(\frac{1}{\theta} + 3\right) \int_0^1 \frac{b}{1-\theta(1-b)^2} db \\
 &\quad + 2 \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1-\theta(1-b)^2} db - 2 \int_0^1 \frac{1}{1-\theta(1-b)^2} db \\
 &= -\frac{1}{2\theta} + \left(\frac{1+3\theta}{\theta}\right) \left[\frac{1}{2\theta} \ln(1-\theta) + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{2}{\theta} + \frac{1}{\theta\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\theta}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right) \Rightarrow \\
 \rho_{C_{\theta}^{AMH}} &= \frac{6}{\theta^2} \left[-5\theta + (1+3\theta) \ln(1-\theta) + (3+\theta) \sqrt{\theta} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}}\right) \right] - 3
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Iremos, agora, em busca do valor $C_{V\theta}^{AMH}$, em que $\theta \in (0, 1)$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{V\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= 2 \iint_T \left[\frac{a(b-1)(1-\theta(1-a))}{1-\theta(1-a)^2} + a \right] db da \\ &= 2 \int_0^1 \int_a^1 \left[\frac{a(b-1)(1-\theta(1-a))}{1-\theta(1-a)^2} + a \right] db da \\ &= \int_0^1 \left[\frac{a(1-a)^2(\theta(1-a)-1)}{1-\theta(1-a)^2} + 2(a-a^2) \right] da. \end{aligned}$$

Assim como previamente feito para o caso em que $\theta = 1$, vamos somente considerar a primeira parcela do integrando, uma vez que $\int_0^1 2(a-a^2)da = 1/3$. Para tanto, realizaremos a mudança de variável $u = \sqrt{\theta}(1-a)$, donde decorre a seguinte integral

$$\int_0^1 \left[\frac{a(1-a)^2(\theta(1-a)-1)}{1-\theta(1-a)^2} \right] da = \frac{1}{\theta^2} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^2}{1-u^2} \left[(1+\theta)u - \sqrt{\theta}(1+u^2) \right] du \quad (4.7)$$

Como podemos observar, a integral de (4.7) pode ser desmembrada em duas integrais, a primeira delas sendo

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^3}{1-u^2} du &= \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{(u^3-u)+u}{1+u^2} du = \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u(u^2-1)}{1-u^2} du + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u}{1+u^2} du \\ &= - \int_0^{\sqrt{\theta}} u du + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u}{1-u^2} du = -\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\theta). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Enquanto a segunda integral é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^2(1+u^2)}{1-u^2} du &= \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{u^2+u^4}{1-u^2} du = \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{(u^2-1)+1}{1-u^2} du + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{(u^4-1)+1}{1-u^2} du \\ &= - \int_0^{\sqrt{\theta}} 1 du - \int_0^{\sqrt{\theta}} (1+u^2) du + \int_0^{\sqrt{\theta}} \frac{2}{1-u^2} du \\ &= -2\sqrt{\theta} - \frac{\theta\sqrt{\theta}}{3} + \ln \left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assim, ao substituímos os resultados de (4.8) e (4.9) em (4.7), obtemos $\rho_{C_{V\theta}^{AMH}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{V\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= \frac{1}{6\theta^2} \left[9\theta - \theta^2 - 3(1+\theta) \ln(1-\theta) - 6\sqrt{\theta} \ln \left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}} \right) \right] + \frac{1}{3} \implies \\ \rho_{C_{V\theta}^{AMH}} &= \frac{2}{\theta^2} \left[9\theta - \theta^2 - 3(1+\theta) \ln(1-\theta) - 6\sqrt{\theta} \ln \left(\frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}} \right) \right] + 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

De posse dos resultados (4.6) e (4.10), podemos expressar $\rho_{C_{\theta,\phi}^{AMH}}$ em termos de θ .

Com base no que foi feito até o presente momento, resta apenas determinar a expressão $\rho_{C_{\theta,\phi}^{AMH}}$ quando $\theta \in (-1, 0)$. Para esse fim, vamos considerar a mesma manipulação algébrica que foi feita para o caso em que $\theta \in (0, 1)$ uma vez que ela independe do sinal de θ .

Consequentemente, para que possamos determinar o valor $\rho_{C_{H\theta}^{AMH}}$, temos a seguinte integral a ser resolvida:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{H\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= 2 \iint_T \frac{ab}{1 - \theta(1-b)^2} da db = 2 \int_0^1 \int_0^b \frac{ab}{1 - \theta(1-b)^2} da db \\ &= -\frac{1}{\theta} \int_0^1 b db + \frac{1}{\theta} \int_0^1 \frac{b}{1 - \theta(1-b)^2} db + \int_0^1 \frac{2b^2 - b}{1 - \theta(1-b)^2} db. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observando que a primeira parcela é de fácil obtenção, vamos nos restringir a estudar as outras duas. A começar pela substituição $u = \sqrt{-\theta}(1-b)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{b}{1 - \theta(1-b)^2} db &= \int_0^1 \frac{(b-1) + 1}{1 - \theta(1-b)^2} db \\ &= -\int_0^1 \frac{1-b}{1 - \theta(1-b)^2} db + \int_0^1 \frac{1}{1 - \theta(1-b)^2} db \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u}{1+u^2} du + \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2\theta} \ln(1-\theta) + \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \arctan(\sqrt{-\theta}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Conforme a mesma manipulação que anteriormente, temos ainda:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2b^2 - b}{1 - \theta(1-b)^2} db &= \int_0^1 \frac{(2b^2 - 4b + 2) + (3b - 2)}{1 - \theta(1-b)^2} db \\ &= 2 \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1 - \theta(1-b)^2} db + 3 \int_0^1 \frac{b}{1 - \theta(1-b)^2} db - 2 \int_0^1 \frac{1}{1 - \theta(1-b)^2} db \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como sabemos o resultado da segunda e terceira integral em (4.13), resolveremos a integral referente à primeira parcela de acordo com a mesma substituição $u = \sqrt{-\theta}(1-b)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1 - \theta(1-b)^2} db &= -\frac{1}{\theta\sqrt{-\theta}} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= -\frac{1}{\theta\sqrt{-\theta}} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{(u^2 + 1) - 1}{1+u^2} du \\ &= -\frac{1}{\theta\sqrt{-\theta}} \int_0^{\sqrt{-\theta}} 1 du + \frac{1}{\theta\sqrt{-\theta}} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta\sqrt{-\theta}} \arctan(\sqrt{-\theta}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sendo assim, podemos expressar a integral em (4.11) em termos dos resultados de (4.12),

(4.13) e (4.14) como será feito a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{C_{H\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= -\frac{1}{2\theta} + \left(\frac{1}{\theta} + 3\right) \int_0^1 \frac{b}{1 - \theta(1-b)^2} db \\
&+ 2 \int_0^1 \frac{(1-b)^2}{1 - \theta(1-b)^2} db - 2 \int_0^1 \frac{1}{1 - \theta(1-b)^2} db \\
&= -\frac{1}{2\theta} + \left(\frac{1+3\theta}{\theta}\right) \left[\frac{1}{2\theta} \ln(1-\theta) + \frac{1}{\sqrt{-\theta}} \arctan(\sqrt{-\theta}) \right] \\
&- \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta\sqrt{-\theta}} \arctan(\sqrt{-\theta}) - \frac{2}{\sqrt{-\theta}} \arctan(\sqrt{-\theta}) \\
&= + \frac{1}{2\theta^2} [-5\theta + (1+3\theta)\ln(1-\theta) - 2(3+\theta)\sqrt{-\theta} \arctan(\sqrt{-\theta})] \implies \\
\rho_{C_{H\theta}^{AMH}} &= \frac{6}{\theta^2} [-5\theta + (1+3\theta)\ln(1-\theta) - 2(3+\theta)\sqrt{-\theta} \arctan(\sqrt{-\theta})] - 3.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Chegamos, enfim, ao problema de encontrar o valor de $\rho_{C_{V\theta}^{AMH}}$. Essencialmente, nosso objetivo se resume a resolver a seguinte integral (lembrando que $\theta \in (-1, 0)$):

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{C_{V\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= 2 \iint_T \left[\frac{a(b-1)(1-\theta(1-a))}{1-\theta(1-a)^2} + a \right] db da \\
&= 2 \int_0^1 \int_a^1 \left[\frac{a(b-1)(1-\theta(1-a))}{1-\theta(1-a)^2} + a \right] db da \\
&= \int_0^1 \left[\frac{a(1-a)^2(\theta(1-a)-1)}{1-\theta(1-a)^2} \right] da + \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A fim de resolvê-la, consideraremos a seguinte substituição $u = \sqrt{-\theta}(1-a)$. Assim, temos:

$$\int_0^1 \left[\frac{a(1-a)^2(\theta(1-a)-1)}{1-\theta(1-a)^2} \right] da = -\frac{1}{\theta^2} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2}{1+u^2} \left[\sqrt{-\theta}(1-u^2) - (1+\theta)u \right] du \tag{4.17}$$

Similarmente, a integral em questão (4.17) pode ser desmembrada em duas integrais mais elementares. Resolveremos, inicialmente, aquela correspondente à primeira parcela.

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2(1-u^2)}{1+u^2} du &= \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2}{1+u^2} du - \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{(u^4+u^2)-u^2}{1+u^2} du \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2}{1+u^2} du - \int_0^{\sqrt{-\theta}} u^2 du \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{-\theta}} 1 du - 2 \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{1}{1+u^2} du - \int_0^{\sqrt{-\theta}} \int u^2 du \\
&= 2\sqrt{-\theta} - 2 \arctan(\sqrt{-\theta}) + \frac{\theta\sqrt{-\theta}}{3}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^3}{1+u^2} u &= \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{(u^3+u)-u}{1+u^2} du \\ &= \int_0^{\sqrt{-\theta}} u du - \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u}{1+u^2} du \\ &= -\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-\theta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como resultado das integrais em (4.18) e (4.19), temos o valor de (4.16). Precisamente,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{C_{V\theta}^{AMH}} + 3}{12} &= -\frac{1}{\theta^2} \int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2}{1+u^2} \left[\sqrt{-\theta}(1-u^2) - (1+\theta)u \right] du + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{-\theta}}{\theta^2} \left[\int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^2(1-u^2)}{1+u^2} du \right] + \frac{1+\theta}{\theta^2} \left[\int_0^{\sqrt{-\theta}} \frac{u^3}{1+u^2} u \right] + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6\theta^2} [9\theta - \theta^2 + 12\sqrt{-\theta} \arctan(\sqrt{-\theta}) - 3(1+\theta) \ln(1-\theta)] + \frac{1}{3} \implies \\ \rho_{C_{V\theta}^{AMH}} &= \frac{2}{\theta^2} [9\theta - \theta^2 + 12\sqrt{-\theta} \arctan(\sqrt{-\theta}) - 3(1+\theta) \ln(1-\theta)] + 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por fim, de posse dos resultados em (4.15) e (4.20), temos o coeficiente ρ de Spearman $\rho_{C_{\theta,\varphi}^{AMH}}$ para a família de cópulas AMH transformada (em termos de φ).

A seguir, apresentamos na Tabela 1 os valores do coeficiente de correlação das cópulas $C_{H\theta}^{AMH}$ e $C_{V\theta}^{AMH}$ para alguns valores de θ entre -1 e 1 .

θ	$\rho_{C_{H\theta}^{AMH}}$	θ	$\rho_{C_{H\theta}^{AMH}}$	θ	$\rho_{C_{V\theta}^{AMH}}$	θ	$\rho_{C_{V\theta}^{AMH}}$
-0,9	-0,153	0,1	0,020	-0,9	-0,139	0,1	0,021
-0,8	-0,138	0,2	0,041	-0,8	-0,126	0,2	0,043
-0,7	-0,123	0,3	0,064	-0,7	-0,113	0,3	0,068
-0,6	-0,107	0,4	0,087	-0,6	-0,100	0,4	0,094
-0,5	-0,090	0,5	0,113	-0,5	-0,085	0,5	0,124
-0,4	-0,074	0,6	0,140	-0,4	-0,070	0,6	0,157
-0,3	-0,056	0,7	0,168	-0,3	-0,054	0,7	0,194
-0,2	-0,038	0,8	0,199	-0,2	-0,037	0,8	0,238
-0,1	-0,020	0,9	0,233	-0,1	-0,019	0,9	0,292

Tabela 1 – Valores ilustrativos dos coeficientes de correlação estudados previamente.

A fim de finalizar essa seção, vamos determinar o coeficiente de correlação ρ de Spearman para o caso da família de cópulas Plackett transformada. Aplicaremos o mesmo passo-a-passo que anteriormente. Porém, em virtude da natureza das expressões $C_{H\theta}^{Plackett}$ e $C_{V\theta}^{Plackett}$, dividiremos tal procedimento em quatro etapas: primeiramente calcularemos o coeficiente $\rho_{C_{H\theta}^{Plackett}}$ quando $0 < \theta < 1$ e quando $\theta > 1$. Depois aplicaremos o mesmo procedimento para $\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}}$ quando $0 < \theta < 1$ e $\theta > 1$. Começaremos pela expressão correspondente à família de cópulas semilineares inferiores $C_{H\theta}^{Plackett}$.

De acordo com a definição do coeficiente ρ de Spearman, temos que

$$\begin{aligned}\rho_{C_{H\theta}^{Plackett}} &= 24 \iint_T a \left[\frac{1 + 2(\theta - 1)b - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)b]^2 - 4\theta(\theta - 1)b^2}}{2b(\theta - 1)} \right] dadb - 3 \\ &= 24 \int_0^1 \int_0^b a \left[\frac{1 + 2(\theta - 1)b - \sqrt{[1 + 2(\theta - 1)b]^2 - 4\theta(\theta - 1)b^2}}{2b(\theta - 1)} \right] dadb - 3\end{aligned}$$

Desse modo, dedicar-nos-emos, em um primeiro momento, a determinar a integral da segunda parcela, uma vez que a primeira é de fácil obtenção. Mais ainda, a fim de facilitar as contas envolvidas, vamos utilizar a identidade previamente mencionada dada por $[1 + 2(1 - \theta)x]^2 - 4\theta(\theta - 1)x^2 = (1 - \theta)(2x - 1)^2 + \theta$. Assim sendo, se fizermos as consecutivas mudanças de variáveis $u = 2b - 1$ e $\sinh(v) = \sqrt{(1 - \theta)/\theta}u$, após integrarmos sobre a , obtemos a seguinte resposta

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{b\sqrt{(1 - \theta)(2b - 1)^2 + \theta}}{4(\theta - 1)} db &= \frac{\sqrt{\theta}}{16(\theta - 1)} \int_{-1}^1 (u + 1) \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \theta}{\theta}\right) u^2} du \\ &= \frac{\sqrt{\theta}}{8(\theta - 1)} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \theta}{\theta}\right) u^2} du \\ &= -\frac{\theta}{8(1 - \theta)^{3/2}} \int_0^{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1 - \theta}{\theta}}} \cosh^2(v) dv \\ &= -\frac{1}{16(1 - \theta)^{3/2}} \left[\sqrt{1 - \theta} + \theta \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{1 - \theta}{\theta}} \right) \right]\end{aligned}$$

Além disso, temos também que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^b a \left[\frac{1 + 2(\theta - 1)b}{2b(\theta - 1)} \right] dadb &= \frac{1}{4(\theta - 1)} \int_0^1 (b + 2(\theta - 1)b^2) db \\ &= \frac{1}{4(\theta - 1)} \left(\frac{b^2}{2} + \frac{2(\theta - 1)b^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4(\theta - 1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{2(\theta - 1)}{3} \right) \\ &= \frac{4\theta - 1}{24(\theta - 1)}\end{aligned}$$

Com efeito, temos a seguinte expressão para o coeficiente ρ de Spearman da cópula semilinear inferior $C_{H\theta}^{Plackett}$ quando $0 < \theta < 1$:

$$\begin{aligned}\rho_{C_{H\theta}^{Plackett}} &= \frac{4\theta - 1}{\theta - 1} + \frac{3}{2(1 - \theta)^{3/2}} \left[\sqrt{1 - \theta} + \theta \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{1 - \theta}{\theta}} \right) \right] - 3 \\ &= \frac{4\theta - 1}{\theta - 1} + \frac{3}{2(1 - \theta)^{3/2}} \left[\sqrt{1 - \theta} + \theta \ln \left(\frac{\sqrt{1 - \theta} + 1}{\sqrt{\theta}} \right) \right] - 3\end{aligned}$$

Podemos agora prosseguir e determinar o coeficiente ρ de Spearman da mesma família de cópulas quando $\theta > 1$. A ideia é essencialmente a mesma, isto é, aplicaremos duas mudanças de variáveis semelhantes àsquelas previamente utilizadas a fim de obter o valor da integral. Mais precisamente, se fizermos as mudanças de variáveis $u = 2b - 1$ e $\sin(v) = \sqrt{(\theta - 1)/\theta}u$, nós chegamos à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{b\sqrt{(1-\theta)(2b-1)^2+\theta}}{4(\theta-1)} db &= \frac{\sqrt{\theta}}{16(\theta-1)} \int_{-1}^1 (u+1)\sqrt{1+\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)u^2} du \\ &= \frac{\sqrt{\theta}}{8(\theta-1)} \int_0^1 \sqrt{1-\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right)u^2} du \\ &= \frac{\theta}{8(\theta-1)^{3/2}} \int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}} \cos^2(v) dv \\ &= \frac{\theta}{16(\theta-1)^{3/2}} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta-1}}{\theta} \right] \end{aligned}$$

Com efeito, temos a seguinte expressão para o coeficiente ρ de Spearman da cópula semi-linear inferior $C_{H\theta}^{Plackett}$ quando $\theta > 1$:

$$\rho_{C_{H\theta}^{Plackett}} = \frac{4\theta-1}{\theta-1} - \frac{3\theta}{2(\theta-1)^{3/2}} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta-1}}{\theta} \right] - 3. \quad (4.21)$$

Trataremos, enfim, do coeficiente ρ de Spearman da cópula semilinear superior $C_{V\theta}^{Plackett}$. De acordo com a sua definição, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{C_{V\theta}^{Plackett}} &= 24 \iint_T \left\{ \left(\frac{1-b}{1-a} \right) \left[\frac{1 - \sqrt{[1+2(\theta-1)a]^2 - 4\theta(\theta-1)a^2}}{2(\theta-1)} \right] + a \right\} dbda - 3 \\ &= 24 \int_0^1 \int_a^1 \left\{ \left(\frac{1-b}{1-a} \right) \left[\frac{1 - \sqrt{[1+2(\theta-1)a]^2 - 4\theta(\theta-1)a^2}}{2(\theta-1)} \right] + a \right\} dbda - 3. \end{aligned}$$

Ao resolvermos a integral envolvida no cálculo do coeficiente ρ de Spearman da cópula semilinear superior $C_{V\theta}^{Plackett}$, concluímos que a expressão $\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}}$ é a mesma que $\rho_{C_{H\theta}^{Plackett}}$ para $0 < \theta < 1$. Precisamente,

$$\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}} = \rho_{C_{H\theta}^{Plackett}} = \frac{4\theta-1}{\theta-1} + \frac{3}{2(1-\theta)^{3/2}} \left[\sqrt{1-\theta} + \theta \ln\left(\frac{\sqrt{1-\theta}+1}{\sqrt{\theta}}\right) \right] - 3. \quad (4.22)$$

Similarmente, devido à similitude entre as integrais envolvidas no cálculo do coeficiente $\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}}$ da cópula semilinear superior $C_{V\theta}^{Plackett}$ quando $\theta > 1$, também concluímos que $\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}} = \rho_{C_{H\theta}^{Plackett}}$. Em suma, temos:

$$\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}} = \rho_{C_{H\theta}^{Plackett}} = \frac{4\theta-1}{\theta-1} - \frac{3\theta}{2(\theta-1)^{3/2}} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{\theta-1}{\theta}}\right) + \frac{\sqrt{\theta-1}}{\theta} \right] - 3.$$

Por fim, de posse dos resultados (4.21) e (4.22), temos o coeficiente $\rho_{C_{\theta,\varphi}^{Plackett}}$ para a família transformada de cópulas Plackett (independente de φ).

A seguir, apresentamos na Tabela 2 os valores do coeficiente de correlação das cópulas $C_{\theta,\varphi}^{Plackett}$ para alguns valores de θ .

θ	$\rho_{C_{\theta,\varphi}^{Plackett}}$	θ	$\rho_{C_{\theta,\varphi}^{Plackett}}$	θ	$\rho_{C_{\theta,\varphi}^{Plackett}}$	θ	$\rho_{C_{\theta,\varphi}^{Plackett}}$
0,01	-0,470	0,55	-0,114	1,01	0,002	100	0,791
0,10	-0,347	0,60	-0,098	2	0,144	200	0,847
0,15	-0,305	0,65	-0,083	3	0,230	300	0,873
0,20	-0,270	0,70	-0,069	4	0,291	400	0,889
0,25	-0,240	0,75	-0,056	5	0,337	500	0,900
0,30	-0,213	0,80	-0,043	6	0,374	600	0,908
0,35	-0,190	0,85	-0,032	7	0,405	700	0,915
0,40	-0,168	0,90	-0,021	8	0,431	800	0,920
0,45	-0,148	0,95	-0,010	9	0,453	900	0,925
0,50	-0,130	0,99	-0,002	10	0,473	10 ⁶	0,998

Tabela 2 – Valores ilustrativos dos coeficientes de correlação estudados previamente.

4.8 Comparação dos resultados

Em vista da teoria apresentada no Capítulo 3, o método proposto utiliza aquilo que se conhece na literatura como cópulas semilineares. Mais precisamente, a construção que foi realizada consiste na combinação convexa de duas cópulas semilineares: uma cópula semilinear inferior e outra semilinear superior. Tal procedimento foi realizado três vezes: uma vez correspondendo a funções diagonais relativas a cópulas AMH ($\delta = \delta_{C_{\theta}^{AMH}}$), outra vez correspondendo a cópulas FGM ($\delta = \delta_{C_{\theta}^{FGM}}$) e outra vez correspondendo a cópulas Plackett ($\delta = \delta_{C_{\theta}^{Plackett}}$). Nesse contexto, as condições propostas para a validação do método correspondem àquelas restrições propostas no Teorema 16.

O primeiro mérito dos resultados propostos, no entanto, está no fato de termos considerado casos específicos (e importantes) da literatura. O segundo mérito, por sua vez, reside no fato de termos determinado as expressões dos coeficientes ρ de Spearman para cada uma das seis famílias de cópulas transformadas. Mais precisamente, foram determinados os valores de $\rho_{C_{H\theta}^{AMH}}, \rho_{C_{V\theta}^{AMH}}, \rho_{C_{H\theta}^{FGM}}, \rho_{C_{V\theta}^{FGM}}, \rho_{C_{H\theta}^{Plackett}}$ e $\rho_{C_{V\theta}^{Plackett}}$, em que o índice V está relacionado à palavra *vertical* (cópula semilinear superior), e o índice H está relacionado à palavra *horizontal* (cópula semilinear inferior). Além disso, a justificativa de se utilizar a combinação convexa entre cópulas está no fato de que, ao combinarmos suas expressões, podemos conciliar o espectro dos valores dos coeficientes de correlação envolvidos. Por fim, as homotopias propostas são meramente ilustrativas: na prática, deve-se combinar duas (ou mais) cópulas que melhor capturam o intervalo de correlação de interesse (fraca ou forte), sejam elas transformadas ou não.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo inicial desse trabalho consistiu em estudar funções cópulas ([Nelsen, 2006](#); [Durante et al, 2016](#)) almejando a construção de uma nova família delas. A fim de construí-las, utilizou-se aquilo que se conhece na literatura como combinação convexa de cópulas semilineares (superiores e inferiores). Mais precisamente, a primeira família de cópulas obtida foi construída com base na função diagonal advinda da família de cópulas AMH. Dito isso, procedimento análogo foi aplicado às cópulas FGM e Plackett. Uma vez de posse das expressões das novas famílias de cópulas, procedemos no sentido de determinar os respectivos coeficientes ρ de Spearman de cada uma delas.

Com relação aos resultados obtidos, observamos que os coeficientes de correlação ρ de Spearman das famílias de cópulas transformadas oriundas das famílias FGM e AMH capturam relações de concordância entre fracas e moderadas. Por outro lado, os coeficientes de correlação ρ de Spearman das famílias de cópulas transformadas advindas da família de cópulas Plackett retratam relações de concordância entre moderadas e fortes. Em todos os casos, os coeficientes em questão variam entre valores negativos e positivos.

REFERÊNCIAS

- Ash, R. B. **Probability and Measure Theory**. 2000. Academic Press. Citado nas páginas 19, 33 e 34.
- Athreya, K. B., Lahiri, S. N. **Measure Theory and Probability Theory**. 2006. Springer. Citado nas páginas 18, 19, 29, 31, 32 e 35.
- Bekrizadeh, H., Parham, G. A., and Jamshidi, B. **A new asymmetric class of bivariate copulas for modeling dependence**, 2016. Citado na página 22.
- Durante, F., Kolesárová, A., Mesiar, Radko., Sempì, C. **Semilinear Copulas**, 2007. Citado nas páginas 17, 43, 44 e 45.
- Durante, F., Sempì, C. **Principles of Copula Theory**. 2016. CRC Press. Citado nas páginas 18, 19, 27, 35, 39, 40 e 71.
- Garling, D.J.H. **A Course in Mathematical Analysis - Volume II - Metric and Topological Spaces, Functions of a Vector Variable**. 2014. Cambridge University Press. Citado na página 21.
- Joe, H. **Dependence Modeling with Copulas**. 2015. CRC Press. Citado na página 17.
- Jwaid, T., De Baets, B., De Meyer, H. **Semiquadratic copulas based on horizontal and vertical interpolation**, 2014. Citado nas páginas 46, 48 e 49.
- Kruskal, W.H. **Ordinal Measures of Association**, 1958. Citado na página 41.
- Nelsen, R.B. **An Introduction to Copulas**. 2006. Springer. Citado nas páginas 17, 18, 19, 23, 24, 25 e 71.
- Nelsen, R.B., Quesada-Molina, J.J., Rodríguez-Lallena, J.A. **Bivariate copulas with cubic sections**. 2006. *Nonparametric Statistics*, 7, 205–220. Citado na página 50.
- Quesada-Molina, J. J., Rodríguez-Lallena, J. A., Úbeda-Flores, M. **What are copulas?**, 2003. Citado na página 17.
- Sánchez, J.F., Úbeda-Flores, M. **Semi-polynomial copulas**, 2013. Citado na página 50.
- Spearman, C. **The proof and measurement of association between two things**, *Amer. J. Psychol.* 15 (1904) 72–101. Citado nas páginas 18 e 41.
- Tao, T. **Analysis II**. 2015. Springer. Citado na página 29.
- Zhang, L., Singh, V.P. **Plackett Copula**. In **Copulas and their Applications in Water Resources Engineering (pp. 242-260)**, Cambridge: Cambridge University Press. Citado na página 58.

