



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-graduação em Matemática

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam para aplicações entre toros

Givanildo Donizeti de Melo

orientador: *Daniel Vendruscolo*

São Carlos
Março de 2021

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam para aplicações entre toros

Givanildo Donizeti de Melo

orientador: *Daniel Ventrúscolo*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação, para
obtenção do título de doutor em Matemática área de
concentração topologia algébrica. Universidade Federal
de São Carlos.

São Carlos
Março de 2021



Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Givanildo Donizeti de Melo, realizada em 25/03/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Vandrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos (UFSCar)

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi (UNESP)

Prof. Dr. Vinicius Casteluber Laass (UFBA)

Profa. Dra. Thais Fernanda Mendes Monis (UNESP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde, força e sabedoria para vencer os obstáculos da vida, além da oportunidade de seguir a carreira acadêmica.

Aos meus pais, José Roberto e Ivanilda por me incentivar nos estudos, pela ajuda financeira e principalmente pelas orações nos momentos difíceis. À minha irmã Jaqueline pelo companheirismo e pela torcida.

À minha namorada, Pollyane, pela parceira de sempre. Apoiando minhas decisões, fazendo críticas quando necessário e comemorando minhas vitórias.

Agradeço todos os professores que contribuíram no meu desenvolvimento, com ensinamentos e conselhos que foram e serão úteis. Em especial ao meu orientador de doutorado, Daniel, pela dedicação e todas as orientações.

Agradeço também todos os amigos e colegas que conviveram comigo ao longo desta trajetória de dez anos, pelos cursos de graduação, mestrado e doutorado. Não irei ter a audácia de citar nomes para não correr o risco de esquecer alguém.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim a todos que colaboraram no desenvolvimento da minha carreira. Obrigado!

Resumo

O número de Nielsen-Borsuk-Ulam é um limitante inferior para o número de pares de pontos de coincidências que satisfazem $f(x) = f(\tau(x))$ em uma dada classe de homotopia. Neste texto é calculado o número de Nielsen-Borsuk-Ulam, $\text{NBU}(f, \tau)$, para qualquer função contínua $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ onde \mathbb{T}^n é o toro de dimensão n com $n \leq 3$ e τ é uma involução livre em \mathbb{T}^n qualquer. Além disso, conclui-se que os toros \mathbb{T}^1 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{T}^3 são espaços de Wecken na teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam e que as triplas $(\mathbb{T}^n, \tau; \mathbb{T}^n)$ não têm a propriedade de Borsuk-Ulam para qualquer involução livre τ .

Abstract

The Nielsen-Borsuk-Ulam number is a lower bound for the minimal number of pair of coincidences points such that $f(x) = f(\tau(x))$ in a given homotopy class of maps. In this text the Nielsen-Borsuk-Ulam number, $\text{NBU}(f, \tau)$, is calculated for any maps $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ where \mathbb{T}^n is the torus of dimension n with $n \leq 3$ and τ is any free involution in \mathbb{T}^n . Furthermore, it is concluded that the tori \mathbb{T}^1 , \mathbb{T}^2 and \mathbb{T}^3 are Wecken spaces in the Nielsen-Borsuk-Ulam theory and that the triple $(\mathbb{T}^n, \tau; \mathbb{T}^n)$ don't have the Borsuk-Ulam property for any free involution τ .

Lista de Figuras

3.1	$\text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 para $p = 4$.	15
3.2	$\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 para $p = 4$.	17
3.3	Divisão das classes de coincidências Borsuk-Ulam do $\text{BUCoin}(f', \tau_2)$, $p = 4$.	17
3.4	As classes de coincidências Borsuk-Ulam do $\text{BUCoin}(f'', \tau_2)$.	19
3.5	Os índices de coincidências dos pontos de $\text{Coin}(f'', f'' \circ \tau_2)$.	20

Sumário

Introdução	xiii
1 Noções da Teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam	1
1.1 Número de Nielsen	2
1.2 Toro \mathbb{T}^n	5
1.3 Propriedade de Borsuk-Ulam	6
1.4 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam	7
2 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^1	11
3 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^2	13
4 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^3	23
4.1 NBU para a involução $h_1(x, y, z) = (x, y, z + \frac{1}{2})$	24
4.2 NBU para a involução $h_3(x, y, z) = (x, -y, z + \frac{1}{2})$	25
4.3 NBU para a involução $h_4(x, y, z) = (x + y, -y, z + \frac{1}{2})$	27
4.4 NBU para a involução $h_2(x, y, z) = (-x, -y, z + \frac{1}{2})$	29
4.5 Teorema do NBU em \mathbb{T}^3	40
5 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em $\mathbb{T}^n, n > 3$	43
A Realização do NBU em \mathbb{T}^2	45

Introdução

Na literatura pode-se encontrar diferentes generalizações do clássico Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações da esfera S^n no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Para uma boa revisão histórica e vários outros aspectos, indica-se [Matoušek](#).

Uma possível generalização pode ser a seguinte: dados dois espaços topológicos X e Y e uma involução livre τ em X pode-se perguntar se a tripla $(X, \tau; Y)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam, isto é, se para toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(\tau(x))$.

Neste contexto o Teorema clássico afirma que a tripla $(S^n, \text{antipodal}; \mathbb{R}^n)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam. Em [Gonçalves](#) esta abordagem foi usada para estudar a propriedade de Borsuk-Ulam para superfícies com aplicação em \mathbb{R}^2 , indicando que a resposta pode depender da involução, isto é, a mesma superfície pode ter esta propriedade em relação à involução τ_1 , mas não para outra involução τ_2 .

Em [Gonçalves & Guaschi](#) os autores discutem as triplas $(X, \tau; S)$ com a propriedade de Borsuk-Ulam em que X é um CW -complexo, τ é uma involução celular e S é uma superfície conexa, compacta e sem bordo, usando grupo de tranças da superfície.

Mais recentemente, em [Gonçalves, Guaschi & Laass](#), foi demonstrado que a tripla $(X, \tau; Y)$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam, mas algumas classes de homotopia de auto-aplicação de superfícies com característica de Euler zero podem ter tal propriedade.

Desta perspectiva, ao investigar para quais classes de homotopia de aplicações $f : X \rightarrow Y$ é válido que para qualquer f' em tal classe, existe um ponto $x \in X$ tal que $f'(x) = f'(\tau(x))$, os estudos [Cotrim & Ventrúscolo,1](#), [Cotrim & Ventrúscolo,2](#) assumiram outra abordagem. Usando ideias da teoria de Nielsen de pontos fixos, foram definidas classes de Nielsen-Borsuk-Ulam e o número de Nielsen-Borsuk-Ulam, $\text{NBU}(f, \tau)$, para uma classe de homotopia de aplicações entre variedades compactas, sem bordo, orientáveis e trianguláveis. Tal invariante é um limitante inferior na classe de homotopia para o número de pares de pontos satisfazendo $f(x) = f(\tau(x))$.

Neste trabalho é realizado o cálculo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam para auto-aplicações do toro (\mathbb{T}^n) em dimensões baixas, mais especificamente $n = 1, 2, 3$. Com isso, pode-se estimar quais classes de homotopia $[\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n]$ ($n \leq 3$) têm a propriedade de Borsuk-Ulam e qual é o número mínimo de pares de coincidências. Além disso, mostra-se que os toros \mathbb{T}^1 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{T}^3 são espaços de Wecken para a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Os principais resultados desta tese obtidos através do cálculo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^1 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{T}^3 são respectivamente os teoremas 2.1, 3.3 e 4.1. É interessante notar que como consequência destes teoremas as triplas $(\mathbb{T}^n, \tau; \mathbb{T}^n)$ não têm a propriedade de Borsuk-Ulam, para qualquer involução livre τ em \mathbb{T}^n .

Nas demonstrações dos teoremas 2.1, 3.3 e 4.1 um mesmo raciocínio é adotado, dada uma função contínua f , que representa uma classe de homotopia, mostra-se que existe uma pequena perturbação de f nesta mesma classe, normalmente denotada por f' , tal que f' realiza o número de Nielsen-Borsuk-Ulam.

No capítulo 1 apresenta-se noções preliminares para o desenvolvimento desta tese como por exemplo: os conceitos da teoria de Nielsen, as propriedades do toro, a propriedade de Borsuk-Ulam e sua relação com o estudo de coincidências e por fim os conceitos da teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Nos capítulos 2, 3 e 4 encontram-se de modo detalhado os cálculos do número de Nielsen-Borsuk-Ulam para auto-aplicações dos toros \mathbb{T}^1 , \mathbb{T}^2 e \mathbb{T}^3 , respectivamente, e os principais resultados deste trabalho.

Finalmente o capítulo 5 traz um estudo de uma possível generalização do número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^n para $n > 3$. O autor comenta algumas involuções livres em \mathbb{T}^n e algumas classes de homotopia para as quais o $\text{NBU}(f, \tau)$ foi calculado, enunciando uma conjectura sobre os possíveis números de Nielsen-Borsuk-Ulam de auto-aplicações de \mathbb{T}^n .

Capítulo 1

Noções da Teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam

Neste capítulo apresenta-se noções e resultados preliminares que serão úteis no desenvolvimento desta tese de doutorado. O estudo de pontos fixos apareceu inicialmente nos trabalhos de Poincaré na década de 1880, pouco depois em 1905 o Teorema do ponto fixo de Brouwer ajudou no desenvolvimento da teoria de pontos fixos, com o objetivo de garantir a existência de um ponto fixo. Na década de 1920 os trabalhos de Jacob Nielsen discutiam questões sobre o número mínimo de pontos fixos para auto-aplicações em superfícies, em especial no toro. Nielsen criou um invariante que hoje é conhecido como número de Nielsen, o qual estima o número mínimo de pontos fixos. Em alguns trabalhos publicados entre 1923 e 1927, Lefschetz generalizou o resultado de Brouwer para coincidências sob a hipótese de que os espaços envolvidos fossem variedades compactas orientáveis de mesma dimensão. Este é talvez o começo da teoria da coincidência. Em resumo, o objetivo desta teoria é estimar o número mínimo de pontos de coincidências entre duas funções contínuas em uma dada classe de homotopia, utilizando o número de Nielsen para coincidências.

Recentemente Cotrim e Ventrúscolo criaram o número de Nielsen-Borsuk-Ulam, $NBU(f, \tau)$, para estimar o número mínimo de pares de coincidências satisfazendo $f(x) = f(\tau(x))$, em que $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua entre variedades compactas, sem bordo, orientáveis, trianguláveis, de mesma dimensão e τ é uma involução livre de pontos fixos em X . Neste contexto o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é um estimador, para o número mínimo de coincidências, melhor do que o tradicional número de Nielsen de coincidências. Na seção [1.1](#) apresentam-se noções básicas do número de Nielsen, de forma resumida. Na seção [1.2](#) define-se o espaço topológico conhecido como toro de dimensão n , indicado por \mathbb{T}^n , e algumas propriedades deste espaço. Na seção [1.3](#), a propriedade de Borsuk-Ulam é definida e comenta-se a relação desta propriedade com a teoria de coincidências. Finalmente, na seção [1.4](#) apresentam-se as definições e principais resultados sobre o número de Nielsen-Borsuk-Ulam.

1.1 Número de Nielsen

Esta seção contém definições, observações e resultados básicos para compreensão do número de Nielsen para coincidências. Os conceitos apresentados podem ser encontrados em [\[Handbook\]](#). O interesse do autor é trabalhar com o toro, com isso as definições e resultados serão enunciados para variedades compactas, conexas, sem bordo e orientáveis.

Sejam X e Y variedades compactas, conexas, sem bordo e orientáveis. Considere duas funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ quaisquer. Defina o conjunto de coincidências entre as funções f e g por:

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Um elemento deste conjunto, $x \in \text{Coin}(f, g)$, é chamado ponto de coincidência ou simplesmente coincidência.

Note que escolhendo outros representantes para as classes de homotopia de f e g , representadas por $[f]$ e $[g]$, respectivamente, o conjunto de coincidências geralmente muda, isto é, se $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$ então, em geral, $\text{Coin}(f, g) \neq \text{Coin}(f', g')$. A teoria de coincidências estuda propriedades relacionadas a esses conjuntos. Uma propriedade interessante neste texto, diz respeito ao número mínimo de coincidências desta família de conjuntos.

Defina o número mínimo de coincidências do par de funções (f, g) , denotado por $\text{MC}[f, g]$, por

$$\text{MC}[f, g] = \min_{f' \in [f] \text{ e } g' \in [g]} \# \text{Coin}(f', g').$$

O leitor pode se perguntar a respeito da finitude de $\text{MC}[f, g]$, a resposta desta questão é a seguinte: adicionando a hipótese que os espaços possuem a mesma dimensão, $\dim X = \dim Y$, tem-se que todo par de funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ pode ser deformado a um par (f', g') tal que $\text{Coin}(f', g')$ é finito, [\[Schirmer\]](#). Assim, $\text{MC}[f, g]$ será finito.

Continuando o estudo do conjunto de coincidências, pode-se definir uma relação de equivalência neste conjunto:

Definição 1.1. Dois pontos de coincidências $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f, g)$ são Nielsen equivalentes se existe um caminho λ em X tal que $\lambda(0) = x_0$, $\lambda(1) = x_1$ e $f \circ \lambda$ é homotópico a $g \circ \lambda$, relativo aos pontos extremos. Uma classe de equivalência é chamada de classe de Nielsen (ou classe de coincidências).

Observação 1.2. Cada classe de coincidências é aberta e fechada em $\text{Coin}(f, g)$.

A definição [\[1.1\]](#) divide o conjunto de coincidências em classes de coincidências de um modo geométrico. No entanto, há uma definição equivalente para classes de coincidências que utiliza a teoria de recobrimento.

Uma classe de coincidências C é um subconjunto de $\text{Coin}(f, g)$ da forma $p(\text{Coin}(\gamma \circ \tilde{f}, \tilde{g}))$, em que $p_X : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento universal de X , $p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$ é um

recobrimento universal de Y , γ é uma transformação de recobrimento de \tilde{X} e $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ são levantamentos das funções contínuas f e g , respectivamente.

Deste modo, obtém-se as seguintes afirmações:

- (i) $\text{Coin}(f, g) = \bigcup p(\text{Coin}(\tilde{f}, \tilde{g}))$;
- (ii) $p(\text{Coin}(\tilde{f}, \tilde{g})) = p(\text{Coin}(\tilde{f}', \tilde{g}'))$ se $[(\tilde{f}, \tilde{g})] = [(\tilde{f}', \tilde{g}')]$;
- (iii) $p(\text{Coin}(\tilde{f}, \tilde{g})) \cap p(\text{Coin}(\tilde{f}', \tilde{g}')) = \emptyset$ se $[(\tilde{f}, \tilde{g})] \neq [(\tilde{f}', \tilde{g}')]$,

onde $[(\tilde{f}, \tilde{g})]$ indica a classe de levantamento do par (f, g) , isto é, $[(\tilde{f}, \tilde{g})] = \{(\tilde{f}', \tilde{g}') \mid \tilde{f} = \gamma \circ \tilde{f}' \circ \gamma^{-1} \text{ e } \tilde{g} = \mu \circ \tilde{g}' \circ \mu^{-1}\}$ em que γ e μ são transformações de recobrimento. Portanto, o conjunto de coincidências $\text{Coin}(f, g)$ se divide em uma união disjunta de classes de coincidências.

Após dividir o conjunto de coincidências em classes de equivalência, associa-se a cada classe de coincidências um número, denominado índice. O índice é uma ferramenta algébrica que permite avaliar a estabilidade (ou essencialidade) dos pontos de coincidência de cada uma das classes.

Durante os anos 1880's Poincaré estudou distribuição de vetores em superfícies. Para uma singularidade isolada de uma distribuição ele atribuiu um número inteiro (índice). A criação deste índice foi o primeiro passo algébrico para contar os pontos fixos de uma aplicação. Observe que a teoria de índice surgiu antes da teoria de Nielsen.

Na literatura há diversas definições de índice, que variam de acordo com os espaços envolvidos. Por exemplo, em [Vick] o autor define uma teoria de índice para variedades compactas, conexas, sem bordo, orientáveis de mesma dimensão, já no artigo [Dobrenko & Jezierski] foi definido um índice para variedades não orientáveis, e em [Jezierski & Marzantowicz] definiram um índice de ponto fixo para funções suaves em espaços euclidianos.

A noção de índice de coincidência em [Vick, página 189] para variedades orientáveis, estuda o índice em um subconjunto aberto da variedade, desde que o conjunto de coincidências do par de aplicações, neste aberto, seja compacto. A definição de índice de [Vick] satisfaz algumas propriedades da teoria de índice, que são conhecidas como: localização, unidade, aditividade, invariância homotópica e outras.

Para efeito de cálculo, o índice em [Vick] não é adequado, no entanto, existem versões mais computáveis quando o conjunto de coincidências é um conjunto discreto. O índice em [Vick] de uma coincidência isolada coincide com o grau local de uma aplicação, assim este índice é uma generalização do índice de ponto fixo isolado apresentado em [Jezierski & Marzantowicz]. Como é possível deformar o conjunto de coincidências tal que ele seja finito, logo discreto, e o toro é localmente um espaço euclidiano, vamos utilizar esta versão de índice neste trabalho.

A generalização do índice de ponto fixo apresentado em [Jezierski & Marzantowicz, Definição 2.2.2] é a seguinte:

Definição 1.3. Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções suaves transversais tais que $\text{Coin}(f, g)$ é um conjunto discreto (logo compacto) e U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n com $U \cap \text{Coin}(f, g) = \{x_0\}$. Definimos o índice de coincidência de x_0 como

$$\text{ind}(f, g; x_0) = \text{sgn}(dG_{x_0}),$$

em que $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por $G(x) = f(x) - g(x)$ e o $\text{sgn}(dG_{x_0})$ significa o sinal do determinante da matriz do diferencial da função G em x_0 , isto é, se o determinante de dG_{x_0} é positivo então $\text{sgn}(dG_{x_0}) = 1$, caso contrário, $\text{sgn}(dG_x) = -1$.

Pode-se calcular o índice de coincidência de uma classe C , desde que C seja finita, por

$$\text{ind}(f, g; C) = \sum_{x \in C} \text{sgn}(dG_x).$$

Agora é possível classificar as classes de coincidências do seguinte modo:

Definição 1.4. Uma classe de coincidências de Nielsen é chamada essencial se seu índice é diferente de zero. Caso contrário, a classe é dita não essencial.

Definição 1.5 (Número de Nielsen). O número de Nielsen do par (f, g) , denotado por $N(f, g)$, é o número de classes essenciais, isto é,

$$N(f, g) = \#\{C \mid \text{ind}(f, g; C) \neq 0\},$$

indica-se por C as classes de coincidências.

Os teoremas [1.6](#) e [1.7](#) apresentados em [\[Handbook\]](#) Teorema 5.8, Teorema 5.9] são dois resultados clássicos importantíssimos para a teoria de coincidências.

Teorema 1.6. *O número de Nielsen é um invariante homotópico, e*

$$N(f, g) \leqslant MC[f, g].$$

Em outras palavras, o teorema [1.6](#) garante que $N(f', g') = N(f, g)$ para quaisquer $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$. Além disso, o número de Nielsen é um limitante inferior para o número mínimo de coincidências.

Um tradicional problema estudado na teoria de coincidências (e também na teoria de pontos fixos) é o problema de realização: dadas duas função contínuas f e g , existem $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$ tais que $N(f, g) = MC[f, g] = \#\text{Coin}(f', g')$? Uma resposta deste problema encontra-se no teorema [1.7](#).

Teorema 1.7. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas entre variedades compactas, conexas, sem bordo, orientáveis, de mesma dimensão $\geqslant 3$. Então*

$$N(f, g) = MC[f, g]$$

O teorema [1.7](#) é conhecido como Teorema de Wecken (ou Teorema tipo Wecken), pois na década de 1940 Wecken provou esta questão para a teoria de pontos fixos. Porém foi Schirmer, em 1955, que provou este resultado para coincidências em variedades orientáveis. Dobrenko e Jezierski em 1993 provaram que o teorema [1.7](#) também é válido para as variedades não orientáveis.

Quando $N(f, g) = MC[f, g]$ dizemos que o par de funções (f, g) tem a propriedade de Wecken, ou que o número de Nielsen é realizável. Dizemos que o par de espaços (X, Y) é um espaço de Wecken, se para quaisquer funções $f, g : X \rightarrow Y$ o par (f, g) tem a propriedade de Wecken.

1.2 Toro \mathbb{T}^n

O toro é um espaço topológico muito conhecido entre os topólogos, apesar disso, vamos destacar algumas propriedades deste espaço, que serão úteis no desenvolvimento desta tese.

Definição 1.8. O toro de dimensão n é o espaço quociente

$$\mathbb{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\sim},$$

com a seguinte relação de equivalência $(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1 + k_1, \dots, x_n + k_n)$ para todos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$. A aplicação quociente $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ é dada por

$$p(x_1, \dots, x_n) = [(x_1, \dots, x_n)]_{\mathbb{T}^n}.$$

No decorrer do texto, o autor fará um abuso de notação e indicará um elemento de \mathbb{T}^n simplesmente pela n -upla. Nos próximos parágrafos são apresentadas algumas propriedades a respeito do toro.

O toro, \mathbb{T}^n , é uma variedade de dimensão n , compacta, conexa, sem bordo e orientável. Além disso, o toro de dimensão n possui grupo fundamental isomorfo ao grupo \mathbb{Z}^n , $\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, e $\pi_m(\mathbb{T}^n) = 0$ para todo $m > 1$.

Como $\pi_m(\mathbb{T}^n) = 0$ para todo $m > 1$ (o toro é um espaço $K(\pi, 1)$) o conjunto das classes de homotopia do toro, $[\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n]$, é bijetor ao conjunto dos homomorfismos de \mathbb{Z}^n a \mathbb{Z}^n , $\text{hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$. Portanto, pode-se associar a cada classe de homotopia no toro uma matriz $n \times n$ com entradas inteiras. Em [\[Laass, Seção 1.2\]](#), encontra-se mais detalhes desta bijeção.

Uma informação importante a respeito do número de Nielsen no toro é a seguinte: dadas uma função contínua $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ e uma involução livre de pontos fixos τ em \mathbb{T}^n tem-se $N(f, f \circ \tau) = 0$ como apresentado em [\[Jerzy Jezierski\]](#).

1.3 Propriedade de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk-Ulam clássico afirma que para toda função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe um ponto $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$. Há muitas variações e generalizações deste resultado para diversos espaços. Nesta seção, encontra-se a definição da propriedade de Borsuk-Ulam que surge no estudo destas generalizações.

Primeiramente, apresenta-se a definição de involução livre de ponto fixo, que está diretamente ligada a propriedade de Borsuk-Ulam.

Definição 1.9. Seja M um espaço topológico. A função $\tau : M \rightarrow M$ é uma involução livre de pontos fixos em M (ou apenas involução livre), se $\tau \circ \tau = Id_M$ e $\tau(x) \neq x$ para todo $x \in M$.

No conjunto de todas as involuções livres em M , define-se a seguinte relação de equivalência:

Definição 1.10. Duas involuções livres $\tau_1, \tau_2 : M \rightarrow M$ são equivalentes, se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ \tau_2 = \tau_1 \circ h$, ou seja, o seguinte digrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tau_2} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{\tau_1} & M \end{array}$$

Após a noção básica de involução livre, defini-se a propriedade de Borsuk-Ulam:

Definição 1.11. Sejam M, N espaços topológicos e $\tau : M \rightarrow M$ uma involução livre. Dizemos que a tripla $(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se para toda função contínua $f : M \rightarrow N$, existe $x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

Pode-se relacionar a propriedade de Borsuk-Ulam com a teoria de coincidências do seguinte modo: a tripla $(M, \tau; N)$ possui a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se, $\text{Coin}(f, f \circ \tau) \neq \emptyset$ para toda função contínua $f : M \rightarrow N$. Vale ressaltar a contra positiva dessa afirmação: a tripla $(M, \tau; N)$ não possui a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se, existe uma função contínua $f' : M \rightarrow N$ tal que $f'(\tau(x)) \neq f'(x)$ para todo $x \in M$, isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau) = \emptyset$ para alguma $f' : M \rightarrow N$.

A definição [1.11](#) analisa a propriedade de Borsuk-Ulam em relação a todas as funções contínuas entre os espaços, porém pode-se restringir esta definição para as classes de homotopia.

Definição 1.12. Uma classe de homotopia $[f] \in [M, N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se para toda função contínua $f' \in [f]$, existe $x \in M$ tal que $f'(\tau(x)) = f'(x)$.

Involuções livres equivalentes preservam a propriedade de Borsuk-Ulam, [\[Gonçalves, página 119\]](#), como enunciado abaixo:

Teorema 1.13. *Sejam $\tau_1, \tau_2 : M \rightarrow M$ involuções livres equivalentes. A tripla $(M, \tau_1; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se, $(M, \tau_2; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Uma consequência do Teorema 1.13 é que a quantidade de classes de homotopia que tem a propriedade de Borsuk-Ulam permanece inalterada por involuções equivalentes.

No capítulo 3 serão apresentados dois resultados a respeito da propriedade de Borsuk-Ulam em classes de homotopias de auto-aplicações do toro de dimensão 2.

1.4 Número de Nielsen-Borsuk-Ulam

A teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam foi criada recentemente por Fabiana Santos Cotrim e Daniel Ventrúscolo em [Cotrim & Ventrúscolo,1] e [Cotrim & Ventrúscolo,2]. O número de Nielsen-Borsuk-Ulam, $NBU(f, \tau)$, estuda um “tipo” especial de coincidências, as coincidências Borsuk-Ulam.

Dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ em que X, Y são variedades de dimensão n , compactas, sem bordo, trianguláveis, orientáveis e X possui uma involução livre τ , chama-se um ponto $x \in X$ de coincidência Borsuk-Ulam se $f(x) = (f \circ \tau)(x)$.

A importância do NBU para a teoria de coincidências é ilustrada no seguinte exemplo: considere a função contínua $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por $f(x, y) = (2x, 0)$ e a involução livre $\tau(x, y) = (-x, y + \frac{1}{2})$ em \mathbb{T}^2 . Sabe-se, da seção 1.2, que o número de Nielsen do par $(f, f \circ \tau)$ é zero, $N(f, f \circ \tau) = 0$. Em [Laass, Teorema 2.3.10], foi provado que para toda $f' \in [f]$, existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ tal que $f'(x_0, y_0) = (f' \circ \tau)(x_0, y_0)$.

Assim, conclui-se que o número de Nielsen usual não detectou a existência da coincidência Borsuk-Ulam (x_0, y_0) . O número de Nielsen-Borsuk-Ulam é capaz de detectar este tipo de coincidência, como será feito nos capítulos 2, 3 e 4, para os toros $\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^2$ e \mathbb{T}^3 , respectivamente.

A definição do número de Nielsen-Borsuk-Ulam segue um roteiro similar ao do número de Nielsen, em resumo, define-se um conjunto de coincidências nesta teoria, depois este conjunto é dividido em classes de equivalência e associa-se um número a cada classe através de um certo índice. Por fim, o número de classes essenciais é o número de Nielsen-Borsuk-Ulam (NBU).

Os resultados e definições apresentados nesta seção, foram retirados dos artigos [Cotrim & Ventrúscolo,1] e [Cotrim & Ventrúscolo,2]. Nestes artigos há mais detalhes sobre esta teoria.

A teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam utiliza o conjunto de coincidências da teoria de Nielsen, $\text{Coin}(f, f \circ \tau)$, para definir o conjunto de coincidências Borsuk-Ulam, $\text{BUCoin}(f, \tau)$, que é formado por pares de coincidências. Na definição 1.14 encontra-se este conceito e a definição de uma relação de equivalência neste conjunto.

Definição 1.14. Sejam $(X, \tau; Y)$ uma tripla em que X, Y são complexos simpliciais finitos de dimensão n e τ é uma involução simplicial livre em X . Para qualquer função contínua $f : X \rightarrow Y$ com o conjunto de coincidências

$$\text{Coin}(f, f \circ \tau) = \{x_1, \tau(x_1), \dots, x_k, \tau(x_k)\},$$

definimos o conjunto de coincidências Borsuk-Ulam do par (f, τ) , como o conjunto de pares:

$$\text{BUCoin}(f, \tau) = \{(x_1, \tau(x_1)), \dots, (x_k, \tau(x_k))\}.$$

Dizemos que dois pares $(x_i, \tau(x_i)), (x_j, \tau(x_j))$ estão na mesma classe de coincidências Borsuk-Ulam se existe um caminho γ de um ponto em $\{x_i, \tau(x_i)\}$ a um ponto em $\{x_j, \tau(x_j)\}$ tal que $f \circ \gamma \sim f \circ \tau \circ \gamma$ com os pontos extremos fixados.

Cada classe de coincidências Borsuk-Ulam pode ser classificada entre simples ou dupla. Tal classificação está diretamente ligada a quantidade de classes de coincidências que estão contidas na classe de coincidências Borsuk-Ulam, como apresentada na definição [1.15](#) e nas proposições [1.16](#) e [1.17](#).

Definição 1.15. Uma classe de coincidências Borsuk-Ulam C é chamada simples se para um (ou qualquer) par $(x, \tau(x)) \in C$ existe um caminho γ de x em $\tau(x)$ tal que $f \circ \gamma \sim f \circ \tau \circ \gamma$ com os pontos finais fixados.

Proposição 1.16. Se C' é uma classe de coincidências usual para o par $(f, f \circ \tau)$ então existe uma classe de coincidências Borsuk-Ulam C do par (f, τ) tal que $C' \subseteq C$.

Proposição 1.17. Uma classe de coincidências Borsuk-Ulam C é simples se, e somente se, é composta de apenas uma classe de coincidências usual do par $(f, f \circ \tau)$. Além disso, se C é uma classe de coincidências Borsuk-Ulam finita do par (f, τ) que não é simples (chamamos de dupla) então podemos rotular os elementos de C tal que

- $C = \{(x_1, \tau(x_1)), \dots, (x_k, \tau(x_k))\}$;
- $C = C_1 \cup C_2$, onde os C_i 's são classes de coincidências do par $(f, f \circ \tau)$;
- $C_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ e $C_2 = \{\tau(x_1), \dots, \tau(x_k)\}$.

Antes de definir uma ferramenta algébrica, que fará a função do índice de coincidência da teoria de Nielsen para a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam, observe que há uma relação importante do índice de coincidência usual entre os ponto x e $\tau(x)$:

$$\text{ind}(f, f \circ \tau; x) = \begin{cases} (-1)^n \text{ind}(f, f \circ \tau; \tau(x)) & \text{se } \tau \text{ preserva orientação,} \\ (-1)^{n-1} \text{ind}(f, f \circ \tau; \tau(x)) & \text{se } \tau \text{ reverte orientação,} \end{cases} \quad (1.1)$$

em que n indica a dimensão da variedade. Esta relação ajudou, os autores desta teoria, na criação do pseudo-índice, que está definido abaixo:

Definição 1.18. Sejam X, Y variedades de dimensão n , compactas, trianguláveis, sem bordo, orientáveis, τ uma involução livre em X e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua tal que $\text{BUCoin}(f, \tau)$ é finito. Se $C = \{(x_1, \tau(x_1)), \dots, (x_k, \tau(x_k))\}$ é uma classe de coincidências Borsuk-Ulam do par (f, τ) , define-se o pseudo-índice de C por:

$$|\text{ind}|(f, \tau; C) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{x_i \in C} \text{ind}(f, f \circ \tau; x_i) \bmod 2 & \text{(se } C \text{ é simples) e} \\ & (\tau \text{ reverte orientação e } n \text{ é par;} \\ & \text{ou} \\ & \tau \text{ preserva orientação e } n \text{ é ímpar.)} \\ \\ \frac{\text{ind}(f, f \circ \tau; C)}{2} & \text{(se } C \text{ é simples) e} \\ & (\tau \text{ preserva orientação e } n \text{ é par;} \\ & \text{ou} \\ & \tau \text{ reverte orientação e } n \text{ é ímpar.)} \\ \\ |\text{ind}(f, f \circ \tau; C_1)| & \text{(se } C \text{ é dupla, } C = C_1 \cup C_2 \text{) e} \\ & (\tau \text{ reverte orientação e } n \text{ é par;} \\ & \text{ou} \\ & \tau \text{ preserva orientação e } n \text{ é ímpar.)} \\ \\ \text{ind}(f, f \circ \tau; C_1) & \text{(se } C \text{ é dupla, } C = C_1 \cup C_2 \text{) e} \\ & (\tau \text{ preserva orientação e } n \text{ é par;} \\ & \text{ou} \\ & \tau \text{ reverte orientação e } n \text{ é ímpar.)} \end{array} \right.$$

onde C_1 e C_2 são classes de coincidências do par $(f, f \circ \tau)$.

O pseudo-índice satisfaz algumas das propriedades da teoria de índice semelhantes as propriedades do índice de coincidência citadas na seção [1.1](#). Vale destacar a seguinte propriedade: se $(x, \tau(x)) \in \text{BUCoin}(f, \tau)$ com x sendo uma coincidência isolada de índice zero, $\text{ind}(f, f \circ \tau; x) = 0$ (logo $|\text{ind}|(f, \tau; (x, \tau(x))) = 0$), então por uma deformação de f na vizinhança de x obtém-se $f' \in [f]$, tal que $\text{BUCoin}(f', \tau) = \text{BUCoin}(f, \tau) \setminus \{(x, \tau(x))\}$, ou seja, pares de coincidências Borsuk-Ulam com pseudo-índice igual zero podem desaparecer através de deformações. Para mais detalhes veja [\[Cotrim & Ventrúscolo, 1, Lema 3.1\]](#).

Após a definição do pseudo-índice pode-se definir o número de Nielsen-Borsuk-Ulam similarmente ao número de Nielsen usual, do seguinte modo:

Definição 1.19. Seja C uma classe de coincidências Borsuk-Ulam. Dizemos que C é uma classe essencial se $|\text{ind}|(f, \tau; C) \neq 0$. Caso contrário, dizemos que C é uma classe não

essencial.

Definição 1.20. O número de Nielsen Borsuk-Ulam do par (f, τ) , denotado por $\text{NBU}(f, \tau)$, é o número de classes de coincidências Borsuk-Ulam essenciais, isto é,

$$\text{NBU}(f, \tau) = \#\{C \mid |\text{ind}|(f, \tau; C) \neq 0\},$$

indica-se por C as classes de coincidências Borsuk-Ulam.

A teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam possui resultados similares aos teoremas [1.6](#) e [1.7](#), que serão apresentados a seguir. O fato do pseudo-índice de uma classe de Nielsen ser um invariante homotópico, provado em [\[Cotrim & Ventrúscolo, 2\]](#), implica que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é um invariante homotópico.

Proposição 1.21. *Se f' é homotópica a f então f' possui pelo menos $\text{NBU}(f, \tau)$ de pares de coincidências Borsuk-Ulam, isto é, o NBU é um limitante inferior para o número de pares de coincidências Borsuk-Ulam.*

Teorema 1.22 (Teorema tipo Wecken). *Sejam X, Y variedades de dimensão n , compactas, trianguláveis, sem bordo, orientáveis, τ uma involução livre em X e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se $n \geq 3$ então existe uma função contínua f' homotópica a f tal que f' tem exatamente $\text{NBU}(f, \tau)$ pares de coincidências Borsuk-Ulam.*

Se o $\text{NBU}(f, \tau)$ é igual ao número mínimo de pares de coincidências Borsuk-Ulam, dizemos que o par (f, τ) tem a propriedade de Wecken com respeito a involução τ , ou que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é realizável na teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam. Dizemos que um espaço X é um espaço de Wecken com respeito a τ , se para qualquer função $f : X \rightarrow X$ o par (f, τ) tem a propriedade de Wecken. Por fim, se X é um espaço de Wecken com respeito a qualquer involução livre, diz-se que X é um espaço de Wecken segundo esta teoria.

Capítulo 2

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^1

Neste capítulo, e nos seguintes, o objetivo é usar a classificação das involuções livres do espaço em questão e calcular, usando bons representantes, o número de Nielsen-Borsuk-Ulam para cada classe de homotopia de uma função contínua qualquer.

O toro de dimensão 1, \mathbb{T}^1 , é homeomorfo a esfera unitária, S^1 , e a única involução livre em S^1 é a antipodal. Utilizando a notação aditiva em \mathbb{T}^1 a antipodal é descrita por:

$$\tau(x) = x + \frac{1}{2}. \quad (2.1)$$

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma função contínua qualquer, a menos de homotopia pode-se considerar $f(x) = ax$ com $a \in \mathbb{Z}$, uma vez que $[\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1]$ está em bijeção ao $\text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, veja a seção [1.2](#). Então,

$$f(x) = (f \circ \tau)(x) \Leftrightarrow ax = ax + \frac{a}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{a}{2}.$$

Se a é um número ímpar temos que $\text{Coin}(f, f \circ \tau) = \emptyset$, implicando que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é zero, $\text{NBU}(f, \tau) = 0$. Agora, se a é um número par então $\text{Coin}(f, f \circ \tau) = S^1$. Neste caso, considere $f' : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f'(x) = ax + \epsilon(x)$, em que $\epsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ é dado por $\epsilon(x) = \frac{1}{3} \text{sen}(2\pi x)$. Observe que f' é contínua e H é uma homotopia entre f e f' , para $H : I \times S^1 \rightarrow S^1$ definida por $H(t, x) = ax + t\epsilon(x)$.

O conjunto de coincidências do par $(f', f' \circ \tau)$ é:

$$f'(x) = (f' \circ \tau)(x) \Rightarrow ax + \epsilon(x) = ax + \frac{a}{2} + \epsilon\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \epsilon(x) = \epsilon\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 0, \frac{1}{2},$$

isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau) = \{0, \frac{1}{2}\}$. Como o $\text{Coin}(f, f \circ \tau) = S^1$ temos que os pontos de coincidências estão em uma única classe de coincidência. Assim, o conjunto de coincidências Borsuk-Ulam do par (f', τ) é $\text{BUCoin}(f', \tau) = \{(0, \frac{1}{2})\}$ e a única classe de coincidências Borsuk-Ulam é simples, formada pelo par $C = \{(0, \frac{1}{2})\}$ (pois $\tau(0) = \frac{1}{2}$).

Sabe-se que a antipodal, definida em [\(2.1\)](#), preserva orientação uma vez que a dimensão

de S^1 é ímpar. Com isso, o pseudo-índice da classe de coincidências Borsuk-Ulam C é

$$|\text{ind}|(f', f' \circ \tau; C) = \text{ind}(f', f' \circ \tau; 0) \pmod{2},$$

conforme a definição [1.18](#).

Para calcular o índice de coincidência, seja $G = f' - f' \circ \tau : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $G(x) = \frac{2}{3} \text{sen}(2\pi x)$. O diferencial de g em x é $dG_x = \frac{4\pi}{3} \cos(2\pi x)$, logo para $x = 0$ tem-se $dG_0 = \frac{4\pi}{3}$. Deste modo, $\text{ind}(f', f' \circ \tau; 0) = 1$ implica que

$$|\text{ind}|(f', f' \circ \tau; C) = 1.$$

Portanto, a classe de coincidências Borsuk-Ulam C é essencial.

Teorema 2.1. *Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ uma função contínua, com $f_{\#} = (a)$ e $a \in \mathbb{Z}$. Então*

$$NBU(f, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } a \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

em que $f_{\#}$ é o homomorfismo induzido de f no grupo fundamental. Além disso, o $NBU(f, \tau)$ é realizável, isto é, $S^1 \approx \mathbb{T}^1$ é um espaço de Wecken.

Corolário 2.2. *Seja τ a antipodal definida em [2.1](#). Então a tripla $(S^1, \tau; S^1)$ não possui a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Capítulo 3

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^2

Neste capítulo o número de Nielsen-Borsuk-Ulam será calculado de modo similar ao do capítulo 2. Primeiro será apresentada uma classificação das involuções livres em \mathbb{T}^2 , posteriormente para cada classe de homotopia $[f] \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]$ estuda-se o $\text{Coin}(f, f \circ \tau)$ e conseqüentemente o $\text{BUCoin}(f, \tau)$, neste estudo serão utilizados alguns resultados sobre a propriedade de Borsuk-Ulam que auxiliarão nos cálculos. Por fim, usando bons representantes de cada classe de homotopia obtém-se o desejado número de Nielsen-Borsuk-Ulam. Após obter este número, a importância da teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam comentada na seção 1.4 será evidente.

O leitor tem a possibilidade de compreender todos os detalhes do cálculo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^2 , uma vez que o processo está bem detalhado. Além disso, o fato do toro \mathbb{T}^2 ser mergulhado em \mathbb{R}^3 auxiliará na interpretação geométrica e as figuras facilitarão a compreensão das perturbações realizadas em f e das mudanças que ocorrem no conjunto de coincidências.

No artigo [Gonçalves & Guaschi, Proposition 30, Proposition 32], encontra-se a classificação das involuções livres em \mathbb{T}^2 , isto é, os autores provaram que existem duas involuções livres em \mathbb{T}^2 , a menos de equivalência. Considere as involuções livres:

$$\begin{aligned} \tau_1 : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 & \tau_2 : \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x + \frac{1}{2}, y\right), & (x, y) &\mapsto \left(-x, y + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

tais involuções não são equivalentes, pois o espaço de órbitas da involução τ_1 , $\mathbb{T}_{\tau_1}^2 := \frac{\mathbb{T}^2}{x \sim \tau_1(x)}$ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 e o espaço de órbitas da involução τ_2 , $\mathbb{T}_{\tau_2}^2 := \frac{\mathbb{T}^2}{x \sim \tau_2(x)}$ é homeomorfo a garrafa de Klein, \mathbb{K}^2 . Com a informação dos espaços de órbitas das involuções τ_1 e τ_2 , tem-se que a involução τ_1 preserva orientação e a involução τ_2 reverte orientação.

As involuções livres τ_1 e τ_2 mencionadas acima são iguais às involuções livres utilizadas em [Laass, Seção 2.1]. Como isso, pode-se transcrever os teoremas de [Laass, Teorema 2.2.3, Teorema 2.3.10] do seguinte modo:

Teorema 3.1. *Seja τ_1 a involução livre acima. Então toda classe de homotopia $\beta \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_1 .*

Teorema 3.2. *Sejam τ_2 a involução citada e $\beta \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]$ uma classe de homotopia. Então β tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_2 se, e somente se, o homomorfismo induzido no grupo fundamental por β , $h_\beta : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é dado por*

$$h_\beta = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}$$

onde $(m_1, n_1) \neq (0, 0)$, m_2 e n_2 são pares.

Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua qualquer. O Teorema 3.1 garante que a classe de homotopia de f não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_1 , isto é, existe uma função contínua $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópica a f tal que $f'(\tau_1(x, y)) \neq f'(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. Em outras palavras, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau_1) = \emptyset$ e daí $\text{BUCoin}(f', \tau_1) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, \tau_1) = 0.$$

O parágrafo acima garante que uma classe de homotopia $[f] \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]$ que não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a uma involução livre τ em \mathbb{T}^2 , possui número de Nielsen-Borsuk-Ulam igual a zero, $\text{NBU}(f, \tau) = 0$. Com isso, se a matriz do homomorfismo $f_\#$ não possui a forma de h_β então, pelo Teorema 3.2, f não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_2 . Portanto,

$$\text{NBU}(f, \tau_2) = 0.$$

Agora, resta calcular o número de Nielsen-Borsuk-Ulam para as classes de homotopia no qual a matriz do homomorfismo induzido de f no grupo fundamental, $f_\#$, possui a forma h_β do Teorema 3.2. De fato, seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua tal que

$$f_\# = \begin{pmatrix} p & 2k \\ q & 2l \end{pmatrix},$$

onde $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$ e $(p, q) \neq (0, 0)$. Assim podemos tomar um representante da classe de homotopia de f dado por:

$$f(x, y) = (px + 2ky, qx + 2ly).$$

(1º) Suponha que $p = 0$ ou $q = 0$. Sem perda de generalidade, seja $q = 0$. Então,

$$f(x, y) = (px + 2ky, 2ly),$$

com $p, k, l \in \mathbb{Z}$ e $p \neq 0$. O conjunto de coincidências das funções f e $f \circ \tau_2$ é formado

pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ tais que

$$\begin{aligned} f(x, y) = (f \circ \tau_2)(x, y) &\Leftrightarrow (px + 2ky, 2ly) = (-px + 2ky + k, 2ly + l) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} px + 2ky = -px + 2ky + k \\ 2ly = 2ly + l \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = 0 \\ 0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que as soluções da equação $2px = 0$, em \mathbb{T}^2 , são $x = \frac{i}{2p}$ para $i = 0, 1, \dots, 2p - 1$. Com efeito, $2p\frac{i}{2p} = i \sim 0$ uma vez que $i \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = \frac{i}{2p} \text{ com } i = 0, 1, \dots, 2p - 1 \right\}.$$

Em todas as figuras deste capítulo o toro \mathbb{T}^2 será representado pelo quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ com os lados devidamente identificados. Na figura [3.1](#), ilustra-se de azul o conjunto de coincidências do par $(f, f \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 , $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$, para $p = 4$.

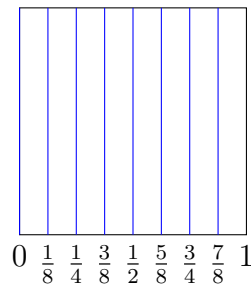


Figura 3.1: $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 para $p = 4$.

Cada uma das linhas verticais $C_i = (\frac{i}{2p}, y)$ é uma classe de coincidências da teoria de Nielsen. De fato, note que quaisquer dois pontos pertencentes a linha vertical C_i estão na mesma classe de coincidências, basta considerar o caminho em C_i ligando-os. Para concluir que verticais diferentes são classes de coincidências distintas, utiliza-se a teoria de recobrimento. Considere o recobrimento universal de \mathbb{T}^2 , isto é, $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $p(x, y) = [(x, y)]_{\mathbb{T}^2}$. Sejam $\tilde{f}_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{g}_{c,d} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\tilde{f}_{a,b}(x, y) = (px + 2ky + a, 2ly + b) \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{c,d}(x, y) = (-px + 2ky + c, 2ly + d),$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Observe que $\tilde{f}_{a,b}$ e $\tilde{g}_{c,d}$ são levantamentos de f e $f \circ \tau_2$ respectivamente. O conjunto de coincidências do par $(\tilde{f}_{a,b}, \tilde{g}_{c,d})$ é

$$\text{Coin}(\tilde{f}_{a,b}, \tilde{g}_{c,d}) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b \neq d; \\ \left\{ \left(\frac{c-a}{2p}, y \right) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{se } b = d, \end{cases}$$

pois

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{a,b}(x, y) = \tilde{g}_{c,d}(x, y) &\Leftrightarrow (px + 2ky + a, 2ly + b) = (-px + 2ky + c, 2ly + d) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} px + a = -px + c \\ b = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = c - a \\ b = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c - a}{2p} \\ b = d \end{cases}. \end{aligned}$$

Para $b = d$ tem-se

$$p \left(\text{Coin} \left(\tilde{f}_{a,b}, \tilde{g}_{c,d} \right) \right) = p \left(\frac{c - a}{2p}, y \right) = \left[\left(\frac{c - a}{2p}, y \right) \right]_{\mathbb{T}^2}.$$

Tomando $a = 0$ e $c = i$ tem-se que cada linha vertical $C_i = \left(\frac{i}{2p}, y \right)$ é uma classe de coincidências distinta, pois são projeções de classes de recobrimentos distintos.

Depois de identificar as classes de coincidências do $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$, vamos realizar uma pequena perturbação na função f para que o conjunto de coincidências seja finito, isto é, escolher outro representante da classe de homotopia de f que possui conjunto de coincidências finito.

Defina $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ por $f'(x, y) = (px + 2ky, 2ly + \epsilon(y))$, em que $\epsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ é dado por $\epsilon(y) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi y)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido de modo conveniente. A função contínua f' é homotópica a f e para $n_0 \geq 3$ tem-se

$$\begin{aligned} f'(x, y) = (f' \circ \tau_2)(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = 0 \\ \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = 0 \\ y = 0, \frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid y = 0, \frac{1}{2} \text{ e } x = \frac{i}{2p} \text{ com } i = 0, 1, \dots, 2p - 1 \right\}$$

é finito. Deste modo, $C_i = \left\{ \left(\frac{i}{2p}, 0 \right), \left(\frac{i}{2p}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ com $i = 0, 1, \dots, 2p - 1$, são as classes de coincidências na teoria de Nielsen.

Os pontos vermelhos na figura [3.2](#) indicam os pontos de coincidências do par $(f', f' \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 , para $p = 4$.

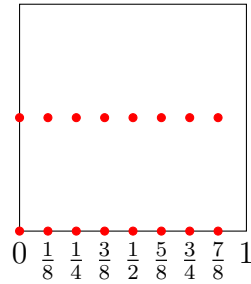


Figura 3.2: $\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2)$ em \mathbb{T}^2 para $p = 4$.

O conjunto de coincidências Borsuk-Ulam do par (f', τ_2) é

$$\text{BUCoin}(f, \tau_2) = \left\{ \left(\left(\frac{i}{2p}, 0 \right), \left(-\frac{i}{2p}, \frac{1}{2} \right) \right) \in \mathbb{T}^2 \mid i = 0, 1, \dots, 2p - 1 \right\}.$$

Para identificar as classe de coincidências Borsuk-Ulam e classificá-las em simples ou duplas, é necessário estudar o comportamento da involução livre τ_2 sobre as classes de coincidências da teoria de Nielsen.

Observe que $\tau_2(C_i) = C_{2p-i}$ para $i = 0, 1, \dots, 2p - 1$, onde $C_i = \left\{ \left(\frac{i}{2p}, 0 \right), \left(\frac{i}{2p}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ é uma classe de coincidências. Pela observação anterior, as classes de coincidências C_0 e C_p são invariantes em relação a τ_2 . Com isso,

$$D_0 = \left\{ \left((0, 0), \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \quad \text{e} \quad D_p = \left\{ \left(\left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) \right\}$$

são classes de coincidências Borsuk-Ulam simples. As classes de coincidências Borsuk-Ulam duplas são $D_i = C_i \cup C_{2p-i}$ com $i = 1, \dots, p - 1$, ou seja,

$$D_i = \left\{ \left(\left(\frac{i}{2p}, 0 \right), \left(\frac{2p-i}{2p}, \frac{1}{2} \right) \right); \left(\left(\frac{2p-i}{2p}, 0 \right), \left(\frac{i}{2p}, \frac{1}{2} \right) \right) \right\}.$$

Deste modo, tem-se $p + 1$ classes de coincidências Borsuk-Ulam do par (f', τ_2) , sendo duas simples e o restante duplas. Na figura [3.3](#) o conjunto $\text{BUCoin}(f', \tau_2)$ está dividido em classes de coincidências Borsuk-Ulam, para $p = 4$, D_0 está representado em preto, D_1 em azul, D_2 em vermelho, D_3 em verde, D_4 em cinza e cada par de coincidências $(x_i, \tau_2(x_i))$ está representado pelo tamanho dos pontos.

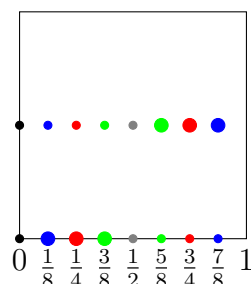


Figura 3.3: Divisão das classes de coincidências Borsuk-Ulam do $\text{BUCoin}(f', \tau_2)$, $p = 4$.

Agora o número de Nielsen-Borsuk-Ulam já pode ser calculado, basta calcular o pseudo-índice das classes de coincidências Borsuk-Ulam e descobrir quantas classes são essenciais. Porém o autor optou em realizar o NBU, uma vez que as únicas classes essenciais são as classes simples (invariantes por τ_2). Com isso, o objetivo é encontrar um representante da classe de homotopia da função f de tal modo que o conjunto de coincidências Borsuk-Ulam seja formado apenas pelas classes simples D_0 e D_p .

Considere a função contínua $f'' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por

$$f''(x, y) = (px + 2ky + \epsilon(y), 2ly + \epsilon(x)), \quad (3.1)$$

em que $\epsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ é dada por $\epsilon(z) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi z)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n_0 \geq 3$. A função f'' é homotópica a f , basta considerar $H : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por $H_t(x, y) = (px + 2ky + t\epsilon(y), 2ly + t\epsilon(x))$.

O conjunto de coincidências do par $(f'', f'' \circ \tau_2)$ é formado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ tais que

$$\begin{aligned} f''(x, y) = (f'' \circ \tau_2)(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} px + 2ky + \epsilon(y) = -px + 2ky + \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ 2ly + \epsilon(x) = 2ly + \epsilon(-x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px + \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px + \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\text{Coin}(f'', f'' \circ \tau_2) = \left\{ (0, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

e conseqüentemente,

$$\text{BUCoin}(f'', \tau_2) = \left\{ \left((0, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right) \right), \left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) \right\}.$$

Observe que as classes de coincidências Borsuk-Ulam do par (f'', τ_2) são

$$D_0 = \left\{ \left((0, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right) \right) \right\} \quad \text{e} \quad D_p = \left\{ \left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) \right\},$$

ambas simples. Na figura [3.4](#) as classes de coincidências Borsuk-Ulam D_0 e D_p estão representadas pelas cores preto e cinza, respectivamente.

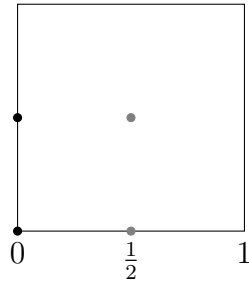


Figura 3.4: As classes de coincidências Borsuk-Ulam do $\text{BUCoin}(f'', \tau_2)$.

O próximo passo em busca do número de Nielsen-Borsuk-Ulam é calcular o pseudo-índice das classes D_0 e D_p . Da Definição 1.18, o pseudo-índice é calculado através da seguinte fórmula:

$$|\text{ind}|(f'', \tau_2; D_j) = \sum_{x_i \in D_j} \text{ind}(f'', f'' \circ \tau_2, x_i) \text{ mod } 2,$$

pois D_j é uma classe simples, τ_2 reverte a orientação e a dimensão da variedade \mathbb{T}^2 é par, com $j = 0, p$. Com isso, resta calcular o índice de coincidência dos pontos $(0, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{T}^2$, utilizando a Definição 1.3.

Seja $G = f'' - f'' \circ \tau_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por

$$G(x, y) = (2px + \epsilon(y) - \epsilon(y + 1/2), \epsilon(x) - \epsilon(-x)).$$

Note que a função G é suave e o toro \mathbb{T}^2 é uma variedade de dimensão dois, assim pode-se analisar a função G localmente em \mathbb{R}^2 . Sejam $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$ vizinhanças disjuntas de $(0, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$, respectivamente. Então, $G|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ é suave e o diferencial de G em (x, y) é

$$dG_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2p & \epsilon'(y) - \epsilon'(y + \frac{1}{2}) \\ \epsilon'(x) + \epsilon'(-x) & 0 \end{pmatrix}.$$

O índice de coincidência é definido por:

$$\text{ind}(f'', f'' \circ \tau_2; (x_0, y_0)) = \text{sgn}(\det(dG_{(x_0, y_0)})),$$

em que $(x_0, y_0) \in \text{Coin}(f'', f'' \circ \tau_2)$ e $\text{sgn}(\det M)$ significa o sinal do determinante da matriz M , ou seja, $\text{sgn}(\det M) = 1$ se o determinante é positivo e $\text{sgn}(\det M) = -1$, caso contrário.

(i) Para a coincidência $(0, 0)$ temos

$$dG_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2p & \epsilon'(0) - \epsilon'(\frac{1}{2}) \\ 2\epsilon'(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & \frac{4\pi}{n_0} \\ \frac{4\pi}{n_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $(0, 0)$ é ponto regular e $\text{ind}(f'', f'' \circ \tau_2; (0, 0)) = -1$.

(ii) Para a coincidência $(\frac{1}{2}, 0)$ temos

$$dG_{(\frac{1}{2}, 0)} = \begin{pmatrix} 2p & \epsilon'(0) - \epsilon'(\frac{1}{2}) \\ \epsilon'(\frac{1}{2}) + \epsilon'(-\frac{1}{2}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & \frac{4\pi}{n_0} \\ -\frac{4\pi}{n_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $(\frac{1}{2}, 0)$ é ponto regular e $\text{ind}(f'', f'' \circ \tau_2; (\frac{1}{2}, 0)) = 1$.

Utilizando a relação [1.1](#) e o cálculo do índice de coincidência dos pontos $(0, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$, tem-se

$$\text{ind}\left(f'', f'' \circ \tau_2; \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = 1 \quad \text{e} \quad \text{ind}\left(f'', f'' \circ \tau_2; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = -1.$$

Observe também que o cálculo do índice de coincidência garante que as classes de coincidências C_0 e C_p são não essenciais na teoria de Nielsen. Implicando que o número de Nielsen do par $(f'', f'' \circ \tau_2)$ é zero.

Na figura [3.5](#) representamos o toro \mathbb{T}^2 e os pontos de coincidências do par $(f'', f'' \circ \tau_2)$ com seus índices de coincidências.

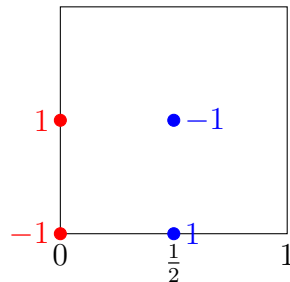


Figura 3.5: Os índices de coincidências dos pontos de $\text{Coin}(f'', f'' \circ \tau_2)$.

Por fim, o pseudo-índice da classe D_0 é

$$|\text{ind}|(f'', \tau_2; D_0) = \text{ind}(f'', f'' \circ \tau_2; (0, 0)) \bmod 2 = 1$$

e o pseudo-índice da classe D_p é

$$|\text{ind}|(f'', \tau_2; D_p) = \text{ind}\left(f'', f'' \circ \tau_2; \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) \bmod 2 = 1.$$

Logo, as classes de coincidências Borsuk-Ulam D_0 e D_p são essenciais. Portanto,

$$\text{NBU}(f, \tau_2) = 2.$$

(2^o) Suponha que $p \neq 0$ e $q \neq 0$. Então, $f(x, y) = (px + 2ky, qx + 2ly)$ e

$$\begin{aligned}
f(x, y) = (f \circ \tau_2)(x, y) &\Leftrightarrow (px + 2ky, qx + 2ly) = (-px + 2ky + k, -qx + 2ly + l) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = 0 \\ 2qx = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{i}{2p} & \text{com } i = 0, 1, \dots, 2p - 1 \\ x = \frac{j}{2q} & \text{com } j = 0, 1, \dots, 2q - 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

isto é, o conjunto de coincidências do par $(f, f \circ \tau_2)$ é formado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ tais que $x = \frac{i}{2p} = \frac{j}{2q}$. Veja, por exemplo, que $(0, y)$ e $(\frac{1}{2}, y)$ estão contidos no $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$, logo $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) \neq \emptyset$.

Se $a = \text{mdc}\{p, q\}$ então $p = a\alpha$ e $q = a\beta$ para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Afirmação:

$$\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = \frac{k}{2a} \text{ com } k = 0, 1, \dots, 2a - 1 \right\}.$$

De fato, dado $(\frac{k}{2a}, y)$ tem-se

$$\frac{k}{2a} = \frac{k\beta}{2a\beta} = \frac{k\beta}{2q} \quad \text{e} \quad \frac{k}{2a} = \frac{k\alpha}{2a\alpha} = \frac{k\alpha}{2p} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{2a} = \frac{k\alpha}{2p} = \frac{k\beta}{2q},$$

isso significa que $(\frac{k}{2a}, y) \in \text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$. Assim,

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = \frac{k}{2a} \text{ com } k = 0, 1, \dots, 2a - 1 \right\} \subset \text{Coin}(f, f \circ \tau_2),$$

uma vez que $k \leq 2a - 1 \Rightarrow k\alpha \leq 2a\alpha - \alpha \leq 2p - 1$ e $k\beta \leq 2q - 1$.

Agora, se $(x, y) \in \text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$ então

$$x = \frac{i}{2p} = \frac{j}{2q} \Leftrightarrow 2qi = 2pj \Leftrightarrow 2a\beta i = 2a\alpha j \Leftrightarrow \beta i = \alpha j.$$

Serão analisados, os valores de i e j que satisfazem a igualdade acima. Para $i = 0$ considere $j = 0$, para $i = \alpha$ escolha $j = \beta$ e assim por diante para $i = k\alpha$ tome $j = k\beta$, com $k = 0, 1, \dots, 2a - 1$. Com isso,

$$\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mid x = \frac{k}{2a} \text{ com } k = 0, 1, \dots, 2a - 1 \right\},$$

provando a afirmação.

Seja $(x, y) \in \text{Coin}(f, f \circ \tau_2)$. Então

$$f(x, y) = (f \circ \tau_2)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{2a} \\ y = y \end{cases}$$

Defina $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ por $f'(x, y) = (px + 2ky + \epsilon(y), 2ly + \epsilon(x))$. Com isso, f' é

homotópica a f e

$$f'(x, y) = (f' \circ \tau_2)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \epsilon(y) = \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \epsilon(y) = \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Substituindo $x = 0$ na primeira equação do sistema (3.3) tem-se $\epsilon(y) = \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2})$. Se $k = 0$ as soluções desta equação são $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$. Caso contrário, para n_0 suficientemente grande na definição da função ϵ , $\epsilon(y) \neq \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2})$, pois existe uma quantia finita de valores para k . Substituindo $x = \frac{1}{2}$ na primeira equação do sistema (3.3) tem-se $\frac{1}{2} + \epsilon(y) = \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2})$. Se $k = a$ segue que $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ são as únicas soluções desta equação. Caso contrário, $\frac{1}{2} + \epsilon(y) \neq \frac{k}{2a} + \epsilon(y + \frac{1}{2})$ para n_0 suficientemente grande.

Assim,

$$\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2) = \left\{ (0, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

e

$$\text{BUCoin}(f', \tau_2) = \left\{ \left((0, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right) \right), \left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) \right\}.$$

Calculando o número de Nielsen-Borsuk-Ulam como no caso anterior, conclui-se

$$\text{NBU}(f, \tau_2) = 2.$$

Levando-se em consideração o estudo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^2 , realizado neste capítulo, o autor compilou todos os casos no seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua. Então,*

$$\text{NBU}(f, \tau_1) = 0$$

e

$$\text{NBU}(f, \tau_2) = \begin{cases} 2 & \text{se } f_{\#} = \begin{pmatrix} p & 2k \\ q & 2l \end{pmatrix}; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$ e $(p, q) \neq (0, 0)$. Além disso, para cada função contínua $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ existe f'_i homotópica a f que realiza o $\text{NBU}(f, \tau_i)$, isto é, o \mathbb{T}^2 é um espaço de Wecken.

Os casos em que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é zero, são consequências dos teoremas 3.1 e 3.2, assim a demonstração construtiva da realização do número de Nielsen-Borsuk-Ulam nestes casos encontra-se no apêndice A.

Corolário 3.4. *Seja τ uma involução livre em \mathbb{T}^2 . Então, a tripla $(\mathbb{T}^2, \tau; \mathbb{T}^2)$ não possui a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Capítulo 4

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^3

Com a realização dos cálculos do número de Nielsen-Borsuk-Ulam nos toros \mathbb{T}^1 e \mathbb{T}^2 , o anseio de uma possível generalização dos números de Nielsen-Borsuk-Ulam no toro de dimensão n é grande. Para alcançar tal progresso, precisa-se ter conhecimento da classificação das involuções livres de \mathbb{T}^n . Na busca desta classificação na literatura, foi encontrado o artigo [\[Hempel\]](#) do autor J. Hempel de 1975, nesse artigo há uma classificação das involuções livres do toro de dimensão 3, possibilitando a realização dos cálculos dos números de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^3 que serão apresentados neste capítulo.

A classificação de [\[Hempel\]](#), fornece quatro involuções livres em \mathbb{T}^3 , a menos de equivalência:

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z) &= \left(x, y, z + \frac{1}{2}\right) \\ h_2(x, y, z) &= \left(-x, -y, z + \frac{1}{2}\right) \\ h_3(x, y, z) &= \left(x, -y, z + \frac{1}{2}\right) \\ h_4(x, y, z) &= \left(x + y, -y, z + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Observe que as involuções h_1 , h_3 e h_4 podem ser tratadas de modo unificado, basta considerar

$$h_{2i+ij+1}(x, y, z) = \left(x + ijy, (-1)^i y, z + \frac{1}{2}\right),$$

em que $i, j \in \{0, 1\}$. Deste modo, é possível realizar uma apresentação mais compacta dos cálculos apresentados nas três primeiras seções abaixo. No entanto, o número de Nielsen-Borsuk-Ulam será calculado de modo individual para cada uma das involuções livres, facilitando assim a compreensão do leitor.

Dada uma função contínua $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ qualquer, a função induzida no grupo fundamental $f_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^3)$ pode ser representada pela matriz com entradas

inteiras

$$f_{\#} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Nas próximas seções serão calculados os $\text{NBU}(f, h_i)$, para $i = 1, 2, 3, 4$. A seção tratando da involução h_2 será deixada por último, pois nela encontram-se os casos em que o $\text{NBU}(f, h_2)$ é diferente de zero.

4.1 NBU para a involução $h_1(x, y, z) = (x, y, z + \frac{1}{2})$

Para calcular o número de Nielsen-Borsuk-Ulam, primeiro é preciso analisar o conjunto de coincidências entre as funções f e $f \circ h_1$, isto é, a equação $f = f \circ h_1$. Note que a equação $f(x, y, z) = (f \circ h_1)(x, y, z)$ corresponde ao seguinte sistema no grupo topológico \mathbb{T}^3 :

$$\begin{cases} ax + by + cz = ax + by + cz + \frac{c}{2} \\ rx + sy + tz = rx + sy + tz + \frac{t}{2} \\ ux + vy + wz = ux + vy + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ 0 = \frac{t}{2} \\ 0 = \frac{w}{2} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Com isso, um ponto $(x, y, z) \in \text{Coin}(f, f \circ h_1)$ se é solução do sistema (4.2) em \mathbb{T}^3 .

Considere as funções contínuas $\epsilon, \delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ dadas por

$$\epsilon(z) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi z) \quad \text{e} \quad \delta(z) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(\pi z), \quad (4.3)$$

com $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido de modo conveniente. Defina $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por

$$f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz + \delta(z)).$$

Note que a função contínua f' é homotópica a f e o conjunto de coincidências $\text{Coin}(f', f' \circ h_1)$ é formado pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ tais que

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_1)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ \epsilon(z) = \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ \delta(z) = \frac{w}{2} + \delta(z + \frac{1}{2}) \end{cases}. \quad (4.4)$$

Se o número inteiro c for ímpar então o sistema (4.4) não possui solução. Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ h_1) = \emptyset$. Para c par, resolveremos o sistema (4.4) em dois casos:

(1) *t ímpar ou w ímpar*: Suponha sem perda de generalidade que t é um número ímpar.

Então a segunda equação do sistema (4.4) é

$$\epsilon(z) = \frac{1}{2} + \epsilon\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n_0} \text{sen}(2\pi z) = \frac{1}{2}.$$

Escolhendo n_0 suficientemente grande, por exemplo $n_0 \geq 5$, tem-se $\frac{2}{n_0} \sin(2\pi z) < \frac{1}{2}$. Deste modo, $\epsilon(z) \neq \frac{1}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ para todo z , concluindo que o sistema (4.4) não possui solução. Portanto, $\text{Coin}(f', f' \circ h_1) = \emptyset$.

(2) t par e w par: Assim,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_1)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \epsilon(z) = \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ z = 0, \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{cases} .$$

concluindo que $\text{Coin}(f', f' \circ h_1) = \emptyset$.

Para todos os casos possíveis, $\text{Coin}(f', f' \circ h_1) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_1) = 0.$$

4.2 NBU para a involução $h_3(x, y, z) = (x, -y, z + \frac{1}{2})$

Para calcular o número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par de funções $(f, f \circ h_3)$, é necessário primeiro estudar o conjunto de coincidências entre estas funções, $\text{Coin}(f, f \circ h_3)$:

$$f = f \circ h_3 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz = ax - by + cz + \frac{c}{2} \\ rx + sy + tz = rx - sy + tz + \frac{t}{2} \\ ux + vy + wz = ux - vy + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = \frac{c}{2} \\ 2sy = \frac{t}{2} \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases} . \quad (4.5)$$

(1) Se $b = s = v = 0$ então o sistema (4.5) é igual ao sistema (4.2). Aplicando a mesma técnica utilizada para a involução h_1 , conclui-se que $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$ para alguma função contínua f' homotópica a f .

(2) Suponha que dois dos inteiros b, s e v são nulos, sem perda de generalidade, considere $b = 0, s = 0$ e $v \neq 0$. Assim,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_3)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ 0 = \frac{t}{2} \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases} . \quad (4.6)$$

Para c ímpar ou t ímpar, conclui-se de modo imediato que o sistema (4.6) não possui solução. Logo, $\text{Coin}(f, f \circ h_3) = \emptyset$. Se ambos os valores são pares, considere $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(z), rx + sy + tz + \delta(z), ux + vy + wz)$, em que $\epsilon(z) = \frac{1}{n_0} \sin(2\pi z)$ e $\delta(z) = \frac{1}{n_0} \sin(\pi z)$. Note que a função contínua f' é

homotópica a f e $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$, pois

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_3)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(z) = \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases}. \quad (4.7)$$

- (3) Se um dos inteiros b , s e v é nulo, suponha sem perda de generalidade que $b = 0$, $s \neq 0$ e $v \neq 0$ então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_3)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ 2sy = \frac{t}{2} \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases}.$$

Obviamente, se c é ímpar tem-se $\text{Coin}(f, f \circ h_3) = \emptyset$. Para c par, seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \delta(z), rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz)$. Então,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_3)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \\ 2sy + \epsilon(z) = \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ tal que y é solução da equação $2vy = \frac{w}{2}$. Como $v \neq 0$ existe uma quantia finita de y satisfazendo esta equação. Se existe y tal que $2vy = \frac{w}{2}$ e $2sy = \frac{t}{2}$, então o sistema (4.8) coincide com o sistema (4.7). Por conseguinte, tais valores de y não são soluções do sistema (4.8). Para os valores de y tais que $2vy = \frac{w}{2}$ e $2sy \neq \frac{t}{2}$, tem-se $2sy + \epsilon(z) \neq \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ para n_0 suficientemente grande. Mostrando que todos os valores de y que satisfazem a equação $2vy = \frac{w}{2}$ não são soluções do sistema (4.8). Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$.

- (4) Por fim, considere b , s e v todos não nulos. Escolhendo $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ dada por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz + \delta(z))$, obtém-se o seguinte sistema em \mathbb{T}^3 :

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_3)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = \frac{c}{2} \\ 2sy + \epsilon(z) = \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ 2vy + \delta(z) = \frac{w}{2} + \delta(z + \frac{1}{2}) \end{cases}. \quad (4.9)$$

Suponha que $2by = \frac{c}{2}$, caso contrário $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$. A resolução do sistema (4.9) é dividida em dois casos:

- (i) $2sy = \frac{t}{2}$ e $2vy = \frac{w}{2}$: Neste caso o sistema (4.9) será similar ao sistema (4.7), concluindo que o sistema (4.9) não possui solução, isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$.

- (ii) $2sy \neq \frac{t}{2}$ ou $2vy \neq \frac{w}{2}$: Sem perda de generalidade, suponha $2sy \neq \frac{t}{2}$. Como $b \neq 0$ e $s \neq 0$ existe uma quantia finita de y satisfazendo $2by = \frac{c}{2}$ e $2sy \neq \frac{t}{2}$. Escolhendo n_0 suficiente grande segue que $2sy + \epsilon(z) \neq \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ para todo y citado anteriormente. Portanto o sistema (4.9) não tem solução, implicando que $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$.

Nesta seção, foi realizado o estudo do conjunto de coincidências do par de funções contínuas $(f, f \circ h_3)$. A análise realizada, em todos os casos, permite que o leitor conclua $\text{Coin}(f, f \circ h_3) = \emptyset$ ou $\text{Coin}(f', f' \circ h_3) = \emptyset$ para alguma função contínua $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ homotópica a f .

Portanto, o conjunto de coincidências Borsuk-Ulam do par (f, h_3) (ou (f', h_3)) é vazio, concluindo que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, h_3) é zero, isto é,

$$\text{NBU}(f, h_3) = 0.$$

4.3 NBU para a involução $h_4(x, y, z) = (x + y, -y, z + \frac{1}{2})$

Analogamente as seções anteriores, o primeiro passo para o cálculo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam é o estudo do conjunto de coincidências entre as funções f e $f \circ h_4$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (f \circ h_4)(x, y, z) &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz = ax + ay - by + cz + \frac{c}{2} \\ rx + sy + tz = rx + ry - sy + tz + \frac{t}{2} \\ ux + vy + wz = ux + uy - vy + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2b - a)y = \frac{c}{2} \\ (2s - r)y = \frac{t}{2} \\ (2v - u)y = \frac{w}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Para facilitar a notação, os números inteiros $2b - a$, $2s - r$ e $2v - u$ serão chamados de A , B e C respectivamente. Daí,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} Ay = \frac{c}{2} \\ By = \frac{t}{2} \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases}. \quad (4.10)$$

Observe que o sistema (4.10) é similar ao sistema (4.5), com isso o estudo do conjunto de coincidências das funções contínuas f e $f \circ h_4$ podem ser feito de modo análogo ao da seção anterior. No entanto, optamos em detalhar a resolução do sistema (4.10) nos seguinte casos:

- (1) $A = B = C = 0$: Neste caso, o sistema (4.10) é igual ao sistema (4.2) então realizando a mesma técnica utilizada na seção 4.1, conclui-se $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$ para alguma

função contínua f' homotópica a f .

- (2) Dois dos inteiros A , B e C são nulos. Sem perda de generalidade, considere $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$ então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ 0 = \frac{t}{2} \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases}. \quad (4.11)$$

Para c ímpar ou t ímpar, concluí-se de modo imediato que o sistema (4.11) não possui solução. Logo, $\text{Coin}(f, f \circ h_4) = \emptyset$. Se ambos os valores são pares, considere $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(z), rx + sy + tz + \delta(z), ux + vy + wz)$, em que $\epsilon(z) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi z)$ e $\delta(z) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(\pi z)$. Note que a função contínua f' é homotópica a f e $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$, pois

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(z) = \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases}. \quad (4.12)$$

- (3) Apenas um dos inteiros A , B e C é nulo. Suponha sem perda de generalidade que $A = 0$, $B \neq 0$ e $C \neq 0$ então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{c}{2} \\ By = \frac{t}{2} \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases}.$$

Obviamente, se c é ímpar tem-se $\text{Coin}(f, f \circ h_4) = \emptyset$. Para c par, seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \delta(z), rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz)$. Então,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \\ By + \epsilon(z) = \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ Cy = \frac{w}{2} \end{cases} \quad (4.13)$$

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ tal que y é solução da equação $Cy = \frac{w}{2}$. Como $C \neq 0$ existe uma quantidade finita de y satisfazendo esta equação. Se existe y tal que $Cy = \frac{w}{2}$ e $By = \frac{t}{2}$, então o sistema (4.13) coincide com o sistema (4.12). Por conseguinte, tais valores de y não são soluções do sistema (4.13). Para os valores de y tais que $Cy = \frac{w}{2}$ e $By \neq \frac{t}{2}$, tem-se $By + \epsilon(z) \neq \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ para n_0 suficientemente grande. Mostrando que todos os valores de y que satisfazem a equação $Cy = \frac{w}{2}$ não são soluções do sistema (4.13). Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$.

(4) Todos os inteiros A, B e C não nulos. Escolhendo $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ dada por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz + \delta(z))$, obtém-se o seguinte sistema em \mathbb{T}^3 :

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_4)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} Ay = \frac{c}{2} \\ By + \epsilon(z) = \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ Cy + \delta(z) = \frac{w}{2} + \delta(z + \frac{1}{2}) \end{cases} . \quad (4.14)$$

Suponha que $Ay = \frac{c}{2}$, caso contrário $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$. A resolução do sistema (4.14) é dividida em dois casos:

- (i) $By = \frac{t}{2}$ e $Cy = \frac{w}{2}$: Neste caso o sistema (4.14) será similar ao sistema (4.12), concluindo que o sistema (4.14) não possui solução, isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$.
- (ii) $By \neq \frac{t}{2}$ ou $Cy \neq \frac{w}{2}$: Sem perda de generalidade, suponha $By \neq \frac{t}{2}$. Como $A \neq 0$ e $B \neq 0$ existe uma quantia finita de y satisfazendo $Ay = \frac{c}{2}$ e $By \neq \frac{t}{2}$. Escolhendo n_0 suficiente grande segue que $By + \epsilon(z) \neq \frac{t}{2} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ para todo y citado anteriormente. Portanto o sistema (4.14) não tem solução, implicando que $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$.

Veja que em todos os casos analisados, existe uma função contínua $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ homotópica a f (em alguns casos pode-se considerar $f' = f$) tal que $\text{Coin}(f', f' \circ h_4) = \emptyset$.

Portanto, para a involução livre $h_4(x, y, z) = (x + y, -y, z + \frac{1}{2})$ no toro \mathbb{T}^3 , o número de Nielsen-Borsuk-Ulam de f é zero, isto é,

$$\text{NBU}(f, h_4) = 0.$$

4.4 NBU para a involução $h_2(x, y, z) = (-x, -y, z + \frac{1}{2})$

O estudo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam para a involução h_2 foi deixado por último, pois no desenvolvimento desta seção utiliza-se técnicas apresentadas anteriormente. Além disso, esta involução possui os casos mais interessantes, onde o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é diferente de zero.

Para calcular o $\text{Coin}(f, f \circ h_2)$ (ou $\text{Coin}(f', f' \circ h_2)$ para alguma f' homotópica a f) e posteriormente o $\text{NBU}(f, h_2)$ será preciso dividir a função f citada em (4.1) em casos.

Primeiro caso, se $(a, r, u) = (0, 0, 0)$ então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} by + cz = -by + cz + \frac{c}{2} \\ sy + tz = -sy + tz + \frac{t}{2} \\ vy + wz = -vy + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = \frac{c}{2} \\ 2sy = \frac{t}{2} \\ 2vy = \frac{w}{2} \end{cases} . \quad (4.15)$$

Aplicando ao sistema (4.15) a mesma técnica utilizada na seção 4.2, concluí-se que $\text{NBU}(f, h_2) = 0$.

Observe que se $(b, s, v) = (0, 0, 0)$ então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cz = -ax + cz + \frac{c}{2} \\ rx + tz = -rx + tz + \frac{t}{2} \\ ux + wz = -ux + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax = \frac{c}{2} \\ 2rx = \frac{t}{2} \\ 2ux = \frac{w}{2} \end{cases}.$$

Utilizando novamente a técnica da seção [4.2](#) obtém-se que $\text{NBU}(f, h_2) = 0$.

Segundo caso, quando $(a, r, u) \neq (0, 0, 0)$ e $(b, s, v) \neq (0, 0, 0)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a \neq 0$ e considere os seguintes valores inteiros:

$$p = \det \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix} = rv - su, \quad q = \det \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} = av - bu$$

e

$$o = \det \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix} = as - br.$$

Condições sobre os números inteiros c, t, w, p e q serão feitas para possibilitar o cálculo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam. A não utilização do inteiro $o = as - br$ durante esta seção, poderá deixar o leitor incomodado, porém este inteiro é extremamente útil quando $a = 0$.

(1) Sejam c, t e w todos pares. Então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz = -ax - by + cz + \frac{c}{2} \\ rx + sy + tz = -rx - sy + tz + \frac{t}{2} \\ ux + vy + wz = -ux - vy + wz + \frac{w}{2} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = k_1 \\ 2rx + 2sy = k_2 \\ 2ux + 2vy = k_3 \end{cases}, \quad (4.17)$$

com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Note que $(0, 0, z)$, $(0, \frac{1}{2}, z)$, $(\frac{1}{2}, 0, z)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z) \in \mathbb{T}^3$ são soluções do sistema [\(4.17\)](#). Com isso, $\text{Coin}(f, f \circ h_2) \neq \emptyset$.

Para resolver o sistema [\(4.17\)](#) em \mathbb{T}^3 , isto é, encontrar os pontos de coincidências entre as funções f e $f \circ h_2$, será utilizado uma técnica diferente das anteriores. Esta técnica consiste em encontrar possíveis soluções do sistema [\(4.17\)](#) em \mathbb{R}^3 e projetar tais soluções em \mathbb{T}^3 , através da projeção natural $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ dada por $\pi(x, y, z) = [(x, y, z)]_{\mathbb{T}^3}$, obtendo os pontos do conjunto $\text{Coin}(f, f \circ h_2)$. Em outras palavras, o objetivo é encontrar pontos de coincidências entre pares de recobrimentos $(\widetilde{f}, \widetilde{f \circ h_2})$ e projetá-los via π em \mathbb{T}^3 , para descobrir quais são as soluções do sistema [\(4.17\)](#) em \mathbb{T}^3 . Observe que variando a classe de recobrimento do par $(\widetilde{f}, \widetilde{f \circ h_2})$, os valores k_1, k_2 e k_3 podem variar, e assim, podemos utilizar todos não nulos.

Estudando o sistema (4.17) em \mathbb{R}^3 , obtêm-se da primeira e terceira equações que as triplas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com

$$x = \frac{qk_1 - abk_3 + buk_1}{2qa} \quad \text{e} \quad y = \frac{ak_3 - uk_1}{2q}$$

são possíveis soluções, para $q \neq 0$. Projetando estas possíveis soluções em \mathbb{T}^3 , como $(qk_1 - abk_3 + buk_1) \in \mathbb{Z}$ e $(ak_3 - uk_1) \in \mathbb{Z}$ segue que

$$\text{Coin}(f, f \circ h_2) \subseteq S = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^3 \mid 2qax = 0 \quad \text{e} \quad 2qy = 0\},$$

uma vez que toda coincidência entre as funções f e $f \circ h_2$ em \mathbb{T}^3 é imagem de um ponto de coincidência de algum par de recobrimentos $(\tilde{f}, \tilde{f} \circ h_2)$.

Considere as triplas $(x, y, z) \in S \cap \text{Coin}(f, f \circ h_2)$, então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{i}{2qa} \\ y = \frac{j}{2q} \\ 0 = 0 \end{cases},$$

em que $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2qa - 1\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, 2q - 1\}$.

Seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por

$$f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(y), rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz + \epsilon(x)),$$

em que ϵ está definida em (4.3). Então, f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \epsilon(y) = \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y) \\ y + \epsilon(z) = \frac{j}{2q} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \epsilon(y) = \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y) \\ y + \epsilon(z) = \frac{j}{2q} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.19)$$

Para $x = 0$, as únicas soluções da equação $x + \epsilon(y) = \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y)$ são $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$, o mesmo vale para $x = \frac{1}{2}$. De fato, se $x = 0$ então a primeira equação do sistema (4.19) é $\epsilon(y) = \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y)$. Para $\frac{i}{2qa} \neq 0$ segue que $\epsilon(y) \neq \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y)$ escolhendo n_0 suficientemente grande. Se $\frac{i}{2qa} = 0$ então $\epsilon(y) = \epsilon(-y)$, isto é, $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$. Agora, se $x = \frac{1}{2}$ e $\frac{i}{2qa} \neq \frac{1}{2}$ então $\frac{1}{2} + \epsilon(y) \neq \frac{i}{2qa} + \epsilon(-y)$ para n_0 suficientemente grande. Assim, se $\frac{i}{2qa} = \frac{1}{2}$ segue que $\epsilon(y) = \epsilon(-y)$, isto é, $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$. Com isso, os únicos valores de $x = \frac{i}{2qa}$ que aparecem nas coordenadas dos pontos pertencentes ao $\text{Coin}(f', f' \circ h_2)$ são $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Aplicando este mesmo raciocínio a equação $y + \epsilon(z) = \frac{j}{2q} + \epsilon(z + \frac{1}{2})$ segue que suas soluções são $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. Deste modo,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ y + \epsilon(z) = \frac{j}{2q} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ z = 0, \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases},$$

ou seja,

$$\text{Coin}(f', f' \circ h_2) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \right\}.$$

e

$$\text{BUCoin}(f', h_2) = \left\{ \begin{array}{l} ((0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2})), ((0, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \\ ((\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})), ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \end{array} \right\}.$$

As classes de Nielsen do par $(f', f' \circ h_2)$ são $C_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2})\}$, $C_2 = \{(0, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, $C_3 = \{(\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\}$ e $C_4 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Logo, as classe de coincidências Borsuk-Ulam são

$$D_1 = \{((0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2}))\}, \quad D_2 = \{((0, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\},$$

$$D_3 = \{((\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}))\} \quad \text{e} \quad D_4 = \{((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))\}.$$

Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^3$ definidos por $\gamma_1(t) = (0, 0, \frac{t}{2})$, $\gamma_2(t) = (0, \frac{1}{2}, \frac{t}{2})$, $\gamma_3(t) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{t}{2})$ e $\gamma_4(t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{t}{2})$. Utilizando estes caminhos concluí-se que as classes de coincidências Borsuk-Ulam D_1, D_2, D_3 e D_4 são todas simples.

O próximo passo, para descobrir o número de Nielsen-Borsuk-Ulam, é calcular o índice de coincidência de todos os pontos do $\text{Coin}(f', f' \circ h_2)$, e posteriormente, calcular o pseudo-índice das classes D_j , com $j = 1, 2, 3, 4$. Com efeito, seja $G = f' - f' \circ h_2 : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, isto é,

$$G(x, y, z) = (2ax + 2by + \epsilon(y) - \epsilon(-y), 2rx + 2sy + \epsilon(z) - \epsilon(z + \frac{1}{2}), 2ux + 2vy + \epsilon(x) - \epsilon(-x)).$$

Como o cálculo do índice de coincidência é local e \mathbb{T}^3 é uma variedade de dimensão 3, o estudo deste índice será realizado em \mathbb{R}^3 . Sejam $U_i \subset \mathbb{R}^3$ com $i = 1, \dots, 8$, vizinhanças de cada ponto de coincidência entre f' e $f' \circ h_2$, tais que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para

todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, \dots, 8\}$. Então $G|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ é suave e

$$dG_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2a & 2b + \epsilon'(y) + \epsilon'(-y) & 0 \\ 2r & 2s & \epsilon'(z) - \epsilon'(z + \frac{1}{2}) \\ 2u + \epsilon'(x) + \epsilon'(-x) & 2v & 0 \end{pmatrix}.$$

O índice de coincidência definido em [1.3](#) é:

$$\text{ind}(f', f' \circ h_2; (x_0, y_0, z_0)) = \text{sgn}(\det(dG_{(x_0, y_0, z_0)})),$$

com $(x_0, y_0, z_0) \in \text{Coin}(f', f' \circ h_2)$ e $\text{sgn}(\det(dG_{(x_0, y_0, z_0)}))$ significando o sinal do determinante da matriz do diferencial de G em (x_0, y_0, z_0) .

Para os pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, \frac{1}{2})$ pertencentes a classe de coincidências Borsuk-Ulam D_1 , tem-se

$$dG_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 2a & 2b + \frac{4\pi}{n} & 0 \\ 2r & 2s & \frac{4\pi}{n} \\ 2u + \frac{4\pi}{n} & 2v & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$dG_{(0,0,\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 2a & 2b + \frac{4\pi}{n} & 0 \\ 2r & 2s & -\frac{4\pi}{n} \\ 2u + \frac{4\pi}{n} & 2v & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\det(dG_{(0,0,\frac{1}{2})}) = -\frac{4\pi}{n} \left[\left(2b + \frac{4\pi}{n}\right) \left(2u + \frac{4\pi}{n}\right) - 2a2v \right] = -\det(dG_{(0,0,0)}), \quad (4.20)$$

isto é, os pontos de coincidências $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, \frac{1}{2})$ possuem índices de coincidência com sinais opostos. Observe que o índice de coincidência depende da função f , uma vez que o sinal do determinante depende dos inteiros a, b, r, s, u e v . Com isso, não é possível determinar exatamente quais são os índices dos pontos $(0, 0, 0)$ e $(0, 0, \frac{1}{2})$, porém a informação obtida em [\(4.20\)](#) já é suficiente para calcular o pseudo-índice.

Sabe-se que a classe de coincidências Borsuk-Ulam D_1 é simples e a involução livre h_2 preserva a orientação, logo o pseudo-índice do par (f', h_2) em D_1 é

$$|\text{ind}(f', h_2; D_1) = \text{ind}(f', f' \circ h_2; (0, 0, 0)) \bmod 2 = 1.$$

Portanto, D_1 é uma classe essencial na teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Repetindo o processo realizado na classe D_1 para as demais classes de coincidências Borsuk-Ulam, obtém-se que todas as quatro classes são essenciais. Portanto o número

de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, h_2) é quatro,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 4.$$

Agora se $q = 0$, assumamos primeiramente que $p = 0$. Com isso, $su = rv$ e $bu = av$.

Para $u \neq 0$ segue que $s = \frac{rv}{u}$ e $b = \frac{av}{u}$. Então,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2\left(\frac{av}{u}\right)y = 0 \\ 2rx + 2\left(\frac{rv}{u}\right)y = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + \frac{a}{u}2vy = 0 \\ 2rx + \frac{r}{u}2vy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - \frac{a}{u}2ux = 0 \\ 2rx - \frac{r}{u}2ux = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases}. \end{aligned}$$

Defina $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f'(x, y, z) = (ax+by+cz+\delta(z), rx+sy+tz+\epsilon(z), ux+vy+wz)$.

Veja que f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(z) = \delta(z + \frac{1}{2}) \\ \epsilon(z) = \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ 2vy = -2ux \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ z = 0, \frac{1}{2} \\ 2vy = -2ux \end{cases}. \quad (4.21)$$

Logo o sistema (4.21) não possui solução em \mathbb{T}^3 , isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Para $u = 0$ temos $rv = 0$ e $av = 0$. Como $a \neq 0$ segue que $v = 0$. Assim,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = 0 \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz, wz + \epsilon(x))$.

Então f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = 0 \\ 2rx + 2sy = 0 \\ \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = 0 \\ 2sy = 0 \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.22)$$

O caso $(b, s, v) = (0, 0, 0)$ já foi analisado no início desta seção. Logo $(b, s) \neq (0, 0)$, uma vez que $v = 0$. Suponha sem perda de generalidade que $b \neq 0$.

Considere as triplas $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ tais que $y = \frac{i}{2b}$ sejam soluções das duas primeiras equações do sistema (4.22) com $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2b - 1\}$. Observe que $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ são exemplos de $y = \frac{i}{2b}$ satisfazendo as equações desejadas (para $i = 0$ e $i = b$, respectivamente). Assim,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{i}{2b} \\ 0 = 0 \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Seja $f'' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ dada por $f''(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(z), rx + sy + tz + \epsilon(y), wz + \epsilon(x))$. Então, f'' é homotópica a f e

$$f''(x, y, z) = (f'' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} y + \epsilon(z) = \frac{i}{2b} + \epsilon(z + \frac{1}{2}) \\ y = 0, \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \frac{1}{2} \\ y = 0, \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\text{BUCoin}(F, h_2) = \left\{ \begin{array}{l} [(0, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{2})], [(0, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \\ [(\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})], [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})] \end{array} \right\}.$$

Repetindo os cálculos dos pseudos-índices, realizados no caso $q \neq 0$, concluí-se que as quatro classes de coincidências Borsuk-Ulam são essenciais. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 4.$$

Por fim, se $q = 0$ e $p \neq 0$ então $bu = av$ e $su \neq rv$. Observe que $u \neq 0$, caso contrário $u = v = 0$ implicaria que $p = 0$, absurdo. Assim $b = \frac{av}{u}$ e

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2\left(\frac{av}{u}\right)y = 0 \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases}.$$

Defina $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(x), rx + sy + tz, ux + vy + wz)$.

Note que f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(x) = \epsilon(-x) \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{1}{2} \\ 2sy = 0 \\ 2vy = 0 \end{cases}. \quad (4.23)$$

Como $p \neq 0$ segue que $(s, v) \neq (0, 0)$. Além disso $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ satisfazem o sistema (4.23), isto é, $\text{Coin}(f', f' \circ h_2) \neq \emptyset$. Utilizando a mesma técnica aplicada ao sistema (4.22), para $f'' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por

$$f''(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(x), rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz + \epsilon(y)),$$

concluí-se que

$$\text{NBU}(f, h_2) = 4.$$

- (2) Apenas um dos inteiros c , t e w é ímpar. Suponha, sem perda de generalidade, que c é ímpar. Então,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = k_1 + \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = k_2 \\ 2ux + 2vy = k_3 \end{cases}, \quad (4.24)$$

com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Repetindo o processo de encontrar possíveis soluções do sistema (4.24) em \mathbb{R}^3 e projetá-las em \mathbb{T}^3 . Obtém-se, estudando o sistema (4.24) em \mathbb{R}^3 , da primeira e terceira equações, que as triplas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$x = \frac{2qk_1 + q - 2abk_3 + 2buk_1 + bu}{4qa} \quad \text{e} \quad y = \frac{2ak_3 - 2uk_1 - u}{4q}$$

são possíveis soluções, para $q \neq 0$. Projetando estas possíveis soluções em \mathbb{T}^3 , tem-se

$$\text{Coin}(f, f \circ h_2) \subseteq S = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}^3 \mid 4qax = 0 \quad \text{e} \quad 4qy = 0\},$$

uma vez que $(2qk_1 + q - 2abk_3 + 2buk_1 + bu) \in \mathbb{Z}$ e $(2ak_3 - 2uk_1 - u) \in \mathbb{Z}$.

Considere as triplas $(x, y, z) \in S \cap \text{Coin}(f, f \circ h_2)$, então

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{i}{4qa} \\ y = \frac{j}{4q} \\ 0 = 0 \end{cases},$$

em que $i \in \{0, 1, 2, \dots, 4qa - 1\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, 4q - 1\}$.

Defina $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(x), rx + sy + tz, ux + vy + wz + \epsilon(x))$. Então f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{i}{4qa} \\ y = \frac{j}{4q} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (4.25)$$

Se as triplas $(0, y, z)$ e $(\frac{1}{2}, y, z)$ não pertencem ao $\text{Coin}(f, f \circ h_2)$, para todos y e z , então o sistema (4.25) não possui solução. Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Agora, se as triplas $(0, y, z)$ e $(\frac{1}{2}, y, z)$ pertencem ao $\text{Coin}(f, f \circ h_2)$, para algum par (y, z) , então defina $f'' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f''(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(y), rx + sy + tz, ux + vy + wz + \epsilon(x))$. Assim, f'' é homotópica a f e

$$f''(x, y, z) = (f'' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(y) = \epsilon(-y) \\ y = \frac{j}{4q} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ y = \frac{j}{4q} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (4.26)$$

No entanto as triplas $(0, 0, z)$, $(\frac{1}{2}, 0, z)$, $(0, \frac{1}{2}, z)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z) \in \mathbb{T}^3$ não pertencem ao $\text{Coin}(f, f \circ h_2)$, uma vez que elas não satisfazem a primeira equação sistema (4.24) em \mathbb{T}^3 . Com isso, $\frac{j}{4q} \neq 0$ e $\frac{j}{4q} \neq \frac{1}{2}$ implicando que o sistema (4.26) não possui solução. Logo, $\text{Coin}(f'', f'' \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Para $q = 0$ e $p = 0$ segue que $su = rv$ e $bu = av$. Se $u \neq 0$ então $s = \frac{rv}{u}$, $b = \frac{av}{u}$ e

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2\left(\frac{av}{u}\right)y = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2\left(\frac{rv}{u}\right)y = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - \frac{a}{u}2ux = \frac{1}{2} \\ 2rx - \frac{r}{u}2ux = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} . \end{aligned}$$

Logo, $\text{Coin}(f, f \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Se $u = 0$ então $v = 0$, uma vez que $a \neq 0$. Assim,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz, wz + \epsilon(x))$. Então f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = 0 \\ \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = \frac{1}{2} \\ 2sy = 0 \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.27)$$

Se $b = 0$ segue que $\text{NBU}(f, h_2) = 0$. Para $b \neq 0$, considere os $y = \frac{i}{4b}$ que satisfazem as duas primeiras equações do sistema (4.27), com $i \in \{1, 3, 5, \dots, 4b - 1\}$, observe que $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ não satisfazem tal condição. Assim,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{i}{4b} \\ 0 = 0 \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Defina $f'' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f''(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz + \epsilon(y), wz + \epsilon(x))$. Então, f'' é homotópica a f e

$$f''(x, y, z) = (f'' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{i}{4b} \\ \epsilon(y) = \epsilon(-y) \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{i}{4b} \\ y = 0, \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Logo, $\text{Coin}(f'', f'' \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Se $q = 0$ e $p \neq 0$ então $bu = av$ e $su \neq rv$. Observe que $u \neq 0$, caso contrário $u = v = 0$ implicaria que $p = 0$, absurdo. Deste modo $b = \frac{av}{u}$ e

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2\left(\frac{av}{u}\right)y = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = 0 \\ 2vy = -2ux \end{cases}.$$

Logo, $\text{Coin}(f, f \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

- (3) Dois dos inteiros c , t e w são ímpares. Neste caso o número de Nielsen Borsuk-Ulam também é zero, basta aplicar técnicas similares as utilizadas no caso anterior.
- (4) Sejam c , t e w todos ímpares. De modo análogo aos casos anteriores, conclui-se

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0$$

para $q \neq 0$.

Agora, se $q = 0$, $p = 0$ e $u \neq 0$ então

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2\left(\frac{av}{u}\right)y = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2\left(\frac{rv}{u}\right)y = \frac{1}{2} \\ 2vy = \frac{1}{2} - 2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + \frac{a}{2u} - \frac{a}{u}2ux = \frac{1}{2} \\ 2rx + \frac{r}{2u} - \frac{r}{u}2ux = \frac{1}{2} \\ 2vy = \frac{1}{2} - 2ux \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2u} = \frac{1}{2} \\ \frac{r}{2u} = \frac{1}{2} \\ 2vy = \frac{1}{2} - 2ux \end{cases}. \end{aligned}$$

Se $\frac{a}{2u} \neq \frac{1}{2}$ ou $\frac{r}{2u} \neq \frac{1}{2}$ segue que $\text{NBU}(f, h_2) = 0$, pois $\text{Coin}(f, f \circ h_2) = \emptyset$. Caso contrário, se $\frac{a}{2u} = \frac{1}{2}$ e $\frac{r}{2u} = \frac{1}{2}$ então $\text{NBU}(f, h_2) = 0$, basta considerar $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ definida por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \delta(z), rx + sy + tz + \epsilon(z), ux + vy + wz)$.

Para $q = 0$, $p = 0$ e $u = 0$ tem-se $v = 0$. Logo,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Definindo $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz, rx + sy + tz, wz + \epsilon(x))$ segue que f' é homotópica a f e

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 2by = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by = \frac{1}{2} \\ 2sy = \frac{1}{2} \\ x = 0, \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Sabe-se que $(b, s) \neq (0, 0)$, pois $(b, s, v) \neq (0, 0, 0)$. Claramente o $\text{NBU}(f, h_2) = 0$ se $b = 0$ ou $s = 0$. Para $b \neq 0$ e $s \neq 0$, utilize a mesma técnica aplicada ao sistema

(4.27), e conclua que

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

Por fim, se $q = 0$ e $p \neq 0$ segue que $u \neq 0$ e $b = \frac{av}{u}$. Assim,

$$f(x, y, z) = (f \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2u} = \frac{1}{2} \\ 2rx + 2sy = \frac{1}{2} \\ 2vy = \frac{1}{2} - 2ux \end{cases}.$$

Se $\frac{a}{2u} \neq \frac{1}{2}$ segue que $\text{NBU}(f, h_2) = 0$. Caso contrário, seja $f' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ dada por $f'(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(x), rx + sy + tz, ux + vy + wz)$. Então,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{1}{2} \\ 2sy = \frac{1}{2} \\ 2vy = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Observe que $(s, v) \neq (0, 0)$ (pois $p \neq 0$) e as triplas $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ com $y = 0$ ou $y = \frac{1}{2}$ não são soluções do sistema (4.28). Se $s = 0$ ou $v = 0$ então $\text{NBU}(f, h_2) = 0$. Se $s \neq 0$ e $v \neq 0$ considere as triplas $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$ tais que $y = \frac{i}{4s}$ satisfazem as duas últimas equações do sistema (4.28), onde $i \in \{1, 3, \dots, 4s - 1\}$. Daí,

$$f'(x, y, z) = (f' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{1}{2} \\ y = \frac{i}{4s} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Defina $f'' : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ por $f''(x, y, z) = (ax + by + cz + \epsilon(x), rx + sy + tz, ux + vy + wz + \epsilon(y))$. Então f'' é homotópica a f e

$$f''(x, y, z) = (f'' \circ h_2)(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \frac{1}{2} \\ y = \frac{i}{4s} \\ y = 0, \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.29)$$

Como $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ não satisfazem a segunda equação do sistema (4.29), como observado anteriormente, segue que $\text{Coin}(f'', f'' \circ h_2) = \emptyset$. Portanto,

$$\text{NBU}(f, h_2) = 0.$$

4.5 Teorema do NBU em \mathbb{T}^3

Nas seções anteriores foi calculado o número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, h_i) para toda classe de homotopia de $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$, com $i = 1, 2, 3, 4$, mais do que isso em todos os casos construiu-se representantes das classes de homotopia que realizam os

números obtidos. Compilando os resultados obtidos tem-se o seguinte teorema sobre o número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^3 :

Teorema 4.1. *Seja $f : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$ uma função contínua tal que $f_{\#} : \pi_1(\mathbb{T}^3) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^3)$ é*

representada matricialmente por $f_{\#} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$. Então,

$$\text{NBU}(f, h_1) = 0, \quad \text{NBU}(f, h_3) = 0, \quad \text{NBU}(f, h_4) = 0 \quad e$$

$$\text{NBU}(f, h_2) = \begin{cases} 4 & \text{se } c, t, w \text{ são pares, } (a, r, u) \neq (0, 0, 0), \\ & (b, s, v) \neq (0, 0, 0) \text{ e } (p, q) \neq (0, 0) \\ \text{ou} \\ & \text{se } c, t, w \text{ são pares, } (a, r, u) \neq (0, 0, 0), \\ & (b, s, v) \neq (0, 0, 0), (p, q) = (0, 0) \text{ e } u = 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com $p = \det \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix}$ e $q = \det \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix}$. Além disso, o toro \mathbb{T}^3 é um espaço tipo Wecken na teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Corolário 4.2. *Seja h uma involução livre em \mathbb{T}^3 . Então a tripla $(\mathbb{T}^3, h; \mathbb{T}^3)$ não possui a propriedade de Borsuk-Ulam.*

Capítulo 5

Número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^n , $n > 3$

No caso do toro de dimensão n , com $n > 3$, não encontramos na literatura a classificação das involuções livres. Com isso, o estudo do número de Nielsen-Borsuk-Ulam não poderá ser realizado de modo geral neste espaço. O que pode ser feito em \mathbb{T}^n é, escolher uma involução livre $\tau : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ e calcular o número $\text{NBU}(f, \tau)$ para qualquer função contínua $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.

Considere as seguintes involuções livres em \mathbb{T}^n :

$$\begin{aligned}\tau_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + \frac{1}{2}\right) \\ \tau_3(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, -x_{n-1}, x_n + \frac{1}{2}\right) \\ \tau_4(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \left(x_1 + x_2, -x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Estas involuções são uma generalização das involuções h_1 , h_3 e h_4 do toro de dimensão 3, para o toro de dimensão n . Utilizando o mesmo método aplicado nas contas do NBU em \mathbb{T}^3 , conclui-se que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é zero para estas involuções, isto é, para qualquer função contínua $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ tem-se

$$\text{NBU}(f, \tau_1) = 0, \quad \text{NBU}(f, \tau_3) = 0 \quad \text{e} \quad \text{NBU}(f, \tau_4) = 0.$$

Escolhendo a involução livre $\tau_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n-1}, x_n + \frac{1}{2})$ em \mathbb{T}^n , pode-se concluir que $\text{NBU}(f, \tau_2) \neq 0$ para alguma função contínua $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.

De fato, seja $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ uma função contínua tal que

$$g_{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 2b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2b_n \end{pmatrix}$$

onde $b_i \in \mathbb{Z}$, isto é, $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \dots + 2b_nx_n)$.

Considere a função contínua $g' : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ dada por

$$g'(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \dots + 2b_nx_n + \epsilon(x_n)),$$

em que $\epsilon : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ é definida por $\epsilon(x) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi x)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ escolhido de modo conveniente. Note que g' é homotópica a g e

$$g'(x_1, \dots, x_n) = (g' \circ \tau_2)(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \frac{1}{2} \\ x_2 = 0, \frac{1}{2} \\ \vdots \\ x_n = 0, \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Com isso, a cardinalidade do conjunto de coincidências do par de funções $(g', g' \circ \tau_2)$ é 2^n , $\# \text{Coin}(g', g' \circ \tau_2) = 2^n$, e a cardinalidade do conjunto de coincidências Borsuk-Ulam do par (g', τ_2) é 2^{n-1} , $\# \text{BU Coin}(g', \tau_2) = 2^{n-1}$. Neste caso, todas as classes de coincidências Borsuk-Ulam são simples e essenciais, concluindo que $\text{NBU}(g, \tau_2) = 2^{n-1}$.

Os resultados obtidos sobre o número de Nielsen-Borsuk-Ulam nos toros de dimensão baixa ($n = 1, 2, 3$) e o exemplo da função g em \mathbb{T}^n ($n > 3$) sugerem a seguinte conjectura:

Conjectura 5.1. *Sejam $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ uma função contínua e τ uma involução livre em \mathbb{T}^n . Então,*

$$\text{NBU}(f, \tau) = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{ou} \\ 0. \end{cases}$$

Apêndice A

Realização do NBU em \mathbb{T}^2

O teorema [3.3](#), afirma que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é realizável em \mathbb{T}^2 . No entanto, os casos em que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é zero, são consequências dos teoremas [3.1](#) e [3.2](#), sendo a realização do número de Nielsen-Borsuk-Ulam nestes casos garantida de forma indireta, para obtermos uma demonstração mais construtiva do teorema [3.3](#) explicitaremos a realização do número de Nielsen-Borsuk-Ulam em \mathbb{T}^2 , quando for igual a zero.

Lembrando, há dois casos em que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam é zero. Primeiro caso, $\text{NBU}(f, \tau_1) = 0$ para toda função contínua $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. Segundo caso,

$$\text{NBU}(f, \tau_2) = 0 \quad \text{se} \quad f_{\#} \neq \begin{pmatrix} p & 2k \\ q & 2l \end{pmatrix},$$

com $p, q, k, l \in \mathbb{Z}$ e $(p, q) \neq (0, 0)$. Lembrando que as involuções τ_1 e τ_2 são dadas por $\tau_1(x, y) = (x + \frac{1}{2}, y)$ e $\tau_2(x, y) = (-x, y + \frac{1}{2})$.

(1º) Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua com a matriz da induzida em π_1 representada por $f_{\#} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então, $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

No teorema [3.3](#), a involução τ_1 é dada por $\tau_1(x, y) = (x + \frac{1}{2}, y)$. Porém neste apêndice utiliza-se $\tau_1(x, y) = (x, y + \frac{1}{2})$ que é obviamente equivalente a τ_1 do teorema, basta considerar o homeomorfismo em \mathbb{T}^2 dado por $h(x, y) = (y, x)$.

Veja que,

$$f(x, y) = (f \circ \tau_1)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = ax + by + \frac{b}{2} \\ cx + dy = cx + dy + \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{b}{2} \\ 0 = \frac{d}{2} \end{cases}.$$

Se b ou d é ímpar então $\text{Coin}(f, f \circ \tau_1) = \emptyset$. Agora, se b e d são pares considere $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por $f'(x, y) = (ax + by + \epsilon(y), cx + dy + \delta(y))$, em que $\epsilon, \delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ são definidas por $\epsilon(y) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(2\pi y)$ e $\delta(y) = \frac{1}{n_0} \text{sen}(\pi y)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$

escolhido de modo conveniente. Note que f' é homotópica a f e

$$f'(x, y) = (f' \circ \tau_1)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ \delta(y) = \delta(y + \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau_1) = \emptyset$.

Portanto, o número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, τ_1) é zero em ambos os casos, $\text{NBU}(f, \tau_1) = 0$ (conforme o teorema 3.3). Além disso, exibimos as funções contínuas que realizam tal número. Em específico, no caso b ou d ímpar a função f realiza o número de Nielsen-Borsuk-Ulam e, para b e d pares a função f' realiza o número de Nielsen-Borsuk-Ulam.

(2^o) A realização deste casos será dividida em dois sub-casos:

- (i) Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua com a matriz da induzida em π_1 representada por $f_{\#} = \begin{pmatrix} p & 2k+1 \\ q & 2l \end{pmatrix}$, com $(p, q) \neq (0, 0)$. Então, $f(x, y) = (px + 2ky + y, qx + 2ly)$. Note que $f_{\#}$ não possui o formato da matriz em que $\text{NBU}(f, \tau_2) = 2$, pois possui uma entrada ímpar na segunda coluna. Assim,

$$\begin{aligned} f(x, y) = (f \circ \tau_2)(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} px + 2ky + y = -px + 2ky + y + k + \frac{1}{2} \\ qx + 2ly = -qx + 2ly + l \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2px = \frac{1}{2} \\ 2qx = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Se $p = 0$ obviamente $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) = \emptyset$. Para $p \neq 0$ considere $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por $f'(x, y) = (px + 2ky + y, qx + 2ly + \epsilon(x))$. Logo, f' é homotópica a f e

$$f'(x, y) = (f' \circ \tau_2)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2px = \frac{1}{2} \\ 2qx + \epsilon(x) = \epsilon(-x) \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

Seja $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ tal que $2px = \frac{1}{2}$. Note que existem finitos valores de x com tal propriedade, pois as soluções da equação $2px = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{1}{4p}, \frac{2}{4p}, \dots, \frac{4p-1}{4p}$.

- (a) Se $2qx \neq 0$ então, escolhendo n_0 suficientemente grande, $2qx + \epsilon(x) \neq \epsilon(-x)$. Assim, o sistema (A.1) não possui solução.
- (b) Se $2qx = 0$ então $2qx + \epsilon(x) = \epsilon(-x) \Rightarrow \epsilon(x) = \epsilon(-x) \Rightarrow x = 0, \frac{1}{2}$. Porém, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ não são soluções da equação $2px = \frac{1}{2}$. Concluindo, que sistema (A.1) não possui solução.

Logo, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2) = \emptyset$.

Se a outra entrada da segunda coluna é ímpar ou se todos os elementos desta coluna são ímpares, a prova de que $\text{NBU}(f, \tau_2) = 0$ pode ser realizada de modo análogo ao item (i).

(ii) Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma função contínua com a matriz da induzida em π_1 representada por $f_{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 2k \\ 0 & 2l \end{pmatrix}$. Então, $f(x, y) = (2ky, 2ly)$. Note que $f_{\#}$ não possui o formato da matriz em que $\text{NBU}(f, \tau_2) = 2$, pois possui a primeira coluna nula. Assim,

$$f(x, y) = (f \circ \tau_2)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ky = 2ky + k \\ 2ly = 2ly + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e $\text{Coin}(f, f \circ \tau_2) = \mathbb{T}^2$. Defina $f' : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ por $f'(x, y) = (2ky + \epsilon(y), 2ly + \delta(y))$. Então, f' é homotópica a f e

$$f'(x, y) = (f' \circ \tau_2)(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon(y) = \epsilon(y + \frac{1}{2}) \\ \delta(y) = \delta(y + \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Concluindo que o conjunto de coincidências do par $(f', f' \circ \tau_2)$ é vazio, $\text{Coin}(f', f' \circ \tau_2) = \emptyset$.

Neste segundo caso, mostramos que o número de Nielsen-Borsuk-Ulam do par (f, τ_2) é zero se $f_{\#} \neq \begin{pmatrix} p & 2k \\ q & 2l \end{pmatrix}$. Além disso, provamos também que f ou f' ($f' \in [f]$) realizam o $\text{NBU}(f, \tau_2)$, dependendo dos casos.

Agora, temos uma prova construtiva de que \mathbb{T}^2 é um espaço de Wecken para a teoria de Nielsen-Borsuk-Ulam.

Observe que o conteúdo apresentado neste apêndice demonstra os teoremas [3.1](#) e [3.2](#), nos casos em que as classes de homotopia de \mathbb{T}^2 não tem a propriedade de Borsuk-Ulam, ou seja, que todas as classes de homotopia $\beta \in [\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_1 e que β não tem a propriedade de Borsuk-Ulam com respeito a τ_2 se, e somente se, $\beta_{\#} \neq \begin{pmatrix} p & 2k \\ q & 2l \end{pmatrix}$ com $(p, q) \neq (0, 0)$.

Referências Bibliográficas

- [Handbook] R. F. BROWN, M. FURI, L. GÓRNIIEWICZ & B. JIANG (ED.), *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, Springer, **2005**.
- [Cotrim & Ventrúscolo,1] F.S. COTRIM & D. VENDRÚSCOLO, *The Nielsen Borsuk-Ulam number*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24, **2017**.
- [Cotrim & Ventrúscolo,2] F.S. COTRIM & D. VENDRÚSCOLO, *Nielsen coincidence theory applied to Borsuk-Ulam geometric problems*, Topology and its Applications 159, **2012**.
- [Dobrenko & Jezierski] R. DOBRENKO & J. JEZIERSKI, *The Coincidence Nielsen number on non-orientable manifolds*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol 23, Number 1, **1993**.
- [Gonçalves] D. L. GONÇALVES, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae, 29:1, 117-123, **2006**.
- [Gonçalves & Guaschi] D.L. GONÇALVES & J. GUASCHI, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 **2010**.
- [Gonçalves, Guaschi & Laass] D.L. GONÇALVES, J. GUASCHI & V.C. LAASS, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl., 21(2); Art. 65, 29, **2019**.
- [Hempel] J. HEMPEL, *Free Cyclic Action on $S^1 \times S^1 \times S^1$* , American Mathematical Society, Vol 48, **1975**.
- [Jerzy Jezierski] J. JEZIERSKI, *The Nielsen coincidence number of maps into tori*, Quaestiones Mathematicae, 24:2, 217-223, DOI: 10.1080/16073606.2001.9639210, **2001**.
- [Jezierski & Marzantowicz] J. JEZIERSKI & W. MARZANTOWICZ, *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory*, Springer, Vol 3, **2006**.
- [Kwun] K.W. KWUN & J.L. TOLLEFSON, *PL Involutions of $S^1 \times S^1 \times S^1$* , American Mathematical Society, Vol 203, **1975**.

- [Laass] V.C. LAASS, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de doutorado, IME-USP, **2015**.
- [Matoušek] J. MATOUŠEK, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, **2003**.
- [Schirmer] H. SCHIRMER, *Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten*, J. Reine Angew. Math., 194, 21-39, **1955**.
- [Vick] J.W. VICK, *Homology Theory: an Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag New York Inc. (Graduate texts in mathematics), 2nd ed, **1994**.