

Introdução à Geometria Diferencial e à Análise Complexa

Autor: *Rodrigo Thomaz da Silva*

Orientador: *Francisco Braun*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Luciene Nogueira Bertoncello
Natalia Andrea Viana Bedoya
Wladimir Seixas

São Carlos, 15 de janeiro de 2021.

Introdução à Geometria Diferencial e Análise Complexa

Autor: *Rodrigo Thomaz da Silva*

Orientador: *Francisco Braun*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Bacharelado em Matemática

Professores Responsáveis: Luciene Nogueira Bertoncello
Natalia Andrea Viana Bedoya
Wladimir Seixas

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 15 de janeiro de 2021.



Rodrigo Thomaz da Silva



Francisco Braun

“No man is liberated from fear who dare not see his place in the world as it is; no man can achieve the greatness of which he is capable until he has allowed himself to see his own littleness.”

Bertrand Russell - *Dreams and Facts* (1919)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, que sempre me sustentou desde a mais tenra idade.

Agradeço aos meus pais, Haroldo Thomaz da Silva e Ana Neri Artimundo da Silva, que me deram toda a educação e sustento necessários.

Agradeço aos meus irmãos, Maurício Thomaz da Silva, Laura Neri Thomaz da Silva e Larissa Thomaz da Silva, que me irritam e alegram meus dias.

Agradeço ao meu orientador, Francisco Braun, que me ensinou tanto do mundo matemático e científico de maneira geral.

Agradeço aos meus amigos e colegas mais próximos, Alan, Laíssa, Leonardo, Luis e Rafael, que tanto me xingaram e me apoiaram, de maneira a tornar esta caminhada mais tranquila e divertida.

Por fim, agradeço a cada pessoa que já tive o prazer de conhecer, que me fizeram mal e que me fizeram bem. Cada uma destas teve o papel de me transformar na pessoa que sou hoje. Em especial, os professores que tive ao longo da vida, que me ensinaram não só conhecimento acadêmico, mas a viver em harmonia com os demais seres do nosso planeta.

Resumo

O artigo “Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions” de Frederico Xavier [3] passa por diversas áreas da Matemática para obter seu resultado principal. Entre elas estão a Geometria Diferencial e a Análise Complexa. Assim, em busca de uma preparação melhor para o estudo do dito artigo, este trabalho compila boa parte do nosso estudo sobre as duas áreas citadas. O maior enfoque é, primeiramente em curvas e superfícies e depois em funções analíticas complexas.

Sumário

I	Geometria Diferencial	1
1	Curvas	2
1	Curvas parametrizadas	2
2	Curvas regulares e comprimento de arco	4
3	Produto vetorial	9
4	Teoria local de curvas parametrizadas por comprimento de arco	11
2	Superfícies Regulares	18
1	Introdução: primeiras definições e exemplos	18
2	Mudança de parâmetros e funções sobre superfícies	28
3	Planos tangentes e o diferencial de uma aplicação	35
II	Análise Complexa	42
3	Espaços métricos; o plano complexo e sua topologia	43
1	O plano complexo	43
2	O plano estendido e sua representação esférica	45
3	Topologia básica; conjuntos abertos	48
4	Conexidade	51
5	Sequências em espaços métricos	54
6	Compacidade	57
7	Continuidade	60
8	Convergência uniforme	63
4	Séries de potências e funções analíticas	65
1	Séries de potências	65
2	Propriedades básicas de funções analíticas	67
3	Funções analíticas e transformações de Möbius	78

Introdução

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é dar base ao próximo trabalho de conclusão de curso, isto é, construir o conhecimento necessário (mas não suficiente) para uma boa compreensão do artigo “Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions” de Frederico Xavier [3].

Da maneira como está escrito, o texto possui a seguinte estrutura:

1. Na Parte I, é trabalhada a área de Geometria Diferencial. Os tópicos envolvem curvas, superfícies e conceitos conectados a estes dois. Toda a extensão desta parte é baseada em [1];
2. Na Parte II, o foco é Análise Complexa. Dentre os itens desenvolvidos, estão o plano complexo e sua compactificação, a topologia de \mathbb{C} , funções analíticas e séries de potências e transformações de Möbius. Aqui se encontra a definição de *aplicação conforme*, objeto imprescindível na leitura do artigo. A referência principal para este estudo foi [2].

Todas as figuras presentes nesse trabalho foram elaboradas pelo autor.

Parte I

Geometria Diferencial

Capítulo 1

Curvas

Durante um curso de Cálculo 1 ou Análise na Reta, são estudadas diversas propriedades de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais como continuidade, diferenciabilidade ou integrabilidade. Nota-se a partir desses estudos que estes atributos estão, em geral, relacionados à função f e ao seu domínio. Assim, uma maneira direta de expandir esses conceitos unidimensionais em dimensões maiores é manter o domínio da função como sendo a reta ou um intervalo dela; pois, dessa forma, a imagem será, em algum sentido, um subconjunto de dimensão um do contradomínio.

1 Curvas parametrizadas

Denota-se por \mathbb{R}^3 o conjunto das triplas (x, y, z) de números reais.

Definição 1.1. Uma *função diferenciável* (ou *suave*) é uma função que possui, em todos os pontos de seu domínio, derivadas de todas as ordens.

Note que, da definição, funções diferenciáveis são contínuas.

Definição 1.2. Uma *curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 (aqui pode-se ter $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, a variável t é chamada de *parâmetro* da curva.

Ao usar a notação $x'(t)$ para a primeira derivada de x no ponto t (similarmente para as funções y e z , o vetor $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ é chamado de *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) da curva α em t . O conjunto imagem $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado de *traço* de α .

Aqui uma importante distinção deve ser feita: uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação, e não um subconjunto do \mathbb{R}^3 ; este último está atrelado à curva, mas não a caracteriza. Curvas diferentes podem ter traços iguais, como será visto em exemplos mais adiante.

Também é importante notar que, se z é a função nula, pode-se enxergar a curva em questão como uma curva em \mathbb{R}^2 .

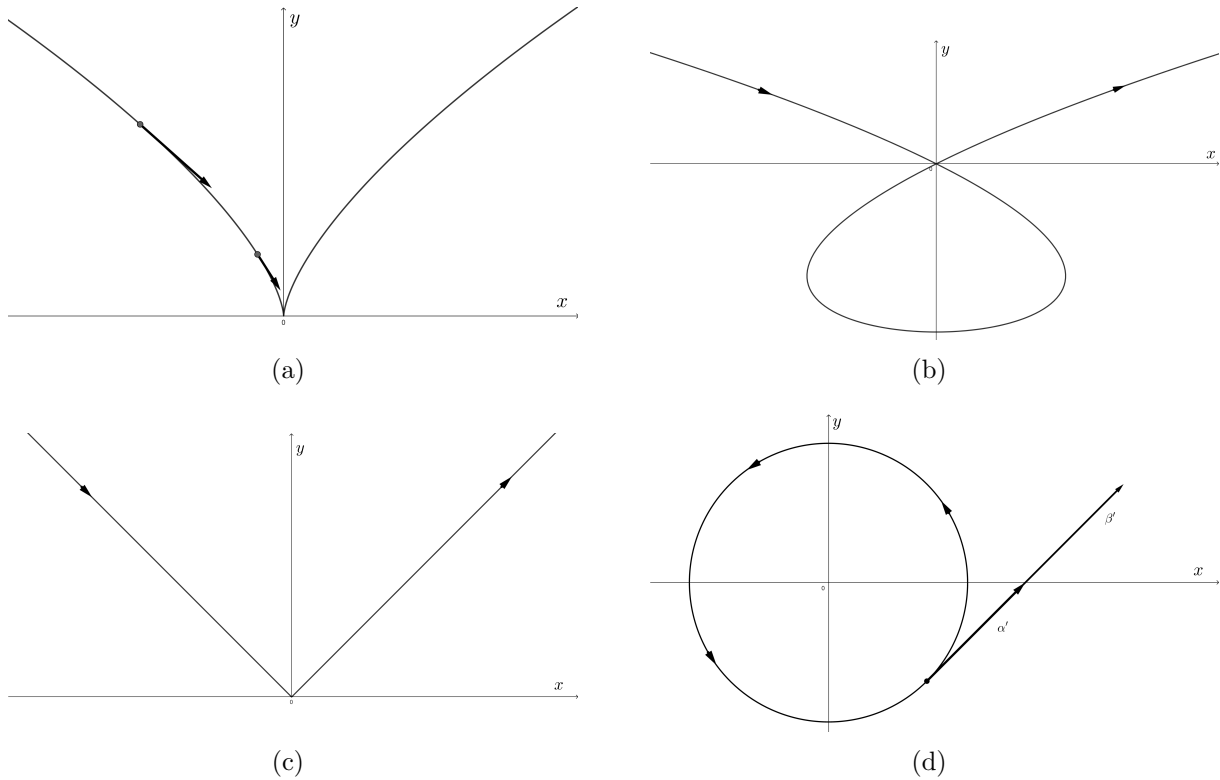


Figura 1.4

Exemplos 1.3.

- (1) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2), t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada que tem a Figura 1.4 (a) como traço. Note que $\alpha'(0) = (0, 0)$; isto é, o vetor velocidade é nulo para $t = 0$.
- (2) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada que tem a Figura 1.4 (b) como traço. Note que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$; isto é, a função α não é injetora.
- (3) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, |t|), t \in \mathbb{R}$, não é uma curva diferenciável parametrizada, pois $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$ (Figura 1.4 (c)).
- (4) As duas curvas parametrizadas distintas $\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, onde $t \in (0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon), \varepsilon > 0$, têm o mesmo traço (a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$). Note que o vetor velocidade de β em t possui o dobro do tamanho do vetor velocidade de α no mesmo ponto (Figura 1.4 (d)).

Resultados e definições provenientes de geometria analítica tais como norma ou produto interno (produto escalar) serão dados como conhecidos. Entretanto, uma propriedade

simples de ser provada que vale ressaltar é a seguinte: se $u(t)$ e $v(t)$, $t \in I$, são curvas diferenciáveis, então $u(t) \cdot v(t)$ é uma função diferenciável, e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t).$$

Lema 1.5. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, com $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A função $|\alpha(t)|$ é constante e diferente de zero se, e somente se, $\alpha(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.*

Demonstração. Suponha que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Então, para qualquer $t \in I$ vale

$$\begin{aligned} \alpha(t) \cdot \alpha'(t) &= x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\alpha(t)|^2), \end{aligned} \tag{1.1}$$

e, claramente, tem-se $|\alpha'(t)|$ constante se, e somente se, $|\alpha'(t)|^2$ também é constante.

Agora, se $|\alpha(t)|$ é constante, a equação (1.1) mostra que $\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0$, isto é, os vetores são ortogonais para todo $t \in I$; por outro lado, se os vetores em questão são ortogonais, o produto interno será zero e, por conseguinte, a derivada da norma ao quadrado do vetor $\alpha(t)$. Logo, tal valor é constante em I . \square

2 Curvas regulares e comprimento de arco

Para atingir os objetivos propostos de forma clara e precisa, algumas hipóteses sobre as curvas devem ser feitas. Esta seção estabelece algumas delas.

Definição 1.6. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável parametrizada.

- (i) Para cada $t \in I$ em que $\alpha'(t) \neq 0$, existe uma única reta que contém o ponto $\alpha(t)$ e é direcionada por $\alpha'(t)$. Essa reta é chamada de *reta tangente* a α em t .
- (ii) Se $t \in I$ é tal que $\alpha'(t) = 0$, então t é chamado de *ponto singular* de α .
- (iii) Se α não possui pontos singulares, então α é dita *regular*.

Note que a curva do Exemplo 1.3 (1) não é regular: o ponto $t = 0$ é singular.

Em Geometria Diferencial é essencial que existam retas tangentes em todos os pontos de uma curva. Dito isto, daqui em diante todas as curvas em questão serão curvas diferenciáveis parametrizadas regulares (por conveniência, a palavra diferenciável será omitida) a menos que o contrário seja dito.

Definição 1.7. Dado $t \in I$, o *comprimento de arco* de uma curva regular parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, do ponto $t_0 \in I$ a t , é, por definição,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi,$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é o comprimento do vetor $\alpha'(t)$.

Como $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, o comprimento de arco s é uma função diferenciável invertível em relação a t e vale

$$\frac{ds}{dt}(t) = |\alpha'(t)|,$$

e então se pode reparametrizar a curva usando o parâmetro s . Neste caso, dizemos que a curva está parametrizada pelo *comprimento de arco*.

Pode acontecer de o parâmetro t já ser o comprimento de arco medido de algum ponto. Nesse caso tem-se $\frac{ds}{dt} = 1 = |\alpha'(t)|$; isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1. Reciprocamente, se $|\alpha'(t)| \equiv 1$, então

$$s = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0,$$

ou seja, t é o comprimento de arco de α medido de algum ponto.

Há uma interpretação muito interessante do comprimento de arco, desenvolvida como segue. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável e $[a, b] \subset I$ um intervalo fechado. Para toda *partição*

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

de $[a, b]$, considere a soma $\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = l(\alpha, P)$, onde P é a partição dada. A norma $|P|$ de uma partição P é definida como

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Geometricamente, $l(\alpha, P)$ é o comprimento de uma poligonal inscrita no traço de α com vértices em $\alpha(t_i)$. Assim, o comprimento de arco de $\alpha([a, b])$ é, em algum sentido, um limite de comprimentos de poligonais inscritas.

Teorema 1.8. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável, $[a, b] \subset I$ um intervalo fechado e P uma partição de $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$ então*

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \varepsilon.$$

Demonstração. De início, observe que, independentemente da partição P , vale

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)| dt,$$

isto é,

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \geq 0. \quad (1.2)$$

Caso tenha-se $b = a$, o resultado é trivial. Suponha então $b \neq a$. Neste caso, pela continuidade uniforme de α' em $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$, então

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Assim, se $|P| < \delta$, para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ vale

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= |\alpha'(t_i) + \alpha'(t) - \alpha'(t_i)| \\ &\leq |\alpha'(t_i)| + |\alpha'(t) - \alpha'(t_i)| \\ &< |\alpha'(t_i)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)| dt &< |\alpha'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} \\ &= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t) + \alpha'(t_i) - \alpha'(t)) dt \right| + \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} \\ &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right| + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t_i) - \alpha'(t)) dt \right| + \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} \\ &\leq |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| + \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{b-a}. \end{aligned}$$

Somando todas essas desigualdades e usando (1.2), obtém-se

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \varepsilon,$$

que é o desejado. □

Assim, faz sentido dizer que o comprimento de arco de uma curva diferenciável α medido de t_0 a t é, na verdade, o comprimento do traço de α medido de $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t)$.

Por simplicidade, nas seções que seguem as curvas serão parametrizadas por comprimento de arco; todavia, essa convenção não é, essencialmente, necessária. Além disso, como a maioria dos conceitos serão dados em função das derivadas de $\alpha(s)$, a origem do comprimento de arco s pode ser omitida.

Definição 1.9. Dada uma curva α parametrizada por comprimento de arco $s \in (a, b)$,

considere a curva β definida em $(-b, -a)$ como $\beta(s) = \alpha(-s)$. Diz-se que essas curvas diferem por uma *mudança de orientação*.

Observe que a curva β tem o mesmo traço de α , mas percorre o caminho na direção oposta a esta última.

Para finalizar este capítulo, as seguintes proposições são apresentadas.

Proposições 1.10.

1. Considere a curva parametrizada $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t), t \in \mathbb{R}, a$ e b constantes, $a > 0, b < 0$.

(a) A curva $\alpha(t)$ vai a $(0, 0)$ espiralando ao redor da origem quando $t \rightarrow +\infty$ (por causa disso, o traço de α é chamado de espiral logarítmica; veja Figura 1.11).

(b) Vale $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi$$

é finito; isto é, α tem comprimento de arco finito em $[t_0, +\infty)$.

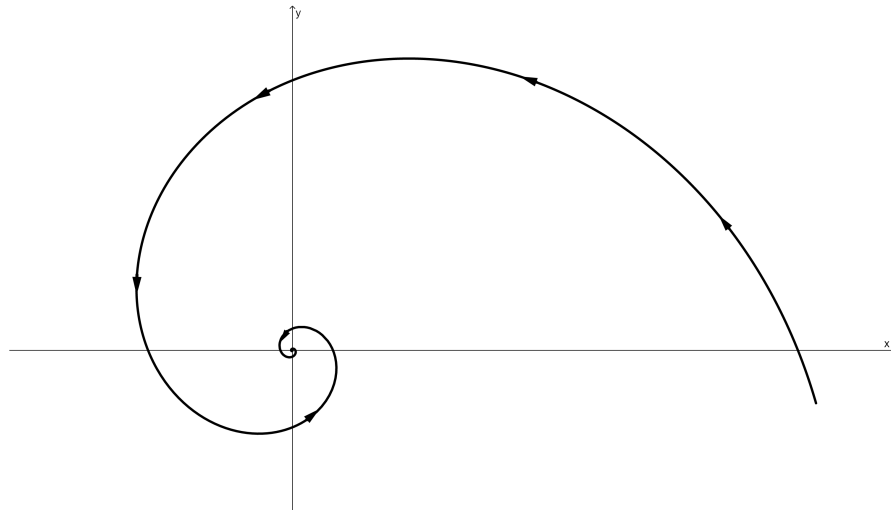


Figura 1.11: Espiral logarítmica

2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada. Considere $[a, b] \subset I$.

(a) Para qualquer vetor constante v com $|v| = 1$, vale

$$(\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

(b) Tem-se

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt;$$

isto é, a curva de menor comprimento de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ é a linha reta que liga estes pontos.

Demonstração.

1. (a) Defina $x(t) = ae^{bt} \cos t$ e $y(t) = ae^{bt} \sin t$. Como $b < 0$, a função e^{bt} tende a 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Assim, como $\cos t$ é uma função limitada em toda a reta, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

Por raciocínio análogo conclui-se que $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, como e^{bt} é positivo para todo $t \in \mathbb{R}$, o sinal das aplicações $x(t)$ e $y(t)$ depende exclusivamente das funções $\cos t$ e $\sin t$, respectivamente. Com isso, é possível ver que, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ vale

$$\begin{cases} \alpha(t) \in Q_1, & \text{se } t \in (2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \quad (x(t) > 0 \text{ e } y(t) > 0) \\ \alpha(t) \in Q_2, & \text{se } t \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \quad (x(t) < 0 \text{ e } y(t) > 0) \\ \alpha(t) \in Q_3, & \text{se } t \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \quad (x(t) < 0 \text{ e } y(t) < 0) \\ \alpha(t) \in Q_4, & \text{se } t \in (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2(k+1)\pi) \quad (x(t) < 0 \text{ e } y(t) > 0) \end{cases}$$

onde Q_i denota o i -ésimo quadrante do \mathbb{R}^2 . Em outras palavras, conforme t cresce, $\alpha(t)$ passa por Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 , nessa ordem.

- (b) O mesmo argumento utilizado no item anterior é suficiente para ver que $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Por fim, tem-se

$$|\alpha'(t)| = (a^2 e^{2bt} ((b \cos t - \sin t)^2 + (b \sin t + \cos t)^2))^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b^2 + 1}e^{bt},$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = -\frac{a\sqrt{b^2 + 1}}{b} e^{bt_0}.$$

2. (a) A primeira igualdade pode ser provada trivialmente usando a definição de produto escalar. Para a desigualdade, aplicam-se as propriedades de integral, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que $|v| = 1$:

$$\int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \right| \leq \int_a^b |\alpha'(t) \cdot v| dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

- (b) Escolha

$$v = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{|\alpha(b) - \alpha(a)|}.$$

Então $|v| = 1$ e, além disso, $(\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot v = |\alpha(b) - \alpha(a)|$, donde, pelo item anterior,

conclui-se que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt,$$

como desejado.

□

3 Produto vetorial

Em espaços vetoriais de dimensão finita, há infinitas maneiras de escolher uma base ordenada. Entretanto, há uma relação que separa essas bases em apenas dois grupos.

Definição 1.12. Duas bases ordenadas de um espaço vetorial V de dimensão finita têm a *mesma orientação* se a matriz de mudança de base (entre essas bases) tem determinante positivo.

De propriedades básicas de determinante, fica claro que “ter a mesma orientação” estabelece uma relação de equivalência sobre o conjunto das bases ordenadas de V . Como uma matriz de mudança de base tem determinante ou positivo ou negativo, só existem duas tais classes. Cada uma dessas classes é chamada de uma *orientação* de V . Fixando arbitrariamente uma orientação de V , a outra é chamada de *orientação oposta*.

Ao olhar esta discussão com $V = \mathbb{R}^3$, é natural fixar a base ordenada $\{e_1, e_2, e_3\}$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, e chamar a orientação relativa a essa base de *orientação positiva* de \mathbb{R}^3 , e a outra de *orientação negativa* (isto estende-se de maneira natural a \mathbb{R}^n).

Definição 1.13. Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$, o *produto vetorial* de u e v (nessa ordem) é o único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(u \wedge v) \cdot w = \det(u, v, w),$$

para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

Escrevendo $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, é fácil ver que

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3. \quad (1.3)$$

O produto vetorial herda diretamente propriedades de determinante; isto é, o produto vetorial é anticomutativo, linear nas primeira e segunda variáveis, nulo se, e somente se, os vetores em questão são linearmente dependentes, e é ortogonal ao plano gerado pelos dois vetores em questão.

Para uma interpretação geométrica do produto vetorial, primeiro observe que, para quaisquer $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$, vale

$$(u \wedge v) \cdot (w \wedge z) = \begin{vmatrix} u \cdot w & v \cdot w \\ u \cdot z & v \cdot z \end{vmatrix}.$$

Daí, segue que

$$(u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & v \cdot u \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2,$$

onde A é a área do paralelogramo gerado por u e v e θ é o ângulo entre esses dois vetores.

Também, se $u \wedge v \neq 0$, da definição de produto vetorial tem-se

$$\det(u, v, u \wedge v) = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = |u \wedge v|^2 > 0,$$

isto é, o conjunto ordenado $\{u, v, u \wedge v\}$ constitui uma base ordenada positiva de \mathbb{R}^3 .

Em suma, o produto vetorial $u \wedge v$ entre os vetores u e v , quando for diferente de zero, é um vetor perpendicular ao plano gerado por u e v cuja norma é a área do paralelogramo de lados $|u|$ e $|v|$ e com sentido tal que $\{u, v, u \wedge v\}$ seja uma base positiva de \mathbb{R}^3 .

Para finalizar esta seção, sejam α e β curvas diferenciáveis. Segue da equação (1.3) que $\gamma(t) = \alpha(t) \wedge \beta(t)$ é uma curva diferenciável e

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) \wedge \beta(t)) = \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \beta'(t).$$

Proposição 1.14. *Um plano P contido em \mathbb{R}^3 é dado pela equação $ax + by + cz + d = 0$. O vetor $n = (a, b, c)$ é perpendicular ao plano e*

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

é a distância do plano até a origem $(0, 0, 0)$.

Demonstração. Considere um vetor sobre P , isto é, um vetor da forma $v = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, onde $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos que pertencem ao plano. Por pertencerem ao plano, valem $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$. Subtraindo essas duas equações, obtém-se $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0$, ou seja, $n \cdot v = 0$. Portanto n é ortogonal a qualquer vetor sobre P .

Da equação do plano P , é fácil ver que $n \cdot u = -d$ para qualquer vetor u cuja extremidade pertença a P .

Denote por ρ o vetor tal que $|\rho|$ é a distância entre P e a origem e sua extremidade pertença a P . Sendo n ortogonal ao plano, ρ deve possuir o mesmo sentido e direção de n ; se não fosse assim, por simples relações de triângulos é fácil chegar a um absurdo.

Se $v = (x, y, z)$ é um vetor cuja extremidade q pertence a P (Figura 1.15), então, por relações trigonométricas simples, conclui-se que $|\rho| = |v| \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre ρ e v , ou ainda, entre n e o vetor v . Assim,

$$|\rho| = |v| \cos \theta = \frac{|v \cdot n|}{|n|} = \frac{|d|}{|n|},$$

que é o resultado desejado. □

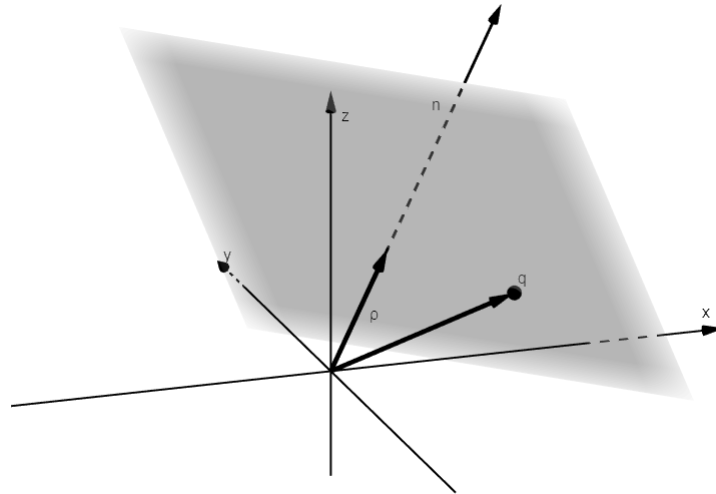


Figura 1.15

4 Teoria local de curvas parametrizadas por comprimento de arco

Considere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco s . Intuitivamente, quando um corpo se locomove pelo espaço dois tipos de aceleração podem agir sobre ele: uma provinda do aumento de velocidade e outra relativa à mudança de direção. Visto que a velocidade de α é constante igual a 1, o número $|\alpha''(s)|$ mede exclusivamente a aceleração dada pela mudança de direção, isto é, o quão rápido a curva sai da direção da reta tangente em s . Essa discussão motiva a seguinte definição:

Definição 1.16. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ é chamado de *curvatura* de α em s .

Exemplos 1.17.

- (1) Se α é uma linha reta dada por $\alpha(s) = us + v$, com u e v vetores constantes e $|u| = 1$, então $k(s) = 0$ para todo $s \in I$. Por outro lado, se k é nulo em I , então, pela definição de norma, vale $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$; integrando duas vezes obtém-se $\alpha(s) = us + v$ e a curva é uma linha reta.

- (2) Uma mudança de orientação não muda a curvatura da curva. Isto é, $|\alpha''(s)| = |\beta''(-s)|$ para todo $s \in I$.

Nos pontos em que $k(s) \neq 0$, um vetor $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$ é bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Além disso, os vetores $\alpha''(s)$ e $\alpha'(s)$ são ortogonais (vide Lema 1.5).

Definição 1.18. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e suponha $k(s) \neq 0$. Então o vetor $n(s)$ definido por $\alpha''(s) = k(s)n(s)$ é chamado de *vetor normal* em s . O plano gerado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$ é chamado de *plano osculador* em s . O vetor $b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)$ é chamado *vetor binormal* em s .

Se $\alpha''(s) = 0$, isto é, $k(s) = 0$, o ponto s é chamado de *ponto singular de ordem 1*.

Como para a definição de $n(s)$ e $b(s)$ é necessário que $k(s)$ seja não nulo, no que segue as curvas são parametrizadas por comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1. Também, o vetor tangente em s será denotado por $t(s)$, ou seja, $t(s) = \alpha'(s)$ e $t'(s) = k(s)n(s)$.

Note que o vetor $b(s)$ é, por definição, unitário e ortogonal ao plano osculador em s . Por argumento semelhante ao utilizado no início da seção, o número $|b'(s)|$ mede o quão rápido a curva sai do plano osculador em s . Além disso, $b(s)$ e $b'(s)$ são perpendiculares. Por fim, da definição de $b(s)$,

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s);$$

donde $b'(s)$ é também ortogonal a $t(s)$. Assim, existe uma constante $\tau(s)$ que depende de s tal que $b'(s) = \tau(s)n(s)$.

Definição 1.19. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$. O valor $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado de *torção* de α em s .

Exemplos 1.20.

- (1) Se α está contida num plano, então o plano osculador coincide com o plano no qual a curva está contida em todo ponto. Logo, $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. Por outro lado, se τ é nula em I , tem-se $b(s) = v$ constante em I . Daí, $(\alpha(s) \cdot v)' = t(s) \cdot v = 0$. Segue que $\alpha(s) \cdot v$ é constante, isto é, α está contida num plano que é normal a v .
- (2) Visto que $b = t \wedge n$, fica claro que uma mudança de orientação não altera a torção da curva.

Algumas definições surgem naturalmente do exposto.

Definições 1.21. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha''(s) \neq 0, s \in I$.

(i) O triedro formado pelos vetores ortogonais unitários $t(s), n(s), b(s)$ é chamado de *triedro de Frenet* em s .

(ii) As equações

$$t' = kn, \quad n' = -kt - \tau b, \quad b' = \tau n$$

são chamadas de *fórmulas de Frenet*.

(iii) O plano tb é chamado de *plano retificador*.

(iv) O plano nb é chamado de *plano normal*.

(v) A reta que contém $n(s)$ e passa por $\alpha(s)$ é chamada de *normal principal*.

(vi) A reta que contém $b(s)$ e passa por $\alpha(s)$ é chamada de *binormal*.

(vii) O inverso da curvatura $R = \frac{1}{k}$ é chamado de *raio de curvatura* em s .

No caso particular de curvas em \mathbb{R}^2 , é possível atribuir um sinal à curvatura. Para tanto, considere a base canônica $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 e defina o vetor normal $n(s)$ exigindo que $\{t(s), n(s)\}$ tenha orientação positiva. A curvatura $k(s)$ é então definida como $t'(s) = k(s)n(s)$ e pode ser tanto positiva quanto negativa (Figura 1.22). Claramente $|k(s)|$ concorda com a definição dada anteriormente e o sinal de k muda quando troca-se ou a orientação da curva ou a orientação de \mathbb{R}^2 .

Para finalizar esta seção, um adendo deve ser feito. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular (não necessariamente parametrizada por comprimento de arco). É possível obter uma curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por comprimento de arco cujo traço é igual ao de α ? A resposta é afirmativa, e para fazer isto, basta colocar

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi, \quad t, t_0 \in I.$$

E daí, sendo α regular, a função s possui uma inversa diferenciável $x : J = s(I) \rightarrow I$; assim, a curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta = \alpha \circ x$ possui o mesmo traço de α e é parametrizada por comprimento de arco. É comum dizer que β é uma *reparametrização de $\alpha(I)$ por comprimento de arco*.

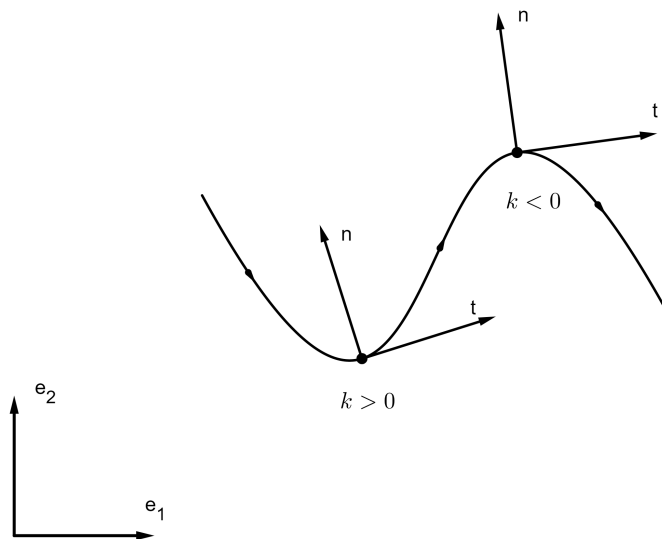


Figura 1.22: Curvatura com sinal

Esse fato permite estender os conceitos locais previamente definidos para curvas regulares com parâmetro arbitrário, dizendo, por exemplo, que a curvatura $k(t)$ de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $t \in I$ é a curvatura da reparametrização de $\alpha(I)$ por comprimento de arco $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ no ponto correspondente $s = s(t)$.

Teorema 1.23. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular (não necessariamente por comprimento de arco) e seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de $\alpha(I)$ pelo comprimento de arco $s = s(t)$, medido de $t_0 \in I$. Defina por $t = t(s)$ a função inversa de s . Valem*

- $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|}, \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\alpha' \cdot \alpha''}{|\alpha'|^4}.$

- A curvatura de α em $t \in I$ é

$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

- A torção de α em $t \in I$ é

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

- Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, a curvatura com sinal de α em t é

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração.

1. Como $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi$, tem-se

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|.$$

Daí, da identidade $(s \circ t)(s) = s$ e da regra da cadeia, vem

$$\frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}(s \circ t) = 1.$$

Sabe-se que $|\alpha'(t)| \neq 0$ para todo $t \in I$, donde

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\alpha'|}.$$

Agora, como $|\alpha'| = (\alpha' \cdot \alpha')^{\frac{1}{2}}$, a regra da cadeia mostra que

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{2\alpha' \cdot \alpha'' \frac{ds}{dt}}{|\alpha'|^3} = -\frac{\alpha' \cdot \alpha''}{|\alpha'|^4}.$$

2. Para não confundir o produto por escalar e o produto interno, a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ será usada para o produto interno.

Pelo exposto na teoria, a curvatura de α no ponto t é $|\beta''(s)|$, onde $\beta = \alpha \circ t$. Daí, usando a regra da cadeia, obtém-se

$$\beta'' = \frac{d^2}{ds^2}(\alpha(t)) = \frac{d}{ds} \left(\alpha'(t) \frac{dt}{ds} \right) = \alpha''(t) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \alpha'(t) \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Utilizando os resultados do item 1., a equação acima se torna

$$\beta'' = \frac{\alpha''}{|\alpha'|^2} - \left(\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4} \right) \alpha' = \frac{1}{|\alpha'|^2} \left(\alpha'' - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^2} \alpha' \right).$$

Note que a diferença dentro dos parênteses no segundo membro é a projeção ortogonal de α'' sobre o vetor α' (Figura 1.24). Assim, usando o Teorema de Pitágoras verifica-se a identidade

$$k(t)^2 = |\beta''|^2 = \frac{1}{|\alpha'|^4} \left| \alpha'' - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^2} \alpha' \right|^2 = \frac{1}{|\alpha'|^4} \left(|\alpha''|^2 - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle^2}{|\alpha'|^4} |\alpha'|^2 \right).$$

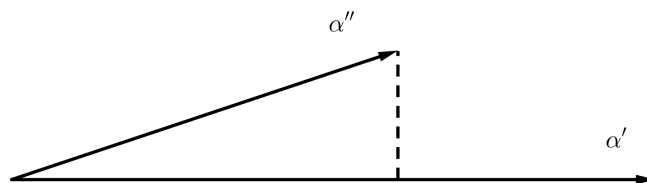


Figura 1.24: Projeção

Tirando a raiz quadrada e lembrando que $k \geq 0$, vem

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{1}{|\alpha'|^2} \sqrt{|\alpha''|^2 - \frac{|\alpha'|^2 |\alpha''|^2 \cos^2 \theta}{|\alpha'|^2}} \\ &= \frac{|\alpha'| |\alpha''| |\sin \theta|}{|\alpha'|^3} \\ &= \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}. \end{aligned}$$

3. Mantendo a definição de $\beta(s)$, o vetor binormal de α no ponto $t \in I$ é, usando o item 2.,

$$b(t(s)) = \beta'(s) \wedge \frac{\beta''(s)}{k(t(s))} = \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \frac{1}{k(t(s))} (\alpha' \wedge \alpha'') = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{\alpha' \wedge \alpha''}.$$

Agora, derivando $b(t)$ em relação a s e usando a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{1}{|\alpha' \wedge \alpha''|} (\alpha' \wedge \alpha''') - \frac{dt}{ds} \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha' \wedge \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^3} (\alpha' \wedge \alpha'') \\ &= \frac{\alpha' \wedge \alpha'''}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} - \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha' \wedge \alpha''' \rangle}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|^3} (\alpha' \wedge \alpha''). \end{aligned}$$

Se n denota o vetor normal de β no ponto $s(t)$, é fácil ver que $\tau = \tau \langle n, n \rangle = \langle \tau n, n \rangle = \langle b', n \rangle$. Como

$$n(t(s)) = \frac{\beta''(s)}{k(t(s))} = \frac{\langle \alpha', \alpha' \rangle \alpha'' - \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|}, \quad (1.4)$$

segue, pelas relações de ortogonalidade, que a torção em $t \in I$ é dada por

$$\tau(t) = \left\langle \frac{db}{ds}, n \right\rangle = \frac{|\alpha'|^2}{|\alpha'|^2 |\alpha' \wedge \alpha''|^2} \langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha'' \rangle = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha''', \alpha'' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

Lembrando que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vale $\langle v \wedge u, w \rangle = -\langle v \wedge w, u \rangle$, o resultado desejado é verificado.

4. Denote $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Note que a equação (1.4) diz que o vetor normal em $t \in I$ é dado por

$$n(t) = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \wedge \alpha'}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} = \frac{(x'y'' - x''y')(-y')e_1 + (x'y'' - x''y')x'e_2}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|}.$$

Por semelhante modo, o vetor tangente em $t \in I$ é dado por

$$T(t) = \beta'(s) = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{x'e_1 + y'e_2}{|\alpha'|}.$$

A matriz de mudança de base

$$B = \frac{1}{|\alpha'| |\alpha' \wedge \alpha''|} \begin{bmatrix} |\alpha' \wedge \alpha''| x' & -(x' y'' - x'' y') y' \\ |\alpha' \wedge \alpha''| y' & (x' y'' - x'' y') x' \end{bmatrix}$$

é tal que $\det B = c(x' y'' - x'' y')$, onde

$$c = \frac{(x')^2 + (y')^2}{|\alpha'|^2 |\alpha' \wedge \alpha''|} > 0.$$

Assim, o sinal do determinante é dado exclusivamente pela expressão $x' y'' - x'' y'$. Como já se sabe quanto vale $|k(t)|$, fica claro que a curvatura com sinal é

$$k(t) = \frac{x' y'' - x'' y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que é exatamente o desejado.

□

Capítulo 2

Superfícies Regulares

Em analogia à introdução do Capítulo 1, as superfícies regulares serão, em algum sentido, conjuntos de dimensão dois do \mathbb{R}^3 suaves o suficiente para estender os conceitos de Cálculo em mais de uma variável. Logo, pode-se pensar nesses objetos como uma extensão natural do conceito de curva regular.

Diferentemente de curvas, as superfícies regulares são introduzidas como conjuntos, e não como funções. Depois da completa compreensão desse conceito, superfícies regulares enquanto funções também serão abordadas.

1 Introdução: primeiras definições e exemplos

Antes de introduzir a definição de superfície regular propriamente, para facilitar a compreensão e futuras referências, o conceito de diferencial de uma aplicação de mais de uma variável será registrado.

Definição 2.1. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável (uma aplicação que possui todas as derivadas parciais). Para cada $p \in U$ associa-se uma transformação linear $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ chamada *diferencial* de F em p . Essa transformação é definida da seguinte forma: dado $w \in \mathbb{R}^n$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Pela regra da cadeia, a curva $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável. Assim,

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

Não é difícil demonstrar que a definição de dF_p independe da escolha da curva que passa por p com vetor velocidade w em p . Para ilustrar isto, uma demonstração para o caso de $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deve bastar.

Sejam (u, v) coordenadas em \mathbb{R}^2 e (x, y, z) coordenadas em \mathbb{R}^3 . Sejam $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Então pode-se escrever $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\alpha'(0) = w = u'(0)e_1 + v'(0)e_2,$$

$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, e

$$\beta(t) = (F \circ \alpha)(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Portanto, usando a regra da cadeia e tomando as derivadas em $t = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) f_3 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = dF_p(w). \end{aligned}$$

Isto mostra que dF_p é representada, nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , por uma matriz que depende somente das derivadas parciais em p e das funções componentes x, y e z de F . Portanto, dF_p é um homomorfismo linear, e claramente $dF_p(w)$ não depende da escolha de α .

A seguinte definição é, certamente, a mais importante do capítulo.

Definição 2.2. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^3 e uma aplicação sobrejetora $\eta : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

- (i) η é diferenciável;
- (ii) η é um homeomorfismo;
- (iii) para cada $q \in U$, o diferencial $d\eta_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetor.

A aplicação η é chamada de *parametrização* ou *sistema de coordenadas* (locais) em p (ou numa vizinhança de p). A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada *vizinhança coordenada*.

Calcular a matriz da transformação linear $d\eta_q$ ajudará a compreender melhor o item (iii) da definição anterior. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 com coordenadas (u, v) e $\{f_1, f_2, f_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) .

Seja $q = (u_0, v_0)$. Considere a curva α dada por $\alpha(u) = (u, v_0)$, cuja imagem sob η é a curva

$$\eta \circ \alpha(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

A imagem dessa curva (chamada de *curva coordenada* $v = v_0$) mora em S e em $\eta(q)$ seu vetor tangente é

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial u},$$

onde as derivadas são calculadas em (u_0, v_0) e o vetor é indicado por suas componentes na base canônica do \mathbb{R}^3 . Pela definição de diferencial,

$$d\eta_q(e_1) = \frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

De maneira completamente análoga, pode-se usar a curva coordenada $u = u_0$ e obter

$$d\eta_q(e_2) = \frac{\partial \eta}{\partial v}.$$

Portanto, a matriz da transformação linear $d\eta_q$ nas bases em questão é

$$d\eta_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Com o obtido, a condição (iii) da definição de superfície regular é equivalente a:

- (a) Os dois vetores coluna da matriz de $d\eta_q$ são linearmente independentes;
- (b) O produto vetorial $\frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}$ é não nulo;
- (c) Um dos menores de ordem 2 da matriz de $d\eta_q$ é diferente de zero, isto é, algum dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

é não nulo.

Exemplos 2.3.

- (1) Como um primeiro exemplo de superfície regular, considere o plano P dado por $ax + by + cz + d = 0$. Se $c \neq 0$, uma parametrização “natural” de P é

$$\eta(u, v) = \left(u, v, -\frac{au + bv + d}{c} \right).$$

Caso tenha-se $c = 0$, vale $a^2 + b^2 \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha $a \neq 0$. Assim, uma parametrização de P é

$$\eta(u, v) = \left(-\frac{bu + d}{a}, u, v \right).$$

As duas parametrizações satisfazem (i), (ii) e (iii) da Definição 2.2 trivialmente.

- (2) Um exemplo um pouco mais complexo é o caso da esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

A função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, onde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, tem como gráfico a calota superior da esfera. Dessa forma, pode-se criar a aplicação

$$\eta_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Para provar que essa aplicação é uma parametrização, observe que

- (i) η_1 é diferenciável em U (o número dentro da raiz nunca se anula);
- (ii) η_1 é injetora e a projeção π_{xy} da calota superior de S^2 sobre o plano xy é a restrição de uma aplicação contínua e é a inversa de η_1 ;
- (iii) o determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

é constante igual a 1 em U . Logo, $d\eta_{1,q}$ é injetor para todo $q \in U$.

Conclui-se que η_1 é um sistema de coordenadas locais em $p \in \eta_1(U) \subset S^2$.

De maneira análoga, é possível cobrir toda a esfera com as seguintes parametrizações cujo domínio é U :

$$\eta_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}),$$

$$\eta_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

$$\eta_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v),$$

$$\eta_5(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v),$$

$$\eta_6(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v).$$

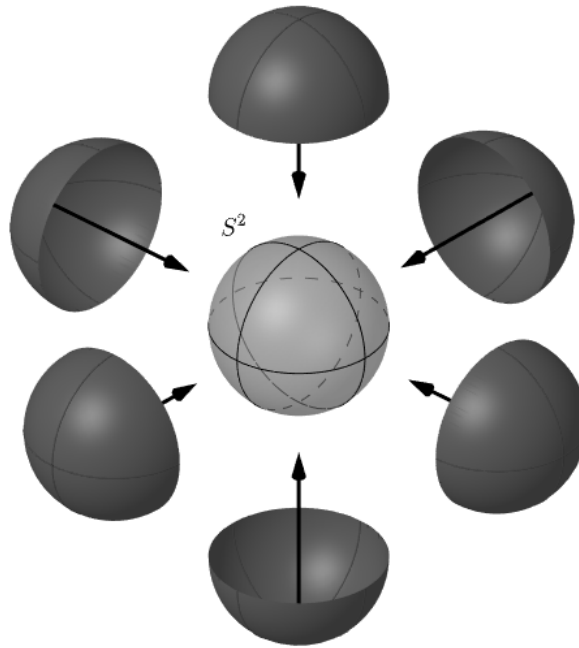


Figura 2.4

Para facilitar o reconhecimento de superfícies regulares (já que usando diretamente a definição o trabalho pode ser árduo), alguns teoremas serão apresentados. O primeiro deles dá luz a toda uma família de superfícies regulares e coloca o Exemplo 2.3 como um caso particular.

Teorema 2.5. *Suponha $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 . Então o gráfico de f é uma superfície regular.*

Demonstração. O gráfico de f é o conjunto

$$\text{gr } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), \text{ com } (x, y) \in U\}.$$

Dado $p \in \text{gr } f$, considere a aplicação $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\eta(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Então:

- (i) como f é diferenciável em U , η também o é;
- (ii) cada ponto $(x, y, z) \in \text{gr } f$ é a imagem do único ponto $(u, v) = (x, y) \in U$ e a projeção (contínua) π_{xy} de $\text{gr } f$ sobre o plano xy é a inversa de η ;
- (iii) para todo $q \in U$ o determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

é constante igual a 1.

Portanto η é uma parametrização de $\text{gr } f$ e o conjunto em questão é uma superfície regular. \square

Para o próximo teorema, é interessante relembrar a definição de ponto crítico e alguns conceitos associados.

Definição 2.6. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável sobre um conjunto aberto U de \mathbb{R}^n . Um ponto $p \in U$ é chamado de *ponto crítico* de F se o diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é um epimorfismo (sobrejetivo). A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico p é chamado de *valor crítico* de F . Um ponto de \mathbb{R}^m que não é um valor crítico é chamado de *valor regular* de F .

Com essa definição em mãos, o seguinte teorema diz que uma superfície de nível $f(x, y, z) = a$ de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma superfície regular se $a \in f(U)$ é um valor regular de f .

Teorema 2.7. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujo domínio U é um aberto de \mathbb{R}^3 . Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular de \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Indique $S = f^{-1}(a)$ e seja p um ponto de S . Como a é um valor regular de f , pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $f_z \neq 0$ (pode-se renomear os eixos se necessário). Defina a aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Observe que, quando restrita a S , a aplicação F toma valores num subconjunto do plano P_a definido por $z = a$. Para facilitar o entendimento, denote por (u, v, t) os pontos de \mathbb{R}^3 que pertencem à imagem de F . Claramente o diferencial de F em p é dado pela matriz

$$dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix},$$

o que mostra que $\det dF_p = f_z \neq 0$. Com isso, pode-se aplicar o Teorema da Função Inversa e garantir vizinhanças V de p e W de $F(p)$ tais que $F : V \rightarrow W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$, $F^{-1} = (g_1, g_2, g_3)$, é diferenciável. Logo, as funções coordenadas de F^{-1} são diferenciáveis e, em particular, tem-se que $z = g_3(u, v, a) \in S$ pode ser expressa como uma função diferenciável de duas variáveis $z = h(u, v) = h(x, y)$, sendo que o domínio de h é a projeção de V sobre o plano xy . Como

$$F(S \cap V) = W \cap P_a,$$

conclui-se que $\text{gr } h = S \cap V$. Pelo Teorema 2.5, $S \cap V$ é uma superfície regular e, portanto, uma vizinhança coordenada de p . Portanto, todo $p \in S$ está em uma vizinhança coordenada, donde S é uma superfície regular. \square

Já foi provado que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular. O teorema a seguir é a recíproca local disto; em outras palavras, toda superfície regular é, localmente, o gráfico de uma função diferenciável.

Teorema 2.8. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável com alguma das três formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Demonstração. Seja $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , dada por

$$\eta(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

Pela definição de superfície regular, sabe-se que algum dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

é diferente de zero em $\eta^{-1}(p) = q$.

Um caso será feito, os outros são análogos. Suponha que o primeiro determinante seja não nulo, isto é,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0. \tag{2.1}$$

Relembre a aplicação projeção π_{xy} sobre o plano xy , que é dada por $\pi_{xy}(x, y, z) = (x, y)$, e considere a aplicação $\pi_{xy} \circ \eta : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Tem-se $(\pi_{xy} \circ \eta)(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Por (2.1) pode-se aplicar o Teorema da Função Inversa, garantindo a existência de vizinhanças V_1 de q e V_2 de $(\pi_{xy} \circ \eta)(q)$ tais que $\pi_{xy} \circ \eta$ leva V_1 difeomorficamente sobre V_2 . Logo, π_{xy} restrito a $\eta(V_1) = V$ é injetora e existe uma inversa diferenciável

$$(\pi_{xy} \circ \eta)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1, \quad (\pi_{xy} \circ \eta)^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \tag{2.2}$$

Como η é um homeomorfismo, V é uma vizinhança de p em S . Agora, compondo a aplicação (2.2) com a função $(u, v) \mapsto z(u, v)$, fica claro que V é o gráfico da função diferenciável

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y),$$

finalizando este caso.

Nos outros casos basta considerar as projeções π_{xz}, π_{yz} . \square

Para finalizar esta seção, um teorema que poupa o trabalho de provar que a inversa de

uma candidata a parametrização é contínua. Alguns usos deste teorema podem ser vistos nos exercícios.

Teorema 2.9. *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in \eta(U)$ tal que as condições (i) e (iii) da Definição 2.2 sejam válidas. Assuma que η é injetora. Então η^{-1} é contínua.*

Demonstração. Semelhantemente à demonstração do teorema anterior, escreva $\eta(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, com $(u, v) \in U$ e tome $q \in U$. Como as condições (i) e (iii) são válidas, pode-se supor, sem perda de generalidade (trocando eixos se necessário), que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, obtém-se vizinhanças $V_1 \subset U$ de q e $V_2 \subset \mathbb{R}^2$ de $(\pi_{xy} \circ \eta)(q)$ tais que $\pi_{xy} \circ \eta$ leva V_1 difeomorficamente a V_2 .

Agora, se η é injetora, restrito a $\eta(V_1)$ vale

$$\eta^{-1} = (\pi_{xy} \circ \eta)^{-1} \circ \pi_{xy}.$$

Pelo fato de todas as funções envolvidas serem contínuas, a composição também o é. Portanto η^{-1} é contínua em q . Como q foi tomado arbitrariamente, a aplicação é contínua em $\eta(U)$. \square

Exemplos 2.10.

(1) O cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Para ver isto, precisa-se verificar as propriedades (i), (ii) e (iii) da Definição 2.2. Para tal, considere a aplicação η_1 dada por

$$\eta_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}.$$

- (i) É fácil ver que essa aplicação é diferenciável em seu domínio;
- (ii) Sua inversa é dada por

$$\eta_1^{-1}(x, y, z) = \left(\arctan \frac{y}{x}, z\right), \quad (x, y, z) \in \eta(U).$$

Como a coordenada x nunca se anula em $\eta(U)$, essa aplicação é contínua em todo seu domínio;

- (iii) Note que

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \cos u \neq 0.$$

Assim, esta condição está satisfeita.

Conclui-se que η_1 é uma parametrização de C . Para cobrir completamente C , basta utilizar as seguintes parametrizações, totalmente análogas a η_1 :

$$\begin{aligned}\eta_2(u, v) &= (\operatorname{sen} u, \cos u, v), \\ \eta_3(u, v) &= (-\cos u, \operatorname{sen} u, v), \\ \eta_4(u, v) &= (\operatorname{sen} u, -\cos u, v),\end{aligned}$$

onde o domínio de todas estas parametrizações é U .

(2) O conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$ não é uma superfície regular, enquanto o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$ é uma superfície regular.

Seja $p = (x, y, 0)$ um ponto de D tal que $x^2 + y^2 = 1$. Se V é uma vizinhança de p em D , é possível pensar em tal vizinhança como um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Se D fosse uma superfície regular, deveria existir uma aplicação $\eta : U \rightarrow V$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que η é homeomorfismo. Entretanto, V não é aberto em \mathbb{R}^2 , donde η não pode ser um homeomorfismo e, portanto, não pode ser uma parametrização de D em p .

Ao considerar a aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$, dada por $f(u, v) = 0$, vê-se que $\operatorname{gr} f = S$ e o resultado segue do Teorema 2.5.

(3) O cone de duas folhas com vértice na origem, isto é, o conjunto $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, não é uma superfície regular.

Pelo Teorema 2.8, se C_2 fosse uma superfície regular, existiria uma vizinhança V de $(0, 0, 0)$ tal que V é o gráfico de uma função diferenciável com alguma das três formas:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, z), \quad x = h(y, z).$$

Entretanto, projeções sobre os planos xy , xz e yz não são injetoras (Figura 2.11), mostrando que nenhuma das três formas pode ser alcançada. Portanto C_2 não é uma superfície regular.

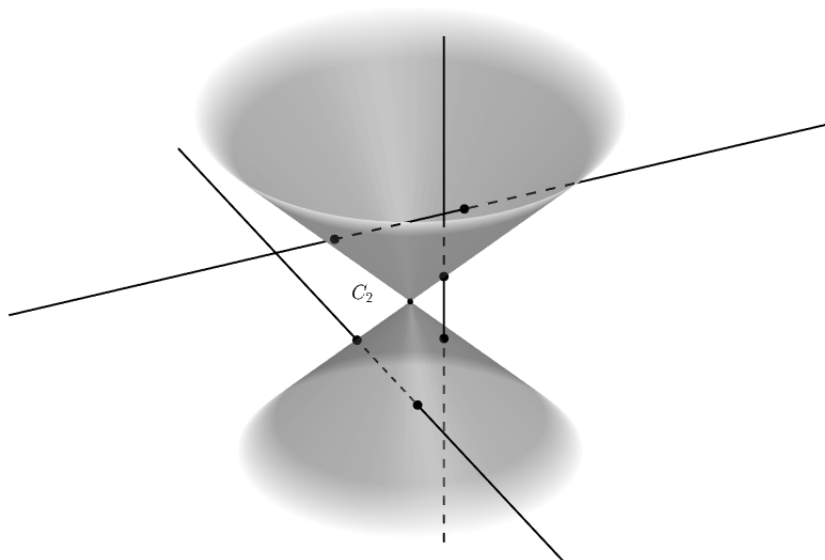


Figura 2.11: Projeções não injetoras

(4) Durante este exemplo, denote $S^2 - \{N\} = S_N^2$ e $S^2 - \{0\} = S_0^2$. Uma maneira de definir um sistema de coordenadas para a esfera S^2 , dada por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, é considerar a chamada *projeção estereográfica* $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva um ponto p da esfera S^2 menos o polo norte $N = (0, 0, 2)$ na interseção do plano xy com a linha reta que conecta N a p (Figura 2.12). Seja $(u, v) = \pi(x, y, z)$, onde $(x, y, z) \in S_N^2$ e (u, v) está no plano xy .

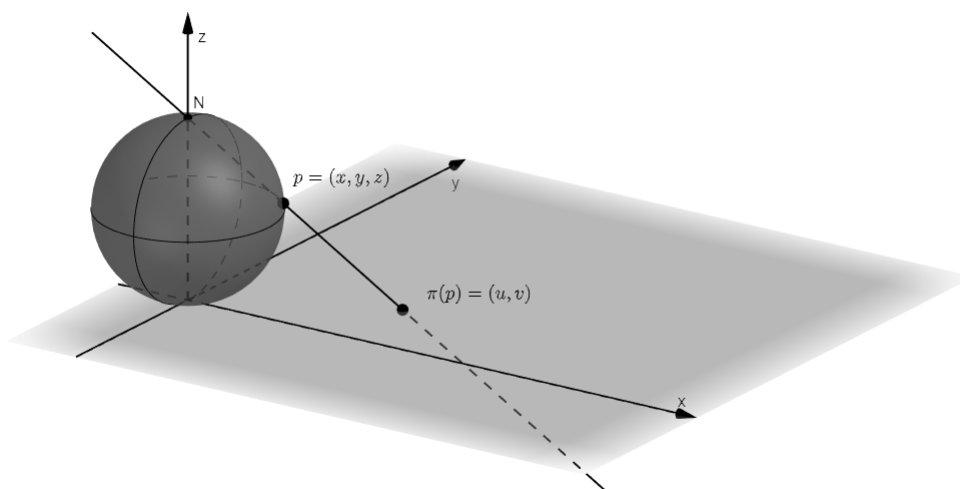


Figura 2.12: Projeção estereográfica

(a) A inversa da projeção $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_N^2$ é dada por

$$\pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right).$$

Para ver isto, considere (x, y, z) um ponto de S_N^2 e (u, v) sua imagem via π . A reta que liga estes dois pontos é dada por

$$r : (0, 0, 2) + t(u, v, -2), t \in \mathbb{R}.$$

É necessário encontrar t_0 tal que $(0, 0, 2) + t_0(u, v, -2) = (x, y, z)$. Como $(x, y, z) \in S_N^2$, vale $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, isto é,

$$(t_0 u)^2 + (t_0 v)^2 + ((2 - 2t_0) - 1)^2 = 1,$$

o que ocorre se, e somente se, $t_0 = 0$ ou $t_0 = \frac{4}{u^2 + v^2 + 4}$. Visto que N não pertence ao conjunto em questão, o valor 0 está descartado. Agora, basta substituir o t_0 encontrado, obtendo

$$(0, 0, 2) + \frac{4}{u^2 + v^2 + 4} (u, v, -2) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right),$$

que era o desejado.

(b) Considere o plano $P_2 : z = 2$ que intersecta S^2 em N . Faça a projeção estereográfica da seguinte maneira: dado um ponto p em S_0^2 , trace uma reta que liga 0 a p e tome a interseção $(u, v, 2)$ desta reta com o plano P_2 . A imagem da projeção aplicada a p será (u, v) . Assim, é possível, usando projeções estereográficas, cobrir a esfera com duas vizinhanças coordenadas, pois esta projeção e a anterior cobrem toda a esfera S^2 .

2 Mudança de parâmetros e funções sobre superfícies

Após o trabalho desenvolvido na seção anterior, deve estar claro a definição de superfície regular e suas propriedades fundamentais. Assim, o próximo passo é trabalhar sobre essa estrutura.

Uma superfície regular se caracteriza pelas vizinhanças coordenadas; essas tais ditam as propriedades locais do conjunto em questão que são de grande interesse da Geometria Diferencial.

O mais natural é pensar em atribuir propriedades a funções $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, com S uma superfície regular, de acordo com o comportamento da função $f \circ \eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde η é um sistema local de coordenadas. Apesar desse ser, essencialmente, o pensamento correto, há algumas barreiras que precisam ser superadas. Um exemplo disso, é que há diferentes

parametrizações para uma vizinhança de um ponto p da superfície. O primeiro teorema desta seção lida exatamente com este problema. Ele será muitas vezes citado apenas como *mudança de parâmetros*.

Teorema 2.13. *Seja p um ponto de uma superfície regular S . Suponha $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S tais que $p \in \phi(U) \cap \psi(V) = W$. Então a “mudança de coordenadas” $h = \phi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \phi^{-1}(W)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Como h é uma composição de homeomorfismos, ela mesma é um homeomorfismo. Para mostrar sua diferenciabilidade, tome $r \in \psi^{-1}(W)$ e defina $q = h(r)$. Sendo ϕ uma parametrização, pode-se assumir sem perda de generalidade (renomeando eixos se necessário), que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Se $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, pode-se estendê-la a uma aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Geometricamente, F leva o cilindro vertical C sobre U num “cilindro vertical” sobre $\phi(U)$. Cada seção de C com altura t é levado na superfície $\psi(u, v) + te_3$, onde e_3 é o vetor unitário do eixo z .

Da definição, F é claramente diferenciável. Calculando o determinante do diferencial dF_q , obtém-se

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança G_1 de $\phi(q)$ em \mathbb{R}^3 tal que F^{-1} existe e é diferenciável em G_1 .

Pela continuidade de ψ , existe uma vizinhança G_2 de r em V tal que $\psi(G_2) \subset G_1$. Note que, restrita a G_2 ,

$$h|_{G_2} = F^{-1} \circ (\psi|_{G_2}),$$

é a composição de funções diferenciáveis. Portanto, pela regra da cadeia, h é diferenciável em r . Sendo arbitrário, h é diferenciável em $\psi^{-1}(W)$.

O mesmo argumento é válido para demonstrar que h^{-1} é diferenciável, concluindo a demonstração. \square

Com isso, pode-se formalizar o conceito de diferenciabilidade sobre uma superfície

regular.

Definição 2.14. Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num aberto V de uma superfície regular S . Então f é dita *diferenciável em* $p \in V$ se, para alguma parametrização $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ com $p \in \eta(U) \subset V$, a composição $f \circ \eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\eta^{-1}(p)$. Diz-se que f é *diferenciável em* V se ela o é em todos os pontos de V .

O teorema anterior garante que a definição acima não depende da escolha da parametrização η . Pois, se $\xi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é outra parametrização com $p \in \xi(V)$, e se $h = \eta^{-1} \circ \xi$, então, arrumando os domínios se necessário, $f \circ \xi = f \circ \eta \circ h$ também é diferenciável em p .

É importante comentar que muitas vezes um abuso de notação será feito, indicando f e $f \circ \eta$ pelo mesmo símbolo $f(u, v)$ e dizendo que $f(u, v)$ é a expressão de f no sistema de coordenadas η . Isso é equivalente a identificar $\eta(U)$ com U e pensar no ponto (u, v) como um ponto de U e como um ponto de $\eta(U)$ com coordenadas (u, v) .

Exemplo 2.15. Seja S uma superfície regular e $V \subset \mathbb{R}^3$ um aberto tal que $S \subset V$. Se $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a restrição de f a S é uma função diferenciável em S . Isso é facilmente compreendido pela regra da cadeia: se $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é um sistema de coordenadas numa vizinhança de $p \in S$, a aplicação $f \circ \eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Não é difícil estender a noção de diferenciabilidade de uma função sobre uma superfície regular para uma aplicação *entre* superfícies regulares.

Definição 2.16. Uma aplicação contínua $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ sobre um aberto V de uma superfície regular S_1 para uma superfície regular S_2 é dita *diferenciável em* $p \in V$ se, dadas parametrizações

$$\eta_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad \eta_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com $p \in \eta_1(U_1)$ e $f(\eta_1(U_1)) \subset \eta_2(U_2)$, a aplicação

$$\eta_2^{-1} \circ f \circ \eta_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $q = \eta_1^{-1}(p)$.

Lema 2.17. *Prove que a definição de aplicação diferenciável entre superfícies regulares não depende das parametrizações escolhidas.*

Demonstração. Seja $f : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação contínua definida num aberto V de uma superfície regular S_1 cujo contradomínio S_2 também é uma superfície regular. Seja $p \in V$ um ponto tal que f é diferenciável em p . Da definição de diferenciabilidade entre superfícies regulares, existem abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$ e parametrizações $\eta_1 : U_1 \rightarrow S_1$

e $\eta_2 : U_2 \rightarrow S_2$ tais que $p \in \eta_1(U_1)$, $f(\eta_1(U_1)) \subset \eta_2(U_2)$ e $\eta_2^{-1} \circ f \circ \eta_1 : U_1 \rightarrow U_2$ é diferenciável em $q = \eta_1^{-1}(p)$.

Suponhamos agora $\xi_1 : W_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ e $\xi_2 : W_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente, tais que $p \in \xi_1(W_1)$ e $f(\xi_1(W_1)) \subset \xi_2(W_2)$. São garantidos pelo Teorema 2.13 abertos M_1, M_2, N_1 e N_2 tais que as funções $h_1 : N_1 \rightarrow M_1, h_2 : M_2 \rightarrow N_2$ dadas por

$$h_1 = \eta_1^{-1} \circ \xi_1 \text{ e } h_2 = \xi_2^{-1} \circ \eta_2$$

são difeomorfismos. Fica claro então que, arrumando os domínios se necessário, a aplicação

$$\xi_2^{-1} \circ f \circ \xi_1 = h_2 \circ (\eta_2^{-1} \circ f \circ \eta_1) \circ h_1$$

é diferenciável em $r = \xi_1^{-1}(p)$ (Figura 2.18).

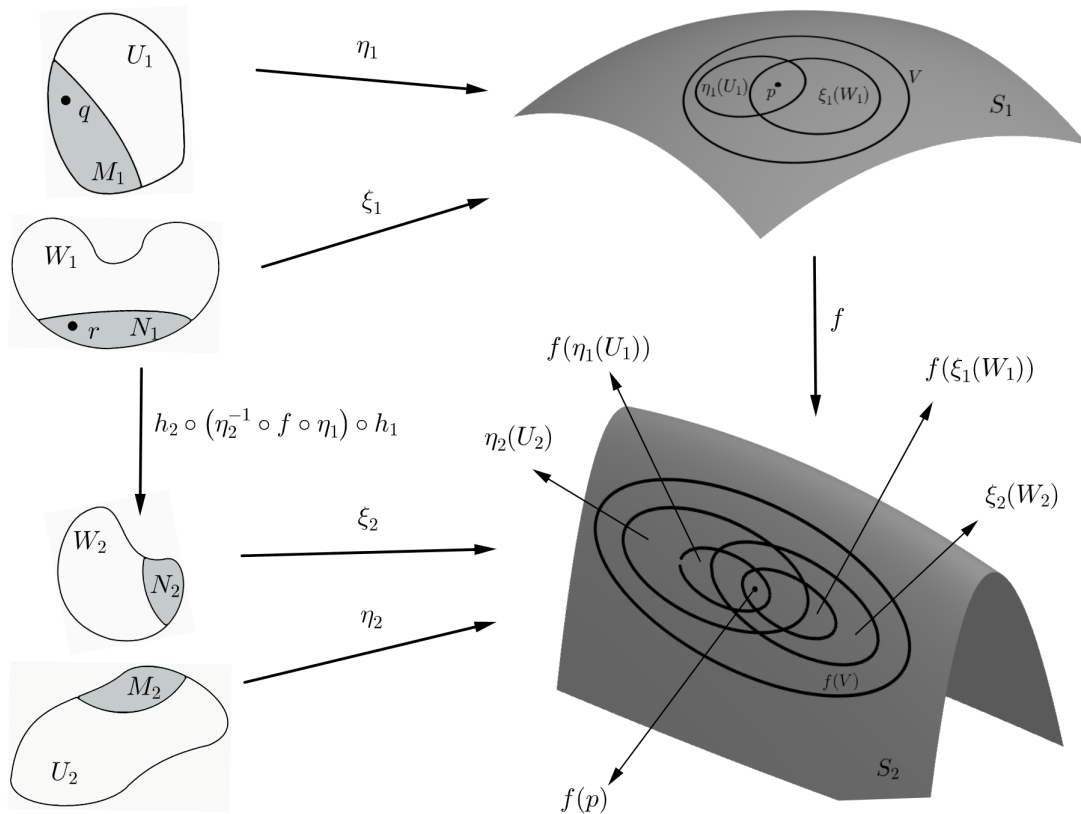


Figura 2.18

□

Definição 2.19. Suponha S_1 e S_2 superfícies regulares. Seja $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável com inversa diferenciável $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$. A aplicação f é chamada de *difeomorfismo* de S_1 para S_2 e as superfícies em questão são *difeomorfas*.

A noção de difeomorfismo entre superfícies regulares é deveras importante. Para efeito de comparação, pode-se pensar na noção de isomorfismo ao estudar espaços vetoriais ou na noção de congruência em Geometria Euclidiana. De maneira mais clara, duas superfícies difeomorfas são, do ponto de vista de diferenciabilidade, indistinguíveis.

Exemplos 2.20.

- (1) Se $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização, então $\eta^{-1} : \eta(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável. Na realidade, para qualquer $p \in \eta(U)$ e qualquer parametrização $\xi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em p , tem-se que a aplicação

$$\eta^{-1} \circ \xi : \xi^{-1}(W) \rightarrow \eta^{-1}(W), \quad \text{onde } W = \eta(U) \cap \xi(V),$$

é diferenciável. Isso mostra que U e $\eta(U)$ são difeomorfos, isto é, toda superfície regular é localmente difeomorfa a um plano.

- (2) Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares. Suponha que $S_1 \subset V \subset \mathbb{R}^3$, onde V é um aberto do \mathbb{R}^3 , e que $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma aplicação diferenciável tal que $f(S_1) \subset S_2$. Então a restrição $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável.

O Teorema 2.13 implica que uma parametrização $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é um difeomorfismo de U em $\eta(U)$. Mais ainda, agora se pode caracterizar superfícies regulares como sendo os subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que são localmente difeomorfos a \mathbb{R}^2 ; isto é, para cada ponto $p \in S$ existem: uma vizinhança V de p em S , um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e uma aplicação $\eta : U \rightarrow V$, esta tal um difeomorfismo.

Para finalizar esta seção, é interessante introduzir outra definição de superfície, semelhante à dada para curvas; isto é, tratar superfícies como funções ao invés de conjuntos.

Definição 2.21. Uma *superfície parametrizada* $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável η de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . O conjunto $\eta(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado de *traço* de η . Diz-se que η é *regular* se o diferencial $d\eta_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetor para todo $q \in U$. Um ponto $p \in U$ onde $d\eta_p$ não é injetor é denominado *ponto singular* de η .

Algo interessante de se observar é que, diferentemente de superfícies regulares, uma superfície parametrizada pode ter autointerseções (mesmo quando é regular).

Teorema 2.22. *Sejam $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada e q um ponto de U . Então existe uma vizinhança V de q em \mathbb{R}^2 tal que $\eta(V) \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema da Função Inversa. Escreva

$$\eta(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Por regularidade, pode-se assumir

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Defina a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t).$$

Então

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças W_1 de q e W_2 de $F(q)$ tais que $F : W_1 \rightarrow W_2$ é um difeomorfismo. Nomeando $V = W_1 \cap U$ e observando que $F|_V = \eta|_V$, fica claro que $\eta(V)$ é difeomorfo a V e, portanto, é uma superfície regular. \square

Exemplos 2.23.

(1) Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária e considere $A : S^2 \rightarrow S^2$ a aplicação antípoda dada por $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Observe que a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ é uma aplicação diferenciável. Além disso, $f(S^2) \subset S^2$ e $f|_{S^2} = A$. Sendo assim, a aplicação A é diferenciável. É fácil ver que $A^{-1} = A$, donde A^{-1} também é diferenciável e, por conseguinte, A é um difeomorfismo.

(2) Considere o parabolóide $P : z = x^2 + y^2$. Defina a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Claramente $\text{gr } f = P$. Logo, uma parametrização de P é $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\eta(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

Como η e η^{-1} são diferenciáveis, fica provado que \mathbb{R}^2 (um plano) e P são difeomorfos.

(3) Seja S^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ um hiperbolóide de uma folha. Denote por $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ os polos norte e sul de S^2 , respectivamente, e defina $F : S = S^2 - \{N\} \cup \{S\} \rightarrow H$ da seguinte forma: para cada $p \in S$, denote por q a interseção da perpendicular ao eixo z que passa por p . Considere a semirreta l que começa em q e passa por p . Então $F(p) = l \cap H$ (Figura 2.24). Então F é diferenciável.

Para ver isto, considere $p = (x, y, z)$ um ponto de S . Em primeira instância, é importante traduzir o que a aplicação F faz sobre p analiticamente. Se p é tal que sua coordenada z é nula, F é simplesmente a aplicação inclusão; caso seja não nula, basta que seja trabalhado o caso $z > 0$ (o caso $z < 0$ pode ser incluído, como pode ser visto a seguir). Neste caso, pode-se escrever $p = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$. A semirreta l definida anteriormente pode ser expressa da seguinte forma:

$$l : (0, 0, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) + \lambda(u, v, 0), \quad \lambda > 0.$$

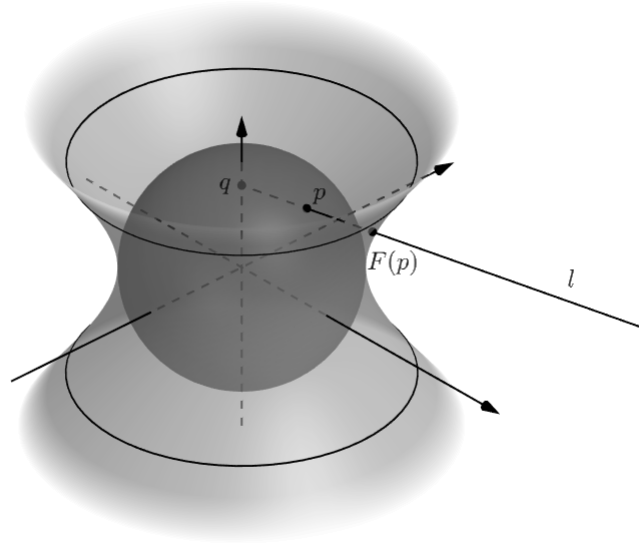


Figura 2.24

É preciso encontrar λ_0 tal que $(0, 0, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) + \lambda_0(u, v, 0)$ pertença ao hiperbolóide. Fazendo as contas

$$(\lambda_0 u)^2 + (\lambda_0 v)^2 - (\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})^2 = 1 \iff \lambda_0 = \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}.$$

(Note que o resultado seria o mesmo caso fosse $z < 0$; também, a expressão faz sentido porque os pontos onde o denominador da fração acima se anula foram retirados da superfície S .) Logo,

$$F(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) = \left(u \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}, v \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right).$$

O próximo passo é mostrar que F é diferenciável no hemisfério superior de S e no seu “equador”; o caso do hemisfério inferior é completamente análogo ao primeiro.

Suponha $p = (x, y, z), z > 0$, um ponto de S . Uma parametrização de S numa vizinhança deste ponto pode ser dada por $\eta(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, com $u^2 + v^2 < 1$. Como $F(p)$ também é tal que sua terceira coordenada é positiva, uma parametrização para H numa vizinhança deste ponto pode ser dada por $\xi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - 1})$, cuja inversa é $\xi^{-1} = \pi_{xy}$, a projeção sobre o plano xy . Com isso, fica claro que a aplicação

$$\begin{aligned} (\xi^{-1} \circ F \circ \eta)(u, v) &= (\pi_{xy} \circ F)(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \\ &= \pi_{xy} \left(u \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}, v \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right) \\ &= \left(u \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}}, v \sqrt{\frac{2 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2}} \right) \end{aligned}$$

é diferenciável em $\eta^{-1}(p)$. Se $p = (x, y, 0)$, então p pertence a S e a H ; para qualquer parametrização ϕ de S e ψ de H numa vizinhança de p , denotando $q = \phi^{-1}(p)$, vale

$$(\psi^{-1} \circ F \circ \phi)(q) = (\psi^{-1} \circ \phi)(q),$$

que é trivialmente uma aplicação diferenciável (em q).

Portanto, F é diferenciável em toda superfície S .

3 Planos tangentes e o diferencial de uma aplicação

Algo que talvez não tenha ficado claro até aqui é a necessidade do terceiro item na Definição 2.2. Esta propriedade de superfícies regulares permite, em cada ponto, construir o chamado *plano tangente* à superfície neste ponto. Para deixar claro todos esses comentários, a definição e o teorema a seguir devem construir o que constitui o plano tangente.

Definição 2.25. Seja S uma superfície regular e considere $p \in S$. Construa uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$. O vetor tangente $\alpha'(0)$ é chamado de *vetor tangente* a S em p .

Teorema 2.26. *Sejam $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e q um ponto de U . O subespaço vetorial de dimensão dois,*

$$d\eta_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

coincide com o conjunto de vetores tangente a S em $\eta(q)$.

Demonstração. Seja v um vetor tangente em $\eta(q)$, isto é, $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \eta(U) \subset S$ é uma curva diferenciável parametrizada e $\alpha(0) = \eta(q)$. O Exemplo 2.20 (1) mostra que a curva $\beta = \eta^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é diferenciável. Pela definição de diferencial, fica claro que $d\eta_q(\beta'(0)) = v$. Portanto, $v \in d\eta_q(\mathbb{R}^2)$.

Reciprocamente, suponha $v = d\eta_q(w)$, onde $w \in \mathbb{R}^2$. Não é difícil ver que w é o vetor velocidade da curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\beta(t) = tw + q.$$

Da definição de diferencial, $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha = \eta \circ \beta$. Isso mostra que v é um vetor tangente. □

Esse teorema mostra, basicamente, que o espaço vetorial $d\eta_q(\mathbb{R}^2)$, que coincide com o plano tangente a S em $\eta(q) = p$, não depende da parametrização η .

Definição 2.27. Dados S uma superfície regular e $p \in S$, considere η uma parametrização de S que contenha p . Denotando $q = \eta^{-1}(p)$, o plano $d\eta_q(\mathbb{R}^2)$ é chamado de *plano tangente* a S em p e será denotado por $T_p(S)$.

Para cada parametrização η , graças a (iii) da Definição 2.2, o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial \eta}{\partial u}(q), \frac{\partial \eta}{\partial v}(q) \right\}$$

é uma base de $T_p(S)$, chamada de *base associada* a η . Às vezes é conveniente escrever

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \eta_u, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \eta_v.$$

As coordenadas de um vetor $w \in T_p(S)$ na base associada à parametrização η é determinada da seguinte forma: w é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ da curva $\alpha = \eta \circ \beta$, onde $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ é dada por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, com $\beta(0) = q = \eta^{-1}(p)$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\eta(u(t), v(t)))(0) \\ &= \eta_u(q)u'(0) + \eta_v(q)v'(0) \\ &= w. \end{aligned}$$

Assim, na base $\{\eta_u(q), \eta_v(q)\}$, w tem coordenadas $(u'(0), v'(0))$, onde $(u(t), v(t))$ é a expressão, na parametrização η , de uma curva cujo vetor velocidade em $t = 0$ é w .

O conceito de plano tangente abre uma porta para um objeto construído sobre funções diferenciáveis entre superfícies que já é amplamente conhecido no caso de \mathbb{R}^n : o diferencial de uma aplicação. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e considere $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de um aberto V de S_1 em S_2 . Se p é um ponto de V , já foi mostrado que todo vetor tangente $w \in T_p(S_1)$ é o vetor velocidade $\alpha'(0)$ de uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ com $\alpha(0) = p$. A curva $\beta = \phi \circ \alpha$ é tal que $\beta(0) = \phi(p)$, e portanto $\beta'(0)$ é um vetor de $T_{\phi(p)}(S_2)$ (Figura 2.29).

Teorema 2.28. *Na discussão acima, dado w , o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α . A aplicação $d\phi_p : T_p(S_1) \rightarrow T_{\phi(p)}(S_2)$ definida por $d\phi_p(w) = \beta'(0)$ é linear.*

Demonstração. Sejam $\eta(x, y)$ e $\xi(u, v)$ parametrizações em vizinhanças de p e $\phi(p)$, respectivamente. Suponha que ϕ seja expressa nessas coordenadas por

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$$

e que α seja expressa por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

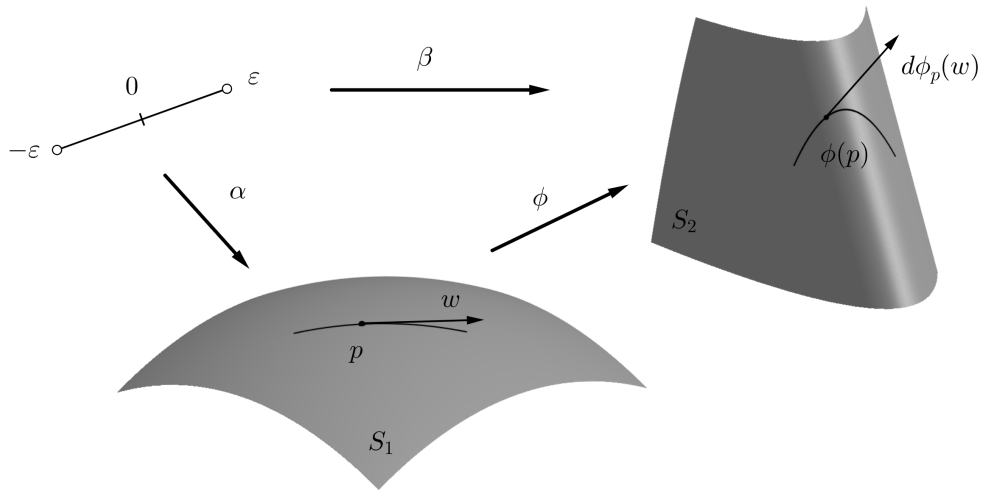


Figura 2.29

Então $\beta(t) = (\phi_1(x(t), y(t)), \phi_2(x(t), y(t)))$, e a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{\xi_u, \xi_v\}$ é

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} x'(0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} y'(0), \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x'(0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} y'(0) \right).$$

A relação acima mostra que $\beta'(0)$ depende apenas da aplicação ϕ e das coordenadas $(x'(0), y'(0))$ de w na base $\{\eta_x, \eta_y\}$. Logo, $\beta'(0)$ é independente de α . Mais ainda, a mesma relação mostra que

$$\beta'(0) = d\phi_p(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{bmatrix};$$

isto é, $d\phi_p$ é uma transformação linear de $T_p(S_1)$ em $T_{\phi(p)}(S_2)$ cuja matriz nas bases $\{\eta_x, \eta_y\}$ de $T_p(S_1)$ e $\{\xi_u, \xi_v\}$ de $T_{\phi(p)}(S_2)$ é a matriz dada acima. \square

Definição 2.30. O homomorfismo linear $d\phi_p$ definida no teorema anterior é chamado *diferencial* de ϕ em $p \in S_1$.

Exemplo 2.31. Considere a superfície $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e a aplicação antípoda $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Essa aplicação é diferenciável em \mathbb{R}^3 , donde também o é quando restrita a S^2 . Dado $p \in S^2$, considere $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w \in T_p(S^2)$. Visto que $\beta(t) = (A \circ \alpha)(t) = -\alpha(t)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ vale

$$\frac{d}{dt}((A \circ \alpha)(t)) = -\alpha'(t) = A(\alpha'(t)).$$

Daí, no ponto $t = 0$ tem-se

$$dA_p(w) = A(\alpha'(0)) = A(w),$$

ou seja, dado $w \in T_p(S^2)$, o diferencial de A em p leva w no seu oposto $-w$, pertencente a $T_{A(p)}(S^2)$, que é o plano $T_p(S^2)$ transladado.

É possível generalizar este exemplo, como segue.

Sejam $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um homomorfismo linear e $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular invariante sob L , isto é, $L(S) \subset S$. Então a restrição $L|_S$ é uma aplicação diferenciável e

$$dL_p(w) = L(w), \quad p \in S, w \in T_p(S).$$

Observe que, sendo uma transformação linear definida num aberto, a restrição $L|_S$ é diferenciável. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w \in T_p(S)$. Então, por ser L uma transformação linear,

$$\frac{d}{dt}((L \circ \alpha)(t)) = L(\alpha'(t)).$$

Aplicando em $t = 0$, vem

$$dL_p(w) = L(w),$$

que é o resultado desejado.

Definição 2.32. Uma aplicação $\phi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$, cujo domínio é um aberto de S_1 , entre superfícies regulares, é um *difeomorfismo local* em $p \in U$ se existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que ϕ restrita a V é um difeomorfismo sobre um conjunto aberto $\phi(U) \subset S_2$.

Com isso, é possível construir uma versão do Teorema da Função Inversa para superfícies regulares.

Teorema 2.33. *Se S_1 e S_2 são superfícies regulares e $\phi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$ é uma aplicação diferenciável de um aberto $U \subset S_1$ tal que o diferencial $d\phi_p$ de ϕ em $p \in U$ é um isomorfismo, então ϕ é um difeomorfismo local em p .*

Demonstração. Observe que, na demonstração do Teorema 2.28, a matriz que representa a transformação linear $d\phi_p$ é justamente a matriz da transformação linear $d(\xi^{-1} \circ \phi \circ \eta)_p$. Assim, dizer que uma é isomorfismo é o mesmo que dizer que a outra o é. Como $\xi^{-1} \circ \phi \circ \eta$ é uma aplicação diferenciável que sai de um aberto $\eta^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2$ e chega no aberto $\xi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$, onde $V \subset \phi(U)$, pode-se usar o Teorema da Função Inversa, obtendo: dois abertos $W_1 \subset \eta^{-1}(U)$, $W_2 \subset \xi^{-1}(V)$ e um difeomorfismo $\psi : W_1 \rightarrow W_2$. Fica claro agora que a inversa de $\phi|_{\eta(W_1)}$ é dada por

$$\phi^{-1} = \eta \circ \psi^{-1} \circ \xi^{-1},$$

que é diferenciável por ser a composição de funções diferenciáveis. □

O plano tangente possibilita falar do ângulo entre duas superfícies que se intersectam no ponto de interseção.

Definição 2.34. Dado um ponto p de uma superfície regular S , há dois vetores unitários de \mathbb{R}^3 que são normais ao plano tangente $T_p(S)$; cada um deles é chamado *vetor unitário normal* em p . A linha reta que passa por p e contém um vetor unitário normal em p é chamada *reta normal* em p . O *ângulo* de duas superfícies regulares que se intersectam num ponto de interseção p é o ângulo entre seus planos tangentes (ou suas retas normais) em p .

Fixando uma parametrização $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, pode-se definir a escolha de um vetor unitário normal em cada ponto $q \in \eta(U)$ pela regra

$$N(q) = \frac{\eta_u \wedge \eta_v}{|\eta_u \wedge \eta_v|}(q).$$

Assim, obtém-se uma aplicação diferenciável $N : \eta(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$. É importante dizer, entretanto, que nem sempre é possível estender essa aplicação diferenciavelmente sobre toda a superfície S .

Exemplos 2.35.

(1) A equação do plano tangente em (x_0, y_0, z_0) de uma superfície regular dada por $f(x, y, z) = 0$, onde 0 é um valor regular de f , é

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Denote por S a superfície em questão e $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = w = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Assim, vale $f(\alpha(t)) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, donde, pela regra da cadeia, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

Aplicando no ponto $t = 0$ vem

$$f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) + f_z(p_0)(z - z_0) = 0.$$

(2) A equação do plano tangente de uma superfície que é o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$, no ponto $p_0 = (x_0, y_0)$, é dada por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Defina a aplicação diferenciável $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Então 0 é um valor regular de F , donde a equação $F(x, y, z) = 0$ define uma superfície regular; pelo exemplo anterior, sabe-se que o plano tangente à superfície no ponto $q_0 = (x_0, y_0, f(p_0))$ é $F_x(q_0)(x - x_0) +$

$F_y(q_0)(y - y_0) + F_z(q_0)(z - f(p_0)) = 0$, isto é,

$$f_x(p_0)(x - x_0) + f_y(p_0)(y - y_0) - (z - f(p_0)) = 0.$$

Note que $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\eta(x, y) = (x, y, f(x, y))$ é uma parametrização da superfície em questão. O Teorema 2.26 diz que o plano tangente a esta superfície em p_0 é dado por $d\eta_{p_0}(\mathbb{R}^2)$. Observe, assim, que $d\eta_{p_0}(\mathbb{R}^2)$ é justamente df_{p_0} .

(3) Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre uma superfície regular conexa S . Assuma que $df_p = 0$ para todo $p \in S$. Então f é constante em S .

Definição 2.36. Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita *conexa* se quaisquer dois pontos na superfície podem ser ligados por uma curva contínua totalmente contida em S .

Dados p e q dois pontos de S , considere $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$. Por hipótese, a função de uma variável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\beta = f \circ \alpha$ é tal que $\beta'(0) = 0$. Dado $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, defina $\hat{\alpha} : (-\varepsilon - t_0, \varepsilon - t_0) \rightarrow S$ por $\hat{\alpha}(t) = \alpha(t + t_0)$. Analogamente ao raciocínio anterior, a função $\hat{\beta}$ é uma função de uma variável tal que $\hat{\beta}'(t_0) = \beta'(0) = 0$. Conclui-se que $\beta'(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é, f é constante sobre α .

Agora, se p e q pertencem a uma mesma vizinhança coordenada, da conexidade de S é possível ligar estes pontos por uma curva diferenciável. A construção desta curva é a seguinte: seja $\eta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de S que contém p e q . Sendo S conexo e η um homeomorfismo, o aberto U é conexo. Assim, é possível traçar uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ diferenciável que contenha $\eta^{-1}(p)$ e $\eta^{-1}(q)$ em seu traço. A nova curva $\gamma = \eta \circ \alpha$ é diferenciável e contém p e q (Figura 2.37). Pelo raciocínio do parágrafo anterior, vale $f(p) = f(q)$ e a função f é constante nessa vizinhança coordenada.

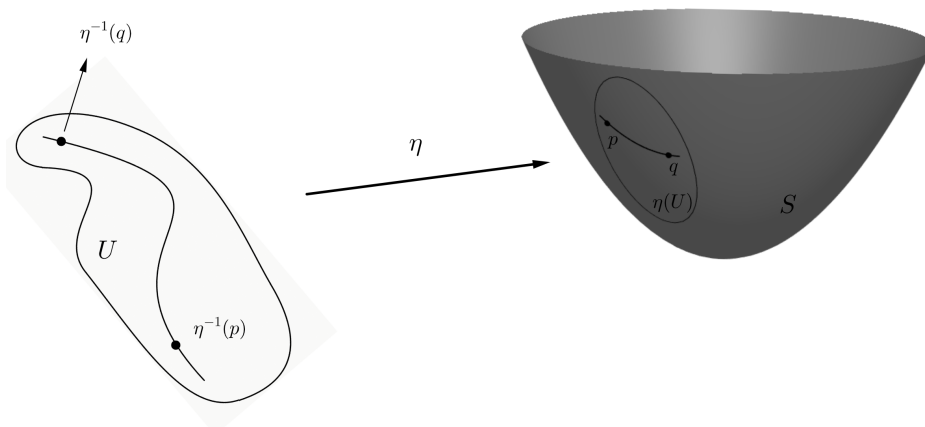


Figura 2.37

Caso não exista parametrização que contenha ambos p e q , é possível encontrar finitas parametrizações η_0, \dots, η_n definidas em abertos $U_0, \dots, U_n \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente, tais

que

$$\begin{aligned} p_0 &= p \in \eta_0(U_0), \\ p_1 &\in \eta_0(U_0) \cap \eta_1(U_1), \\ &\vdots \\ p_{n-1} &\in \eta_{n-1}(U_{n-1}) \cap \eta_n(U_n), \\ p_n &= q \in \eta_n(U_n). \end{aligned}$$

Construtivamente, é possível exibir $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ curvas diferenciáveis de forma que p_{i-1} e p_i pertençam ao traço de α_i , $i = 1, \dots, n$. Sendo f constante sobre cada uma dessas curvas e como há pelo menos um ponto em comum entre α_i e α_{i+1} , conclui-se que $f(p) = f(q)$. Sendo p e q arbitrários, f é constante sobre S .

(4) Se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ e $\psi : S_2 \rightarrow S_3$ são aplicações diferenciáveis e $p \in S_1$, então

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p.$$

Fixadas parametrizações de S_1, S_2 e S_3 que contenham $p, \varphi(p)$ e $\psi(\varphi(p))$, é possível proceder como no Teorema 2.28 e escrever as matrizes dos diferenciais em relação a essas parametrizações:

$$A = d\varphi_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad B = d\psi_{\varphi(p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{bmatrix},$$

onde $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ e $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))$. Fazendo o mesmo para $\psi \circ \varphi$ obtém-se

$$d(\psi \circ \varphi)_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Por fim, sabe-se que a transformação linear $d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$ é representada pela matriz BA , que é exatamente a matriz acima.

Parte II

Análise Complexa

Capítulo 3

Espaços métricos; o plano complexo e sua topologia

Este capítulo será uma introdução para o estudo de Análise Complexa. Muitos dos seus tópicos são deveras simples e já foram estudados anteriormente ou na graduação ou até mesmo no ensino médio. Por esse motivo, alguns de seus itens serão vistos sucintamente.

1 O plano complexo

Estas primeiras definições são a base de todo o estudo.

Definição 3.1. Os *números complexos* são pares ordenados da forma (a, b) , onde $a, b \in \mathbb{R}$. O conjunto de todos os números complexos é representado por \mathbb{C} .

Definição 3.2. O *corpo complexo* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, representado apenas por \mathbb{C} , é um corpo onde as operações são definidas como segue: se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, então

$$\begin{aligned}z + w &= (a + c, b + d), \\z \cdot w &= (ac - bd, bc + ad).\end{aligned}$$

Em diversos momentos o corpo complexo será referenciado apenas como “números complexos”. Caso alguma confusão possa acontecer, uma diferenciação será feita no momento em que esses objetos forem evocados.

As identidades aditivas e multiplicativas em \mathbb{C} são, respectivamente, $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$. O homomorfismo $x \mapsto (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo de corpos entre \mathbb{R} e um subconjunto de \mathbb{C} . Assim, é possível enxergar \mathbb{R} como um subconjunto do corpo complexo. Ao colocar $i = (0, 1)$, pode-se escrever $(a, b) = a + bi$. Com isto, a notação em pares não será mais utilizada.

Definição 3.3. Se z é um número complexo, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, então os números a e b são as partes *real* e *imaginária* de z , respectivamente. Denota-se $a = \operatorname{Re} z$ e $b = \operatorname{Im} z$.

Definição 3.4. Dado um número complexo $z = a + bi$, o número $\bar{z} = a - bi$ é chamado de *conjugado* de z ; o *valor absoluto* ou *módulo* de z é o número real $|z| = (z\bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Visto que todo número complexo é um par de números reais, não é difícil compreender que existe um isomorfismo de grupos que leva cada complexo z num único par ordenado $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$. A soma de números complexos coincide com a soma de vetores em \mathbb{R}^2 .

Para cada ponto $z = x + yi$ no plano complexo é possível exibir sua forma polar $(r, \theta) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Claramente tem-se $r = |z|$ e θ é o ângulo entre o semieixo real positivo e o segmento que liga a origem 0 e o ponto z . Como $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, mantém as igualdades verdadeiras, o ângulo θ não é único.

Definição 3.5. Se um número complexo z tem sua forma polar $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, define-se o *argumento* de z como θ , denotado por $\arg z = \theta$. Como θ não é único, a relação “arg” não é uma função.

Para facilitar a escrita de próximos assuntos, a notação $\operatorname{cis} \theta = \cos \theta + i \sin \theta$ será adotada.

Uma relação muito útil proveniente da forma polar é a seguinte: sejam $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ dois números complexos. Então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2),$$

o que mostra que $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$. Por indução prova-se que a multiplicação de k números complexos consiste na multiplicação dos k módulos e da soma dos k argumentos. Em particular, se eles são todos iguais, obtém-se

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta, \tag{3.1}$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Agora, se $z \neq 0$, então

$$z \cdot (r^{-1} \operatorname{cis} (-\theta)) = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Logo, (3.1) é válido para todo inteiro n se $z \neq 0$. Um caso especial gera a *fórmula de de Moivre*:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

A equação (3.1) também permite facilmente encontrar raízes n -ésimas de um complexo $a \neq 0$. Para tal, suponha que $z^n = a$. Então, se $a = |a| \operatorname{cis} \theta$, por (3.1), vale

$$z = |a|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \frac{\theta}{n}.$$

Todavia, note que esta não é a única solução. Na verdade, cada um dos números

$$|a|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi), 0 \leq k \leq n - 1,$$

satisfaz a equação $z^n = a$. Isso sugere que cada número complexo não nulo possui n distintas raízes n -ésimas de a . Elas são dadas pela fórmula acima.

Também há uma maneira interessante de escrever retas e semiplanos no plano complexo. Para analisar isto, considere L uma reta em \mathbb{C} . De geometria básica sabe-se que

$$L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + tb, t \in \mathbb{R}\}.$$

Como $b \neq 0$, isso significa que, para $z \in L$ vale

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) = 0.$$

Por outro lado, se z é tal que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) = 0,$$

então

$$t = \frac{z - a}{b}$$

é um número real tal que $z = a + tb$. Portanto,

$$L = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) = 0 \right\}.$$

Sendo b um vetor direção, pode-se assumir $|b| = 1$. Considere agora o caso em que $a = 0$ e defina $H_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z}{b} \right) > 0\}$, $b = \operatorname{cis} \beta$. Se $z = r \operatorname{cis} \theta$, então $\frac{z}{b} = r \operatorname{cis} (\theta - \beta)$. Logo, z pertence a H_0 se, e somente se, $\operatorname{sen} (\theta - \beta) > 0$; entretanto, isso ocorre apenas quando $\beta < \theta < \pi + \beta$. Conclui-se que H_0 é o semiplano à esquerda da reta L (com $a = 0$) se um observador anda sobre L na direção de b . Colocando

$$H_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z - a}{b} \right) > 0 \right\},$$

fica fácil ver que $H_a = a + H_0 = \{a + w \in \mathbb{C} \mid w \in H_0\}$. Em outras palavras, H_a é a translação de H_0 por a . De maneira análoga, com a desigualdade inversa, define-se o semiplano à direita da reta L .

2 O plano estendido e sua representação esférica

Esta seção é uma grande definição e interpretação de uma forma útil de enxergar os números complexos. Além disso, todas as contas aqui presentes se assemelham muito às feitas no Exemplo 2.10 (4), já que o princípio de projeção estereográfica é o mesmo.

Antes de introduzir este conceito, é interessante apresentar algumas definições importantes que serão naturais no decorrer do conteúdo exposto.

Definição 3.6. Um *espaço métrico* é um par (X, d) onde X é um conjunto e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, chamada *função distância* ou *métrica*, que satisfaz as seguintes propriedades para todo x, y e z em X :

- (i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se $x \in X$ e $r > 0$ são dados, defina

$$B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\},$$

$$\overline{B}(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Os conjuntos $B(x; r)$ e $\overline{B}(x; r)$ são chamados, respectivamente, de *bola aberta* e *bola fechada* centrada em x de raio r .

O item (iii) da definição acima é conhecido como *desigualdade triangular*. Algo importante a ser mencionado é que nos casos em que a métrica está subentendida, é comum denotar o espaço métrico (X, d) por apenas X .

Subconjuntos de espaços métricos são naturalmente espaços métricos. Basta induzir a mesma métrica no subconjunto. Em geral, no texto que segue, a não ser que seja dito o contrário, subconjuntos de espaços métricos herdarão a métrica do espaço maior.

O propósito do que vem a seguir é dar luz ao *plano estendido* que, a rigor, é apenas $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, também denotado por \mathbb{C}_∞ , e dar a ele propriedades que serão amplamente utilizadas mais adiante. Com isso em mente, usualmente representa-se \mathbb{C}_∞ pela esfera unitária S^2 em \mathbb{R}^3 , que é definida por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte em S^2 . Também, identifique \mathbb{C} com o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, de forma que \mathbb{C} corta S^2 ao longo do equador. Agora, para cada w complexo considere a reta em \mathbb{R}^3 que passa por w e N . Essa reta intersecta a esfera em exatamente um ponto $W \neq N$. Se $|w| > 1$, então W mora no hemisfério norte da esfera; se $|w| < 1$, então W mora no hemisfério sul; e se $|w| = 1$, vale $W = w$. Quando $|w|$ tende a infinito, é intuitivo que W se aproxima de N . Logo, faz sentido identificar N com o ponto ∞ em \mathbb{C}_∞ . Dessa forma \mathbb{C}_∞ fica totalmente identificado com S^2 .

Dado $w = a + bi$, seja $W = (x, y, z)$ o seu correspondente em S^2 . Com contas completamente análogas às do Exemplo 2.10 (4), é possível concluir que

$$x = \frac{2a}{|w|^2 + 1}, \quad y = \frac{2b}{|w|^2 + 1}, \quad z = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1},$$

ou ainda,

$$x = \frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}, \quad y = \frac{-i(w - \bar{w})}{|w|^2 + 1}, \quad z = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}. \quad (3.2)$$

Caso tenha-se o ponto $W = (x, y, z)$ ($W \neq N$), para encontrar o ponto w no plano basta traçar a reta $L : (0, 0, 1) + t(-x, -y, 1 - z)$ e escolher $t \in \mathbb{R}$ de forma que a terceira coordenada seja 0. Após algumas contas simples, encontra-se

$$t = \frac{-1}{1 - z}.$$

Substituindo na reta, obtém-se

$$w = \frac{x + yi}{1 - z}.$$

Por fim, deseja-se definir uma função distância sobre o plano estendido. Para tal, prossiga da seguinte maneira: se w e w' são dois pontos de \mathbb{C}_∞ , defina a distância de w a w' , $d(w, w')$, como a distância entre os pontos correspondentes W e W' em \mathbb{R}^3 . Se $W = (x, y, z)$ e $W' = (x', y', z')$, então

$$d(w, w') = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Como W e W' moram em S^2 , vale

$$d(w, w')^2 = 2 - 2(xx' + yy' + zz'). \quad (3.3)$$

Agora, se w e w' são elementos de \mathbb{C} , pode-se usar a equação (3.2) para expandir o segundo membro de (3.3), obtendo

$$\begin{aligned} d(w, w')^2 &= 2 - \frac{(w + \bar{w})(w' + \bar{w}') - (w - \bar{w})(w' - \bar{w}') + (|w|^2 - 1)(|w'|^2 - 1)}{(|w|^2 + 1)(|w'|^2 + 1)} \\ &= \frac{4(w - w')(\bar{w} - \bar{w}')}{(|w|^2 + 1)(|w'|^2 + 1)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$d(w, w') = \frac{2|w - w'|}{((|w|^2 + 1)(|w'|^2 + 1))^{\frac{1}{2}}}.$$

Caso tenha-se $w' = \infty$, por (3.3) e (3.2) vale

$$d(w, \infty) = \sqrt{2 - 2z} = \frac{2}{(|w|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

No conteúdo adiante algumas propriedades de espaços métricos serão exploradas. Como agora \mathbb{C}_∞ é um espaço métrico, tais propriedades serão válidas também no plano estendido.

Um ponto interessante a ser estudado é entender como são as bolas no plano estendido,

e como estas se relacionam com as bolas no plano complexo.

Como a métrica de \mathbb{C}_∞ foi induzida da métrica de \mathbb{R}^3 , dado $w \in \mathbb{C}_\infty$, a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em w é simplesmente a interseção da bola aberta $B(w; r)$ em \mathbb{R}^3 com a esfera S^2 . Note que a maior distância entre dois pontos de S^2 é distância entre dois pontos antípodas: 2; isto é, se $r \geq 2$, então a bola $B(w; r)$ consiste de todo o plano estendido.

Caso $0 < r < 2$, então a interseção da bola $B(w; r)$ em \mathbb{R}^3 com S^2 gera uma circunferência sobre a superfície da esfera. Uma pergunta a ser feita é a seguinte: como essa circunferência é representada no plano complexo ao fazer a projeção estereográfica? O teorema a seguir responde esta questão.

Teorema 3.7. *Seja Λ uma circunferência morando em S^2 . Se Λ contém o ponto $N = (0, 0, 1)$, então sua projeção estereográfica em \mathbb{C} é uma linha reta; caso contrário sua projeção é uma circunferência em \mathbb{C} .*

Demonstração. Está claro que existe um plano $P : ax + by + cz + d = 0$ em \mathbb{R}^3 tal que $S^2 \cap P = \Lambda$. Um ponto $W = (X, Y, Z) \neq N$ em Λ é projetado sobre $w = x + yi$ no plano complexo. Assim, pode-se reescrever W como

$$\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Substituindo na equação que define P , obtém-se

$$0 = 2ax + 2by + (c + d)(x^2 + y^2) + (d - c). \tag{3.4}$$

Se o plano passa por N , então vale $c = -d$, e a equação (3.4) se torna a equação de uma reta. Para $c \neq -d$, multiplicando (3.4) por $(c + d)^{-1}$ vem

$$0 = \frac{2ax + 2ab}{c + d} + x^2 + y^2 + \frac{d - c}{d + c}.$$

Completando quadrados, tem-se

$$\left(x + \frac{a}{c + d} \right)^2 + \left(y + \frac{b}{c + d} \right)^2 = \frac{c - d}{c + d} + \frac{a^2 + b^2}{(c + d)^2},$$

que é a equação de uma circunferência no plano complexo. □

3 Topologia básica; conjuntos abertos

Na seção anterior a definição de espaço métrico e de bolas, abertas ou fechadas, foram apresentadas. Nesta seção esses conceitos serão explorados de maneira que não só os espaços possam ser melhor compreendidos, mas também relações e funções entre eles.

Antes de prosseguir, talvez seja interessante apresentar um exemplo de espaço métrico que não consiste de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n .

Exemplo 3.8. Seja S um conjunto e denote por $B(S)$ o conjunto de todas as funções $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in S\} < \infty.$$

Isto é, $B(S)$ consiste de todas as funções de S a \mathbb{C} cuja imagem está inteiramente contida numa bola de raio $r > 0$. Para f e g elementos de $B(S)$, defina a função $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Os dois primeiros itens da Definição 3.6 são facilmente verificáveis. Para a desigualdade triangular, observe que se f, g e h são elementos de $B(S)$ e x é um ponto arbitrário em S , vale

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \|f - h\|_\infty + \|h - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Agora, tomando o supremo sobre todos os elementos de S , a equação acima diz que $\|f - g\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty + \|h - g\|_\infty$. Isto mostra que $(B(S), d)$ é um espaço métrico.

Definição 3.9. Seja (X, d) um espaço métrico.

- (i) Um conjunto $G \subset X$ é *aberto* se, para todo $x \in G$, existir $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset G$;
- (ii) Uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ é um conjunto aberto que o contém;
- (iii) O *complementar* de um conjunto $Y \subset X$ consiste de todos os pontos $x \in X$ tais que $x \notin Y$, denotado por Y^c ;
- (iv) Um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se F^c é aberto.

O seguinte teorema, apesar de importante, terá sua demonstração omitida. Ela pode ser encontrada em [2], página 12.

Teorema 3.10.

- (a) Para qualquer coleção $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ de conjuntos abertos, o conjunto $\cup_{\gamma \in \Lambda} G_\gamma$ é aberto;
- (b) Para qualquer coleção $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ de conjuntos fechados, o conjunto $\cap_{\gamma \in \Lambda} F_\gamma$ é fechado;
- (c) Para qualquer coleção finita G_1, \dots, G_n de conjuntos abertos, o conjunto $\cap_{i=1}^n G_i$ é aberto;
- (d) Para qualquer coleção finita F_1, \dots, F_n de conjuntos fechados, o conjunto $\cup_{i=1}^n F_i$ é fechado.

Definição 3.11. Seja Y um subconjunto de X .

(i) O *interior* de Y , denotado por Y° , é o conjunto

$$Y^\circ = \left\{ \bigcup G \mid G \subset Y, G \text{ aberto} \right\};$$

(ii) O *fecho* de Y , denotado por \bar{Y} , é o conjunto

$$\bar{Y} = \left\{ \bigcap F \mid F \supset Y, F \text{ fechado} \right\};$$

(iii) Y é *denso* em X se $\bar{Y} = X$;

(iv) A *fronteira* ou o *bordo* de Y , denotado por ∂Y , é definido como

$$\partial Y = \bar{Y} \cap \bar{Y}^c.$$

Observe que, pelo Teorema 3.10, o interior e o fecho de qualquer conjunto é sempre um conjunto aberto e fechado, respectivamente; assim, também é fechado o bordo de qualquer conjunto.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [2], página 13.

Teorema 3.12. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico (X, d) . Então:*

(a) A é aberto se, e somente se, $A = A^\circ$;

(b) A é fechado se, e somente se, $A = \bar{A}$;

(c) $A^\circ = (\bar{A}^c)^\circ$; $\bar{A} = ((A^\circ)^c)^\circ$; $\partial A = \bar{A} - A^\circ$;

(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(e) $x \in A^\circ$ se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$ (por esse motivo, x é chamado de ponto interior de A);

(f) $x \in \bar{A}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Proposição 3.13. *Seja (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Suponha $G \subset X$ aberto; mostre que $G \cap Y$ é aberto em (Y, d) . Reciprocamente, mostre que se $G_1 \subset Y$ é aberto em (Y, d) , então existe um aberto $G \subset X$ tal que $G_1 = G \cap Y$. O aberto em Y induzido por um aberto em X é chamado de aberto relativo a Y .*

Assim, todos os abertos de Y são abertos relativos. De forma completamente análoga, conclui-se que os fechados de Y são fechados relativos.

Demonstração. Para diferenciar as bolas abertas em (X, d) e em (Y, d) , utilize as notações $B_X(x; r)$ e $B_Y(x; r)$ para bolas abertas nestes espaços métricos, respectivamente.

Dado $x \in G \cap Y$, note que, do fato de G ser aberto em X , existe $r > 0$ tal que $B_X(x; r) \subset G$. Agora, o conjunto $B_X(x; r) \cap Y$ é uma bola aberta em Y , centrada em x , e que é tal que $B_X(x; r) \cap Y \subset G \cap Y$. Isso prova a primeira parte.

Por outro lado, suponha G_1 um aberto de Y . Para cada $y \in G_1$, existe um número real $r_y > 0$ tal que $B_Y(y; r_y) \subset G_1$. Defina, assim, o conjunto

$$G = \bigcup_{y \in G_1} B_X(y; r_y).$$

Pelo Teorema 3.10, tal conjunto é aberto em X . Como todo ponto de G_1 é um ponto de G , está claro que $G_1 \subset G \cap Y$. Reciprocamente, como $B_X(y; r_y) \cap Y = B_Y(y; r_y) \subset G_1$, vale $G \cap Y \subset G_1$. Portanto, $G_1 = G \cap Y$ e a proposição está demonstrada. \square

4 Conexidade

A ideia de conexidade remete a um objeto inteiro, como uma generalização do conceito de intervalo em \mathbb{R} . De fato, os únicos conjuntos conexos de \mathbb{R} são os intervalos.

Definição 3.14. Um espaço métrico (X, d) é dito *conexo* se os únicos subconjuntos de X que são simultaneamente abertos e fechados são o conjunto vazio e o próprio conjunto X . Se $A \subset X$ então A é um *subconjunto conexo de X* se o espaço métrico (A, d) é conexo.

Exemplo 3.15. Considere os conjuntos $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$ e defina $X = S^1 \cup A$. Os conjuntos S^1 e A são ambos abertos e fechados em X . Para provar isto, basta demonstrar que ambos são abertos; pois daí, como seus complementares em X são abertos, eles mesmos são fechados. Dado $x \in S^1$, considere a bola $B(x; 1)$. Esta bola está inteiramente contida em S^1 . Similarmente, dado $y \in A$, a bola $B(y; 1)$ está contida em A . Portanto S^1 e A são abertos e, conseqüentemente, fechados. Logo (X, d) não é conexo.

Uma formulação equivalente da definição de conexidade é dizer que X não é conexo se existem subconjuntos disjuntos não vazios abertos A e B de X tais que $A \cup B = X$.

Definição 3.16. Sejam z e w números complexos. Denota-se o segmento de z a w por

$$[z, w] = \{tw + (1 - t)z \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Uma *poligonal* de a a b é o conjunto

$$P = \bigcup_{i=1}^n [z_i, w_i],$$

onde $z_1 = a$, $w_n = b$ e $z_{i+1} = w_i$, $i = 1, \dots, n - 1$, também denotado por $P = [a, z_2, \dots, z_n, b]$.

Teorema 3.17. *Um conjunto aberto $G \subset \mathbb{C}$ é conexo se, e somente se, para quaisquer dois pontos a e b em G existe uma poligonal de a a b contida inteiramente em G .*

Demonstração. Para mostrar um lado, suponha que G satisfaça a condição mas que não seja conexo. Neste caso, existem conjuntos A e B disjuntos, abertos e não vazios tais que $G = A \cup B$. Tome $a \in A$ e $b \in B$. Por hipótese existe uma poligonal P , inteiramente contida em G , de a a b . Como A e B são disjuntos, existe um segmento da poligonal que possui um vértice em A e outro em B . Renomeando se necessário, suponha que tal segmento seja $P = [a, b]$. Defina

$$I_A = \{t \in [0, 1] \mid tb + (1 - t)a \in A\}, \quad I_B = \{s \in [0, 1] \mid sb + (1 - s)a \in B\}.$$

Observe que $I_A \cap I_B = \emptyset$ (pois A e B são disjuntos), $I_A \cup I_B = [0, 1]$ e ambos são disjuntos ($0 \in I_A$ e $1 \in I_B$). Basta agora provar que I_A e I_B são abertos; pois se assim o fosse, estaria provado que $[0, 1]$ não é conexo, um absurdo evidente.

Tome $x \in I_A$. Pela definição deste conjunto, vale

$$x_0 = xb + (1 - x)a \in A.$$

Sendo A aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0; r) \subset A$. Assim, existe um ponto $y_0 \neq x_0$ que pertence à interseção $B(x_0; r) \cap P$, isto é, ele é da forma

$$y_0 = (x + \varepsilon)b + (1 - (x + \varepsilon))a,$$

onde pode-se assumir $\varepsilon > 0$. Fica claro então que $B(x; \varepsilon) \subset I_A$, donde I_A é aberto. Analogamente prova-se que I_B é aberto, finalizando esta parte da demonstração.

Suponha agora que G é conexo e fixe $a \in G$. Defina A como o conjunto de todos os $b \in G$ tal que existe uma poligonal $P \subset G$ de a a b . O propósito agora é concluir que A é aberto e fechado e, sendo G conexo, tal A é o próprio G .

Dado $b \in A$, por definição existe uma poligonal $P = [a, z_2, \dots, z_n, b]$ tal que $P \subset G$. Sendo G aberto, existe $r > 0$ tal que $B(b; r) \subset G$. Tome $z \in B(b; r)$. É claro que $[b, z] \subset B(b; r) \subset G$. Logo, a poligonal $P \cup [b, z]$ tem extremos em a e z e está contida em G , donde $z \in A$ e A é aberto.

Suponha agora que exista $z \in A^c$. Novamente, sendo G aberto, existe $r > 0$ tal que $B(z; r) \subset G$. Se existisse $b \in B(z; r) \cap A$, como no parágrafo anterior seria possível construir uma poligonal de a a z , o que contradiria o fato de z não estar em A . Logo, $B(z; r) \cap A = \emptyset$, isto é, $B(z; r) \subset A^c$. Conclui-se que A^c é aberto (A é fechado). \square

Exemplo 3.18. Caso não tenha-se G aberto, o teorema anterior não vale nem mesmo nos casos mais simples. Considere, por exemplo, o conjunto $S^1 \subset \mathbb{C}$, que não é aberto em \mathbb{C} . Seus abertos são uniões de arcos sem os pontos finais, enquanto os arcos fechados são aqueles que contém os pontos finais. Assim, um conjunto $A \subset S^1$ é aberto e fechado em

S^1 se, e somente se, ele é um arco que não possui pontos finais. Isto é, o próprio conjunto S^1 . Conclui-se que S^1 é conexo. Entretanto, S^1 não contém nenhum segmento entre dois de seus pontos, quanto mais uma poligonal.

Definição 3.19. Um subconjunto C de um espaço métrico X é uma *componente* de X se é um subconjunto conexo maximal de X . Em outras palavras, C é conexo e qualquer subconjunto conexo D de X que contenha C é tal que $D = C$.

As componentes de um espaço métrico formam uma partição do espaço; isto é:

1. Cada $x \in X$ mora em alguma componente;
2. A união das componentes é igual ao espaço todo;
3. Componentes distintas são disjuntas.

Lema 3.20. *Seja (X, d) um espaço métrico e suponha $\{C_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos conexos de X com um ponto p em comum. Então*

$$C = \bigcup_{\gamma \in \Lambda} C_\gamma$$

é conexo.

Demonstração. Suponha que C não seja conexo, isto é, existem A e B disjuntos, abertos e fechados, não vazios, tais que $C = A \cup B$. O ponto p mora ou em A ou em B . Suponha que seja em A . Como C_γ é conexo, ele mora inteiramente em A ou em B . Como ele contém p , ele está contido em A . Logo, $C_\gamma \subset A$ para todo $\gamma \in \Lambda$, donde $C \subset A$, contradizendo o fato de B ser não vazio. \square

Teorema 3.21.

- (a) *Se $A \subset X$ é conexo e $A \subset B \subset \bar{A}$, então B é conexo;*
- (b) *Se C é uma componente de X então C é fechado.*

Demonstração.

- (a) Suponha que ele não seja conexo, ou seja, $B = C \cup D$ com C e D abertos e fechados, não vazios e disjuntos. Sendo A conexo, ele está contido inteiramente em C ou em D . Suponha que seja em C . Então $\bar{A} \subset \bar{C}$, donde $B \subset \bar{C}$. Entretanto, $\bar{C} \cap D = \emptyset$, donde D é vazio, uma contradição.
- (b) Pelo item anterior, se existisse B tal que $C \subset B \subset \bar{C}$, B seria um conjunto conexo que possui C como subconjunto, contradizendo o fato de C ser maximal. Logo $C = \bar{C}$ e C é fechado. \square

Teorema 3.22. *Seja G um aberto de \mathbb{C} . Então as componentes de G são abertas e elas formam um conjunto enumerável.*

Demonstração. Suponha C uma componente de G e tome $x_0 \in C$. Sendo G aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0; r) \subset G$. Tal bola é conexa e possui um ponto em comum com C . Aplicando, assim, o Lema 3.20, o conjunto $B(x_0; r) \cup C$ é conexo e contém C . Conclui-se então que $B(x_0; r) \subset C$ e C é aberto.

Para ver que o número de componentes é, no máximo, enumerável, basta considerar o conjunto

$$S(\mathbb{Q}) = \{a + bi \in G \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Tal conjunto é enumerável e toda componente de G possui, pelo menos, um ponto de $S(\mathbb{Q})$. Logo, o número de componentes de G é, no máximo, enumerável. \square

5 Sequências em espaços métricos

O que já se sabe sobre sequências em \mathbb{R} será assumido.

Sequências é um conceito muito útil em diversos âmbitos. Uma de suas características mais importantes é chamada de *convergência*. Esta propriedade abre uma gama de caracterizações para os objetos da teoria de espaços métricos.

Definição 3.23.

- (i) Seja $\{x_n\}$ uma sequência no espaço métrico (X, d) . Diz-se que $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ vale $d(x_n, x) < \varepsilon$. Denota-se este fenômeno por $x_n \rightarrow x$, ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim x_n = x;$$

- (ii) Seja A um subconjunto do espaço métrico (X, d) . Um ponto $x \in X$ é denominado um *ponto de acumulação* de A se existir uma sequência $\{x_n\}$ de pontos distintos de A tal que $x_n \rightarrow x$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' .

Note que a definição de $x_n \rightarrow x$ é equivalente a dizer que $\lim d(x_n, x) = 0$, isto é, $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

A demonstração do seguinte teorema pode ser vista em [2], página 18.

Teorema 3.24. *Um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de elementos de F é tal que seu limite pertence a F .*

Teorema 3.25.

- (a) Um conjunto é fechado se, e somente se, ele possui todos os seus pontos de acumulação;
- (b) $\overline{A} = A \cup A'$.

Demonstração.

- (a) Seja x um ponto de acumulação de um conjunto fechado F . Como F^c é aberto, se x morasse em F^c , existiria $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset F^c$, contradizendo o fato de x ser um ponto de acumulação de F . Logo, x pertence a F .

Reciprocamente, suponha F um conjunto que contenha todos os seus pontos de acumulação e tome $x \in F^c$. Como x não é ponto de acumulação de F , existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \cap F = \emptyset$; mas então $B(x; r) \subset F^c$, mostrando que F^c é aberto e, conseqüentemente, que F é fechado.

- (b) Visto que $A \cup A'$ é um conjunto que possui todos os seus pontos de acumulação, pelo item (a), ele é fechado. Assim, como ele contém A , por definição vale $\overline{A} \subset A \cup A'$. Agora, seja F um fechado que contenha A . Como F é fechado, ele contém todos os seus pontos de acumulação; em particular, os pontos de acumulação de A . Logo, $F \supset A \cup A'$, donde $\overline{A} \supset A \cup A'$. Portanto, $\overline{A} = A \cup A'$. \square

Definição 3.26. Uma seqüência $\{x_n\}$ é chamada de *seqüência de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m \geq N$. Um espaço métrico (X, d) em que todas as seqüências de Cauchy convergem é *completo*.

Uma seqüência de Cauchy em \mathbb{C} é da forma $\{x_n + y_n i\}$, onde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são seqüências de Cauchy em \mathbb{R} . Sendo \mathbb{R} um espaço métrico completo, ambas convergem, donde a seqüência em \mathbb{C} também converge e, por conseguinte, \mathbb{C} é um espaço métrico completo.

É interessante observar que, se d é a métrica de \mathbb{C}_∞ , e se $\{z_n\}$ é uma seqüência em \mathbb{C} , então $d(z_n, z) \rightarrow 0$ se, e somente se, $|z_n - z| \rightarrow 0$. Apesar disto, toda seqüência $\{z_n\}$ que satisfaça $\lim |z_n| = \infty$ é de Cauchy em \mathbb{C}_∞ , mesmo que, obviamente, não seja de Cauchy em \mathbb{C} .

Definição 3.27. Se A é um subconjunto de um espaço métrico (X, d) , então o *diâmetro* de A é definido como

$$\text{diam } A = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Lema 3.28. Se A é um subconjunto de um espaço métrico (X, d) , então

$$\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}.$$

Demonstração. Como $\overline{A} \supset A$, fica claro que $\text{diam } \overline{A} \geq \text{diam } A$. Para obter a desigualdade contrária, considere p e q pontos de \overline{A} . Dado $\varepsilon > 0$, como $\overline{A} = A \cup A'$, existem $p', q' \in A$

tais que $d(p, p') < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(q, q') < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) \\ &< d(p', q') + \varepsilon \\ &\leq \text{diam } A + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da definição de diâmetro, a desigualdade acima implica em $\text{diam } \overline{A} \leq \text{diam } A + \varepsilon$. Como ε é arbitrário, o resultado está provado. \square

Teorema 3.29. *Um espaço métrico (X, d) é completo se, e somente se, dada uma sequência $\{F_n\}$ de conjuntos fechados não vazios que satisfaçam:*

- (i) $F_1 \supset F_2 \supset \dots$;
- (ii) $\text{diam } F_n \rightarrow 0$,

valer

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = x_0,$$

isto é, a interseção de todos os elementos da sequência é constituída por um único ponto.

Demonstração. Suponha (X, d) um espaço métrico completo e considere $\{F_n\}$ uma sequência de fechados não vazios que satisfaçam (i) e (ii). Para cada n , seja x_n um ponto arbitrário de F_n . Observe que a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy. De fato, como $\text{diam } F_n \rightarrow 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam } F_N < \varepsilon$, isto é, para $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Sendo X completo, essa sequência converge a x_0 . Como $x_n \in F_N$ para todo $n \geq N$, e como são conjuntos fechados, tem-se $x_0 \in F_N$ para todo N , donde $x_0 \in F$. Para ver que este é o único ponto de F , suponha y um outro ponto de F . Note que, por y pertencer a F_n para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(x_0, y) \leq \text{diam } F_n \rightarrow 0$, isto é, $d(x_0, y) = 0$, donde $x_0 = y$.

Suponha agora que a condição do enunciado é válida. Considere $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em X e defina $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. A partir destes conjuntos, defina os conjuntos fechados $F_n = \overline{A_n}$. Observe que $F_1 \supset F_2 \supset \dots$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq N$ tenha-se $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Fica claro então, pelo Lema 3.28, que $\text{diam } F_n = \text{diam } A_n < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Conclui-se que $\text{diam } F_n \rightarrow 0$. Por hipótese, existe um único ponto x_0 que mora na interseção de todos estes conjuntos. Além disso, como x_n mora em F_n , vale $d(x_n, x_0) \leq \text{diam } F_n \rightarrow 0$. Portanto, $\lim x_n = x_0$. \square

Teorema 3.30. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e suponha $Y \subset X$. Então (Y, d) é um espaço métrico completo se, e somente se, Y é fechado em X .*

Demonstração. Suponha que (Y, d) é um espaço métrico completo. O objetivo é mostrar que ele contém todos os seus pontos de acumulação. Seja x um ponto de acumulação de Y . Então existe uma sequência $\{x_n\}$ de elementos distintos em Y que converge a x . Sendo

uma sequência convergente, esta é de Cauchy. Como Y é completo, existe um limite y em Y . Visto que o limite é único, deve-se ter $x = y \in Y$.

Suponha agora que Y é fechado em X e tome $\{y_n\}$ uma sequência de Cauchy em Y . Vista em X , esta deve ser uma sequência que converge; entretanto, como Y é fechado, o limite desta sequência deve pertencer a Y . Logo, (Y, d) é completo. \square

6 Compacidade

O conceito de compacidade abrange inúmeras áreas da Matemática, com aplicações importantíssimas na Topologia, Análise ou Geometria.

Definição 3.31. Seja K um subconjunto de um espaço métrico X e \mathcal{G} uma coleção de subconjuntos de X . Se \mathcal{G} satisfaz

$$K \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G,$$

a coleção \mathcal{G} é dita uma *cobertura* de K . Se todos os elementos de \mathcal{G} são abertos então \mathcal{G} é uma *cobertura aberta*.

O conjunto K é dito *compacto* se toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita; isto é, se \mathcal{G} é uma cobertura aberta de K , então existem $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

O seguinte teorema não será demonstrado. Sua prova pode ser encontrada em [2], página 20.

Teorema 3.32. *Seja K um subconjunto compacto de X . Então*

- (a) K é fechado;
- (b) Se F é fechado e $F \subset K$, então F é compacto.

Definição 3.33. Seja \mathcal{F} uma coleção de conjuntos de um espaço métrico X . \mathcal{F} tem a *propriedade da interseção finita* (p.i.f.) se a interseção

$$\bigcap_{i=1}^n F_i$$

é não vazia sempre que F_1, \dots, F_n são elementos de \mathcal{F} .

Exemplo 3.34. Considere $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e a coleção enumerável \mathcal{G} constituída pelos conjuntos

$$G_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - \frac{1}{n} \right\}.$$

Observe que a coleção $\{D - G_2, D - G_3, \dots\}$ possui a p.i.f. e, além disso, que \mathcal{G} é uma cobertura aberta de D . Entretanto, como não existe subcobertura finita de \mathcal{G} que cobre D , este conjunto não é compacto. Outra maneira de observar isto, é que D não é um conjunto fechado em \mathbb{C} , donde não pode ser compacto.

Teorema 3.35. *Um conjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, toda coleção \mathcal{F} de subconjuntos fechados de K que possui a p.i.f. é tal que*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponha que K é compacto e seja \mathcal{F} uma coleção de fechados de K com a f.i.p. Assuma que a interseção de todos os elementos de \mathcal{F} é vazia e defina $\mathcal{G} = \{F^c \mid F \in \mathcal{F}\}$. Então

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \right)^c = X.$$

Assim, \mathcal{G} é uma cobertura aberta de K . Sendo compacto, existem F_1, \dots, F_n elementos de \mathcal{F} tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n F_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right)^c.$$

Isto mostra que $\bigcap_{i=1}^n F_i \subset K^c$. Como cada F_i mora em K , deve-se ter $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, o que contradiz a p.i.f.

Para a recíproca, suponha que K não seja compacto e que toda coleção de fechados em K que possui a p.i.f. tenha ao menos um ponto comum a todos os seus elementos. Por definição, existe \mathcal{G} uma cobertura aberta de K que não admite subcobertura finita. Defina

$$\mathcal{F} = \{G^c \cap K \mid G \in \mathcal{G}\}.$$

Observe que \mathcal{F} tem a p.i.f., pois, se não tivesse, existiriam G_1, \dots, G_n em \mathcal{G} que cobririam K . Entretanto, a interseção de todos os elementos de \mathcal{F} é vazia (pelo fato de \mathcal{G} cobrir K), contradizendo a hipótese. □

Corolário. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior e o Teorema 3.29. □

Um outro corolário de fácil demonstração é que, se K é um conjunto compacto, então todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação em K . A prova consiste em considerar um subconjunto infinito de K e supor, por absurdo, que este subconjunto não possua pontos de acumulação. Definindo $\{a_n\}$ como uma sequência de pontos distintos desse subconjunto, os conjuntos $F_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ são fechados (pois não possuem pontos de acumulação). Cada F_n possui a p.i.f., enquanto $\bigcap F_n$ é vazio, uma contradição.

Definição 3.36. Um espaço métrico (X, d) é *sequencialmente compacto* se toda sequência em X possui uma subsequência convergente.

Teorema 3.37. Se (X, d) é *sequencialmente compacto* e \mathcal{G} é uma cobertura aberta de X então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$, é possível encontrar $G \in \mathcal{G}$ com $B(x; \varepsilon) \subset G$.

Este teorema é conhecido como *Lema do número de Lebesgue*; o número ε atrelado à cobertura \mathcal{G} é denominado *número de Lebesgue* de \mathcal{G} .

Demonstração. Suponha que \mathcal{G} é uma cobertura aberta de X que não admite tal $\varepsilon > 0$. Em particular, para cada n natural existe um ponto x_n em X tal que $B(x_n; \frac{1}{n})$ não está contida em nenhum elemento de \mathcal{G} . Como X é sequencialmente compacto, existe $x_0 \in X$ e uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0.$$

Tome $G_0 \in \mathcal{G}$ tal que $x_0 \in G_0$. Sendo aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0; \varepsilon) \subset G_0$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_k \geq N$ valha $d(x_0, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixe n_k maior que $\max\{\frac{2}{\varepsilon}, N\}$. Dado $y \in B(x_{n_k}; \frac{1}{n_k})$, tem-se

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_k} < \varepsilon,$$

ou seja, $B(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}) \subset B(x_0; \varepsilon) \subset G_0$, contradizendo a escolha de x_{n_k} . □

A demonstração do dois teoremas que seguem será omitida. Elas podem ser encontradas em [2], páginas 22 e 23.

Teorema 3.38. Seja (X, d) um espaço métrico. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é compacto;
- (b) Todo conjunto infinito de X tem um ponto de acumulação;
- (c) X é sequencialmente compacto;
- (d) X é completo e para todo $\varepsilon > 0$ existe um número finito de pontos x_1, \dots, x_n em X tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon).$$

Um conjunto que possui a propriedade (d) acima é dito *totalmente limitado*.

Teorema 3.39. Um subconjunto K de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

O teorema acima é conhecido como *Teorema de Heine-Borel*.

7 Continuidade

O conceito de continuidade de uma função é facilmente generalizado para espaços métricos em geral. Devido à natureza conhecida desta propriedade, muitas demonstrações serão omitidas nesta seção.

Definição 3.40. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação. Diz-se que y é o *limite* de $f(x)$ quando x tende a a se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < d_X(x, a) < \delta$ então $d_Y(f(x), y) < \varepsilon$. Em símbolos, $f(x) \rightarrow y$ quando $x \rightarrow a$, ou

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y.$$

A aplicação f é dita *contínua* em a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Também, f é *contínua em X* se f é contínua em todo ponto de X .

Teorema 3.41. *Sejam $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ uma aplicação, a um ponto de X e $y = f(a)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) f é contínua em a ;
- (b) Para todo $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B(y; \varepsilon))$ contém uma bola centrada em a ;
- (c) $y = \lim f(x_n)$ para toda sequência $\{x_n\}$ com $\lim x_n = a$.

Demonstração. Suponha primeiro que f seja contínua em a . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon$ sempre que $0 < d_X(a, x) < \delta$. Ora, se $x \in B(a; \delta)$, então $f(x) \in B(y; \varepsilon)$, ou seja, $f^{-1}(B(y; \varepsilon)) \supset B(a; \delta)$. Para a recíproca, suponha que para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $f^{-1}(B(y; \varepsilon))$ contenha uma bola centrada em a . Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que $f^{-1}(B(y; \varepsilon)) \supset B(a; \delta)$, isto é, se $0 < d_X(a, x) < \delta$ então $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon$, que é a definição de continuidade em a .

Para mostrar que (a) implica em (c), considere $\{x_n\}$ uma sequência tal que $\lim x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < d_X(a, x) < \delta$ implica em $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon$. Se $N \in \mathbb{N}$ é tal que $x_n \in B(a; \delta)$ para todo $n \geq N$, então $d_Y(y, f(x_n)) < \varepsilon$, isto é, $f(x_n) \rightarrow y$. Reciprocamente, suponha que (a) não seja válido. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x_δ satisfazendo $0 < d_X(a, x_\delta) < \delta$ mas que $d_Y(y, f(x_\delta)) \geq \varepsilon$. Assim, para cada n é possível encontrar um x_n com $0 < d_X(a, x_n) < \frac{1}{n}$ e $d_Y(y, f(x_n)) \geq \varepsilon$. Logo, $\{x_n\}$ é uma sequência que converge a a mas que $f(x_n) \not\rightarrow y$. \square

De agora em diante os teoremas e conceitos serão concernentes a aplicações contínuas em conjuntos, e não apenas em alguns pontos.

Teorema 3.42. *Seja $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ uma aplicação entre espaços métricos. A aplicação f é contínua se, e somente se, para G aberto de Y , o conjunto $f^{-1}(G)$ é aberto em X .*

Demonstração. Suponha f contínua, seja G um aberto de Y e tome $x \in f^{-1}(G)$. Claramente $y = f(x)$ pertence a G . Por definição, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y; \varepsilon) \subset G$. Sendo f contínua, o item (b) do teorema anterior assegura a existência de $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset f^{-1}(B(y; \varepsilon)) \subset f^{-1}(G)$, mostrando que $f^{-1}(G)$ é aberto.

Para a recíproca, dado $\varepsilon > 0$, tome $x \in X$ e considere $G = B(f(x); \varepsilon)$. Como G é aberto, por hipótese $f^{-1}(G)$ é aberto em X e contém x . Assim, existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset f^{-1}(G)$. Isto equivale ao item (b) do teorema anterior que, por sua vez, é equivalente a f ser contínua em x . Sendo arbitrário, conclui-se que f é contínua em X . \square

O teorema acima se mantém verdadeiro quando troca-se “aberto” por “fechado”.

Teorema 3.43. *Sejam f e g funções contínuas de X a \mathbb{C} e α e β dois números complexos fixos. Então $\alpha f + \beta g$ e fg são ambas contínuas. Também, a função $\frac{f}{g}$ é contínua se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.*

Teorema 3.44. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ duas aplicações contínuas. Então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é uma aplicação contínua.*

Definição 3.45. Uma aplicação $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é *uniformemente contínua* se, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $d_X(x, y) < \delta$ então $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Diz-se que f é uma *função Lipschitz* se existe uma constante $L > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ para todo $x, y \in X$. O número L é chamado de *constante de Lipschitz* de f .

Exemplos 3.46. Toda função Lipschitz é uniformemente contínua (dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$) e toda aplicação uniformemente contínua é contínua. Entretanto, a volta não é válida:

- (1) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua, mas não é uniformemente contínua. Para ver isto, tome $\varepsilon = 1$. Assim,

$$\left| f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{4|x|}{n}.$$

Logo, para todo $\delta > 0$ é possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n} < \delta$ e, para este, basta escolher x com $|x| \geq n$, pois assim a bola $B(x; \delta) \supset B(x; \frac{1}{n})$ é tal que existem valores x e y com $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

- (2) A função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua mas não é Lipschitz. Se fosse, existiria $L > 0$ tal que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$. Se $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$, então isso significa que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{L}{n}, \text{ isto é, } \sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} \leq L,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é claramente falso, pois $\sqrt{n} \rightarrow \infty$.

O seguinte teorema tem extrema importância.

Teorema 3.47. *Seja $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ uma aplicação contínua.*

- (a) *Se X é compacto, então $f(X)$ é um subconjunto compacto de Y ;*
- (b) *Se X é conexo, então $f(X)$ é um subconjunto conexo de Y .*

Demonstração. Na demonstração de ambos os itens, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $f(X) = Y$.

- (a) Seja $\{y_n\}$ uma sequência em Y . Para cada elemento desta sequência, existe um ponto $x_n \in X$ tal que $y_n = f(x_n)$. Como $\{x_n\}$ é uma sequência num conjunto compacto, é possível extrair desta uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Como f é contínua, vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Logo, $\{y_{n_k}\}$ é uma subsequência convergente de $\{y_n\}$, isto é, Y é sequencialmente compacto (que é equivalente a ser compacto).

- (b) Seja Z um subconjunto não vazio de Y que é aberto e fechado. Visto que f é sobrejetora, não pode-se ter $f^{-1}(Z) = \emptyset$; além disso, por continuidade, $f^{-1}(Z)$ é aberto e fechado em X . Como X é conexo, deve-se ter $f^{-1}(Z) = X$, donde $Z = Y$ e Y é conexo. □

Corolário.

- (a) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo, então $f(X)$ é um intervalo;*
- (b) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $c \in \mathbb{R}$ é tal que $f(a) \leq c \leq f(b)$, então existe um ponto $c \in [a, b]$ com $f(c) = c$;*
- (c) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $K \subset X$ é compacto então existem pontos x_0 e y_0 em K com*

$$f(x_0) = \sup_{x \in K} f(x), \quad f(y_0) = \inf_{x \in K} f(x);$$

- (d) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e $K \subset X$ é compacto então existem pontos x_0 e y_0 em K com*

$$|f(x_0)| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad |f(y_0)| = \inf_{x \in K} |f(x)|.$$

O seguinte teorema é de veras importante e será utilizado no decorrer do texto sem citações específicas.

Teorema 3.48. *Suponha $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto (X, d_X) em um espaço métrico (Y, d_Y) . Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, suponha que não exista $\delta > 0$ que satisfaça a condição de continuidade uniforme. Assim, para cada n natural existe um par de pontos x_n e y_n tais que $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ mas $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Como X é compacto, existe uma subsequência convergente $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$. Suponha $\lim x_{n_k} = x$. Observe agora que

$$d_X(x_0, y_{n_k}) \leq d_X(x_0, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k}, y_{n_k}) < d_X(x_0, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \rightarrow 0,$$

isto é, $y_{n_k} \rightarrow x_0$. Entretanto, se $y_0 = f(x_0)$, tem-se

$$y_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}),$$

donde

$$\varepsilon \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_Y(f(x_{n_k}), y_0) + d_Y(y_0, f(y_{n_k})).$$

O lado direito da inequação acima tende a 0 quando k tende ao ∞ , uma contradição. \square

8 Convergência uniforme

Esta é uma seção curta que resume os resultados principais de convergência uniforme.

Definição 3.49. Sejam X um conjunto e (Y, d_Y) um espaço métrico. Considere $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de X em Y . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é o *limite uniforme* da seqüência em questão se, dado $\varepsilon > 0$, existir um inteiro $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Em outras palavras, se $n \geq N$, vale

$$\sup_{x \in X} d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

Também diz-se que a seqüência $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a f .

Teorema 3.50. *Suponha $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas de (X, d_X) em (Y, d_Y) e suponha que a seqüência convirja uniformemente para f . Então f é contínua.*

Demonstração. Fixe x_0 em X . Dado $\varepsilon > 0$, como f é o limite uniforme da seqüência em questão, existe uma função f_n com

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.5}$$

para todo $x \in X$. Da continuidade de f_n , existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.6}$$

se $d_X(x_0, x) < \delta$. Assim, se $d_X(x_0, x) < \delta$, por (3.5) e (3.6), tem-se

$$d_Y(f(x_0), f(x)) \leq d_Y(f(x_0), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

isto é, f é contínua em x_0 . Sendo ε arbitrário, f é contínua em X . \square

A próxima definição e o teorema que a sucede são muito importantes e terão um papel essencial no próximo capítulo.

Definição 3.51. Considere $\{u_n\}$ uma sequência de funções de um espaço métrico X em \mathbb{C} . A partir desta, defina uma sequência $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x).$$

Se $\lim f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$, escreve-se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

A série $\sum u_n$ é uniformemente convergente a f se a função f é o limite uniforme da sequência $\{f_n\}$.

Teorema 3.52. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções de um conjunto X em \mathbb{C} . Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista uma constante não negativa $M_n \in \mathbb{R}$ tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Se essas constantes satisfazem $\sum M_n < \infty$, então $\sum u_n$ é uniformemente convergente.

Este teorema é conhecido como *teste M de Weierstrass*.

Demonstração. Para $n > m$ tem-se

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |u_{m+1}(x) + \cdots + u_n(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k,$$

para cada $x \in X$. Como $\sum M_n$ converge, $\{f_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{C} . Assim, existe $z \in \mathbb{C}$ com $\lim f_n(x) = z$. Defina uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) = z$. Com isso,

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Agora, como $\sum M_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$ vale

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Portanto, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ se $n \geq N$, o que é equivalente a convergência uniforme. \square

Capítulo 4

Séries de potências e funções analíticas

Em primeiro momento, o estudo do plano complexo pode parecer apenas uma repetição do que é feito em \mathbb{R} ou, mais especificamente, em \mathbb{R}^2 . Entretanto, há alguns pontos que mostram uma divergência enorme entre o estudo destes objetos. Neste capítulo, alguns destes pontos serão vistos, como a diferenciabilidade no sentido complexo e o tratamento de funções como séries de potências.

1 Séries de potências

Apesar de simples, as demonstrações dos teoremas desta seção serão omitidas.

Definição 4.1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência em \mathbb{C} . A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a $z \in \mathbb{C}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq N$ então

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n - z \right| < \varepsilon.$$

A série $\sum a_n$ converge absolutamente se $\sum |a_n|$ converge.

Teorema 4.2. Se uma série $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n$ converge.

Demonstração. Denote por s_n a n -ésima soma parcial da série em questão e por S_n a soma parcial dos módulos. Então, como $\{S_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{C} , dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq m \geq N$ vale

$$|s_k - s_m| = \left| \sum_{n=k}^m a_n \right| \leq \sum_{n=k}^m |a_n| = |S_k - S_m| < \varepsilon.$$

Assim, $\{s_n\}$ também é uma sequência de Cauchy em \mathbb{C} , donde converge. □

A seguinte definição é bem trabalhada quando apresentada pela primeira vez no contexto de Análise Real. Entretanto, visto que esta é apenas uma recordação, não serão trabalhados seus detalhes, como a existência e interpretação.

Definição 4.3. Suponha $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. O *limite superior* e o *limite inferior* de $\{a_n\}$ são definidos, respectivamente, como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\});$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}).$$

Os limites superior e inferior de uma sequência real *sempre* existem, mesmo que o resultado seja $\pm\infty$.

Definição 4.4. Uma *série de potências* ao redor de a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n.$$

Exemplo 4.5. Um dos exemplos mais comuns de série de potências é a *série geométrica*, dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Esta série é tal que se $|z| < 1$, ela converge; se $|z| > 1$ ela diverge. Ela é muito útil para comparações e para dar uma ideia de como séries de potências se comportam em geral.

As demonstrações dos quatro teoremas que seguem podem ser encontradas em [2], páginas 31, 32 e 33.

Teorema 4.6. Dada uma série de potências $\sum a_n(z - a)^n$, defina $R = \alpha^{-1}$, onde $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) Se $|z - a| < R$, então a série converge absolutamente;

(b) Se $|z - a| > R$, a série diverge;

(c) Se $0 < r < R$, então a série converge uniformemente em $I = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$.

O número R é o único que possui as propriedades (a) e (b).

O número R é conhecido como *raio de convergência* da série em questão. Observe que se $\alpha = 0$, então $R = +\infty$; e se $\alpha = +\infty$, então $R = 0$.

Teorema 4.7. Se $\sum a_n(z - a)^n$ é uma série de potências com raio de convergência R , então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

se esse limite existe.

Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pelo teorema anterior, esta série tem raio de convergência $R = \infty$. Portanto, ela converge para todo $z \in \mathbb{C}$ e a convergência é uniforme em todo subconjunto compacto do plano complexo. Essa série é denotada por

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

e chamada *série exponencial* ou *função exponencial*.

Para finalizar esta seção, dois teoremas que ajudam a trabalhar com séries infinitas.

Teorema 4.8. *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries absolutamente convergentes e defina*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Então $\sum c_n$ converge absolutamente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Teorema 4.9. *Sejam $\sum a_n(z-a)^n$ e $\sum b_n(z-a)^n$ duas séries de potências com raio de convergência R_1 e R_2 , respectivamente, onde $\min\{R_1, R_2\} \geq r > 0$. Defina*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Então ambas as séries $\sum (a_n + b_n)(z-a)^n$ e $\sum c_n(z-a)^n$ têm raio de convergência maior ou igual a r e, para $|z-a| < r$, vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right).$$

2 Propriedades básicas de funções analíticas

Esta seção contém os pontos essenciais deste capítulo. Aqui os conceitos de diferenciabilidade no plano complexo e de funções analíticas serão trabalhados, assim como exemplos e exercícios.

Definição 4.10. Sejam G um aberto de \mathbb{C} e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. A função f é dita *diferenciável no ponto a* em G se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe. O valor deste limite é denotado por $f'(a)$ e denominado *derivada* de f em a . Se f é diferenciável em todo ponto de G , diz-se que f é *diferenciável em G* . Se a função for diferenciável em G , é possível definir $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$. Caso f' seja contínua, diz-se que f é de *classe C^1* . Se f' é diferenciável, então f é *duas vezes diferenciável*. Uma função diferenciável que cada derivada sucessiva é de novo diferenciável é dita *infinitamente diferenciável* ou de *classe C^∞* .

Visto que muitos tópicos de analiticidade dependem de conjuntos abertos, muitas vezes conexos, o seguinte termo torna-se muito útil neste capítulo (e economiza algumas palavras).

Definição 4.11. Uma *região* é um aberto conexo do plano complexo.

Para facilitar a escrita, todas as funções a partir daqui terão como contradomínio o plano complexo (a não ser que o contrário seja dito).

Definição 4.12. Uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é *analítica* se é de classe C^1 em G .

É fácil ver que, ao operar funções analíticas, a função resultante também é uma função analítica (com atenção especial ao quociente). Também, as regras usuais de diferenciação de operações entre funções se mantêm válidas, assim como a *Regra da Cadeia*:

Teorema 4.13. *Sejam f e g funções analíticas em G_1 e G_2 , respectivamente, e suponha $f(G_1) \subset G_2$. Então $g \circ f$ é analítica em G e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

para todo $z \in G$.

Demonstração. Fixe $z \in G$ e escolha um número $r > 0$ tal que $B(z; r) \subset G$. Pelo Teorema 3.41 basta demonstrar que se $\{h_n\}$ é uma sequência com $0 < |h_n| < r$ e $\lim h_n = 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(z+h_n)) - g(f(z))}{h_n}$$

existe e é igual a $g'(f(z))f'(z)$.

Primeiramente, suponha que $f(z) \neq f(z+h_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, como f é contínua em z ($f(z+h_n) \rightarrow f(z)$ quando $n \rightarrow \infty$), vale

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(z+h_n) - (g \circ f)(z)}{h_n} &= \frac{g(f(z+h_n)) - g(f(z))}{f(z+h_n) - f(z)} \frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n} \\ &\rightarrow g'(f(z))f'(z) \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Caso tenha-se $f(z) = f(z + h_n)$ para infinitos valores de n , basta separar a sequência $\{h_n\}$ em duas sequências $\{h_n^\varnothing\}$ e $\{h_n^o\}$, onde $f(z + h_n^\varnothing) \neq f(z)$ e $f(z + h_n^o) = f(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f é diferenciável,

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z + h_n^o) - f(z)}{h_n^o} = 0.$$

Também,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(g \circ f)(z + h_n^o) - (g \circ f)(z)}{h_n^o} = 0.$$

Pelo caso anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(g \circ f)(z + h_n^\varnothing) - (g \circ f)(z)}{h_n^\varnothing} = g'(f(z))f'(z) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(g \circ f)(z + h_n) - (g \circ f)(z)}{h_n} = 0 = g'(f(z))f'(z).$$

□

Ao definir a derivada de uma função, um conjunto aberto é necessário. Dizer que f é diferenciável num conjunto A , em que A não é aberto, significa que f é diferenciável num aberto que contém tal conjunto.

Lema 4.14. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências reais positivas com $0 < \lim b_n = b < \infty$ e $\limsup a_n = a$. Então $\limsup a_n b_n = ab$.*

Demonstração. Há dois casos para se considerar; em ambos, $\{a_{n_k}\}$ é a subsequência de $\{a_n\}$ que converge a a e $c_n = a_n b_n$.

Suponha, primeiro, que $a = \infty$. Neste caso, $ab = \infty$ (b é positivo) e $\{c_{n_k}\}$ é uma subsequência de $\{c_n\}$ que vai a infinito. Assim, fica claro que $\limsup c_n = \infty = ab$.

Suponha, agora, que $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Visto que são sequências reais positivas, a subsequência do produto de maior valor absoluto é aquela que converge a ab , se ela existir. De fato, ela existe e é dada por $\{c_{n_k}\}$. Para ver isto, observe que $|a_{n_k}| < M \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e que, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq K$, valem

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2(b+1)} \text{ e } |b_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

Daí, se $k \geq K$, tem-se

$$\begin{aligned} |a_{n_k} b_{n_k} - ab| &= |a_{n_k} b_{n_k} - a_{n_k} b + a_{n_k} b - ab| \\ &\leq |a_{n_k}| |b_{n_k} - b| + b |a_{n_k} - a| \\ &< \frac{M}{2(M+1)} \varepsilon + \frac{b}{2(b+1)} \varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$. □

O seguinte teorema afirma que funções definidas por séries de potências são analíticas.

Teorema 4.15. *Considere $f(z) = \sum a_n (z - a)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$.*

(a) *Para cada $k \geq 1$ a série*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-a)^{n-k} \tag{4.1}$$

tem raio de convergência R ;

(b) *A função f é de classe C^∞ em $B(a; R)$ e $f^{(k)}(z)$ é dada pela série (4.1) para todo $k \geq 1$ e $|z - a| < R$;*

(c) *Para $n \geq 0$ vale*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Demonstração. Assuma $a = 0$.

(a) Observe que, ao provar para $k = 1$, todos os casos estarão demonstrados. Pois, por exemplo, para $k = 2$, basta aplicar (a) novamente com $k = 1$ para a série $\sum n a_n (z - a)^{n-1}$. Por hipótese, $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = R^{-1}$. O objetivo é mostrar que $R^{-1} = \limsup |n a_n|^{\frac{1}{n-1}}$. Pela regra de l'Hôpital é possível analisar o limite $\lim n^{\frac{1}{n-1}}$ e concluir que ele vale 1. Basta agora analisar $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}}$.

Seja $L^{-1} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}}$. Então L é o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Note que $z \sum a_{n+1} z^n + a_0 = \sum a_n z^n$, donde se $|z| < L$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = |a_0| + |z| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^n| < \infty.$$

Isto mostra que $L \leq R$. Se $|z| < R$ e $z \neq 0$, tem-se $\sum |a_n z^n| < \infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} z^n| = \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| - \frac{1}{|z|} |a_0| < \infty,$$

o que implica em $L \geq R$. Logo $L = R$ e a demonstração está completa.

(b) Para $|z| < R$ defina

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Fixe um ponto $w \in B(0; R)$ e fixe ω com $|w| < \omega < R$. Seja $\delta > 0$ um número arbitrário, mas pequeno o suficiente para que seja válida a inclusão $\overline{B}(w; \delta) \subset B(0; \omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) &= \left(\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right) + (s'_n(w) - g(w)) \\ &\quad + \left(\frac{r_n(z) - r_n(w)}{z - w} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Agora,

$$\frac{r_n(z) - r_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(\frac{z^k - w^k}{z - w} \right);$$

e

$$\frac{|z^k - w^k|}{|z - w|} = |z^{k-1} + z^{k-2}w + \dots + zw^{k-2} + w^{k-1}| \leq k\omega^{k-1},$$

donde

$$\left| \frac{r_n(w) - r_n(z)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k\omega^{k-1}.$$

Como $\omega < R$, a série no membro direito da inequação acima é convergente e, por conseguinte, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_1$ vale

$$\left| \frac{r_n(z) - r_n(w)}{z - w} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (z \in B(w; \delta)). \quad (4.3)$$

Sabendo que $\lim s'_n(w) = g(w)$, é possível encontrar $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N_2$,

$$|s'_n(w) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.4)$$

Defina $N = \max\{N_1, N_2\}$; assim, fixando $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq N$, é possível escolher $\delta > 0$ (possivelmente menor ou igual ao δ considerado anteriormente) tal que, para $0 < |z - w| < \delta$, tenha-se

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.5)$$

Por (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), para $0 < |z - w| < \delta$ vale

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, $f'(w) = g(w)$.

(c) Fazendo uma simples substituição de valores é possível obter $f(0) = f^{(0)}(0) = a_0$. Usando (4.1) (com $a = 0$), vem $f^{(k)}(0) = k!a_k$, que é o desejado. \square

Corolário. Se a série $\sum a_n(z - a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então $f(z) = \sum a_n(z - a)^n$ é uma função analítica em $B(a; R)$.

Assim, a função exponencial é analítica em \mathbb{C} , pois seu raio de convergência é infinito.

Teorema 4.16. Se G é uma região e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é diferenciável com $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$, então f é constante.

Demonstração. Fixe z_0 em G , seja $c = f(z_0)$ e defina $A = \{z \in G \mid f(z) = c\}$.

Seja z um elemento de G que é limite de uma sequência $\{z_n\}$ de elementos de A . Como $f(z_n) = c$ para todo $n \geq 1$, da continuidade de f conclui-se que $f(z) = c$, isto é, que z pertence a A e A é fechado em G .

Dado $a \in A$, escolha $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset G$. Para $z \in B(a; r)$ defina $g(t) = f(tz + (1 - t)a)$, $0 \leq t \leq 1$. Assim,

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} = \frac{f(tz + (1 - t)a) - f(sz + (1 - s)a)}{(tz + (1 - t)a) - (sz + (1 - s)a)} \frac{(t - s)z + (s - t)a}{t - s}.$$

Donde, fazendo $t \rightarrow s$, obtém-se

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{g(t) - g(s)}{t - s} = f'(sz + (1 - s)a)(z - a) = 0.$$

Isto é, $g'(t) = 0$ para $t \in [0, 1]$, o que implica que g é constante. Portanto, $f(z) = g(1) = g(0) = f(a) = c$. Conclui-se que $B(a; r) \subset A$ e A é aberto em G . Como G é conexo e $A \neq \emptyset$, deve-se ter $A = G$. \square

Usando o Teorema 4.15 é possível derivar a função $f(z) = e^z$, obtendo

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z).$$

Ou seja, assim como a exponencial real, a exponencial complexa possui a propriedade de ser invariante por derivação, isto é,

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Fixe $a \in \mathbb{C}$ e defina $g(z) = e^z e^{a-z}$. Pelo desenvolvido acima e pela regra da cadeia, é fácil ver que $g'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$. Logo, $g(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e alguma constante $c \in \mathbb{C}$. Em particular, $e^a = g(0) = c$. Assim, $e^z e^{a-z} = e^a$ para todo $z \in \mathbb{C}$, o que implica na identidade

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Também implica que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pois $e^z e^{-z} = 1$, donde $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.

Como todos os coeficientes da série de potências que dá origem à função exponencial são reais, fica claro que $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$. Em particular, se θ é um número real, vem $|e^{\theta i}|^2 = e^{\theta i} e^{-\theta i} = 1$. Para um número complexo z arbitrário, $|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = \exp(2 \operatorname{Re} z)$. Portanto,

$$|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z).$$

Por analogia às séries de potências reais, é possível definir duas funções, representadas por $\cos z$ e $\sin z$ e chamadas *coseno* e *seno*, respectivamente. Suas séries são dadas por

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1};$$

ambas as séries têm raio de convergência infinito, donde as funções $\cos z$ e $\sin z$ são analíticas em \mathbb{C} . Usando o Teorema 4.15, vem $(\cos z)' = -\sin z$ e $(\sin z)' = \cos z$. Manipulando as séries (que é justificado pela convergência absoluta), obtém-se

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

donde, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, valem $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ e

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{4.6}$$

Em particular, ao utilizar a expressão acima para um número real θ , tem-se $e^{i\theta} = \operatorname{cis} \theta$. Retomando a teoria da Seção 1 do Capítulo 3, vem

$$z = |z| e^{i\theta},$$

onde $\theta = \arg z$. Como $e^{x+yi} = e^x e^{yi}$, a identidade acima mostra que

$$|e^z| = \exp(\operatorname{Re} z) \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z.$$

Definição 4.17. Uma função f é *periódica* com *período* c se $f(z+c) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

A exponencial real não é uma função periódica. Entretanto, a expressão (4.6) faz nascer a suspeita que o mesmo não vale para a exponencial complexa. De fato, se c é um período para a função exponencial, deve-se ter $e^z = e^{z+c} = e^z e^c$, donde $e^c = 1$. Como

$1 = |e^c| = \exp(\operatorname{Re} c)$, conclui-se que $\operatorname{Re} c = 0$, isto é, c é um número imaginário puro dado por $i\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Da expressão $1 = e^c = e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ vem que os períodos de e^z são os múltiplos de $2\pi i$. Assim, ao dividir o plano complexo em infinitas faixas limitadas pelas retas $\operatorname{Im} z = \pi(2k - 1), k \in \mathbb{Z}$, a função exponencial vai se comportar da mesma forma em cada uma destas faixas.

O próximo passo é definir uma função $f(w)$ que satisfaça $w = e^z$ quando $z = f(w)$. Como $e^z \neq 0$ para todo z , não é possível definir $f(0)$. Assim, suponha $e^z = w$ e $w \neq 0$; se $z = x + yi$, vale $|w| = e^x$ e $y = \arg w + 2k\pi$, para algum k inteiro. Portanto,

$$L_w = \{\log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

é o conjunto solução para $e^z = w$. Tendo em vista isto, é natural denotar $f(w) = \log w$ (na definição do conjunto L_w , a função \log é o logaritmo real conhecido).

Definição 4.18. Se G é uma região e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que $z = \exp f(z)$ para todo $z \in G$, então f é um *ramo do logaritmo*.

Observe que se G é o domínio de algum ramo do logaritmo, G não contém o 0.

Teorema 4.19. Se G é uma região e f é um ramo do logaritmo em G , então a totalidade de ramos do logaritmo são as funções $g(z) = f(z) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponha f um ramo do logaritmo na região G e k um inteiro. Defina $g(z) = f(z) + 2k\pi i$. Então $\exp g(z) = \exp f(z) = z$, donde g também é um ramo do logaritmo. Reciprocamente, se f e g são ambas ramos do logaritmo, então para cada z em G tem-se $f(z) = g(z) + 2k\pi i$, para algum inteiro k , onde k depende de z . Entretanto, ao definir

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)),$$

tem-se h uma função contínua cujo domínio é conexo. Logo, $h(G)$, que é um subconjunto de \mathbb{Z} , é conexo, donde h é constante, $h(z) = k \in \mathbb{Z}$, para todo $z \in G$ e $f(z) + 2k\pi i = g(z)$ para todo $z \in G$. □

Teorema 4.20. Sejam G_1 e G_2 abertos de \mathbb{C} . Suponha que $f : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ são funções contínuas tais que $f(G_1) \subset G_2$ e $g(f(z)) = z$ para todo $z \in G_1$. Se g é diferenciável e $g'(z) \neq 0$, então f é diferenciável e sua derivada é dada por

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Se g é analítica, então f é analítica.

Demonstração. Fixe $a \in G_1$ e seja h um número complexo diferente de zero tal que $a + h$ pertence a G_1 . Como $g(f(a)) = a$ e $g(f(a+h)) = a+h$, tem-se $f(a) \neq f(a+h)$. Também,

$$1 = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Visto que o limite quando $h \rightarrow 0$ do membro esquerdo existe (e vale, obviamente, 1), o limite à direita existe. Do fato de que $(f(a+h) - f(a)) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, obtém-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Portanto, como $g'(f(a)) \neq 0$, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe e $1 = g'(f(a))f'(a)$.

Por fim, se g é analítica, g' é contínua, donde f' também o é. □

Corolário. *Um ramo do logaritmo é analítico e sua derivada é z^{-1} .*

Exemplo 4.21. Considere o conjunto $G = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$. Não é difícil ver que G é uma região do plano. Também, cada z em G pode ser unicamente representado por $z = |z|e^{i\theta}$, onde $-\pi < \theta < \pi$. Para θ neste intervalo, defina $f(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$. Basta provar que esta função é contínua e ela será um ramo do logaritmo em G .

Sejam $\{z_n\}$ uma sequência em G e z um ponto de G tal que $z_n \rightarrow z$, onde $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ e $z = r e^{i\theta}$. Observe que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ vale

$$\varepsilon > |z_n - z| \geq ||z_n| - |z|| = |r_n - r|,$$

donde $r_n \rightarrow r$. Visto que $\{r_n\}$ e $\{r_n e^{i\theta_n}\}$ convergem, também converge a sequência $\{e^{i\theta_n}\}$, e converge para $e^{i\theta}$. Como a função $g(\theta) = e^{i\theta}$ é injetora para $-\pi < \theta < \pi$, deve-se ter $\theta_n \rightarrow \theta$. Conclui-se que

$$f(z_n) = f(r_n e^{i\theta_n}) = \log r_n + i\theta_n \rightarrow \log r + i\theta = f(re^{i\theta}) = f(z),$$

isto é, f é contínua.

Este ramo do logaritmo definido sobre a região G definida acima é denominado *ramo principal do logaritmo*. Ao escrever $\log z$ como uma função, o objetivo é se referir a este ramo, a não ser que o contrário seja dito.

Para f um ramo do logaritmo sobre uma região G e b é um número complexo fixo, defina $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = \exp(bf(z))$. Se b é um inteiro, então $g(z) = z^b$. Desta maneira define-se um ramo de z^b , com $b \in \mathbb{C}$, sobre uma região em que há um ramo do logaritmo. Escrever $g(z) = z^b$ como uma função é sempre entendido como $z^b = \exp(b \log z)$, onde $\log z$ é o ramo principal do logaritmo. Também, z^b é uma função analítica porque o logaritmo o é.

Para finalizar esta seção, seja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e defina as funções

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi) \quad (x + yi \in G).$$

A ideia agora é calcular o limite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

de duas maneiras diferentes. Primeiro, faça h tender a 0 exclusivamente pelo eixo real do plano. Assim, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h},$$

donde, quando $h \rightarrow 0$, vem

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad (4.7)$$

(Isto prova que u e v têm derivadas parciais se f é analítica.)

Agora, fazendo h tender a 0 exclusivamente pelo eixo imaginário, para $h \neq 0$ e h real, vem

$$\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = -i \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h},$$

daí, fazendo h tender a 0,

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \quad (4.8)$$

Igualando as equações (4.7) e (4.8) obtém-se as *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Suponha que u e v possuam segundas derivadas contínuas. Diferenciando as equações de Cauchy-Riemann vem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.9)$$

Qualquer função real com segundas derivadas contínuas satisfazendo (4.9) são denominadas *harmônicas*. De maneira similar, v também é harmônica.

Teorema 4.22. *Sejam u e v funções reais definidas numa região G e suponha que u e v possuem derivadas parciais contínuas. Então $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(z) + iv(z)$ é analítica se, e somente se, u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann.*

Demonstração. Sendo analítica, a discussão anterior mostra que u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Basta provar, então, que se u e v satisfazem tais equações, a função f é analítica.

Sejam $z = x + yi \in G$ e $B(z; r) \subset G$. Se $h = s + it \in B(0; r)$, então

$$u(x + s, y + t) - u(x, y) = (u(x + s, y + t) - u(x, y + t)) + (u(x, y + t) - u(x, y)).$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para a derivada de uma função de uma variável para cada uma destas expressões entre parênteses, vem, para cada $s + it$ em $B(0; r)$, números s_1 e t_1 tais que $|s_1| < |s|$ e $|t_1| < |t|$ e

$$\begin{cases} u(x + s, y + t) - u(x, y + t) = u_x(x + s_1, y + t)s \\ u(x, y + t) - u(x, y) = u_y(x, y + t_1)t \end{cases}. \quad (4.10)$$

Definindo

$$\varphi(s, t) = (u(x + s, y + t) - u(x, y)) - (u_x(x, y) - u_y(x, t)t),$$

de (4.10) vem

$$\frac{\varphi(s, t)}{s + it} = \frac{s}{s + it}(u_x(x + s_1, y + t) - u_x(x, y)) + \frac{t}{s + it}(u_y(x, y + t_1) - u_y(x, y)).$$

As desigualdades $|s| \leq |s + it|$, $|t| \leq |s + it|$, $|s_1| < |s|$ e $|t_1| < |t|$, juntamente com o fato de que u_x e u_y são funções contínuas, implicam em

$$\lim_{s+it \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, t)}{s + it} = 0. \quad (4.11)$$

Conclui-se que

$$u(x + s, y + t) - u(x, y) = u_x(x, y)s + u_y(x, y)t + \varphi(s, t),$$

onde φ satisfaz (4.11). Semelhantemente,

$$v(x + s, y + t) - v(x, y) = v_x(x, y)s + v_y(x, y)t + \psi(s, t),$$

onde ψ satisfaz

$$\lim_{s+it \rightarrow 0} \frac{\psi(s, t)}{s + it} = 0. \quad (4.12)$$

Da hipótese de u e v satisfazerem as equações de Cauchy-Riemann, é fácil ver que

$$\frac{f(z + s + it) - f(z)}{s + it} = u_x(z) + iv_x(z) + \frac{\varphi(s, t) + i\psi(s, t)}{s + it}.$$

Pelas equações (4.11) e (4.12), f é diferenciável e $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$. Como u_x e v_x são contínuas, f' é contínua e f é analítica. \square

3 Funções analíticas e transformações de Möbius

Definição 4.23. Um *caminho* numa região $G \subset \mathbb{C}$ é uma função contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ saindo de algum intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} . Se $\gamma'(t)$ existe para todo t em $[a, b]$ e γ' é contínua, então γ é um *caminho suave*. Por fim, γ é *suave por partes* se existe uma partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que γ é suave em cada um dos subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n - 1$.

Dizer que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tem derivada em todo ponto t de $[a, b]$ significa que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t)$$

existe para $a < t < b$ e que os limites laterais à esquerda e à direita existem para $t = b$ e $t = a$, respectivamente.

Definição 4.24. Se γ_1 e γ_2 são dois caminhos suaves com $\gamma_1(t_1) = z_0$ e $\gamma_2(t_2) = z_0$ e $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ e $\gamma_2'(t_2) \neq 0$, o *ângulo entre os caminhos* γ_1 e γ_2 em z_0 é

$$\arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1).$$

Para compreender melhor a definição acima, basta lembrar que se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho suave tal que para algum t_0 em (a, b) vale $\gamma'(t_0) \neq 0$, então γ tem uma reta tangente no ponto $z_0 = \gamma(t_0)$. Essa reta passa pelo ponto z_0 e tem a direção do vetor $\gamma'(t_0)$; ou, a inclinação da reta é $\arg \gamma'(t_0)$.

Teorema 4.25. Se $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica, então f preserva ângulos em cada ponto z_0 de G nos quais $f'(z_0) \neq 0$.

Demonstração. Suponha γ um caminho suave em G e $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então $\sigma = f \circ \gamma$ é também um caminho suave e $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Defina $z_0 = \gamma(t_0)$ e suponha $\gamma'(t_0) \neq 0$; assim, $\sigma'(t_0) \neq 0$ e $\arg \sigma'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$. Isto é,

$$\arg \sigma'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) = \arg f'(z_0). \quad (4.13)$$

Sejam agora dois caminhos suaves γ_1 e γ_2 com $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, ambos com derivadas diferente de zero nestes pontos. Defina $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ e $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$. Também, suponha que $\gamma_1'(t_1)$ e $\gamma_2'(t_2)$ não são paralelos. A equação (4.13) mostra que

$$\arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1) = \arg \sigma_2'(t_2) - \arg \sigma_1'(t_1).$$

Esta equação diz que os ângulos entre as curvas são preservados tanto em direção quanto em magnitude. \square

Definição 4.26. Uma função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ que preserva ângulos e o limite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}$$

existe é chamada de *aplicação conforme*.

Se f é analítica e $f'(z) \neq 0$ para todo z , então f é conforme. A recíproca também é verdadeira.

Se $f(z) = e^z$, então f é conforme em \mathbb{C} . É interessante analisar o comportamento desta função pelo plano complexo. Se $z = c + yi$, onde c é fixo, então $f(z) = re^{yi}$, para $r = e^c$. Em outras palavras, f leva a reta $x = c$ sobre a circunferência centrada na origem de raio e^c . Também, f leva a reta $y = d$ sobre o raio infinito $\{re^{id} \mid 0 < r < \infty\}$.

Já foi demonstrado que a função exponencial é injetora sobre as faixas horizontais de altura menor do que 2π . Seja $G = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im } z < \pi\}$. Então

$$f(G) = \Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}.$$

Por fim, f leva os segmentos verticais $\{z = c + yi \mid -\pi < y < \pi\}$ sobre o círculo $\{e^c e^{i\theta} \mid -\pi < \theta < \pi\}$, e a reta horizontal $y = d$, $-\pi < d < \pi$, sobre o raio que faz um ângulo d com o eixo real positivo.

Note que $\log z$, o ramo principal do logaritmo, faz o inverso. Ele leva Ω sobre a faixa G , circunferências sobre segmentos verticais em G e raios sobre retas horizontais em G .

A próxima definição dá início a uma discussão que tem papel central nesta seção.

Definição 4.27. Uma função da forma $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é denominada *transformação linear fracionária*. Se a, b, c e d também satisfazem $ad - bc \neq 0$, então S é chamada de *transformação de Möbius*.

Se S é uma transformação de Möbius, então $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ satisfaz

$$S(S^{-1}(z)) = S^{-1}(S(z)) = z;$$

isto é, S^{-1} é a função inversa de S . Se S e T são ambas transformações lineares fracionárias então segue que $S \circ T$ também o é. Assim, o conjunto de transformações de Möbius forma um grupo sob a composição. A não ser que o contrário seja dito, as únicas transformações lineares fracionárias a serem consideradas serão transformações de Möbius.

Seja $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Para λ um número complexo não nulo vale

$$S(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)},$$

isto é, os coeficientes a, b, c e d não são únicos.

As transformações de Möbius serão estudadas também sobre \mathbb{C}_∞ , com $S(\infty) = \frac{a}{c}$ e $S(\frac{-d}{c}) = \infty$ (note que não se pode considerar o caso $a = c = 0$ ou $d = c = 0$, pois

qualquer destas situações implicaria na contradição da identidade $ad - bc \neq 0$). Como S é inversível, ela é uma bijeção de \mathbb{C}_∞ sobre \mathbb{C}_∞ .

Definição 4.28.

- (i) Se $S(z) = z + a$, então S é uma *translação*;
- (ii) Se $S(z) = az$ com $a > 0$, então S é uma *dilatação*;
- (iii) Se $S(z) = e^{i\theta}z$, então S é uma *rotação*;
- (iv) Se $S(z) = \frac{1}{z}$, então S é uma *inversão*.

Teorema 4.29. *Se S é uma transformação de Möbius, então S é a composição de translações, dilatações e da inversão (obviamente alguma destas pode estar faltando).*

Demonstração. Primeiro, suponha $c = 0$. Assim, $S(z) = \left(\frac{a}{d}\right)z + \frac{b}{d}$, donde se $S_1(z) = \left(\frac{a}{d}\right)z$ e $S_2(z) = z + \frac{b}{d}$, vale $S_2 \circ S_1 = S$ e a demonstração está encerrada.

Caso $c \neq 0$, basta definir

$$S_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad S_2(z) = \frac{1}{z}, \quad S_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z \quad \text{e} \quad S_4(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Assim, $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S$. □

Uma questão interessante de ser trabalhada é a de encontrar os pontos fixos de uma transformação de Möbius, isto é, os pontos z do plano que satisfazem $S(z) = z$. Se z é um ponto fixo, ele satisfaz a identidade

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Assim, uma transformação de Möbius não é tal que $S(z) = z$ para todo z complexo, ela possui, no máximo, dois pontos fixos.

Agora, seja S uma transformação de Möbius e considere a, b e c pontos distintos em \mathbb{C}_∞ com $\alpha = S(a), \beta = S(b)$ e $\gamma = S(c)$. Suponha T outra transformação de Möbius com esta mesma propriedade. Então $T^{-1} \circ S$ tem a, b e c como pontos fixos e, portanto, esta nova transformação é simplesmente a função identidade. Em outras palavras, $S = T$. Conclui-se que uma transformação de Möbius é completamente determinada pela sua ação em três pontos de \mathbb{C}_∞ .

Sejam z_2, z_3 e z_4 pontos de \mathbb{C}_∞ . Defina $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ por

$$S(z) = \left(\frac{z - z_3}{z - z_4}\right) \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)^{-1}, \quad \text{se } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C};$$

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}, \quad \text{se } z_2 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}, \quad \text{se } z_3 = \infty;$$

$$S(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}, \quad \text{se } z_4 = \infty.$$

Em qualquer caso, $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$ e $S(z_4) = \infty$ e S é a única transformação tendo esta propriedade.

Definição 4.30. Se $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$, então (z_1, z_2, z_3, z_4) (a *razão cruzada* de z_1, z_2, z_3 e z_4) é a imagem de z_1 sob a única transformação de Möbius que leva z_2 ao 1, z_3 ao 0 e z_4 ao ∞ .

Exemplo 4.31. É fácil ver que $(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$ e $(z, 1, 0, \infty) = z$. Também, se T é qualquer transformação de Möbius e w_2, w_3 e w_4 são os pontos tais que $Tw_2 = 1, Tw_3 = 0$ e $Tw_4 = \infty$, então $Tz = (z, w_2, w_3, w_4)$.

Teorema 4.32. Se z_2, z_3 e z_4 são pontos distintos e T é uma transformação de Möbius qualquer, então

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$$

para qualquer ponto z_1 .

Demonstração. Seja $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$; então S é uma transformação de Möbius. Para $M = ST^{-1}$ vale $M(Tz_2) = 1, M(Tz_3) = 0$ e $M(Tz_4) = \infty$. Assim,

$$ST^{-1}z = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4),$$

para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$. Em particular, se $z = Tz_1$, obtém-se a igualdade desejada. \square

Teorema 4.33. Se z_2, z_3, z_4 são pontos distintos de \mathbb{C}_∞ e se w_2, w_3, w_4 também são pontos distintos de \mathbb{C}_∞ , então existe uma, e somente uma transformação de Möbius S tal que $Sz_2 = w_2, Sz_3 = w_3$ e $Sz_4 = w_4$.

Demonstração. Sejam $Tz = (z, z_2, z_3, z_4)$, $Mz = (z, w_2, w_3, w_4)$ e defina $S = M^{-1}T$. Claramente S tem a propriedade desejada. Se U é outra transformação de Möbius com tal propriedade, então $U^{-1}S$ tem três pontos fixos (z_2, z_3 e z_4). Portanto $U^{-1}S$ é a função identidade, isto é, $U = S$. \square

Uma linha reta no plano será chamada de circunferência. O próximo resultado explica quando quatros pontos moram numa circunferência.

Teorema 4.34. Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 quatro pontos distintos de \mathbb{C}_∞ . Então (z_1, z_2, z_3, z_4) é um número real se, e somente se, os quatro pontos moram numa circunferência.

Demonstração. Seja $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ uma transformação de Möbius definida por $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$. O conjunto $S^{-1}(\mathbb{R})$ é constituído por todos os $z \in \mathbb{C}_\infty$ tais que (z, z_2, z_3, z_4) é um número real. Assim, a demonstração estará finalizada ao demonstrar que a imagem de \mathbb{R}_∞ sob uma transformação de Möbius é uma circunferência.

Escreva

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Para $z = x \in \mathbb{R}$ com $\omega = S^{-1}(x) \neq \infty$ valem $x = S\omega$ e $S(\omega) = \overline{S(\omega)}$. Isto é,

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{\overline{a\omega + b}}{\overline{c\omega + d}}.$$

Manipulando a equação acima vem

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|\omega|^2 + (a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + (b\bar{c} - \bar{d}a)\bar{\omega} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0. \quad (4.14)$$

Se $a\bar{c}$ é real, então $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$; definindo $\alpha = 2(a\bar{d} - \bar{b}c)$, $\beta = i(b\bar{d} - \bar{b}d)$ e multiplicando (4.14) por i obtém-se

$$0 = \text{Im}(\alpha\omega) - \beta = \text{Im}(\alpha\omega - \beta), \quad (4.15)$$

pois β é real. Assim, ω mora na reta determinada por (4.15) para α e β fixos. Caso tenha-se $a\bar{c}$ um número com parte imaginária não nula, (4.14) se torna

$$|\omega|^2 + \bar{\gamma}\omega + \gamma\bar{\omega} - \delta = 0$$

para algumas constantes γ em \mathbb{C} e δ em \mathbb{R} . Disto, tem-se

$$|\omega + \gamma| = \lambda, \quad (4.16)$$

onde

$$\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right| > 0.$$

Como γ e λ são independentes de x e como (4.16) é a equação de uma circunferência, a demonstração está finalizada. \square

Teorema 4.35. *Uma transformação de Möbius leva circunferências em circunferências.*

Demonstração. Seja Γ uma circunferência em \mathbb{C}_∞ e considere S uma transformação de Möbius qualquer. Sejam z_2, z_3 e z_4 três pontos distintos em Γ e defina $w_i = Sz_i, i = 2, 3, 4$. Os pontos w_2, w_3 e w_4 definem uma circunferência Γ' . Agora, para qualquer $z \in \mathbb{C}_\infty$, tem-se

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (Sz, w_2, w_3, w_4) \quad (4.17)$$

pelo Teorema 4.32. Finalmente, o Teorema 4.34 diz que se z pertence a Γ , então ambos os lados de (4.17) são reais. Em outras palavras, Sz pertence a Γ' . \square

Teorema 4.36. *Para quaisquer duas circunferências Γ e Γ' em \mathbb{C}_∞ existe uma transformação de Möbius T tal que $T(\Gamma) = \Gamma'$. Além disso, T pode levar quaisquer três pontos de Γ sobre quaisquer três pontos em Γ' . Ao especificar $Tz_i, i = 2, 3, 4$ (distintos em Γ), T se torna única.*

Demonstração. Sejam Γ e Γ' duas circunferências em \mathbb{C}_∞ , z_2, z_3, z_4 três pontos distintos de Γ e w_2, w_3, w_4 três pontos distintos de Γ' . Defina $Uz = (z, z_2, z_3, z_4)$ e $Sz = (z, w_2, w_3, w_4)$.

Fica claro então que $T = S^{-1}U$ satisfaz $T(\Gamma) = \Gamma'$. Na realidade, $Tz_i = w_i$, $i = 2, 3, 4$, e o teorema anterior garante o resultado desejado.

A unicidade vem do fato de que uma transformação de Möbius é completamente determinada pela sua ação em três pontos. \square

Agora que já está claro a ação das transformações de Möbius sobre circunferências, resta saber o que acontece com o resto do plano: dentro e fora da circunferência. Os conceitos que vêm a seguir ajudam a compreender os comportamentos em questão.

Definição 4.37. Seja Γ uma circunferência que passa pelos pontos z_2, z_3, z_4 . Os pontos z e z^* de \mathbb{C}_∞ são *simétricos* com respeito a Γ se

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}. \quad (4.18)$$

Em primeiro momento, a definição de simetria parece depender não só da circunferência em questão, mas também dos pontos z_2, z_3 e z_4 escolhidos. Mas este não é o caso.

Lema 4.38. Se $Tz = (az + b)(cz + d)^{-1}$, então $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ se, e somente se, é possível escolher a, b, c e d como números reais.

Demonstração. É importante notar que \mathbb{R}_∞ é uma circunferência em \mathbb{C}_∞ .

Fica claro que se a, b, c e d são números reais, para x_2, x_3 e x_4 números reais distintos vale $Tx_i = y_i \in \mathbb{R}_\infty$, $i = 2, 3, 4$, donde T leva a circunferência que passa por x_2, x_3 e x_4 na circunferência que passa por y_2, y_3 e y_4 ; ambas são a reta estendida.

Suponha agora que $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Como $1, 0$ e ∞ pertencem a \mathbb{R}_∞ , existem x_2, x_3 e x_4 pontos distintos de \mathbb{R}_∞ tais que

$$T(x_2) = 1, \quad T(x_3) = 0, \quad T(x_4) = \infty.$$

Assim, tem-se

$$\frac{az + b}{cz + d} = Tz = (z, x_2, x_3, x_4),$$

e os coeficientes da transformação no membro direito são todos reais. Pela unicidade da transformação, deve existir $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$ tal que $\lambda a = \alpha_1, \lambda b = \alpha_2, \lambda c = \alpha_3, \lambda d = \alpha_4$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$. \square

Teorema 4.39. Sejam z_2, z_3 e z_4 como na Definição 4.37. Se w_2, w_3 e w_4 são pontos distintos que também estão em Γ , então a equação (4.18) está satisfeita se, e somente se,

$$(z^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(z, w_2, w_3, w_4)}.$$

Demonstração. Defina as transformações

$$Tz = (z, z_2, z_3, z_4), \quad Sz = (z, w_2, w_3, w_4).$$

Suponha que z^* é tal que $(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}$, isto é, $Tz^* = \overline{Tz}$, ou

$$z^* = T^{-1}\overline{Tz}.$$

Pelo Teorema 4.34, T leva Γ em \mathbb{R}_∞ e S também o faz. Assim, TS^{-1} é uma transformação de Möbius que leva \mathbb{R}_∞ em \mathbb{R}_∞ . Pelo Lema 4.38, os coeficientes de TS^{-1} são reais. Daí, vale $TS^{-1} = \overline{TS^{-1}}$. Com isso, obtém-se

$$S^{-1}\overline{Sz} = T^{-1}TS^{-1}\overline{Sz} = T^{-1}\overline{TS^{-1}Sz} = T^{-1}\overline{Tz} = z^*.$$

Em outras palavras, $(z^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(z, w_2, w_3, w_4)}$ e o teorema está provado. \square

Pelo Teorema 4.34, z é simétrico a si mesmo com respeito a Γ se, e somente se, $z \in \Gamma$.

O próximo teorema é conhecido como *princípio de simetria*.

Teorema 4.40. *Se uma transformação de Möbius T leva a circunferência Γ_1 sobre a circunferência Γ_2 , então qualquer par de pontos simétricos com respeito a Γ_1 é levado por T a um par de pontos simétricos com respeito a Γ_2 .*

Demonstração. Sejam z_2, z_3 e z_4 pontos distintos de Γ_1 . Se z e z^* são simétricos com respeito a Γ_1 , o Teorema 4.32 assegura que

$$\begin{aligned} (Tz^*, Tz_2, Tz_3, Tz_4) &= (z^*, z_2, z_3, z_4) \\ &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4)}. \end{aligned}$$

Assim, Tz e Tz^* são simétricos com respeito a Γ' . \square

A próxima definição possibilita a distinção entre “dentro” e “fora” de uma circunferência (note que não há uma escolha trivial disto em \mathbb{C}_∞ , a esfera).

Definição 4.41. Se Γ é uma circunferência, então uma *orientação* para Γ é uma tripla ordenada (z_1, z_2, z_3) tais que $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma$.

Intuitivamente, os três pontos dão uma direção para Γ . Isto é, primeiro se “vai” de z_1 a z_2 e depois de z_2 a z_3 .

Considere $\Gamma = \mathbb{R}_\infty$ e sejam z_1, z_2 e z_3 números reais distintos. Defina

$$Tz = (z, z_1, z_2, z_3) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Como $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, o Lema 4.38 assegura que a, b, c e d podem ser escolhidos como

números reais. Assim,

$$\begin{aligned} Tz &= \frac{az + d}{cz + d} \\ &= \frac{az + b}{|cz + d|^2}(c\bar{z} + d) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2}(ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2} \text{Im} z.$$

Conclui-se que o conjunto $H = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$ é ou o semiplano superior ou o semiplano inferior, dependendo se $(ad - bc) > 0$ ou $(ad - bc) < 0$.

Seja Γ uma circunferência arbitrária, e tome z_1, z_2 e z_3 pontos distintos de Γ . Para qualquer transformação de Möbius S , pelo Teorema 4.32, vale

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} &= \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(Sz, Sz_1, Sz_2, Sz_3) > 0\} \\ &= S^{-1}(\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, Sz_1, Sz_2, Sz_3) > 0\}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em particular, se S é escolhida de forma que S leva Γ em \mathbb{R}_∞ , obtém-se que $\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$ é a imagem inversa sob S de ou o semiplano superior ou o semiplano inferior.

Definição 4.42. Se (z_1, z_2, z_3) é uma orientação de Γ , então o *lado direito* de Γ (com respeito a (z_1, z_2, z_3)) é o conjunto

$$H_+ = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}.$$

Analogamente define-se o *lado esquerdo* de Γ como

$$H_- = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}.$$

O próximo teorema é conhecido como *princípio de orientação*.

Teorema 4.43. *Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências em \mathbb{C}_∞ e T uma transformação de Möbius tal que $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Considere (z_1, z_2, z_3) uma orientação para Γ_1 . Então T leva o lado direito e o lado esquerdo de Γ_1 sobre os lados direito e esquerdo, respectivamente, de Γ_2 com respeito a (Tz_1, Tz_2, Tz_3) .*

Demonstração. Basta demonstrar que T leva o lado direito de Γ_1 sobre o lado direito de Γ_2 . A equação (4.19) mostra que

$$\begin{aligned} T(H_+) &= T(T^{-1}(\{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, Tz_1, Tz_2, Tz_3) > 0\})) \\ &= \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \text{Im}(z, Tz_1, Tz_2, Tz_3) > 0\}. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $T(H_+)$ é exatamente o lado direito de Γ_2 com respeito à orientação (Tz_1, Tz_2, Tz_3) . \square

Exemplo 4.44. Considere $\Gamma_1 = \mathbb{R}_\infty$ e Γ_2 o eixo dos imaginários puros unido ao ponto ∞ . Fixe a orientação $(1, 0, \infty)$ de Γ_1 . Como, por definição, $(z, 1, 0, \infty) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$, fica claro que o lado direito H_+ de Γ_1 com respeito a esta orientação é o semiplano superior de \mathbb{C} . A rotação $Tz = -iz$ leva Γ_1 sobre Γ_2 . Além disso, com respeito a $(T(1), T(0), T(\infty)) = (-i, 0, \infty)$, o lado direito de Γ_2 são os números complexos z tais que $\operatorname{Re} z > 0$, isto é, o semiplano direito de \mathbb{C} ; por fim, é fácil ver que

$$T(H_+) = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] M.P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
- [2] J.B. CONWAY, *Functions of one complex variable I*, Graduate texts in Mathematics, Second Edition, Springer, (1978).
- [3] F. XAVIER, *Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions*, arXiv:2002.12884 [math.DG].