



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUCIANA MARSOLA DO NASCIMENTO

EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL E
BIDIMENSIONAL:
UM ESTUDO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Sorocaba
2021

EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL E
BIDIMENSIONAL:
UM ESTUDO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Orientação: Professor Doutor Antonio Luís Venezuela.

Sorocaba
2021

Nascimento, Luciana Marsola do

Equação da Onda Unidimensional e Bidimensional: um estudo das soluções analíticas / Luciana Marsola do Nascimento -- 2021.
64f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Antonio Luís Venezuela
Banca Examinadora: Antonio Luís Venezuela, Érica Regina Filletti Nascimento, Magda da Silva Peixoto
Bibliografia

1. EDP. 2. Equação da onda. 3. Soluções analíticas. I. Nascimento, Luciana Marsola do. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Luciana Marsola do Nascimento, realizada em 19/02/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Para meu pai, Jorge.

Agradecimentos

A Deus, por me permitir chegar até aqui.

Ao meu orientador, pela dedicação, disposição e companherismo que sempre estiveram presentes durante os nossos estudos.

Aos meus pais, que sempre acreditaram em mim, me incentivaram e participaram ativamente desta conquista. Em especial ao meu pai, que dividiu este sonho comigo e, mesmo não estando mais presente fisicamente, foi o grande responsável por eu ter concluído este trabalho.

Aos amigos Bruno Fernandes, Paula Simonetti e Lilian Miranda, que me apoiaram nos momentos mais difíceis e importantes desses anos de estudos. A vocês minha eterna gratidão.

Aos colegas da nossa turma do Profmat, que foram o tempo todo companheiros e amigos que proporcionaram momentos inesquecíveis.

Aos nossos professores do Profmat, pelo amor e carinho com que nos acolheram e pela dedicação ao ministrar as disciplinas deste programa.

*“Tudo posso naquele que me fortalece”
Filipenses 4:13.*

Resumo

NASCIMENTO, L. M. Equação da Onda Unidimensional e Bidimensional: um estudo das soluções analíticas. 2021. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba, Sorocaba, 2021.

Ondas são perturbações em um meio, que se deslocam ou se propagam no espaço transportando energia de um ponto a outro. Elas podem ser: ondas mecânicas, ondas eletromagnéticas ou ondas de matéria. O tema envolvendo ondas é de grande importância no mundo moderno, estando presentes na construção civil, na medicina diagnóstica, na geologia, nas comunicações, na música, entre outras áreas. No exemplo da indústria musical, o controle de ondas musicais tem grande influência no seu crescimento econômico. A análise da relação entre os materiais que constituem os instrumentos musicais e como se comportam as ondas sonoras produzidas por esses instrumentos proporciona a possibilidade de gerar sons com melhor qualidade. A base dessas análises é o comportamento das ondas sonoras produzidas. Neste sentido, o estudo das ondas é de grande importância para obtenção da melhor qualidade musical, da mesma forma, se analisarmos outras áreas onde as ondas estão presentes, chegaremos à mesma conclusão com relação à sua importância. Considerando estes fatos, esta dissertação de mestrado tem como objetivo trazer o estudo da Equação da Onda partindo de conhecimentos básicos, indispensáveis a quem deseje desenvolver o estudo das soluções analíticas desta equação. Portanto, este trabalho estuda as técnicas de solução analítica da Equação da Onda Unidimensional e Bidimensional, iniciando com a modelagem da Equação da Onda realizada a partir da aplicação da lei de Newton. Após essa modelagem, aborda alguns pré-requisitos para a resolução da Equação da Onda, a definição de EDP, algumas de suas classificações e, em seguida, são descritas as resoluções pelos métodos Separação de Variáveis e Técnica da Transformada Integral Clássica. Finalizando, são realizadas análises do modelo da Equação da Onda Unidimensional a partir da utilização de gráficos e algumas considerações a respeito da Equação da Onda Bidimensional.

Palavras-Chave: Equação da Onda, Equação Diferencial Parcial, Separação de Variáveis, Técnica da Transformada Integral Clássica.

Abstract

Waves are disturbances in a medium, which move or propagate themselves in space, transporting energy from one point to another. They can be: mechanical waves, electromagnetic waves or matter waves. The theme involving waves is of great importance in the modern world, being present in civil construction, diagnostic medicine, geology, communications, music, among other areas. In the example of the music industry, the control of musical waves has a great influence on its economic growth. The analysis of the relationship between the materials that musical instruments are made and how the sound waves produced by these instruments behave provides the possibility of generating sounds with better quality. The basis of those analyzes is the behavior of the sound waves produced. In this sense, the study of waves is of great importance to obtain the best musical quality, in the same way, if we analyze other areas where the waves are present, we will reach the same conclusion regarding their importance. Considering these facts, this master's dissertation aims to bring the study of the Wave Equation starting from basic knowledge, indispensable to anyone wishing to develop the study of the analytical solutions of this equation. Therefore, this work studies the techniques of analytical solution of the One-Dimensional and Two-Dimensional Wave Equation, starting with the modeling of the Wave Equation performed from the application of Newton's law. After this modeling, it addresses some prerequisites for the resolution of the Wave Equation, the definition of EDP, some of its classifications, and then the resolutions are described by the Separation of Variables and Classical Integral Transform Technique methods. Finally, analyzes of the One-Dimensional Wave Equation model are performed based on the use of graphs and some considerations about the Two-Dimensional Wave Equation.

Key words: Wave Equation, Partial Differential Equation, Separation of Variables, Classical Integral Transform Technique.

Lista de Figuras

Figura 1. Forças de tensão	24
Figura 2. Perfil de deslocamento unidimensional considerando vários valores de truncamento.	50

Lista de Símbolos

Símbolo	Quantidade Física Escalar	Unidade
c	Constante -velocidade de propagação da onda	$m s^{-1}$
F_a	Força de tensão em a	N
F_b	Força de tensão em b	N
$f(x)$	Deslocamento Inicial da Corda	m
$f(x, y)$	Deslocamento Inicial da Membrana	m
$g(x)$	Velocidade Inicial da Corda	$m s^{-1}$
$g(x, y)$	Velocidade Inicial da Membrana	$m s^{-1}$
h_1	Forças Externas	-
$-k$	Constante de Separação	-
L	Comprimento da Corda	m
L_x	Comprimento da Membrana na Coordenada x	m
L_y	Comprimento da Membrana na Coordenada y	m
N	Ordem de truncamento	-
t	Tempo	s
u_t	Velocidade do deslocamento transversal	$m s^{-1}$
a	Ponto arbitrário da corda	m
b	Ponto arbitrário da corda diferente de a	m
x	Coordenada pertencente ao eixo das Abscissas	m
y	Coordenada pertencente ao eixo das Ordenadas	m
Símbolos gregos	Quantidade Física Escalar	Unidade
$-\delta$	Constante de separação	-
$-\sigma$	Constante de separação	$kg m^{-1}$
θ_a	Ângulo de tangência em a	°
θ_b	Ângulo de tangência em b	°
ρ	Densidade da corda	$Kg m^{-3}$

λ_n	Autovalores	-
ψ_n	Autofunções associadas aos λ_n	-
$\tilde{\psi}_n$	Autofunções normalizadas	-

Sumário

1. INTRODUÇÃO	19
1.1. Introdução	19
1.2. Revisão de literatura	20
2. EQUAÇÃO DA ONDA	23
2.1. Modelagem Matemática	23
3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	27
3.1. Equações Diferenciais Parciais.....	27
3.2. Condições de Contorno e Iniciais	30
3.3. Resoluções Analíticas de EDPs.....	30
3.3.1. Método da Separação de variáveis	31
3.3.2. Técnica da Transformada Integral Classica - TTIC	41
4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL.....	43
4.1. Equação da Onda Unidimensional – Resolução via TTIC	43
4.1.1. Resolução via TTIC.....	44
4.1.2. Análise dos resultados	50
4.2. equação da onda bidimensional – resolução via separação de variáveis.....	51
4.2.1. Resolução via separação de variáveis.....	52
4.2.2. Considerações sobre Equação da Onda bidimensional	58
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	59
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61

Introdução

1.1. INTRODUÇÃO

As ondas são um dos principais assuntos de estudo da Física na atualidade e estão presentes em várias situações do cotidiano, nas oscilações de uma pista de dança com piso de madeira, no movimento das passarelas e pontes, na identificação de estrutura de materiais, no estudo do desenvolvimento fetal, nas produções musicais e em muitas outras situações.

O estudo do comportamento das ondas proporciona, na indústria musical, melhor qualidade de sons, nos instrumentos musicais, nos aparelhos de reprodução sonora e nos diversos tipos de apresentações musicais por meio do estudo da propagação destas ondas no ambiente onde se realizam os eventos (acústica), porém estes estudos com relação às ondas não são recentes, iniciaram no século XVIII e são realizados até os dias atuais.

No século XVIII, físicos e matemáticos já procuravam modelos para expressar fenômenos da Mecânica e da Física, e entre as equações encontradas para representar estes fenômenos estava a Equação da Onda. A solução dessa equação foi um dos principais problemas matemáticos da metade do século XVIII. D'Alembert foi um dos primeiros a estudar a equação da onda, em 1746 (Stewart, 2013). Além dele, outros matemáticos também se interessaram por esta equação: Euler (1748), Bernoulli (1753) e Lagrange (1759). Diversas formas de soluções foram obtidas, e os méritos e as relações entre essas soluções foram motivos de discussões por meio de artigos durante longo tempo.

O objetivo deste trabalho é estudar a equação da onda e algumas de suas soluções as em um maior número de equações, inclusive em equações mais complexas.

Para alcançar o nosso objetivo, temos no terceiro capítulo a modelagem da Equação da Onda a partir da lei de Newton. No quarto capítulo, realizamos um estudo sobre EDP e as

soluções pelo método da Separação de Variáveis e pelo método da Técnica da Transformada Integral Clássica. A Técnica da Transformada Integral Clássica é apresentada no quinto capítulo e, através dela, a resolução da Equação Onda Unidimensional. Nesse capítulo também é apresentada a resolução da Equação da Onda Bidimensional por meio do método da Separação de Variáveis. Nos dois casos, os resultados são validados pela literatura especificada no final de cada método. O sexto capítulo se refere à análise dos resultados. Por meio de gráficos, estudamos o comportamento da Equação da Onda Unidimensional aplicada a um modelo físico e fazemos algumas considerações sobre a Equação da Onda Bidimensional.

1.2. REVISÃO DE LITERATURA

Esta seção tem como objetivo fazer um levantamento bibliográfico de autores que estudaram as equações diferenciais parciais com ênfase na Equação da Onda e que em suas obras descrevem o método de dedução desta equação e métodos para sua resolução.

Segundo Figueiredo (1977), as equações diferenciais começaram a ser estudadas no século XVII com a criação do Cálculo Diferencial e Integral e sua aplicação à mecânica das partículas. Com o sucesso desses estudos em tratar problemas utilizando Cálculo Diferencial e Integral, no século XVIII, físicos e matemáticos procuram modelos para expressar fenômenos da Mecânica e da Física, porém sendo as equações resultantes equações diferenciais parciais apresentam dificuldades para sua resolução. Nesta época, as três equações básicas que aparecem nos estudos são a Equação da Onda, a Equação do Calor e a Equação de Laplace.

Ainda em Figueiredo (1977), no seu estudo sobre Equação da Onda, encontramos a análise do problema das pequenas vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível. Para isso, ele utilizou a lei de Newton: “a derivada com relação ao tempo da quantidade de movimento do corpo é igual à soma das forças aplicadas”, supondo que o fenômeno se realize em um plano (x, u) , que a corda vibre em torno da posição de repouso e, utilizando a hipótese de que as partículas constituintes da corda apresentem uma vibração transversal, desloquem-se apenas na direção do eixo u . Deduzindo assim, a equação diferencial que deve satisfazer a função $u(x, t)$.

Boyce e Diprima (1985) também demonstram a Equação da Onda por meio da aplicação da lei de Newton, complementando o fato de que há várias generalizações como,

por exemplo, a Equação do Telégrafo e ainda complementa exemplificando que a equação da onda pode ser considerada em duas ou três dimensões dando suas representações em cada caso.

Halliday *et al.* (2016) deduz a Equação da Onda da mesma forma, por meio da lei de Newton, porém faz uso da Equação da Velocidade da Onda substituindo a relação entre a tensão (força) e a massa da corda.

Zill e Cullen (2001) tratam no seu trabalho de equações clássicas e problemas de valores de contorno, dentre as equações estudadas está a Equação da Onda. A dedução desta equação é realizada, como nos demais autores, usando a lei de Newton e é apresentada a resolução da Equação da Onda com condições de contorno predeterminadas.

Iório (2018) faz um estudo da Equação da Onda utilizando sua curva característica e resolve problemas a partir de uma das formas canônicas para achar a solução da onda em \mathbb{R}^2 , discute o problema da corda infinita e, também, os problemas em um intervalo finito.

Equação da Onda

O objetivo deste capítulo é a modelagem da equação da onda a partir da lei de Newton.

2.1. MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem da equação da onda é desenvolvida a partir da lei de Newton: “a derivada com relação ao tempo da quantidade de movimento do corpo é igual à soma das forças aplicadas”, destacando que as grandezas envolvidas nessa lei são vetoriais, o que implica em um cuidado especial com relação à direção e à orientação de forças.

Para simplificar a Equação Diferencial que encontraremos nesta modelagem podemos admitir hipóteses simplificadoras com a intenção de neutralizar as forças externas, como considerar que a massa da corda seja constante em todo seu comprimento, que a corda é perfeitamente elástica não oferecendo nenhuma resistência à flexão, desprezar a ação da força gravitacional em função da alta tensão causada pelo esticamento da corda antes de fixá-la e que as partículas constituintes da corda se deslocam apenas na direção do eixo u (vibração transversal).

Para a construção do nosso modelo, trabalharemos com o sistema mecânico constituído por um trecho da corda entre dois pontos arbitrários, $x_1 = a$ e $x_2 = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Como, por hipótese, as partículas da corda se deslocam transversalmente através de pequenas vibrações, elas não dependem do tempo (t), logo designaremos por $\rho(x)$ a densidade da corda.

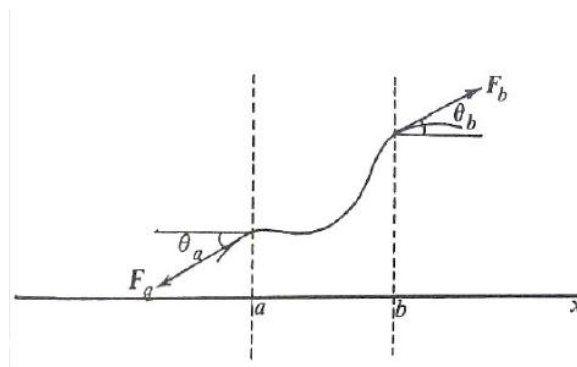
Desta forma, a quantidade de movimento da corda, entre os pontos $x_1 = a$ e $x_2 = b$, é dada por:

$$M(t) = \int_a^b \rho(x) u_t(x, t) dx \quad (2.1)$$

onde $u_t(x, t)$ designa a velocidade transversal do ponto x da corda no instante t .

A hipótese de vibração transversal resulta na ausência de componente da velocidade na direção x , existindo apenas na direção de u , ou seja, normal a x . Considerando as hipóteses simplificadoras que foram estabelecidas, há apenas um tipo de força a ser considerado, representada graficamente na figura abaixo:

Figura 1. Forças de tensão



Fonte: (Figueiredo, 1977, p.131)

Essa força se refere à ação do resto da corda sobre o trecho entre a e b . São forças de tensão na direção das tangentes e são representadas por F_a e F_b . As intensidades dessas forças são representadas por $f(a, t)$ e $f(b, t)$, respectivamente, e θ_a e θ_b são os ângulos das tangentes à corda com o eixo x , nos pontos a e b . Como não há quantidade de movimento na direção x e, aplicando a lei de Newton já enunciada anteriormente, temos que os componentes horizontais devem satisfazer:

$$f(b, t) \cos \theta_b = f(a, t) \cos \theta_a,$$

lembrando que a componente horizontal da tensão é independente de x e é função de t .

Usaremos para indicar o componente horizontal a notação $\tau(t)$. Desta forma, a resultante vertical das forças de tensão aplicadas sobre o trecho da corda entre os pontos a e b é

$$\tau(t) \operatorname{tg} \theta_b - \tau(t) \operatorname{tg} \theta_a,$$

Como a inclinação da reta tangente pode ser representada pela derivada com relação à x , temos:

$$\tau(t)tg\theta_b - \tau(t)tg\theta_a = \tau(t)u_x(x,t) \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(x,t)dx \quad (2.2)$$

Utilizando novamente a lei de Newton e as Equações (2.1) e (2.2), temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x)u_t(x,t)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(x,t)dx,$$

considerando $u_{tt}(x,t)$ contínua podemos fazer

$$\int_a^b \rho(x)u_{tt}(x,t)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(x,t)dx,$$

sendo a e b arbitrários temos

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \tau(t)u_{xx}(x,t),$$

logo,
$$u_{tt}(x,t) = \frac{\tau(t)u_{xx}(x,t)}{\rho(x)},$$

tomando $c(x,t)^2 = \frac{\tau(t)}{\rho(x)}$, obtemos

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ ou seja, } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ (Equação da Onda Unidimensional)}$$

Supondo que não sejam estabelecidas hipóteses simplificadoras, o sistema estará sujeito à ação de forças externas, e designamos estas forças por $h_1(x,t,u)$. Desta forma, e utilizando novamente a lei de Newton e as expressões (2.1) e (2.2), temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x)u_t(x,t)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(x,t)dx + \int_a^b h_1(x,t,u)dx, \text{ logo}$$

$$\int_a^b \rho(x)u_{tt}(x,t)dx = \int_a^b \tau(t)u_{xx}(x,t)dx + \int_a^b h_1(x,t,u)dx, \text{ e}$$

$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \tau(t)u_{xx}(x,t) + h_1(x,t,u)$, ou seja,

$$u_{tt}(x,t) = \frac{\tau(t)u_{xx}(x,t) + h_1(x,t,u)}{\rho(x)}.$$

Considerando as relações abaixo:

$$c(x,t)^2 = \frac{\tau(t)}{\rho(x)} \text{ e } h(x,t,u) = \frac{h_1(x,t,u)}{\rho(x)}, \text{ obtemos}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t,u) \text{ (Equação da Onda Unidimensional),}$$

onde c^2 é a constante (velocidade) e $h(x,t,u)$ representa as forças externas.

De forma análoga, obtemos a Equação da Onda Bidimensional, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) + h(x,y,t,u).$$

Equações Diferenciais

Neste capítulo abordaremos a definição de Equação Diferencial Parcial e as técnicas de resolução analítica: Separação de Variáveis e Técnica da Transformada Integral Clássica.

3.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e derivadas parciais de uma função, variável dependente, $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, mais precisamente, uma equação diferencial parcial em n variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, \mathbb{R}^n : Espaço vetorial, F é uma função dada e u é a função incógnita, que queremos determinar.

Segundo Iório (2018), a ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação e uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação, caso contrário a EDP é dita não linear.

A forma mais geral de uma EDP linear de segunda ordem é:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j \partial_j u(x) + cu(x) + d(x) = 0 \quad (3.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a_{i,j}, b_j, c, d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\partial_i \partial_j = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

No caso de duas variáveis independentes, a Equação (3.1) pode ser escrita como

$$A(x, y)u_x + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u + G(x, y) = 0$$

A EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo, $G \equiv 0$.

A seguir faremos algumas considerações que são válidas para EDP lineares de qualquer ordem, porém vamos considerar uma EDP linear de segunda ordem, a Equação (3.1).

Podemos reescrevê-la, obtendo

$$Lu = f$$

onde $f(x) = -d(x)$ e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u(x) + c u(x) \quad (3.2)$$

A cada função u corresponde uma única função Lu , definindo um operador ou transformação L . Mais precisamente, seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e supondo que as funções a_{ij}, b_j e c são contínuas em Ω , podemos definir

$$L : C^k(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

$$u \mapsto Lu$$

onde Lu é dado pela Equação (3.2), $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ k vezes continuamente diferenciáveis e, $C(\Omega)$ é o conjunto das funções, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, contínua.

Iório (2018) explica um importante princípio que será utilizado na resolução analítica das EDPs. Para isso utiliza a terminologia operador (ou transformação), que segundo Iório (2018), é usada para enfatizar que a função L está definida entre espaços de funções, ou seja, L leva uma função u (com determinadas propriedades) em outra função Lu .

Como a Equação (3.1) é linear, o operador L (operador diferencial parcial) é um operador linear e

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv$$

Podemos associar à EDP não homogênea a EDP linear homogênea

$$Lu = 0 \quad (\text{equação homogênea associada}) \quad (3.3)$$

Se u_1, \dots, u_m satisfazem a Equação (3.3) e se $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}$ então $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$ também

é solução da Equação (3.3), pelo Princípio da Superposição.

Proposição 1.1 (Princípio da Superposição) Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k , cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea (3.3) e que $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω . Então u satisfaz (3.3). A demonstração que será descrita abaixo foi retirada de Iório (2012).

Demonstração: A proposição acima está enunciada para o caso geral, mas a demonstraremos no caso em $k = 1$ ou $k = 2$, ou seja, quando L é definido pela Equação (3.2). Nesse caso, por hipótese, quaisquer que sejam $x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n$,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x);$$

$$D_i u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x);$$

$$D_i D_j u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x),$$

e essas séries convergem. Portanto, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m (Lu_m)(x) = 0 \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição 1.1 no caso em que $k = 1$ ou $k = 2$

3.2. CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAIS

Como nas EDP, o espaço das variáveis independentes é multidimensional, ou seja, estamos procurando soluções definidas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, podemos substituir os extremos do intervalo (caso $n = 1$) pelo bordo $\partial\Omega$ da região Ω .

Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas na fronteira (ou bordo) da região temos um *problema de contorno* ou mais especificamente um *problema de valores de contorno*.

Segundo Iório (2018), essas condições aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários, como condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), x \in \partial\Omega$$

onde α e β são constantes dadas, f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada de u na direção normal a $\partial\Omega$. No caso de $\beta = 0$, a condição é conhecida como *Condição de Dirichlet*, quando $\alpha = 0$ temos uma *Condição de Neumann*.

Quanto às condições iniciais, como no caso das EDP temos mais de uma variável dependente, fixamos uma das variáveis e impomos o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis. Por exemplo: numa EDP de $n = 2$, com variáveis x e t , fixamos $t = 0$, temos $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, f e g funções dadas, isso quer dizer que impomos o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t = 0$. Nesse caso, temos um problema de *valor inicial* ou *Problema de Cauchy*.

Ainda segundo Iório (2018), em alguns problemas físicos dependentes do tempo, muitas vezes, é conveniente separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y, z , ocorrendo, com frequência, que os valores da solução e de suas derivadas em relação a tempo são descritos no instante $t = 0$ em função de x, y, z (condição inicial) e, ao mesmo tempo, são impostas condições de contorno para todo $t \geq 0$, em relação às variáveis. Nesses casos, temos os *problemas mistos*.

3.3. RESOLUÇÕES ANALÍTICAS DE EDPS

Nessa seção estudaremos as técnicas: Método da Separação de Variáveis e a Técnica da Transformada Integral Clássica -TTIC para a obtenção da solução analítica de uma EDP.

3.3.1. MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método de separação de variáveis, segundo Iório (2018), consiste em achar soluções para EDP que sejam da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.4)$$

A solução da EDP pode ser escrita como a multiplicação de duas funções de uma só variável, daí o nome separação de variáveis.

Serão dados dois exemplos de resolução utilizando este método.

Exemplo 1: Consideramos uma EDP que descreve uma taxa de crescimento,

$$u_t = u_{xx} - 2u_x \quad (3.5)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \text{ para } t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L$$

Para obter a solução geral do problema acima utilizamos o método de separação de variáveis partindo da hipótese que $u(x, t) = X(x)T(t)$, temos: $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \frac{dT(t)}{dt}$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx} T(t)$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t)$, fazendo a substituição na Equação (3.5). e

considerando: $T_t(t) = \frac{dT(t)}{dt}$, $X_x(x) = \frac{dX(x)}{dx}$ e $X_{xx}(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$, obtemos:

$$X(x)T_t(t) = X_{xx}(x)T(t) - 2X_x(x)T(t)$$

Na expressão acima, dividimos ambos os lados por $X(x)T(t)$ ficando com:

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x) - 2X_x(x)}{X(x)} = -k$$

A constante $-k$ é designada constante de separação. Obtemos assim, duas equações que serão resolvidas separadamente.

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = -k \quad (3.6)$$

$$\frac{X_{xx}(x) - 2X_x(x)}{X(x)} = -k \quad (3.7)$$

Resolvendo a Equação (3.6) temos,

$$T_t(t) = -kT(t)$$

Fazendo a integração

$$\ln|T| = -kt + c$$

$$T = e^{-kt+c}$$

$$T = c_1 e^{-kt}$$

Resolvendo a Equação (3.7) temos,

$$X_{xx}(x) - 2X_x(x) + kX(x) = 0$$

Esta é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de segunda ordem, sendo assim, sua solução geral será a combinação linear de duas soluções particulares do tipo e^{rx} .

O parâmetro r é obtido da resolução da equação característica

$$r^2 - 2r + k = 0$$

$$r = 1 \pm \sqrt{1-k}, \text{ com } \alpha = 1 \text{ e } \beta = \sqrt{1-k}$$

Conforme o valor de $1-k$ temos diferentes possibilidades para a solução da Equação (3.7):

- $1-k > 0 \Rightarrow k < 1 \Rightarrow x = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
- $1-k = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
- $1-k < 0 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow x = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \text{sen}(\beta x)]$

Para determinar qual das possibilidades é a solução da EDO, devemos verificar qual delas é compatível com as condições de contorno impostas pelo problema para depois obter a solução substituindo na Equação (1).

Aplicando as condições de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L$$

temos que, $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$, logo $X(0) = 0$, pois se tivéssemos $T(t) = 0$ para todo t , teríamos $u(x,t) = 0$ para todo x e t , o que restringiria $f(x) = 0$ o que não é desejado, pois limitaria este estudo.

Da mesma forma, $u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$, portanto, temos três possibilidades.

Para $k < 1$

$$X(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \\ X(L) = c_1 e^{r_1 L} + c_2 e^{r_2 L} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$c_1 (e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) = 0$$

Como $e^{r_1 L} - e^{r_2 L} \neq 0$, $c_1 = 0$ e $c_2 = -c_1 = 0$, temos $X(x) = 0$, e $u(x,t) = 0$, assim esta possibilidade está descartada como solução.

Para $k = 1$

$$X(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(L) = c_1 e^{rL} + c_2 L e^{rL} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$X(L) = c_2 L e^{rL}$$

Como e^{rL} e L não são nulos, temos que $c_2 = 0$, sendo $c_1 = c_2 = 0$ chegamos à mesma conclusão $u(x,t) = 0$, descartando esta possibilidade também.

Para $k > 1$

$$X(x) = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)]$$

com $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{1-k}$. Por questão de nomenclatura, consideramos $\beta = \lambda$.

$$\begin{cases} X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(L) = e^L [c_1 \cos(\lambda L) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda L)] = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$e^L [c_2 \text{sen}(\lambda L)] = 0$$

Como $e^L \neq 0$, temos que $c_2 \text{sen}(\lambda L) = 0$ e desejamos $c_2 \neq 0$ para não recair nos casos anteriores, então admitimos

$$\text{sen}(\lambda L) = 0$$

e obtemos

$$\lambda L = nL \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots$$

λn são autovalores e assim obtemos as autofunções

$$X(x) = e^x \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Portanto, substituindo $X(x)$ e $T(t)$ encontrados na Equação (3.4) obtemos

$$u(x, t) = e^x \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-kt}$$

Sendo, $\sqrt{1-k} = \lambda$, $-k = 1 - \lambda^2$ e

$$u(x, t) = e^x \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

Como $n = 1, 2, 3, \dots$ são várias, as soluções da Equação (3.4) pelo Princípio da Superposição

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x, t) \text{ temos,}$$

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{\left(1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right)t}$$

Para determinar a_n utilizamos a condição de contorno.

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^x \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

como e^x não depende de n , podemos fazer

$$e^{-x} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

e sendo $e^{-x} f(x)$ uma série de senos, seu coeficiente de Fourier é

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (e^{-x} f(x)) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

concluindo assim a resolução.

Exemplo 2: Consideremos a equação da onda unidimensional que representa o problema das vibrações transversais de uma corda em torno da sua posição de repouso.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (3.8)$$

Supomos que a corda que estamos analisando seja uma corda finita e de extremidades fixas. Denotaremos L o seu comprimento e consideraremos que sua posição de repouso coincide com o eixo x no plano (x, u) , onde $0 \leq x \leq L$.

Como as extremidades da corda são fixas, temos

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.9)$$

que são as condições de contorno homogêneas, o que permite a resolução utilizando o método da Separação de Variáveis.

A posição da corda no tempo $t=0$ chamamos de deslocamento inicial e indicamos por $u(x, 0)$, a velocidade inicial de $u_t(x, 0)$ e, as condições abaixo são as condições iniciais.

$$u(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L \quad (3.10)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L$$

Assim nosso problema consiste em encontrar uma função $u(x, t)$ que satisfaça à Equação da Onda (3.8), as condições de contorno (3.9) e as condições iniciais (3.10).

Portanto temos para resolver o problema da corda vibrante com extremidades fixas as seguintes informações:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & \text{em} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & \text{para } t \geq 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (3.11)$$

para $0 \leq x \leq L$

com c constante e $(x, t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq L; t \geq 0$.

Iniciamos a aplicação do método de separação de variáveis tal como feito anteriormente, considerando $u(x, t) = X(x)T(t)$, assim temos: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$, e

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t)$, fazendo a substituição na Equação (3.8). e, considerando:

$T_{tt}(t) = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$, $X_x(x) = \frac{dX(x)}{dx}$ e $X_{xx}(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$, obtemos:

$$X(x)T_{tt}(t) = c^2 X_{xx}(x)T(t)$$

Na expressão acima dividimos ambos os lados por $X(x)T(t)$ ficando com:

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -k$$

Obtendo as equações:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -k \tag{3.12}$$

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)c^2} = -k \tag{3.13}$$

Resolvendo a Equação (3.12) temos,

$$X_{xx}(x) = -kX(x)$$

$$X_{xx}(x) + kX(x) = 0$$

Já vimos que a solução geral de uma EDO linear de segunda ordem é dada pela combinação linear de duas soluções particulares do tipo e^{rx} , sendo r obtido da resolução da equação característica, que neste exemplo é

$$r^2 + k = 0, \text{ onde } r = \pm\sqrt{-k}, \text{ com } \alpha = 0 \text{ e } \beta = \sqrt{-k}, \text{ assim}$$

- Se $k < 0 \Rightarrow X = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
- Se $k = 0 \Rightarrow X = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} = e^{rx} (c_1 + c_2 x)$
- Se $k > 0 \Rightarrow X = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \text{sen}(\beta x)]$

Analisando as condições de contorno

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0$$

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0$$

e conforme já demonstrado no exemplo anterior, $T(t) \neq 0$ para todo t , temos $X(0) = X(L) = 0$ e três possibilidades de soluções:

Para $k < 0$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-k}x} + c_2 e^{-\sqrt{-k}x}$$

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X(L) = c_1 e^{\sqrt{-k}L} + c_2 e^{-\sqrt{-k}L} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$X(L) = c_1 e^{\sqrt{-k}L} - c_1 e^{-\sqrt{-k}L} = 0$$

$$X(L) = c_1 (e^{\sqrt{-k}L} - e^{-\sqrt{-k}L}) = 0$$

Como $e^{\sqrt{-k}L} - e^{-\sqrt{-k}L} \neq 0$, temos $c_1 = c_2 = 0$ e conseqüentemente $X(x) = 0$ e $u(x,t) = 0$, resultado que descarta esta possibilidade.

Para $k = 0$

$$X(x) = e^{rx} (c_1 + c_2 x)$$

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(L) = e^{rL} (c_1 + c_2 L) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$X(L) = e^{rL} c_2 L = 0$$

Como $e^{rL} \neq 0$ e $L \neq 0$, $c_1 = c_2 = 0$ e $u(x,t) = 0$, resultado igual ao caso anterior, descartado.

Para $k > 0$

$$X(x) = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \text{sen}(\beta x)]$$

lembrando que $r = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow r = \pm\sqrt{k}i$, assim $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{k}$. Novamente por questão de nomenclatura tomaremos $\beta = \lambda$.

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(L) = c_1 \cos(\lambda L) + c_2 \text{sen}(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$$

Como $c_2 \neq 0$ temos

$$\operatorname{sen}(\lambda L) = 0$$

$$\lambda L = nL \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots$$

λn são autovalores e assim obtemos as autofunções

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Resolvendo a Equação (3.13), temos:

$$\frac{T_u(t)}{T(t)c^2} = -k$$

$$T_u(t) = -kc^2 T(t)$$

$$T_u(t) + kc^2 T(t) = 0$$

A solução geral será a combinação linear de duas soluções do tipo e^{rx} , sendo r obtido da resolução da equação característica

$$r^2 + kc^2 = 0, \text{ logo } r = \pm c\sqrt{k}i$$

Da resolução da Equação (3.12), sabemos que $k > 0$, portanto

$$T(t) = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)]$$

Tomamos novamente $\sqrt{k} = \lambda$, e tendo $\alpha = 0$ e $\beta = \lambda c$ obtemos

$$\beta = \frac{n\pi c}{L}$$

Substituindo β em $T(t)$ temos

$$T(t) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Como c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, reescrevemos $c_1 = a_n$ e $c_2 = b_n$ assim

$$T(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Substituindo $X(x)$ e $T(t)$ na Equação (3.4) temos

$$u(x,t) = \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

$$u(x,t) = a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Sendo $n=1,2,3,\dots$, são várias as soluções que satisfazem a Equação (3.8), as condições iniciais (3.10) e as condições de contorno (3.9) pelo Princípio da Superposição

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t)$$

temos infinitas soluções que são representadas por:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

Para encontrar a solução particular do problema devemos determinar a_n e b_n .

Aplicando as condições iniciais estabelecidas em (3.10) à $u(x,t)$ encontramos a_n .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(0) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}(0) \right]$$

Como $\operatorname{sen}(0) = 0 \Rightarrow b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot 0 = 0$ e $\cos(0) = 1$, ficamos com

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sendo esta função uma série de senos, seus coeficientes de Fourier são:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Para encontrar b_n utilizamos $u_t(x,t)$:

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \right\} \Rightarrow$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right] \Rightarrow$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \right] + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \right\},$$

assim obtemos:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \frac{n\pi c}{L} + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \frac{n\pi c}{L} \right].$$

Aplicando as condições iniciais estabelecidas em (3.10) na equação acima temos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen}(0) \frac{n\pi c}{L} + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos(0) \frac{n\pi c}{L} \right].$$

Como $\operatorname{sen}(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$ ficamos com

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \frac{n\pi c}{L} \Rightarrow$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \frac{n\pi c}{L} \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

sendo $\left[b_n \frac{n\pi c}{L} \right]$ o coeficiente da série.

A função $g(x)$ é uma série de senos, seus coeficientes de Fourier são:

$$b_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Concluimos, portanto que a solução particular do problema proposto em (3.11) é:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi ct}{L} \right) \right]$$

com

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

No próximo capítulo, apresentaremos a resolução desta mesma equação, porém com

condições de contorno não homogêneas, através da TTIC.

3.3.2. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLASSICA - TTIC

Nesta seção abordaremos, de maneira breve, um pouco da trajetória da TTIC. Para tal, usamos como referência os trabalhos de Özisik e Murray (1974) e Venezuela (2008).

Özisik e Murray (1974) publicaram uma técnica alternativa para a resolução de Equações Diferenciais Parciais, a qual dispensava a necessidade de separação de variáveis do problema, estabelecendo assim os formalismos básicos para o surgimento da Técnica de Transformada Integral Clássicos – TTIC.

O primeiro livro generalizando os formalismos da TTIC foi lançado em 1984 por Mikhailov e Özisik e nele era solicitado um tratamento unificado dos diversos problemas de transferência de calor e massa, distribuídos em sete classes de equações diferenciais parciais. Ainda na década de 80, uma série de extensões da TTIC foram criadas para a resolução de problemas que antes eram resolvidos por métodos denominados puramente numéricos como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e suas variantes (Scofano Neto et al., 1989). Este novo método, a TTIC, segundo Cotta (1993), trouxe uma série de vantagens como a metodologia sistemática de solução, a redução do tempo de processamento e a aceleração na taxa da convergência numérica.

Para a solução de um problema utilizando a TTIC, genericamente necessitamos de um par transformada-inversa e de um problema auxiliar associado, que tenham as mesmas características e as mesmas condições de contorno do problema original. Os problemas originais são equações diferenciais parciais que modelam determinados processos físicos. A eliminação de variáveis independentes, por meio de operadores de integração apropriados, resulta na obtenção de um sistema de equações diferenciais ordinárias, chamado sistema transformado, que é truncado de uma ordem finita e resolvido analítica e numericamente.

Segundo Venezuela (2008), podemos estabelecer passos a serem seguidos para a resolução de problemas utilizando a TTIC. O roteiro abaixo descreve esses passos.

- i. Escolha de um problema auxiliar apropriado, o qual deve conter o máximo de informações possível sobre o problema original;
- ii. Obtenção do par transformada-inversa, a partir da propriedade de ortogonalidade das autofunções para transformação do problema e posterior inversão dos campos

transformados obtidos;

- iii. Transformação integral do sistema diferencial parcial original, resultando em um sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias; e
- iv. Truncamento desse sistema diferencial ordinário resultante e obtenção de sua solução numérica.

Segundo Özisik e Murray (1974), o tipo de transformada integral e a correspondente fórmula de inversão aplicável a um dado problema dependem da escala da variável, finita, semi-infinita ou infinita, e do tipo de condição de contorno.

No próximo capítulo, essa técnica será aplicada para a resolução da Equação da Onda Unidimensional.

Resolução da Equação da Onda Unidimensional e Bidimensional

Neste capítulo, apresentaremos a resolução da Equação Unidimensional da Onda utilizando a Técnica da Transformada Integral Clássica (TTIC) e a resolução da Equação Bidimensional da Onda através da Técnica da Separação de Variáveis

4.1. EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL – RESOLUÇÃO VIA TTIC

O problema para equação da onda unidimensional em um intervalo finito se refere a uma corda elástica de comprimento L , presa nas pontas, vibrando em um plano vertical (uma corda de violão, por exemplo); $u(x,t)$ é o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t e as funções f e g descrevem a posição e a velocidade iniciais da corda respectivamente.

Desta forma temos o Problema de Valor de Contorno (PVC) constituído conforme as equações:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0 \text{ e } 0 < x < L \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u_0, \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

$$u(L, t) = u_0, \quad 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.5)$$

com

- (i) $u = u(x, t)$, (x, t) : sistema de coordenadas retangulares;
- (ii) f, g : são funções contínuas no intervalo $[0, L]$;
- (iii) $f(0) = f(L) = 0$ e $g(0) = g(L) = 0$, se $u_0 = 0$
- (iv) $u_0 = u_0(t)$ e supomos u_0 : função constante.

4.1.1. RESOLUÇÃO VIA TTIC

Se considerarmos $u_0 \neq 0$, as condições de contorno (4.2) e (4.3) não são homogêneas, e, então, vamos homogeneizá-las usando o seguinte filtro:

$$u(x, t) = u_h(x, t) + F(x) \quad (4.6)$$

Podemos obter a função F usando o seguinte problema de valor inicial (PVI).

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = 0 \quad 0 < x < L \quad (4.7)$$

Com as seguintes condições iniciais:

$$F(0) = u_0 \text{ e} \quad (4.8)$$

$$F(L) = u_0. \quad (4.9)$$

Resolvendo a Equação (4.7) temos:

$$F(x) = c_1 x + c_2 \quad (4.10)$$

Utilizando a condição inicial, Equações (4.8), e a (4.10) obtemos:

$$c_2 = u_0 \text{ e} \quad (4.11)$$

usando a Equação (4.9) e (4.10), sendo $L \neq 0$ obtemos:

$$c_1 = 0. \quad (4.12)$$

Logo, pelas Equações (4.10), (4.11) e (4.12) temos:

$$F(x) = u_0 \quad (4.13)$$

Substituindo a Equação (4.6) na Equação (4.1) e considerando a Equação (4.7), temos:

$$\frac{\partial^2 (u_h + F)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u_h + F)}{\partial x^2}.$$

E assim obtemos:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}. \quad (4.14)$$

Substituindo a Equação (4.6) nas Equações de (4.2) a (4.5) temos:

$$(u_h + F)(0, t) = u_0 \Rightarrow u_h(0, t) + \overbrace{F(0, t)}^{u_0} = u_0 \Rightarrow$$

$$u_h(0, t) = 0, \quad (4.15)$$

$$(u_h + F)(L, t) = u_0 \Rightarrow u_h(L, t) + \overbrace{F(L, t)}^{u_0} = u_0 \Rightarrow$$

$$u_h(L, t) = 0, \quad (4.16)$$

$$(u_h + F)(x, 0) = f(x) \Rightarrow u_h(x, 0) + \overbrace{F(x, 0)}^{u_0} = f(x) \Rightarrow$$

$$u_h(x, 0) = f(x) - u_0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_h + F) \Big|_{t=0} = g(x) \Rightarrow \frac{\partial u_h}{\partial t} \Big|_{t=0} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{t=0}}_{=0} = g(x) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x). \quad (4.18)$$

Portanto, temos o PVC com as condições de contorno homogêneas.

Problema Auxiliar

Seguindo da técnica da Transformada Integral Clássica, o problema auxiliar apropriado é:

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^2 \psi_n(x) = 0 \quad (4.19)$$

$$\psi_n(0) = 0 \quad (4.20)$$

$$\psi_n(L) = 0 \quad (4.21)$$

ψ_n são as autofunções associadas aos autovalores λ_n , sendo $n = 0, 1, 2, \dots$

Na tabela apresentada por Özisik e Murray (1974), encontramos a solução do problema:

$$\psi_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x)$$

Considerando as condições de contorno estabelecidas na Equação (4.21), temos:

$$\psi_n(L) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\lambda_n L) = 0,$$

Assim:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.22)$$

A próxima etapa é normalizar a autofunção, utilizando a propriedade da ortogonalização de ψ_n :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^L \psi_m \psi_n dx = \begin{cases} N_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Segundo a tabela encontrada no trabalho de Özisik e Murray (1974),

$$N_n = \int_0^L \psi_n^2 dx = \int_0^L \text{sen}^2(\lambda_n x) dx = \frac{L}{2}.$$

A autofunção normatizada é dada por:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{N_n^{1/2}} \Rightarrow \tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\lambda_n x).$$

Prosseguindo com a técnica, vamos obter o par transformada-inversa:

$$\bar{u}_n(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) u_h(x, t) dx : \text{Transformada} \quad (4.23)$$

$$u_h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n(x) \bar{u}_n(t) : \text{Fórmula de Inversão} \quad (4.24)$$

Observamos que:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_m(x) \bar{u}_m''(t) \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_m''(x) \bar{u}_m(t) \quad (4.26)$$

Aplicando o operador $\int_0^L \tilde{\psi}_n(x) dx$ na Equação (4.14) e substituindo as Equações (4.25) e

(4.26), temos:

$$\int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} dx = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) c^2 \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \right) dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_m(x) \bar{u}_m''(t) dx = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_m''(x) \bar{u}_m(t) dx \Rightarrow \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m''(t) \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x) dx = c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m(t) \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m''(x) dx \Rightarrow \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m''(t) \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x) dx = c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m(t) \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) (-\lambda_m^2 \psi_m(x)) dx \Rightarrow \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m''(t) \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x) dx = -c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m \lambda_m^2 \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x) dx \Rightarrow \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m''(t) \delta_{mn} = -c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{u}_m \lambda_m^2(t) \delta_{mn} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

com $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$ (delta de Kronecker) e

Desta forma, obtemos um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem, lineares, homogêneas e infinitas que, representado na forma matricial, será:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_0''(t) \\ \bar{u}_1''(t) \\ \vdots \\ \bar{u}_n''(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0^2 c^2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1^2 c^2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_n^2 c^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_0(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{u}_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

O sistema acima se reduz ao problema de valor inicial:

$$\bar{u}_n''(t) = -c^2 \lambda_n^2 \bar{u}_n(t) \tag{4.28}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Considerando as condições iniciais dadas pelas Equações (4.15) a (4.18) e a transformada Equação (4.23) temos, no ponto $t = 0$:

$$\bar{u}_n(0) = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) (f(x) - u_0) dx \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n(t)}{\partial t} = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \frac{\partial u_h}{\partial t} dx \Rightarrow \left. \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) \left. \frac{\partial u_h}{\partial t} \right|_{t=0} dx \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) g(x) dx \quad (4.30)$$

A solução do PVI é:

$$\bar{u}_n(t) = c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t) \quad (4.31)$$

Para determinar c_1 usamos a Equação (4.31) em $t = 0$:

$$\bar{u}_n(0) = c_1 \Rightarrow$$

$$c_1 = \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) (f(x) - u_0) dx \quad (4.32)$$

Para determinar c_2 , derivamos (4.31) obtendo:

$$\frac{\partial \bar{u}_n(t)}{\partial t} = -c\lambda_n c_1 \text{sen}(c\lambda_n t) + c\lambda_n c_2 \cos(c\lambda_n t) \quad (4.33)$$

e usamos a Equação (4.33) em $t = 0$:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} \right|_{t=0} = c\lambda_n c_2 \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{1}{c\lambda_n} \int_0^L \tilde{\psi}_n(x) g(x) dx \quad (4.34)$$

Desta forma, a Equação (4.31), com as Equações (4.33) e (4.34), fica bem determinada.

Pela Fórmula de inversão, Equação (4.24), temos:

$$u_h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n(x) (c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t))$$

e substituindo $\tilde{\psi}_n(x)$ pelo seu valor $\sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\lambda_n x)$, temos:

$$u_h(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\lambda_n x) [c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t)] \quad (4.35)$$

Utilizando a Equação (4.6), obtemos a solução do problema inicial:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\lambda_n x) [c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t)] + u_0$$

Portanto a solução via TTIC, do problema especificado pelas Equações (4.1) a (4.5) é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\lambda_n x) [c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t)] + u_0 \quad (4.36)$$

sendo c_1 e c_2 dados pelas Equações (4.32) e (4.34).

Esta solução encontrada via TTIC pode ser validada pela solução de problema semelhante que consta no trabalho de Zill e Cullen (2001).

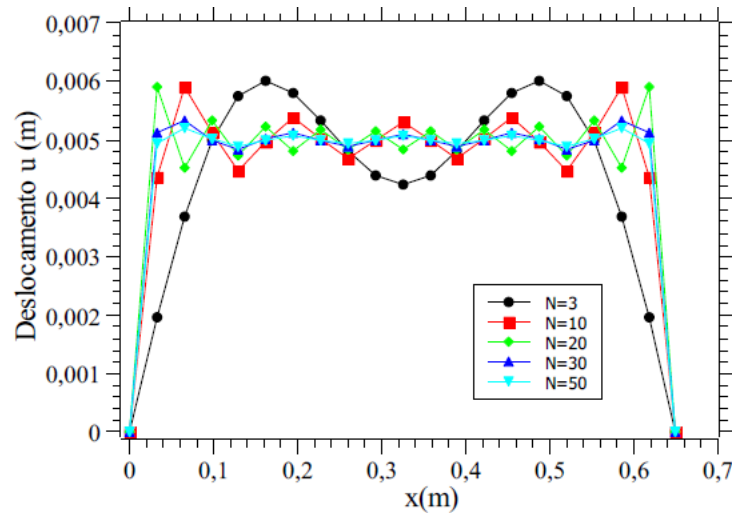
4.1.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analisaremos o efeito de se tocar a corda mi (aguda) de um violão, que a princípio se encontrava em repouso. Essa corda é constituída de uma liga de aço (predominantemente ferro), onde será aplicada uma força para tirá-la do repouso.

Para ilustrar esta aplicação consideraremos os seguintes parâmetros para a análise: $L = 0,65m$, $c = 2,3558 \cdot 10^{-6} m s^{-1}$, $t = 1s$, $u_0 = 0 m s^{-1}$, $f(x) = 5 \cdot 10^{-3} m$ e $g(x) = 0 m s^{-1}$.

Foram geradas soluções para o deslocamento u (em metros), utilizando os seguintes valores de truncamento $N = 3$, $N = 10$, $N = 20$, $N = 30$ e $N = 50$, conforme mostrado na Figura 2:

Figura 2. Perfil de deslocamento unidimensional considerando vários valores de truncamento.



Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando os dados obtidos pelo gráfico, percebemos que quanto mais a ordem de truncamento N aumenta, mais o deslocamento representado no gráfico se aproxima do deslocamento inicial $f(x)$, indicando que quando N for infinitivamente grande o gráfico será uma reta com deslocamento igual a $f(x)$.

O gráfico da solução da Onda Unidimensional foi gerado pelo *software SciDaVis* e os valores do deslocamento unidimensional foram gerados por meio do *software SAGE*.

4.2. EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL – RESOLUÇÃO VIA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O problema para equação da onda bidimensional em um intervalo finito se refere a uma superfície, que será, neste caso, representada por uma membrana retangular constituída de material homogêneo, de comprimento L_x e largura L_y , presa nas bordas; $u(x, y, t)$ é o deslocamento transversal no ponto x, y no instante t ; e as funções f e g descrevem a posição e a velocidade iniciais respectivamente. Assim:

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$ um aberto limitado de fronteira Γ , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ e $\Sigma = \Gamma \times (0, +\infty)$. Procuramos uma função u , tal que $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty))$, então, para o problema que vamos considerar temos:

$\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \subset \mathbb{R}^2$, $L_x > 0$ e $L_y > 0$, $\bar{\Omega}$ a membrana retangular constituída de material

homogêneo e o bordo Γ formado pelas arestas do retângulo $[0, L_x] \times [0, L_y]$.

O Problema de Valor de Contorno (PVC) será constituído conforme as equações:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ em } Q \quad (4.37)$$

com c constante e,

$$u(0, y, t) = 0, \quad y \in [0, L_y], t \in [0, \infty), \quad (4.38)$$

$$u(L_x, y, t) = 0 \quad y \in [0, L_y], t \in [0, \infty), \quad (4.39)$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad x \in [0, L_x], t \in [0, \infty), \quad (4.40)$$

$$u(0, L_y, t) = 0 \quad x \in [0, L_x], t \in [0, \infty), \quad (4.41)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4.42)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4.43)$$

com $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$.

A posição, no tempo $t = 0$, chamamos de deslocamento inicial e indicamos $u(x, y, 0)$ e a velocidade inicial indicamos por $u_t(x, y, 0)$.

4.2.1. RESOLUÇÃO VIA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Iniciamos o método, fazendo a separação das variáveis na forma de um produto de três funções de uma variável:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (4.44)$$

sendo X , Y e T funções diferenciáveis de classe, no mínimo, relativas às variáveis x , y e t

respectivamente. Assim, temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)Y(y)\frac{d^2 T(t)}{dt^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}Y(y)T(t)$ e

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}T(t)$. Substituindo estas expressões na Equação (4.37), obtemos:

$$X(x)Y(y)T_{tt}(t) = c^2 \left(X_{xx}(x)Y(y)T(t) + X(x)Y_{yy}(y)T(t) \right)$$

onde consideramos $T_{tt}(t) = \frac{d^2 T}{dt^2}$, $X_{xx}(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$ e $Y_{yy}(y) = \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}$.

Na expressão acima, dividimos ambos os lados por $c^2 X(x)Y(y)T(t) \neq 0$, para $x \in [0, L_x]$, $y \in [0, L_y]$ e $t \in [0, +\infty]$, daí obtendo:

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} \frac{1}{c^2} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}. \quad (4.45)$$

Desta forma, o lado esquerdo da Equação (4.45) depende exclusivamente de t e, o lado direito, depende das variáveis x e y . Assim sendo, podemos representar cada lado desta equação pela constante $-k^2$, portanto temos que:

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} \frac{1}{c^2} = -k^2 \quad (4.46)$$

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -k^2. \quad (4.47)$$

Reorganizado a Equação (4.47) fazemos:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} - k^2 \quad (4.48)$$

Analogamente ao que foi feito na Equação (4.45), cada lado da Equação (4.48) pode

ser igualado a constante $-\delta^2$, já que o lado esquerdo depende exclusivamente da variável x e o direito, da variável y . Assim temos:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\delta^2, \text{ e} \quad (4.49)$$

$$-\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} - k^2 = -\delta^2. \quad (4.50)$$

Considerando:

$$-\sigma^2 = \delta^2 - k^2, \quad (4.51)$$

temos:

$$\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -\sigma^2. \quad (4.52)$$

Portanto, ficamos com três EDOs para resolver, as Equações (4.46), (4.49) e (4.52).

Considerando as condições de contorno (4.38) a (4.43) e a Equação(4.52), temos:

$$\begin{aligned} r^2 - \sigma^2 &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{\sigma^2}i \Rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = \sigma = \lambda_1 \end{aligned}$$

A solução geral da Equação (4.52) é dada por:

$$Y(y) = e^{\alpha y} [c_1 \cos(\beta y) + c_2 \text{sen}(\beta y)] \quad (4.53)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} Y(0) = c_1 = 0 \\ Y(L_y) = c_1 \cos(\lambda_1 L_y) + c_2 \text{sen}(\lambda_1 L_y). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$Y(L_y) = c_2 \text{sen}(\lambda_1 L_y) = 0,$$

e considerando, sem perda da generalidade, $c_2 = 1$, temos:

$$\text{sen}\lambda_1 L_y = 0.$$

Logo, os autovalores são dados por:

$$\lambda_{1_n} = \frac{n\pi}{L_y}, \text{ com } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.54)$$

A partir de Equação (4.53) e utilizando a Equação (4.54) obtemos as autofunções:

$$Y(y) = \text{sen} \frac{n\pi y}{L_y} \quad (4.55)$$

Considerando as condições de contorno (4.38) e (4.39) e a Equação (4.49) temos:

$$r^2 - \delta^2 = 0$$

$$r = \pm \sqrt{\rho^2} i \Rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = \delta = \lambda_2$$

A solução geral da Equação (4.49) é dada por:

$$X(x) = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \text{sen}(\beta x)] \quad (4.56)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(L_x) = c_1 \cos(\lambda_2 L_x) + c_2 \text{sen}(\lambda_2 L_x) \end{cases} \quad (4.57)$$

Resolvendo o sistema temos:

$$X(L_x) = c_2 \text{sen}(\lambda_2 L_x) = 0$$

e como $c_2 \neq 0$,

$$\text{sen}\lambda_2 L_x = 0$$

Logo, os autovalores são dados por:

$$\lambda_{2_m} = \frac{m\pi}{L_x}, \text{ com } m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.58)$$

A partir de Equação (4.56) e utilizando a Equação (4.58) obtemos as autofunções:

$$X(x) = \text{sen} \frac{m\pi x}{L_x}$$

Pela Equação (4.51), e lembrando que $\sigma = \lambda_1$ e $\delta = \lambda_2$ obtemos:

$$k = \sqrt{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2m}^2} = \lambda_{mn}, \text{ com } m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.59)$$

Considerando a Equação (4.46) e sabendo pela Equação (4.59) que, $k > 0$, temos:

$$r^2 - k^2 c^2 = 0$$

$$r = \pm c\sqrt{k^2}i \Rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = ck = c\lambda_{mn}$$

A solução geral da Equação (4.46) é dada por:

$$T(t) = e^{\alpha t} [c_1 \cos(\beta t) + c_2 \text{sen}(\beta t)],$$

assim temos:

$$T(t) = c_1 \cos(c\lambda_{mn}t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_{mn}t).$$

Como c_1 e c_2 são constantes arbitrárias reescrevemos $c_1 = a_{mn}$ e $c_2 = b_{mn}$, assim a solução da EDO é:

$$T(t) = a_{mn} \cos(c\lambda_{mn}t) + b_{mn} \text{sen}(c\lambda_{mn}t)$$

com

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2} \quad (4.60)$$

Substituindo $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$ encontrados na Equação (4.44), obtemos:

$$u(x, y, t) = \left[\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \right] \left[\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \right] + [a_{mn} \cos(c\lambda_{mn}t) + b_{mn} \text{sen}(c\lambda_{mn}t)] \Rightarrow$$

$$u(x, y, t) = a_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos(c\lambda_{mn}t) + b_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \text{sen}(c\lambda_{mn}t)$$

com λ_{mn} representado por (4.60).

Sendo $m=1,2,3,\dots$ e $n=1,2,3,\dots$, são várias as soluções, logo, pelo Princípio da Superposição,

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, t),$$

temos infinitas soluções que podem ser representadas por:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos(c\lambda_{mn}t) + b_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}(c\lambda_{mn}t) \right]. \quad (4.61)$$

Para encontrar a_{mn} , consideramos $t=0$ na Equação (4.61), obtendo:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right).$$

Sendo esta uma série dupla de senos, seus coeficientes de Fourier são:

$$a_{m,n} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy, \quad (4.62)$$

Para encontrar b_{mn} devemos calcular a derivada, com relação a t , de $u(x, y, t)$ obtendo:

$$u_t(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[-a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}(c\lambda_{mn}t) \lambda_{mn} + b_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos(c\lambda_{mn}t) \lambda_{mn} \right] \quad (4.63)$$

Aplicando as condições iniciais de (4.43) na Equação (4.63), temos:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) c\lambda_{mn} \Rightarrow \\ \Rightarrow g(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} [b_{mn} c\lambda_{mn}] \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned}$$

Sendo a função uma série dupla de senos, seus coeficientes de Fourier são:

$$b_{mn}c\lambda_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{mn} = \frac{4}{L_x L_y c \lambda_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (4.64)$$

Portanto, a solução do problema descrito pelas Equações (4.37) a (4.43) é:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos(c\lambda_{mn}t) + b_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}(c\lambda_{mn}t) \right\} \quad (4.65)$$

Com a_{mn} , b_{mn} e λ_{mn} expressos pelas Equações (4.62), (4.64) e (4.60) respectivamente.

A solução acima é validada pelo trabalho de Biezuner (2007).

4.2.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL

Para a Equação Bidimensional da Onda que desenvolvemos acima, podemos considerar o movimento de uma membrana esticada, por exemplo, o toque de um instrumento de percussão. Para analisá-la de maneira mais genérica, precisamos admitir alguns pressupostos que correspondem a pequenas deflexões de uma membrana muito fina.

Admitimos que a membrana seja homogênea e flexível, que está fixada e esticada ao longo de seu contorno que coincide com os planos x e y . Além disso, consideramos a tração causada pelo esticamento igual em todos os pontos e direções da membrana.

Então teremos o comprimento horizontal da membrana representado por L_x , o comprimento vertical representado por L_y , a constante de velocidade de propagação da onda por c , e determinaremos por $u(x, y, t)$ o deslocamento horizontal da membrana, em um determinado tempo t , quando aplicado sobre ela um deslocamento (x, y) .

Conforme impomos alterações aos parâmetros x, y, t , individualmente ou combinados, observamos alterações em $u(x, y, t)$. Essas alterações podem ser representadas através de gráficos que, comparados, dão uma visão clara das interferências que a mudança em cada parâmetro pode causar, assim contribuindo para estudos mais específicos em relação à Equação Bidimensional da Onda.

Conclusões e Sugestões

O objetivo deste trabalho foi apresentar as soluções analíticas da Equação Diferencial Parcial da Onda Unidimensional e Bidimensional. Os resultados encontrados nos levam a concluir que as soluções analíticas são de grande utilidade como soluções suporte para realizar análise e comparação com métodos numéricos.

Por meio da construção de gráficos por meios computacionais, podemos identificar quais as mudanças provocadas ao se propor alterações nos parâmetros presentes nas Equações da Onda, Uni e Bidimensional e, por meio de comparações, analisar os efeitos físicos provocados por estas alterações.

Para trabalhos futuros, seguindo a mesma linha de pesquisa, a sugestão é desenvolver um modelo bidimensional, por exemplo, analisar as características das ondas produzidas ao tocar um cajón (instrumento de percussão), construir gráficos que representem estas ondas e, por meio desses gráficos, estudar o comportamento das ondas quando impomos alterações nos parâmetros iniciais. Esperamos com este estudo contribuir com suporte para trabalhos futuros realizados neste tema.

Referências Bibliográficas

BIEZUNER, R. J. Equações Diferenciais Parciais Lineares. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/rodney>. Acesso em: 15/12/2020.

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro:Guanabara Dois, 2012.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 4.ed. São Paulo: Atual, 1983.

COTTA, R.M. Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC Press, Inc., Boca Raton. USA, 1993.

FIGUEIREDO, D.G. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq,1977.

HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER,J. Fundamentos da Física, volume1: mecânica. 10.ed. Rio de Janeiro:LTC, 2016.

IÓRIO, Valéria. EDP: Um Curso de Graduação. 4.ed. Rio de Janeiro, 2018.

MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M.N. (1984). Unifield Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, John Wiley. New York, 1984.

ÖZISIK, M.N., MURRAY, R.L. On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions, J. Heat Transfer, v.96, p.48-51, 1974.

SageMathematics Software System (Version 7.2), Disponível em: <https://www.sagemath.org/>. Acesso em: 17/12/2020.

SciDavis Software. Disponível em: <http://www.scidavis.sourceforge.net>, 2014. Acesso em: 17/12/2020.

SCOFANO NETO, F. et al. Alternative Analytical Approach to Diffusion Problems with General Coupling at the Boundaries”, Anais do X Congr. Bras. Eng. Mecânica, p.173-176, Rio de Janeiro, 1989.

STEWART, I. Dezesete equações que mudaram o mundo: Zahar, 2013.

VENEZUELA, A. L. Modelagem analítico–numérica do escoamento laminar convectivo em tubos associada à filtração tangencial. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2008.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações Diferenciais- volume 2.3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 200