UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA SUSTENTABILIDADE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DANIEL FERNANDES JELIN

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA APLICADA À BNCC-EM: REFLEXÕES, RELATOS E TAREFAS

SOROCABA-SP
2021

DANIEL FERNANDES JELIN

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA APLICADA À BNCC-EM: REFLEXÕES, RELATOS E TAREFAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientação: Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela

SOROCABA-SP

2021

Jelin, Daniel Fernandes

A História da Matemática aplicada à BNCC-EM: reflexões, relatos e tarefas / Daniel Fernandes Jelin -- 2021.
174f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Antonio Luís Venezuela
Banca Examinadora: Érica Regina Filletti Nascimento, Magda da Silva Peixoto
Bibliografia

1. História da Matemática. 2. Base Nacional Curricular Comum. 3. Ensino Médio. I. Jelin, Daniel Fernandes. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Daniel Fernandes Jelin, realizada em 02/07/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento (UNESP)

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

À memória de meu bom e velho pai, o grande professor Israel Jelin. E a todos aqueles que, como ele, dão o melhor de si em sala de aula.

AGRADECIMENTOS

A meus bravos colegas de pós-graduação: Cintia, Felipe, Fernanda, Guilherme, João e Renato. Que turma boa. E que saudade das nossas sextas-feiras!

A todos os professores do curso, que tanto me motivaram: Magda, Noel, Paulo, Rogério, Sadao, Sílvia e Venezuela.

Agradeço especialmente à professora Magda, que nos guiou pelas artes do Cálculo, da Matemática Discreta e da Lógica Fuzzy. Foi também a primeira pessoa que encontrei ao buscar informações sobre o programa na UFSCar, para minha sorte. Eu tinha acabado de saber da existência do PROFMAT e estava desolado. As inscrições haviam se encerrado uma ou duas semanas antes. A professora me ouviu e aconselhou: aproveita, se prepara. Só depois eu entendi. De fato, não estava preparado para fazer mestrado. Não tinha a menor ideia do nível das aulas e nem sabia dizer por que afinal queria cursá-lo. Foi o melhor conselho que podiam me dar.

No ano seguinte, me inscrevi, entrei e, em outro lance de sorte, pouco antes do início das aulas, conheci o professor Venezuela. Eu estava com dúvidas sobre a grade, com receio de que o curso fosse dado às segundas, quando eu tinha apenas as sextas livres. O professor me recebeu em sua sala, me tranquilizou e contou um pouco do programa e da disciplina sob sua responsabilidade, Números e Funções. Essa conversa, que não deve ter durado meia hora, mudou a minha visão da Matemática. Saí de lá com dois livros emprestados, sobre Lógica, e com aquela excitação de quem acaba de conhecer novos e interessantes caminhos a percorrer.

Alguns desses caminhos eu tenho de fato tentado percorrer, sob a orientação atenciosa e estimulante do professor Venezuela. Devo a ele as satisfações que eventualmente encontro.

Por fim, agradeço à minha família, que já não aguenta mais me ouvir falar de Matemática, mas está sempre ao meu lado. À minha mãe, que me ensinou e me ensina tanto. Espero um dia merecer todo o carinho. À minha querida irmã, sempre na torcida. A meus filhos amados, que me dão tanta alegria – e me fazem as melhores, as mais profundas, as mais interessantes perguntas. E acima de tudo à minha admirável mulher, que apoiou, sem piscar, minha súbita decisão de abraçar a Matemática, apesar dos riscos e dificuldades previsíveis. Apoiou e apoia, irrestritamente. Por isso, e por muito mais que não cabe aqui, obrigado.

"Quantas vidas de pretensos heróis foram retratadas apenas pelo rastro de sangue que deixaram em seu caminho?"

J.E. Montucla

RESUMO

Este trabalho investiga oportunidades para o emprego da História da Matemática no Ensino Médio, sob as balizas da Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio. Reflete sobre a importância desse recurso didático, verifica o entusiasmo de pesquisadores do tema e coteja as objeções de professores em sala de aula. Propõe, em seguida, associações de passagens, autores e obras de relevo da História da Matemática a duas habilidades de cada uma das cinco competências específicas ditadas pelo novo marco legal, para os três anos dessa etapa de ensino. As associações feitas, baseadas na literatura especializada e em fontes históricas, são apresentadas na forma de relatos, dirigidos aos docentes, com ênfase no desenvolvimento de noções exploradas em sala de aula. Para cada associação, propõem-se também tarefas de Matemática dirigidas a alunos do Ensino Médio. Conclui-se que a eventual resistência à adoção da História da Matemática em sala de aula pode e deve ser contornada e que o programa dessa etapa escolar oferece muitas e ricas oportunidades para tanto.

Palavras-chave: História da Matemática. Educação Matemática. Base Nacional Curricular Comum. Ensino Médio.

ABSTRACT

This study addresses opportunities for high school teachers to use History of Mathematics under the guidelines of Brazil's Common Core (Base Nacional Curricular Comum). We reflect on the importance of History of Mathematics in the practice of teaching, verify the enthusiasm among researchers and examine objections among the teachers. We then associate landmarks in the History of Mathematics to ten skills, two for each of five specific competences that the Common Core establishes. The associations are based on specialized literature and primary sources and are presented as historical recounts aimed at high school teachers, emphasizing mathematical concepts that should be explored in the classroom. For each association, we also propose mathematical tasks aimed at high school students. We conclude that the eventual resistance to the adoption of the History of Mathematics in secondary education can and should be overcome and that the national curriculum offers many rich opportunities for that.

Keywords: History of Mathematics. Mathematics Education. Base Nacional Curricular Comum. Secondary Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A literatura dá amplo respaldo à adoção da História da Matemática como recurso didático. Em sala de aula, contudo, não se verifica o mesmo prestígio: as menções históricas têm frequente papel acessório, sendo pouca exploradas na investigação e fixação de conceitos matemáticos. Duas razões reiteradamente apontadas para a resistência dos professores são a falta de preparo e de acesso a material didático apropriado.

A resolução que institui a Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio (BNCC-EM), de dezembro de 2018, determina sua completa implantação em 2022 (BRASIL, 2018a). A edição 2021 do Programa Nacional do Livro e Material Didático deve marcar o realinhamento definitivo de currículos e propostas pedagógicas (BRASIL, 2019a). Assim, parece-nos oportuno discutir e pesquisar meios de enriquecer o repertório dos docentes segundo as novas guias dessa etapa de ensino.

Este trabalho tem por objetivo geral investigar oportunidades para o emprego da História da Matemática em sala de aula, dentro dos marcos da BNCC-EM. Propõe-se que a abordagem histórica tenha o condão de motivar os alunos e, ao mesmo tempo, conferir um significado mais profundo aos tópicos do Ensino Médio.

São muitos os usos didáticos da História da Matemática, como veremos. Pode-se reduzi-la a curiosidades e anedotas, como faziam e ainda fazem muitos livros didáticos, mas também é possível tomá-la como estratégia para esclarecer e aprofundar conceitos matemáticos. Foi este segundo caminho que procuramos trilhar. São nossos objetivos específicos:

a) refletir sobre a importância da História da Matemática, examinando razões para sua adoção em sala de aula e as objeções de professores;
b) relacionar passagens da História da Matemática a dez habilidades ditadas pela BNCC-EM;
c) produzir relatos históricos dos episódios relevantes para cada relação encontrada, dirigidos a professores de Matemática do Ensino Médio;
d) propor tarefas de Matemática embasadas em cada relato histórico produzido, dirigidas aos estudantes.

1.2 MÉTODO, JUSTIFICATIVAS E DESENVOLVIMENTO

Este é um estudo exploratório calcado em levantamento bibliográfico e documental. De acordo com Gil (2008), a pesquisa exploratória tem por “principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores” e é desenvolvida com o “objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato”.

As ideias que buscaremos “desenvolver, esclarecer e modificar” ligam-se à seguinte problematização: existe um descompasso entre a importância dada à História da Matemática dentro e fora da sala de aula; as novas balizas do Ensino Médio, embora não incentivem expressamente a adoção do recurso didático, podem servir para diminuir o fosso, em benefício de professores e alunos; para tanto, é preciso buscar correspondências entre elementos da História da Matemática e o programa curricular, tal qual expresso na BNCC-EM.

Tais considerações nos levam à seguinte questão norteadora: quais elementos da História da Matemática podem servir ao desenvolvimento das habilidades ditadas no marco legal do Ensino Médio? Que episódios? Que autores? Que tratados? Em busca de respostas, organizamos a pesquisa em torno de três ações, que correspondem a três momentos distintos e encadeados: refletir sobre a História da Matemática e seus usos; a partir das reflexões, produzir relatos históricos associados a habilidades ditadas pela BNCC-EM; e a partir dos relatos, propor tarefas matemáticas.

O trabalho está organizado em cinco capítulos. Este primeiro tem caráter introdutório. O segundo é dedicado a reflexões sobre a História da Matemática. O terceiro capítulo reúne os relatos históricos e as tarefas. No quarto, sintetizamos e discutimos nossos esforços. No quinto, fazemos as considerações finais.

1.2.1 Sobre as reflexões

No segundo capítulo deste trabalho, buscamos uma “visão geral” da importância da História da Matemática e dos desafios para sua adoção como recurso didático. A noção de “visão geral” (Gil, 2008), própria dos estudos exploratórios, é cara à nossa pesquisa. Para que esse momento de reflexão pudesse embasar, em seguida, a produção de relatos e tarefas matemáticas, julgamos necessário nos aproximar de muitos tópicos que, isoladamente, constituem amplos campos de estudo. Podemos apontar três principais áreas de investigação que, segundo Miguel e Miorim (2019), se destacam na abordagem das “múltiplas relações” entre a História, a Matemática e a Educação: a História na Educação Matemática, a História da Educação Matemática e a História da Matemática propriamente dita.

Como passo inicial, optamos por examinar alguns dos principais marcos da história escrita da Matemática e as inclinações de alguns de seus pioneiros, em particular o francês Jean Étienne Montucla (1725-1799) e o alemão Moritz Cantor (1829-1920). Interessa-nos conhecer suas motivações para a pesquisa histórica quando a História da Matemática não apenas não tinha o status que tem hoje, mas mal existia como área de especialização.

Essa exploração inicial nos conduziu a reflexões sobre os usos da História da Matemática no ensino. Aqui também nos valemos da perspectiva histórica para entender as expectativas criadas em torno da História da Matemática como recurso pedagógico, desde fins do século XIX. Eram altas as expectativas – e ainda são. E nem sempre se cumprem em sala de aula. A esse respeito, colhemos indícios na literatura que tocam a percepção de professores, a produção de material didático e a orientação dos documentos oficiais da educação.

Ao final do capítulo, cotejamos razões a favor e contra o uso da História da Matemática em sala de aula, tomando por principais referências dois artigos: "Using History in Mathematics Education", em que Fauvel (1991) aponta 15 "boas razões" para que professores adotem a História da Matemática como recurso didático; e "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?", em que Siu (2006), admitindo fazer o papel de "advogado do diabo", relaciona 16 conhecidas objeções feitas por docentes.

Para a escolha dos marcos históricos tratados nesse segundo capítulo, guiamo-nos por citações encontradas em obras de referência e pela literatura científica a seu respeito. Para a escolha das contribuições de Fauvel (1991) e Siu (2006), reconhecemos o esforço, a nosso ver bem sucedido, em reunir e sintetizar argumentos dispersos que fundamentam os incentivos e as resistências ao uso didático da História da Matemática. A atenção a esses dois polos orienta as escolhas feitas na produção dos relatos e de tarefas.

1.2.2 Sobre os relatos

No terceiro capítulo, estabelecemos dez associações entre habilidades ditadas pela BNCC-EM e marcos da História da Matemática. Selecionamos duas habilidades de cada uma das cinco competências específicas que constam da base curricular, com o que buscamos verificar que as oportunidades para a História da Matemática não se prendem a este ou aquele tópico. Era nossa pretensão inicial investigar todas as 43 habilidades, mas isso claramente se mostrou impraticável dentro do prazo assumido.

Para fazer as associações, partimos das sentenças que definem cada habilidade, com atenção aos termos usados e as noções que implicam. Para a escolha das passagens históricas que melhor se ajustam ao texto da BNCC-EM, levamos inicialmente em conta os seguintes critérios: relevância histórica, disponibilidade de fontes originais e adequação à etapa de ensino. Quanto à relevância histórica, consideramos o destaque dado em obras de referência. Quanto à disponibilidade de documentos originais, demos preferência às fontes que se podem acessar gratuitamente via internet. Quanto à adequação à etapa de ensino, focamos os temas que tocam propriedades matemáticas de uso corrente em sala de aula.

Em uma segunda etapa, confrontamos nossas escolhas iniciais com as reflexões feitas no segundo capítulo. Buscamos então selecionar as passagens históricas que não apenas se ajustam ao texto da BNCC-EM mas que também correspondam a incentivos dados para o uso da História da Matemática, segundo Fauvel (1991), em particular seu potencial para motivar o aluno e para lançar luz sobre conceitos e processos matemáticos.

Nossa abordagem tem natureza qualitativa. Segundo Minayo (2002), a pesquisa qualitativa trabalha com "o universo de significados, motivações, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis". É o caso, precisamente, das associações que faremos, tanto para o feitio dos relatos como para a sugestão de tarefas.

A pesquisa bibliográfica que embasa a construção dos relatos foi feita em três passos. O primeiro consistiu na consulta a obras de referência. Valemo-nos principalmente dos seguintes livros de história geral: "The History of Mathematics: a reader" (FAUVEL e GRAY, 1987); "A concise History of Mathematics" (STRUIK, 1987); "A History of Mathematics" (BOYER e MERZBACH, 2011); e "História da Matemática" (ROQUE, 2012).

Muito especialmente, valemo-nos também de "A History of Mathematics: from Mesopotamia to modernity" (HODGKIN, 2005), que foi o primeiro livro a nos chamar a atenção para a importância e a riqueza da História da Matemática. Ali se acha o esforço deliberado em valorizar o campo do debate e da dúvida na pesquisa histórica, recusando a "paisagem morta das certezas", esforço que pretendemos ser também o nosso.

Ainda neste primeiro passo da pesquisa bibliográfica, consultamos obras centradas na evolução de expressões e notações, em particular "A history of mathematical notations" (CAJORI, 1993) e o site "Earliest known uses of some of the words of Mathematics" (MILLER, 2020). Finalmente, buscamos também livros de divulgação científica, pela evidente atenção que dispensam à questão da motivação – no caso, a do leitor.

A segunda etapa do levantamento bibliográfico consistiu na busca por fontes originais. Demos esse passo seguindo entendimento de Jahnke *et al.* (2002), para quem o estudo de fontes originais é o meio mais ambicioso de integrar a História da Matemática ao ensino e também um dos mais gratificantes. Os autores identificam três "efeitos especiais" promovidos pela leitura de antigos tratados: a substituição do usual pelo diferente, permitindo que a Matemática seja vista como uma atividade intelectual, não um conjunto de técnicas; a reorientação de nossa percepção da Matemática, fazendo o familiar parecer estranho ("*unfamiliar*"); e o entendimento cultural, mostrando que o desenvolvimento da Matemática se dá dentro de um determinado contexto tecnológico e científico de uma determinada época, no curso da história das ideias e das sociedades.

Ao longo da confecção dos textos, buscamos deliberadamente transmitir dois efeitos que a leitura de textos históricos promove, segundo Jahnke *et al.* (2002): a substituição do usual pelo diferente e a reorientação de nossa percepção da Matemática. De acordo com Furinghetti (2020), esses dois efeitos se ligam a um dos dois principais objetivos para a adoção do recurso didático: "história para o tratamento de conceitos e processos matemáticos".

Além disso, acrescentamos, alguns tratados são também ótimas leituras. A esse respeito, Hodgkin (2005) observa que textos históricos são ao mesmo tempo "estranhos e (com algum trabalho) familiares". O autor pondera que "nossa história" gosta de focar as descobertas, sendo comum que se deem destaque a elas, deixando em segundo plano o documento que as divulga. "Ainda assim o aluno pode aprender muito simplesmente considerando a natureza incomum do documento e fazendo algumas perguntas", escreve.

No terceiro e último passo do levantamento bibliográfico, pesquisamos artigos científicos e produções acadêmicas centrados nas passagens históricas selecionadas, de modo a aprofundar o tema e sondar seu impacto sobre o pensamento matemático. Para tanto, foram usadas inicialmente as seguintes plataformas de buscas: Google Scholar, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, o Catálogo de Teses e Dissertações e o banco de dissertações do PROFMAT. Em um segundo momento, rastreamos as citações de interesse encontradas nos trabalhos buscados por meio das plataformas citadas.

Feito o levantamento bibliográfico, entregamo-nos à produção dos relatos históricos. Esse talvez tenha sido o momento de maior hesitação no delineamento da pesquisa. Cogitamos inicialmente propor sequências didáticas ao professor ou textos sucintos dirigidos aos alunos – e chegamos a esboçar alguns. Mas, ao cabo das reflexões feitas, consideramos que a adoção da História da Matemática em sala de aula passa, antes da oferta de roteiros acabados, pela formação da convicção do professor. Antes de motivar o aluno, a História da Matemática tem de motivar o docente. É fundamental que ele se aposse do conteúdo histórico para se convencer de que o uso da História da Matemática favorece seu trabalho em sala. O professor que se convença disso, por meio do material apropriado, não terá dificuldade em preparar aulas e atividades conforme suas próprias inclinações, objetivos e contexto escolar.

Por isso definimos como objetivo específico a produção de relatos históricos dirigidos ao professor do Ensino Médio. A escolha nos dá a possibilidade de explorar os temas segundo a profundidade que julgamos conveniente, em interlocução direta com o docente.

Tomamos o termo "relato" a partir da tipologia de gêneros textuais de Rose (2012). O autor os classifica, na esfera do ensino, conforme quatro propósitos: engajar, informar, propor e avaliar. Os relatos históricos são tipos fronteiriços, ligados às funções de informar e engajar. Podem ser explicativos (*historical accounts*), quando estabelecem relações causais, ou não (*historical recounts*). Podem ser biográficos e autobiográficos. Em comum, desenvolvem-se segundo fases marcadas no tempo a partir de uma etapa inicial de "orientação". Os relatos aqui reunidos têm traços do tipo explicativo e biográfico e serão tratados por "relatos históricos" ou apenas "relatos".

Assim, os relatos produzidos não se confundem com os gêneros textuais propriamente acadêmicos, como ensaios, resenhas, artigos ou resumos. Foram escritos com o objetivo de engajar o professor e embasar suas decisões durante o que Venezuela (2021) chama de momento 1 da atividade docente, que inclui o exame de conteúdos teóricos, exemplos e atividades para posterior aplicação em sala de aula (o que chama de momento 2). O autor sugere que "o aumento da dedicação do professor no momento 1 aumentará a eficiência no momento 2".

Na escrita dos relatos, tomamos a liberdade de buscar um tom narrativo o mais amigável possível, tanto quanto o rigor científico autoriza. É um tom condizente com a dupla função de engajar e informar. Certamente não é uma tarefa simples, mas achamos o esforço necessário não apenas para prender a atenção do leitor-professor, mas para permitir que as informações colhidas sejam eventualmente levadas à sala de aula sem o embaraço do jargão.

Pelo mesmo motivo, nos dispensamos de demonstrar formalmente teoremas que já devem ser do conhecimento do docente. Via de regra, os conceitos são apresentados e discutidos de forma retórica. Pontualmente, certas deduções são apresentadas em termos simbólicos com o único objeto de iluminar um dado passo da pesquisa matemática. Nesses casos, procuramos nos valer de noções elementares trabalhadas no Ensino Básico e de notação familiar a professores e alunos.

1.2.3 Sobre as tarefas

Ao final de cada relato, apresentamos tarefas dirigidas ao aluno do Ensino Médio, relacionadas à habilidade da BNCC-EM em questão. São inspiradas em elementos históricos, mas, essencialmente, são tarefas matemáticas.

Tomamos tarefa como o “elemento organizador da atividade de quem aprende”, segundo Ponte (2014). “A atividade [...] diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno”, escreve. Assim, as tarefas aqui propostas não se confundem com atividades didáticas, tanto quanto os relatos históricos não se confundem com planos de aula ou sequências didáticas.

Aproveitamos a tipologia de Ponte (2014) para diversificar a oferta de tarefas. Para o autor, elas se distinguem conforme a estrutura e o desafio. Quanto à estrutura, podem ser abertas ou fechadas, segundo o grau de indeterminação da questão. Quanto ao desafio, este pode ser elevado ou reduzido, de acordo com a dificuldade percebida. Tarefas fechadas de desafio reduzido são chamadas exercícios. Tarefas fechadas de desafio elevado são problemas. Tarefas abertas de desafio reduzido são explorações. E tarefas abertas de desafio elevado são investigações.

No âmbito das investigações e explorações, demos especial atenção a algumas possibilidades que a História da Matemática nos abre: comparar técnicas antigas e modernas, a partir da noção de reorientação de Jahnke *et al.* (2002); explorar os caminhos da prova matemática; e estabelecer contato com a linguagem e a notação de obras ao mesmo tempo “estranhas e (com algum trabalho) familiares”, como diz Hodgkin (2005).

Tomados em seu conjunto, relatos e tarefas guardam características de produtos educacionais, “ferramentas elaboradas pelos próprios profissionais em formação que comportam conhecimentos organizados objetivando viabilizar a prática pedagógica” (Freire, Rocha e Guerrini, 2017). Poderíamos classificá-los como material textual dirigido à formação continuada de docentes. Mas cabe aqui notar que sua confecção, em atenção aos objetivos propostos, não apenas reflete o percurso exploratório como também, e principalmente, materializa nossa investigação do potencial da História da Matemática aplicada à BNCC-EM, como veremos a seguir.

2 REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SEUS USOS

Percorreremos aqui alguns dos marcos da história escrita da Matemática e de sua adoção em sala de aula. Trataremos do respaldo das pesquisas, dos documentos oficiais da educação e dos reflexos sobre a produção de material didático, com atenção ao contexto brasileiro. Ao final, confrontaremos argumentos a favor e contra o uso da História da Matemática no ensino.

Para datas e grafia de nomes, recorremos à excelente série de biografias editada por Edmund Robertson e John O'Connor, da University of St Andrews, na Escócia, disponível on-line (<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>). Para o aportuguesamento de nomes e locais, seguimos a enciclopédia colaborativa on-line Wikipedia. A não ser que estejam devidamente creditadas, todas as traduções para o português são nossas e aparecem indicadas entre aspas.

2.1 EUDEMO: HISTÓRIAS PERDIDAS E ACHADAS

A História da Matemática tem sido escrita e reescrita desde a Antiguidade.

Acredita-se que Eudemo de Rodes (c. 350-290 a.C.), pupilo de Aristóteles (384-322 a.C.), tenha legado uma História da Aritmética, outra da Geometria e mais uma da Astronomia, que circularam por muitos séculos, antes de desaparecer, lamentavelmente (O'CONNOR e ROBERTSON, 1999). Restaram as citações de autores que puderam se servir de sua obra, como Simplício (c. 490-560 d.C.).

Mesmo onde não há menção explícita, supõe-se que se devam a Eudemo certas ideias difundidas na Antiguidade. É o caso de uma importante passagem do comentário de Proclo (411-485 d.C.) sobre "Os Elementos", de Euclides (c. 325-265 a.C.). No trecho, narram-se os feitos de diversos matemáticos, começando por Tales de Mileto (c. 624-547 a.C.), que teria levado à Grécia a Geometria, inventada pelos egípcios. Acredita-se que o texto tenha por base os achados de Eudemo (MORROW, 1970; ARTMANN, 1999), embora seu nome não seja citado.

Até onde se sabe, a obra de Eudemo é um ponto fora da curva, "uma exceção" (ZHMUD, 2002), pois não se conhece nada tão ambicioso no mundo antigo e ele não deixou seguidores.

É certo que muitos autores contaram, a seu modo, histórias da Matemática – nem sempre em tratados matemáticos. É o caso do engenheiro militar romano Vitrúvio (c. 85-20 a.C.), com seus "Dez Livros de Arquitetura". Ali se acha a mais antiga menção de que se tem registro do famoso caso da coroa do rei Hierão II e a solução que Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) teria encontrado, durante o banho (VITRUVIUS, 1914).

É certo também que cada tratado matemático informa a ciência de seu tempo e, muito frequentemente, de tempos passados. É o caso da importante "Coleção Matemática", de Papo de Alexandria (c. 290-350 d.C.). A obra assenta os principais achados da geometria grega e é fonte de referência – às vezes a única – de muitos tratados que se perderam no curso da história (HULTSCH, 1876). Segundo Boyer e Merzbach (2011), metade das obras citadas no sétimo livro da "Coleção" desapareceram, incluindo escritos de Euclides, Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.) e Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.).

Mas uma história geral da Matemática ainda levaria séculos para ser contada.

2.2 MONTUCLA: UMA "BOA HISTÓRIA"

Em 1713, em carta endereçada ao matemático suíço Nicolaus Bernoulli I (1687-1759), o francês Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) escreveu que seria "desejável" que alguém se desse ao trabalho de contar "como e em que ordem" se deram as descobertas matemáticas (GOULDING, 2006).

O francês pondera que as histórias da Pintura, Música e Medicina já haviam sido contadas e que "uma boa história" da Matemática, especialmente da Geometria, seria ainda mais interessante e útil. Se bem-feita, poderia ser considerada a própria história do intelecto humano. Aparentemente, Montmort tomou para si mesmo a tarefa, mas morreu sem concluí-la.

Algumas décadas mais tarde, o também francês Jean Étienne Montucla (1725-1799) concretizou o ambicioso projeto com o lançamento dos dois volumes da "Histoire des Mathématiques" (MONTUCLA, 1758), mais tarde reeditados e ampliados para quatro volumes. Eis a tradução completa do título: "HISTÓRIA das MATEMÁTICAS: Na qual notamos seus progressos desde sua origem até os dias atuais; onde expomos o quadro e o desenvolvimento das principais descobertas, os debates que elas trouxeram à luz e as principais características da vida dos matemáticos mais famosos" (SANTOS, A. A. 2016).

Para Vogel (2008), a obra é a "primeira história clássica da Matemática". Para Hodgkin (2005), Montucla é o primeiro historiador de fato da Matemática ("*first true historian*"). Para Dauben e Scriba (2002), trata-se da primeira história "abrangente" da Matemática. Para Nobre (2002), o livro é "o mais famoso e considerado pioneiro por ter introduzido uma forma de escrita da história que passou a servir de modelo para os que vieram posteriormente". Para Struik (1987), é "o mais antigo livro-texto sobre História da Matemática (além de Proclo), que é mais do que um catálogo" – e ainda uma boa leitura, acrescenta.

Notamos aí o cuidado de não tomar a obra de Montucla simplesmente como o primeiro livro de História da Matemática. De fato, não é. Poucos anos antes, por exemplo, o alemão Johann Christoph Heilbronner (1706-1747) havia lançado, em latim, um livro da "história universal da matemática, da criação do mundo ao século XVI" (HEILBRONNER, 1742). Trata-se de um catatau de quase 1 000 páginas que, por reproduzir muitos erros históricos, acabou caindo em descrédito (NOBRE, 2002).

Montucla não se furta a indicar essa e outras fontes de seu trabalho, algumas antigas (Proclo, Plutarco e Diógenes Laércio, entre outros), outras recentes (Bernardino Baldi, Gerard Vossius e John Wallis, entre outros). E não poupa as críticas – trata por "caos" a obra de Heilbronner, por exemplo (MONTUCLA, 1799). De qualquer forma, é certo que as obras que precederam a "Histoire des Mathématiques" não têm o mesmo fôlego, abrangência e clareza quanto à especificidade do gênero nascente.

Vale a pena conhecer os propósitos de Montucla, porque sua obra deu moldes iniciais à historiografia da Matemática. O prefácio é revelador. Começa dizendo que a história das ideias sempre foi um ramo negligenciado pelos historiadores. E sem esse ramo, a história é como "um tronco mutilado de uma de suas partes mais nobres, uma estátua privada de um de seus olhos", escreve, citando Francis Bacon. Para Montucla, as bibliotecas já estão atulhadas de "narrativas prolixas de cercos, batalhas, revoluções". "Quantas vidas de pretensos heróis foram retratadas apenas pelo rastro de sangue que deixaram em seu caminho?", provoca.

Dizendo-se inspirar no projeto inconcluso de Montmort, e afirmando estar convencido de que as eventuais notas do colega se perderam, Montucla se propõe a buscar a "origem" da Matemática e acompanhar seu desenvolvimento ao longo do tempo, mostrando o "espírito de todas as descobertas que sucessivamente a enriqueceram". Afirma ter recuado tanto quanto a "escuridão dos tempos" lhe permitiu e seguido os passos dos "povos antigos, iluminando-me, tanto quanto pude, da chama da crítica". Montucla reconhece as incertezas que cercam a História da Matemática e aceita que o "desenvolvimento desconhecido" da ciência seja "às vezes" substituído pelo "desenvolvimento fictício e provavelmente muito próximo do verdadeiro".

Um traço importante na obra de Montucla é a ideia de que História da Matemática tem um sentido de progresso, das civilizações antigas aos dias atuais. Para ele, de todas as ciências, a Matemática é aquela que deu os "passos mais seguros na busca da verdade". Essa marcha pode desacelerar ao longo do tempo, sem fazer "progressos sensíveis", mas nunca é interrompida, acredita. Embora ainda muito difundida, essa noção é hoje seriamente contestada.

2.3 CANTOR: O OLHAR ACADÊMICO

"Histoire des Mathématiques" foi um sucesso editorial. Deu "glória e fama" a Montucla (NOBRE, 2002) e por muito tempo pôs sombra a outras publicações do gênero. Até o lançamento, em 1880, do primeiro dos quatro volumes do monumental "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" ("Preleções sobre História da Matemática"), do alemão Moritz Cantor (1829-1920) – que não tem qualquer parentesco com o russo Georg Cantor (1845-1918), seu contemporâneo, pai da teoria dos conjuntos.

Cantor informa no prefácio que sua obra nasceu das aulas que ministrava em Heidelberg (CANTOR, 1880). Segundo diz, o material foi se acumulando, de semestre em semestre, e de repente as duas horas semanais do curso já não bastavam. Assim surgiu a ideia do livro. Lá se iam 25 anos desde que começara a publicar artigos sobre a História da Matemática. As seguidas descobertas, afirma, haviam estabelecido novas bases para a pesquisa, das quais os antigos historiadores não podiam fazer ideia. É o caso de Montucla, cujo trabalho Cantor considera "ainda insuperável", embora "muitas vezes falho".

Há uma grande distância entre Montucla e Cantor. O alemão foi um acadêmico por excelência. Frequentou as melhores universidades alemãs, foi aluno de matemáticos célebres, como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Jakob Steiner (1796-1863), e aos 24 anos tornou-se professor da Universidade de Heidelberg (O'CONNOR e ROBERTSON, 2002), de onde não saiu mais. Ali, se especializou em História da Matemática, sob influência de Arthur Arneth (1802-1858), seu antigo professor, autor de uma "História da Matemática pura e sua relação com a história do espírito humano". Assim é que a obra de Cantor deriva de sua atuação cotidiana como professor e pesquisador da História da Matemática.

Já Montucla nunca se ligou a qualquer universidade. Formado em Direito pela faculdade de Toulouse, exerceu atividades diversas para ganhar o sustento. Enquanto escrevia sua "Histoire", por exemplo, trabalhava para a Gazette de France (CRÉPEL e COSTE, 2005). Mais tarde, assumiria postos na administração pública, como o de secretário da Intendência de uma província francesa, inspetor de edificações e jardins reais e censor régio (VOGEL, 2008). Além da História da Matemática, escreveu sobre varíola, traduziu um relato de viagens à América e cuidou da reedição de um livro de matemática recreativa. Sua obra é fruto do genuíno interesse pela Matemática, é certo, mas também de faro editorial – dele e do livreiro Antoine Jombert, que incentivou a empreitada e que talvez seja uma das pessoas que Montucla diz ter lhe pedido uma "história geral da Matemática", quando seu plano original era limitar-se à matemática pura (MONTUCLA, 1758).

Tão distintas trajetórias ilustram o fato de que, no curso de pouco mais de um século, a História da Matemática começara a se firmar como ramo de pesquisa científica. Enquanto o francês propunha uma obra “fácil e agradável”, poupando o leitor de incertezas e discussões difíceis, o alemão tinha a clara consciência de que seu trabalho devia justamente lançar luz sobre as “dúvidas” e as “lacunas” –alvos, enfim, de futuras investigações.

De fato, datam da segunda metade do século XIX os primeiros periódicos devotados à História da Matemática, como o italiano Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche, de 1868; o alemão Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, de 1877, iniciativa de Cantor; e o sueco Bibliotheca Mathematica, de 1884 (FURINGHETTI, 2020).

2.4 CAJORI E LORIA: HISTÓRIAS PARA A SALA DE AULA

O quarto e último volume das “Vorlesungen” de Cantor saiu em 1908. Quase um octogenário, o alemão contou com um time de nove colaboradores para concluí-lo. Alguns deles se tornariam grandes autoridades em História da Matemática, em particular o suíço naturalizado americano Florian Cajori (1859-1930) e o italiano Gino Loria (1862-1954).

Com Cajori e Loria, encontramos exemplos de como o entusiasmo com a pesquisa histórica desembocou no ensino, na virada do século XIX ao XX.

Em “A History of Mathematics”, Cajori destaca o “valor do conhecimento histórico para o professor de Matemática” e seu papel na motivação do estudante: “O interesse que os alunos têm por seus estudos pode ser bastante aumentado se a solução de problemas e a lógica fria das demonstrações geométricas forem intercaladas a observações e anedotas históricas” (CAJORI, 1894). Seguem-se dicas para o professor “maravilhar” e “surpreender” os alunos, como estas: depois de ensinar a bissecção do ângulo, relate as infrutíferas tentativas de resolver o problema aparentemente simples da trissecção do ângulo; depois que a classe “esgotar suas energias” estudando o teorema do triângulo retângulo, conte “alguma coisa” sobre sua história, como o sacrifício de Pitágoras às Musas, em júbilo pela descoberta do famoso teorema.

Loria trata da importância da História da Matemática no primeiro encontro nacional da Mathesis, a associação italiana dos professores de Matemática. Seu foco é a formação do professor. Ele aponta a distância entre a escola e a universidade e defende que a História da Matemática sirva de “elo de ligação”. A expressão aparece no título de seu artigo de 1899, decalcado da conferência: “La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitário”. O italiano opina que a história permite relacionar a Matemática a outras disciplinas e dá ao professor a flexibilidade necessária para abordar – e, por extensão, ensinar – Matemática (FURINGHETTI, 2000).

Um interessante retrato dos debates pioneiros sobre o papel da História da Matemática na educação é o artigo "The use of history in mathematics teaching" (HEPPEL, 1893). Seu autor, George Heppel, foi um dos fundadores, em 1871, da Association for the Improvement of Geometrical Teaching, embrião da Mathematical Association, a associação britânica de professores de Matemática.

Heppel começa o texto observando, satisfeito, a crescente importância que os livros-textos passaram a dar ao assunto. Faz três restrições: a História da Matemática não deve ser tratada à parte, mas subordinada ao ensino da Matemática; só se deve abordar, historicamente, aquilo que de fato auxilia o aprendizado do aluno; e não cai na prova!

Observadas essas balizas, Heppel considera que o conhecimento histórico torna a Matemática "mais fácil, mais clara e mais interessante". Seguem-se sugestões para sala de aula, como explorar o antigo método da falsa posição para determinação de uma incógnita e apresentar a prova do indiano Bhaskara II para a proposição 47 do Livro I dos "Elementos" de Euclides (que conhecemos como Teorema de Pitágoras). Para arrematar, uma declaração de amor à disciplina: "Cada vez mais se reconhece que a Matemática é cheia de vida e interesse, que apela à imaginação tanto quanto ao intelecto, que tem sua poesia própria e peculiar" (HEPPEL, 1893).

2.5 FAUVEL: AS "BOAS RAZÕES" DA HISTÓRIA

Desde o final do século XIX, a noção de que a História da Matemática não apenas importa, mas é também um valioso recurso didático ganhou sólido respaldo científico. Hoje é praticamente um lugar-comum reconhecê-lo, embora as concepções e práticas variem bastante.

Um marco da atenção sistemática que a dimensão pedagógica da História da Matemática passou a receber foi a criação em, 1976, do International Study Group on the relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), afiliado à importante Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), criada em 1908.

As diretrizes originais do HPM mantêm-se atuais: promover a consciência da relevância da História da Matemática para o ensino da Matemática; promover a cooperação internacional e o intercâmbio de informações; promover a investigação interdisciplinar; produzir material relevante para professores; e facilitar o acesso a fontes históricas.

Em 2000, a ICMI publicou um vasto estudo com o objetivo de divulgar "diversos aspectos da relação entre História e Matemática", reconhecendo que os esforços do grupo criado em 1976 "encorajaram e refletiram um ambiente de maior interesse internacional pelo valor da História da Matemática para educadores, professores e alunos" (FAUVEL e VAN MAANEN, 2002). A publicação, baseada nas experiências de professores ao redor do mundo, Brasil inclusive, assenta que a História da Matemática "faz diferença" e que o recurso é "benéfico".

O escocês John Fauvel (1947-2001), um dos editores do estudo, é o autor de um dos mais conhecidos livros-textos da área, "The History of Mathematics: a reader", em parceria com o inglês Jeremy Gray (FAUVEL e GRAY, 1987). Pouco depois do lançamento do "Reader", Fauvel compilou em artigo quinze "boas razões" para o uso da História da Matemática em sala de aula (FAUVEL, 1991), que reproduzimos em tradução livre:

a) ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem;
b) dá à Matemática uma face humana;
c) o desenvolvimento histórico ajuda a organizar os tópicos do currículo;
d) mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram facilita sua compreensão;
e) muda a percepção que os alunos têm da Matemática;
f) comparar o antigo e o moderno dá valor às técnicas modernas;
g) ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural;
h) abre oportunidades para investigações;
i) obstáculos do passado ajudam a explicar o que os alunos de hoje acham difícil;
j) os alunos encontram conforto ao perceber que não são os únicos com dificuldades;
k) incentiva os alunos mais rápidos a estudarem mais a fundo;
l) ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade;
m) torna a Matemática menos assustadora;
n) ajuda a sustentar o seu próprio interesse e a empolgação com a Matemática;
o) oferece oportunidade de trabalhos interdisciplinares.

Fauvel anota que outros artigos e trabalhos ao redor do mundo já haviam chegado a listas como essa. Ressalva, contudo, que os porquês do ensino da História da Matemática não bastam. É preciso discutir como levá-la à sala de aula – questão a que voltaremos adiante. Ao final do artigo, otimista, prevê nos anos seguintes o "florescimento" de um ambiente educacional mais rico, tanto na Europa como no resto do mundo.

2.6 O CENÁRIO BRASILEIRO

A literatura sobre a História da Matemática e seus usos em sala de aula é de fato florescente, como imaginou Fauvel, e o Brasil não é exceção. No século XXI, surgiram por aqui diversas publicações especializadas, como a Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), lançada em 2001; a Revista História da Matemática para Professores (RHMP) e o Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM), ambos lançados em 2014; a Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT), de 2015; e a Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA), de 2016.

No banco de dissertações do PROFMAT, a busca por "história" retorna 81 títulos. Uma rápida consulta ao Catálogo de Teses e Dissertações traz 609 resultados para "História da Matemática", 438 das quais catalogadas em áreas do ensino (dados de abril de 2021).

Há também uma crescente oferta de livros-textos e obras acadêmicas sobre o tema em português. Em grande parte, são traduções de autores estrangeiros, mas há também as iniciativas nacionais, entre as quais a "História da Matemática", de Tatiana Roque, "primeiro livro de história geral da Matemática propriamente brasileiro e resultado de pesquisa original", segundo prefacia Gert Schubring (ROQUE, 2012).

Também na produção de livros didáticos e paradidáticos se verifica uma maior atenção à História da Matemática. Segundo Vianna (1998), um "pressuposto facilmente comprovável através da simples observação é que nos últimos anos tem ganho incremento o uso de trechos com História da Matemática em todos os livros didáticos publicados no Brasil" e "tem havido uma série de publicações de livros chamados 'paradidáticos' nos quais os elementos históricos são abundantes".

Após analisar cinco coleções didáticas do Ensino Médio e entrevistar seus autores, Gomes (2008) reconhece uma preocupação com a contextualização e o emprego da História da Matemática como elemento auxiliar. Mas ressalva: "As práticas mobilizadoras de histórias da Matemática nos livros didáticos ainda estão longe de fazê-las participar de forma orgânica, esclarecedora, significativa e problematizadora da educação matemática escolar".

Da análise de seis coleções de Ensino Médio aprovadas na edição 2015 do Programa Nacional de Livro Didático, Pereira (2016) identifica "certo interesse" no uso da História da Matemática, seja por exigência do programa, seja por vontade do autor. Mas aponta que, de 294 menções à História da Matemática analisadas, apenas 38 (cerca de 13%) têm a função de "estratégia didática", "que entendemos, em consonância com a literatura, como a função mais interessante, visto que esta desempenha o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, levando-o à compreensão do conteúdo ou conceito matemático".

2.7 OS DOCUMENTOS OFICIAIS: "LIGEIRAS ALUSÕES"

Até certo ponto, o espaço dado à História da Matemática nos livros didáticos refletiu o endosso dos documentos oficiais da educação.

Já em 1931, no âmbito da reforma do ensino secundário (correspondente aos atuais Fundamental II e Médio) promovida no primeiro governo de Getúlio Vargas (1930-1945), uma portaria ministerial recomendava o seguinte: "[...] com o intuito de aumentar o interesse do aluno, o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da História da Matemática bem como à biografia dos grandes vultos desta ciência", segundo contam Miguel e Miorim (2019), com base no levantamento "O Ensino Secundário no Brasil e sua legislação atual", do inspetor federal Joaquim de Campos Bicudo.

Observamos que a instrução reduz a História da Matemática a notas "ligeiras" sobre o passado da disciplina e de seus "grandes vultos". Esse primeiro uso apareceu cedo nos livros didáticos, antes de qualquer normativa, e ainda hoje aparece, a despeito de conhecidas ressalvas.

Tomemos um exemplo do final do século XX, o "Curso Elementar de Mathematica – Arithmetica", dos irmãos Aarão e Lucano Reis. A obra apresenta, em notas de rodapé, dados históricos e informações biográficas sobre uma série de matemáticos e pensadores. Ficamos sabendo que a palavra cálculo vem do latim *calculus* (pedrinha) e que Pitágoras viveu na Grécia "500 e tantos anos antes da era cristã, exercendo, por seus trabalhos, por suas ideias e por seus numerosos discípulos, a mais decisiva influência sobre a coordenação e o desenvolvimento da Matemática" (REIS e REIS, 1892).

Em texto introdutório da segunda edição da obra, Eugênio de Barros Raja Gabaglia (1862-1919) chama atenção para os dados históricos espalhados pelos irmãos Reis, que considera "aperfeiçoamentos". Mas, entre elogios aos autores, faz diversos reparos a "enganos e injustiças que estão em desacordo com a imparcialidade, que é talvez a principal virtude do historiador". Gabaglia, ele próprio, marcaria a História da Matemática no país como autor do primeiro livro do gênero, em 1899, sobre o recém-descoberto e hoje muito famoso papiro egípcio de Rhind.

2.8 DA CONSTITUIÇÃO À BNCC: AVANÇOS E RECUOS

Os marcos atuais da educação no Brasil acolhem a História da Matemática de maneira bastante irregular.

Abrindo caminho para uma ampla reforma do ensino, a Constituição Federal de 1988 determinou que compete à União legislar sobre "diretrizes e bases da educação nacional" e decidiu que fossem "fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais". (BRASIL, 1988, artigos 22 e 210).

Oito anos depois, relatada pelo sociólogo e então senador Darcy Ribeiro (PDT-RJ), promulgou-se nova Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação Nacional, de número 9.394/96. O texto determinou que a União se incumbiria de "estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum". Estabeleceu também que os currículos "devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos" (BRASIL, 1996, artigos 9 e 26).

Essa base comum, contudo, só seria definida mais de vinte anos depois. No intervalo, os programas de ensino pautaram-se pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Vejamos como a História da Matemática é tratada nestes marcos legais.

Os PCN do Ensino Médio, de 1999, encorajam expressamente a perspectiva histórica da Matemática. Entre 18 habilidades a serem desenvolvidas, acha-se: "Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade" (BRASIL, 1999). Argumenta-se ali que "a história das Ciências e da Matemática [...] tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos".

O documento conhecido como PCN+, que detalha orientações educacionais complementares aos PCN, também reconhece a perspectiva histórica no ensino da Matemática. Espera-se que o aluno, no âmbito das competências relacionadas à "investigação e compreensão", alcance o seguinte objetivo: "compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas" (BRASIL, 2002a).

Instituída em 2018, finalmente, a Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio reorganiza competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática e suas Tecnologias a título de "formação geral básica". Podia-se esperar que a História da Matemática tivesse aqui seu endosso explícito, ao menos tanto quanto os parâmetros curriculares. Mas não. Nenhuma das cinco competências ou 43 habilidades prescritas na BNCC-EM faz menção à História da Matemática.

Na terceira versão do documento, ainda se lia um vago incentivo, ao final da apresentação das competências:

> Essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual[...].
>
> Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2018c).

Mas até essa passagem foi suprimida da versão final (BRASIL, 2018b). Nota-se que, neste sentido, o texto se distancia da BNCC do Ensino Fundamental, que diz com todas as letras que "é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" e que "esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos".

Esse silêncio da BNCC-EM, observa Pinto (2018), estende-se a outros campos emergentes da Matemática, como a etnomatemática. "Um rápido olhar para as pesquisas em educação matemática nos permite afirmar que essas abordagens teórico-metodológicas constituem referências para uma prática docente que respeita a diversidade e a pluralidade da escola pública brasileira", escreve o autor, que analisou três versões do texto.

Acrescentamos, embora não seja o escopo deste trabalho, que a perspectiva histórica tampouco achou espaço entre as habilidades da área de Matemática relacionadas aos chamados Itinerários Formativos. Para além da "formação geral básica", de que cuida a BNCC, esses itinerários são pensados como "situações e atividades educativas que os estudantes podem escolher conforme seu interesse, para aprofundar e ampliar aprendizagens em uma ou mais Áreas de Conhecimento e/ou na Formação Técnica e Profissional", segundo portaria que estabelece referenciais para sua elaboração (BRASIL, 2019b).

É de se perguntar que impacto esse silêncio da BNCC-EM terá sobre a futura produção de material didático.

2.9 AS RESISTÊNCIAS EM SALA DE AULA

Partimos do pressuposto de que há um descompasso entre o respaldo da literatura à adoção da História da Matemática no ensino de Matemática e a prática em sala de aula. São diversos os indícios da literatura que corroboram a hipótese. Vejamos alguns deles em detalhe.

Britto e Bayer (2007) investigaram o uso da História da Matemática por professores de escolas públicas e privadas de 35 municípios que integram a 2ª Coordenadoria Regional de Ensino do Rio Grande de Sul. Verificou-se então que os docentes consideram o recurso importante, "mas não têm o hábito de utilizá-lo em suas abordagens". Entre as justificativas, citam-se o despreparo dos próprios docentes e a falta de material.

Viana e Silva (2007) inqueriram os professores de Matemática do Ensino Fundamental (séries finais) e Médio da rede municipal e estadual de Ouro Preto, em Minas Gerais. A maioria, 75% deles, afirma buscar elementos da História da Matemática para ser utilizados em sala de aula. Mas há aqueles que, embora considerem o uso da História da Matemática importante, dizem não saber como utilizá-lo, alegando pouco conhecimento do assunto.

Menezes (2014) entrevistou dez professores de Física e Matemática, todos da rede pública, e constatou que eles "valorizam a história no processo ensino-aprendizagem, mas consideram que as circunstâncias que envolvem o contexto do seu trabalho contribuem para não efetivarem a inserção desta tendência em sua prática". Como justificativa geral, os professores "alegam que não tiveram esta experiência em sua formação profissional, não recebem orientação nem no ponto de vista da formação continuada, nem nas orientações do livro didático para o professor, mesmo que este recurso insira a história em suas páginas".

Santos (2017) levantou o ponto de vista de professores de Ensino Médio que atuam nas escolas públicas do município de Itajubá, Minas Gerais. Entre as dificuldades para a inclusão da História da Matemática nas aulas, aponta-se a falta de: tempo, material, preparo do próprio professor, interesse dos alunos e obrigatoriedade do tema em documentos oficiais. Cerca de 15% deles não conhecem material específico de História da Matemática.

Carvalho e Cavalari (2019) sondaram 26 licenciandos em Matemática e verificaram que a maioria deles recorreria à História da Matemática em sala de aula. Contudo, instados a indicar as referências que usariam para tal fim, limitaram-se a citar livros-textos de história e a internet, possível indício da baixa disponibilidade de materiais especificamente voltados para a Educação Básica. "A presente investigação evidencia a necessidade da produção e divulgação de materiais de

História da Matemática voltados para a sala de aula, que apresentem, por exemplo, atividades relacionadas a HM que auxiliem na construção do conhecimento matemático", concluem.

Assumindo o papel de "advogado do diabo", Siu (2006) compilou 16 razões por que o professor hesita ou simplesmente desiste de explorar em sala a História da Matemática, que achamos por bem reproduzir e, na sequência, confrontar:

a) "Eu não tenho tempo para isso na aula!"
b) "Isso não é Matemática!"
c) "Como se faz uma questão sobre isso na prova?"
d) "Isso não melhora a nota do aluno!"
e) "Os alunos não gostam!"
f) "Os alunos consideram isso como história e eles odeiam história!"
g) "Os alunos acham isso tão tedioso quanto a própria Matemática!"
h) "Os alunos não têm conhecimento suficiente para apreciá-la!"
i) "Progresso em Matemática é tornar os problemas difíceis uma rotina, então por que olhar para trás?"
j) "Falta material sobre isso!"
k) "Falta treinamento para o professor!"
l) "Não sou historiador. Como posso ter certeza da acurácia do conteúdo? "
m) "O que realmente aconteceu pode ser bem tortuoso. Contar como tudo se deu pode confundir, em vez de esclarecer"
n) "A leitura de textos originais é uma tarefa muito difícil. Será que realmente ajuda?"
o) "Isso não é capaz de incentivar o chauvinismo e o nacionalismo?"
p) "Existe alguma evidência empírica de que os alunos aprendem melhor quando se faz uso da História da Matemática na sala de aula?"

2.10 POTENCIAL E RISCOS

Procuramos até aqui estabelecer que há robusto aval acadêmico para a adoção da História da Matemática como recurso didático para o ensino de Matemática. No entanto, como vimos, não se encontra o mesmo entusiasmo na prática dos docentes. A seguir, trataremos das objeções apontadas por Siu (2006), cotejadas aos incentivos listados por Fauvel (1991), chamando atenção para certos riscos e expectativas ingênuas que podem ajudar a explicar o descompasso entre a pesquisa científica e a ação cotidiana do professor em sala de aula.

2.10.1 "Eu não tenho tempo para isso!"

Esta é uma objeção importante, especialmente quando o programa é mais rigidamente amarrado a apostilas e livros didáticos. No entanto, como vimos, também os materiais didáticos estão abrindo mais espaço à História da Matemática, o que pode esvaziar o argumento.

Lembramos, de qualquer forma, que o tempo investido na História da Matemática pode recompensar professor e aluno, se aceitarmos, como defende Fauvel (1991), que "mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram facilita sua compreensão"; "ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem"; e, principalmente, "ajuda a organizar os tópicos do currículo".

2.10.2 "Isso não é Matemática!"

A suspeita de que História da Matemática não seja Matemática parece refletir a inclusão tardia e irregular da disciplina nos programas de formação de professores. Foi só nos anos 2000 que se recomendou que "conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática" sejam parte comum de todos os cursos de licenciatura na área, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2002b).

Carmo e Queiroz (2020), em análise de elementos curriculares de cursos presenciais de licenciatura em Matemática no Ceará, verificaram que a disciplina História da Matemática é heterogênea e que seu uso didático "ainda é muito tímido", havendo "necessidade de atualização frequente do currículo". Rosa e Santos (2020), tratando dos cursos das instituições públicas de Goiás, constataram que a disciplina, na maioria das vezes, é alocada "nos primeiros períodos, sem exigência de pré-requisitos, com conteúdos muito amplos e carga horária insuficiente".

Com ou sem recomendação formal, é preciso deixar claro que a História da Matemática tem sido sistematicamente considerada parte da Matemática. No índice da Mathematics Subject Classification, esforço para listar todas as áreas e subáreas da Matemática feito pelos editores da Mathematical Reviews e Zentralblatt MATH, atualizado de dez em dez anos, "História e biografia" é logo o segundo de 98 itens – o primeiro é "Tópicos gerais".

Para muitos, a História da Matemática não só é parte da Matemática, como uma parte importante. Heiede (1992), em "Why teach history of mathematics", é enfático: "Se você ensina Matemática, você também precisa ensinar a História da Matemática". E provoca: "Não lhe ensinaram logaritmo se você não ouviu falar de (John) Napier".

2.10.3 "Como se faz uma questão sobre isso na prova?"

Uma razão interessante para o uso da História da Matemática, apontada por Fauvel (1991), é a de que o recurso "torna a Matemática menos assustadora". De fato, sob perspectiva histórica, tudo o que a Matemática pode ter de assustador para o aluno foi, em algum momento da história, um desafio a ser vencido.

Como aponta Fauvel (1991), "os alunos encontram conforto ao perceber que não são os únicos com dificuldades". É reconfortante saber, por exemplo, que os números negativos, irracionais e complexos já pareceram "falsos", "fictícios", "absurdos", "impronunciáveis", "impossíveis" ou "sem significado" aos matemáticos – pois é assim que parecem a muitos alunos quando apresentados a eles.

Dito isso, seria um contrassenso, nos parece, fazer com que seja a História da Matemática um novo tormento para o aluno. Aqui endossamos as antigas balizas de Heppel (1893): a História da Matemática deve se subordinar ao ensino da Matemática e não há por que cobrá-la em prova.

2.10.4 "Os alunos não gostam!"

Esse é um argumento, à primeira vista, impossível de rebater. Seria imprudente, até leviano, desacreditar o professor que intui que o aluno não gosta de História da Matemática. No entanto, são também muitos os relatos de professores satisfeitos com o uso da História da Matemática em sala de aula – como este que escreve. Quem tem razão?

Notamos de saída que esse tipo de objeção se choca frontalmente com as intenções de pioneiros da História da Matemática e que Fauvel (1991) relaciona como razão primeira do recurso didático: "ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem". De fato, são muitos os autores que destacam o potencial motivador da História da Matemática, como vimos.

É possível que a frustração de muitos professores em sala de aula derive de expectativas exageradas em relação ao recurso didático. Não se pode esperar que uma referência histórica baste para motivar uma sala de aula. "Os mais ingênuos", observam Miguel e Miorim (2019), "acabam atribuindo à história um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno".

Fauvel (1991) alerta que a adoção da História da Matemática não é fácil – especialmente, acrescentamos, se o professor não dispuser da formação ou material didático apropriado. Para Heiede (1992), não se deve tratar a História da Matemática como uma maneira de tornar a Matemática mais "divertida". Se tratado como panaceia, de fato o uso da História da Matemática em sala pode ser bastante decepcionante.

2.10.5 “Os alunos não têm conhecimento suficiente para apreciá-la!”

Notamos que esse tipo de objeção pode ser lido, antes, como um incentivo: a História da Matemática pode então servir como porta de acesso à história das ideias, como queria Montucla.

O matemático Hans Freudenthal (1905-1990) dizia ter vacilado entre a carreira de matemático e a de historiador (FREUDENTHAL, 1981). Como matemático, acabou fazendo importantes contribuições na área de topologia algébrica. Mas nunca descuidou da história da disciplina, e é em sua homenagem que a ICMI confere a cada dois anos a medalha Freudenthal.

Nas quatro páginas de “Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics?” (1981), Freudenthal faz nada menos que 92 perguntas como esta do título: o professor de Matemática precisa saber alguma coisa de história? São provocações, a partir das quais o autor faz a defesa do que chama “conhecimento integrado”, para o que a História da Matemática concorre. “O homem é a única espécie que se preocupa com o passado e com o futuro”, escreve. “Para mim, esta é a utilidade da História da Matemática e áreas adjacentes: servir à História, mais que à Matemática [...]. Como bônus, pode ajudar a Matemática também”.

2.10.6 “Por que olhar para trás?”

Até certo ponto, o ensino da Matemática recapitula o próprio desenvolvimento da Matemática. Assim, até certo ponto, o aluno repisa os obstáculos, os tropeços e os impasses que marcaram a construção do edifício científico – e pode experimentar o êxtase de superá-los.

A História da Matemática é, assim, uma oportunidade para mostrar ao aluno que as suas eventuais dificuldades são as mesmas com que muitas outras gerações lidaram, legando-nos os conceitos hoje ensinados como o *non plus ultra* do conhecimento (FREUDENTHAL, 1981) – sobre os quais novos andares do edifício matemático ainda serão erguidos. Como aponta Fauvel (1991): “obstáculos do passado ajudam a explicar o que os alunos de hoje acham difícil”.

Roque (2012) lembra que a Matemática se desenvolveu e ainda se desenvolve a partir de problemas. Assim, diz a autora, a História da Matemática pode ter justamente a função de “exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram”. Essa função da História da Matemática pode se ajustar bastante bem à BNCC. Como vimos, não há menções explícitas à História da Matemática, mas, das 43 habilidades, 11 delas apoiam-se na seguinte expressão: “resolver e elaborar problemas [...]”

2.10.7 “Falta treinamento, falta material!”

Essa objeção parece simples de contornar no plano mais imediato: basta, é claro, que o professor tenha acesso ao material apropriado. À primeira vista, são muitas as opções para o docente: coleções didáticas, livros paradidáticos, livros-textos, obras de divulgação, revistas especializadas, sites, blogs, vídeos e muitos produtos de programas de pós-graduação – a que esta dissertação pretende se somar.

E, no entanto, a objeção existe. É ocioso especular que falte interesse ao professor. Antes, é preciso admitir que o acesso a tais recursos didáticos talvez não seja tão simples. De fato, apesar de muitos lançamentos na área, não são tantos os títulos em catálogo nas livrarias, mesmo no formato digital. E não se pode dizer que sejam baratos. Para além das livrarias, é vasta a oferta de produtos gratuitos na internet. Mas aqui, é preciso reconhecer outra objeção dos docentes: como se certificar da acurácia de um vídeo, um blog ou qualquer resultado sugerido pelos buscadores?

Também é preciso considerar a hipótese de que muitas publicações gratuitas voltadas à História da Matemática simplesmente não se ajustem à expectativa do docente. As publicações científicas, de marcado acento acadêmico, podem ser uma leitura bastante difícil. Na outra ponta, as obras de divulgação, de fácil leitura, não têm a preocupação de estabelecer correspondências entre a História da Matemática e a sala de aula.

2.10.8 “A História da Matemática é tortuosa e pode confundir”

De fato, a História da Matemática é tortuosa. Mas disso não se deduz que seu tratamento em sala de aula deva ser igualmente tortuoso. Fosse assim, como ensinar Revolução Francesa?

Na verdade, esse é um aspecto positivo da História da Matemática. Para Ernest (1998), “além de melhorar atitudes, um benefício (do ensino da História da Matemática) é que o mito da Matemática como um corpo de conhecimentos perfeitamente acabado é confrontado”. Assim, o recurso teria o condão de “mudar a percepção que os alunos têm da Matemática”, como aponta Fauvel (1991). Para tanto, é importante que o professor não faça da própria História da Matemática “um corpo de conhecimentos perfeitamente acabado” ou que, como Montucla (1758), se valha de “desenvolvimentos fictícios”, mesmo se considerá-los “provavelmente próximos do verdadeiro”.

Observamos que a objeção de que a História da Matemática seja confusa pode derivar da própria dificuldade do docente. Nesse sentido, sua adoção pode ser um fator de constrangimento. Não sendo historiador, o professor de Matemática pode bem recuar diante de discussões sobre as grandes navegações, a Revolução Industrial, a afirmação dos estados modernos, a expansão do Islã etc. Mas aqui, como já dito, acreditamos que seja possível privilegiar o uso da “história para o tratamento de conceitos e processos" (FURINGHETTI, 2020), terreno que o professor de Matemática pode pisar com segurança.

Quanto a isso, vale apontar uma reconfortante recomendação de D'Ambrosio (1999):

> Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática.

E isso, diz D'Ambrosio, "pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática."

2.10.9 "A leitura de textos originais é muito difícil"

É verdade. A leitura de fontes originais é mesmo difícil e não deve ser tomada como condição necessária para a adoção da História de Matemática no ensino. No entanto, como vimos, essa pode ser uma das estratégias mais gratificantes, por meio dos efeitos de substituição, reorientação e entendimento cultural (Jahnke *et al.*, 2002).

As oportunidades, com o advento da internet, são muitas. A barreira linguística é um obstáculo inicial importante, especialmente para o falante do português. Mas acreditamos que seja possível transpô-la com apoio do material adequado. Adicionalmente, edições em inglês e espanhol são um interessante convite à interdisciplinaridade, a depender do nível de proficiência dos alunos. Pontualmente, o professor também pode contar com traduções competentes para o português.

2.10.10 "Isso não pode incentivar o chauvinismo e o nacionalismo?"

Ao contrário, nos parece. A História da Matemática é um verdadeiro passeio pela história das civilizações e, como lembrava Loria (FURINGHETTI, 2000), toca o desenvolvimento de todas as ciências. O trânsito de ideias é evidente e "ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural", para citar mais uma das razões apontadas por Fauvel (1991). É certo que, no curso da história, existiram rivalidades e embates entre matemáticos de diferentes países, de que é exemplo a célebre disputa pela paternidade do Cálculo. Mas a abordagem histórica tem justamente o condão de desfazer mitos a esse respeito.

Risco mais sério, tomando chauvinismo num sentido mais amplo, é o de reforçar o estereótipo da Matemática como uma atividade essencialmente masculina. São poucas as mulheres citadas nos livros de história geral: Hipátia de Alexandria (c. 370-415 d.C.) e, mais raramente, a francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831). Não se afasta esse risco, nos parece, disfarçando o fato de que os marcos mais conhecidos e os principais teoremas ensinados ao aluno são de fato atribuídos a homens. Ao contrário, é uma oportunidade para discutir o lugar da mulher na sociedade, ontem e hoje. A trajetória de Sophie Germain, que, para ser levada a sério, assinava sua correspondência como Monsieur Leblanc (BOYER e MERZBACH, 2011), é bastante ilustrativa das barreiras que já se colocaram à participação de mulheres na atividade científica.

2.10.11 "Existe evidência empírica de que o aluno aprende melhor assim?"

Siu (2006) responde sem rodeios à questão: as evidências de que a História da Matemática faz o aluno aprender melhor são esparsas e nem sempre positivas. Os resultados, diz, parecem indicar efeitos positivos mais notáveis sobre aspectos afetivos do que cognitivos. "Nas aulas em que se faz uso de História da Matemática, os alunos gostam mais da matéria, mas não necessariamente têm melhor desempenho nas provas", resume.

A questão é difícil, mas talvez seja enganosa. Como se mede que alunos estão aprendendo melhor? E o que se deve entender por "uso da História da Matemática"? As respostas serão necessariamente esparsas, posto que dependem das diferentes práticas.

Acreditamos que seja possível superar essa questão invocando duas razões apontadas por Fauvel (1991) em favor da História da Matemática. O recurso "dá à Matemática uma face humana" e "ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade". São propriedades que se ligam à noção de conhecimento integrado, defendida por Freudenthal (1981): notas mais altas podem ser um "bônus", como escreve o autor, mas não são razão para adotar – ou descartar – a História da Matemática em sala de aula.

3 APLICAÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À BNCC-EM

Neste capítulo, apresentamos relatos históricos e tarefas matemáticas associados a dez habilidades da BNCC-EM. Cada seção deste capítulo é dedicada a uma habilidade e está dividida em três subseções: uma breve introdução, com a descrição da habilidade; o relato a ela associado; e as tarefas matemáticas correspondentes.

Como já dissemos, o documento oficial dita 43 habilidades, relacionadas a cinco competências específicas da área Matemática e suas Tecnologias.

A BNCC define competência como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". Tomam-se habilidades por "práticas, cognitivas e socioemocionais" e diz-se que "expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares" (BRASIL, 2018b).

As cinco competências específicas são as seguintes:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
>
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
>
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018b).

Cada relato é acompanhado da descrição da habilidade, tal qual aparece na BNCC-EM, e seu código alfanumérico. Esse dado indica, pela ordem: a etapa de ensino; os anos em que se deve desenvolver a habilidade; a área; a competência específica; e uma numeração sequencial. Em Matemática, todos os códigos começam por "EM13MAT", ou seja, as habilidades podem ser todas trabalhadas nos três anos do Ensino Médio. Por extensão, o conteúdo aqui reunido pode embasar atividades para os três anos da etapa escolar.

Os relatos exploram episódios ou obras de relevo histórico segundo os critérios relacionados na introdução deste trabalho, em abordagem qualitativa. Todos buscam lançar luz sobre os nós que matemáticos e pensadores de diversas épocas e paisagens procuraram desatar e as relações de seus esforços com os conceitos hoje explorados em sala de aula.

Organizamos os textos da seguinte forma: uma breve apresentação, a título de "orientação" (Rose, 2012); e seu desenvolvimento de acordo com fases marcadas no tempo, que é o que distingue o relato como gênero textual. Julgamos conveniente dividi-lo segundo as diversas fases exploradas, devidamente intituladas, de modo a tornar a leitura mais agradável e ao mesmo tempo permitir que o texto seja aproveitado na parte ou no todo.

Ao final de cada relato, e de acordo com o seu conteúdo, propomos tarefas voltadas aos alunos, que classificamos conforme a tipologia de Ponte (2014), já comentada: exercício, problema, exploração ou investigação, segundo os graus de indeterminação e dificuldade percebida.

Insistimos novamente que os relatos e as tarefas não podem ser tomados como sequências ou atividades didáticas acabadas. Mas esperamos que o professor possa se servir da seleção apresentada no momento em que planeja suas aulas, segundo o contexto escolar, os objetivos didáticos e a inclinação particular de cada um.

3.1 ESTATÍSTICA PARA TODOS

3.1.1 Habilidade

> (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas (BRASIL, 2018b).

Nesta seção, vamos analisar as contribuições pioneiras de Michael Florent van Langren (1598-1675), Christiaan Huygens (1629-1695), Edmond Halley (1656-1742) e William Playfair (1759-1823) para o desenvolvimento do método gráfico. Veremos como os autores se valeram de diagramas não apenas para representar um conjunto de dados, mas para também interpretá-los. Finalmente, mostraremos como um gráfico pode induzir impressões equivocadas.

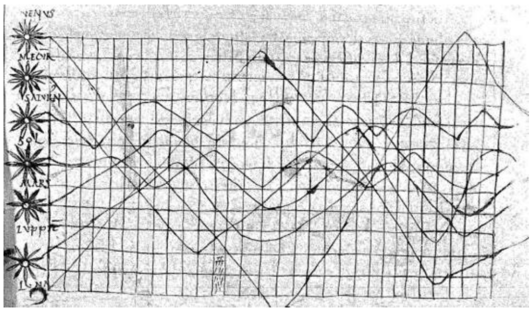
3.1.2 Relato

Um retrato certeiro de “erros enormes”

Gráficos estão por toda a parte hoje em dia: na imprensa, na publicidade, na sala de aula, nos relatórios de governo e empresas. Podem ser tomados de fato como uma “linguagem universal” (FUNKHOUSER, 1937), que facilita a compreensão e análise de informações.

Nem sempre foi assim. Os registros antigos são esparsos. Há exemplos pré-históricos de mapas do céu e da Terra, mas os primeiros esforços por representar, em diagramas, a relação entre duas variáveis datam da Idade Média. A Figura 1 reproduz um exemplo do século X ou XI, o mais antigo de que se tem notícia (TUFTE, 2001).

Figura 1 - Representação visual do movimento dos astros.



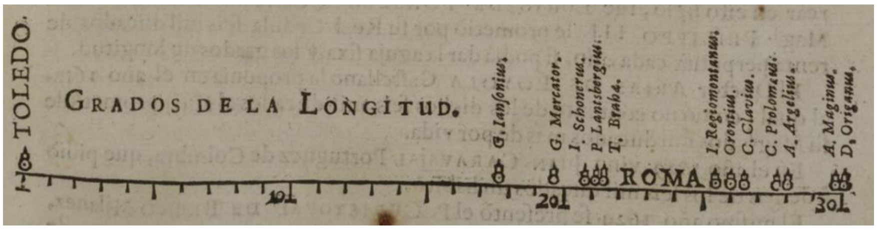
Fonte: Bayerische Staatsbibliothek (BSB Clm 14436), http://daten.digitale-sammlungen.de/bsb00033074/image_125.

Trata-se de uma representação gráfica do movimento de planetas, da Lua e do Sol em função do tempo. O documento, de autoria desconhecida, foi achado no século XIX, em meio a comentários do filósofo romano Macróbio (c. 370-430 d.C.), e descrito apenas no século XX (FUNKHOUSER, 1936; BENIGER e ROBYN, 1978). Aparentemente, o eixo vertical indica a inclinação do astro, em relação ao plano orbital da Terra, e o eixo horizontal, a passagem do tempo. É um diagrama notável, não pela precisão, mas por tatear conceitos que só seriam plenamente desenvolvidos nos séculos XVI e XVII (FRIENDLY, 2008), como o de sistema de coordenadas.

A disseminação da representação gráfica dependeu de circunstâncias dadas apenas no século XVII. No campo teórico, firmavam-se conceitos da Geometria Analítica e da Probabilidade. Na prática, aperfeiçoavam-se os instrumentos de medição e surgiam os primeiros levantamentos sistemáticos de dados estatísticos. Em resumo, surgiam: “alguns dados de real interesse, alguma teoria que lhes desse sentido e algumas ideias de representação visual” (FRIENDLY, 2008).

Uma marcante “ideia de representação visual” apareceu em 1644, em Flandres, na obra de Michael Florent van Langren (1598-1675), filho e neto de cartógrafos. Em “La verdadera longitud por mar y tierra”, Van Langren (1644) apresentou uma compilação de estimativas da diferença de longitude, em graus, entre as cidades de Toledo e Roma. Para evidenciar a disparidade entre as medidas, Van Langren escolheu mostrá-las ao longo de uma linha graduada (Figura 2).

Figura 2 - Estimativas da diferença de longitude entre Toledo, cidade histórica da Espanha, e Roma.

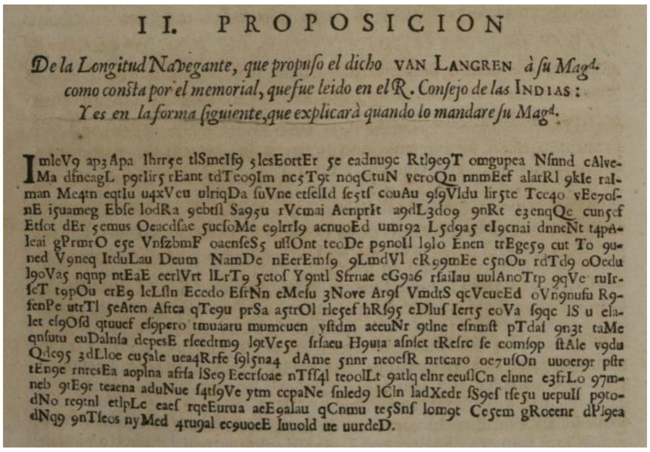


Fonte: Van Langren (1644).

Seu objetivo era chamar atenção para os "erros enormes" de alguns "eminentes astrônomos e geógrafos", como Ptolomeu (c. 85-165 d.C.), Johann Regiomontanus (1436-1476), Tycho Brahe (1546-1601) e Nicolaus Mercator (1620-1687). Ao mesmo tempo, procurava valorizar sua própria estratégia para estimar a "verdadeira longitude" (VAN LANGREN, 1644). À época das grandes navegações, já se sabia estimar a latitude por meio de observações do Sol e estrelas, mas restava em aberto o chamado problema da longitude, de especial relevância para as travessias oceânicas.

Sabendo da importância do problema, Van Langren não revela a sua solução. Publica uma proposição de forma cifrada (Figura 3), comprometendo-se a revelar o segrego "quando sua Majestade (Felipe IV, da Espanha) mandar". Em janeiro de 2021, quase quatro séculos depois, a imprensa belga noticiou que o código havia sido finalmente quebrado – por um belga –, e a suposta solução agora circula em blogs e fóruns de criptografia (SCHMEH, 2021). Não consta, de qualquer forma, que a estratégia tenha bastado para resolver o problema da longitude, que só seria definitivamente superado no século XVIII, com a invenção dos cronômetros marinhos.

Figura 3 - A estratégia cifrada de Van Langren.



II. PROPOSICION

De la Longitud Navegante, que propuſo el dicho VAN LANGREN *à ſu Mag^d.*
como conſta por el memorial, que fue leido en el R. Conſejo de las INDIAS:
Y es en la forma ſiguiente, que explicarà quando lo mandare ſu Mag^d.

ImleV9 ap3Apa Ihrr5e tlSmelſ9 5lesEortEr 5e eadnu9c Rtl9e9T omgupea Nſnnd cAlve-
Ma dſneagL p9rlir5 rEant tdTeo9Im nc5T9t noqCtuN veroQn nnmEef alarRl 9kle ral-
man Me4tn eqtlu u4xVeu ulriqDa ſuVne etſelId ſe5tſ couAu 9ſ9Vldu lir5te Tce4o vEe7oſ-
nE i5uameg Ebſe lodRa 9ebtſl Sa95u rVcmai Aenprlt a9dL3do9 9nRt e3enqQe cun5ef
Etſot dEr 5emus Oeacdſae 5ucſoMe e9lrrI9 acnuoEd umr92 L5d9a5 eI9cnai dnneNt t4pA-
leai gPrmrO e5e VnſzbmF oaenſeS5 uſlOnt teoDe p9noll l9lo Enen trEge59 cut To 9u-
ned V9neq ItduLau Deum NamDe nEerEmſ9 9LmdVl cR99mEe e5nOu rdTd9 oOedu
l9oVa5 nqnp ntEaE ecrlVrt lLrT9 5etoſ Y9ntl Sfrnae cG9a6 rſailau uulAnoTtp 9qVe rulr-
ſeT t9pOu erE9 leLſln Ecedo EſrNn eMeſu 3Nove Ar9ſ VmdtS qeVeueEd oVn9nufu R9-
fenPe utrTl 5eAten Afica qTe9u prSa a5trOl rle5ef hRſ95 eDluſ Iert5 eoVa ſ9qc lS u ela-
let eſ9Oſd qtuuef eſ9pero tmuaaru mumeuen yſtdm aeeuNr 9tlne eſnmſt pTdal 9n3t taMe
qnſutu euDalnſa depesE rſeedtm9 l9tVe5e ſrſaeu H9uta aſnlet tRefre ſe eomſ9p ſtAle v9du
Qde95 3dLloe eu5ale uea4Rrfe ſ9l5na4 dAme 5nnr neoeſR nrtearo oe7uſOn uuoer9r pſtr
tEn9e rnresEa aoplna afrla lSe9 Eeerſoae nTſſ4l teoolLt 9atlq elnr eeuſlCn elune e3frLo 97m-
neb 9tE9r teaena aduNue ſ4tſ9Ve ytm eepaNe ſnled9 lCln ladXedr ſS9eſ tſe5u uepulſ p9to-
dNo re9tnl etlpLe eaeſ rqeEurua aeE9alau qCnmu te5Snſ lom9t Ce5em gRoeenr dPl9ea
dN99 9nTſeos nyMed 4ru9al ee9uoeE luuold ue uurdeD.

Fonte: Van Langren (1644).

O gráfico de Van Langren é frequentemente tomado como a primeira representação gráfica, ou uma das primeiras, de natureza estatística. Independente disso, pode-se saudá-lo por sua excelência. Van Langren podia ter simplesmente listado os dados, mas "só um gráfico fala diretamente aos olhos" (FRIENDLY *et al.*, 2010). A propósito, todas as medições superestimam a diferença entre as cidades: cerca de 16º31'.

A ciência do estado

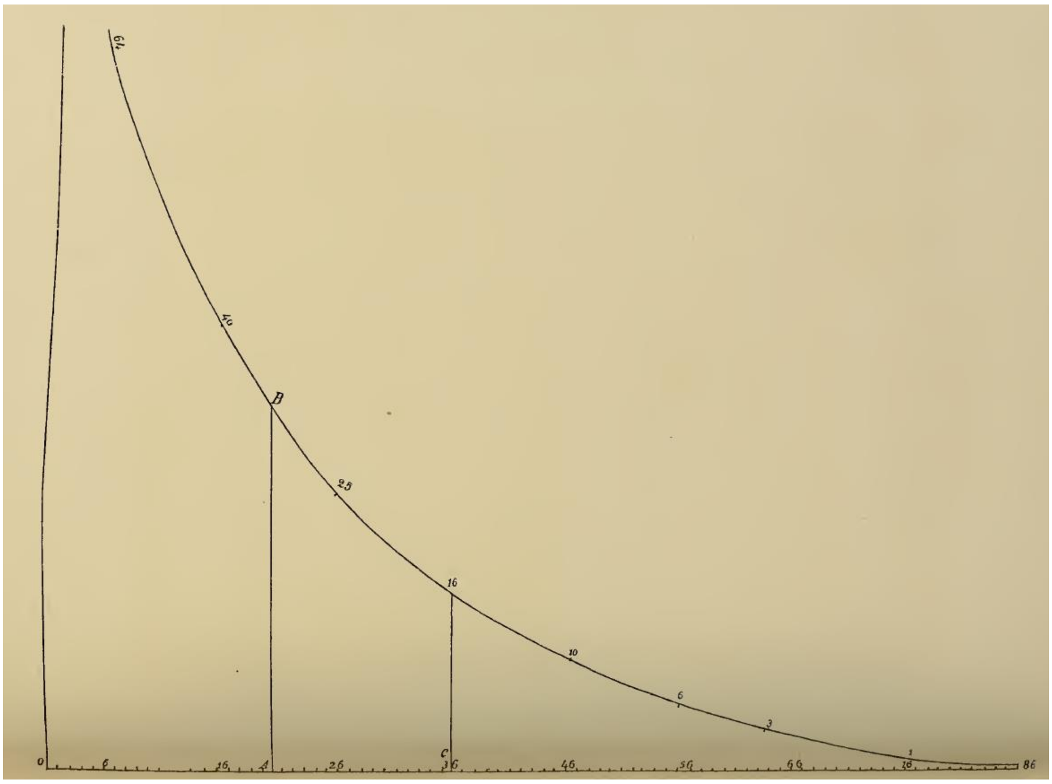
É claro que a obra de Van Langren só tem natureza estatística quando se considera o sentido moderno do termo – ramo da Matemática que trata da coleta, da análise, da interpretação e da apresentação de massas de dados numéricos, na primeira acepção dada por Houaiss e Villar (2001). A palavra vem do latim *status*, estado. Introduziu-se em língua inglesa, a partir do alemão *Statistik*, debaixo da seguinte definição: "a ciência que é chamada estatística nos ensina o arranjo político de todos os estados modernos do mundo conhecido" (VON BIELFELD, 1770).

A definição, portanto, não se aplicava a medidas de longitude, mas a dados relativos ao funcionamento dos estados. O grande marco da "ciência do estado" são as "Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality", do inglês John Graunt (1620-1674), de 1662. Em 1603, o rei Jaime I ordenara o levantamento semanal de batismos e enterros, que servia para monitorar os casos de peste bubônica. Graunt se debruçou sobre os dados de milhares de semanas e os sintetizou em tabelas. Constatou, por exemplo, a regularidade de mortes devidas a certas doenças, como tuberculose, e a errática frequência de óbitos em razão da peste, que seria vencida na década seguinte (MORABIA, 2013).

A partir das tábuas de mortalidade organizadas por Graunt, o holandês Lodewijck Huygens (1631-1699) calculou o que hoje conhecemos como expectativa de vida e comunicou o resultado, por carta, ao irmão mais velho e mais famoso, o astrônomo e matemático Christiaan Huygens (1629-1695). Este, em resposta ao irmão datada de novembro de 1669, esboçou uma curva contínua para representar, para cada idade, o número de sobreviventes de mesma idade de um total de 100 nascimentos (HUYGENS, 1895), que a Figura 4 reproduz.

O gráfico de Christiaan baseia-se no seguinte sistema de coordenadas: no eixo horizontal estão representadas as idades, de 0 a 86; no eixo vertical, registra-se o número de sobreviventes com essas idades, de um total de 100 nascidos. Trata-se do gráfico de uma função decrescente, embora a expressão ainda não houvesse sido cunhada. Em notação moderna, poderíamos definir a função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(x)$ é a porcentagem de pessoas que chegaram à idade x.

Figura 4 - A linha da vida, modelada por Huygens.



Fonte: Huygens (1895).

Christiaan defende que a mediana dos anos que restam a uma pessoa seja tomada como sua esperança de vida. E mostra como inferi-la a partir da curva traçada. Em notação moderna: dada a idade x_1, basta buscar no gráfico x_2 tal que que $f(x_2) = \frac{f(x_1)}{2}$. Por exemplo, usando as marcações originais de Christiaan: de 100 nascidos, apenas 32 chegam à idade de 20 anos (pontos A e B da Figura 4). Destes, apenas metade chegará aos 36 anos (ponto C). Então uma pessoa de 20 anos pode esperar viver mais $36 - 20 = 16$ anos.

Essa troca de cartas está na origem dos estudos de expectativa de vida, embora seu cálculo atual não tome, como Huygens, a mediana dos dados. De qualquer forma, temos aqui um exemplo claro do uso de um gráfico não apenas para a apresentação de resultados, mas para a inferência estatística. Para Boyer (1947), a "linha da vida" de Huygens seria o primeiro exemplo de gráfico produzido a partir de dados estatísticos. Friendly *et al.* (2010), dando precedência a Van Langren, consideram o esboço de Christiaan o primeiro gráfico estatístico de uma distribuição contínua.

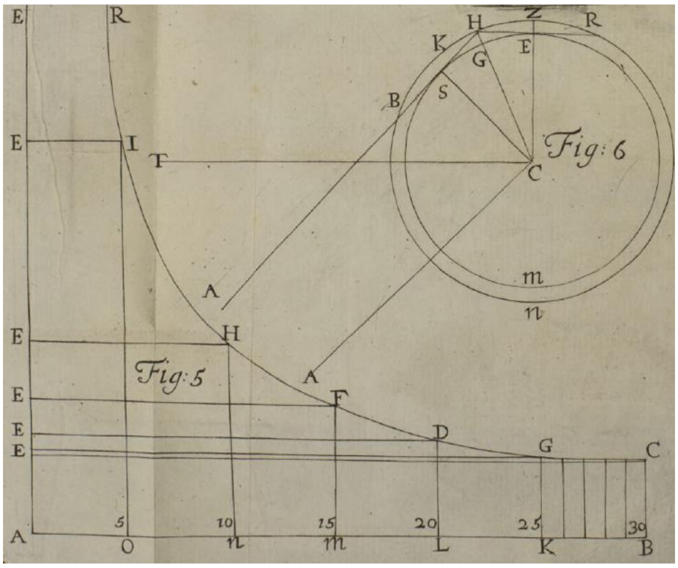
Um gráfico de sucesso

Alguns anos após a correspondência dos irmãos Huygens, o inglês Edmond Halley (1656-1742) publicou o que pode ser considerado o primeiro "grande sucesso" na aplicação do sistema de coordenadas à investigação científica (BENIGER e ROBYN, 1978). É seu artigo dedicado à relação entre pressão atmosférica e altitude, publicado na mais antiga revista voltada exclusivamente à produção científica, a inglesa Philosophical Transactions of the Royal Society, criada em 1665.

Já se sabia que a pressão atmosférica diminuiu conforme a altitude aumenta. O italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), que inventou o barômetro em 1643, explicou em carta a relação entre as grandezas por meio da seguinte analogia: "Vivemos submersos no fundo de um oceano de ar elementar, que, por experimentos indubitáveis, se sabe ter peso" (TORRICELLI, 1823). Quanto mais ao fundo desse oceano, maior o peso.

Em seu artigo, Halley parte da constatação de que a "expansão do ar" e o "peso da atmosfera" são inversamente proporcionais ("recíprocos"), tanto quanto volume e pressão, conforme Robert Boyle (1627 - 1691) propusera em 1662. Tomando como medida do "peso da atmosfera" a altura da coluna de mercúrio no barômetro, Halley pondera: é "evidente" que, "com ajuda da Curva da Hipérbole e suas Assíntotas", as "expansões de ar" podem ser conhecidas a partir de qualquer medida do barômetro (HALLEY, 1687). A curva em questão, o primeiro gráfico bivariável de dados experimentais (FRIENDLY e DENIS, 2005), é apresentada ao final da revista, como "Fig. 5" (assim como neste relato, coincidentemente):

Figura 5 - A "Curva da Hipérbole", de Edmond Halley.



Fonte: Halley (1687).

No gráfico, as abscissas AB, AK, AL ... são as medidas de pressão, ou seja, a altura da coluna de mercúrio no barômetro, em polegadas. As ordenadas, todas representadas pela letra E, valem pela "expansão do ar". Assumindo que "expansão do ar" e "peso da atmosfera" são inversamente proporcionais, temos que seu produto é constante: $x \cdot y = k \in \mathbb{R}$, em notação moderna, que de fato é a equação de uma hipérbole. Assim, para todos os pontos da curva, o retângulo definido por suas abscissa e ordenada têm mesma área: $A_{ABCE} = A_{AKGE} = A_{ALDE} = k$, como Halley observa.

Não se trata, contudo, de um gráfico de pressão por altitude, como se poderia imaginar. Mas Halley (1687) mostra como dar este passo: a altitude corresponde à soma de todas as "expansões do ar", tomadas "infinitamente pequenas", desde o nível do mar, onde a coluna de mercúrio mede 30 polegadas (a abscissa AB, no gráfico). Daí porque Halley trata todas ordenadas por E: não está interessado em seus valores, mas nas áreas sob a curva.

O leitor moderno já pode intuir o que seja essa soma de "expansões de ar" tomadas "infinitamente pequenas": a integral definida de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{k}{x}$, em que $x \neq 0$ é a pressão e $f(x)$ é a expansão de ar, no intervalo de x a 30, que vem a ser a medida do barômetro ao nível do mar:

$$\int_{x}^{30} \frac{k}{x}\, dx = k \cdot (\ln 30 - \ln x) = k \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right).$$

Mas Halley não tinha à mão as armas do cálculo integral, então nascente. Tinha, por outro lado, conhecimento da obra de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), entre outros que estudaram a quadratura da hipérbole e reconheceram a relação de proporcionalidade entre as áreas sob a curva e a diferença entre logaritmos (HALLEY, 1687; FRISINGER, 1974). Foi o que lhe bastou. Vejamos como essa noção se ajusta ao cálculo integral.

Aplicando a relação entre áreas e logaritmos à curva de Halley, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A_{BKGC}}{\log AB - \log AK} = \frac{A_{BLDC}}{\log AB - \log AL} = \frac{A_{BMFC}}{\log AB - \log AM} = \frac{A_{BNHC}}{\log AB - \log AN} = r\ .$$

E de modo geral, a área sob a hipérbole entre uma abscissa x e AB pode ser dada por:

$$A(x) = r \cdot (\log AB - \log x)\ .$$

Tomando AB por 30 polegadas (a pressão ao nível do mar), temos:

$$A(x) = r \cdot (\log 30 - \log x) = r \cdot \log\left(\frac{30}{x}\right).$$

Passando o logaritmo para a base natural, temos:

$$A(x) = r \cdot \log\left(\frac{30}{x}\right) = r \cdot \frac{\ln\left(\frac{30}{x}\right)}{\ln 10}\ .$$

E fazendo $k = \frac{r}{\ln 10}$, chegamos a:

$$A(x) = k \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right) = \int_{x}^{30} \frac{k}{x}\ dx.$$

Mas como determinar a constante de proporcionalidade? Para tanto, Halley toma por 1:10.800 a razão entre as densidades do ar e do mercúrio ao nível do mar. Então uma polegada de mercúrio corresponde a uma coluna de ar de 10.800 polegadas, ou 900 pés. Eis a “expansão do ar” ao nível do mar, onde a medida do barômetro é 30 polegadas. Então $k = 30 \cdot 900$ pés, e assim pode-se calcular a altitude de um local onde o barômetro mede x polegadas da seguinte maneira:

$$A(x) = 30 \cdot 900 \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right)\ ou\ A(x) = \frac{900}{0.0144765} \cdot \log\left(\frac{30}{x}\right)\ .$$

A partir dessa “regra”, Halley calcula a seguinte tabela de valores (Figura 6):

Figura 6 - Medidas de pressão, em polegadas (*inch*) de mercúrio; e altitude, em pés (*feet*).

A Table ſhewing the Altitude, to given hights of the Mercury.

Inch.	*Feet.*
30.	0
29.	915.
28.	1862.
27.	2844.
26.	3863.
25.	4922.
20.	10947.
15.	18715.
10.	29662.
5.	48378.
1.	91831.
0, 5.	110547.
0, 25.	129262.
0, 1.	29 *mil. or* 154000.
0, 01.	41 *mil.* 216169.
0, 001.	53 *mil.* 278338.

A Table ſhewing the hights of the Mercury, *at given Altitudes.*

Feet.	*Inch.*
0	30, 00.
1000.	28, 91.
2000.	27, 86.
3000	26, 85.
4000	25, 87.
5000 *feet*	24, 93.
1 *mile*	24, 67.
2	20, 29.
3	16. 68.
4	13. 72.
5	11. 28.
10	4. 24.
15	1. 60.
20	0. 95.
25	0. 23.
30	0. 08.
40	0. 012.

Fonte: Halley (1687).

Hoje são conhecidas as discrepâncias nos valores encontrados por Halley, erros menores do que uma polegada de mercúrio (CREWE, 2003). Halley, ele próprio, discute possíveis imprecisões devidas não apenas à natureza das medições, mas a certas premissas ligeiras, como a de que a atmosfera tem temperatura constante.

O tema é um excelente convite à abordagem interdisciplinar. A partir do raciocínio de Halley, basta isolar a pressão x para chegar à equação conhecida como fórmula barométrica ou Lei de Halley: $P(z) = P_0 \cdot e^{-\lambda \cdot z}$, em que P é a pressão, z é a altitude e λ uma constante para a densidade do ar, a gravidade e a pressão atmosférica no nível do mar (NUSSENZVEIG, 2018).

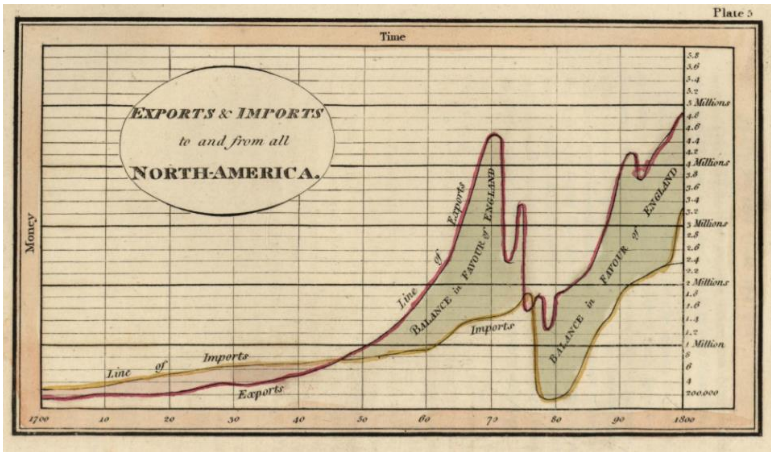
Observamos que os trabalhos de Huygens e Halley não trazem, explicitamente, as expressões algébricas que buscam representar, de modo que a discussão é quase toda retórica. Mas do ponto de vista do ensino, o que nos interessa aqui, para além das fórmulas, é constatar a importância do recurso gráfico para descrição e interpretação de fenômenos diversos.

Uma ideia "mais simples e permanente"

Apesar das iniciativas citadas, foi só no final do século XVIII que o tratamento gráfico de dados estatísticos se popularizou. Para Beniger e Robyn (1978), o predomínio das listas e tabelas, em detrimento dos gráficos, decorreu da grande influência exercida pelos cientistas sociais ligados à "aritmética política" inglesa e pelos *Statistiker* alemães. Mas no final dos anos 1700 e início dos 1800, novas ideias de representação visual levariam ao triunfo dos gráficos sobre as tabelas.

Entre os muitos nomes que desenvolveram estratégias de representação gráfica, o escocês William Playfair (1759-1823) tem sido considerado o mais influente e inovador. Gráficos de barras e do tipo pizza, por exemplo, são criações suas. Mais do que seus antecessores, Playfair tinha o propósito explícito de usar representações visuais como estratégia de ampla comunicação e convencimento, para além do circuito acadêmico. A preocupação estética é notável. Para Wainer (2017), ninguém antes dele construiu diagramas tão belos e ricos em informações. Para Lueder (1817), Playfair estava convencido de que "Estatística, como a Bíblia, é para todos".

Figura 7 - Balança comercial do Reino Unido com a América do Norte.



Fonte: Playfair (1801a).

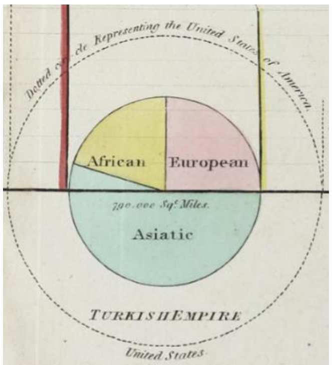
Tomemos um exemplo da terceira edição de "Commercial and Political Atlas" (Playfair, 1801a). Para comunicar os dados de exportações e importações, Playfair traça curvas contínuas, a partir de balanços anuais, usando cores distintas para as importações e exportações e colorindo também a área entre as curvas, conforme o saldo seja positivo ou negativo (Figura 7). Os diagramas têm título, moldura, gride, escalas e eixos bem definidos. O resultado é um panorama das transações econômicas de compreensão quase imediata, dispensando a leitura detalhada da numeralha que o embasou.

Na introdução da obra, Playfair (1801a) defende o método gráfico da seguinte maneira: "Conforme o conhecimento aumenta [...], é cada vez mais desejável *abreviar* e *facilitar* (grifos dele) os modos de transmitir informação de uma pessoa a outra e de um indivíduo a muitos". Segundo Playfair, não se trata de dar mais acurácia aos dados, mas de passar uma "ideia mais simples e permanente" por meio da apresentação de uma figura aos olhos, pois o "olho é o melhor juiz de proporções". Por meio dos gráficos, afirma ser possível reter em cinco minutos informações que, expressas em uma tabela, levariam dias inteiros de análise.

Praticamente todos os gráficos de "Commercial and Political Atlas" seguem o mesmo formato. A única exceção, que aparece apenas na primeira edição da obra, é o caso da Escócia, pois Playfair não tinha séries temporais completas para representar as transações ano a ano. Engenhosamente, apresentou o que hoje conhecemos como gráfico de barras, estratégia que permite a rápida comparação entre dados discretos.

O escocês deixou 177 gráficos ao longo de 36 anos (COSTIGAN-EAVES e MACDONALD-ROSS, 1990). Tinha consciência de que já então se vivia, na virada do século XIX, uma época em que se coletavam dados em abundância e que as pessoas precisavam de incentivos para absorvê-los (COSTIGAN-EAVES e MACDONALD-ROSS, 1990). Na introdução de "The Statistical Breviary", escreve: "[...] nenhum estudo é menos encantador e mais seco e tedioso que Estatística, a não ser que se ponham a mente e a imaginação para trabalhar" (PLAYFAIR, 1801b). Daí a importância de apelar "aos olhos" para transmitir noções de proporção e magnitude. É nessa obra que aparece o primeiro gráfico de setores ou pizza (Figura 8), em que as porções representam a área do Império Otomano nos continentes africano, asiático e europeu.

Figura 8 - A "pizza" de Playfair, em reedição de 1805.



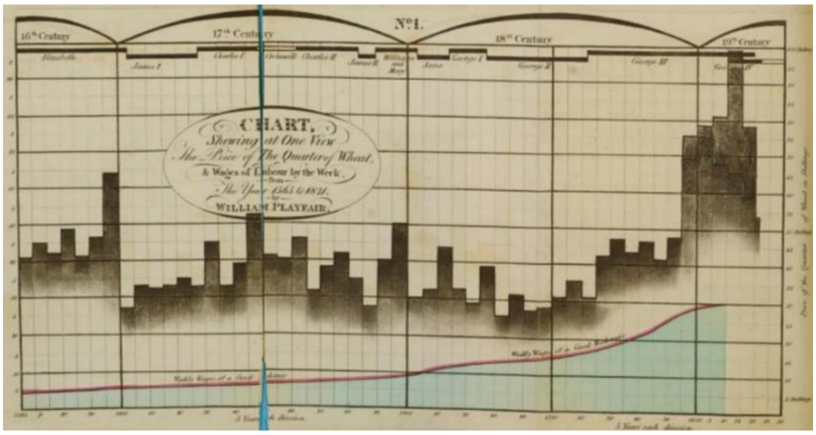
Fonte: Playfair (1805).

É curioso que, em meio a tantos avanços no campo científico, a relevância do método gráfico tenha sido intuída por um sujeito que não tinha ligação com o meio acadêmico. Playfair exerceu as mais variadas atividades – engenheiro, comerciante, contador, jornalista, inventor, ourives, entre outras – e atraiu para si uma péssima reputação. Entre muitos episódios cinzentos de sua vida, há um caso explícito de extorsão, acusação de roubo de patentes e condenações por difamação e crime financeiro (SPENCE e WAINER, 1997).

Embora tenha tido a obra reproduzida em outros países, não se pode dizer que Playfair tenha recebido o devido crédito em sua época. Para Funkhouser (1937), sua má fama pode ter recaído sobre o trabalho, daí o reconhecimento tardio: "ao condenar o homem, podem da mesma forma ter condenado sua obra". Já Spence e Wainer (1997) especulam que seu caráter tenha tido papel na inovação: o escocês teria a técnica, a ousadia e o desprezo por convenções necessários para produzir uma obra que desafiava o senso comum.

Um exemplo da ousadia de Playfair e de sua confiança no método gráfico é "A Letter on Our Agricultural Distresses, Their Causes and Remedies". Dirigindo-se aos parlamentares britânicos, ele propõe uma série de medidas para sanar certa crise agrícola a partir de "cálculos e argumentos baseados em FATOS (maiúsculas dele)" (PLAYFAIR, 1822). Nesta obra, o escocês refuta sugestão de regular os salários por meio do preço do trigo, que atribui ao célebre economista Adam Smith (1723-1790), "um escritor de grandes habilidades, mas nem sempre certo (e neste caso, certamente errado)".

Figura 9 - Salários e preços ao longo do tempo.



Fonte: Playfair (1822).

Para demonstrar seu ponto de vista, Playfair constrói um de seus gráficos mais famosos e mais bonitos. Trata-se de um engenhoso diagrama sobre a evolução ao longo de 250 anos dos preços do trigo e do salário de um "bom trabalhador" (Figura 9). Temos no eixo horizontal a passagem do tempo, e no vertical, os preços, em *shillings*. Os salários são representados por uma curva contínua, e o preço do trigo, no mesmo diagrama e na mesma escala, por meio de barras. No alto, veem-se ainda a identificação dos reinados e a passagem dos séculos.

O gráfico permite relacionar a escalada de preços e salários e ainda identificar o contexto político. Playfair conclui: “nunca o trigo esteve tão barato”. De fato, a série do trigo começa em 40 *shillings*, atinge um pico de 100 *shillings* (150% de aumento) e fecha o ciclo pouco abaixo de 55 *shillings* (37,5%); no mesmo período, os salários passam de 6 a 30 *shillings* (400% de aumento). Assim, o ajuste de salários à cotação do trigo não apenas esmagaria a renda do “bom trabalhador”, mas também introduziria abruptas oscilações.

O trabalho de Playfair é um exemplo do poder de síntese do método gráfico. Mas sua leitura exige atenção, e aqui podemos ver também como uma representação gráfica pode induzir a interpretações equivocadas. Isso porque, ao contrário do que Playfair pretende mostrar, a escolha de barras cheias para o preço do trigo e de uma linha para os salários, na mesma escala, provoca um efeito ilusório (COSTIGAN-EAVES e MACDONALD-ROSS, 1990): com picos no limite do diagrama, a montanha de barras parece soterrar a tímida curva dos salários, podendo passar a falsa impressão de que o preço do trigo estava de fato muito alto.

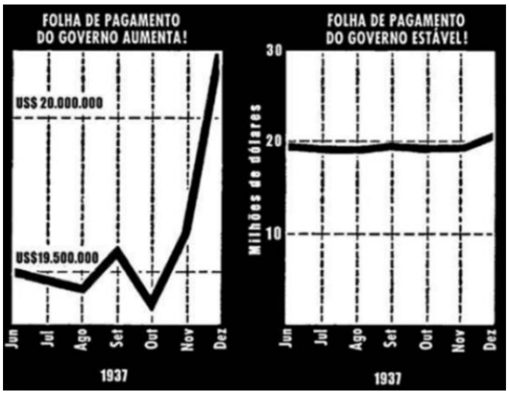
A ilusão da escala

Com a disseminação dos gráficos, tornou-se evidente o risco de interpretações equivocadas induzidas por métodos falhos – ou a pura má fé.

Distorções desse tipo são o alvo de um saboroso livro lançado em 1954, hoje um clássico sobre o assunto: “Como Mentir com Estatística” (HUFF, 2016). A obra começa com uma espirituosa citação de autoria incerta, frequentemente atribuída ao primeiro-ministro britânico Benjamin Disraeli (1804-1881): “Existem três tipos de mentiras: as mentiras, as mentiras deslavadas e as estatísticas”.

Huff passeia por diversos exemplos dos riscos na coleta e no tratamento de dados e dedica um capítulo inteiro ao chamado gráfico exagerado, resultado da manipulação da escala. O truque é didaticamente desmascarado em um artigo da revista Dun's Review, de 1938, em que o redator tratou de um diagrama originalmente construído para apoiar a tese de que “a folha de pagamento do governo aumenta”. Tratava-se de um gráfico de linha, tendo a passagem dos meses no eixo horizontal e o custo da folha na vertical. Contudo, a escala vertical foi restrita a um pequeno intervalo superior, fazendo um “aumento de 4% parecer superior a 400%” (HUFF, 2016). Ao tomar a gradação desde 0, a ilusão se desfaz, conforme a Figura 10.

Figura 10 - Efeitos da distorção da escala vertical.



Fonte: Huff (2016), reproduzido com permissão da editora Intrínseca.

3.1.3 Tarefas

1 (Investigação). Colha estimativas para a distância entre duas cidades quaisquer.

a) represente o resultado à maneira do cartógrafo Michael Florent van Langren (Figura 2), ou seja: marque sobre uma linha graduada as diversas estimativas;
b) determine a média, a moda e a mediana dos valores;
c) considere a conveniência de agrupar os valores em classes de intervalos;
d) consulte o valor correto e compare com os dados obtidos.

2 (Exercício). No gráfico da Figura 4, feito pelo astrônomo e matemático Christiaan Huygens, a curva representa o total de sobreviventes de certa idade, de um total de 100 nascidos. Por exemplo, o ponto C da figura indica que apenas 16 de 100 pessoas nascidas chegavam aos 36 anos. Analisando o gráfico, responda:

a) de cada 100 nascidos, quantas pessoas chegavam a completar 50 anos?
b) de cada 100 nascidos, a metade estaria morta até que idade?

3 (Problema). Considere a função de variável real $f(x) = 27\,000 \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right)$, $x \neq 0$, adaptada de artigo de Edmond Halley, tal que $f(x)$ é altitude de uma cidade, em pés, sob pressão atmosférica x, em polegadas de mercúrio.

a) suponha uma cidade de altitude y_1 onde a pressão medida no barômetro é x_1. Qual a altitude y_2 de outra cidade onde a medida do barômetro é o dobro de x_1?
b) suponha uma cidade de altitude y_1 onde a pressão medida no barômetro é x_1. Qual a pressão x_2 de outra cidade cuja altitude y_2 é a metade de y_1?

4 (Exploração). Tome os dados da tabela produzida por Halley (Figura 6).

a) considere uma escala apropriada e esboce um gráfico de altitude, em pés, por pressão, em polegadas de mercúrio;
b) escolha cinco cidades, pesquise suas altitudes e converta os valores para pés, usando a seguinte aproximação 1 pé = 0,3 metro;
c) usando o gráfico do item (a), encontre a pressão atmosférica das cinco cidades em polegadas de mercúrio. Converta para centímetros, com 1 polegada = 2,54 cm.

5 (Exploração). O gráfico da Figura 7, de William Playfair, resume as transações comerciais entre a Inglaterra e a América do Norte ao longo do século XVIII. A linha vermelha representa as exportações, e a amarela, as importações. A área entre as linhas representa o balanço, positivo ou negativo. Discuta as principais tendências, com atenção à queda abrupta nos anos 1770.

3.2 TRIUNFO CIVILIZATÓRIO

3.2.1 Habilidade

> (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos (BRASIL, 2018b).

Revisitamos aqui os esforços para a padronização de unidades de medida no Brasil e no mundo, em particular o emprego do quilo e do metro. Tratamos também da conveniência, no campo da Astronomia, de unidades alternativas.

3.2.2 Relato

Uma notória confusão

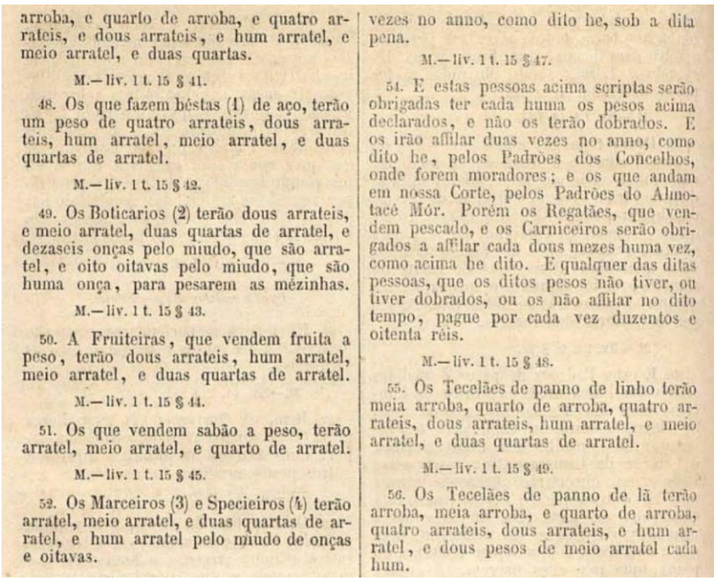
Celebra-se em 20 de maio o Dia Mundial da Metrologia. Nesta data, em 1875, dezessete países – entre eles o Brasil – assinaram em Paris a Convenção do Metro, que criou uma organização internacional permanente, o Bureau International des Poids et Mesures, incumbido de zelar pela padronização de pesos e medidas. Concretizava-se assim o que a revista inglesa Nature antevira, dois anos antes, como "um dos maiores triunfos da civilização moderna": a criação de uma "linguagem universal" necessária para expressar quantidades de modo "inteligível a todos" e fomentar o intercâmbio de conhecimento (C., 1873). Para Crease (2013), tratou-se mesmo de um marco não apenas da ciência, mas da cooperação internacional e da globalização.

A base do tratado de 1875 era o chamado sistema francês: o quilograma e o metro. Ao final do ano, o acordo foi ratificado. Neste momento, contudo, a monarquia brasileira recuou e decidiu não se associar ao Bureau. De qualquer modo, o sistema francês já vigorava no país, por força de

Lei Imperial de 1862, que determinou sua adoção “na parte concernente às medidas lineares, de superfície, capacidade e peso” (BRASIL, 1862). “Não deixa de haver certa ironia na decisão do Imperador (d. Pedro II)”, avalia Dias (1998). “Tendo engajado o país no movimento para adoção do sistema métrico [...], recusou-se a nele permanecer no momento de seu real triunfo.”

O metro e o quilo deveriam pôr fim à barafunda de unidades em vigor. No Brasil Imperial, por força das Ordenações Filipinas (Figura 11), convivia-se com diversas delas para a mesma grandeza: vara, côvado, dedo (comprimentos); arroba, arrátel, onça (massa); almude, canada, quartilho (capacidade), entre outras (PORTUGAL, 1870), todas sujeitas a variações regionais.

Figura 11 - Trecho das Ordenações Filipinas, discriminando padrões de pesagem conforme a atividade econômica.



arroba, e quarto de arroba, e quatro arrateis, e dous arrateis, e hum arratel, e meio arratel, e duas quartas.

M.—liv. 1 t. 15 § 41.

48. Os que fazem béstas (1) de aço, terão um peso de quatro arrateis, dous arrateis, hum arratel, meio arratel, e duas quartas de arratel.

M.—liv. 1 t. 15 § 42.

49. Os Boticarios (2) terão dous arrateis, e meio arratel, duas quartas de arratel, e dezaseis onças pelo miudo, que são arratel, e oito oitavas pelo miudo, que são huma onça, para pesarem as mézinhas.

M.—liv. 1 t. 15 § 43.

50. A Fruiteiras, que vendem fruita a peso, terão dous arrateis, hum arratel, meio arratel, e duas quartas de arratel.

M.—liv. 1 t. 15 § 44.

51. Os que vendem sabão a peso, terão arratel, meio arratel, e quarto de arratel.

M.—liv. 1 t. 15 § 45.

52. Os Marceiros (3) e Specieiros (4) terão arratel, meio arratel, e duas quartas de arratel, e hum arratel pelo miudo de onças e oitavas.

vezes no anno, como dito he, sob a dita pena.

M.—liv. 1 t. 15 § 47.

54. E estas pessoas acima scriptas serão obrigadas ter cada huma os pesos acima declarados, e não os terão dobrados. E os irão affilar duas vezes no anno, como dito he, pelos Padrões dos Concelhos, onde forem moradores; e os que andam em nossa Corte, pelos Padrões do Almotacé Mór. Porém os Regatães, que vendem pescado, e os Carniceiros serão obrigados a affilar cada dous mezes huma vez, como acima he dito. E qualquer das ditas pessoas, que os ditos pesos não tiver, ou tiver dobrados, ou os não affilar no dito tempo, pague por cada vez duzentos e oitenta réis.

M.—liv. 1 t. 15 § 48.

55. Os Tecelães de panno de linho terão meia arroba, quarto de arroba, quatro arrateis, dous arrateis, hum arratel, e meio arratel, e duas quartas de arratel.

M.—liv. 1 t. 15 § 49.

56. Os Tecelães de panno de lã terão arroba, meia arroba, e quarto de arroba, quatro arrateis, dous arrateis, e hum arratel, e dous pesos de meio arratel cada hum.

Fonte: Portugal (1870), Senado Federal, Biblioteca Digital.

Dado o profundo impacto sobre os costumes, a substituição de unidades de medida exigiria mais que tratados e decretos. A Lei de 1862 estabelecia um prazo de dez anos para a adoção gradual do sistema francês. Encerrado o período de transição, infratores estariam sujeitos a penas de prisão e multa. As escolas foram encarregadas de ensinar os novos padrões, e ao governo caberia organizar “tabelas comparativas que facilitem a conversão das medidas, devendo as repartições públicas servir-se delas”, segundo o marco legal (BRASIL, 1862).

Tais medidas não bastaram para levar a novidade à maioria da população brasileira, de hábito rural e baixa escolaridade. E quando o governo decidiu apertar a fiscalização, “não é de se surpreender que [...] reações espoucassem por todo o país, escoradas na falta de informações e na resistência a uma imposição abrupta e violenta” (MOREIRA e MASSARINI, 1997). A reação mais conhecida foi a Revolta do Quebra-Quilos, que eclodiu em 1874 no interior da Paraíba e se alastrou por outras regiões do país, em particular do Nordeste.

É claro que não se deve resumir as turbulências dos últimos anos do Império a uma disputa entre quilos e onças. Mas a imposição dos novos marcos pode ser tomada como fator desencadeante de conflitos (JOFFILY, 1976), um símbolo de um regime que só se fazia perceber por meio de atos de força, da cobrança de taxas e do recrutamento militar: "Os novos pesos, para esse povo, simbolizavam o aumento dos impostos, a tirania do governo, e por isto fez convergir para eles o seu ódio" (JOFFILY, 1892). Centenas foram presos e submetidos a tortura conhecida como colete de couro.

O sistema francês prevaleceu, mas não chegou a varrer as demais unidades que deveria substituir, especialmente no campo. Oito décadas depois, relatório do Serviço de Estatística da Produção apontava que ainda era "notória a confusão reinante em todo o país" (BRASIL, 1948). Ao investigar as unidades agrárias em uso, os pesquisadores constaram "quase nenhuma alteração [...] nos antigos hábitos [...], notadamente nos meios rurais, por falta de propaganda adequada e instrução conveniente". Foram então identificadas 143 unidades alheias ao sistema métrico: alqueires (Figura 12), celamins, geiras, lotes, terças, quartas, quarteirões, sesmarias e tarefas. Muitas variavam de região para região, como o alqueire (16 tipos) e a tarefa (13 tipos). Quase todas derivavam da antiga braça e várias nunca caíram em desuso.

Figura 12 - Variações regionais do alqueire, em relatório dos anos 1940.

NOME	DIMENSÕES (Braças ou metros)	Equivalências em hectares	Estados em que é feita a utilização (Abreviaturas)	TABELAS DE CONVERSÃO (N.º da tabela)
A				
Alqueire	50 × 50 br	1,2100	SP, MG	20
Alqueire	50 × 75 br	1,8150	Mt, MG	23
Alqueire (paulista)	50 × 100 br	2,4200	Ma, ES, RJ, SP, Pn SC, RS, Mt, Go, MG	24
Alqueire	...	2,6620	MG	25
Alqueire	75 × 75 br	2,7225	Am, Pa, Ma, Ce, Pe, Al, Ba, ES, RJ, SP, Pn, SC, RS, Mt, Go, MG	26
Alqueire	75 × 80 br	2,9040	MG	27
Alqueire	79 × 79 br	3,0206	MG	28
Alqueire	80 × 80 br	3,0976	ES, SP, MG.	29
Alqueire	...	3,3880	MG	30
Alqueire	75 × 100 br	3,6300	RJ, MG	31
Alqueire (mineiro)	100 × 100 br	4,8400	Ac, RN, Ba, ES, RJ, SP, SC, RS, Mt, Go, MG	32
Alqueire	...	6,0500	MG	33
Alqueire	100 × 150 br	7,2600	MG	34
Alqueire	...	8,7725	MG	35
Alqueire	100 × 200 br	9,6800	Mt, MG	36
Alqueire	200 × 200 br	19,3600	Ba, Go, MG.	37

Fonte: Brasil (1948).

Um peso, uma medida

O metro e o quilo saíram ambos da Revolução Francesa, amarrados a parâmetros naturais. O metro equivalia a 1/10.000.000 da distância do Polo Norte ao Equador, passando por Paris

(BORDA *et al.*, 1791). O grama vinha amarrado ao sistema métrico: a massa de 1 cm^3 de água no ponto de congelamento (JAUBERT, 1795). Em tese, são definições exatas. Na prática, estão sujeitas às imprecisões intrínsecas a qualquer medição, em particular do acidentado meridiano que passa por Paris. Não surpreende que as unidades tenham sido logo redefinidas com base em protótipos: uma barra e uma peça de metal, que podiam ser replicadas e expostas à população.

A padronização atendia ao desejo expressamente manifestado pelos franceses nos célebres Cahiers de Doléances, espécie de consulta aos súditos ordenada em janeiro de 1789 pelo rei Luís XVI, meses antes da Queda da Bastilha, marco inaugural da revolução. Nestes "cadernos de queixas", franceses de todas as partes puderam registrar suas reclamações, sugestões e pedidos sobre os mais variados assuntos, o que Alexis de Tocqueville (1835–1859) chamou de testamento da velha sociedade francesa. Mais de 700 reclamações versavam sobre o caos de pesos e medidas em vigor (KULA e SZRETER, 1986). Uma delas passou à história por seu poder de síntese: "um rei, uma lei, um peso e uma medida".

A história do metro e do quilo é bastante tumultuada, à maneira da própria Revolução Francesa. Para além da praticidade, a definição de novas unidades ganhara contorno político: livrar-se do entulho do velho regime. Em meio à radicalização, alguns cientistas envolvidos na busca por "um peso, uma medida" chegaram a ser presos e pelo menos um deles, Antoine Lavoisier, foi guilhotinado. Mas entre avanços e recuos, as novas unidades se estabeleceram, e não apenas na França. Ao longo do século XIX, réplicas dos protótipos levaram o sistema francês a outros países. D. Pedro II encomendou uma delas para o Brasil no início de 1873 (PETITJEAN, 1996). A peça foi entregue no início dos 1880, remetido ao Arquivo Público Imperial e de lá transferido, pouco antes da proclamação da República, à Casa da Moeda. Em 1907, comunicou-se o roubo do metro padrão brasileiro, sem que haja registro de iniciativas para recuperá-lo (DIAS, 1998).

Definições à prova de cataclisma

Por mais cuidadosamente que sejam armazenados, os padrões de metro e quilo se sujeitam a variações. Uma verificação feita entre 1988 e 1992 mostrou diferenças de dezenas de microgramas entre o protótipo do quilo e suas seis cópias oficiais. Na comparação com as réplicas espalhadas pelo mundo, a diferença era ainda maior. O padrão brasileiro do quilo, entregue ao país em 1983, tinha 135 microgramas a mais (GIRARD, 1994).

A necessidade de calibração periódica seria contornada com a redefinição das unidades a partir de constantes naturais, uma antiga ambição de cientistas. Como expressou o físico e político francês François Arago (1786-1853), era preciso dar ao mundo um padrão universal, invariável, capaz de ser reproduzido "mesmo que terremotos e cataclismas virassem nosso planeta e destruíssem os protótipos" (ARAGO, 1865). Em artigo não assinado, a revista Nature (1883) colocou a questão da seguinte maneira: a ciência deixará de se contentar com aproximações, exigindo exatidão em todos os campos, e para tanto o Bureau International des Poids et Mesures deve fornecer não apenas padrões de medida, mas um grande número de constantes físicas determinadas com o "maior cuidado".

E assim se fez. Conforme o consenso da 14ª Conferência Geral Sobre Pesos e Medidas, de 1971, são sete as grandezas fundamentais: tempo (segundo), comprimento (metro), massa (quilograma), corrente elétrica (Ampere), temperatura termodinâmica (Kelvin), quantidade de substância (mol) e intensidade luminosa (candela) (HALLIDAY *et al.* 2013). Elas compõem o Sistema Internacional de Unidades (SI). Todas foram definidas ou redefinidas com base em constantes naturais, fixadas com exatidão, um processo que só se completou em 2019. A literatura sobre cada uma delas é vastíssima. Limitamo-nos aqui a comparar as definições históricas de segundo, metro e quilo às que hoje vigoram, segundo as balizas do Bureau (BIPM, 2019).

a) Tempo (segundo)

Idade Média: $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{86\,400}$ parte de um dia (THORNDIKE, 1929).

1956: $\frac{1}{31\,556\,925{,}9747}$ parte do ano tropical (o intervalo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo equinócio de primavera) de 1900.

1967: para a nova definição do segundo, toma-se a frequência da transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133 não perturbado, fixada em $9\,192\,631\,770\ \mathrm{s}^{-1}$. Assim, um segundo é a duração de $9\,192\,631\,770$ períodos da radiação correspondente à transição do elemento em tais condições (PIRES, 2019).

b) Comprimento (metro)

1791: $\frac{1}{10\,000\,000}$ parte da distância do Polo Norte ao Equador (Figura 13), passando por Paris (BORDA *et al.*, 1791).

1799: o comprimento de uma certa barra de metal depositada na França.

1927: a distância entre duas linhas marcadas na barra de platina-irídio declarada como protótipo do metro sob as seguintes condições: temperatura de 0 Cº, pressão atmosférica padrão e suportada por dois cilindros de pelo menos um centímetro de diâmetro, simetricamente dispostos no mesmo plano horizontal, separados por uma distância de 571mm (DIAS, 1998).

1983: a definição do metro passa a ter por base a velocidade da luz no vácuo c, fixada em 299 792 458 m/s, e a definição já dada de segundo. Assim, o metro vale pela distância percorrida pela luz durante um intervalo de 1/299 792 458 segundo (PRICE, 1986).

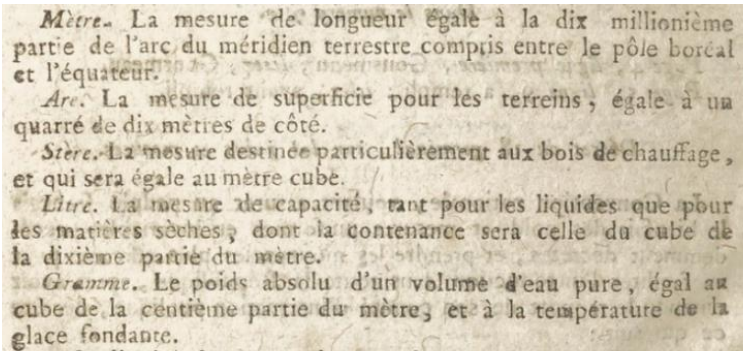
c) Massa (quilograma)

1795: a massa de 1000 cm³ de água no ponto de congelamento.

1889: a massa de uma certa peça de platina e irídio depositada na França.

2019: a nova definição de quilograma se baseia na constante de Planck, fixada em $\mathrm{h} = 6{,}62607015 \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$, e nas definições já dadas de metro e segundo (WOOD e BETTIN 2019).

Figura 13 - Definições de metro, are (100 m²), stere (1 m³), litro (1 dm³) e grama, em decreto de 1795.



Mètre. La mesure de longueur égale à la dix millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle boréal et l'équateur.

Are. La mesure de superficie pour les terreins, égale à un quarré de dix mètres de côté.

Stère. La mesure destinée particulièrement aux bois de chauffage, et qui sera égale au mètre cube.

Litre. La mesure de capacité, tant pour les liquides que pour les matières sèches, dont la contenance sera celle du cube de la dixième partie du mètre.

Gramme. Le poids absolu d'un volume d'eau pure, égal au cube de la centième partie du mètre, et à la température de la glace fondante.

Fonte: Convention nationale, Bibliothèque nationale de France (BnF), F-32559, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9677493d/f2.

Universo alternativo

Uma importante vantagem do sistema introduzido pelos franceses é a previsão de múltiplos e submúltiplos de cada unidade. A mera justaposição de prefixos (deca/deci, hecto/centi, quilo/mili, entre outros) basta para adequar a unidade à escala apropriada. Nos demais sistemas, empregam-se termos distintos para a mesma grandeza. Por exemplo, segundo as Ordenações Filipinas, em vigor no Brasil até o século XIX, massa podia ser medida em: quintal, arroba (1/4 do quintal), arrátel (1/32 da arroba), marco (1/2 arrátel), onça (1/8 do marco) e grão (1/576 da onça).

Há, contudo, situações em que o sistema métrico é preterido em favor de unidades que guardam um significado mais próximo do objeto medido ou do processo de medição. É o caso do eletronvolt, que equivale à energia ganha por um elétron acelerado por uma diferença de potencial elétrico de um volt, no vácuo. É, especialmente, o caso das medições astronômicas.

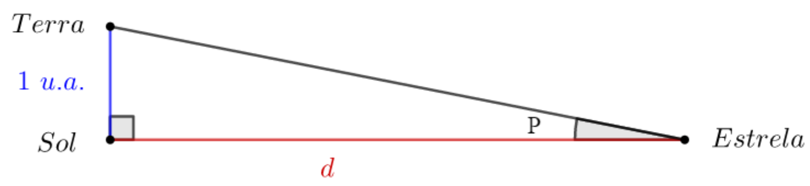
No SI, a distância aproximada da Terra ao Sol é de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Na tradição da Astronomia, contudo, toma-se essa distância como uma unidade – a chamada unidade astronômica (u.a.). Convenção de 2003 estabelece que seu valor seja 149 597 870 691 metros, com 6 metros de incerteza (PETIT e MCCARTHY, 2004). Mais recentemente, a International Astronomical Union recomendou que se tome o valor exato de 149 597 870 700 metros (2012).

Por meio dessa unidade, certas medidas literalmente astronômicas podem ser mais facilmente concebidas. No sistema métrico, a distância de Júpiter ao Sol é de cerca de 778 milhões de quilômetros. Em unidades astronômicas, são 5,2, ou seja, 5,2 vezes a distância da Terra ao Sol.

Para corpos além do Sistema Solar, os astrônomos têm à mão uma unidade ainda mais conveniente, o parsec. Trata-se da medida do cateto adjacente a um ângulo de um segundo $\left(\frac{\pi}{180 \cdot 3600}\ \text{rad}\right)$ de um triângulo retângulo cujo cateto oposto mede 1 unidade astronômica, o que resulta em cerca de $3{,}1 \cdot 10^{16}$ m. A descrição parece obtusa, mas na verdade se ajusta bem ao conhecido método de aferição de distâncias por meio da paralaxe – daí a expressão parsec, amálgama dos termos paralaxe e segundo.

Paralaxe designa o aparente deslocamento de um objeto quando se muda o ponto de observação. Dada uma estrela qualquer, pode-se imaginar um certo triângulo retângulo cujos vértices sejam o Sol, a Terra e a própria estrela, tendo por catetos os lados Terra-Sol e Sol-estrela, conforme a Figura 14 (fora de escala):

Figura 14 - O triângulo Sol-Terra-estrela.



Fonte: do autor.

Observações feitas em diferentes momentos do ano permitem deduzir o ângulo de paralaxe P, oposto ao cateto Terra-Sol. Assumindo que a distância da Terra ao Sol seja de 1 unidade astronômica, temos que a distância d da estrela ao Sol é deduzida a partir da noção de tangente:

$$\tan P = \frac{1\ u.a.}{d} \Rightarrow d = \frac{1\ u.a.}{\tan P}\ .$$

Mas P é um ângulo muito pequeno: nenhuma estrela tem paralaxe maior que 0,7723 (BEECH, 2008). Assim, pode-se tomar a aproximação $\tan P \cong P$, e a distância buscada é simplesmente o inverso do ângulo de paralaxe:

$$d = \frac{1\ u.a.}{P}\ .$$

O parsec tem a mesma ordem de grandeza de uma unidade mais antiga e muito mais famosa: o ano-luz, a distância que a luz percorre no vácuo em um ano juliano (365,25 dias). O uso da velocidade da luz como baliza aparece na literatura em 1838 no cálculo da distância da estrela 61 Cygni, estimada em 657 700 unidades astronômicas, o que equivale à distância que "a luz leva 10,3 anos para percorrer" (BESSEL, 1838).

Em seu manual de estilo, a International Astronomical Union reconhece o metro, o parsec e a unidade astronômica como unidades de medida, mas não o ano-luz (cerca de 3,3 parsecs). A entidade relega o ano-luz à divulgação científica ("exposições populares de astronomia") ou à mera indicação de distâncias (WILKINS, 1988).

3.2.3 Tarefas

1 (Exploração). As Ordenações Filipinas, antigo marco legal português, podem ser acessadas em <https://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/242733>, em edição de 1870. Consulte o Título XVIII do Primeiro Livro, que trata dos pesos e medidas que vigoraram tanto em Portugal como no Brasil. Utilize uma planilha para relacionar os diferentes padrões de pesos e medidas impostos às diversas profissões e pesquise meios de convertê-los para o sistema métrico. Discuta vantagens e desvantagens dos diferentes sistemas de unidades.

2 (Exercício). Engenheiro, político e diplomata, Cândido Batista de Oliveira (1801-1865) foi o primeiro entusiasta do sistema métrico no Brasil. Em seu "Compendio de arithmetica" (1832), dedicou um apêndice à metrologia e aproveitou para divulgar o chamado sistema francês, baseado no quilo e no metro, destacando sua "perfeição sobre todos os sistemas conhecidos" (Figura 15).

Figura 15 - Definições do "sistema francês" no Brasil Imperial.

			Unidades Fundamentaes.			
Multiplos.	Myria	10.000	de comprimento	de superficie	de capacidade	de peso
	Kilo	1.000				
	Heto	100				
	Deca	10				
	[1]		METRO.	ARO.	LITRO.	GRAMMO.
Submultiplos.	Deci.	0,1	Unidade elementar — decima millionessima parte do comprimento do quarto de circumferencia do meridiano terrestre.	O quadrado formado sobre dez metros.	O cubo da decima parte do metro.	A millessima parte do pezo da agua destilada, contida no litro na temperatura de +4 graos centigrados.
	Centi.	0,01				
	Milli.	0,001				

Fonte: Oliveira (1832), Biblioteca Brasiliana Guita e José Mindlin, PRCEU/USP.

a) dada a definição de "aro" (are) e do múltiplo "heto" (hecta), calcule quantos metros quadrados tem um hectare;
b) dada a definição de metro, calcule o raio e a circunferência da Terra.

3 (Problema). Ao usar a velocidade da luz como parâmetro para distâncias, o astrônomo alemão Friedrich Bessel calculou que a luz levaria 10,3 anos para percorrer 657 700 unidades astronômicas (u.a.), a distância da estrela 61 Cygni.

a) converta a distância em metros e expresse a medida em notação científica, com duas casas decimais. Considere 1 u.a. o equivalente a 149 597 870 700 metros;
b) calcule a velocidade da luz em metros por segundo. Considere 1 ano equivalente a 365,25 dias. Compare o resultado com o valor da velocidade da luz fixado em 1983: 299 792 458 m/s.

4 (Investigação). Ainda hoje convivemos com unidades de medida alheias ao Sistema Universal. Um exemplo cotidiano é a unidade de pressão libra-força por polegada quadrada, que se usa na calibragem de pneus.

a) sabendo que 1 libra-força (lbf) vale 4,448 N (Newton) e uma polegada (pol) é o mesmo que 2,54 cm, converta 30 lbf/pol² para a unidade de pressão Pa (Pascal), em que 1 Pa = 1 N/m²;
b) discuta as implicações de uma eventual substituição do sistema lbn/pol² por Pa.

3.3 OBRA FIRME, ÚTIL E BELA

3.3.1 Habilidade

> (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa (BRASIL, 2018b).

Abordamos aqui o mais antigo manual de construção de que se tem registro, os "Dez Livros de Arquitetura", de Vitrúvio (c. 85-20 a.C.), com especial atenção às aplicações matemáticas, às ilustrações da obra e às menções a Platão (428-348 a.C.) e Pitágoras (c. 580-500 a.C.).

3.3.2 Relato

Simetria e proporção

De toda a Antiguidade, um único tratado sobre construção e arquitetura sobreviveu à passagem dos séculos (CUOMO, 2016). São os "Dez Livros de Arquitetura" do engenheiro militar Marcos Vitrúvio Polião (c. 85-20 a.C.), escrito em latim.

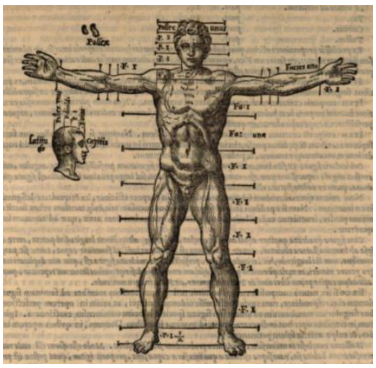
A obra cobre diversos aspectos da construção de uma cidade e suas edificações, como a escolha do terreno e seus limites murados; as habitações e os prédios públicos; templos, teatros, banhos e prisão; questões de defesa e saneamento; técnicas, instrumentos e materiais de construção e decoração (VITRUVIUS, 1914).

Vitrúvio advoga no início do primeiro livro que o arquiteto deve ter ampla formação, de modo a conhecer Geometria, Aritmética, História, Filosofia, Música, Medicina e Astronomia, entre outras disciplinas. E assim o tratado aborda elementos de todos estes campos do conhecimento.

Construções devem ser a um só tempo firmes, úteis e belas, defende o engenheiro. Para que sejam belas, em particular, deve-se observar o princípio da simetria, no seguinte sentido: “um acordo uniforme entre os membros de uma mesma obra, e uma correspondência de cada uma delas em separado à obra inteira”, segundo tradução para o português de Stumpp (2013). E a simetria, explica Vitrúvio, deriva da proporção, neste sentido: “A proporção consiste em tomar um módulo fixo, em cada caso, tanto para as partes do edifício como para o todo”. Ou seja, trata-se de guardar a comensurabilidade dos elementos da obra, segundo um padrão razoável de medida.

Ao esmiuçar o princípio da simetria, Vitrúvio faz uma famosa comparação entre uma obra arquitetônica e o corpo humano, cujas partes, acredita, também estão em perfeito “acordo” entre si e com o todo: do queixo ao topo da testa, a medida deve ser 1/10 da altura; do queixo às narinas, 1/3 da face; o pé é 1/6 da altura; o antebraço, 1/4; etc. A passagem inspiraria o renascentista Leonardo da Vinci (1452-1519) na criação do célebre “O Homem Vitruviano”.

Figura 16 - Ilustração das proporções do corpo humano dos “Dez Livros de Arquitetura”.



Fonte: Barbaro (1567), HathiTrust Digital Library.

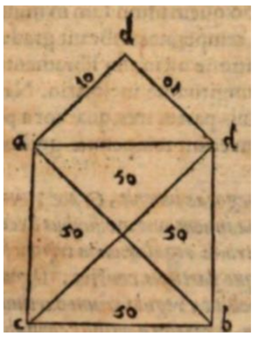
Frutos para todas as nações

Os “Dez Livros de Arquitetura” não podem ser lidos como um tratado de Matemática, claro. Mas são muitas as passagens que tocam procedimentos e conceitos matemáticos. Logo no início, por exemplo, Vitrúvio faz recomendações para, com régua e compasso, determinar a orientação das ruas da cidade de modo a não fazê-las coincidir com a direção dos ventos que a tradição clássica associa aos pontos cardeais e colaterais. O engenheiro achava "ventos frios desagradáveis, ventos quentes enervantes, ventos úmidos insalubres" (VITRUVIUS, 1914).

Vitrúvio achou por bem ilustrar esta passagem sobre ventos e ruas. É curioso que das poucas dez imagens da obra original, todas desaparecidas (MILLETTE, 1999), duas tenham sido dedicadas a esse assunto aparentemente menor. E quase nenhuma ilustrava as detalhadas descrições de elementos arquitetônicos. Mas em 1511 os "Dez Livros de Arquitetura" ganhariam uma nova edição com nada menos que 136 ilustrações, que fez da obra de Vitrúvio uma das mais influentes do século XVI (ROWLAND, 2011). Embora não tenham sido planejadas por Vitrúvio, as novas figuras, muitas em perspectiva, ajudam bastante na compreensão dos "Dez Livros". Essa edição está disponível on-line, mas não conseguimos nos certificar do direito de reprodução de suas imagens. Fiamo-nos aqui nas ilustrações de uma versão lançada pouco depois (BARBARO, 1567), de domínio público, comentada pelo arquiteto Daniele Barbaro (1514-1570), cujas ilustrações têm a reputação de serem ainda mais precisas (Figuras 16, 17 e 19).

Das poucas ilustrações previstas originalmente por Vitrúvio, algumas tratavam de propriedades geométricas, em passagens elogiosas aos gregos Platão (428-348 a.C.) e Pitágoras (c. 580-500 a.C.). Vitrúvio estranhava que o prestígio de atletas na Antiga Grécia superasse o de pensadores cujas contribuições servem a "todas as nações". "O que significa para a humanidade que Mílon de Crotona e outros fossem invencíveis? Nada [...]", argumenta. "Mas as doutrinas de Pitágoras, Demócrito, Platão e Aristóteles e outros eruditos [...] rendem frutos não apenas para seus conterrâneos, mas para todas as nações" (VITRUVIUS, 1914).

Figura 17 - A duplicação do quadrado.



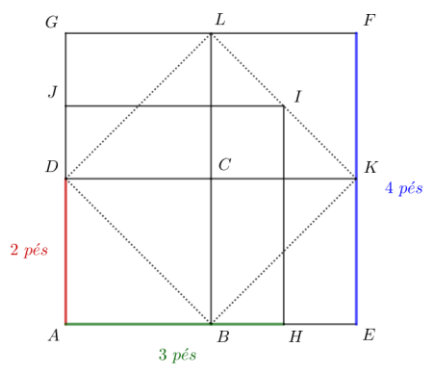
Fonte: Barbaro (1567), HathiTrust Digital Library.

O primeiro desses frutos Vitrúvio atribui a Platão: a duplicação do quadrado (Figura 17). O engenheiro toma por exemplo uma região de 10 por 10 pés e afirma não ser possível calcular "por meio da aritmética" o lado de um quadrado cuja área seja o dobro. Sua demonstração se limita a apontar que o quadrado de 14 é 196, aquém de 200; e o de 15 é 225, além de 200. Mas é possível, observa, tomar a diagonal (ad na Figura 17) como lado do quadrado cuja área é exatamente 200.

Vitrúvio não se demora nesta passagem, mas vale a pena fazê-lo. A duplicação do quadrado é tratada por Platão em um de seus mais interessantes "Diálogos", "Mênon". Nele, Sócrates e o amigo Mênon discorrem sobre a natureza da virtude. "É coisa que se ensina?", pergunta Mênon, no início da conversa (PLATÃO, 2001, com tradução para o português de Maura Iglésias). Sócrates vai tentar demonstrar que o aprendizado não se dá por "transmissão", mas por "rememoração". Para tanto, pede a Mênon que chame um de seus escravos, a quem fará uma série de perguntas, até que este "rememore" o conhecimento que já carregava em sua "alma".

O filósofo primeiro deixa o menino pensar que um quadrado de lado duas vezes maior que outro quadrado terá uma superfície duas vezes maior, o que obviamente é falso. Sócrates então rabisca na areia quatro quadrados ($ABCD, BEKC, CKFL$ e $DCLG$ na Figura 18), cada um de lado igual a 2 pés (e área igual a 4 pés quadrados), compondo um grande quadrado de lado igual a 4 pés (e área de 16 pés quadrados), e o escravo então reconhece o erro: o quadrado de lado 4 pés comporta a superfície de quatro quadrados de lados iguais a 2 pés: "Por Zeus!". O filósofo generaliza: "Logo, menino, a partir da linha que é o dobro não se forma uma superfície que é o dobro, mas sim que é o quádruplo". Simbolicamente: se $A = l^2$ é a área de um quadrado de lado l, então a área de um quadrado de lado $2l$ será $(2l)^2 = 4l^2 = 4A$.

Figura 18 - A duplicação do quadrado.



Fonte: do autor, baseado em Platão (2001).

Mas falta achar a área que seja o dobro do quadrado cujo lado mede 2 pés. O escravo logo entende que o lado do quadrado buscado será maior que 2 pés e menor que 4 pés. Agarrado a noção grega de que número (*arithmós*) é apenas o que hoje chamamos número natural, o menino supõe que o lado buscado meça 3 pés. Instigado pelo filósofo, o menino percebe o erro: fossem 3 pés, a área seria o quadrado de 3, portanto 9, que é mais que o dobro de 4 ($AHIJ$ na Figura 18). Sócrates leva então o escravo a identificar na linha "que os sofistas chamam de diagonal" o lado de um quadrado de área igual a 8 ($BKLD$, na figura). Geometricamente, é claro para o garoto que este novo quadrado, feito de quatro metades de quadrados de área igual a 4 (os triângulos $BCD, BCK,$

KCL e LCD), tem de fato área igual a 8. Porém, a construção engenhosamente dribla a questão de definir, afinal, quando mede a diagonal, que toca um ponto sensível da matemática grega, a dos números incomensuráveis – ou seja, os irracionais.

Roque (2012) toma esta passagem da obra de Platão para "enfatizar que uma das consequências mais importantes da descoberta dos incomensuráveis é a separação do universo das grandezas do universo dos números", diz. "Se não sabemos calcular, resta-nos mostrar."

Para o estudante do Ensino Médio, a duplicação do quadrado não deve oferecer maiores dificuldades – tanto para "calcular" como para "mostrar". Seja $A = l^2$ a área de um quadrado de lado l, então $\sqrt{A} = l$. O dobro de sua área é $2A$, e seu lado deve ser $\sqrt{2A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{A} = \sqrt{2} \cdot l$. Seja agora d a diagonal do quadrado original. Temos pelo Teorema de Pitágoras que $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$, portanto $d = \sqrt{2} \cdot l$, que é justamente o lado do quadrado duplicado.

O teorema e a ilusão

Depois de Platão, é a vez de Vitrúvio lembrar Pitágoras. É um registro importante, um dos mais antigos a atribuir ao sábio de Samos o famoso teorema que acabamos de usar (HAHN, 2017; ZHMUD, 1989), segundo o qual o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo equivale à soma dos quadrados dos demais lados.

Muito já se escreveu sobre Pitágoras e, de certo modo, pouco se sabe. Que existiu, fez fama e deixou discípulos, pode-se aceitar, posto que são muitas as referências a ele em seu tempo e logo após, nas obras de Heródoto e Heráclito, por exemplo (HODGKIN, 2005). Mas para Burkert (1972), a tradição de retratar Pitágoras como um filósofo e um cientista, do ponto de vista histórico, é um erro. Nenhuma descoberta pode ser seguramente atribuída a ele, em particular a relação entre lados do triângulo retângulo, de que babilônios e outros povos já tinham conhecimento.

Pitágoras teve a vida contada por diversos autores da Antiguidade, desde Aristóteles, em obra perdida. As biografias de maior fôlego datam todas dos primeiros séculos da Era Comum, devidas a Diógenes Laércio (200–250), Porfírio de Tiro (234-305) e Jâmblico (245-325) – muito posteriores, portanto, à obra de Vitrúvio.

Seus biógrafos lhe atribuem as mais diversas e fantasiosas façanhas. Jâmblico, por exemplo, escreve que Pitágoras foi enviado à Terra diretamente por Apolo, a quem servira como assistente. Tinha o poder de prever terremotos, prevenir pragas e furacões e acalmar os mares. Certa feita, ao atravessar o Nessus, foi cumprimentado pelo próprio rio e num mesmo dia, foi visto simultaneamente em duas cidades (GUTHRIE, 1987).

Segundo Porfírio, Pitágoras era tão persuasivo que exercia influência até sobre os animais. Certa vez, fez um urso jurar nunca mais perturbar a vizinhança, e o animal nunca mais foi visto. De outra, fez uma águia descer até seu encontro, para que pudesse acariciá-la. Diante de pescadores, determinou o exato número de peixes em suas redes (GUTHRIE, 1987).

Menos do que contar sua história, Porfírio e Jâmblico têm a clara intenção de glorificar Pitágoras e o pitagorismo. O retrato que emerge não é o de um matemático ou filósofo, mas de um guia espiritual, um mentor e um milagreiro obcecado por números e rituais.

A biografia de Diógenes se distancia dessa agenda. Há menções a passagens satíricas e críticas, como esta, atribuída a Tímon de Fliunte (c. 320-230 a.C.): Pitágoras "tende a usar encantamentos para caçar homens, cheio de palavras majestosas"; e esta, que Diógenes atribui a Cratino (519-422 a.C.): seus discípulos "têm o costume, se alguma vez encontram alguém inexperiente, de fazer-lhe um exame completo da força de seus raciocínios, confundindo-o e arrasando-o com argumentos, definições, antíteses, equações e grandezas, com grande exibição de inteligência" (CORNELLI, 2013).

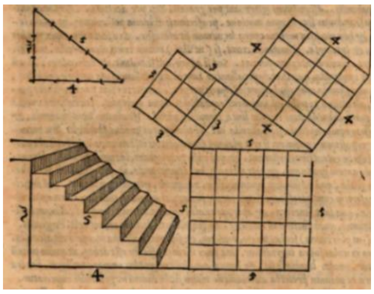
Diferente de Porfírio e Jâmblico, Diógenes se ocupa do famoso teorema atribuído a Pitágoras. Para tanto, cita Apolodorus, o calculista, segundo quem Pitágoras ofereceu bois em sacrifício aos deuses ao encontrar a "famosa figura" e estabelecer que o quadrado da hipotenusa equivale aos quadrados dos lados que contêm o ângulo reto (LAERTIUS, 1972).

Não se conhece a obra desse Apolodorus, o Calculista, que teria vivido no século IV. a.C. Mas a mesma história do sacrifício apareceria em outros trabalhos. O mais antigo que chegou até os dias de hoje é "De Natura Deorum", de Cícero (106-43 a.C.), de 45 a.C. – alguns anos antes dos "Dez Livros de Arquitetura", portanto. Mas Cícero não detalha o teorema. Aliás, nem cuida de identificá-lo, limitando-se a mencionar a imolação dos animais em razão de "alguma" nova descoberta em Geometria feita por Pitágoras (CICERO, 1896).

Já Vitrúvio, em seus "Dez Livros de Arquitetura", não apenas detalha a descoberta, como mostra algumas de suas aplicações. Por meio do teorema, afirma, pode-se garantir a construção de ângulos retos com exatidão que carpinteiros raramente e a muito custo alcançam. Basta tomar três réguas, uma de 3, outra de 4 e outra de 5 pés, e com elas formar um triângulo, ensina. Seu ângulo maior é reto, e a área do quadrado construído a partir do lado maior é a soma dos quadrados construídos sobre os demais lados, informa, sem demonstrar.

O teorema atribuído a Pitágoras tem uma importante aplicação na construção de escadas, exemplifica Vitrúvio, pois garante o correto nivelamento dos degraus. Além disso, o terno 3-4-5 dá a proporção recomendada para as dimensões da obra. Basta dividir a altura do andar em três partes e usar quatro delas para base da construção, conforme a Figura 19.

Figura 19 - O Teorema de Pitágoras e sua aplicação na construção de escadas.



Fonte: Barbaro (1567), HathiTrust Digital Library.

Ao longo dos séculos, outros autores ajudariam a fixar a reputação de Pitágoras como matemático, entre eles Proclo (411-485 d.C.), em seu comentário sobre “Os Elementos”, de Euclides, já mencionado. Segundo resume o filósofo, baseando-se provavelmente nas obras de Eudemo e Jâmblico, foi Tales de Mileto (625–547 a.C.) quem introduziu a Geometria na Grécia, após viagem ao Egito; um certo Mamercus aplicou-se à disciplina e adquiriu reputação – embora hoje não se saiba mais quem tenha sido; e logo depois veio Pitágoras, que “transformou a filosofia matemática em uma forma de educação liberal [...], investigando seus teoremas de uma maneira imaterial e intelectual” e “descobriu a doutrina das proporções” (MORROW, 1970).

Nos anos 1900, a atribuição do teorema a Pitágoras seria contestada, e não raro descartada, sob influência da detalhada investigação empreendida por Burkert (1972). Mas a questão não parece pacificada, como tantas outras controvérsias da História da Matemática. É uma “ilusão imperdoável” esperar que se resolva a questão pitagórica, diz Zhmud (2012), que defende a reputação de Pitágoras como matemático: “Se foi ensinado por sacerdotes egípcios ou por Ferécides de Siro; se estudou filosofia e ciência; se houve algum texto que ele mesmo escreveu; se havia entre seus alunos matemáticos e filósofos; tudo isso continua aberto a debate”.

3.3.3 Tarefas

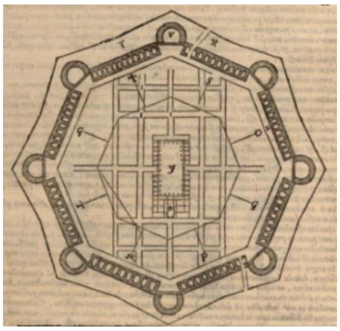
1 (Exploração). Nesta atividade, vamos comparar as proporções do “Homem Vitruviano” às de um grupo de pessoas.

a) tome, primeiramente, os seguintes dados de um grupo de pessoas: idade (i); sexo (s); altura (h); envergadura dos braços (b); largura máxima dos ombros (o); medida do queixo ao topo da testa (q); e comprimento do pé (p);
b) com auxílio de planilhas eletrônicas, tabele as informações e obtenha as seguintes razões b/h; o/h; q/h; p/h. Obtenha a média das razões, por idade e sexo;

c) discuta os resultados em comparação com as proporções ideais do "Homem Vitruviano": a longitude dos braços estendidos de um homem é igual à sua altura; a largura máxima dos ombros é um quarto da altura; a distância entre a raiz do cabelo e o queixo é um décimo da altura; o pé é um sexto da altura. Faz sentido estabelecer um padrão ideal de medidas?

2 (Exploração). Nos "Dez livros de Arquitetura", o engenheiro romano Vitrúvio tece recomendações sobre a direção das ruas de uma cidade (Figura 20). Parte da premissa de que os "ventos frios são desagradáveis, ventos quentes são enervantes, ventos úmidos são insalubres", daí a importância de evitar que as ruas se alinhem aos oito ventos que a tradição clássica relaciona aos pontos cardeais (Norte, Sul, Leste e Oeste) e colaterais (Nordeste, Sudeste, Noroeste, Sudoeste).

Figura 20 - A direção dos ventos, indicada por letras, e das ruas.



Fonte: Barbaro (1567), HathiTrust Digital Library.

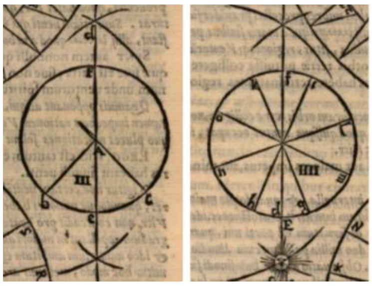
Há uma série de objeções que se podem fazer à premissa de Vitrúvio, mas aqui vamos nos ater às orientações deixadas. Resumidamente, queremos determinar quatro direções que estejam a 22,5 graus das linhas Norte-Sul, Nordeste-Sudoeste, Noroeste-Sudeste e Leste-Oeste. Siga as orientações para determinar a direção Norte-Sul e, partir dela, com régua e compasso, traçar as linhas convenientes para a construções das ruas (adaptado de PLOMMER, 1971):

a) encontre uma área plana, posicione uma haste no ponto A e marque a extremidade B da sombra projetada a certa hora da manhã. Trace uma circunferência tendo por centro a posição da haste (o ponto A), e por raio a distância até a extremidade da sombra (o segmento AB). À tarde, marque o ponto C em que a sombra da haste volta a tocar a circunferência traçada. Ligue os dois pontos ao centro O da circunferência e trace a bissetriz do arco BC (Figura 21, à esquerda). Marque o ponto E, a meia distância de B e C. No Hemisfério Norte, a semirreta $\overrightarrow{AE}$ indica o Norte. No Sul, o Sul;
b) tome $1/16$ da circunferência traçada e, a partir de E, marque dois pontos, H e G, um à esquerda e outro à direita de E. Ligue estes dois novos pontos ao centro da

circunferência. Então AH e AG definem duas direções convenientes, segundo a visão de Vitrúvio, para a construção de ruas;

c) determine as demais direções convenientes, tais que estejam a 22,5º das linhas Leste-Oeste, Nordeste-Sudoeste e Noroeste-Sudeste.

Figura 21 - A construção de ângulos.



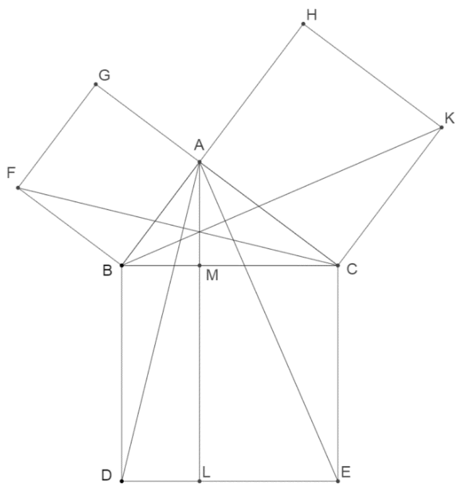
Fonte: Barbaro (1567), HathiTrust Digital Library.

3 (Investigação). Nos "Diálogos" do filósofo grego Platão, verifica-se que se pode tomar a diagonal de um quadrado para duplicá-lo, ou seja, para construir um quadrado cuja área seja o dobro. Usando régua e compasso, faça como se pede:

a) duplique a área de um círculo;
b) triplique a área de um quadrado;
c) quintuplique a área de um retângulo, mantendo a proporção entre os lados;
d) obtenha um quadrado cuja área seja a mesma de um retângulo.

4 (Problema). A Figura 22 ilustra a proposição 47 do Livro I dos "Elementos" de Euclides (FITZPATRICK, 2008). É a primeira demonstração que se conhece do Teorema de Pitágoras.

Figura 22 - Proposição 47 de Euclides.



Fonte: do autor, baseado em Fitzpatrick (2008).

Vamos percorrer sua demonstração, com régua e compasso, explorando os conceitos de congruência de triângulos e áreas de quadrados e triângulos.

a) trace um triângulo retângulo ABC, tal que $B\hat{A}C$ seja reto;
b) trace os quadrados $ABFG, BCED$ e $CAHK$ sobre os lados AB, BC e CA;
c) mostre que CA e CG pertencem à mesma reta, assim como BA e AH;
d) mostre que os ângulos $A\hat{B}D$ e $F\hat{B}C$ são congruentes;
e) mostre que os triângulos ABD e FBC são congruentes;
f) trace AL paralelo a BD e seja M a interseção com BC;
g) mostre que a área do retângulo $BDLM$ é o dobro da área do triângulo ABD;
h) mostre que a área do quadrado $ABFG$ é o dobro da área de FBC;
i) conclua que $ABFG$ tem a mesma área do retângulo $BDLM$;
j) analogamente, mostre que os triângulos ACE e KCB são congruentes; que a área do retângulo $CELM$ é o dobro da área do triângulo ACE; e que o quadrado $CAHK$ tem a mesma área do retângulo $CELM$;
k) conclua que o quadrado $BCED$ é a soma dos quadrados $ABFG$ e $CAHK$.

5 (Investigação). Triplas pitagóricas são quaisquer três números naturais distintos tais que o quadrado do maior é a soma dos quadrados dos demais. São, portanto, lados de um triângulo retângulo, daí o termo "pitagórico".

a) em "Os Elementos", Euclides descreve um método geométrico para obtenção dessas triplas. Algebricamente, pode ser descrito da seguinte maneira. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$. Sejam $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$. Então a, b, c formam uma tripla pitagórica. Dê exemplos e prove a validade do método;
b) outra estratégia para obter triplas pitagóricas, atribuída aos próprios pitagóricos, pode ser descrita, algebricamente, da seguinte maneira: com n ímpar, sejam $a = n, b = \frac{n^2-1}{2}, c = \frac{n^2+1}{2}$. Então a, b, c formam uma tripla pitagórica. Dê exemplos e prove a validade do método. Dica: todo n ímpar pode ser escrito como $n = 2k + 1$, em que k é um número natural;
c) mostre que em toda terna pitagórica existe um número par. Dica: todo n par pode ser escrito como $n = 2k$, em que k é um número natural;
d) mostre que em toda terna pitagórica existe um múltiplo de 5. Dica: todo n natural é da forma $5k$; $5k + 1$; $5k + 2$; $5k + 3$; ou $5k + 4$, com k natural.

3.4 ACASO E BOM SENSO

3.4.1 Habilidade

> (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões (BRASIL, 2018b).

Examinamos aqui a importância do acaso na tomada de decisões e os engenhos desenvolvidos ao longo da história para eliminar o viés da natureza humana, do *kleroterion* aos algoritmos matemáticos. Por fim, discutiremos o problema do casamento – ou da secretária.

3.4.2 Relato

A natureza humana sob suspeita

Uma decisão aleatória pode parecer o exato avesso de uma decisão racional. Mas, por estranho que pareça, escolhas ao acaso podem ser as mais sensatas (STONE, 2011). Isso porque a aleatoriedade elimina o viés dos argumentos frágeis e das impressões mal embasadas. Na falta de convicções, a saída mais prudente pode ser jogar a moeda.

O registro histórico de decisões aleatórias é farto de exemplos. Um dos mais ilustrativos é relatado por Aristóteles – ou um de seus pupilos, não se sabe ao certo – nos capítulos finais da Constituição de Atenas, cerca de 330 a.C. (RHODES, 2017). Ficamos sabendo que a cidade berço da democracia confiava ao acaso, não ao voto ou a qualquer critério de desempenho, a escolha de magistrados, procuradores, jurados e outros postos da administração pública.

Figura 23 - Fragmento de *kleroterion*. A peça é um dos destaques do Agora Museum, de Atenas.

Fonte: Marsyas, Wikipedia.

Para garantir um justo sorteio, os gregos usavam o *kleroterion*. O dispositivo é feito de rochas com centenas de sulcos, organizados em fileiras, nas quais se encaixavam pequenas fichas, com os nomes de cada cidadão (Figura 23). Peças brancas e pretas eram então introduzidas em um tubo de madeira e, acionando-se uma manivela, tirava-se uma peça de cada vez. Conforme a cor, escolhiam-se ou descartavam-se as fichas, linha por linha. Para Dow (1939), o *kleroterion* é um emblema do "gênio dos atenienses": sua "paixão pela lógica", a "democracia justa e rigorosa", o "fascínio pelo acaso" e a "suspeita da natureza humana".

Imprevisibilidade em grande escala

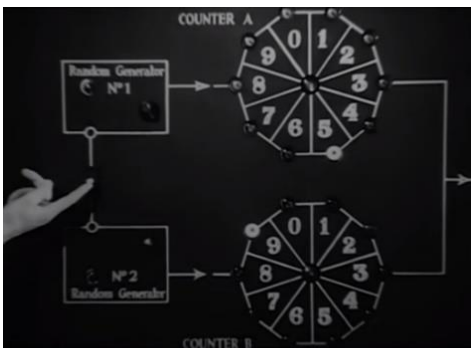
Produzir decisões aleatórias em pequena escala é razoavelmente simples. Dados honestos, por exemplo, bastam para eliminar o viés da natureza humana. Em grande escala, é um desafio considerável – e uma necessidade em diversas áreas, como Estatística e Criptografia.

Uma maneira de produzir acaso é traduzir em números sinais imprevisíveis de fenômenos físicos ou químicos. Um exemplo interessante é o da máquina batizada E.R.N.I.E. Trata-se da sigla para Electronic Random Number Indicator Equipment. Trata-se também de um delicioso trocadilho, pois soa como apelido para Earnest ou Ernest, honesto em inglês – duplo sentido que o irlandês Oscar Wilde (1854-1900) explorou em "The Importance of Being Earnest", ou "A Importância de Ser Prudente", na consagrada tradução para o português de Guilherme de Almeida.

Aproveitando a referência, chama-se justamente "The Importance of Being E.R.N.I.E" um documentário (1963) que explica em termos bastante simples e precisos o funcionamento da máquina. O invento é obra de cientistas que haviam participado dos esforços para quebrar o código dos nazistas, o famigerado Enigma (SHIRLEY, 2006). Sua missão no pós-guerra: gerar números randômicos para o sorteio meticuloso de prêmios a cargo do Correio britânico.

A solução dos engenheiros foi esta: duas lâmpadas de neon são acesas, as partículas do gás são eletrificadas e começam a chocar-se de maneira errática contra placas metálicas; as colisões provocam impulsos elétricos imprevisíveis, que podem ser contados eletronicamente, em frações de segundos; cada contagem gera um algarismo (Figura 24), e a diferença entre o primeiro e o segundo algarismo, de 0 a 9, é tomada como um número aleatório. Se o segundo algarismo é maior que o primeiro, soma-se dez ao resultado – ou, usando a notação da aritmética modular, toma-se $d \equiv n_1 - n_2 \ (mod\ 10)$, com $0 \leq d \leq 9$. Os resultados são organizados em sequências de nove dígitos, compatíveis com o sistema de numeração dos bilhetes.

Figura 24 - Os contadores indicam 5 e 9. Assim, o algarismo gerado será $d \equiv 5 - 9 \ (mod\ 10) = 6$.



Fonte: The Importance of Being E.R.N.I.E (1963), YouTube.com.

Métodos aritméticos

E.R.N.I.E mostrou-se um engenho eficiente para produzir números aleatórios e já está em sua quinta geração. Mas é custoso. "Com o advento dos computadores de alta velocidade nos anos 50", explica Thomopoulos (2013), "algoritmos matemáticos tornaram-se práticos, e novas descobertas levaram a formas aprimoradas de gerar um grande fluxo de números aleatórios".

Chamam-se pseudoaleatórios os números gerados por computação: parecem aleatórios, mas são, ao cabo, produto de máquinas determinísticas. Alguns dos métodos conhecidos para gerá-los podem ser reproduzidos em sala de aula, com auxílio de calculadoras e planilhas, como o método dos produtos médios e o dos quadrados centrais.

Vale detalhar este último, por sua importância histórica. Trata-se da proposta pioneira do matemático John von Neumann (1903-1957), nos anos 1940. O método dos quadrados centrais começa pela escolha de um número x_0 de $m = 2k$ dígitos quaisquer. Essa será a semente da sequência pseudorrandômica. Eleva-se x_0 ao quadrado e, se necessário, acrescentam-se zeros à esquerda, de modo que o resultado tenha $2m$ dígitos. Tomam-se então os m algarismos centrais do resultado, e este será x_1. Eleva-se x_1 ao quadrado, acrescentando-se mais zeros à esquerda se preciso, para que novamente o resultado tenha $2m$ algarismos. Este será x_2, e assim por diante.

São muitas as limitações deste método. Uma delas é que certas sementes produzem rapidamente sequências periódicas. Outro problema: certas sementes logo convergem para 0. Von Neumann não ignorava essas limitações. Nem chegou a recomendar o expediente. Afirmava suspeitar que pudesse funcionar com sementes de mais de dez dígitos. E alertava que, mais importante que a complexidade de um método, qualquer que seja, é testá-lo com ferramentas estatísticas: "Qualquer um que considere métodos aritméticos para produzir dígitos randômicos estará, é claro, pecando" (VON NEUMANN, 1951).

Como Kepler se casou

O acaso pode incidir mesmo sobre as decisões mais criteriosas que pretendemos tomar, como comprar uma casa, buscar um emprego ou casar. Consideremos uma passagem da vida privada do astrônomo Johannes Kepler (1571-1630). O alemão havia passado dez anos estudando o movimento de Marte. O resultado está em "Astronomia nova", de 1609, em que detalha o que hoje se conhece como primeira e segunda Leis de Kepler (GARMS e CALDAS, 2018). Dois anos depois, viúvo, dá início a outra investigação quase tão metódica: a escolha de sua segunda mulher.

É o próprio Kepler quem conta, em carta de 1613, o desgastante processo seletivo que empreendeu ao longo de dois anos. É longa sua lista de lamúrias: a primeira candidata tinha mau hálito; a outra vivia acima de suas posses; a terceira já estava noiva; da quarta e da quinta ele até gostou, mas ambas cansaram de esperar; a sexta era de família nobre, e o cientista temeu não poder arcar com o casamento; a seguinte o rejeitou; a oitava era inconstante demais, ora dando-lhe a palavra, ora negando o compromisso; a nona sofria do pulmão; a décima era simplesmente horrível; e a décima-primeira era jovem demais (KOESTLER, 1990). A história terminaria muito mal se Kepler não tivesse corrido atrás da número cinco, Susanna Reuttinger, insistindo no casamento. Casaram-se, finalmente, e foram felizes, ao que consta (CHRISTIAN e GRIFFITHS, 2017).

O dilema de Kepler é a base do problema do casamento – ou da secretária, como ficou conhecido nos anos 1950 e 60 (FERGUSON, 1989). Trata-se de decidir quando se dar por satisfeito durante o processo de escolha: o momento da parada ótima. Supondo que Kepler tivesse de escolher ou descartar cada pretendente, inapelavelmente, antes de considerar a próxima: em que momento ele deveria ter parado?

Kepler não teria maiores dificuldades se pudesse deixar todas as pretendentes esperando indefinidamente. Como não pode, precisa decidir-se sem saber ao certo que alternativas o futuro lhe reserva. Vejamos como o pensamento probabilístico poderia socorrer Kepler. Para tanto, vamos reformular o problema à maneira do jogo do googol, proposto pelo americano Martin Gardner, o grande nome da matemática recreativa do século XX (FERGUSON, 1989). Nele, uma pessoa escreve uma série de números em pedaços de papel, "de pequenas frações até 1 googol (o dígito 1 seguido de cem zeros) e até mais". O oponente tira os papeizinhos, um a um, decidindo se fica com ele ou o descarta – sem que possa voltar atrás. Seu objetivo é escolher o maior número.

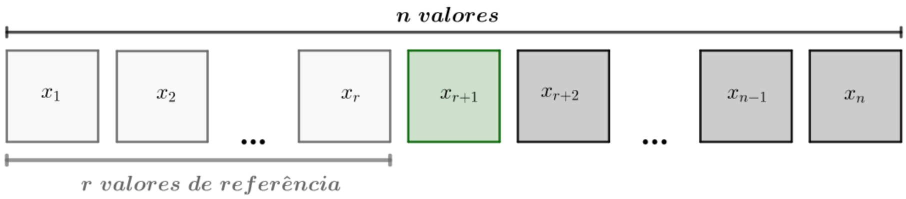
Uma estratégia razoável para enfrentar esse problema, próxima da experiência pessoal de qualquer um, é tomar alguns valores como referência, descartando-os, e então escolher o próximo que superar todos os valores de referência. Mas quantos valores devemos tomar como referência?

A generalização desse tipo de problema vai além do programa do Ensino Médio. Trata-se da chamada Regra dos 37%: descarte os primeiros r de n valores tal que $\frac{r}{n} \cong 37\%$ e escolha o próximo que for maior que todos os anteriores (CHRISTIAN e GRIFFITHS, 2017). Mas mesmo em uma sala de aula do Ensino Médio, é possível intuir a estratégia que aumenta as nossas chances e calculá-las para um número finito de papeizinhos.

Sejam n o número total de papeizinhos e r os papeizinhos que serão descartados, a título de referência. Sejam ainda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores que serão conhecidos, um de cada vez. Para que a estratégia seja bem sucedida, é claro que, primeiramente, o maior valor deve estar entre x_{r+1} e x_n, pois os primeiros r papeizinhos serão tomados como referência e descartados. Mas isso não basta. Suponhamos que o maior valor seja o papelzinho x_{r+2}. A estratégia descrita só será bem sucedida se x_{r+1} for menor que o mais alto dos valores de referência, caso contrário x_{r+1} será escolhido antes que se possa conhecer x_{r+2}.

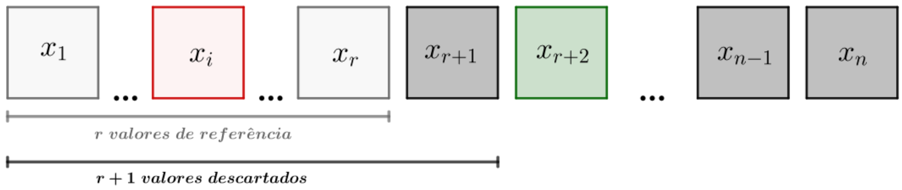
Então nossas alternativas de sucesso são as seguintes:

a) O maior de n valores é x_{r+1}, conforme ilustração abaixo:



A probabilidade de x_{r+1} ser o maior valor é: $P_1 = \frac{1}{n}$.

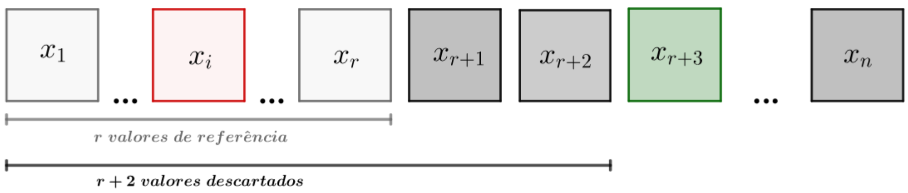
b) O maior de n valores é x_{r+2} e o maior de $r + 1$ valores é x_i, tal que $i \leq r$:



A probabilidade de x_{r+2} ser o maior de n valores é novamente $\frac{1}{n}$. Já a probabilidade de que o maior de $r + 1$ valores descartados seja x_i, tal que $i \leq r$, é $\frac{r}{r+1}$. Logo:

$$P_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} .$$

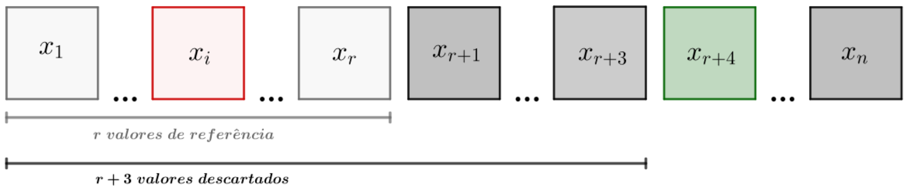
c) O maior de n valores é x_{r+3} e o maior de $r + 2$ valores é x_i, tal que $i \leq r$:



A probabilidade de x_{r+3} ser o maior de n valores é novamente $\frac{1}{n}$. Já a probabilidade de que o maior de $r + 2$ valores descartados seja x_i, tal que $i \leq r$, é $\frac{r}{r+2}$. Logo:

$$P_3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} .$$

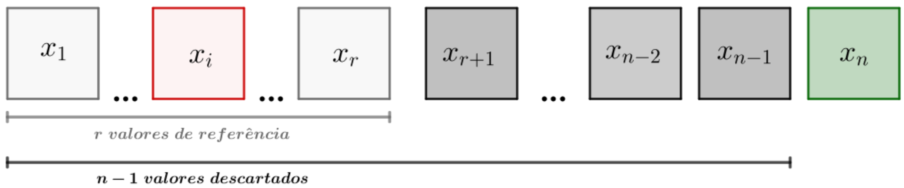
d) O maior de n valores é x_{r+4} e o maior de $r+3$ valores é x_i, tal que $i \leq r$:



A probabilidade de x_{r+4} ser o maior de n valores é novamente $\frac{1}{n}$. Já a probabilidade de que o maior de $r+3$ valores descartados seja x_i, tal que $i \leq r$, é $\frac{r}{r+3}$. Logo:

$$P_4 = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+3} \ .$$

e) E assim contamos todas as alternativas, até o último caso que atende nossa estratégia: o maior de n valores é x_n e o maior de $(n-1)$ valores descartados é x_i, tal que $i \leq r$:



A probabilidade de x_n ser o maior de n valores é novamente $\frac{1}{n}$. Já a probabilidade de que o maior de $(n-1)$ valores descartados seja x_i, tal que $i \leq r$, é $\frac{r}{n-1}$. Logo:

$$P_{n-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1} \ .$$

Somando todas as probabilidades, podemos definir P em função de r:

$$P(r) = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1} \ .$$

E pondo $\frac{r}{n}$ em evidência, temos:

$$P(r) = \frac{r}{n} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \ .$$

Assim, podemos testar diferentes escolhas de r, de modo a maximizar $P(r)$.

Voltemos agora ao caso de Kepler, em que $n = 11$ era o número de pretendentes. Valendo-nos da mesma estratégia, podemos calcular os seguintes valores de $P(r)$:

$$P(1) = \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}27,$$

$$P(2) = \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}35,$$

$$P(3) = \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}39,$$

$$P(4) = \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}40,$$

$$P(5) = \frac{5}{11} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}38,$$

$$P(6) = \frac{6}{11} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}35,$$

$$P(7) = \frac{7}{11} \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}30,$$

$$P(8) = \frac{8}{11} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}24,$$

$$P(9) = \frac{9}{11} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \cong 0{,}17,$$

$$P(10) = \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cong 0{,}09.$$

Assim verificamos que, para $n = 11$, o valor de r que maximiza $P(r)$ é 4. Se tivesse aplicado essa fórmula, Kepler teria pulado as quatro primeiras candidatas e se decidido logo pelo quinto nome, de quem de fato gostara e com quem de fato se casou.

Como dissemos, vai além do nosso escopo a generalização do valor de r que maximiza a probabilidade $P(r)$. Remetemos o leitor interessado à dissertação de Santos, L. G. M. (2016), que mostra em detalhe, por meio do cálculo integral, por que a escolha de $r = \frac{n}{e}$ maximiza $P(r)$, daí a regra dos $37\% \cong \frac{1}{e}$.

3.4.3 Tarefas

1 (Exploração). Vamos nesta tarefa determinar sequências de números pseudoaleatórios, ou seja, números que parecem aleatórios, mas que, em essência, resultam de métodos determinísticos. Vamos usar o método dos quadrados centrais (a partir de Bussab e Morettin,

2010). Seja n_0 um inteiro com m dígitos. Tome n_0^2 e, se necessário, acrescente zeros à esquerda de modo a obter um número com $2m$ dígitos. Tome por n_1 os m dígitos centrais de n_0 e divida por 10^m, obtendo um valor pseudo-aleatório u_0 entre 0 e 1. Repita o procedimento, tomando n_1^2 para obter u_1; n_2^2, para obter u_2; e assim por diante.

Usando uma planilha eletrônica, uma simples calculadora ou computação, determine sequências pseudoaleatórias para os seguintes valores de n_0 e discuta as limitações do método:

a) 2021;
b) 1234.

2 (Problema). Vamos estimar o valor de π por meio de um conhecido experimento probabilístico, à maneira dos chamados Métodos Monte Carlo. A atividade pode ser feita com auxílio de uma planilha eletrônica, por meio de computação ou mesmo a mão livre. Para tanto, será necessário tomar valores pseudoaleatórios entre 0 e 1, o que pode ser feito por meio de planilhas eletrônicas, aplicativos para celular ou consultas a tabelas do gênero.

a) considere inicialmente um quadrado de lado unitário, cujos vértices possam ser representados no sistema de coordenadas cartesianas por $(0; 0), (1;\ 0), (1; 1)$ e $(0;\ 1)$. Considere uma circunferência inscrita no quadrado. Determine o centro C e o raio r da circunferência;
b) usando o Teorema de Pitágoras, determine a distância dos seguintes pontos até o centro da circunferência: $P_1 =\ (0{,}1;\ 0{,}1), P_2 = (0{,}1; 0{,}2); P_3 = (0{,}2; 0{,}3)$;
c) conhecendo as distâncias de cada ponto ao centro da circunferência, aponte quais pertencem à circunferência. Generalize: dado $P = (x, y)$, sob que condições P pertence à circunferência?
d) admita que a probabilidade de um ponto do quadrado escolhido ao acaso pertencer à região definida pela circunferência seja dada pela razão entre a área da circunferência e a área do quadrado. Calcule essa razão;
e) tome n valores pseudoaleatórios para x, entre 0 e 1, e a mesma quantidade de valores para y, e obtenha pontos $P_n = (x_n, y_n)$ que pertencem ao quadrado, mas não necessariamente ao círculo. Conte os m pontos que pertencem ao círculo. Calcule $\frac{m}{n}$, ou seja, a probabilidade de que um ponto escolhido ao acaso, entre n pontos, pertença ao círculo. Compare com a razão obtida no item anterior e obtenha uma aproximação para π.

3 (Problema). Vamos calcular a melhor estratégia para o jogo do googol (FERGUSON, 1989). Uma pessoa escreve n valores $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, em n pedaços de papel. A outra pessoa tira os papeizinhos, um de cada vez, em ordem, e decide se fica com ele ou o descarta. Vence se escolher o maior número. Sua estratégia será descartar os primeiros r papeizinhos e escolher o primeiro papelzinho cujo número seja maior que todos os anteriores.

a) suponha $n = 6$ e $r = 3$. Qual a probabilidade de que o maior número de todos seja x_4?
b) suponha $n = 6$ e $r = 3$. Qual a probabilidade de que o maior número de todos seja x_5 e de que o maior número de x_1 a x_4 esteja entre x_1 e x_3?
c) suponha $n = 6$ e $r = 3$. Qual a probabilidade de que o maior número de todos seja x_6 e de que o maior número de x_1 a x_5 esteja entre x_1 e x_3?
d) verifique que soma das probabilidades calculadas em (a), (b) e (c) resulta na probabilidade de sucesso da estratégia assumida para $n = 6$ e $r = 3$;
e) calcule a probabilidade de sucesso da estratégia para $n = 7$ e $r = 2$, comparando com o valor obtido em (d);
f) determine a melhor estratégia para um jogo com 30 papeizinhos;

3.5 POR QUEM OS SENOS DOBRAM

3.5.1 Habilidade

> (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BRASIL, 2018b).

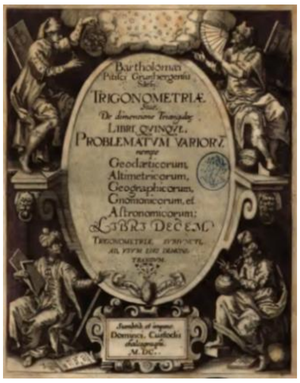
Investigamos aqui três importantes marcos históricos da Trigonometria: “Almagesto”, de Ptolomeu (c. 85-165 d.C.), onde se acha a mais antiga tabela de cordas documentada; o desenvolvimento da noção de meia-corda dos indianos, que está na origem do conceito de seno; e a obra de Pitiscus (1561-1613), que cunha a expressão trigonometria, no final do século XVI.

3.5.2 Relato

O tratado maior

O termo trigonometria foi cunhado pelo teólogo alemão Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) (BOYER e MERZBACH, 2011). É sintomático que tenha aparecido pela primeira vez no apêndice de um tratado de Astronomia, em 1585. De fato, a “doutrina da medição de triângulos”, como define Pitiscus, foi por muito tempo um campo acessório do estudo dos astros, em que se verifica que a medição de distâncias, quando não impossível, é certamente mais difícil que a tomada de ângulos. E determinar comprimentos, conhecidos os ângulos correspondentes, é justamente a vocação que distingue a trigonometria (VAN BRUMMELEN, 2009).

Figura 25 - Capa da edição de 1600 da obra de Pitiscus.



Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

O mais antigo tratado astronômico que chegou até nós são 13 livros de Ptolomeu (c. 85-165 d.C.), que viveu em Alexandria, no Egito, sob influência da cultura grega e domínio político romano. A obra originalmente chamou-se "Mathematike Syntaxis" ("Coleção Matemática"), mas passou a ser conhecida simplesmente como a "maior" coleção (*megiste*, em grego), por oposição a coleções "menores". Traduzida para o árabe, a obra acabou rebatizada simplesmente "Al-Majisti", daí latinizada "Almagesto", na tradução de Geraldo de Cremona, no século XII (BOYER e MERZBACH, 2011; HODGKIN, 2005). Vejamos o que vai na obra, conforme tradução comentada para o inglês de Toomer (1984).

Ptolomeu estabelece no início do primeiro livro algumas noções preliminares. Em síntese: assim como o universo, a Terra é esférica, e seu tamanho, em relação às distâncias dos astros, é a de um ponto – ou seja, desprezível; a Terra é imóvel e em torno dela os demais astros orbitam em movimentos cíclicos combinados; são dois os tipos de movimentos, ambos circulares: um ciclo "primário" que "carrega tudo de leste a oeste", e que na Idade Média ficaria conhecido como deferente (TOOMER, 1984); e um segundo ciclo sobre este ciclo primário, conhecido como epiciclo, cujo centro é um ponto imaginário regido pelo ciclo primário. É essa combinação de ciclos que explica os movimentos "complicados e diferentes" dos planetas.

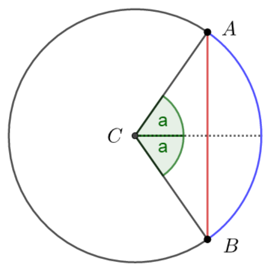
A ideia de ciclos combinados não era nova na Astronomia, tendo sido antes explorada por Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.) e Hiparco (190-120 a.C.) (BURTON, 2011; HODGKIN, 2005). A novidade, no "Almagesto", foi a introdução do conceito de equante. Para tanto é preciso entender que, no modelo ptolomaico, a Terra não está exatamente no centro do ciclo primário, o deferente, mas ligeiramente deslocada. Equante é o ponto imaginário simétrico da Terra em relação ao centro do deferente. E é em relação a esse ponto imaginário, o equante, que os astros se moveriam, com velocidade uniforme. Para o leitor moderno, nada disso faz sentido, mas o fato é que este modelo acomodou muito bem as observações disponíveis à época, inclusive os aparentes atrasos, acelerações e variações de brilho dos astros. É importante observar que já na Antiguidade se conjecturava que a Terra não fosse estacionária, nem estivesse no centro do universo (ou perto dele). Mas foi o modelo ptolomaico que prevaleceu por mais de 15 séculos, fazendo de "Almagesto" o tratado de mais longa influência da história da astronomia.

Em parte, o sucesso do modelo ptolomaico se deve ao evidente apelo místico de um universo centrado na Terra, descrito pela perfeição de círculos e esferas. Mas não apenas. O fato é que a descrição matemática dos corpos celestes é "extremamente boa" (HODGKIN, 2005), e a exposição dos argumentos, "impressionantemente bem-organizada" (BERNARD *et at.*, 2014), o que contribuiu para escantear os tratados astronômicos "menores".

"De uma vez por todas"

A Matemática tem papel fundamental na exposição do modelo ptolomaico, para além do título da obra. E Ptolomeu não se furta a trazer ao leitor todos os conceitos necessários para acompanhá-lo. De fato, logo após as considerações iniciais, o astrônomo julga relevante lembrar a importante noção de corda e mostrar "de uma vez por todas" como calculá-las, tabelando valores para arcos até 180º (TOOMER, 1984). É o mais antigo registro que sobreviveu à passagem dos séculos do que hoje chamaríamos função trigonométrica.

Figura 26 - Em vermelho, a corda do arco $\widehat{AB}$, correspondente ao ângulo central $2a$.



Fonte: do autor.

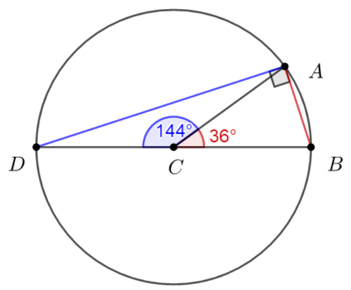
Corda é o segmento que une as extremidades de um arco de circunferência. Podemos relacioná-la à função seno da seguinte maneira: $Crd(2a) = 2 \cdot R \cdot sen(a)$, em que R é o raio da circunferência, e $2a$ é o ângulo central que subtende um determinado arco (Figura 26). Hiparco usou o conceito de corda em seu "Catálogo de Estrelas", desaparecido, e tabelou alguns valores. Ptolomeu aperfeiçoou a ideia e desenvolveu novos métodos para o cálculo de cordas, oferecendo resultados para arcos de meio em meio grau - e, de quebra, o teorema que hoje leva seu nome.

A medida da corda depende do arco, e este, é claro, depende do raio. Ptolomeu toma uma circunferência feita de 360 partes – ou seja, graus – e divide seu diâmetro em 120 partes. São escolhas convenientes para cálculos na base sexagesimal, à maneira dos babilônios, mas implicam em unidades distintas: as partes da circunferência diferem, por pouco, das partes do diâmetro, dado que $\frac{C}{D} = \frac{360}{120} = 3 < \pi$.

Usando argumentos geométricos, Ptolomeu mostra primeiramente como calcular as cordas de arcos de 36º, 72º, 60º, 90º e 120º. De posse desses valores, apresenta identidades matemáticas que permitirão o cálculo de muitas mais cordas. Chamamos atenção para algumas delas.

É "imediatamente óbvio", afirma Ptolomeu (TOOMER, 1984), que a medida de uma corda permite conhecer a corda do arco suplementar, uma vez que a soma de seus quadrados é o quadrado do diâmetro. De fato, como se sabe, as cordas de arcos que somam 180º são catetos de um triângulo retângulo que tem por hipotenusa o diâmetro da circunferência, e o resultado segue direto do Teorema de Pitágoras. No exemplo da Figura 27, $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2$:

Figura 27 - Triângulo retângulo formado pelas cordas de ângulos suplementares.



Fonte: do autor.

Vejamos como se pode calcular a corda de 144º, conhecida a corda de 36º. Antes de mais nada, observamos que Ptolomeu usa uma notação mista para as cordas, com partes inteiras na base decimal e frações na base sexagesimal. O astrônomo calcula primeiramente, por argumentos geométricos, que a corda correspondente a um ângulo de 36º ($\overline{AB}$, na Figura 27) meça 37 4 55 das 120 partes do diâmetro – ou, em notação decimal, $37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600} \cong 37{,}0819$. O quadrado disso é 1375 4 15, $\left(1375 + \frac{4}{60} + \frac{15}{3600} \cong 1\,375{,}07\right)$. O quadrado do diâmetro ($\overline{DB}$, na figura) é $120^2 = 14\,400$. A diferença entre os quadrados é 13024 55 45 $\left(13024 + \frac{55}{60} + \frac{45}{3600} \cong 13\,024{,}9\right)$, e esta diferença é o quadrado do valor buscado ($\overline{AD}$, na figura). Assim se chega à medida da corda de 144º: 114 7 37 $\left(114 + \frac{7}{60} + \frac{37}{3600} \cong 114{,}127\right)$.

Da correspondência com a função seno, podemos avaliar o resultado da seguinte maneira:

$$Crd(144°) = 2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{144°}{2}\right),$$

$$114{,}127 = 2 \cdot \left(\frac{120}{2}\right) \cdot sen(72°),$$

$$sen(72°) = \frac{114{,}127}{120} \cong 0{,}951058.$$

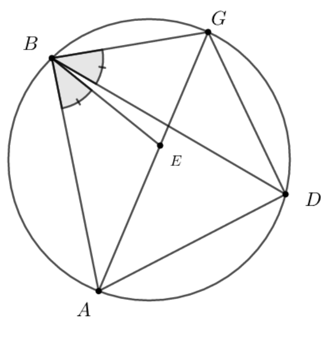
É um resultado exato até a sexta casa decimal.

Um teorema "extremamente útil"

A segunda identidade que Ptolomeu apresenta no cálculo de cordas, e que considera "extremamente útil" (TOOMER, 1984), é o famoso teorema que hoje leva seu nome: o produto das diagonais de um quadrilátero inscrito em uma circunferência é a soma dos produtos dos lados opostos. A demonstração dada pelo astrônomo, elegante e acessível, é a seguinte:

Seja $ABGD$ o quadrilátero e AG e BD suas diagonais, como na Figura 28.

Figura 28 - Teorema de Ptolomeu.



Fonte: do autor, baseado em Toomer (1984).

Seja E um ponto de AG tal que $A\hat{B}E = D\hat{B}G$.

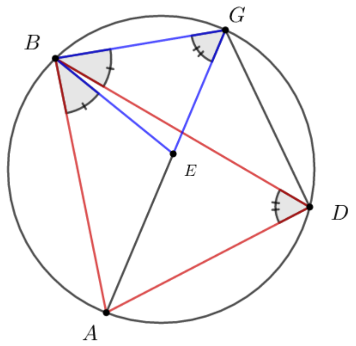
Então $A\hat{B}E + E\hat{B}D = E\hat{B}D + D\hat{B}G$.

Logo, $A\hat{B}D = E\hat{B}G$.

Além disso, $B\hat{D}A = B\hat{G}A = B\hat{G}E$, pois subtendem o mesmo arco $\widehat{AB}$.

Então os triângulos ABD e EBG são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo (Figura 29).

Figura 29 - Semelhança dos triângulos ABD e EBG.



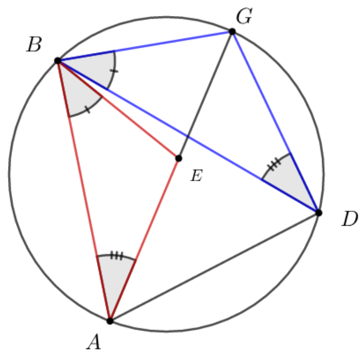
Fonte: do autor.

Dada a semelhança de ABD e EBG, temos que $\frac{\overline{BG}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{DA}}$, o que nos dá:

$$\overline{BG} \cdot \overline{DA} = \overline{BD} \cdot \overline{GE}\,. \tag{1}$$

Além disso, temos que $A\hat{B}E = D\hat{B}G$, por construção; e $B\hat{A}E = B\hat{A}G = B\hat{D}G$, pois subtendem o mesmo arco $\widehat{BG}$. Deduzimos assim que os triângulos ABE e DBG são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo (Figura 30):

Figura 30 - Semelhança dos triângulos ABE e DBG.



Fonte: do autor.

Então temos que $\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DG}}$, o que nos dá:

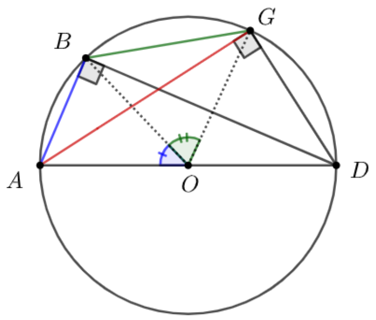
$$\overline{BA} \cdot \overline{DG} = \overline{BD} \cdot \overline{AE}\,. \tag{2}$$

Somando as Equações (1) e (2), temos que:

$$\begin{aligned}\overline{BG} \cdot \overline{DA} + \overline{BA} \cdot \overline{DG} &= \overline{BD} \cdot \overline{GE} + \overline{BD} \cdot \overline{AE},\\ &= \overline{BD} \cdot \left(\overline{GE} + \overline{AE}\right),\\ &= \overline{BD} \cdot \overline{GA}.\end{aligned}$$

Vejamos agora como aplicar esse teorema ao cálculo de cordas. Para tanto, basta tomar DA como diâmetro da circunferência. Assim, dadas as cordas BA e GA, vamos deduzir BG, a corda correspondente à diferença entre os arcos $\widehat{BA}$ e $\widehat{GA}$, conforme a Figura 31.

Figura 31 - O teorema de Ptolomeu aplicado à diferença de cordas.



Fonte: do autor, baseado em Toomer (1984).

Os triângulos ABD e AGD são retângulos. Assim, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2},$$

$$\overline{DG} = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{GA}^2}.$$

E pelo Teorema de Ptolomeu,

$$\overline{BG} \cdot \overline{DA} + \overline{BA} \cdot \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{GA}^2} = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2} \cdot \overline{GA},$$

$$\overline{BG} \cdot \overline{DA} = \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2} \cdot \overline{GA} - \overline{BA} \cdot \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{GA}^2},$$

$$\overline{BG} = \frac{\sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2} \cdot \overline{GA} - \overline{BA} \cdot \sqrt{\overline{DA}^2 - \overline{GA}^2}}{\overline{DA}}.$$

Usando o mesmo teorema, pode-se também calcular a corda da soma, do dobro e da metade de arcos. Partindo dos valores iniciais de cordas (correspondentes a 36º, 72º, 60º, 90º e 120º), e tomando sucessivamente a metade da metade de arcos conhecidos, Ptolomeu chega a determinar as cordas de 1,5º e 0,75º. Não é o bastante. Considera essencial tomar a corda de 1º. Para tanto, Ptolomeu faz a interpolação das cordas de 1,5º e 0,75º (BOYER e MERZBACH, 2011), lembrando que a razão entre duas cordas é menor que a razão entre os dois arcos correspondentes, e estima a corda de 1º com um erro da ordem de 10^{-7}. E é com isso que monta sua tabela de cordas, de meio em meio grau, até 180º, de modo a determinar valores "prontamente disponíveis para toda ocasião" (TOOMER, 1984).

A receita indiana

Alguns séculos mais tarde, na Índia, astrônomos habilmente substituíram a noção de corda pela meia-corda (*ardhajya*, ou simplesmente *jya*), o que corresponde, para um círculo unitário, ao seno da metade de um dado arco (YANO, 2019; GONZÁLEZ-VELASCO, 2011). O termo *jya* passou para o árabe como *jiba* e na tradução inadvertida para o latim foi confundido com *jaib*, que significa dobra, daí *sinus* e finalmente seno.

A história da astronomia indiana é controversa no que diz respeito à autoria e datações de diversos tratados. Consideramos aqui a hipótese de que o mais antigo registro de valores de *jya* seja um poema com 500 estrofes, escrito em sânscrito: o "Surya Siddhanta", de autoria desconhecida, escrito possivelmente nos séculos IV ou V d.C. e reescrito muitas vezes depois (MONTGOMERY e KUMAR, 2016; NARAYANAN, 2010; BOWMAN, 2000). Os valores são os mesmos encontrados na obra do famoso astrônomo e matemático indiano Aryabhata (476–550), sem que se saiba se este se serviu do "Surya Siddhanta", ou, ao contrário, tenha fornecido a base para sua atualização, como sugere Yano (2019).

Siddhanta tem o sentido de "verdade estabelecida". É o termo usado para designar uma série de tratados astronômicos, em geral aposto ao nome do autor – no caso, o próprio Sol (*Surya*). De 18 *siddhantas* de que fala a tradição indiana, restaram apenas cinco. O italiano Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) e o suíço Leonhard Euler (1707-1783) são alguns dos cientistas que se debruçaram sobre o antigo cânone da ciência indiana (NARAYANAN, 2010).

De todos os *siddhantas*, o "Surya" é o mais conhecido e festejado. O interesse levou à tradução ricamente comentada da obra para o inglês, em 1858, pelo missionário americano Ebenezer Burgess (1935). Em 14 capítulos, o "Surya Siddhanta" abrange o movimento dos corpos celestes, eclipses do Sol e da Lua, conjunções planetárias, distâncias e períodos astronômicos, medidas da Terra, construção de equipamentos de medida, contagem do tempo e diversas considerações sobre a cosmogonia hindu. A obra impressiona pela forma poética, um incentivo à memorização das sentenças. Destacamos a seguinte passagem do capítulo 12, em que se advoga que a Terra é redonda: "E em todo lugar sobre o globo terrestre, as pessoas pensam que sua própria posição é a mais elevada; mas se é um globo no éter, como pode haver um lado acima ou abaixo?".

Também impressiona a atenção dada aos números muito grandes e aos muito pequenos. Na divisão do tempo, as unidades vão do *truti*, que se pode estimar em 29,63 microssegundos, ao *maha kalpa*, ou $3{,}1101 \cdot 10^{14}$ anos (MONTGOMERY e KUMAR, 2016), mais de 10.000 vezes a idade do universo. Diversos resultados se mostram bastante precisos, comparados aos dados hoje disponíveis, como valores de seno, estimativas de π e medidas da Terra.

O segundo capítulo da obra é devotado à "verdadeira posição dos planetas" e é aqui que encontramos a noção inovadora de meias-cordas. Na tradução para o inglês (BURGESS, 1935), a meia-corda já aparece vertida para seno, mas não se trata, ainda, da função tal como a conhecemos. Trata-se do chamado R-seno, o produto do seno pelo raio da circunferência usada como referência. Vejamos que circunferência é essa.

Diferentemente de Ptolomeu, os indianos tomam a mesma unidade para cordas e arcos: minutos de grau. A circunferência tem 360º, portanto são 21 600 minutos. E deduzimos seu raio a partir do R-seno de 90º, 3 438 minutos – possivelmente o mesmo raio usado por Hiparco (DUKE, 2011). De posse desses valores, podemos estimar $\pi = \frac{21\,600}{2 \cdot 3\,438} \cong 3{,}14136$, uma excelente aproximação para o número irracional. Cabe apontar que, embora tenha usado os mesmos 3438 minutos para o *jya* de 90º, Aryabhata chegou a uma aproximação de π ainda mais impressionante em outra passagem de sua obra, $\frac{62\,832}{20\,000} = 3{,}1416$.

Figura 32 - Os valores de seno e cosseno do tratado indiano e as medidas "verdadeiras".

Table of Sines and Versed Sines.

No.	Arcs, in ° '	Arcs, in '	Hindu Sines, in '	Hindu Sines, Diff.	Hindu Sines, in parts of rad.	True Sines, in '	Versed Sines, in '
1	3° 45'	225'	225'	224'	.065445	224'.84	7'
2	7° 30'	450'	449'	222'	.130599	448'.72	29'
3	11° 15'	675'	671'	219'	.195172	670'.67	66'
4	15°	900'	890'	215'	.258871	889'.76	117'
5	18° 45'	1125'	1105'	210'	.321408	1105'.03	182'
6	22° 30'	1350'	1315'	205'	.382489	1315'.57+	261'
7	26° 15'	1575'	1520'	199'	.442117	1520'.48	354'
8	30°	1800'	1719'	191'	.500000	1718'.88	460'
9	33° 45'	2025'	1910'	183'	.555555	1909'.91	579'
10	37° 30'	2250'	2093'	174'	.608784	2092'.77	710'
11	41° 15'	2475'	2267'	164'	.659395	2266'.67	853'
12	45°	2700'	2431'	154'	.707097	2430'.86	1007'
13	48° 45'	2925'	2585'	143'	.751894	2584'.64	1171'
14	52° 30'	3150'	2728'	131'	.793484	2727'.35−	1345'
15	56° 15'	3375'	2859'	119'	.831588	2858'.38−	1528'
16	60°	3600'	2978'	106'	.866201	2977'.18−	1719'
17	63° 45'	3825'	3084'	93'	.897033	3083'.22−	1918'
18	67° 30'	4050'	3177'	79'	.924084	3176'.07−	2123'
19	71° 15'	4275'	3256'	65'	.947062	3255'.31−	2333'
20	75°	4500'	3321'	51'	.965969	3320'.61	2548'
21	78° 45'	4725'	3372'	37'	.980803	3371'.70	2767'
22	82° 30'	4950'	3409'	22'	.991565	3408'.34−	2989'
23	86° 15'	5175'	3431'	7'	.997964	3430'.39−	3213'
24	90°	5400'	3438'		1.000000	3437'.75	3438'

Fonte: Burgess, 1935, Internet Archive, University of Calcutta.

Reproduzimos acima (Figura 32) a tabela de valores de R-seno e R-verseno (antiga função caída em desuso, equivalente à diferença entre o raio e o cosseno) ditados na obra indiana e sistematizados por Burgess (1935). São resultados calculados para 24 arcos do primeiro quadrante, a intervalos de 3,75º (225 minutos), talvez o mesmo intervalo usado por Hiparco (DUKE, 2011).

O método dos indianos para calcular meias-cordas é dado por recorrência. De saída, considera-se que o primeiro R-seno, ou seja, o R-seno de 225 minutos, são os mesmos 225 minutos

– e de fato, o seno de um arco muito pequeno é aproximadamente o próprio arco. Para os próximos passos, deve-se somar 225 e subtrair os quocientes de cada arco já calculado por 225.

Podemos então, a exemplo do que faz González-Velasco (2011), definir certa função $jya\ (n)\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, tal que $jya\ (n)$ é o R-seno de um arco de $n \cdot 225$ minutos de grau, para uma circunferência de raio igual a 3438 minutos e $0 \leq n \leq 24$. Assim, $jya(1)$ é o R-seno de $3{,}75°$, $jya\ (2)$ é o R-seno de $7{,}5°$ e assim sucessivamente, até $jya\ (24)$, que é o R-seno de $90°$:

$$jya\ (1) = 225,$$

$$jya\ (2) = 225 + 225 - \frac{225}{225} = 449,$$

$$jya\ (3) = 449 + 225 - \frac{225}{225} - \frac{449}{225} \cong 671,$$

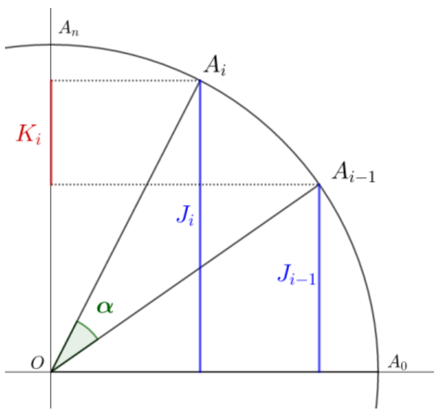
$$jya(4) = 671 + 225 - \frac{225}{225} - \frac{449}{225} - \frac{671}{225} \cong 890,$$

E de forma geral, para $n \geq 1$, com $jya(0) = 0$:

$$jya\ (n) = jya\ (n-1) + 225 - \frac{jya(1) + jya(2) + \cdots + jya(n-1)}{225}\ .$$

Vejamos agora como chegar à fórmula por recorrência a partir da interpretação de HAYASHI (1997), com base na obra de Aryabhata e nos comentários de Nilakantha, que viveu nos séculos XV e XVI. Considere a Figura 33.

Figura 33 - Quadrante OA_0A_n da circunferência Γ.



Fonte: do autor, com base em Hayashi (1997).

Seja Γ uma circunferência de raio R e seja OA_0A_n seu primeiro quadrante, dividido em n partes iguais, cada uma delas correspondendo a um ângulo central α. Seja J_i o R-seno do arco

$\widehat{A_0A_i}$, com $0 \leq i \leq n,$ de modo que $J_i = R \cdot sen\ (A_0A_i) = R \cdot sen\ (i \cdot \alpha)$. Seja K_i a diferença entre os senos de dois arcos consecutivos $\widehat{A_0A_{i-1}}$ e $\widehat{A_0A_i}$.

Tomando $J_0 = 0$, temos que:

$$K_1 = J_1 - J_0 = J_1\ ,$$

$$K_2 = J_2 - J_1\ ,$$

$$K_3 = J_3 - J_2\ ,$$

$$\ldots$$

E, de modo geral, temos que:

$$K_i = J_i - J_{i-1}\ . \tag{3}$$

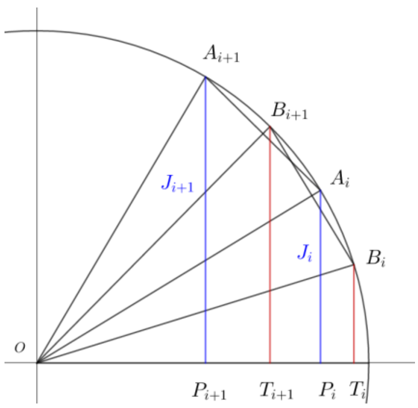
Somando todas os n valores de K, temos:

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = J_1 + (J_2 - J_1) + (J_3 - J_2) + \cdots + (J_n - J_{n-1}),$$

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = J_n\ . \tag{4}$$

Agora tomamos dois arcos consecutivos, $\widehat{A_0A_i}$ e $\widehat{A_0A_{i+1}}$. Sejam B_i e B_{i+1} os pontos médios de $\widehat{A_{i-1}A_i}$ e $\widehat{A_iA_{i+1}}$, respectivamente. E sejam P_i e T_i as projeções de A_i e B_i sobre o eixo horizontal, como na Figura 34. Então $\overline{A_iP_i} = J_i$ e $\overline{A_{i+1}P_{i+1}}\ = J_{i+1}$ são os R-senos de A_i e A_{1+1}.

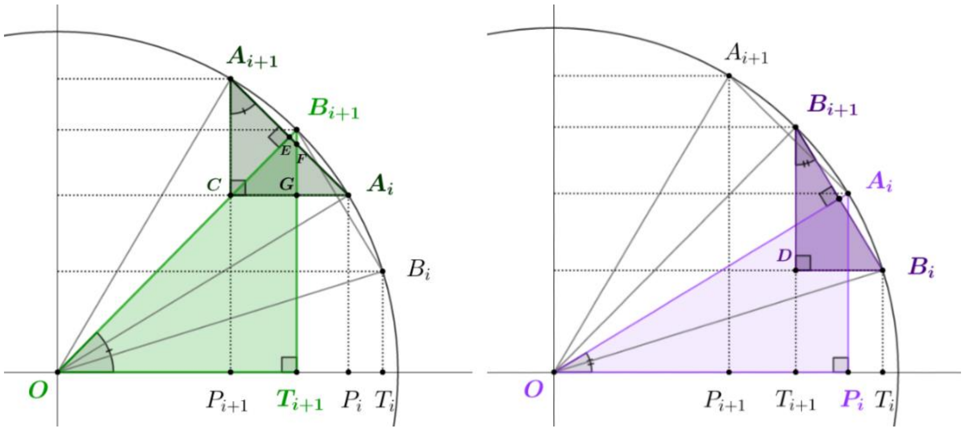
Figura 34 - Arcos e pontos médios.



Fonte: do autor, com base em Hayashi (1997).

Os segmentos $\overline{OB_{i+1}}$ e $\overline{A_iA_{i+1}}$ são perpendiculares, pois B_{i+1} é ponto médio do arco $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Portanto, são semelhantes os triângulos $OB_{i+1}T_{i+1} \sim FB_{i+1}E \sim \mathrm{FA_i}G \sim A_{i+1}A_iC$ (Figura 35, à esquerda). Analogamente, são semelhantes os triângulos $OA_iP_i \sim B_{i+1}B_iD$ (à direita).

Figura 35 - Semelhança de triângulos.



Fonte: do autor.

Daí, comparando os triângulos $OB_{i+1}T_{i+1} \sim A_{i+1}A_iC$, temos que:

$$\frac{\overline{OT_{i+1}}}{\overline{A_{i+1}C}} = \frac{\overline{OB_{i+1}}}{\overline{A_{i+1}A_i}} \Rightarrow \overline{A_{i+1}C} = \frac{\overline{OT_{i+1}} \cdot \overline{A_{i+1}A_i}}{\overline{OB_{i+1}}}\,. \tag{5}$$

Mas $\overline{A_{i+1}C} = K_{i+1}$ e $\overline{OB_{i+1}} = R$. Fazendo $\overline{A_{i+1}A_i} = a$, temos:

$$K_{i+1} = \overline{OT_{i+1}} \cdot \frac{a}{R}\,. \tag{6}$$

E comparando agora os triângulos $OA_iP_i \sim B_{i+1}B_iD$, temos:

$$\frac{\overline{A_iP_i}}{\overline{B_iD}} = \frac{\overline{A_iO}}{\overline{B_iB_{i+1}}} \Rightarrow \overline{B_iD} = \frac{\overline{A_iP_i} \cdot \overline{B_iB_{i+1}}}{\overline{A_iO}}\,. \tag{7}$$

Mas $\overline{B_iD} = \overline{T_iT_{i+1}}$, $\overline{A_iP_i} = J_i$, $\overline{A_iO} = R$ e $\overline{B_iB_{i+1}} = \overline{A_{i+1}A_i} = a$. Substituindo em (7), temos:

$$\overline{T_iT_{i+1}} = J_i \cdot \frac{a}{R}\,. \tag{8}$$

A partir da Equação (6), podemos afirmar que:

$$K_i - K_{i+1} = \overline{OT_i} \cdot \frac{a}{R} - \overline{OT_{i+1}} \cdot \frac{a}{R},$$

$$= \frac{a}{R} \cdot \left(\overline{OT_i} - \overline{OT_{i+1}}\right).$$

Mas $\overline{OT_i} - \overline{OT_{i+1}} = \overline{T_iT_{i+1}}$. E usando a Equação (8), podemos agora escrever:

$$K_i - K_{i+1} = \frac{a}{R} \cdot \overline{T_iT_{i+1}},$$

$$= \frac{a}{R} \cdot \left(J_i \cdot \frac{a}{R}\right),$$

$$= J_i \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^2 . \tag{9}$$

Em particular, para $i = 1$, temos que:

$$K_1 - K_2 = J_1 \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^2 . \tag{10}$$

Lembramos agora que $R = 3438$ minutos de grau e que os arcos em que dividimos a circunferência subtendem um ângulo central $\alpha = 225$ minutos de grau. Assumimos também a seguinte aproximação $J_1 \cong \alpha$. Então temos que $K_1 = J_1 = a = \alpha$. Substituindo em (10), temos:

$$225 - K_2 = 225 \cdot \left(\frac{225}{3438}\right)^2 ,$$

$$K_2 \cong 224 .$$

Essa aproximação para K_2 é bastante útil. Podemos voltar à Equação (10) e fazer:

$$\frac{K_1 - K_2}{J_1} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 ,$$

$$\frac{225 - 224}{225} = \frac{1}{225} = \left(\frac{a}{R}\right)^2 . \tag{11}$$

Usando agora as Equações (9) e (11), temos as seguintes igualdades:

$$K_1 - K_2 = \frac{J_1}{225} ,$$

$$K_2 - K_3 = \frac{J_2}{225} ,$$

$$K_3 - K_4 = \frac{J_3}{225} ,$$

$$\dots$$

E de modo geral:

$$K_{i-1} - K_i = \frac{J_{i-1}}{225} .$$

Somando todas as equações acima, temos:

$$(K_1 - K_2) + (K_2 - K_3) + \cdots + (K_{i-1} - K_i) = \frac{J_1}{225} + \frac{J_2}{225} + \cdots + \frac{J_{i-1}}{225},$$

$$K_1 - K_i = \frac{J_1}{225} + \frac{J_2}{225} + \cdots + \frac{J_{i-1}}{225}.$$

Usando $K_1 = 225$, obtemos:

$$K_i = 225 - \left(\frac{J_1}{225} + \frac{J_2}{225} + \cdots + \frac{J_{i-1}}{225}\right).$$

Lembrando agora a Equação (3), temos finalmente que:

$$K_i = 225 - \left(\frac{J_1}{225} + \frac{J_2}{225} + \cdots + \frac{J_{i-1}}{225}\right) = J_i - J_{i-1},$$

$$J_i = J_{i-1} + 225 - \left(\frac{J_1}{225} + \frac{J_2}{225} + \cdots + \frac{J_{i-1}}{225}\right).$$

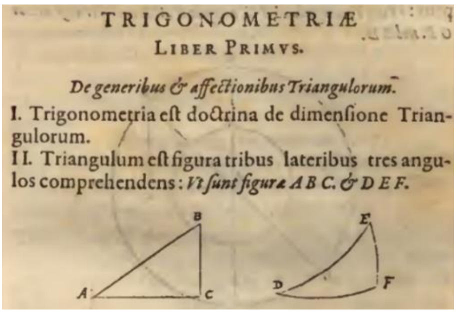
E assim chegamos, como queríamos, à receita indiana por recorrência.

A doutrina dos triângulos

Por ser o autor que cunha o termo trigonometria, vale conhecer o entendimento que Bartholomeo Pitiscus tem da "doutrina dos triângulos" e suas aplicações (Figura 25). Tomamos aqui como referência as edições da obra em latim (PITISCUS, 1600), e uma versão para o inglês, de data incerta (PITISCUS, 1642?).

O tratado de Pitiscus é dividido em uma primeira parte teórica, composta por cinco livros, e outra dedicada à resolução de problemas em diversos campos. De saída, observamos que, na tradição de Menelau de Alexandria (c. 70-130 d.C.), Pitiscus considera tanto os triângulos planos, limitado por segmentos de retas, como os triângulos esféricos, limitado por arcos de circunferência, o que é devidamente ilustrado (Figura 36):

Figura 36 - Triângulos planos e esféricos.


TRIGONOMETRIÆ
LIBER PRIMVS.
De generibus & affectionibus Triangulorum.
I. Trigonometria est doctrina de dimensione Triangulorum.
II. Triangulum est figura tribus lateribus tres angulos comprehendens: Vt sunt figuræ A B C. & D E F.

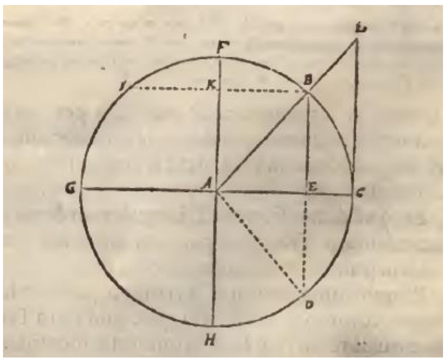
Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

Ao longo do primeiro livro, Pitiscus repassa diversas propriedades elementares da Geometria, com especial atenção ao teorema que considera o fundamento da Trigonometria: triângulos equiângulos, ou seja, de mesmos ângulos, têm lados proporcionais. Para esta e muitas outras demonstrações, Pitiscus cita frequentemente Euclides, entre outros matemáticos – mas não cita Pitágoras, vale notar, ao demonstrar que, no triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos demais lados.

A segunda seção da obra é dedicada de fato à "medição de triângulos", na acepção histórica da Trigonometria: dadas três medidas do triângulo, determine as demais. Para tanto, Pitiscus mostra a necessidade de obter senos, tangentes e secantes e compila uma tabela das três funções trigonométricas para cada minuto de grau de um quadrante – aprimorada depois para segundos ou dezenas de segundos. Tomando os ângulos complementares, encontram-se, como se sabe, os valores de cossenos, cotangentes e cossecantes. Ou seja, temos aqui as seis funções trigonométricas que são apresentadas ao aluno do Ensino Médio.

Pitiscus chama de "seno reto" de um arco a meia corda do duplo arco. Na Figura 37, $\widehat{BC}$ tem por arco duplo $\widehat{BD}$, cuja meia-corda é $\overline{BE}$. Então, $\overline{BE}$ é o seno reto de $\widehat{BC}$ (e do arco suplementar $\widehat{BG}$). Analogamente $\overline{BK}$ é o seno reto de $\widehat{BF}$ e de $\widehat{BH}$. Aqui se constata que ângulos que somam 180º têm os mesmos valores de seno reto. Definem-se em seguida: o seno do ângulo complementar – ou seja, o cosseno; o seno verso, a diferença entre o raio e o cosseno; além de tangente e secante, determinadas pelo encontro de duas linhas, CL e AL (Figura 37).

Figura 37 - Definições de seno, seno do arco complementar, tangente e secante.



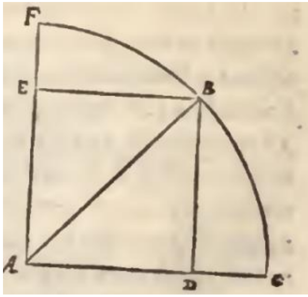
Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

Como no caso indiano, a tabela trigonométrica de Pitiscus também depende do raio da circunferência. À época, era costume tomar por raio um inteiro de muitos dígitos, de modo a chegar a resultados precisos e erro menor do que um. Foi o que fizeram, antes dele, o alemão Regiomontanus (1436-1476) e o austríaco Georg Joachim Rheticus (1514–1574), por exemplo.

Pitiscus produziu várias tabelas trigonométricas, começando com um raio de 10^5, passando por 10^7 e chegando a 10^{15}. Dividindo os resultados pela potência de dez condizente, obtêm-se os valores das funções trigonométricas tal como as conhecemos.

Pitiscus fala em senos primários e secundários. Primários são aqueles achados a partir de relações geométricas elementares. Secundários são os que se calculam a partir dos senos primários. O autor então repassa e demonstra, na forma de problemas, nove fórmulas para achar senos e cossenos das somas, diferenças, múltiplos e frações de arcos. Vejamos algumas delas.

Figura 38 - Senos de arcos complementares.



Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

A primeira fórmula trata tão somente do seno do arco complementar – ou seja, o cosseno. Dado o arco $\widehat{BC}$ e o complementar $\widehat{BF}$, temos que os respectivos senos são $\overline{BD}$ e $\overline{BE} = \overline{DA}$ (Figura 38). BD e DA são catetos do triângulo retângulo BDA, cuja hipotenusa BA é o raio R. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 = R^2$, e assim pode-se calcular $\overline{BE}$, dado $\overline{BD}$, ou vice-versa, ensina Pitiscus. Como o cosseno de um arco é o seno do arco complementar, temos aqui uma versão da relação trigonométrica fundamental:

$$(R \cdot sen\ \alpha)^2 + (R \cdot cos\alpha)^2 = R^2\ ,$$

$$R^2 \cdot (sen^2\alpha + cos^2\alpha) = R^2\ ,$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1\ .$$

A segunda fórmula que Pitiscus explora é a do seno do arco duplo. A regra que ensina é a seguinte: multiplique o seno do arco pelo seno do arco complementar, divida pelo raio, e o resultado é metade do seno do arco duplo. A correspondência com a fórmula $sen\ (2\alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ é quase imediata:

$$\frac{(R \cdot sen\ \alpha) \cdot (R \cdot \cos\alpha)}{R} = \frac{R \cdot sen(2\alpha)}{2}\ ,$$

$$2R^2 \cdot sen\ \alpha \cdot \cos\alpha = R^2 \cdot sen\ (2\alpha)\ ,$$

$$2 \cdot sen(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = sen\,(2\alpha)\,.$$

Tendo as nove fórmulas, Pitiscus pode começar sua tabela, bastando escolher o seno primário, a partir do qual encontrará os demais. Para tanto, vale-se do fato de que a corda definida por um arco de 60º tem a mesma medida do raio. Portanto, a meia-corda dá a medida do seno de metade de 60º. Assim, para uma circunferência de raio 100 000, R-seno de 30º é 50 000.

Além dos triângulos

Cinco anos após cunhar o termo trigonometria, Pitiscus relançou sua obra em edição revista e bastante ampliada. E o fez de modo a torná-la independente do tratado astronômico de que originalmente servira como apêndice, de autoria do alemão Abraham Scultetus (1566-1625). Na nova edição, a Astronomia, a Geografia, a Geodésia, a "Altimetria" e a "Gnomometria" são campos para a aplicação da "doutrina dos triângulos".

Essa reorganização é simbólica. De fato, ao longo do século XVII, a Trigonometria vai se acomodar como um ramo da Matemática, não uma mera ferramenta da Astronomia ou da navegação. Nos anos 1700, serão descobertas insuspeitas relações entre senos, cossenos e exponenciais. A Trigonometria será tragada para a "biblioteca de funções" (VAN BRUMMELEN, 2009) e, para além dos triângulos, se revelará um instrumento fundamental para a modelagem de fenômenos periódicos.

3.5.3 Tarefas

1 (Exercício). Por argumentos geométricos, vamos calcular valores de senos e cossenos de 30º, 45º e 60º.

a) dado um quadrado inscrito em uma circunferência de raio unitário, verifique que seu lado é a corda do arco de 90º. Calcule seu valor. Deduza o seno de 45º;
b) dado um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário, verifique que o lado do polígono é a corda do arco de 60º. Deduza senos, cossenos e tangentes de 30º e de 60º.

2 (Problema). Dado o triângulo ABC, com $\hat{A} = 36°$ e lados $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $\overline{BC} = x$.

a) a partir de B, trace a bissetriz BD e verifique que ABD e BDC são isósceles;
b) mostre que BDC e ABC são semelhantes e determine x;
c) dado um decágono regular inscrito em uma circunferência, verifique que o lado do polígono é a corda do arco de 36º. Usando o resultado obtido em (b), deduza o seno de 18º;

d) calcule o seno de 72º e de 36º.

3 (Investigação). Segundo a tabela de cordas de Ptolomeu, dada uma circunferência de diâmetro 120, a corda correspondente ao arco de 10º é 10 27 32 e a de 1º é 1 2 50.

a) converta 1 2 50 e 10 27 32 para a base decimal;

b) estime o valor de $\pi = \frac{C}{D}$, considerando que C é aproximadamente o perímetro de um polígono regular de 36 lados inscrito na circunferência;

c) estime o valor de $\pi = \frac{C}{D}$, considerando que C é aproximadamente o perímetro de um polígono regular de 360 lados inscrito na circunferência;

4 (Exercício). No tratado indiano "Surya Siddantha", uma possível divisão do tempo é a seguinte: um dia é composto de 60 "nadis"; um "nadi" é feito de 60 "vinadis"; 1 "vinadi" ou "prana" corresponde ao tempo de uma respiração, que por sua vez equivale ao tempo de proferir dez sílabas longas, ou "gurvaksharas" (SARMA, 1991).

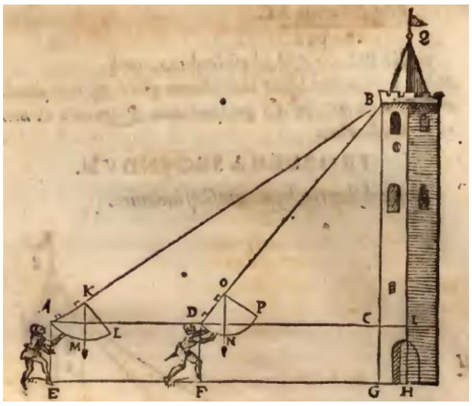
a) quantos segundos dura uma respiração?

b) quantos "nadis" tem uma hora?

c) há vantagem em dividir o dia em 60 "nadis" e cada "nadi" em 60 "vinadis"?

5 (Exercício). Observe a Figura 39, da obra do alemão Pitiscus. Sejam $\overline{EG} = 200$ pés e $B\hat{A}C = 29°40'$. Com AC e EG paralelos, determine a altura $\overline{BC}$ sabendo que o R-seno de $B\hat{A}C$ é 49 495 e o R-seno do arco complementar $A\hat{B}C$ é 86 892, para uma circunferência de raio 100 000.

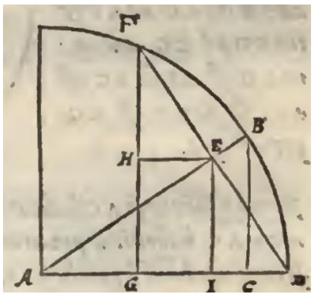
Figura 39 - Problema da obra de Pitiscus.



Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

6 (Exploração). Vamos demonstrar a fórmula $sen\,(2\alpha) = 2 \cdot \cos\alpha\, sen\alpha$, a partir da ilustração da obra de Pitiscus (Figura 40). Dados $\overline{BC}$, o seno do arco $\widehat{BD}$; $\overline{AC}$, o cosseno de $\widehat{BD}$; e o raio $\overline{AB}$; vamos achar $\overline{FG}$, que vem a ser o seno de $\widehat{FD}$, arco duplo de $\widehat{BD}$.

Figura 40 - Problema da obra de Pitiscus.



Fonte: Pitiscus (1600), Google Books, Biblioteca Pública de Lyon.

a) Seja E a interseção de FD e AB. Verifique que $A\hat{E}D$ é um ângulo reto.

b) Mostre que os triângulos AED e ACB são congruentes. Deduza que $\overline{AC} = \overline{AE}$.

c) Seja EI um segmento paralelo a BC. Mostre que os triângulos AEI e ABC são semelhantes. Deduza que $\overline{EI} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}$.

d) Mostre que $\overline{HG} = \overline{EI}$ é metade de $\overline{FG}$, o seno do arco duplo que buscamos encontrar. Deduza que $\overline{FG} = 2 \cdot \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}$. Tomando $\overline{AB} = 1$, conclua que $sen\ (2\alpha) = 2 \cdot \cos\alpha\ sen\alpha$.

e) Aplique a fórmula encontrada para resolver o seguinte exemplo de Pitiscus. Em uma circunferência de raio 10^7, o R-seno de 35º é 5 735 764 e o R-seno do arco complementar é 8 191 520. Calcule o seno de 70º.

3.6 A BORBOLETA E O TORNADO

3.6.1 Habilidade

> (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro (BRASIL, 2018b).

Examinamos aqui um caso emblemático da noção de incerteza, o chamado efeito borboleta, e a evolução do conceito de algarismos significativos ao longo dos séculos.

3.6.2 Relato

A utopia determinística

Considere o número 0,506127. E considere o seguinte arredondamento: 0,506. O erro relativo é de apenas $\frac{0{,}506127 - 0{,}506}{0{,}506127} \cong 0{,}000251$. Desprezível, certo? Depende. Ao usar o valor arredondado, inadvertidamente, o meteorologista americano Edward Lorenz (1917-2018) descobriu que, para certos sistemas, "estados iniciais ligeiramente diferentes podem evoluir até estados consideravelmente diferentes” (LORENZ, 1963a). A descoberta está na origem da teoria do caos e inspirou uma das metáforas mais populares da ciência: o efeito borboleta – que por pouco não se chamou efeito gaivota, como veremos.

Por muito tempo os cientistas cultivaram a ambição tão bem expressa por Pierre-Simon Laplace (1749-1827) de que uma inteligência vasta o bastante para analisar “todas as forças que animam a natureza” e “o estado dos seres que a compõem” pudesse pôr fim a toda incerteza, de modo a ter o futuro e o passado “presente a seus olhos” (LAPLACE, 1814). O sucesso de astrônomos na previsão de eclipses e passagens de cometas alimentava a utopia determinística. Essa noção começou a ser desafiada no século XIX, no campo da Astronomia, em particular com os estudos de Henri Poincaré (1854-1912) sobre o chamado problema dos três corpos. Nos anos 1960, no terreno da Meteorologia, Lorenz enterrou de vez a fantasia.

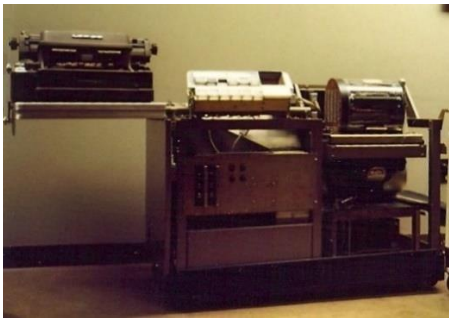
Até o início do século XX, a previsão do tempo mal tinha o status de ciência. Era antes considerada um jogo de adivinhação, uma aposta que técnicos treinados podiam intuir a partir da leitura de dados meteorológicos e da observação das nuvens (GLEICK, 2011).

Os poucos cientistas que buscavam modelar numericamente as condições climáticas partiam do pressuposto de que as variáveis de hoje são uma combinação linear das variáveis de ontem (MOTTER e CAMPBELL, 2013), restando calibrá-las por métodos estatísticos. Um exemplo de modelagem linear: a temperatura amanhã em Nova York será uma constante a, mais uma constante b multiplicada pela temperatura em Chicago hoje, mais uma constante c multiplicada pela umidade relativa em St. Louis etc.

O exemplo dado acima é do próprio Lorenz, em uma série de três palestras que viraram o livro “The Essence of Chaos” (LORENZ, 2005). Lorenz trabalhava no Massachusetts Institute of Technology (MIT) e buscava um modelo alternativo à abordagem estatística. Acreditava que a modelagem das condições climáticas exigia outro modelo teórico, em particular um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares, do tipo que descrevia dinâmica de fluidos. Chegou a uma solução baseada em 12 variáveis, como temperatura, pressão e velocidade do vento.

Para investigar em detalhe sua modelagem, e compará-la com a abordagem linear, Lorenz adotou em 1960 uma novidade ainda vista com desconfiança naqueles anos: um computador. Era um Royal-McBee LGP-30 (Figura 41), do tamanho de uma grande mesa, capaz de fazer uma multiplicação em 17 milissegundos – uma eternidade se comparado ao desempenho dos atuais computadores, que já se mede em 10^{12} operações por milissegundo.

Figura 41 - O Royal-McBee LGP-30, em exibição no Boston's Computer Museum.



Fonte: ArnoldReinhold, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LGP30.agr.jpg>.

O Royal-McBee LGP-30 conseguia simular a passagem de um dia inteiro a cada minuto. Ao imprimir os resultados, por economia, usava apenas três casas decimais. Certo dia, Lorenz decidiu repetir certos cálculos para examinar o que estava acontecendo em detalhe, conta. Ao reiniciar a rotina, reabasteceu o sistema com os resultados que o próprio computador havia acabado de imprimir, ou seja, os valores arredondados. Bateu 0,506, em vez de 0,506127, deixou a "máquina do tempo" trabalhar e foi tomar café.

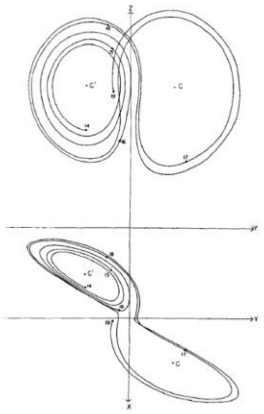
Ao voltar, a surpresa: a partir dos valores arredondados, o modelo computacional produzia previsões cada vez mais discrepantes. O cientista primeiro pensou tratar-se de uma falha do computador, o que não era incomum. Mas então encontrou um padrão para a discrepância. "A diferença dobrava a cada quatro dias, e no segundo mês já não havia qualquer semelhança com os resultados originais", lembra.

Em 1963, o meteorologista publicou dois importantes artigos a esse respeito. No primeiro deles, apresentou um modelo simplificado de convecção atmosférica feito de três equações diferenciais ordinárias e chamou a atenção para a instabilidade de sistemas não-periódicos ante pequenas modificações, uma primeira formulação do que hoje se conhece por dependência sensível das condições iniciais (LORENZ, 1963a). No outro artigo, divagou: "o bater de asas de uma gaivota pode alterar o curso do tempo para sempre" (LORENZ, 1963b).

Em 1972, por ocasião de uma palestra em Washington, a metáfora foi alterada. "Pode o bater de asas de uma borboleta no Brasil ensejar um tornado no Texas?", foi o título provocativo do encontro. Segundo o próprio Lorenz (2005), não foi ele quem escolheu a borboleta, no lugar da gaivota, mas o meteorologista encarregado da programação.

A escolha parece hoje ainda mais adequada porque a representação gráfica dos sistemas instáveis estudados por Lorenz insinua, de fato, o desenho das asas de uma borboleta (Figura 42). Seja como for, Lorenz organizou toda a palestra em torno dessa metáfora. Mas não respondeu a questão. Após divagar sobre os limites da previsão do tempo e da necessidade de ampliar a rede de coleta de dados, Lorenz propôs “deixar nossa pergunta sem resposta por alguns anos, enquanto afirmamos nossa crença de que a atmosfera seja instável” (LORENZ, 2015).

Figura 42 - O modelo de Lorenz.

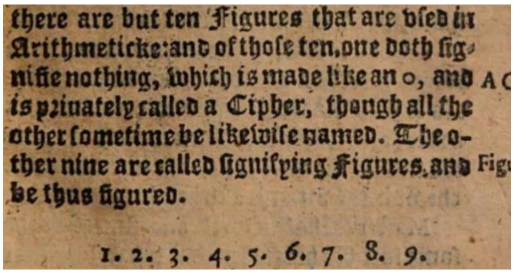


Fonte: Ilustração reproduzida de Lorenz (1963a), com permissão da American Meteorological Society.

A medida da dúvida

A incerteza e o erro são inerentes à toda mensuração, sejam os sistemas caóticos ou não. E a computação inadvertida das medidas pode artificialmente insinuar resultados mais precisos do que a tomada de valores autorizaria. Seria uma bobagem verter “Fahrenheit 451”, título do clássico de Ray Bradbury, para, digamos, “Celsius 232,778”, pois a medida original não tem tanta precisão. Dizemos que a medida da temperatura tem três algarismos significativos (4, 5 e 1), e sua conversão deve respeitá-los, de modo que 451 ºF se converte em 233 ºC.

Figura 43 - Algarismos significativos em “The Ground of Arts”.



there are but ten Figures that are vsed in
Arithmeticke: and of those ten, one doth sig-
nifie nothing, which is made like an o, and
is priuately called a Cipher, though all the
other sometime be likewise named. The o-
ther nine are called signifying Figures, and
be thus figured.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Fonte: Recorde (1618), Google Books, Alessandrina Library, Rome.

A expressão “algarismo significativo”, como tantas outras na História da Matemática, mudou de sentido ao longo dos séculos. Nos anos 1500 e 1600, era empregada por europeus para designar todos os dígitos diferentes de zero. Acha-se um exemplo antigo desta acepção em “The Ground of Arts” (Figura 43), do matemático galês Robert Recorde (1512–1558). Ao apresentar o sistema posicional baseado nos algarismos indo-arábicos, inovação trazida à Europa três séculos antes por Fibonacci (c.1170-1240), Recorde explica: “Há dez números (*figures*) usados na

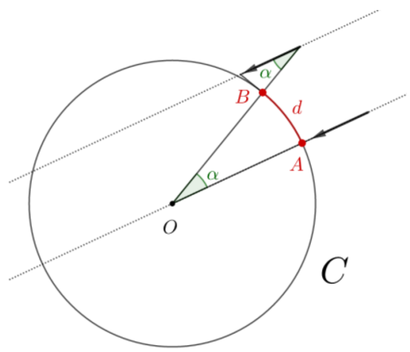
Aritmética: dos dez, um significa nada, é feito como um O e é particularmente chamado Cifra (do árabe *sifr*) [...] Os outros nove são chamados significativos (*signifying figures*)" (RECORDE, 1618).

Com o passar do tempo, a expressão acabou capturada pelo campo da Estatística, amarrada à teoria de erros. Uma definição precisa de algarismo significativo é ainda "problemática", considera Higham (2002), mas seu sentido pode ser facilmente intuído.

Significativo é o algarismo que tem maior probabilidade de estar correto, em relação aos demais algarismos (VUOLO, 1996). Por exemplo, vamos supor que, usando uma régua graduada em centímetros, se tome a medida de 12,8 centímetros. Os dígitos 1 e 2 estão muito provavelmente corretos, dado que o instrumento deve identificar com clareza os limites do intervalo [12,13]. São, portanto, algarismos significativos. Quanto ao 8, não temos tanta certeza, porque os milímetros não estão marcados. Ainda assim, 12,8 parece mais provável que, por exemplo, 12,1. Então, o dígito 8 também é significativo, mas é chamado duvidoso. Já uma medida de 12,8765, usando a mesma régua, seria um evidente disparate. Se o 8 já é duvidoso, os algarismos seguintes não têm qualquer significado: a probabilidade de que estejam corretos é a mesma de qualquer outro dígito.

Como regra geral, admitem-se estimativas até décimos da menor divisão da escala do instrumento. Assim, os algarismos significativos expressam a própria incerteza do processo de mensuração. As armadilhas aparecem quando não se tem a indicação explícita da incerteza. Tomemos o exemplo histórico da medida da Terra atribuída a Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), que chefiou a Biblioteca de Alexandria e gozou da reputação de grande erudito.

Figura 44 - A estratégia de Eratóstenes.



Fonte: do autor.

A estratégia de Eratóstenes é notória pela simplicidade (BURTON, 2011; DUTKA, 1993). Sejam duas cidades sobre o mesmo meridiano, A e B (no caso histórico, Siena, atual Assuã, e Alexandria, no Egito), como na Figura 44. Quando o Sol estiver a pino em uma delas (Siena), mede-se a inclinação dos raios na outra (Alexandria). Aceitando que os raios solares sejam paralelos, a medida da inclinação corresponde ao ângulo central α que subtende o arco da circunferência que liga as cidades. Conhecida a distância d entre elas, calcula-se sem dificuldade o comprimento da circunferência C de uma Terra perfeitamente esférica:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{d}{C} .$$

Tomando a distância entre as cidades por 5000 estádios e o ângulo medido em Alexandria de $1/50$ da circunferência, Eratóstenes chegou ao valor de 250 000 estádios. Mas o que significam esses 250 000 estádios? A unidade estádio corresponde ao comprimento de uma pista de corrida. Na prática, havia diferentes estádios, variando de 150 a pouco mais que 200 metros. É possível que Eratóstenes tenha se valido do padrão egípcio, equivalente a cerca de 157,5 metros. Então, 250 000 estádios são 39 375 quilômetros.

É certo, contudo, que essa conversão embute uma precisão artificial. É consenso entre historiadores que a distância entre as cidades é um arredondamento (DUTKA, 1993). Uma pista histórica: Eratóstenes, não se sabe bem por quê, decidiu aumentar o resultado em 2 000 estádios, chegando a 252 000 (BURTON, 2011) estádios. É razoável supor que sejam, então, apenas três os algarismos significativos: a centena de milhar, a dezena de milhar e o milhar, sendo esta última a posição do algarismo duvidoso. Refazendo as contas, chegamos a uma circunferência de 39 690 km, o que podemos expressar, com três algarismos significativos, como 39,7 mil quilômetros. O resultado subestima em cerca de apenas 0,4 mil quilômetros a circunferência da Terra.

Ferramentas para a sala de aula

Um tratamento rigoroso do erro e da incerteza está possivelmente além do programa do Ensino Médio. Mas o aluno não deve ser privado da noção de que "toda medida é uma aproximação", como escreve Boyer (1939), em um dos vários artigos da primeira metade do século XX que buscam sistematizar regras da "computação aproximada" próprias para a sala de aula. Vejamos como o autor distingue os algarismos significativos dos não-significativos:

a) todo dígito diferente de zero é significativo;
b) zeros entre dígitos diferentes de zero são sempre significativos;
c) zeros à direita do último dígito diferente de zero podem ser significativos.

Tomemos um exemplo do livro para ilustrar a aparente vacuidade da terceira afirmação. Seja 520 a medida. Os dígitos significativos podem ser três, se a dúvida recai sobre a unidade; ou dois, se recai sobre a dezena. Para superar a ambiguidade, é necessário um esforço de notação. Boyer sugere que se escreva 520, no primeiro caso, e 52o no segundo, seguindo proposta feita por Bakst (1937, *apud* BOYER, 1939). Há também as alternativas: 52\0 ou 52-0. Como se sabe, também se pode superar a ambiguidade por meio da notação científica, escrevendo $5{,}2$ ou $5{,}20 \cdot 10^2$, a depender do caso. É curioso notar que a opção pela notação científica, hoje tão natural, seja apenas uma nota de rodapé no artigo de 1939.

Conhecidos os algarismos significativos, resta saber como operá-los no cálculo de medidas indiretas – ou seja, no cálculo feito a partir de medidas diretas. Boyer (1939) sugere regras para cada operação, oferecendo uma série de exercícios para cada uma. São regras simples, como esta, para a multiplicação: o produto não pode ter mais algarismos significativos que qualquer uma das medidas. Assim, $24{,}66 \cdot 79{,}73 = 1966{,}1418$, mas como os fatores têm quatro dígitos significativos, deve-se tomar por resultado simplesmente 1966.

É interessante verificar que a regra se ajusta bem à noção de que números são significativos se têm maior probabilidade de estarem corretos que quaisquer outros dígitos na mesma posição. Para tanto, vamos aceitar, como sugere Boyer, que 24,66 aproxime um valor verdadeiro entre 24,655 e 24,665 e 79,73 aproxime algo entre 79,725 e 79,735. O menor produto que se pode obter é $24{,}655 \cdot 79{,}725 = 1965{,}619875$, e o maior, $24{,}665 \cdot 79{,}735 = 1966{,}663775$. Observe que a disparidade aparece no algarismo da unidade, o que recomenda tomá-lo como duvidoso e dispensar todos os seguintes. Sendo o resultado provavelmente maior que 1965 e menor que 1967, ficamos com 1966, chegando ao mesmo resultado obtido pela regra descrita no parágrafo anterior.

3.6.3 Tarefas

1 (Exploração). A Figura 44 representa a estratégia de Eratóstenes para o cálculo da circunferência da Terra. As setas indicam raios solares paralelos. A e B representam duas cidades sobre o mesmo meridiano, ou seja, sobre uma circunferência máxima da esfera terrestre.

a) verifique que o ângulo central α é o mesmo da inclinação dos raios na cidade B.
b) calcule a circunferência e o raio da Terra, considerando que: a distância d entre as cidades A e B seja de 5 000 estádios, antiga unidade de comprimento; e que, com o sol a pino em A, a inclinação dos raios solares em B seja de $7{,}2$ º;
c) converta o resultado para metros, usando 1 estádio = 157,5 metros. Pesquise a medida da circunferência da Terra e compare os resultados.

2 (Exercício). As questões a seguir foram adaptadas de Boyer (1939). Para resolvê-las, siga esta regra para multiplicar e dividir valores aproximados: o produto e o quociente de números aproximados não podem ter mais algarismos significativos que qualquer uma das medidas envolvidas no cálculo.

a) calcule o produto $a \cdot b$, com $a = 23{,}34$ e $b = 66{,}92$;

b) divida $178{,}63$ por $4{,}18$;

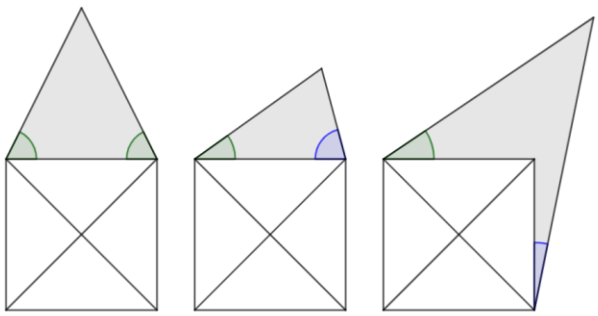
c) determine o diâmetro de uma circunferência que mede $25{,}8$ centímetros.

3 (Exercício). Um campo retangular tem lados de aproximadamente 23,4 e 18,3 varas. Considere uma incerteza de 0,05 vara na tomada de medidas. Calcule a maior e a menor área possível e compare o resultado com o valor obtido por meio da regra da multiplicação de medidas, abordado no exercício anterior.

4 (Exploração). Considere a soma das medidas $1234 + 5{,}6$. Faz sentido usar nesta operação a mesma regra dos exercícios anteriores para determinar os algarismos significativos do resultado? Discuta uma regra para a soma e subtração de medidas. Considere que significativo é o algarismo que "tem maior probabilidade de ser correto, em relação aos demais" (VUOLO, 1996).

5 (Investigação). Diversos autores da Antiguidade contam que o matemático e filósofo Tales de Mileto (c. 624-547 a.C.) mediu a altura da Grande Pirâmide de Gizé, no Egito, pela comparação de sua sombra com a de um objeto de dimensão conhecida, a um mesmo horário do dia. Diógenes Laerte e Plutarco são algumas das fontes dessa história. Para tanto, é preciso resolver um problema de ordem prática (REDLIN, VIET e WATSON, 2000): o corpo da pirâmide impede que Tales meça diretamente o tamanho da sombra, desde o centro da pirâmide. Considere três esquemas de uma pirâmide vista do alto (Figura 45), e discuta estratégias para determinar a altura dela em cada caso. Considere uma pirâmide reta de base quadrada, de lado l.

Figura 45 - Três vistas aéreas de uma pirâmide de base quadrada, com a sombra projetada.



Fonte: do autor.

3.7 A LINHA E O NÚMERO

3.7.1 Habilidade

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (BRASIL, 2018b).

Discutimos aqui a obra do francês René Descartes (1596-1650) e de seu conterrâneo, tantas vezes tratado como precursor, Nicole Oresme (c.1320-1382). Em particular quanto a Descartes, registramos que a presente pesquisa ensejou o artigo "Escolhendo 'isso e aquilo' com Descartes: tarefas matemáticas" (JELIN e VENEZUELA, em revisão), em que são propostas tarefas matemáticas, na acepção de Ponte (2014), com base na leitura de "A Geometria".

3.7.2 Relato

Equívoco precursor

Por suas sentenças definitivas, a Matemática pode parecer atemporal (HODGKIN, 2005). De fato, não se supõe que as relações entre os lados de um triângulo retângulo possam variar conforme o século. Segundo Albert Einstein (1879-1955), uma equação é para a eternidade.

Mas a verdade é que toda sentença matemática é formulada em certos termos, em certo lugar, sob certas circunstâncias. Embora seja tentador buscar nas grandes obras do passado os pilares do edifício matemático tal como hoje o conhecemos, não é recomendável ignorar o contexto em que foram produzidas. Mesmo a frase atribuída a Einstein, que acabamos de citar, pode ser melhor compreendida em seu devido contexto: uma conversa informal com seu assistente, o matemático Ernst Straus, sobre o comitê que havia criado em 1946 para reunir cientistas contrários ao desenvolvimento de armas nucleares: "Sim, você precisa dividir seu tempo entre a política e as nossas equações. Mas nossas equações são muito mais importantes para mim, porque a política é para o presente, e uma equação é algo para a eternidade" (SEELIG, 1986).

A abordagem contextualista da História da Matemática se contrapõe à vertente presentista, pela qual os feitos do passado são interpretados, legitimados ou deslegitimados segundo valores presentes. Em suas origens, a História da Matemática – e da ciência, de modo geral – era essencialmente presentista. Hoje em dia, a reputação do presentismo é "quase sempre ruim" (HODGKIN, 2005), embora ainda muito difundida. Um reflexo do presentismo é a constante busca por heróis na História da Matemática e certa fixação pelo estabelecimento de linhas de transmissão entre as mais diversas contribuições, havendo ou não evidências para tanto.

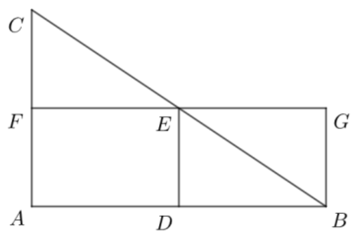
Para ilustrar os abusos da abordagem presentista, tomemos o caso do filósofo francês Nicole Oresme (1323-1382). Já se creditaram a ele as seguintes glórias: a descoberta da Lei de Gresham, antes de Thomas Gresham (1519-1579); da Lei da Queda dos Corpos, antes de Galileu Galileu (1564-1642); da Geometria Analítica, antes de René Descartes (1596-1650); da rotação da Terra, antes de Nicolau Copérnico (1473-1543). É o pensador medieval que mais comumente se toma como precursor (CLAGETT, 1964). Sem negar o brilho de Oresme, vejamos o que há de equivocado nesta abordagem, em particular quanto à Geometria Analítica.

No início do século XIV, pensadores do Merton College, de Oxford, buscaram na Matemática um novo enfoque para a Filosofia Natural, em particular no campo da Física. Eram os *Oxford calculators*, entre os quais se destacava Thomas Bradwardine (1300-1349). A influência deste grupo alcançou outras escolas, como a de Paris, da qual Oresme foi um dos expoentes.

Oresme deu um passo além, e um passo original, ao aplicar à filosofia natural as armas da Geometria. Em "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum", ele propõe usar figuras geométricas e a noção de proporcionalidade para representar e interpretar variações daquilo que, na tradição de Aristóteles, eram chamadas qualidades: calor, velocidade, brancura, intensidade de um odor, entre outros atributos. A esses proto-gráficos (BENIGER e ROBYN, 1978), Oresme chamava "figurações", e por meio deles acreditava poder demonstrar que fenômenos naturais prescindem de causas sobrenaturais (DI LISCIA, 2017; MALBOUISSON, 2011).

Em seu tratado, Oresme explica como uma forma geométrica pode ilustrar o aumento ou a diminuição de certa qualidade. Para tanto, basta representar a "intensidade" ou "grau" da qualidade na vertical (que ele chama latitude), e a "extensão" da qualidade na horizontal (a longitude). Por exemplo, o triângulo ABC da Figura 46 pode ilustrar a atenuação contínua de certa qualidade até zero, enquanto o retângulo $ABGF$ ilustra certa "qualidade uniforme", cuja intensidade corresponde ao "grau médio" da "qualidade uniformemente disforme". Valendo-se de argumentos geométricos, Oresme mostra que a "quantidade de qualidade" das duas figurações é a mesma, pois as áreas de ABC e $ABGF$ são iguais. Eis a demonstração de um teorema originalmente proposto pelos *Oxford calculators*, no século XIV, o Teorema do Grau Médio, também chamado Teorema mertoniano da Velocidade Média.

Figura 46 - Figuração de Oresme.



Fonte: do autor, baseado em Di Liscia, 2017.

O abismo dos séculos

A correspondência das anotações de Oresme com o que hoje conhecemos por movimento uniformemente variado parece imediata: representamos a velocidade no eixo vertical, o tempo no eixo horizontal, e a área sob a curva vale pela distância percorrida – a "quantidade da qualidade" velocidade, para certa "extensão" de tempo. Se a variação da velocidade é constante, seu gráfico é uma reta, e a distância coberta é a mesma de um objeto a uma velocidade fixa igual à média das velocidades inicial e final do corpo em aceleração.

Porque é possível traduzir facilmente em termos modernos as figurações de Oresme, a matemática tradicional enxergou nesta obra antecedentes do plano cartesiano. Duhem (1913), por exemplo, considera Oresme nada menos que o inventor da Geometria Analítica. Para Molland (1969), essa afirmação é ridícula. De fato, há um abismo que os separa. Como alerta Roque (2012), "apesar de Oresme usar duas linhas para representar grandezas envolvidas no movimento, não havia nenhuma menção à sua interpretação algébrica, o que caracteriza a representação cartesiana". Além disso, não há evidência qualquer que ligue as figurações de Oresme à obra de Descartes (HODGKIN, 2005), também francês.

Descartes publicou "A Geometria" quase três séculos depois de Oresme, em 1637, como um dos três apêndices do "Discurso sobre o método". Os apêndices serviam como demonstrações de seu sistema filosófico. A edição causou profundo impacto. É no "Discurso" que achamos uma das frases mais célebres da história do pensamento: "Je pense, donc je suis", "Penso, logo existo".

"A Geometria" é composta de três livros. Não se pode dizer que seja uma leitura fácil. Mas tem um certo tom familiar, se comparada a tratados mais antigos. É ali que é feita pela primeira vez a escolha de letras minúsculas para representar coeficientes e incógnitas, reservando as últimas letras do alfabeto para estas e as primeiras para aquelas. É ali também que se propõe usar números sobrescritos para indicar expoentes – embora o próprio autor alterne notações, variando entre as formas x^2 e xx. Além disso, a obra foi escrita em francês, não em latim, como era de costume, uma escolha deliberada e bem-sucedida para levar a um público mais vasto seu "método".

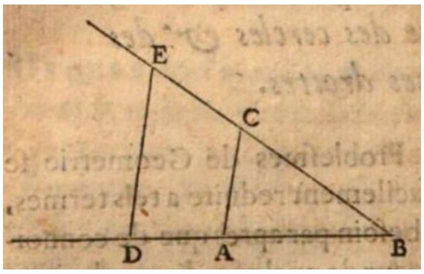
Contudo, não se acha ali a representação do plano cartesiano tal como o conhecemos – ou seja, o plano organizado por dois eixos orientados, perpendiculares, de abscissas (x) e ordenadas (y), definindo quatro quadrantes. Também não se acham as expressões "eixos" e "coordenadas", tão associadas à descrição do plano cartesiano. Vejamos então o que se encontra em "A Geometria", tomando por base: a tradução para o inglês de David Eugene Smith e Marcia L. Latham (DESCARTES, 1997); e a versão para o português do primeiro livro (RAMOS, 2009).

A curva e a equação

O primeiro livro de "A Geometria" é dedicado aos "problemas que se pode construir sem se empregar senão círculos e linhas retas". Começa com a seguinte constatação: "Todos os problemas de Geometria podem facilmente ser reduzidos a termos tais que é desnecessário conhecer previamente mais do que o comprimento de algumas linhas retas" (RAMOS, 2009). Seu objetivo não é exatamente reduzir a Geometria à Álgebra, mas fazer corresponder uma construção geométrica a certa expressão algébrica, convertendo proporções em equações. É uma abordagem de mão dupla, observam Boyer e Merzbach (2011), que liberta a Geometria do uso de diagramas e ao mesmo tempo dá sentido às operações algébricas por meio da interpretação geométrica.

Tomemos o primeiro caso do livro como exemplo (Figura 47). Descartes quer mostrar como obter o produto $\overline{BD} \cdot \overline{BC}$. Para tanto, toma $\overline{AB}$ como unidade, liga A a C e traça DE, paralelo a AC. A chave aqui está em escolher $\overline{AB}$ como uma unidade arbitrária, de modo a torná-lo "o mais próximo possível de números", escreve Descartes. Assim, a proporção geométrica $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$ resulta na equação $\overline{BE} = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$. Por esse raciocínio, o produto dos segmentos BD e BC é uma medida, um número, não um retângulo.

Figura 47 - O produto de BD por BC, um exemplo de "A Geometria".



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

Descartes é explícito quanto ao tratamento algébrico, avisando que a^2, b^3 e outras potências devem ser entendidas como simples linhas, ainda que as chame quadrados e cubos. "Tal método era absolutamente inovador na geometria, pois permitia ultrapassar a homogeneidade das grandezas e operar com elas como se fossem números, o que implica uma mistura entre gêneros tidos tradicionalmente como distintos: a aritmética e a geometria", explica Roque (2012).

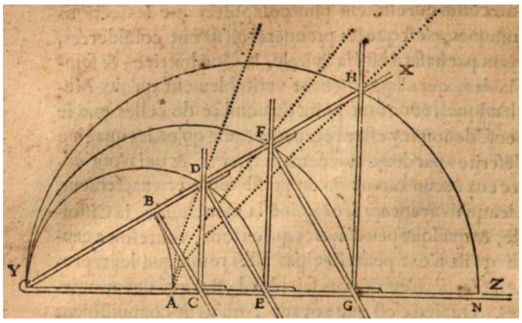
A estratégia para resolução de problemas é sintetizada por Descartes mais adiante: suponha o problema resolvido, dando nomes às "linhas que parecem necessárias" à construção geométrica, sejam as medidas conhecidas ou não; encontre as relações entre as linhas, até que seja possível expressar uma mesma quantidade de dois modos; resolva então as equações.

Um exemplo importante deste método aparece ao final da primeira parte de "A Geometria". É o problema das três ou quatro linhas de Pappus. Segundo Boyer e Merzbach (2011), ao resolvê-lo e generalizá-lo para mais linhas, Descartes teria compreendido o alcance de sua abordagem, o que teria motivado a elaboração de "A Geometria". Não é um problema trivial, contudo. Para conhecer o método cartesiano, propomos investigar outras passagens da obra, que nos parece ao alcance do aluno de Ensino Médio, especialmente se pudermos contar com softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra.

"Escolho isso e aquilo"

Ao discutir a "natureza das linhas curvas", no segundo livro, Descartes mostra como produzir curvas complexas a partir da simples proporção entre segmentos. Observe a Figura 48.

Figura 48 - O "instrumento" XYZ, de Descartes.



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

Feito de réguas perpendiculares, o "instrumento" XYZ determina a posição dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H conforme o ângulo $X\hat{Y}Z$ varia. Os segmentos BC, DE e FG são paralelos entre si e perpendiculares a YX. Os segmentos CD, EF e GH são paralelos entre si e perpendiculares a YZ. Assim é possível estabelecer relações de proporcionalidade entre as medidas dos diversos triângulos retângulos formados.

Com esse instrumento, Descartes pretende construir as curvas pontilhadas da figura, uma "mais complexa" que a outra, e todas "mais complexas" que o círculo, diz. No entanto, a descrição dessas curvas pode ser tão claramente concebida quanto a do círculo, acredita o francês. Vejamos que curvas são essas e como obter as equações correspondentes – o que não é dado explicitamente na obra. Tomemos $\overline{YA} = \overline{YB} = 1$ como unidade, $\overline{YC} = x > 1$, $\overline{CD} = y > 0$. Então, por semelhança dos triângulos YCB e YDC, temos que:

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YC}} \Rightarrow \frac{x}{\overline{YD}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \overline{YD} = x^2 .$$

Mas, por Pitágoras:

$$\overline{YD}^2 = \overline{YC}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{YD}^2 = x^2 + y^2 .$$

Substituindo $\overline{YD}$, temos:

$$(x^2)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^4 - x^2}\,.$$

Lembrando que $x > 1$ e $y > 0$, descartamos a solução negativa e eis a expressão que descreve a curva percorrida pelo ponto D, quando se faz o ponto C variar em função do ângulo $X\hat{Y}Z$:

$$y = \sqrt{x^4 - x^2} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

Vejamos como obter a curva seguinte, percorrida por F. Fazemos: $\overline{YA} = \overline{YB} = 1, \overline{YC} = a > 1, \overline{YE} = x > a, \overline{EF} = y > 0$. Então, por semelhança dos triângulos YED e YFE, temos:

$$\frac{\overline{YE}}{\overline{YF}} = \frac{\overline{YD}}{\overline{YE}} \Rightarrow \frac{x}{\overline{YF}} = \frac{\overline{YD}}{x} \Rightarrow \overline{YF} = \frac{x^2}{\overline{YD}}\,. \tag{12}$$

Além disso, por semelhança dos triângulos YCB e YDC, pode-se afirmar que:

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YC}} \Rightarrow \frac{a}{\overline{YD}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \overline{YD} = a^2. \tag{13}$$

E da semelhança de YED e YCB, temos:

$$\frac{\overline{YE}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{YD}}{\overline{YB}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\overline{YD}}{1} \Rightarrow \frac{x}{\overline{YD}} = a\,. \tag{14}$$

Comparando as Equações (13) e (14), de modo a eliminar a, obtemos:

$$\left(\frac{x}{\overline{YD}}\right)^2 = a^2 = \overline{YD} \Rightarrow x^2 = \overline{YD}^3 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = \overline{YD}\,. \tag{15}$$

Por Pitágoras, temos também que:

$$\overline{YF}^2 = \overline{YE}^2 + \overline{EF}^2 \Rightarrow \overline{YF}^2 = x^2 + y^2\,. \tag{16}$$

Substituindo $\overline{YF}$ na Equação (16), conforme Equação (12):

$$\left(\frac{x^2}{\overline{YD}}\right)^2 = x^2 + y^2\,.$$

E substituindo $\overline{YD}$, conforme a Equação (15):

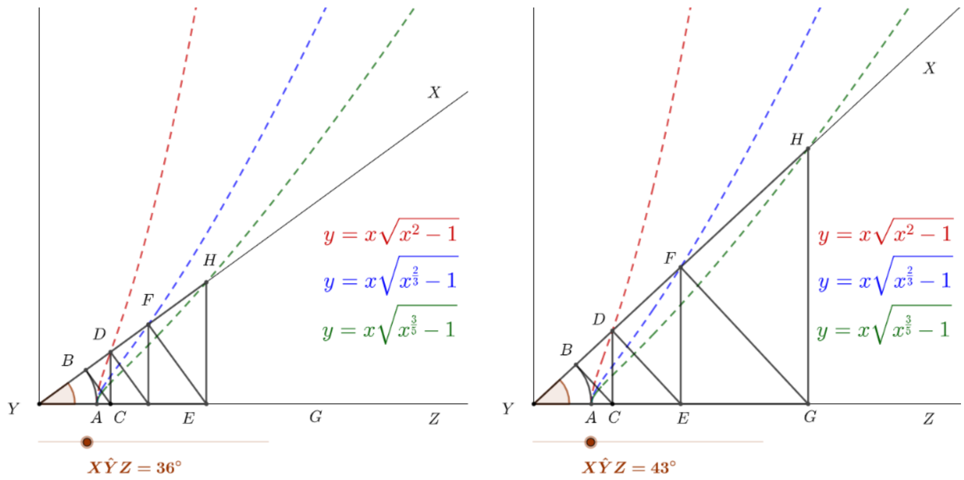
$$\left(\frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^{\frac{8}{3}} = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^{\frac{8}{3}} - x^2}\,.$$

Com $y > 0$ e $x > a > 1$, eis a curva “complexa” descrita pelo ponto F, conforme G varia em função do “instrumento” XYZ:

$$y = \sqrt{x^{\frac{8}{3}} - x^2} = x\sqrt{x^{\frac{2}{3}} - 1}.$$

Processo análogo para descrever o ponto H nos leva a $y = x\sqrt{x^{\frac{2}{5}} - 1}$, o que sugere um padrão para essa família de curvas. Podemos traçá-las, com auxílio do GeoGebra (Figura 49), aproveitando o fato de que a variável x tem de fato o papel de abscissa, e y, o de ordenada:

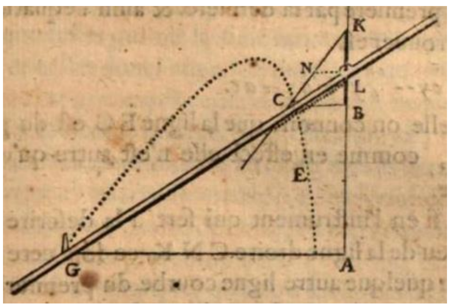
Figura 49 - Família de “curvas complexas”.



Fonte: do autor.

É na descrição deste instrumento que Descartes faz uma observação fundamental sobre sua abordagem analítica: todos os pontos de uma dada curva “geométrica” têm uma relação bem definida com pontos de uma linha reta, e essa relação pode ser dada por uma equação. O exemplo seguinte serve de ilustração (Figura 50). Descartes vai mostrar como obter a equação da curva percorrida pelo ponto C, dado pela interseção das retas $\overleftrightarrow{GL}$ e $\overleftrightarrow{KN}$, com GA, CB e NL paralelos.

Figura 50 - Descartes: “Somos livres para escolher”.



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

Já fazendo uso da notação para coeficientes e variáveis, usando as primeiras e as últimas letras do alfabeto, o francês nomeia $\overline{AG} = a, \overline{KL} = b, \overline{NL} = c$ e escolhe $\overline{AB} = x, \overline{CB} = y$ como "quantidades desconhecidas e indeterminadas". "Eu digo 'escolho isso e aquilo' porque somos livres para escolher o que queremos [...], não importa que linha eu escolha [...] a curva sempre se provará de mesma classe, fato facilmente demonstrável", escreve.

Então o francês chama atenção para a seguinte proporcionalidade (que se verifica, acrescentamos, a partir da semelhança dos triângulos NLK e CBK):

$$\frac{\overline{NL}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{LK}}{\overline{BK}} \Rightarrow \frac{c}{y} = \frac{b}{\overline{BK}} \Rightarrow \overline{BK} = \frac{yb}{c} \,. \tag{17}$$

Substituindo $\overline{BK} = b + \overline{BL}$ na Equação (17), temos:

$$b + \overline{BL} = \frac{yb}{c} \Rightarrow \overline{BL} = \frac{yb - bc}{c} \,. \tag{18}$$

Dada a semelhança dos triângulos CBL e GAL, vale também o seguinte:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{AL}} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{\overline{BL}}{\overline{AL}} \,. \tag{19}$$

Substituindo $\overline{AL} = x + \overline{BL}$ na Equação (19) e usando a Equação (18), obtemos:

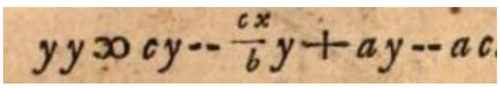
$$\frac{y}{a} = \frac{\frac{yb - bc}{c}}{x + \frac{yb - bc}{c}} \,,$$

$$yxc + y^2 b - ybc = ayb - abc \,,$$

$$y^2 = ay - ac + yc - \frac{ycx}{b} \,.$$

Para essa escrita, Descartes usa yy para y^2 e o sinal invertido de proporcionalidade ($\propto$) para representar a igualdade (Figura 51), sem dar maiores explicações. Esse sinal foi o grande rival do símbolo =, proposto no século anterior por Robert Recorde (CAJORI, 1923).

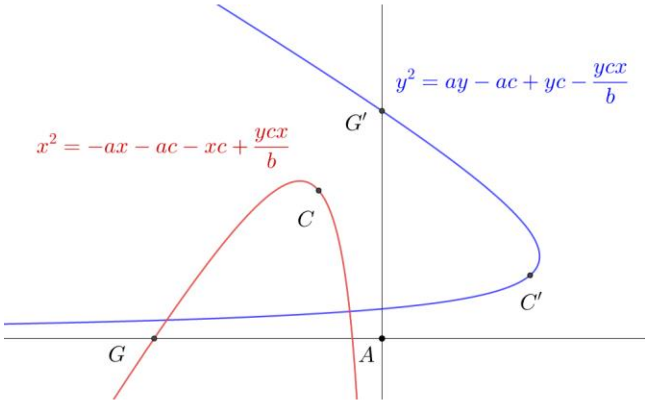
Figura 51 - Uma equação cartesiana.



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

A aplicação imediata dessa expressão no sistema de coordenadas hoje chamado cartesiano gera a mesma curva, mas não a mesma representação gráfica. É que no traçado de Descartes, o y faz o papel de abscissa, e o x, de ordenada. Além disso, o eixo horizontal está orientado à esquerda, não à direita. Mas basta trocar x por y na equação e inverter os sinais das abscissas para obter a representação equivalente à de Descartes, como na Figura 52.

Figura 52 - Aplicação da equação de Descartes ao plano cartesiano tal como hoje o conhecemos. Em azul, a reprodução literal da fórmula. Em vermelho, a curva obtida pela troca de coordenadas.



Fonte: do autor.

“A Geometria” é uma obra relativamente curta, pouco mais de 100 páginas. Descartes explica que não pretende se aprofundar nos “detalhes” - corroborando sua fama de preguiçoso. Diz que não quer privar o leitor do prazer de aprender por si mesmo. A omissão de muitos “detalhes” fez de “A Geometria” um tratado desafiador e até obscuro aos olhos de seus contemporâneos (BOYER e MERZBACH, 2011). É ainda hoje uma leitura exigente. Se a abordagem cartesiana triunfou, foi por obra de seus comentaristas, em particular Frans van Schooten (1615-1660) (STRUIK, 1963). O matemático holandês reeditou Descartes, destrinchando os “detalhes”, com a colaboração de um time estrelado: Johan de Witt (1625-1672), Johann Hudde (1628-1704) e Hendrick van Heuraet (1633-1660). Foi esta edição que chegou às mãos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a quem caberia dar os próximos passos na Matemática, com o desenvolvimento do Cálculo – e, quanto a Leibniz, estabelecer também o uso dos termos “coordenadas” e “eixos” (MOORMAN, 1944).

3.7.3 Tarefas

1 (Exercício). Considere a Figura 46, que representa uma “figuração” da obra do filósofo francês Nicole Oresme (c. 1320-1382). O triângulo ABC representa a atenuação de um certo atributo, desde a “intensidade” $\overline{AC}$ até a “intensidade” zero, representada pelo ponto B. Concretamente, o esquema poderia representar um corpo que desacelera uniformemente da

velocidade $\overline{AC}$ até a velocidade 0. Já o retângulo $ABGF$ representa um atributo de "intensidade" constante, igual a $\overline{AF}$, de modo que $\overline{AF} = \overline{DE} = \overline{BG}$. Concretamente, esse esquema poderia representar um corpo a uma velocidade constante $\overline{AF}$.

a) sabendo que $\overline{AF}$ é metade de $\overline{AC}$, mostre que os triângulos ECF e EBG são congruentes;

b) deduza que as áreas de $ABGF$ e ABC são as mesmas, daí que a distância percorrida seja também a mesma.

2 (Problema). Sejam A e B dois corpos. O corpo A tem velocidade constante de $10\frac{m}{s}$. B tem velocidade inicial de $20\frac{m}{s}$ e desaceleração constante de $1\frac{m}{s^2}$.

a) trace os gráficos de velocidade por tempo para A e B;

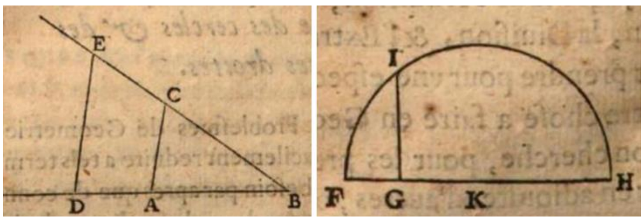
b) determine o momento t em que A e B terão percorrido a mesma distância;

c) deduza que a velocidade constante de A é a velocidade média de B de 0 a t;

d) sejam v_1 a velocidade constante do corpo C e v_2 a velocidade inicial do corpo D, que desacelera a uma taxa constante a. Mostre que, com $v_2 > v_1$ e $a < 0$, o momento t em que C e D terão percorrido a mesma distância é dado por $2 \cdot \frac{v_1 - v_2}{a}$.

3 (Investigação). As duas ilustrações da Figura 53 são reproduções de "A Geometria", do francês René Descartes. Por meio delas, o francês mostra que é possível tomar um segmento arbitrário como unidade e a partir disso relacionar "linhas" a "números".

Figura 53 - Exemplos da obra de Descartes.



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

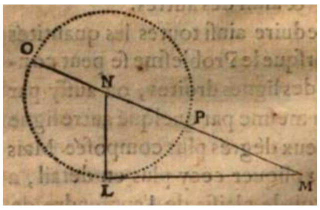
a) seja $\overline{AB} = 1$ e sejam DE e AC paralelos (à esquerda). Mostre que $\overline{BD} \cdot \overline{BC} = \overline{BE}$;

b) escolha um segmento conveniente para tomar como unidade e determine o quociente $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ (à esquerda).

c) seja $\overline{FG} = 1$ e seja $\overline{FH}$ a medida do diâmetro de uma meia-circunferência (à direita). Com FH perpendicular a GI, mostre que $\overline{GI}$ é a raiz quadrada de $\overline{GH}$.

4 (Investigação). Em uma das passagens de “A Geometria”, Descartes exemplifica como, por meio da Geometria, determinar z tal que $z^2 = az + b^2$, dados a e b – ou seja, como usar a Geometria para resolver uma equação de segundo grau. Siga o passo a passo.

Figura 54 - A geometria de uma equação quadrática.



Fonte: Descartes (1637), Bibliothèque nationale de France.

a) construa um triângulo retângulo NLM, com $\hat{L}$ reto, tal que o cateto $\overline{LM} = b$ e o cateto $\overline{NL} = \frac{a}{2}$. Prolongue NM até O de modo que $\overline{NO} = \overline{NL}$, como na Figura 54;
b) calcule $\overline{NM}$ em função de a e b;
c) verifique que $\overline{OM} = \overline{MN} + \overline{ON}$;
d) mostre que $z = \overline{OM}$ é solução da equação, comparando o resultado geométrico à fórmula resolutiva da equação de segundo grau, frequentemente chamada fórmula de Bhaskara. É possível achar a outra raiz da equação por meios geométricos?

3.8 RAÍZES, ENXAMES E JASMINS

3.8.1 Habilidade

> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (BRASIL, 2018b).

Investigamos aqui os diversos tratamentos dados ao longo da história ao problema do tipo quadrático, com atenção às obras de Al-Khwarizmi (c. 780-850) e Bhaskara II (1114-1185). Lembramos também a definição de parábola dada por Apolônio (c. 262-190 a.C.) em “As Cônicas”.

3.8.2 Relato

Notável simplicidade

É uma curiosa tradição do ensino brasileiro atribuir a fórmula resolutiva de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ao indiano Bhaskara II (1114-1185). Aparentemente, só o Brasil faz tal associação (ROQUE, 2012). A homenagem remonta ao início do século XX, pelo menos. Como exemplo, pode-se citar a obra do professor espanhol radicado no Brasil André Perez y Marin, que em nota de rodapé atribui a Bhaskara, não a fórmula, mas o "método de resolução, notável pela sua simplicidade" (PEREZ Y MARIN, 1918).

Soluções para casos particulares do que hoje conhecemos como equações quadráticas são conhecidas desde a Antiguidade. Gandz (1937) pondera que, do ponto de vista histórico, melhor seria chamá-las de "retangulares", não "quadráticas", por ser esta sua forma mais comum: encontre os lados de um retângulo, dada a soma dos lados (ou diferença) e a área do retângulo (ou a diagonal).

Os exemplos mais antigos são encontrados em tabletes de argila cunhados quase 4 milênios atrás, legado dos babilônios. Há centenas de exemplos de problemas "retangulares", mas há também enunciados retóricos que se convertem diretamente em equações quadráticas de segundo grau, como $x^2 + x = \frac{3}{4}, x^2 - x = 870, \left(\frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{3}$ (GANDZ, 1937, a partir da peça 13901, guardada em Londres pelo British Museum).

Apesar da motivação geométrica, pode-se considerar a abordagem dos babilônios essencialmente algébrica. Falavam em comprimentos, larguras, áreas e volumes ao enunciar um problema, mas, ao resolvê-lo, não hesitavam em somar o comprimento à área ou multiplicar áreas (NEUGEBAUER, 1969).

Hodgkin (2005) contesta o uso do termo equações para descrever esse legado. Prefere tratá-las como "problemas do tipo quadrático". Argumenta que a noção de equação quadrática, em sua generalidade, só apareceria mais tarde, com os árabes. "De equações, quadráticas ou não, os babilônios não sabiam nada", escreve.

Os gregos também enfrentaram problemas do tipo quadrático – inclusive Euclides. É um erro tomar os "Elementos" como uma obra exclusivamente devotada à Geometria. As proposições dos livros II e V, em particular, são de natureza algébricas, ainda que as demonstrações sejam geométricas (BOYER e MERZBACH, 2011). Na proposição 6 do Livro II, por exemplo, pode-se reconhecer o problema "retangular" do tipo $x - y = a, xy = b$, e Gandz (1937) supõe que fosse exatamente isso o que Euclides queria ensinar.

Restauração e balanceamento

O grande marco histórico na solução das equações quadráticas, e da própria Álgebra, é "Hisab al-jabr w'al-muqabala", o tratado de Abu Já'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (c. 780-850), matemático de origem persa que viveu em Bagdá, atual Iraque. Seu título já teve diversas traduções (GANDZ, 1926), variando o sentido de "al-jabr" e "al-muqabala". Roque (2012) chama a obra simplesmente de "Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala", explicando que "al-jabr” designava “restauração”, e “al-muqabala”, “algo como ‘balanceamento’”. É do nome da obra que deriva a palavra Álgebra, e do nome do autor, algarismo, o que basta para ilustrar sua influência. Vejamos o que vai nela, conforme edição de 1831, em árabe e inglês (ROSEN, 1831).

Em vez de trabalhar com comprimentos, larguras, diagonais e áreas, Al-Khwarizmi define de início os seguintes termos: raiz, a quantidade que será multiplicada por ela mesma (x, na notação moderna); quadrado, a raiz multiplicada por ela mesma (x^2); e número simples (o termo livre).

Definidos os termos, Al-Khwarizmi ensina, com a clareza e a praticidade marcantes da matemática árabe (BOYER e MERZBACH, 2011), o passo a passo para resolver cinco casos: quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$, em notação moderna); quadrados iguais a número simples ($ax^2 = c$); quadrados e raízes iguais a número simples ($ax^2 + bx = c$); quadrados e número simples iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$); raízes e número simples iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$). Não apenas ensina como resolvê-las (pelo método de completar o quadrado), mas também exemplifica e, com as ferramentas da Geometria, as demonstra.

Vejamos um exemplo do livro para o caso raízes e quadrados iguais a números, ou $cx^2 + bx = a$, segundo a notação usada por Rosen (1831). Vamos seguir as instruções de Al-Khwarizmi para determinar certa raiz tal que “2 quadrados e 10 raízes (são) iguais a 48 dinares”, ou seja, $2x^2 + 10x = 48$, em notação moderna. A tarefa consiste em “completar o quadrado”, escreve Al-Khwarizmi, usando expressão até hoje em voga. Vejamos passo a passo:

a) Reduza os dois quadrados a um quadrado $(2x^2 \rightarrow x^2)$.
b) Reduza tudo o mais mencionado à metade $(10x \rightarrow 5x, 48 \rightarrow 24)$, e será o mesmo.
c) Reduza o número de raízes à metade $\left(5 \rightarrow 2\frac{1}{2}\right)$ e multiplique o resultado por ele mesmo $\left(2\frac{1}{2} \rightarrow 6\frac{1}{4}\right)$.
d) Some o resultado a 24 $\left(6\frac{1}{4} + 24 \rightarrow 30\frac{1}{4}\right)$.
e) Tome a raiz disso $\left(30\frac{1}{4} \rightarrow 5\frac{1}{2}\right)$.
f) Subtraia disso a metade do número de raízes $\left(5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3\right)$.
g) O resultado é 3; essa é a raiz, e o quadrado é 9.

Como se pode ver, usando notação moderna, primeiro o matemático simplifica a equação:

$$2x^2 + 10x = 48 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 24\,.$$

Em seguida, completa o quadrado, usando a metade do coeficiente das raízes:

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 24\,.$$

Ele então “restaura” a falta de $\frac{25}{4}$, somando essa quantidade ao segundo membro da equação:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \frac{25}{4} = \frac{121}{4}\,.$$

Toma a raiz:

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}\,.$$

E “balanceia” o excesso, finalmente, subtraindo $\frac{5}{2}$:

$$x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3\,.$$

Por essa estratégia, o matemático determina apenas uma solução do problema. É que a outra solução é negativa (-8), e não se aventava que raízes, quadrados ou números simples fossem negativos. Daí a necessidade de separar os casos “raízes e quadrados iguais a número” e “quadrados e número iguais a raízes”. Daí também porque não se aventava resolver equações cujas raízes fossem ambas negativas (BOYER e MERZBACH, 2011).

“Isto é novo?”

Diferentemente de gregos e árabes, os indianos já tratavam como número tanto os negativos, como o zero e os irracionais. É na obra de Brahmagupta (598-670) que encontramos pela primeira vez a aritmética dos números negativos e do zero (BOYER e MERZBACH, 2011). E não é coincidência que se ache ali também uma solução negativa para uma equação quadrática.

Bhaskara, que viveu no século XII, tratou de questões colocadas por Brahmagupta e abordou os problemas quadráticos em diversas passagens de suas obras, em particular nos versos de “Lilavati” e “Bija Ganita”. Cabe notar a abordagem poética e os vívidos enunciados, como este aqui: “A raiz quadrada da metade das abelhas de um enxame partiu até um arbusto de jasmins. E assim há oito nonos de todo o enxame. Uma fêmea está zumbindo para um macho que restou zunindo dentro de um lótus, encantado com sua fragrância noturna. Diga, adorável mulher, o número de abelhas” (COLEBROOKE, 1817; PEDROSO, 2010).

Mas nem Bhaskara atribui a si próprio o método. Menciona outro indiano, Sridhara, que viveu um século antes (c. 870-930). A estratégia também consiste em eliminar o termo médio (bx, na notação moderna), completando quadrados, mas aqui se chega a raízes negativas. A abordagem é essencialmente algébrica, sem qualquer apoio na Geometria. Ainda assim, não cabe atribuir a ele a fórmula resolutiva da equação quadrática tal como hoje é ensinada. Sem negar o valor da matemática indiana, uma fórmula não pode prescindir da justa notação. "Mesmo que pudessem ser empregados símbolos para representar as incógnitas e algumas operações, não havia símbolos para expressar coeficientes genéricos a, b e c", explica Roque (2012).

A escolha de letras para o tratamento de incógnitas e coeficientes surge na Europa, nos séculos XVI e XVII. O francês François Viète (1540-1603) propõe vogais para incógnitas, e consoantes para coeficientes, em letras maiúsculas. Descartes, como vimos, dá sua forma atual: as primeiras letras do alfabeto para coeficientes, as últimas para incógnitas e variáveis, minúsculas. É só a partir daí que se pode falar em uma fórmula resolutiva da equação quadrática.

Ao abordar estratégias de resolução, Viète também reconheceu a relação existente entre coeficientes e a soma e o produto de raízes positivas de equações quadráticas. Albert Girard (1595-1632), nascido na França e radicado na Holanda, generalizou o resultado para polinômios de graus mais altos (BOYER e MERZBACH, 2011) – no caso da equação quadrática, como se sabe, dado $ax^2 + bx + c = 0$, a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$, e o produto, $\frac{c}{a}$. Esse resultado é conhecido como relações de Girard, mas também aparece associado ao nome de Isaac Newton (1642-1727), que tratou da questão um século depois, sem tomar conhecimento do legado de Girard.

Mas nem Girard, Viète, Descartes ou Newton chegaram a expressar a síntese $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, tal como é ensinada hoje em dia. Nestes exatos termos, a expressão aparentemente só surgiu em 1896, em artigo do matemático amador Henry Heaton (KRANTZ e PARKS, 2014). É um curto artigo: começa com a demonstração, em seis linhas, arrola um exemplo $(3x^2 - 2x = 21)$ e termina com uma pergunta intrigante: "Isto é novo?" (HEATON, 1896).

A parábola na Antiguidade

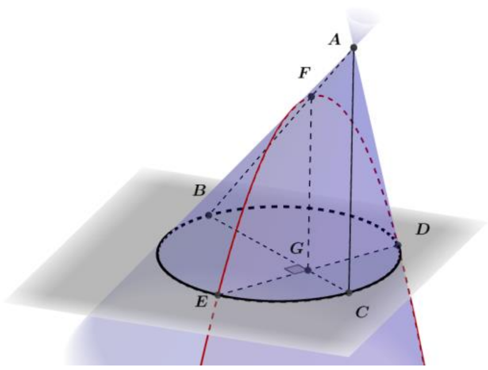
Ensina-se que a parábola é o gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, e um elemento importante para sua compreensão (LIMA, 2013). Um rápido exame da parábola, representada no plano cartesiano, permite estimativas do ponto de máximo ou mínimo da função e de suas raízes reais, havendo. São exercícios de rotina em sala de aula representar graficamente uma dada função quadrática ou, no sentido contrário, deduzi-la a partir de uma dada curva. Mas do ponto de vista histórico, a parábola não se subordina à função quadrática.

Atribui-se ao grego Menêcmo (c. 380-320 a.C.) a descoberta das curvas que se obtêm a partir da interseção de planos e cones: parábolas, hipérboles e elipses. Quem as batizou, contudo, foi provavelmente Apolônio de Perga (c. 262-190 a.C.), autor da principal obra de referência sobre o assunto, só superada no século XVII, com o desenvolvimento da Geometria Analítica.

"As Cônicas" de Apolônio consistem de oito volumes, o último dos quais se perdeu. É uma obra colossal, que fez sombra a tudo que já havia sido escrito a respeito (BOYER e MERZBACH, 2011). Até então, as cônicas eram estudadas a partir da interseção do plano com um cone reto. O geômetra estendeu os resultados aos cones oblíquos. Mostrou ainda que era possível obter as diferentes cônicas a partir de um só cone, variando a inclinação do plano secante. Inovou, também, ao propor o cone de duas folhas, essencial para a compreensão da hipérbole.

Apolônio foi aluno de discípulos de Euclides, e "As Cônicas" seguem o mesmo estilo. Avança de proposição em proposição, prova por prova, tudo ancorado em construções e demonstrações geométricas. É um texto árido e sua leitura exige certa familiaridade com a tradição da matemática grega. Mas com ajuda da devida representação gráfica, é possível e vale a pena conhecer alguns de seus pontos-chave. Vamos nos ater aqui à definição da parábola, uma oportunidade para comparar as abordagens geométrica e algébrica. Tomemos por base a tradução comentada para o inglês de Rosenfeld (2008) e as representações gráficas de Kunkel (2017).

Figura 55 - A construção da parábola.



Fonte: do autor, com base em Rosenfeld (2008) e Kunkel (2017).

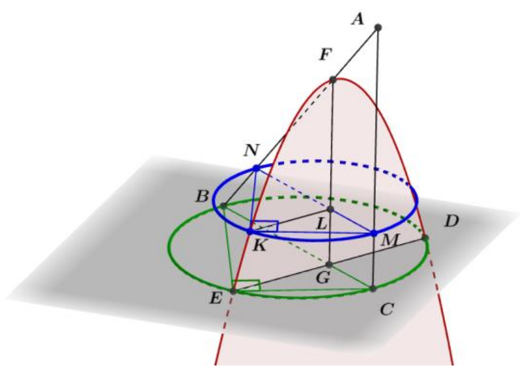
É logo no primeiro livro, na proposição 11, que Apolônio define a parábola, por construção, da seguinte maneira: dado um cone, seja A seu vértice e tome-se um diâmetro BC qualquer da base, formando o chamado triângulo axial (ABC, na Figura 55); seja agora um ponto qualquer G do diâmetro BC; tomem-se duas retas passando por G: uma contida no plano da base do cone e perpendicular a BC; e outra paralela a um dos lados do triângulo axial. Obtêm-se assim, na interseção com o cone, os pontos D, E e F. O plano que os contém determina a seção que se chama parábola, sendo F seu vértice.

Pode parecer surpreendente, nesta construção, que a parábola prescinda não apenas de expressão algébrica como também dos elementos geométricos que normalmente lhe servem de definição, a reta diretriz e o foco. Mas, sob perspectiva histórica, a parábola não é nem o gráfico de uma função quadrática nem o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma dada reta e um dado ponto – concepções fortemente dependentes da Geometria Analítica. Com os gregos, a parábola não se sujeita à abordagem algébrica. É uma construção acabada, que não decorre, mas implica determinadas propriedades. Vejamos quais.

Em sua demonstração, Apolônio não fala em foco, nem reta diretriz. Passa, em vez disso, pela construção do "latus rectum", que equivale à medida de um segmento paralelo ao que chamamos reta diretriz, ligando o ponto focal à parábola. O conceito será útil em diversas das proposições reunidas por Apolônio. Tomamos aqui a liberdade de nos desviar dessa demonstração para, sem menção ao "latus rectum", obter uma relação significativa entre medidas da parábola. Vamos nos apoiar unicamente nas proporções entre segmentos, por semelhança entre triângulos.

Tomamos um ponto qualquer L, do segmento FG, e por ele passamos uma reta paralela ao diâmetro BC e outra paralela a DE, definindo, na interseção com o cone, os pontos M, K e N, conforme a Figura 56. O plano do triângulo MKN contém duas retas concorrentes entre si e paralelas a duas retas concorrentes do plano da base. Então o plano de MKN é paralelo ao plano da base e assim define, na interseção com o cone, uma circunferência. Portanto, MKN é um triângulo retângulo, assim como CEB.

Figura 56 - Semelhança de triângulos inscritos no cone.



Fonte: do autor, com base em Rosenfeld (2008) e Kunkel (2017)

Observamos agora que, no plano que contém o triângulo axial ABC, são semelhantes os triângulos FLN e FGB, pois LN é paralelo a GB, por construção. Daí:

$$\frac{\overline{FL}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{GB}}. \tag{20}$$

Além disso, GE é altura do triângulo retângulo BEC, daí a semelhança dos triângulos BGE e EGC:

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{GC}} \Rightarrow \overline{GB} = \frac{\overline{GE}^2}{\overline{GC}}. \tag{21}$$

Analogamente, LK é altura do triângulo retângulo NKM, daí que NLK e KLM sejam semelhantes:

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{LK}} = \frac{\overline{LK}}{\overline{LM}} \Rightarrow \overline{LN} = \frac{\overline{LK}^2}{\overline{LM}}. \tag{22}$$

Agora substituímos na Equação (20) as expressões para GB e LN, das Equações (21) e (22):

$$\frac{\overline{FL}}{\frac{\overline{LK}^2}{\overline{LM}}} = \frac{\overline{FG}}{\frac{\overline{GE}^2}{\overline{GC}}}. \tag{23}$$

Como FG é paralelo a AC, e NM é paralelo a BC, por construção, é claro que $\overline{GC} = \overline{LM}$. Então, a Equação (23) pode ser reescrita assim:

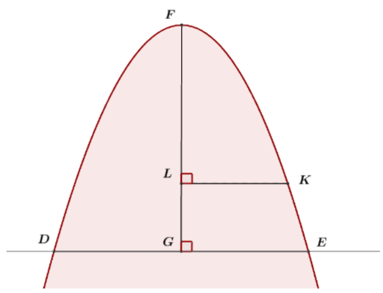
$$\frac{\overline{FL}}{\frac{\overline{LK}^2}{\overline{LM}}} = \frac{\overline{FG}}{\frac{\overline{GE}^2}{\overline{LM}}} \Rightarrow \frac{\overline{FL}}{\overline{LK}^2} = \frac{\overline{FG}}{\overline{GE}^2} \Rightarrow \overline{FL} = \left(\frac{\overline{FG}}{\overline{GE}^2}\right) \cdot \overline{LK}^2. \tag{24}$$

Podemos agora fixar G, tomando $\frac{\overline{FG}}{\overline{GE}^2} = a$ e $\overline{FG} = b$. E como $\overline{FL} = \overline{FG} - \overline{LG}$, temos:

$$b - \overline{LG} = a \cdot \overline{LK}^2,$$

$$\overline{LG} = b - a \cdot \overline{LK}^2. \tag{25}$$

Figura 57 - O gráfico da função quadrática.



Fonte: do autor.

Tomando $\overline{LK}$ por variável independente e $\overline{LG}$ por variável dependente, obtemos uma relação equivalente a $y = b - ax^2$. No caso de um cone reto, FG é perpendicular a EG e assim chegamos à exata correspondência entre uma função quadrática e uma parábola, conforme a Figura 57.

3.8.3 Tarefas

1 (Exploração). Vamos resolver uma equação quadrática da obra de Al-Khwarizmi (c. 780-850), seguindo suas instruções. O problema é o seguinte: encontre a "raiz" tal que "um quadrado" e "21 dinares" são iguais a "dez raízes".

a) escreva a equação em notação moderna, tomando "raiz" por x, "quadrado" por x^2 e "dinar" por unidade. Resolva a equação por meio da fórmula resolutiva da equação quadrática, a chamada fórmula de Bhaskara;
b) compare a solução convencional com o passo a passo descrito por Al-Khwarizmi:

- tome a metade do número de "raízes" e eleve ao quadrado;
- subtraia 21 do resultado;
- tome a raiz quadrada do resto e subtraia o resultado da metade do número de raízes. Essa é uma solução;
- tome a raiz quadrada do resto e some o resultado à metade do número de raízes. Essa é outra solução.

2 (Exercício). Considere o seguinte problema da obra de Al-Khwarizmi: "um quadrado" e "dez raízes" são iguais a 39. Vamos resolvê-lo, por meio da orientação de "completar quadrados".

a) escreva a equação em notação moderna;
b) suponha um quadrado de lado $x + 5$ e determine sua área, em função de x;
c) sabendo que "um quadrado" e "dez raízes" são iguais a 39, determine o valor numérico da área do quadrado de lado $x + 5$;
d) conhecendo a área do quadrado de lado $x + 5$, determine o lado $x + 5$;
e) determine x.

3 (Problema). Considere o seguinte problema, da obra de Bhaskara II (1114-1185): "A raiz quadrada da metade das abelhas de um enxame partiu até um arbusto de jasmins. E assim há oito nonos de todo o enxame. Uma fêmea está zumbindo para um macho que restou zunindo dentro de um lótus, encantado com sua fragrância noturna. Diga, adorável mulher, o número de abelhas" (COLEBROOKE, 1817; PEDROSO, 2010). Faça como se pede:

a) escreva a equação do problema em notação moderna tal que x é a soma das abelhas que: foram ao arbusto; ficaram para trás; restaram em torno do lótus;
b) isole a raiz quadrada e eleve a equação ao quadrado;
c) determine x;

d) compare a sua solução com a elegante explicação de Bhaskara, que adaptamos da seguinte maneira:

- seja $2x^2$ o número total de abelhas (*ya v 2*, na notação indiana, em que *ya* é a incógnita, *v* indica quadrado e *2* é o coeficiente);
- então a raiz quadrada da metade das abelhas é $\sqrt{\frac{2x^2}{2}} = x$, a raiz buscada (*ya 1*, na notação indiana);
- oito nonos do enxame é $\frac{8}{9} \cdot 2x^2 = \frac{16x^2}{9}$ (*ya v 16/9*);
- as duas abelhas, fêmea e macho, que sobraram são o número simples 2 (*ru 2*, na notação indiana);
- assim $2x^2 = \frac{16x^2}{9} + x + 2$ (na notação indiana, o primeiro membro da equação se escreve *ya v 2 ya 0 ru 0*; e o segundo membro: *ya v 16/9 ya 1 ru 2*);
- multiplicando a equação por 9, temos $18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$ (primeiro membro da equação: *ya v 18 ya 0 ru 0*; segundo membro: *ya v 16 ya 9 ru 18*);
- subtraindo $9x + 16x^2$, temos $2x^2 - 9x = 18$ (primeiro membro da equação: *ya v 2 ya* $\dot{9}$ *ru 0*, sendo que o ponto sobre o algarismo é sinal de negativo; segundo membro: *ya v 0 ya 0 ru 18*);
- multiplicando a equação por 8 e somando 81, temos: $16x^2 - 72x + 81 = 225$ (primeiro membro: *ya v 16 ya* $\dot{7}2$ *ru 81*; segundo: *ya v 0 ya 0 ru 225*);
- que é o mesmo que $(4x - 9)^2 = 225$, e assim $4x - 9 = 15$ (primeiro membro: *ya 4 ru* $\dot{9}$; segundo: *ya 0 ru 15*)
- donde $x = 6$, e $2x^2$, o total de abelhas, 72.

4 (Exercício). Das "Lições de Álgebra" de Perez y Marin (1918), constam diversos exercícios interessantes para o aluno treinar a aplicação da fórmula resolutiva de equações de segundo grau. Constam também diversas questões que cobram do aluno a correta conversão de enunciados retóricos em expressões matemáticas. Selecionamos três deles:

a) perguntada uma pessoa que idade tinha, respondeu: "Minha mãe tinha 20 anos, quando eu nasci; e o número atual dos seus anos, multiplicado pelo dos meus, excede de 2500 a sua idade e a minha reunidas". Qual era a sua idade?
b) os 3/4 do quadrado do valor de um livro, mais o duplo deste valor, mais um franco, equivale a 6 vezes o valor do livro mais os 2/3 deste valor. Qual o preço do livro?
c) qual o número que excede a sua raiz quadrada de 132?

3.9 A MATEMÁTICA SECRETA DAS ABELHAS

3.9.1 Habilidade

> (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas (BRASIL, 2018b).

Veremos aqui o tratamento dado ao longo da história ao chamado problema isoperimétrico, com atenção às contribuições de Papo de Alexandria (c. 290-350) e Jakob Steiner (1796-1863).

3.9.2 Relato

“Tudo depende da forma da figura”

Reza a mitologia grega que a princesa fenícia Dido fugiu de Tiro, no atual Líbano, temendo ser assassinada. Ao chegar ao norte da África, conseguiu o seguinte acordo com o rei Jarbas: poderia estabelecer-se no território delimitado pelo couro de um boi. Dido então cortou a pele em tiras e assim demarcou a região em que surgiu e prosperou a poderosa cidade de Cartago (Figura 58).

A história é narrada na “Eneida”, do poeta latino Virgílio (70-19 a.C.), que aproveita para fantasiar um romance entre Dido e o herói troiano Eneias – impossível, dado que a guerra de Troia e o reinado de Dido estão separados por séculos. De qualquer forma, o que nos interessa aqui é a lenda: Dido escolheu um ponto à beira do Mediterrâneo e cercou o território na forma de um semicírculo. Assim, resolveu, corretamente, o primeiro problema isoperimétrico de que se tem registro (BLÅSJÖ, 2005; WIEGERT, 2010).

Figura 58 - Gravura de Mateus Merian, o Velho, para a lenda de Dido.

Fonte: Historische Chronica, de Johann Ludwig Gottfried (1710), Bayerische Staatsbibliothek digital, https://www.digitale-sammlungen.de/en/view/bsb11348214?page=134.

Questões isoperimétricas cuidam da relação entre as áreas de figuras de mesmo perímetro e entre os volumes de figuras de mesma superfície. Têm importantes aplicações práticas. O problema das abelhas é um dos mais famosos. A anedota, conhecida de muitos professores, abre o quinto livro da “Coleção Matemática”, de Papo de Alexandria (c. 290-350).

Segundo o geômetra, animais também têm habilidades matemáticas, embora limitadas às suas necessidades: “Abelhas [...] sabem [...] que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo e guardará mais mel pela mesma quantidade de material usado na construção” (CUOMO, 2000). Em seguida, “professando sabedoria maior que a das abelhas”, Papo parte para uma compreensão mais “sutil” da relação entre áreas de figuras de mesmo perímetro e de volumes de sólidos de mesma superfície (HULTSCH, 1876).

Papo é considerado o último grande geômetra da Antiga Grécia. Alexandria, como se sabe, fica no Egito, mas foi o polo intelectual do mundo helênico por séculos, sucedendo a Atenas. Euclides (c. 325-265 a.C.), Herão (c. 10-75 d.C.), Menelau (c. 70-130 d.C.), Ptolomeu (c. 85-165 d.C.), Diofanto (c. 200-284 d.C.), Hipátia (c. 370-415 d.C.), além de Papo, são alguns dos matemáticos que ligaram seus nomes à cidade.

A obra de Papo tem especial relevância não só porque é uma das poucas que resistiram ao tempo, mas porque, ao contrário de Euclides, informa as contribuições de muitos matemáticos da Antiguidade cujos tratados se perderam no curso da história. Hodgkin (2005) estima que não passam de 20 os documentos relevantes que chegaram até nós. E mesmo assim, o que temos em geral são cópias. Do monumental “Elementos”, de Euclides, por exemplo, a reprodução mais antiga que se conhece data do século IX d.C., ou seja, mais de um milênio após ter sido escrita.

Houve um tempo em que a obra de Papo era avidamente discutida (SEFRIN-WEIS, 2010). Até o século XVII, era senso comum reconhecer Euclides, Arquimedes, Apolônio e Papo como os quatro grandes matemáticos da Antiguidade.

Esse tempo passou. Hoje mal se encontra a obra de Papo. Embora seja possível acessá-la on-line, em grego e latim (HULTSCH, 1876), existe uma única tradução da “Coleção Matemática” para um idioma moderno, o francês, uma edição dos anos 1930. Fora isso, há traduções para o inglês de apenas dois dos oitos livros da “Coleção”: o quarto e o sétimo, importantes registros da alta matemática grega (SEFRIN-WEIS, 2010), com questões que seriam mais tarde enfrentadas com as ferramentas do Cálculo, incluindo os três problemas clássicos: a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

Com algumas exceções, Papo não pretende que suas proposições sejam originais. Assume, antes disso, a missão de organizar, comentar e transmitir os achados matemáticos de seu tempo. O quinto livro da “Coleção”, especialmente, tem o tom marcado da divulgação. “Na minha opinião”, comenta Cuomo (2000), uma das grandes especialistas na obra, “o livro 5 se destina a um público relativamente amplo, com o objetivo não apenas de informá-lo de certas questões matemáticas, mas também de promover a Matemática [...] e os matemáticos [...]". Este quinto livro tem por foco os problemas isoperimétricos no plano e no espaço e reproduz em grande parte os passos de Zenodoro (c. 200-140 a.C.), cujo tratado "Sobre Figuras Isoperimétricas" se perdeu.

A solução de questões isoperimétricas são um convincente contraexemplo à antiga noção de que para conhecer o tamanho de uma ilha bastaria verificar o tempo que leva para circum-navegá-la. Quintiliano (c. 35 – 100 d.C.), ao comparar as artes da Oratória à Geometria, já alertava para o equívoco dos antigos historiadores (QUINTILIAN, 1920). "Tudo depende da forma da figura", diz. "O espaço [...] é proporcional à perfeição da figura". Assim, um círculo ("a mais perfeita das figuras planas") contém mais espaço que um quadrado, que por sua vez contém mais espaço que um triângulo equilátero, que contém mais espaço que um triângulo escaleno.

As proposições que encontramos no tratado de Papo vão bem além da questão levantada por Quintiliano. Vejamos algumas delas, com base em Hultsch (1876) e Cuomo (2000):

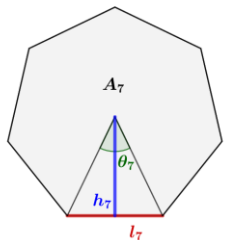
a) de dois polígonos equiláteros e equiângulos (ou seja, regulares) de mesmo perímetro, aquele com o maior número de ângulos tem a maior área;
b) o círculo tem área maior que qualquer polígono regular de mesmo perímetro;
c) dos polígonos de mesmo perímetro e mesmo número de lados, o polígono regular tem a maior área;
d) o cubo é maior que a pirâmide de mesma superfície;
e) o octaedro é maior que o cubo;
f) o dodecaedro é maior que o octaedro;
g) dos sólidos de mesma superfície, aquele com mais faces é o maior;
h) a esfera é maior que qualquer sólido regular de mesma superfície;
i) toda esfera é igual ao cone cuja base é a superfície da esfera e a altura seu raio.

Uma demonstração elementar

Vejamos em detalhe a primeira das proposições isoperimétricas de Papo, que toca o problema das abelhas: o polígono regular com maior número de lados tem a maior área entre os polígonos regulares de mesmo perímetro. Modernamente, essa proposição é demonstrada por meio do Cálculo Diferencial, o que a torna pouco ou nada acessível ao aluno do Ensino Médio. Mas é possível apresentá-la por meio de noções mais elementares.

Seja um polígono regular de n lados. Sejam A_n sua área, P o perímetro, l_n o lado, θ_n o ângulo central e h_n a apótema, conforme exemplo da Figura 59.

Figura 59 - Apótema, lado e ângulo central em polígono regular de sete lados, um heptágono.



Fonte: do autor.

Se o polígono é regular, temos primeiramente que:

$$l_n = \frac{P}{n}, \tag{26}$$

$$\theta_n = \frac{2\pi}{n}. \tag{27}$$

E somando as áreas de n triângulos de base igual a l_n e altura igual a h_n, obtemos:

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l_n \cdot h_n .$$

Usando a Equação (26), pode-se afirmar que:

$$A_n = \frac{P}{2} \cdot h_n . \tag{28}$$

A altura h_n é também bissetriz do ângulo central θ_n. Então, usando as Equações (26) e (27):

$$tg\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{l_n}{2 \cdot h_n} \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{P}{2 \cdot n \cdot h_n} \Rightarrow h_n = \frac{P}{2 \cdot n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

E substituindo h_n na Equação (28), temos:

$$A_n = \frac{P^2}{4} \cdot \frac{1}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Queremos mostrar que $A_n < A_{n+1}$. Ou seja:

$$A_n = \frac{P^2}{4} \cdot \frac{1}{n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{P^2}{4} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot tg\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = A_{n+1} .$$

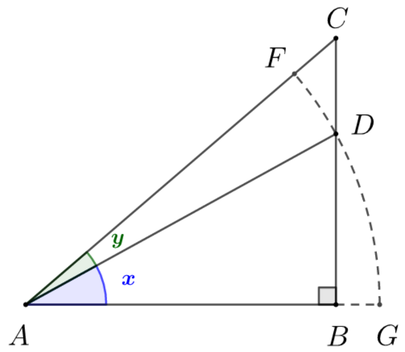
Com $n > 2$, basta então mostrar que:

$$n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) > (n+1) \cdot tg\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \tag{29}$$

É aqui que se costuma invocar o Cálculo Diferencial, para verificar que $f(x) = \frac{x}{tg(x)}$ é uma função estritamente decrescente no intervalo de $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Em vez disso, vamos seguir as indicações da obra de Papo, conforme interpretação de Leonardi (2015). Partimos da Figura 60, adaptada da edição de Hultsch (1876), para mostrar o importante lema das tangentes.

Seja ABC um triângulo retângulo em B e seja D um ponto sobre o cateto CB. Seja AFG um setor circular de raio AD correspondente ao ângulo $C\hat{A}B$, com G sobre o prolongamento de AB. Seja x o ângulo $D\hat{A}B$ e y o ângulo $D\hat{A}C$, com $x + y < \frac{\pi}{2}$.

Figura 60 - Lema das tangentes.



Fonte: do autor, baseado em Hultsch (1876).

Começamos comparando as áreas dos triângulos ABC e ABD:

$$\overline{BC} > \overline{BD} \Rightarrow A_{ABC} > A_{ABD} .$$

Agora vamos manipular a desigualdade, de modo a incluir no raciocínio a área da região BDG:

$$A_{ABC} > A_{ABD} ,$$

$$A_{ABC} \cdot A_{BDG} > A_{ABD} \cdot A_{BDG} ,$$

$$A_{ABC} \cdot A_{BDG} + A_{ABC} \cdot A_{ABD} > A_{ABD} \cdot A_{BDG} + A_{ABC} \cdot A_{ABD} ,$$

$$A_{ABC} \cdot (A_{BDG} + A_{ABD}) > A_{ABD} \cdot (A_{BDG} + A_{ABC}) ,$$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABD}} > \frac{A_{BDG} + A_{ABC}}{A_{BDG} + A_{ABD}} \tag{30}$$

Mas $A_{BDG} + A_{ABC} > A_{AFG}$. Então:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABD}} > \frac{A_{BDG} + A_{ABC}}{A_{BDG} + A_{ABD}} > \frac{A_{AFG}}{A_{BDG} + A_{ABD}} .$$

Além disso, $A_{BDG} + A_{ABD} = A_{ADG}$. Então:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABD}} > \frac{A_{AFG}}{A_{BDG} + A_{ABD}} = \frac{A_{AFG}}{A_{ADG}},$$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABD}} > \frac{A_{AFG}}{A_{ADG}}. \tag{31}$$

Agora observamos que as áreas dos triângulos são proporcionais às alturas e que as áreas dos setores circulares são proporcionais aos ângulos:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{ABD}} = \frac{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2}}{\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AB}}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}, \tag{32}$$

$$\frac{A_{AFG}}{A_{ADG}} = \frac{\frac{(x + y) \cdot \pi \cdot \overline{AG}^2}{2\pi}}{\frac{x \cdot \pi \cdot \overline{AG}^2}{2\pi}} = \frac{x + y}{x}. \tag{33}$$

Usando as Equações (32) e (33) para substituir os termos da Inequação (31), temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} > \frac{x + y}{x}. \tag{34}$$

Vamos então relacionar BC e BD às tangentes de x e $x + y$:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{tg(x + y) \cdot \overline{AB}}{tg(x) \cdot \overline{AB}} = \frac{tg(x + y)}{tg(x)}. \tag{35}$$

Substituindo $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ na Equação (34), temos:

$$\frac{tg(x + y)}{tg(x)} > \frac{x + y}{x} \quad \left(com\ x, y > 0\ e\ x + y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Finalmente, tomamos convenientemente $x = \frac{\pi}{n+1}$ e $y = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1}$, de modo que:

$$\frac{tg\left(\frac{\pi}{n + 1} + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n + 1}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{n + 1}\right)} > \frac{\frac{\pi}{n + 1} + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n + 1}}{\frac{\pi}{n + 1}},$$

$$\frac{tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{n + 1}\right)} > \frac{n + 1}{n},$$

$$n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) > (n+1) \cdot tg\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

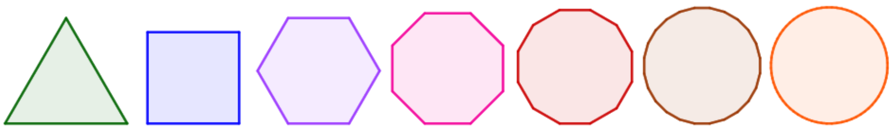
E assim chegamos à Inequação (29), como queríamos.

Com isso mostramos que, de fato, a área do hexágono regular é maior que qualquer polígono regular de mesmo perímetro e menos lados. Mas, pelo mesmo teorema, um polígono de mais lados teria área ainda maior. Por que as abelhas não fazem alvéolos com 7, 8, 9... lados? Aqui é preciso lembrar que nem todo polígono regular pode cobrir uma superfície, resultado conhecido muito antes de Papo. Remetemos o leitor interessado ao trabalho de Pedroso e Pereira (2013), que mostram detalhadamente essa e outras proposições a respeito de figuras isoperimétricas e ainda conferem na prática, com base em dados de um apicultor, o acerto da escolha do prisma hexagonal para a construção dos favos.

Sobre prova e rigor

A desigualdade isoperimétrica para polígonos regulares nos garante que, para um mesmo perímetro, quanto maior o número de lados, maior a área. Não havendo limite para o número de lados, podemos construir polígonos de áreas cada vez maiores, como a Figura 61 insinua:

Figura 61 - Polígonos regulares de mesmo perímetro.



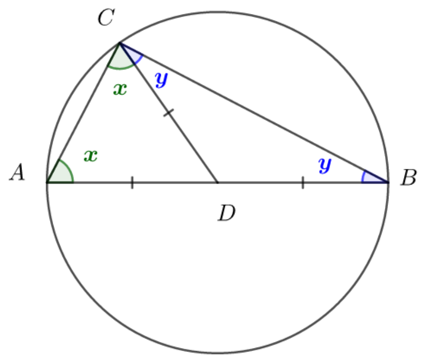
Fonte: do autor.

Um rápido exame da Figura 61 conduz à hipótese de que o círculo seja a figura que maximiza a área, fixado o perímetro. De fato, é do que cuida a segunda proposição achada na obra de Papo – e é o que dá razão à princesa Dido. Mesmo antes de Papo e Zenodoro, Arquimedes teria constatado a propriedade isoperimétrica do círculo – embora não haja o registro expresso em sua obra. E ainda antes, Aristóteles escreveu algo bastante próximo: "das linhas que de um ponto que retornam sobre o mesmo ponto, a mais curta é a linha do círculo", concluindo daí que "é necessário que o céu seja esférico" (REY PUENTE, 1998).

Mas para os atuais padrões da Matemática, uma solução rigorosa da questão isoperimétrica só aparece no século XIX. Vejamos os esforços do suíço Jakob Steiner (1796-1863), que ofereceu nada menos que cinco demonstrações (STEINER, 1838 e 1842). Tomemos uma delas, particularmente engenhosa, que adaptamos em cinco passos, a partir das sínteses de Tikhomirov (1990), Blåsjö (2005) e Nahin (2007). O objetivo é encontrar a curva plana fechada, ou seja, sem extremidades, que encerra a maior área.

a) Primeiramente, estabelecemos que um triângulo ACB inscrito numa circunferência de diâmetro AB é retângulo. De fato, trata-se de um caso particular do teorema do ângulo inscrito, com o qual o aluno deve ter familiaridade. Uma prova simples é a seguinte: considere ACB inscrito na circunferência de diâmetro AB e centro D, conforme a Figura 62. Como DA e DC são raios, ADC é isósceles, e então $D\hat{A}C = A\hat{C}D = x$. Analogamente, $D\hat{C}B = C\hat{B}D = y$. A soma dos ângulos internos de ACB é $180°$, então: $x + y + (x + y) = 180°$, daí $x + y = A\hat{C}B = 90°$.

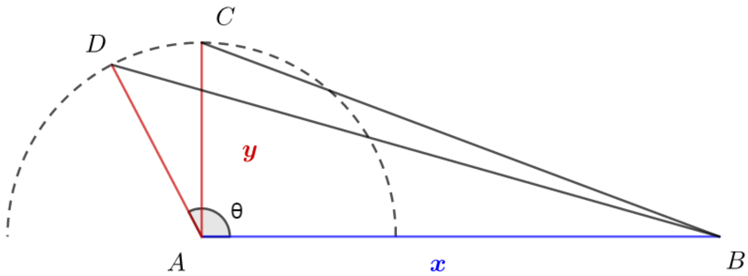
Figura 62 - O triângulo inscrito no semicírculo.



Fonte: do autor.

b) Agora deve-se mostrar que, fixadas as medidas de dois lados, x e y, o triângulo de maior área é retângulo, e x e y são as medidas dos catetos. A propriedade revela-se óbvia quando expressamos a área em função de x, y e do ângulo θ entre os lados: $A = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot sen\ \theta$: o valor máximo de $sen\ \theta$ é 1, para $\theta = 90°$. Na Figura 63, temos $A_{ABC} > A_{ABD}$.

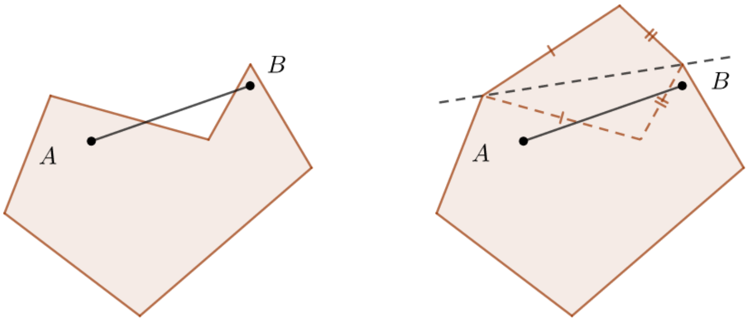
Figura 63 - Comparação entre áreas de triângulos.



Fonte: do autor.

c) Vamos agora estabelecer que a curva fechada que maximiza áreas é convexa. Curvas fechadas são convexas quando todos os seus pontos interiores definem segmentos cujos pontos também são interiores. Para ilustrar: na Figura 64, à esquerda, temos um exemplo de curva fechada que não é convexa, pois AB tem pontos externos à figura. À direita, mostramos que uma simples reflexão pode aumentar a área, sem aumentar o perímetro. Por esse expediente, qualquer figura não convexa pode ter sua área aumentada.

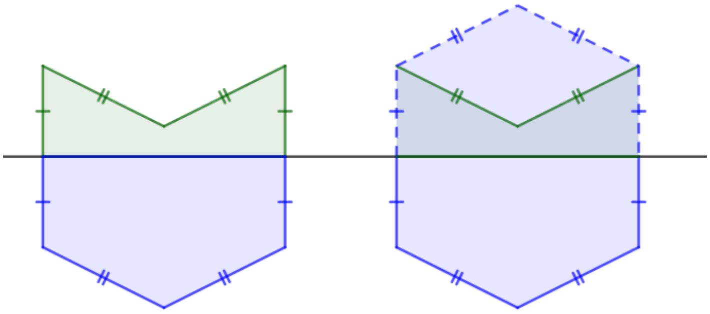
Figura 64 - Maximizando áreas.



Fonte: do autor.

d) Mostraremos agora que, se os pontos A e B dividem a curva fechada que maximiza áreas pela metade, então o segmento AB deve dividir a área que ela encerra pela metade. De fato, se A e B cortam o perímetro pela metade, mas não a área, então temos duas regiões de áreas distintas, limitadas por AB. A simples reflexão da região de maior área em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ nos daria uma figura de mesmo perímetro e área total maior. Na Figura 65, à esquerda, a reta divide a figura em duas regiões de mesmo perímetro, mas áreas diferentes. Se refletirmos a região de maior área em relação à reta, achamos uma nova figura de mesmo perímetro e área maior (à direita).

Figura 65 - Maximizando áreas.

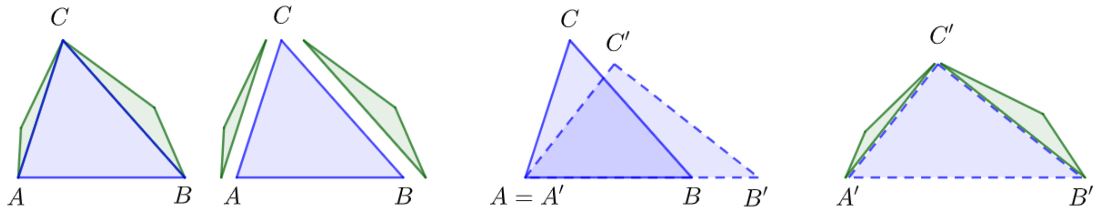


Fonte: do autor.

e) O passo anterior nos autoriza a focar em uma das metades da figura buscada, posto que a outra metade deve ter mesmo perímetro e mesma área. Seja AB a linha divisória entre as duas metades e seja C um ponto qualquer sobre o perímetro. Pelo passo (c), exige-se que a figura seja convexa. Então os pontos de AC e BC são todos internos. Assim AC e BC definem três regiões distintas: o triângulo ABC e duas regiões vizinhas, conforme a Figura 66.

Vamos agora supor que o ângulo $A\hat{C}B$ seja diferente de 90º. Então é possível aumentar a área da figura, sem alterar seu perímetro: basta encurtar ou aumentar a base $\overline{AB}$, construindo um triângulo retângulo $A'B'C'$ de catetos $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ e $\overline{B'C'} = \overline{BC}$.

Figura 66 - Maximizando áreas.



Fonte: do autor.

O triângulo $A'B'C'$, pelo passo (b), tem área maior que ABC e dois lados iguais. Assim, as regiões vizinhas não são alteradas, e as três agora somam uma área maior. A base $A'B'$ é diferente de AB, é claro, mas ela não contribui para o perímetro, pois é a linha divisória entre as duas metades da figura. Por esse expediente, podemos aumentar a área total para cada ponto C sempre que $A\hat{C}B$ for diferente de 90º. Só não poderemos fazê-lo se todos os pontos sobre o perímetro formarem, com AB, um triângulo retângulo. É justo o caso do meio-círculo, conforme mostramos no passo (a). Então o meio-círculo maximiza metade da área. Por extensão, o círculo maximiza a área total.

Assim Steiner conclui que toda figura pode ter sua área aumentada por meios geométricos, a não ser o círculo. Por isso, "de todas as figuras que encerram áreas equivalentes, o círculo tem o menor perímetro; e reciprocamente, de todas as figuras isoperimétricas, o círculo encerra a maior área" (STEINER, 1842).

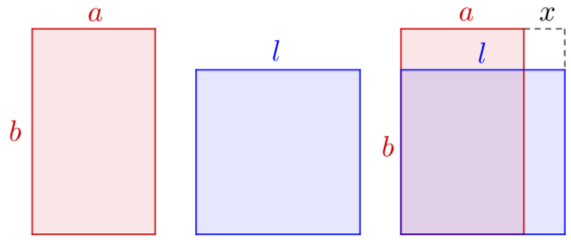
A demonstração é envolvente e criativa, mas foi prontamente contestada. Isso porque o matemático não prova, de saída, que existe uma solução para o problema. Parece evidente que exista, e de fato existe, mas daí a prová-lo vai uma distância. Esse último passo foi dado ainda no século XIX, por métodos analíticos – que Steiner desprezava. Um dos pais da Análise, o alemão Karl Weierstrauss (1815-1897), ofereceu de fato a primeira solução rigorosa do problema, em 1879, a que se seguiram – e ainda seguem – muitas outras, até hoje. Remetemos o leitor interessado à concisa prova de Lax (1995), de feliz título: "A Short Path to the Shortest Path".

Não cabe, contudo, invalidar as descobertas de seus antecessores por falta de rigor. Para Tikhomirov (1990), a solução do problema isoperimétrico já estava delineada na Antiguidade com absoluta correção: o crédito de Weierstrauss e dos que o seguiram foi o de dar às ideias de seus antecessores o formato que atende aos parâmetros de rigor de nossa época.

3.9.3 Tarefas

1 (Problema). O objeto deste exercício é mostrar que um quadrado tem área maior que qualquer retângulo de mesmo perímetro. Sejam um quadrado de lado l e um retângulo de lados a e b, com $a < b$, e mesmo perímetro P. E seja x a diferença entre l e a, como na Figura 67:

Figura 67 - Quadrado vs. retângulo.



Fonte: do autor.

a) determine P em função de l;

b) determine P em função de a e b;

c) determine b em função de l e x;

d) determine a área do quadrado em função de l e a área do retângulo em função de l e x. Compare os resultados e conclua que a área do quadrado é maior.

2 (Problema). A área A de um triângulo de lados a, b, c, com $a + b + c = 2p$, pode ser dada pela chamada fórmula de Herão:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

a) compare as áreas de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm; um triângulo isósceles cuja base mede 10 cm, e os demais lados, 7 cm; e um triângulo escaleno de lados 10, 8 e 6 cm;

b) utilize a fórmula de Herão para mostrar que, de todos os triângulos de mesmo perímetro e mesma base a, o triângulo isósceles tem a maior área;

c) utilize a fórmula de Herão para mostrar que o triângulo equilátero tem área maior que qualquer triângulo isósceles de mesmo perímetro;

d) calcule a área máxima de um triângulo de perímetro igual a 1 unidade.

3 (Problema). Sejam um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular de mesmo perímetro P.

a) calcule a área das três figuras em função de P;

b) conclua que a área do triângulo é a menor, e a do hexágono, a maior.

4 (Exercício). Considere que, de todas as figuras planas de mesmo perímetro, o círculo tem a maior área. Responda:

a) qual o perímetro mínimo de uma figura cuja área é $A = \frac{16}{\pi}$?

b) qual a área máxima de uma figura cujo perímetro é $P = 1$?

c) deduza que, para qualquer figura de área A e perímetro P, vale a seguinte desigualdade:

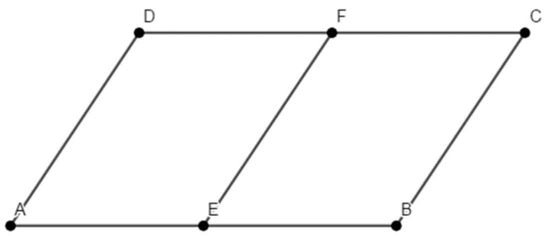
$$4\pi \cdot A \leq P^2$$

5 (Investigação). A proposição 27 do livro VI dos "Elementos", de Euclides, é considerado o mais antigo problema de máximo de que se tem registro (STRUIK, 1987). Seu enunciado pode parecer difícil, mas a demonstração é interessante e ilustrativa do pensamento euclidiano: "Entre todos os paralelogramos aplicados à mesma linha reta, e com os defeitos de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita reta, e semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma reta, e que é semelhante à figura paralelograma que falta" (EUCLIDES, 1944).

Vamos passo a passo entender o seu significado e verificar sua validade.

a) Construa um paralelogramo qualquer $ABCD$ e sejam E e F os pontos médios de AB e CD respectivamente, como na Figura 68:

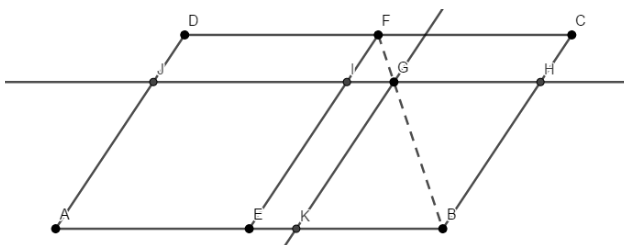
Figura 68 - Pontos médios.



Fonte: do autor.

b) Seja G um ponto de FB. Trace por G uma reta paralela a AB e outra paralela a BC, definindo os pontos H, I, J, K, como na Figura 69:

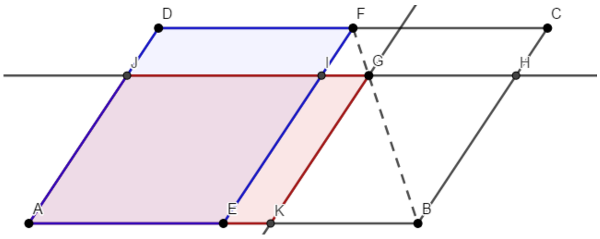
Figura 69 - "Defeitos" semelhantes.



Fonte: do autor.

O que se entende da passagem sobre "defeitos de figuras paralelogramas semelhantes" é simplesmente que a área de $AEFD$ é maior que a de $AKGJ$, para qualquer G sobre FB, conforme a Figura 70:

Figura 70 - Para qualquer G, $AEFD$ tem área maior que $AKGJ$.

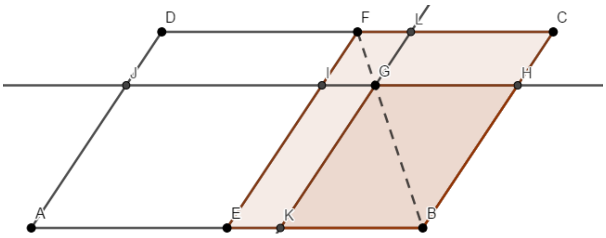


Fonte: do autor.

Observe que $AEFD$ é o "paralelogramo aplicado à metade da mesma reta, e que é semelhante à figura que falta" de que fala o enunciado. E $AKGJ$ tem os "defeitos de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita reta, e semelhantemente postas". Continuando.

c) Mostre que $KBHG$ é semelhante a $EBCF$, conforme a Figura 71:

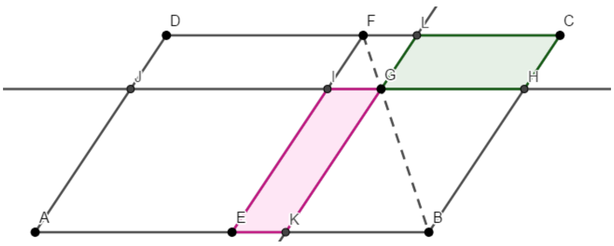
Figura 71 - Semelhança de paralelogramos.



Fonte: do autor.

d) Mostre que $EKGI$ e $GHCL$ têm a mesma área. Deduza que $EBHI$ e $KBCL$ também têm a mesma área, conforme a Figura 72:

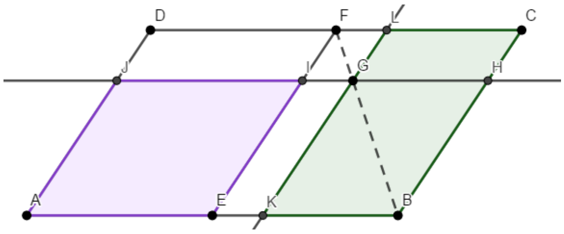
Figura 72 - Equivalência de áreas.



Fonte: do autor.

e) Verifique que $AEIJ$ têm a mesma área de $EBHI$ e, portanto, a mesma área de $KBCL$, conforme a Figura 73:

Figura 73 - Equivalência de áreas.



Fonte: do autor.

f) Verifique que $JIFD$ é maior que $GHCL$ e deduza que $AEFD$ é maior que $AKGJ$.

g) Considere que $ABCD$ seja uma retângulo, tal que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Use a proposição de Euclides para mostrar que o quadrado é maior que todo retângulo de mesmo perímetro.

3.10 EURECA E SUPEREURECA

3.10.1 Habilidade

> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BRASIL, 2018b)

Vamos investigar as possíveis estratégias de Arquimedes (288-212 a.C.) para desmascarar o artesão da coroa de Hierão II e a solução oferecida por Galileu Galilei (1564-1642), com base em importantes princípios da Física descritos pelo sábio de Siracusa.

3.10.2 Relato

“Encontrei!”

Ao sondar as razões pelas quais o ser humano tem sido atraído por charadas desde tempos imemoriais, Danesi (2002) aponta o “efeito Eureca”: mistura de alívio e prazer que se experimenta ao resolver um dado problema. É uma espécie de “catarse mental” que se segue ao triunfo de superar um impasse e desvendar um determinado mistério.

O “efeito Eureca” mais conhecido, claro, é o que teria levado Arquimedes (288-212 a.C.) a justamente exclamar “Eureca” – e correr pelado pelas ruas de Siracusa, na costa da atual Sicília.

A história é contada nos “Dez Livros de Arquitetura”, de Vitrúvio (c. 85-20 a.C.), que viveu dois séculos após Arquimedes. Ao assumir o trono de Siracusa, Hierão II encomendou uma coroa de ouro, provendo o metal precioso. Mas o artesão tentou enganá-lo: reteve parte do ouro para si e o substituiu por um metal mais barato, a prata. Arquimedes foi então encarregado de desmascará-lo. O *insight* lhe ocorreu em uma casa de banho: “[...] ao entrar na banheira percebeu que na mesma proporção em que seu corpo afundava, saía água do recipiente", escreveu Vitrúvio, conforme a tradução para o português de Assis (1996).

> De onde, compreendendo o método a ser adotado para a solução da proposição, ele o perseguiu persistentemente no mesmo instante, saiu alegre do banho e, retornando nu para casa, gritou em voz alta que havia encontrado o que estava procurando, pois continuou exclamando, em grego, ευρηχα,ευρηχα [eureca, eureca] (encontrei, encontrei!) (ASSIS, 1996)

Há sérias dúvidas sobre a veracidade do relato, que também consta das obras de Plutarco (c. 46-119 d.C.) e Proclo (411-485 d.C.). Mas o interesse pelo problema é real. Afinal, o que Arquimedes encontrou? Segundo Vitrúvio, a estratégia de Arquimedes consistiu em comparar o volume da coroa de Hierão a de peças de ouro e prata de mesmo peso. Para tanto, encheu um recipiente de água até a borda e mergulhou os objetos, um de cada vez, verificando a quantidade de água que derramavam. Constatou que a peça de prata deitava mais água que a coroa, e esta, mais água que a peça de ouro. E assim esclareceu o golpe.

A hipótese assenta-se sobre premissas válidas. Submerso, um corpo desloca volume de água correspondente ao seu. Assim, pode-se medir o volume das peças, por mais irregular que seja o formato. A diferença entre as medidas nos levará à razão entre os metais. Para mostrar como, recorremos a uma propriedade característica das substâncias, a densidade (d), razão de proporcionalidade entre massa (m) e volume (V): $d = \frac{m}{V}$.

Consideremos que o ouro é mais denso que a prata. Consideremos também que a liga de que é feita a coroa conserve tanto a massa como o volume de suas partes em ouro e prata, tal que:

$$m_{ouro} + m_{prata} = m_{coroa} \text{ ,}$$

$$V_{ouro} + V_{prata} = V_{coroa} \text{ .}$$

Tomemos agora a razão entre: a quantidade de água que a coroa derrama a mais, em relação ao objeto de ouro; e a menos, em relação ao objeto de prata. Sejam V_{ouro}^{ref} e V_{prata}^{ref} os volumes das peças de referência, cuja massa é sabidamente a mesma da joia suspeita. Então:

$$\frac{V_{coroa} - V_{ouro}^{ref}}{V_{prata}^{ref} - V_{coroa}} = \frac{\left(V_{ouro} + V_{prata}\right) - V_{ouro}^{ref}}{V_{prata}^{ref} - \left(V_{ouro} + V_{prata}\right)},$$

$$= \frac{\frac{m_{ouro}}{d_{ouro}} + \frac{m_{prata}}{d_{prata}} - \frac{m_{coroa}}{d_{ouro}}}{\frac{m_{coroa}}{d_{prata}} - \frac{m_{ouro}}{d_{ouro}} - \frac{m_{prata}}{d_{prata}}},$$

$$= \frac{m_{ouro} \cdot d_{prata} + m_{prata} \cdot d_{ouro} - m_{coroa} \cdot d_{prata}}{m_{coroa} \cdot d_{ouro} - m_{ouro} \cdot d_{prata} - m_{prata} \cdot d_{ouro}},$$

$$= \frac{d_{prata} \cdot (m_{ouro} - m_{coroa}) + m_{prata} \cdot d_{ouro}}{d_{ouro} \cdot (m_{coroa} - m_{prata}) - m_{ouro} \cdot d_{prata}},$$

$$= \frac{d_{prata} \cdot (-m_{prata}) + m_{prata} \cdot d_{ouro}}{d_{ouro} \cdot (m_{ouro}) - m_{ouro} \cdot d_{prata}},$$

$$= \frac{m_{prata} \cdot (d_{ouro} - d_{prata})}{m_{ouro} \cdot (d_{ouro} - d_{prata})},$$

$$= \frac{m_{prata}}{m_{ouro}}. \tag{36}$$

E assim, partindo da diferença entre volumes, expressamos a razão entre as massas.

Um princípio decisivo

A solução insinuada por Vitrúvio esbarra na dificuldade de tomar medidas precisas de volume. Como apontam Hoddeson (1972) e Rorres (1995), é provável que a diferença fosse pequena demais para ser detectada por este método. Vejamos outras estratégias.

Arquimedes não deixou nada escrito sobre o caso. Mas uma das proposições de seu importante tratado "Sobre os corpos flutuantes" costuma ser tomada como pista decisiva de uma solução mais engenhosa para o problema (HEATH, 1897). É a proposição de número 7, base do princípio que hoje leva seu nome: "Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado" (tradução de Assis, 1996). Em outros termos, o peso aparente de um objeto pesado em meio fluido é a diferença entre seu peso real e o que hoje chamamos empuxo, o peso do fluido deslocado.

Esse princípio é frequentemente explicado em termos da diferença entre as pressões que agem sobre um corpo submerso, em função da diferença de profundidade. Aqui, contudo, o que nos interessa é sua aplicação no caso das coroas. Vejamos como resolver o problema, valendo-nos de algumas fórmulas familiares ao aluno do Ensino Médio:

$d = \frac{m}{V}$, em que d é a densidade, m a massa e V o volume, como já exposto;

$P_{ap} = P - E$, em que P_{ap} é o peso aparente, P é o peso real, e E o empuxo;

$P = m \cdot g$, em que g é a aceleração da gravidade;

$E = V \cdot d_{água} \cdot g$, em que $d_{água}$ é a densidade da água.

Em vez de volumes, tomemos a diferença entre os pesos aparentes da coroa e das peças de referência em ouro e prata, mergulhadas na água, o que se pode medir com razoável precisão.

$$\frac{P^{ref}_{ap\ ouro} - P_{ap\ coroa}}{P_{ap\ coroa} - P^{ref}_{ap\ prata}} = \frac{(P^{ref}_{ouro} - E^{ref}_{ouro}) - (P_{coroa} - E_{coroa})}{(P_{coroa} - E_{coroa}) - \left(P^{ref}_{prata} - E^{ref}_{prata}\right)},$$

$$= \frac{E_{coroa} - E^{ref}_{ouro}}{E^{ref}_{prata} - E_{coroa}}, \tag{37}$$

$$= \frac{V_{coroa} \cdot d_{água} \cdot g - V^{ref}_{ouro} \cdot d_{água} \cdot g}{V^{ref}_{prata} \cdot d_{água} \cdot g - V_{coroa} \cdot d_{água} \cdot g},$$

$$= \frac{V_{coroa} - V^{ref}_{ouro}}{V^{ref}_{prata} - V_{coroa}}. \tag{38}$$

Comparando as Equações (36) e (38), chegamos à mesma razão entre massas:

$$\frac{P^{ref}_{ap\ ouro} - P_{ap\ coroa}}{P_{ap\ coroa} - P^{ref}_{ap\ prata}} = \frac{V_{coroa} - V^{ref}_{ouro}}{V^{ref}_{prata} - V_{coroa}} = \frac{m_{prata}}{m_{ouro}}.$$

A solução "perfeita"

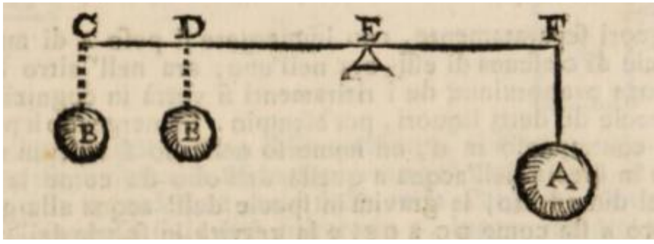
Galileu Galilei (1564-1642) tinha apenas 22 anos quanto abordou o problema de Hierão em sua primeira publicação, "A pequena balança". No breve texto, o cientista considera "coisa muito grosseira e longe da perfeição" a hipótese de que Arquimedes tenha resolvido o problema mergulhando objetos e medindo "quanto a água subia ou transbordava", conforme tradução para o português de Lucie (1986). Em vez disso, propõe solução ainda mais engenhosa da que é aventada por Heath (1897), pois não exige peças de ouro e prata de mesmo peso da coroa (HODDESON, 1972). Além de "extremamente preciso", escreve Galileu, o método "apoia-se em demonstrações descobertas" pelo sábio de Siracusa. Assim, "resolve o problema de maneira perfeita", acredita.

Galileu se vale de duas propriedades relatadas por Arquimedes. Uma delas embasa a solução tratada anteriormente, saída da obra "Sobre os corpos flutuantes". A outra aparece no tratado "Sobre o equilíbrio dos planos". Diz Arquimedes: "Duas grandezas, sejam elas comensuráveis [Prop. 6] ou incomensuráveis [Prop. 7], se equilibram a distâncias inversamente proporcionais a suas grandezas." (tradução de Assis, 1997).

Essa proposição é a base da chamada Lei da Alavanca, que se pode explicar por meio da noção de torque ou momento de uma força. Vamos, contudo, nos fixar na aplicação dada por Galileu, de marcante apelo geométrico.

Considere a Figura 74, que ilustra comentário sobre "A pequena balança" feito por Vincenzo Viviani, último discípulo e primeiro biógrafo de Galileu (GALILEI, 1718). $\overline{CF}$ é a medida da haste de uma balança, e E é o chamado ponto fulcral, o ponto de apoio da balança.

Figura 74 - Peso e contrapeso.



Fonte: Galilei (1718), Internet Archive, Wellcome Library.

Vamos supor que os corpos A e B se equilibram com B pendente do ponto D, e A, do ponto F. Adotando peso por "grandeza", como fez Galileu, temos então que:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\overline{DE}}{\overline{FE}} \Leftrightarrow P_A \cdot \overline{FE} = P_B \cdot \overline{DE} \,.$$

E se o equilíbrio é atingido com B pendente de C, teremos:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\overline{CE}}{\overline{FE}} \Leftrightarrow P_A \cdot \overline{FE} = P_B \cdot \overline{CE} \,.$$

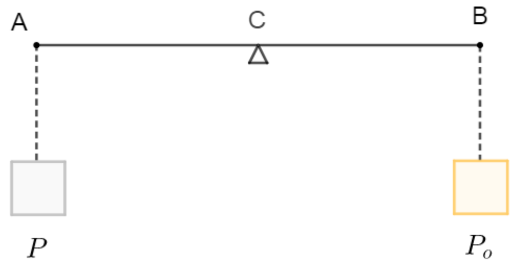
Galileu vai então mostrar que a proporção entre metais na liga da coroa pode ser determinada pela relação das distâncias entre os pontos dos contrapesos que equilibram: a joia; uma de peça de ouro; e uma peça de prata.

Vejamos como, passo a passo, adaptando a estratégia à notação e aos conceitos elementares de que dispõe o aluno do Ensino Médio. Tomemos um objeto de ouro puro e vamos equilibrá-lo na balança de tal forma que peso e contrapeso fiquem à mesma distância do ponto fulcral, conforme a Figura 75.

Com $\overline{AC} = \overline{BC}$, garantimos que seus pesos sejam iguais:

$$\overline{AC} \cdot P = \overline{BC} \cdot P_{ouro} \Rightarrow \overline{AC} \cdot P = \overline{AC} \cdot P_{ouro} \Rightarrow P = P_{ouro} \,.$$

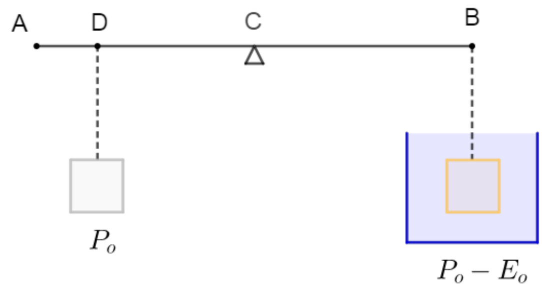
Figura 75 - Equivalência de pesos.



Fonte: do autor.

Agora colocamos o objeto de ouro na água, e seu peso será "mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado", de acordo com a proposição de Arquimedes. Para atingir o equilíbrio, teremos então de aproximar o contrapeso do fulcro, até um certo ponto D, conforme a Figura 76, de modo a descontar o empuxo.

Figura 76 - Peso e peso aparente em equilíbrio.



Fonte: do autor.

A proximidade do ponto de equilíbrio nos dará a razão entre a densidade do ouro e da água – ou, como prefere Galileu, peso específico, conceito que à época não se distinguia de densidade (HODDESON, 1972) e que modernamente definimos pelo produto da densidade pela gravidade.

Simbolicamente, usando as fórmulas para densidade e empuxo, temos:

$$\overline{DC} \cdot P = \overline{DC} \cdot P_{ouro} = \overline{BC} \cdot (P_{ouro} - E_{ouro})\,, \tag{39}$$

$$\left(\overline{AC} - \overline{AD}\right) \cdot P_{ouro} = \overline{AC} \cdot (P_{ouro} - E_{ouro})\,,$$

$$\overline{AC} \cdot P_{ouro} - \overline{AD} \cdot P_{ouro} = \overline{AC} \cdot P_{ouro} - \overline{AC} \cdot E_{ouro}\,,$$

$$\overline{AC} \cdot E_{ouro} = \overline{AD} \cdot P_{ouro}\,,$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{P_{ouro}}{E_{ouro}},$$

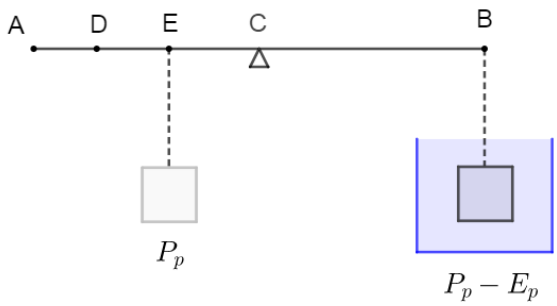
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{m_{ouro} \cdot g}{V_{ouro} \cdot d_{água} \cdot g},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{m_{ouro}}{\frac{m_{ouro}}{d_{ouro}} \cdot d_{água}},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{d_{ouro}}{d_{água}}.$$

Analogamente, podemos verificar a razão entre a densidade da prata e a da água. Mas como a prata é menos densa que o ouro, o contrapeso ficará ainda mais próximo do ponto fulcral, conforme a Figura 77. Galileu supõe que o "ouro pese vinte vezes mais que a água", e a prata "doze vezes", boa aproximação para o ouro (cerca de 19,3), nem tanto para a prata (cerca de 10,5).

Figura 77 - Peso e peso aparente em equilíbrio.



Fonte: do autor.

$$\overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{BC} \cdot (P_{prata} - E_{prata}), \tag{40}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{d_{prata}}{d_{água}}.$$

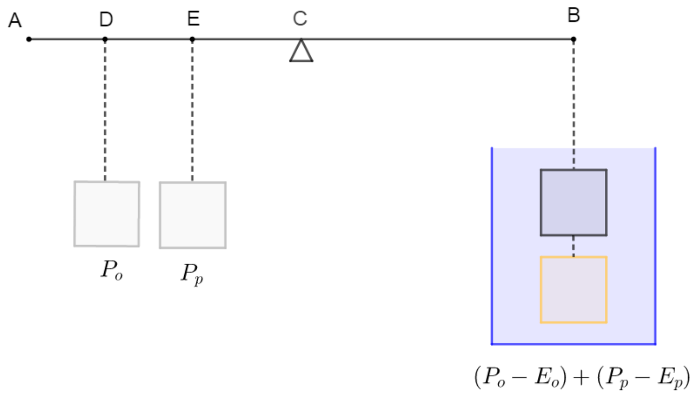
Depois de investigar os pesos específicos do ouro e da prata, Galileu deduz prontamente que um ponto F que equilibre a liga de metais estará entre D e E. Sem justificar, afirma em seguida que "[os pesos de] ouro e prata que compõem a liga estão entre si na mesma razão que as distâncias [respectivas]".

De fato, trata-se da versão geométrica das mesmas relações encontradas por meio da comparação de volumes e pesos aparentes. Daremos mais alguns passos para mostrar por quê.

Vamos primeiramente somar os dois conjuntos de pesos e contrapesos, conforme Figura 78. O equilíbrio, evidentemente, se mantém. Basta somar as Equações (39) e (40):

$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{BC} \cdot [(P_{ouro} - E_{ouro}) + (P_{prata} - E_{prata})]. \tag{41}$$

Figura 78 - Ouro e prata somados.



Fonte: do autor.

Agora podemos supor uma coroa feita dos objetos de ouro e prata já pesados. A massa da liga é a soma das massas de ouro e prata. Seu peso, por extensão, também:

$$m_{coroa} = m_{prata} + m_{ouro} \, ,$$

$$m_{coroa} \cdot g = m_{prata} \cdot g + m_{ouro} \cdot g \, ,$$

$$P_{coroa} = P_{prata} + P_{ouro} \, .$$

Assumimos que a liga dos metais conserve volume. Por extensão, conserva empuxo:

$$V_{coroa} = V_{prata} + V_{ouro} \, ,$$

$$V_{coroa} \cdot d_{água} \cdot g = V_{ouro} \cdot d_{água} \cdot g + V_{prata} \cdot d_{água} \cdot g \, ,$$

$$E_{coroa} = E_{ouro} + E_{prata} \, ,$$

Assim, podemos reescrever a Equação (41):

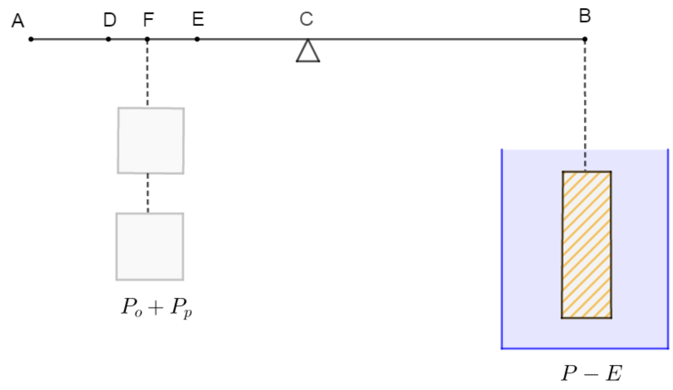
$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{BC} \cdot \left[(P_{ouro} - E_{ouro}) + \left(P_{prata} - E_{prata}\right) \right] ,$$

$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{BC} \cdot \left[\left(P_{ouro} + P_{prata}\right) - \left(E_{ouro} + E_{prata}\right) \right] ,$$

$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{BC} \cdot (P_{coroa} - E_{coroa}) \, . \tag{42}$$

Vamos então tomar por único contrapeso a soma $P_{coroa} = P_{ouro} + P_{prata}$. Como a densidade da liga é maior que a de prata e menor que a do ouro, esperamos, assim como Galileu, que o ponto de equilíbrio F esteja de fato entre D e E, como ilustra a Figura 79.

Figura 79 - Ouro e prata somados.



Fonte: do autor.

Assim, pela Lei da Alavanca:

$$\overline{FC} \cdot (P_{ouro} + P_{prata}) = \overline{BC} \cdot (P_{coroa} - E_{coroa})\,. \qquad (43)$$

Comparando as Equações (42) e (43), temos que:

$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{FC} \cdot \left(P_{ouro} + P_{prata}\right),$$

$$\overline{DC} \cdot P_{ouro} + \overline{EC} \cdot P_{prata} = \overline{FC} \cdot P_{ouro} + \overline{FC} \cdot P_{prata}\,,$$

$$P_{ouro} \cdot \left(\overline{DC} - \overline{FC}\right) = P_{prata} \cdot \left(\overline{FC} - \overline{EC}\right),$$

$$\frac{\overline{DC} - \overline{FC}}{\overline{FC} - \overline{EC}} = \frac{P_{prata}}{P_{ouro}}\,,$$

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FE}} = \frac{P_{prata}}{P_{ouro}} = \frac{m_{prata} \cdot g}{m_{ouro} \cdot g} = \frac{m_{prata}}{m_{ouro}}\,.$$

Então, conhecidos D, E e F, determinamos a razão entre os metais que compõem a liga.

Supereureca

Pouco mais velho que Galileu, Giambattista della Porta (1535- 1615) é considerado uma figura de transição (KODERA, 2015) do pensamento medieval à Revolução Científica que tomaria o século XVII. Dedicou-se, segundo escreveu, a desvendar os “segredos da natureza”. O resultado pode ser conferido em “Magiae Naturalis”, obra de grande sucesso editorial lançada em 1558, depois ampliada e traduzida para vários idiomas.

Neste catálogo de raridades, como chamou a obra, encontramos um pouco de tudo: truques de criptografia; dicas de perfumaria; descrição das propriedades dos ímãs; dicas de beleza para mulheres; meios para forjar pedras preciosas; técnicas de agricultura; criação de animais; culinária; experimentos com fogo e pólvora; receitas médicas; astrologia; alquimia; metalurgia; e uma extensa seção sobre ótica, entre outros temas.

Em meio a tantos "segredos", Della Porta propõe uma interessante solução para o problema da coroa de Hierão. E parodia Arquimedes, considerando ter superado o sábio de Siracusa: "Supereureca, supereureca!" (DELLA PORTA, 1658).

A estratégia vale-se das duas propriedades já tratadas, a Lei da Alavanca e o Princípio de Arquimedes. Resumidamente, consiste em pesagens da coroa e contrapesos de ouro e prata dentro e fora d'água. Della Porta não justifica o método, mas podemos fazê-lo por meio da equivalência de pesos aparentes.

Primeiramente, equilibramos na balança a coroa suspeita, feita de ouro e prata, e um contrapeso todo de ouro, de tal modo que $P_{coroa} = P_{ouro}^{ref}$. Levamos então ao fundo dágua o conjunto todo: a balança, a coroa e o contrapeso. Como o ouro é mais denso que a liga da coroa, seus pesos aparentes serão diferentes, e a balança desequilibra em favor do contrapeso de ouro. Então acrescentamos certa quantidade de ouro puro, de peso P_{ouro}^{1}, ao prato da coroa, até reequilibrar a balança. E assim estabelecemos a seguinte igualdade:

$$P_{ap\ coroa} + P_{ap\ ouro}^{1} = P_{ap\ ouro}^{ref} \,,$$

$$P_{coroa} - E_{coroa} + P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1} = P_{ouro}^{ref} - E_{ouro}^{ref} \,,$$

$$P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1} = E_{coroa} - E_{ouro}^{ref} \,. \tag{44}$$

Em seguida, repetimos a pesagem da coroa, fora da água, usando por contrapeso uma peça de prata. Ao mergulhar o conjunto na água, a balança desta vez desequilibra em favor da coroa, mais densa que a prata. Então adicionamos à bandeja que contém a prata certa quantidade de ouro, de peso P_{ouro}^{2}, até reequilibrar a balança, e chegamos à seguinte igualdade:

$$P_{ap\ coroa} = P_{ap\ prata}^{ref} + P_{ap\ ouro}^{2} \,,$$

$$P_{coroa} - E_{coroa} = P_{prata}^{ref} - E_{prata}^{ref} + P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2} \,,$$

$$P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2} = E_{prata}^{ref} - E_{coroa} \,. \tag{45}$$

Tomamos agora a razão entre os pesos aparentes das quantidades de ouro usadas e a reescrevemos, usando as Equações (44) e (45):

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{E_{coroa} - E_{ouro}^{ref}}{E_{prata}^{ref} - E_{coroa}}.$$

Comparando a equação acima à Equação (37), chegamos ao mesmo resultado:

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{m_{prata}}{m_{ouro}}. \tag{46}$$

Finalmente, mostramos que pesos aparentes e pesos reais estão em proporção:

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{P_{ouro}^{1} - \left(V_{ouro}^{1} \cdot d_{água} \cdot g\right)}{P_{ouro}^{2} - \left(V_{ouro}^{2} \cdot d_{água} \cdot g\right)},$$

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{P_{ouro}^{1} - \left(\frac{m_{ouro}^{1}}{d_{ouro}} \cdot d_{água} \cdot g\right)}{P_{ouro}^{2} - \left(\frac{m_{ouro}^{2}}{d_{ouro}} \cdot d_{água} \cdot g\right)},$$

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{P_{ouro}^{1} - \left(P_{ouro}^{1} \cdot \frac{d_{água}}{d_{ouro}}\right)}{P_{ouro}^{2} - \left(P_{ouro}^{2} \cdot \frac{d_{água}}{d_{ouro}}\right)},$$

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{P_{ouro}^{1} \cdot \left(1 - \frac{d_{água}}{d_{ouro}}\right)}{P_{ouro}^{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{água}}{d_{ouro}}\right)},$$

$$\frac{P_{ouro}^{1} - E_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2} - E_{ouro}^{2}} = \frac{P_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2}}.$$

Assim, resta claro que para resolver o problema basta conhecer os pesos das quantidades de ouro usadas para equilibrar o conjunto embaixo d'água:

$$\frac{P_{ouro}^{1}}{P_{ouro}^{2}} = \frac{m_{prata}}{m_{ouro}}.$$

3.10.3 Tarefas

1 (Problema). O rei de Siracusa encomendou um coroa de ouro e providenciou 1 000 g do metal precioso. A coroa ficou pronta, e de fato tinha 1 000 g. Mas o rei acha que foi enganado: o artesão teria retido parte do ouro e substituído o metal por prata. Para desvendar o caso, Arquimedes de Siracusa decidiu medir os volumes da coroa e de peças de mesma massa, uma toda

de ouro, outra de prata. Considere que Arquimedes possa medir perfeitamente o volume das três coroas: a de ouro tem 51,8 cm³, a de prata tem 95,2 cm³ e a joia sob suspeita tem 83,3 cm³.

a) determine a quantidade de ouro e prata na coroa adulterada, para que se possa recuperar o metal subtraído ao rei;
b) seja $V(x)$ uma função de variável real tal que x é a massa de prata contida na coroa e $V(x)$ é o volume da coroa adulterada. Determine o domínio e a imagem de $V(x)$, considerando os mesmos dados do enunciado;
c) defina a expressão algébrica de $V(x)$ em função x e a represente graficamente;
d) defina domínio, imagem e lei de formação da função $P(x)$, em que x é a massa de prata da coroa e $P(x)$ o peso aparente da coroa, dados os mesmos parâmetros de densidade e massa. Represente graficamente a função.

2 (Investigação). Considere a densidade da platina: 21,5 g/cm3; do ouro, 19,3 g/cm³; e da prata 10,5 g/cm³. Mostre como uma liga de platina, prata e ouro poderia enganar Arquimedes, tomando a licença histórica de imaginar que a platina fosse conhecida dos gregos – e mais barata que a prata, o que nem sempre se verifica.

3 (Exploração). Durante escavações nos anos 1970, arqueólogos acharam na região de Vergina, atual Grécia, uma rara e belíssima coroa de ouro puro. A joia foi encontrada em túmulo atribuído a Filipe II, que reinou sobre a Macedônia no século IV a.C., e tem as seguintes medidas: 18 cm de diâmetro máximo e 714 gramas (KYRIAKOU, 2014). Tomemos a descoberta para ilustrar as dificuldades que Arquimedes teria para deduzir seu volume por meio da imersão do objeto em água. Assuma que a densidade do ouro é de 19,3 g/cm³, e a da prata, 10, 5 g/cm³.

a) calcule o peso e o volume da coroa;
b) suponha um recipiente cilíndrico de diâmetro d, um pouco maior que a coroa. Calcule a diferença da altura da água no recipiente antes e depois de afundar a coroa;
c) calcule a diferença da altura da água antes e depois de afundar uma coroa de mesma massa, mas feita de ouro e prata em quantidades iguais.

4 DISCUSSÃO

A Matemática do Ensino Médio deita raízes em noções desenvolvidas muito tempo atrás. São séculos, milênios de história, a depender do tópico. Mas disso não se deduz automaticamente que o ensino de Matemática deva pautar-se pela abordagem histórica. Para o aluno, a Matemática não é um fim em si mesmo, de modo que é perfeitamente possível aprender logaritmos sem nunca ouvir falar de John Napier, ao contrário do que sustenta, de modo provocativo, Heiede (1992). Não só é possível, como é o que de fato acontece em muitas escolas.

Mas a história de Napier é de fato muito boa. Então por que não falar de Napier? Em nossas reflexões, pareceu-nos muito claro que muitos autores se aproximam da História da Matemática e lhe atribuem potencial didático porque o objeto de estudo lhes parece de fato envolvente, significativo, motivador – e a nós também. Heppel (1893) e Cajori (1894) são claros quanto a isso, como vimos no capítulo 2.

Resta uma armadilha, contudo, conforme nos aproximamos do tema, que é a de deixar-se fascinar pela História da Matemática a ponto de achar tudo envolvente, significativo e motivador. Daí a necessidade de dar atenção às resistências encontradas em sala de aula. Lembramos que muitos professores, sem contestar a importância da História da Matemática, questionam a eficácia do recurso. A fala “o aluno não gosta”, uma das objeções apontadas por Siu (2006), é um duro recado aos entusiastas da adoção dos elementos históricos no ensino da Matemática.

Convém, em vista disso, distinguir potencial motivador da efetiva motivação. Observamos que o potencial motivador da História da Matemática se realiza ou não se realiza conforme a circunstância didática. Como alertava, Fauvel (1991), a adoção da perspectiva histórica em sala de aula não é fácil. Por isso as experiências podem ser tão diversas, mais ou menos positivas, como aponta Siu (2006). Assim, quanto a este ponto, não há qualquer contradição entre o aval acadêmico dado ao uso pedagógico da História da Matemática e a resistência de alguns docentes. Das razões para o uso da História da Matemática, a questão se desloca para os meios de fazê-lo, como já sugeria Fauvel (1991): não sendo panaceia para o ensino, sob que circunstâncias a História da Matemática de fato enriquece o ensino da Matemática?

A atenção a essa armadilha guiou nossa pesquisa de passagens históricas apropriadas ao desenvolvimento de habilidades ditadas pela BNCC-EM. A dificuldade não foi tanta a de localizar episódios, autores e tratados relevantes – a oferta é muito farta. As dificuldades surgiram no momento de: identificar os dados históricos com potencial para, ao mesmo tempo, engajar e servir ao aprendizado; e estruturá-los de tal modo que lancem luz sobre propriedades matemáticas trabalhadas no Ensino Médio. O Quadro 1 sintetiza as associações feitas e relaciona os principais autores de que nos servimos.

Quadro 1 – Habilidades e principais pensadores tratados em cada relato

Relatos	Pensadores	Habilidades
3.1 Estatística para todos	Van Langren, Huygens, Halley, Playfair	EM13MAT102 - Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
3.2 Triunfo civilizatório		EM13MAT103 - Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
3.3 Obra firme, útil e bela	Vitrúvio, Platão, Pitágoras	EM13MAT201 - Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
3.4 Acaso e bom senso	Aristóteles, Kepler, Von Neumann	EM13MAT203 - Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
3.5 Por quem os senos dobram	Ptolomeu, Aryabhata, Pitiscus	EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
3.6 A borboleta e o tornado	Lorenz, Recorde, Eratóstenes	EM13MAT313 - Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
3.7 A linha e o número	Descartes, Oresme	EM13MAT401 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
3.8 Raízes, enxames e jasmins	Al-Khwarizmi, Bhaskara II, Apolônio	EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
3.9 A matemática secreta das abelhas	Papo de Alexandria, Steiner	EM13MAT506 - Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
3.10 Eureca e supereureca	Arquimedes, Galileu, Della Porta	EM13MAT510 - Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Aqui, cabem algumas palavras sobre nossa avaliação do potencial motivador dos elementos históricos selecionados. É certo que não quisemos reduzir a História da Matemática a anedotas e curiosidades biográficas. Mas é igualmente certo que curiosidades e anedotas são o que são porque têm o condão de arrebatar o interlocutor. Assim, pensamos, podem servir de gancho à introdução de um tema, tanto em sala de aula como, neste trabalho, no desenvolvimento dos relatos históricos. É o caso do casamento de Kepler, da coroa do rei de Siracusa, do "efeito gaivota", da matemática das abelhas, para citar alguns exemplos. "O gancho [...] captura tudo que há de interessante e envolvente na matéria e coloca isso bem diante da classe", defende Lemov (2010). "Esse tipo de coisa traz à vida os pés de ervilha de Gregor Mendel e faz com que a segunda lei do movimento de Newton pareça a coisa mais importante do mundo."

Ainda sobre a escolha dos temas, constata-se que, exceção feita ao relato 3.2, os demais incluem menções a autores diversos, separados no tempo e no espaço. É que, durante nossa exploração, pudemos verificar que o desenvolvimento de conceitos matemáticos tende a ser bastante acidentado, não a marcha "segura em direção à verdade", como pretendeu Montucla (1758). Assim, para servir ao ensino, a História da Matemática deve ecoar vozes, paisagens e tempos distintos. Para ficar num exemplo óbvio: uma abordagem histórica da chamada fórmula de Bhaskara, uma das mais conhecidas do aluno, não pode se resumir ao legado do grande matemático indiano. E não apenas porque a atribuição é indevida, mas porque sua história toca múltiplos esforços, anteriores e posteriores a ele. A atenção a essa multiplicidade de circunstâncias ajuda a superar a noção de que a Matemática é "uma produção individual de gênios que, num rompante de iluminação, têm ideias inovadoras", como critica Roque (2012).

Ao mesmo tempo, não vemos por que não se possa saudar as inovações de matemáticos do passado e lhes reconhecer o brilho da genialidade. É possível que o elogio desses autores desmotive o aluno, fixando a ideia de que a Matemática é uma atividade para gênios? Não cremos. A própria leitura de obras históricas pode rechaçar esse risco. Em muitas delas, verifica-se que seus autores são os primeiros a reconhecer a dívida que têm com seus antepassados e afastar a hipótese de que tenham obtido um resultado qualquer num rompante. Tomemos o "Almagesto", de Ptolomeu, como exemplo. No prefácio, o astrônomo escreve: é o "amor pela contemplação do que é eterno e imutável que nos esforçamos para aumentar constantemente", por meio do estudo daquilo que outros antes dele já haviam dominado "com um genuíno espírito de investigação", esperando assim contribuir tanto quanto a passagem do tempo lhe faculta (TOOMER, 1984). De mais a mais, cabe notar que, em diversos campos de pesquisa, figuras históricas são tomadas como fonte de inspiração, não de constrangimento. Por que a Matemática seria uma exceção?

Como explicamos no capítulo 1, a seleção de elementos históricos se deu em duas etapas. Na primeira, verificamos relevância histórica, disponibilidade de fontes históricas e adequação à etapa escolar. Na segunda, examinamos sua conveniência, conforme pudessem satisfazer às razões que Fauvel (1991) aponta para a adoção da História da Matemática no ensino. No Quadro 2, apontamos as relações encontradas, segundo análise qualitativa.

Quadro 2 – Razões, no sentido de Fauvel (1991), para o uso da história, por relato

Razões para o uso de HM	**Relatos**									
	3.1	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**3.10**
ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
dá à matemática uma face humana	x	x	x	x		x	x	x		x
ajuda a organizar os tópicos do currículo					x		x	x		
mostrar como os conceitos se desenvolveram facilita sua compreensão	x	x	x		x		x	x	x	x
muda a percepção que os alunos têm da matemática	x	x	x							
comparar o antigo e o moderno dá valor às técnicas modernas	x	x		x			x	x		
ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural		x				x		x		
abre oportunidades para investigações	x		x	x	x	x	x		x	x
obstáculos do passado ajudam a explicar o que os alunos acham difícil					x		x	x		x
alunos acham conforto ao ver que não são os únicos com dificuldades					x		x	x	x	x
incentiva os alunos mais rápidos a estudarem mais a fundo	x			x					x	
ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade	x	x	x	x		x				x
torna a matemática menos assustadora							x	x		x
ajuda a sustentar o próprio interesse e a empolgação com a matemática		x	x	x	x	x			x	x
oferece oportunidade de trabalhos interdisciplinares	x	x								x

O quadro acima reflete a intenção deliberada de escolher assuntos, autores e episódios com potencial para engajar o aluno e induzir uma compreensão mais significativa dos tópicos do Ensino Médio, conforme a motivação original deste trabalho. Daí a prevalência das razões "ajuda a aumentar a motivação", "dá uma face humana à Matemática", "mostrar como os conceitos se desenvolveram facilita sua compreensão" e "abre oportunidades para investigações".

As associações encontradas apontam também para a centralidade dos tratados matemáticos na História da Matemática. De muitos autores aqui referidos, sabe-se apenas o que deixaram escrito, e ainda assim, frequentemente, segundo as poucas cópias que resistiram à passagem dos séculos. É uma razão a mais para o uso das fontes históricas. Dessa forma, tratados de relevo tiveram destaque na construção de relatos e tarefas – e podem tê-lo também, achamos, em sala de aula.

É claro que o potencial atribuído a cada relato aqui apresentado deriva de nossa própria leitura dos fatos históricos. Só o professor, diante de seus alunos, poderá corroborá-las. O que nos leva a formular mais uma questão: quais efeitos o docente efetivamente verifica em sala de aula, diante de alunos do Ensino Médio, ao adotar a perspectiva histórica? Mediante que estratégia?

Como dissemos, tomamos a tarefa como "elemento organizador da atividade de quem aprende" (Ponte, 2014). É fundamental contemplá-la, então, quando se propõe a adoção do recurso didático. Pode-se relacionar pelo menos quatro das objeções de docentes sintetizadas por Siu (2006) a esse ponto. As falas "Isso não é Matemática", "Eu não tenho tempo para isso" e "Como se faz uma questão sobre isso?" parecem refletir uma noção de que o uso da História de Matemática implica abrir mão da Matemática. E pode-se suspeitar também que quando o professor reclama da falta de material, não está se referindo apenas a fontes de consulta, mas também, e talvez principalmente, a exemplos e tarefas matemáticas de nível escolar. Lembramos aqui que Pereira (2016), em sua análise de seis coleções didáticas, apontou que apenas 13% das menções à História da Matemática têm função de "estratégia didática". Eis outra questão a que esta exploração nos conduz: que tipo de material falta ao professor interessado no uso de História de Matemática? Fontes de consulta? Exercícios? Sequências didáticas?

Propusemos um total de 44 tarefas, de diferentes tipos, associadas aos relatos históricos: algumas mais voltadas à investigação, outras à fixação de conceitos; alguns enunciados mais longos, exigindo do aluno a interpretação atenta do texto, outros mais imediatos; algumas questões difíceis, outras mais óbvias; tarefas para a determinação de resultados e tarefas para demonstração de propriedades; questões reproduzidas de obras históricas, questões adaptadas e questões originais; com uso de recursos tecnológicos ou sem eles. Buscamos com isso explorar todo o potencial das fontes históricas no preparo de atividades para o Ensino Médio. No Quadro 3, organizamos as tarefas propostas segundo os tipos de Ponte (2014), em abordagem qualitativa.

Quadro 3 – Classificação das tarefas, conforme tipologia de Ponte (2014)

Relatos	**Tarefas**	**Tipos de tarefa**			
		Exercício	**Problema**	**Exploração**	**Investigação**
3.1	1				x
	2	x			
	3		x		
	4			x	
	5			x	
3.2	1			x	
	2	x			
	3		x		
	4				x
3.3	1			x	
	2			x	
	3				x
	4		x		
	5				x
3.4	1			x	
	2		x		
	3		x		
3.5	1	x			
	2		x		
	3				x
	4	x			
	5	x			
	6			x	
3.6	1			x	
	2	x			
	3	x			
	4			x	
	5				x
3.7	1	x			
	2		x		
	3				x
	4				x
3.8	1			x	
	2	x			
	3		x		
	4	x			
3.9	1		x		
	2		x		
	3		x		
	4	x			
	5				x
3.10	1		x		
	2				x
	3			x	

Finalmente, observamos que a decisão de apresentar as associações feitas na forma de relatos históricos dirigidos a professores e tarefas voltadas aos alunos nos pareceu extremamente gratificante. Pudemos assim aprofundar algumas passagens históricas mais notórias, investigar alguns autores menos conhecidos e explorar diferentes estratégias de demonstração matemática.

Muito especialmente, pudemos passear por alguns dos tratados mais importantes da História da Matemática. Assim, nós também tivemos a oportunidade de experimentar os "efeitos especiais" que Jahnke *et al.* (2002) atribuem à leitura de fontes históricas: a substituição, a reorientação e o entendimento cultural. A esses efeitos, acrescentamos mais um, aplicando aos tratados matemáticos a noção de "clássico", segundo Calvino (2007): a satisfação de ler "aqueles livros que chegam até nós trazendo consigo as marcas das leituras que precederam a nossa e atrás de si os traços que deixaram na cultura ou nas culturas que atravessaram".

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sondamos ao longo desta investigação o descompasso entre o entusiasmo com a História da Matemática na pesquisa científica e a atenção dada a ela em sala de aula. Por legítimas que sejam as razões para resistência de professores, concluímos que é possível e recomendável contorná-las, no plano imediato, por meio de recursos didáticos alinhados ao currículo comum do Ensino Médio. Pretendemos que seja essa a nossa contribuição.

A escolha de elementos históricos para uso em sala pode ser feita segundo os mais variados objetivos. Aqui, na construção de relatos e tarefas, procuramos destacar seu rico potencial para a motivação e o esclarecimento de conceitos e processos matemáticos. Quanto a isso, o emprego de fontes históricas, apesar da barreira linguística, mostrou-se especialmente fecundo. Além de informar os impasses, as dificuldades e o contexto em que certas noções se desenvolveram, as fontes históricas servem também como inspiração para a elaboração de atividades.

Esperamos no futuro estender a presente abordagem às demais habilidades da BNCC-EM e também aos Itinerários Formativos, de modo a explorar associações históricas para todo o programa do Ensino Médio. Em outro momento, pretendemos também reorganizar as tarefas matemáticas propostas, com orientações e respostas detalhadas, na forma de um banco de questões, para melhor proveito dos colegas docentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAGO, F. **Astronomie populaire**. 2 ed. Paris: T. Morgand, 1865. v. 4, 858 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=K5MAAAAAMAAJ>. Acesso em: 13 fev. 2021.

ARTMANN, B. The Origin of Mathematics 1: The Testimony of Eudemus. In: ARTMANN, B. **Euclid - The Creation of Mathematics**. Nova York: Springer, 1999. p. 11-16. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1412-0_3>.

ASSIS, A. K. T. Sobre os corpos flutuantes, tradução comentada de um texto de Arquimedes. **Revista da SBHC**, n. 16, p. 69-80, 1996.

ASSIS, A. K. T. Sobre o equilíbrio dos planos, tradução comentada de um texto de Arquimedes. **Revista da SBHC**, n. 18, p. 81-94, 1997.

BARBARO, D. M. **Vitruuiis Pollionis De Architectura libri decem, cum commentariis Danielis Barbari**. Veneza: Franciscum Franciscium Senensem et Crugher germanum, 1567. Disponível em: <https://hdl.handle.net/2027/ucm.5324251139>. Acesso em: 17 abr. 2021.

BEECH, M. The reluctant parsec and the overlooked light-year. **The Observatory**, Londres, v. 128, p. 489-494, dez. 2008.

BELLOS, A. **Alex no País dos Números**: uma viagem ao mundo maravilhoso da matemática. São Paulo: Companhia das Letras, 2010. 512 p. ISBN 9788535918380.

BENIGER J. R.; ROBYN D. L. Quantitative graphics in statistics: A brief history. **The American Statistician**, v. 32, n. 1, p. 1-11, fev. 1978. <https://doi.org/10.2307/2683467>.

BERNARD, A.; PROUST, C.; ROSS, M. Mathematics Education in Antiquity. In: KARP, A.; SCHUBRING, G. (ed). **Handbook on the History of Mathematics Education**. Nova York: Springer, 2014. p. 27-53. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_3>.

BESSEL, F. A letter from Professor Bessel to Sir J. Herschel, Bart., dated Konigsberg, Oct. 23, 1838. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, [s.l.], v. 4, n. 17, p. 152–161, 1838. <https://doi.org/10.1093/mnras/4.17.152>.

BIPM. **SI brochure**: the International System of Units (SI). 9 ed. Sèvres: Bureau international des poids et mesures, 2019. 216 p. Disponível em: <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>. Acesso em: 23 jan. 2021.

BLÅSJÖ, V. The isoperimetric problem. **The American Mathematical Monthly**, v. 112, n. 6, p. 526-566, 2005. <https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920227>.

BORDA, J. C.; LAGRANGE, J. L.; LAPLACE, P. S.; MONGE, C.; CONDORCET, J. A. N. **Rapport sur le choix d'une unité de mesure**: lu à l'Académie des sciences le 19 mars 1791. Paris: Impr. Nationale, 1791. (Les archives de la Révolution française). Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k571270/f8.item>. Acesso em: 22 dez. 2020.

BOWMAN, J. S. Appendix 2: Scientific-Technological Achievements in Asia. In: BOWMAN, J.S. (ed). **Columbia chronologies of Asian history and culture**. Nova York: Columbia University Press, 2000. 776 p. ISBN 9780231500043. <https://doi.org/10.7312/bowm11004>.

BOYER, L. E. Elementary Approximate Computation. **The Mathematics Teacher**, vol. 32, n. 6, p. 249–258, 1939. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/27952313>. Acesso em: 12 abr. 2021.

BOYER, C. B. Note on an early graph of statistical data (Huygens 1669). **Isis**, v. 37, n. 3/4, p. 148-149, 1947. <https://doi.org/10.1086/348018>.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A history of mathematics**. 3 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011. 688 p. ISBN 978-0-470-52548-7.

BRASIL. Lei nº 1.157, de 26 de junho de 1862. Substitue em todo o Imperio o actual systema de pesos e medidas pelo systema metrico francez. In: **Coleção de Leis do Império do Brasil de 31/12/1862**. Rio de Janeiro: 1862. v. 4, p. 1. Disponível em: <http://legis.senado.leg.br/norma/542777>. Acesso em: 29 out. 2020.

BRASIL. Serviço de Estatística da Produção. **Unidades agrárias não decimais em uso no Brasil**. Rio de Janeiro: Serviço de Estatística da Produção. 1948. 105 p. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=249155>. Acesso em: 21 fev. 2021.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Presidência da República, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm>. Acesso em: 3 jan. 2021.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Presidência da República, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 9 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002a. 141 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer número 1.302/2001**. Assunto: Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: Ministério da educação, 2002b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Resolução nº 4, de 17 de dezembro de 2018. Institui a Base Nacional Comum Curricular na Etapa do Ensino Médio (BNCC-EM). **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, ed. 242, p. 120, dez. 2018a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2018-pdf/104101-rcp004-18/file>. Acesso em: 6 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base (versão final). Brasília: Ministério da Educação, 2018b. 600 p. Disponível em:

<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Ensino Médio (terceira versão). Brasília: Ministério da Educação, 2018c. 154 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Edital de convocação nº 03/2019**. Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas, literárias e recursos digitais para o programa nacional do livro e do material didático PNLD 2021. Brasília: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2019a. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/consultas/editais-programas-livro/item/13106-edital-pnld-2021>. Acesso em: 8 mar. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Portaria nº 1.432, de 28 de dezembro de 2018. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, ed. 250, p. 60, abr. 2019b. Disponível em: <https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=05/04/2019&jornal=515&pagina=94>. Acesso em: 5 abr. 2021.

BRITTO, S.L.M.; BAYER, A. O uso da História no ensino da Matemática e a opinião dos professores de Matemática do Ensino Médio da 2ª CRE quanto ao uso desse recurso. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 9, n. 1, p. 41-62, 2007.

BURGESS, E. **Translation of the Surya-siddhanta**: A Text-Book of Hindu Astronomy. Calcutá: University of Calcutta, 1935. 409 p. Disponível em: <https://archive.org/details/SuryaSiddhantaTranslation/>. Acesso em: 12 jan. 2021.

BURKERT, W. **Lore and science in ancient Pythagoreanism**. Tradução Edwin L. Minar Jr. Cambridge: Harvard University Press, 1972. 535 p. ISBN 9780674539181.

BURTON, D.M. **The history of mathematics**: An introduction. 7 ed. Nova York: McGraw-Hill, 2011. 819 p. ISBN 978–0–07–338315–6.

BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P.A. **Estatística básica**. 6 ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010. 540 p. ISBN 978-85-02-08177-2.

C., H. W. The International Metric Commission. **Nature**, v. 7, n. 168, p. 197–198, 1873. <https://doi.org/10.1038/007197a0>.

CAJORI, F. **A history of mathematical notations**. Nova York: Dover, 1993. 868 p. ISBN 0-486-67766-4. Disponível em: <https://archive.org/details/historyofmathema00cajo_0/>. Acesso em: 27 mar. 2021.

CAJORI, F. **A History of Mathematics**. Nova York: Macmillan, 1894. Disponível em: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.73802/>. Acesso em: 23 dez. 2020.

CAJORI, F. Mathematical signs of equality. **Isis**, v. 5, n. 1, p. 116-125, 1923. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/223601>. Acesso em: 2 dez. 2020.

CALVINO, I. **Por que ler os clássicos**. São Paulo: Companhia das Letras, 2007. ISBN 978-85-359-1134-3.

CANTOR, M. **Vorlesungen über geschichte der mathematik**: von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig: B.G. Teubner, 1880. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=hdQGAAAAYAAJ>. Acesso em: 11 nov. 2020.

CARMO F. M.; QUEIROZ, A. J. Uma análise de elementos curriculares da disciplina História da Matemática nas licenciaturas do Ceará. **Cocar**, v. 14, n. 30, 2020.

CARMO, A. H. M. do. **Tópicos da história da Matemática como exemplificadores e motivadores para a aprendizagem matemática nas escolas de Lago do Junco (MA)**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

CARVALHO, L. S.; CAVALARI, M. F. History of Mathematics in Basic Education: a study of undergraduate students graduating in Mathematics. **Research, Society and Development**, v. 8, n. 4, p. e2884872, 2019. <https://doi.org/10.33448/rsd-v8i4.872>.

CHRISTIAN, B.; GRIFFITHS, T. **Algoritmos para viver**: A ciência exata das decisões humanas. Tradução Paulo Geiger. São Paulo: Companhia das Letras, 2017. 438 p.

CICERO, M. T. **De Natura Deorum**. Tradução Francis Brooks. London: Methuen, 1896. Disponível em: <https://oll.libertyfund.org/title/cicero-on-the-nature-of-the-gods>. Acesso em: 10 out. 2021.

CLAGETT, M. Nicole Oresme and medieval scientific thought. **Proceedings of the American Philosophical Society**, v. 108, n. 4, p. 298–309, 1964.

COLEBROOKE, H.T. **Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara**. Londres: John Murray, 1817. 378 p. Disponível em: <https://archive.org/details/algebrawitharith00brahuoft/>. Acesso em: 18 set. 2020.

CORNELLI, G. A vida de Pitágoras de Diógenes Laércio: questões sobre a recepção do pitagorismo no período imperial. In: LEÃO, D; CORNELLI, G; PEIXOTO, M.C. (coord). **Dos homens e suas ideias**: estudos sobre as vidas de Diógenes Laércio. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013. p. 247-265. ISBN 978-989-721-042-6.

COSTIGAN-EAVES, P.; MACDONALD-ROSS, P. William Playfair (1759-1823). **Statistical Science**, v.5, n.3, p. 318-326. 1990. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2245819>. Acesso em: 15 mai. 2021.

CREASE, R. P. **A medida do mundo**: a busca por um sistema universal de pesos e medidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2013. 296 p. ISBN 9788537811078.

CRÉPEL, P.; COSTE, A. Chapter 21 - Jean-Etienne Montucla, Histoire des mathématiques, second edition (1799–1802). In: GUINNESS, G.; COOKE, R.; CORRY, L.; CRÉPEL, P.; GUICCIARDINI, N. (ed.) **Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940**. Elsevier Science, 2005. p. 292-302. <https://doi.org/10.1016/B978-044450871-3/50102-9>.

CREWE, M. The fathers of scientific meteorology – Boyle, Wren, Hooke and Halley: Part 2. **Weather**, v. 58, n. 4, p. 135-139. 2003. <https://doi.org/10.1256/wea.95.02B>.

CUOMO, S. **Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 234 p. (Cambridge Classical Studies) ISBN 0 521 64211 6.

CUOMO, S. A case-study in Roman mathematics: The description of the analemma in Vitruvius' De architectura, book IX. In: IMHAUSEN, A.; POMMERENING, T. (ed). **Translating Writings of Early Scholars in the Ancient Near East, Egypt, Greece and Rome**. Berlim: De Gruyter, 2016. p. 439-464. <https://doi.org/10.1515/9783110448818-011>.

DANESI, M. **The puzzle instinct**: The meaning of puzzles in human life. Bloomington: Indiana University Press, 2002. 270 p. ISBN 0-253-34094-2.

DAUBEN, J. W.; SCRIBA, C. J. **Writing the History of Mathematics**: its historical development. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. (Science Networks, v. 27) ISBN 3-7643-6167-2.

DELLA PORTA, G. **Natural magick**. Londres: T. Young and S. Speed, 1658. Disponível em: <https://lccn.loc.gov/09023451>. Acesso em: 6 jan. 2021.

DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus La dioptrique, Les météores et La géométrie qui sont des essais de cette méthode**. Leiden: Jan Maire, 1637. 537 p. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594/f5.item>. Acesso em: 11 dez. 2020.

DESCARTES, R. **The geometry of René Descartes translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham**: With a facsimile of the first edition, 1637. Nova York: Dover, 1997. 243 p. ISBN 0-486-60068-8.

DI LISCIA, Daniel A. La 'latitud de las formas' y la geometrización de la ciencia del movimiento. **Mediaevalia**, v. 36, p. 75-114, out. 2017.

DIAS, J. L. de M. **Medida, normalização e qualidade: aspectos da história da metrologia no Brasil**. Rio de Janeiro: Inmetro/Ilustrações, 1998. 292 p. Disponível em: <http://repositorios.inmetro.gov.br/handle/10926/1195>. Acesso em: 8 out. 2020.

DOW, S. Aristotle, the kleroteria, and the courts. **Harvard Studies in Classical Philology**, v. 50, p. 1-34, 1939. <https://doi.org/10.2307/310590>.

DUHEM, P. M. M. **Etudes sur Léonard de Vinci**: ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1913. 605 p. Disponível em: <https://archive.org/details/tudessurlona03duhe/>. Acesso em: 15 dez. 2020.

DUKE, D. W. The very early history of trigonometry. **International Journal of Scientific History**, Baltimore, v. 17, p. 34-42. 2011.

DUTKA, J. Eratosthenes' measurement of the Earth reconsidered. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 46, n. 1, pp. 55–66, 1993. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/41134135>. Acesso em: 18 fev. 2021.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. Unesp, 1999. p. 97-115. ISBN 8571392528.

ERNEST, P. The History of Mathematics in the classroom. **Mathematics in School**, v. 27, n. 4, p. 25-31, 1998. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/30211871>. Acesso em: 1 mai. 2021.

EUCLIDES. **Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undécimo e duodécimo da versão latina de frederico commandino, addicionados e ilustrados por Roberto Simson**. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2021.

FAUVEL, J. Using History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 3-6, 1991. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40248010>. Acesso em: 7 fev. 2021.

FAUVEL, J.; GRAY, J. **The History of Mathematics**: a reader. Basingstoke: Macmillan Press; Londres: Open University, 1987. 628 p.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (ed). **History in mathematics education**: The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002. (New ICMI Study Series, 6). <https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1>.

FERGUSON, T.S. Who solved the secretary problem? **Statistical science**, v. 4, n. 3, p. 282-289, ago. 1989. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2245639>. Acesso em: 12 mai. 2021.

FILIPE, E. A nova definição do kelvin e implicações na sua mise-en-pratique. **Gazeta de Física**, Lisboa, v. 42, n. 3, p. 18-21, out. 2019.

FITZPATRICK, R. **Euclid's Elements of Geometry**: the Greek text of J. L. Heiberg (1883–1885). Texas: Richard Fitzpatrick, 2008. ISBN 978-0-6151-7984-1.

FREIRE, G. G.; ROCHA, Z. de F. D. C.; GUERRINI, D. Produtos educacionais do Mestrado Profissional em Ensino da UTFPR – Londrina: estudo preliminar das contribuições. **Polyphonía**, v. 28, n. 2, p. 375-390. 2017. <https://doi.org/10.5216/rp.v28i2.52761>

FREUDENTHAL, H. Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n. 1, p. 30-33, 1981. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/40240745>. Acesso em: 24 abr. 2021.

FRIENDLY, M. A brief history of data visualization. In: CHEN, C.; HÄRDLE, W.; UNWIN, A. **Handbook of Data Visualization**. Berlim: Springer, 2008. p. 15-56. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-33037-0_2>.

FRIENDLY, M.; DENIS, D. The early origins and development of the scatterplot. **Journal of the History of Behavioral Sciences**, v. 41, n. 2, p. 103-130, 2005. <https://doi.org/10.1002/jhbs.20078>.

FRIENDLY, M.; VALERO-MORA, P.; ULARGUI, J.I. The first (known) statistical graph: Michael Florent van Langren and the 'Secret' of Longitude. **The American Statistician**, v. 64, n. 2, p. 174-184, 2010.

FRISINGER, H. H. Mathematicians in the history of meteorology: The pressure-height problem from Pascal to Laplace. **Historia mathematica**, v. 1, n. 3, p. 263-286, 1974. <https://doi.org/10.1016/0315-0860(74)90066-4>.

FUNKHOUSER, H. G. A note on a tenth century graph. **Osiris**, v. 1, p. 260-262, 1936. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/301609>. Acesso em: 10 jan. 2021.

FUNKHOUSER, H. G. Historical development of the graphical representation of statistical data. **Osiris**, v. 3, p. 269-404, 1937. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/301591>. Acesso em: 13 mar. 2021.

FURINGHETTI, F. The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 31, n. 1, p. 43–51, 2000. <https://doi.org/10.1080/002073900287372>.

FURINGHETTI, F. Rethinking history and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 51, n. 6, p. 967-994, 2020. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>.

GALILEI, G. **Opere di Galileo Galilei**. Firenze: Gaetano G. Tartini e Santi Franchi, 1718. v. 3. Disponível em: <https://archive.org/details/b30537629_0003>. Acesso em: 11 mar. 2021.

GANDZ, S. The Origin of the Term 'Algebra'. **The American Mathematical Monthly**, v. 33, n. 9, p. 437-440, 1926. <https://doi.org/10.2307/2299605>.

GANDZ, S. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek, and early Arabic algebra. **Osiris**, v. 3, p. 405-557, 1937. Disponível em: <https://www.jstor.com/stable/301592>. Acesso em: 10 abr. 2021.

GARMS, M.A.; CALDAS, I.L. Síntese das leis de Kepler. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 40, n. 2, e2316, 2018. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0253>.

GENERAL ASSEMBLY OF INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION, 28., 2012, Pequim. Resolution B2 on the re-definition of the astronomical unit of length. Pequim: **International Astronomical Union**, 2012. Disponível em: <https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2012_English.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200 p. ISBN 978-85-224-5142-5.

GIRARD, G. The third periodic verification of national prototypes of the kilogram (1988–1992). **Metrologia**, v. 31, n. 4, p. 317–36, 1994. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/31/4/007>.

GLEICK, J. **Chaos**: Making a new science. Nova York: Open Road Media, 2011. ISBN 978-1-4532-1048-2.

GOMES, M. L. **As práticas culturais de mobilização de histórias da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

GONZÁLEZ-VELASCO, E. A. **Journey through Mathematics**: Creative Episodes in Its History. Nova York: Springer, 2011. 466 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-92154-9>.

GOULDING, R. Histories of science in early modern Europe: introduction. **Journal of the History of Ideas**, v. 67, n. 1, p. 33-40, 2006. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3840398>. Acesso em: 10 nov. 2020.

GUTHRIE, K.S. **The Pythagorean sourcebook and library**: an anthology of ancient writings which relate to Pythagoras and Pythagorean philosophy. Grand Rapids: Phanes Press, 1987. 362 p. ISBN 978-0-9339-9951-0.

HAHN, R. **The metaphysics of the Pythagorean theorem**: Thales, Pythagoras, engineering, diagrams, and the construction of the cosmos out of right triangles. Albany: State University of New York Press, 2017. 300 p. ISBN 978-1-4384-6489-3.

HALLEY, E. A discourse of the rule of the decrease of the height of the mercury in the barometer, according as places are elevated above the surface of the Earth, with an attempt to discover the true reason of the rising and falling of the mercury, upon change of weather. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 16, n. 181, p. 104-115, 1687. <https://doi.org/10.1098/rstl.1686.0017>.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics**. 10 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013. 1232 p. ISBN 978-1-1182-3071-8.

HAYASHI, T. Aryabhata's rule and table for sine-differences. Historia Mathematica, v. 24, n. 4, p. 396-406, 1997. <https://doi.org/10.1006/hmat.1997.2160>.

HEATH, T. L. **The works of Archimedes**: edited in modern notation. Londres: C. J. Clay and sons. Cambridge: Cambridge University Press, 1897. 528 p. Disponível em: <https://archive.org/details/worksofarchimede00arch/>. Acesso em: 20 fev. 2021.

HEATON, H. A method of solving quadratic equations. **The American Mathematical Monthly**, v. 3, n. 10, p. 236-237, 1896. <https://doi.org/10.1080/00029890.1896.11998825>.

HEIEDE, T. Why teach History of Mathematics? **The Mathematical Gazette**, v. 76, n. 475, p. 151-157, mar. 1992. <https://doi.org/10.2307/3620388>.

HEILBRONNER, J. C. **Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum XVI**. Leipzig: Joh. Friderici Gleditschii, 1742. 924 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MOSBkLAMOf8C>. Acesso em: 16 jan. 2021.

HEPPEL, G. The use of history in teaching mathematics. **General Report (Association for the Improvement of Geometrical Teaching)**, v. 19, p. 19-33. 1893. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/24681272>. Acesso em: 7 mai. 2021.

HIGHAM, N. J. **Accuracy and stability of numerical algorithms**. 2 ed. Philadelphia: SIAM, 2002. ISBN 0-89871-521-0.

HODDESON, L. H. How did Archimedes solve King Hiero's crown problem? An unanswered question. **The Physics Teacher**, v. 10, n. 1, p. 14-19, 1972. <https://doi.org/10.1119/1.2352055>.

HODGKIN, L. **A history of mathematics: from Mesopotamia to modernity**. Oxford: Oxford University Press, 2005. 296 p. ISBN 978–0–19–852937–8.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. p. 2925. ISBN 85-7302-383-X.

HUFF, D. **Como mentir com estatística**. Tradução Bruno Casotti. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016. 159 p. ISBN 978-85-8057-952-9.

HULTSCH, F. **Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt**. Berlim: Weidmannos, 1876. v. 1, 510 p. Disponível em: <https://archive.org/details/pappialexandrin00hultgoog/>. Acesso em: 20 mai. 2021.

HUYGENS, C. **Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences**. La Haye: Martinus Nijhoff, 1895. v. 6, 726 p. Disponível em: <https://archive.org/details/oeuvrescomplte06huyg/>. Acesso em: 9 fev. 2021.

JAHNKE H. N.; ARCAVI, A.; BARBIN, E.; BEKKEN, O.; FURINGHETTI, F.; EL IDRISSI, A. The use of original sources in the mathematics classroom. In: FAUVEL J., VAN MAANEN J. (eds) **History in mathematics education**: The ICMI study. Dordrecht: Springer, 2002. p. 291-328. <https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_9>.

JAUBERT, F. **Collection des lois françaises sur le droit civil, disposées dans l'ordre alphabétique, par un ancien jurisconsulte de Bordeaux**. Bordeaux: Pinard père et fils, 1799. v. 2, 660 p. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9677713d/>. Acesso em: 30 jan. 2021.

JELIN, D.; VENEZUELA, A. L. Escolhendo 'isso e aquilo' com Descartes: tarefas para o Ensino Médio. **Revista História de Matemática para Professores**. Em revisão.

JOFFILY, G. I. O quebra-quilo. A revolta dos matutos contra os doutores (1874). **Revista de História**, São Paulo, v. 54, n. 107, p. 69-145, 1976. <https://doi.org/10.11606/issn.2316-9141.rh.1976.78552>.

JOFFILY, I. **Notas sobre a Parahyba**. Rio de Janeiro: Typographia do Jornal do Commercio, 1892. 255 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?hl=en&lr=&id=6ilLAQAAIAAJ>. Acesso em: 18 jan. 2021.

KODERA, S. Giambattista della Porta. In: ZALTA, E. N. (ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Summer 2015 Edition). Metaphysics Research Lab, 2015. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/della-porta/>. Acesso em 6 abr. 2021.

KOESTLER, A. **The sleepwalkers**: A history of man's changing vision of the universe. Londres: Arkana, Penguin, 1990. 623 p.

KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. **Mathematical odyssey**: Journey from the Real to the Complex. Nova York: Springer, 2014. 382 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8939-9>.

KULA, W.; SZRETER, R. **Measures and men**. Princeton: Princeton University Press, 1986. 398 p. eISBN 978-1-4008-5773-9.

KUNKEL, P. **The books of Conics**: Geometer's Sketchpad documents. 2017. Disponível em: <http://whistleralley.com/conics/conica/>. Acesso em: 21 jan. 2021.

KYRIAKOU, A. Exceptional burials at the sanctuary of Eukleia at Aegae (Vergina): The gold oak wreath. **The Annual of the British School at Athens**, v. 109, p. 251–285, 2014. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/44082095>. Acesso em: 11 nov. 2021.

LAERTIUS, D. **Lives of eminent philosophers**. Tradução R. D. Hicks. Cambridge: Harvard University Press, 1972. Perseus Digital Library Project. Disponível em:

<http://data.perseus.org/citations/urn:cts:greekLit:tlg0004.tlg001.perseus-eng1:8.1>. Acesso em: 13 mar. 2021.

LAPLACE, P. S. **Théorie analytique des probabilités**. 2. ed. Paris: Courcier, 1814. 508 p. Disponível em: <https://books.google.com.na/books?id=6MRLAAAAMAAJ>. Acesso em: 8 jan. 2021.

LAX, P. D., A Short Path to the Shortest Path. **The American Mathematical Monthly**, v. 102, n. 2, p. 158-159, 1995. <https://doi.org/10.1080/00029890.1995.11990550>.

LEMOV, D. **Aula nota 10**: 49 técnicas para ser um professor campeão de audiência. Tradução Leda Beck. São Paulo: Da Boa Prosa, Fundação Lemann. 2011.

LEONARDI, G. P. Il mistero isoperimetrico di Zenodoro. In: BROGLIA, F; DEDÒ, M; TAMANINI, I. **Vedere la Matematica alla maniera di Mimmo Luminati**. Pisa: ETS, 2015. p. 101-119. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11380/1060618>. Acesso em 1 abr. 2021.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 289 p. (Coleção PROFMAT) ISBN 9788585818814.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963a. <https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2>.

LORENZ, E. N. Section of planetary sciences: The predictability of hydrodynamic flow. **Transactions of the New York Academy of Sciences**, v. 25, p. 409-432, 1963b. <https://doi.org/10.1111/j.2164-0947.1963.tb01464.x>.

LORENZ, E. N. **The essence of chaos**. Londres: University College London, 2005. 227 p. ISBN 0-203-21458-7.

LORENZ, E. N. Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas? **Resonance – Journal of Science Education**, v. 20, n. 3, p. 260-263, mar. 2015.

LUCIE, P. Galileo e a tradição arquimedeana: La Bilancetta. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 9, p. 105-107, 1986.

LUEDER, A. F. **Kritische Geschichte der Statistik**. Göttingen: Röwer, 1817. Disponível em: <http://mdz-nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:12-bsb10429654-0>. Acesso em: 18 fev. 2021.

MALBOUISSON, I. V. C. **Filosofia e ciência no século XIV**: o caso de Nicole Oresme. 2011. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2011.

MENEZES, J. E. Concepções de professores sobre a inserção da história no ensino das ciências: potencialidades e limites. In: NOBRE, S.; BERTATO, F.; SARAIVA, L. (eds). **Anais/Actas do 6. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática**. Natal: SBHMat, 2014. p. 733-744.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. 192 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática). ISBN 978-85-513-0658-1.

MILLER, J. **Earliest known uses of some of the words of Mathematics**. 2020. Disponível em: <https://jeff560.tripod.com/mathword.html>. Acesso em: 25 mar. 2021.

MILLETTE, D. On illustrating the oldest architectural book: sketches and mnemonics in Vitruvius's De Architectura libri decem. **The Journal of the Society for the Study of Architecture in Canada**. v. 24, n. 4, p. 18-27, 1999.

MINAYO, M. C. de S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. de S. (org.), DESLANDES, S. F., CRUZ NETO, O., GOMES, R. **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. p. 9-30. ISBN 85.326.1145-1;

MOLLAND, A. G. Essay Review: Oresme Redivivus: Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum. **History of Science**. v. 8, n. 1, p. 106-119, mar. 1969. <https://doi.org/10.1177/007327536900800105>.

MONTGOMERY, S. L.; KUMAR, A. **A history of Science in world cultures**: voices of knowledge. Londres e Nova York: Routledge, 2016. 349 p. ISBN 9780415639842.

MONTUCLA, J. E. **Histoire des mathematiques**. Paris: Ant. Jombert, 1758. v. 1. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_vECXAcIHxKIC/>. Acesso em: 3 mai. 2021.

MONTUCLA, J. E. **Histoire des mathematiques**: nouvelle édition, considérablement augmentée. Paris: Henri Agassi. 1799. v. 1, 762 p. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1076512>. Acesso em: 27 mar. 2021.

MOORMAN, R. H. The influence of mathematics on the philosophy of Leibniz. **National Mathematics Magazine**, v. 19, n. 3, p. 131-140, 1944. <https://doi.org/10.2307/3030069>.

MORABIA, A. Observations Made Upon the Bills of Mortality. **British Medical Journal**, v.346, e8640, 2013. <https://doi.org/10.1136/bmj.e8640>.

MOREIRA, I. de C.; MASSARINI, L. Cândido Batista de Oliveira e seu papel na implantação do sistema métrico decimal no Brasil. **Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência**, v.18, p. 3-16, 1997.

MORROW, G. E. **A commentary on the first book of Euclid's Elements by Proclus**. Princeton: Princeton University Press, 1970. ISBN 0-691-02090-6.

MOTTER, A. E.; CAMPBELL, D. K. Chaos at fifty. **Physics Today**, v. 66, n.5, p-27-33, 2013. <https://doi.org/10.1063/PT.3.1977>.

NAHIN, P. J. **When least is best**: how mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible. Princeton: Princeton University Press, 2007. 400 p. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt7rh9x>. Acesso em: 28 dez. 2020.

NARAYANAN, A. N. I. L. Dating the Surya Siddhanta using computational simulation of proper motions and ecliptic variations. **Indian Journal of History of Science**, v. 45, p. 455-476, 2010.

NEUGEBAUER, O. **The exact sciences in antiquity**. 2 ed. Nova York: Dover, 1969. 288 p. ISBN 9780486223322.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**: fluidos, oscilações e ondas, calor. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2018. 376 p. ISBN 978-85-212-0748-1.

NOBRE, S. Introdução à história da História da Matemática: das origens ao século XVIII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 2, n. 3, p. 3-43, 2002. DOI 10.47976/RBHM2002v2n303-43.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Eudemus of Rhodes. In: ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **MacTutor History of Mathematics Archive**. St Andrews: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eudemus/>. Acesso em: 22 abr. 2021.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Jean Étienne Montucla. In: ROBERTSON, E. F.; O'CONNOR, J. J. **MacTutor History of Mathematics Archive**. St Andrews: School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 2002. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Montucla/>. Acesso em: 26 mar. 2021.

OLIVEIRA, C. B. de. **Compendio de arithmetica composto para o uso das escolas primarias do Brasil**. Rio de Janeiro: Tipografia Nacional, 1832. Disponível em: <https://digital.bbm.usp.br/handle/bbm/7799>. Acesso em: 20 jan. 2021.

PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2º grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, v. 2, p. 1-13, 2010.

PEDROSO, H. A.; PEREIRA, J. C. P. Máximos e mínimos na geometria euclidiana: uma abordagem histórica. Bauru: **C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 2, n. 1, p. 32-48, 2013. DOI 10.21167/cqdvol21201323169664hapjcpp3248.

PEREIRA, E. M. **A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio**: conteúdos e abordagens. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências). Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2016.

PEREZ Y MARIN, A. **Lições de algebra conforme o programma do Collegio D. Pedro II**. São Paulo: Escolas Profissionais do Lyceu Coração de Jesus, 1918. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/538>. Acesso em: 7 jan. 2021.

PETIT, G.; MCCARTHY, D. D. **IERS Conventions 2003**. Frankfurt: Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004. 127 p. ISBN 3-89888-884-3.

PETITJEAN, P. La correspondance entre Arthur Morin, directeur du CNAM et Pedro II, Empereur du Brésil (1872-1880). **Cahiers d'histoire du CNAM**: comité de lecture, Paris, n. 5, p. 29-61, 1996. Disponível em: <http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?P5200.4/31/100/122/44/79>. Acesso em: 18 mar. 2021.

PIMENTEL, A. C. A. **Praça da Matemática**: as faces da história na construção de um monumento. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

PINTO, A. H. A matemática no Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular: considerações sobre trabalho e formação humana. Salvador: **Estudos IAT**. v. 3, n. 2, p.4-17, 2018.

PIRES, C. O segundo - ontem, hoje e amanhã. **Gazeta de Física**, Lisboa, v. 42, n. 3, p. 12-17, out. 2019.

PITISCUS, B. **Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque**. Augsburg: Dominicus Custos, 1600. Disponível em: <https://books.google.pt/books?id=LyMFxgxMZv4C>. Acesso em: 11 jan. 2021.

PITISCUS, B. **Trigonometry**: or the doctrine of triangles. Tradução de R. Handson. Londres: G. Hurlock, [1642?]. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=lJHy6MNU0cQC>. Acesso em: 23 fev. 2021.

PLATÃO. **Mênon**: Texto estabelecido e anotado por John Burnet. Tradução de Maura Iglésias. Rio de Janeiro: PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2001. (Bibliotheca Antiqua). ISBN 9788515023127.

PLAYFAIR, W. **The Commercial and Political Atlas, Representing, by Means of Stained Copper-plate Charts, the Progress of the Commerce, Revenues, Expenditure, and Debts of England, during the Whole of the Eighteenth Century**. 3. ed. Londres: T. Burton, 1801a. Disponível em: <https://archive.org/details/PLAYFAIRWilliam1801TheCommercialandPoliticalAtlas/>. Acesso em: 27 mar. 2021.

PLAYFAIR, W. **The Statistical Breviary**: shewing the resources of every state and kingdom in Europe. Londres: T. Bensley, 1801b. Disponível em: <https://archive.org/details/statisticalbrev00playgoog/>. Acesso em: 25 mar. 2021.

PLAYFAIR, W. **An inquiry into the permanent causes of the decline and fall of powerful and wealthy nations, illustrated by four engraved charts**. Londres: Greenland and Norris, 1805. 342 p. Disponível em: <https://archive.org/details/inquiryintoperma00play/>. Acesso em: 25 jan. 2021.

PLAYFAIR, W. **A Letter on Our Agricultural Distresses, Their Causes and Remedies**: Accompanied with Tables and Copper-plate Charts, Shewing and Comparing the Prices of Wheat, Bread, and Labour, from 1565 to 1821. 3. ed. Londres: William Sams, 1822. 87 p. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=x51hAAAAcAAJ>. Acesso em: 24 jan. 2021.

PLOMMER, H. The Circle of the Winds in Vitruvius. **The Classical Review**, v. 21, n. 2, p. 159-162, jun. 1971. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/707228>. Acesso em: 6 fev. 2021.

PONTE, J. P. de. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTES, J. P. (org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27. (Encontros de Educação). ISBN 978-989-8753-06-9.

PORTUGAL. **Ordenações Filipinas**. Rio de Janeiro: Instituto Philomathico, 1870. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/242733>. Acesso em: 30 dez. 2020.

PRICE, W. F. The new definition of the metre. **Survey Review**, v. 28, n. 219, p. 276–279, 1986. <https://doi.org/10.1179/sre.1986.28.219.276>.

QUINTILIAN. **Institutio Oratoria**: books I-III. Tradução H. E. Butler. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1920. 544 p. (Loeb Classical Library). Disponível em: <https://archive.org/details/institutioorator00quin/>. Acesso em: 18 fev. 2021.

RAMOS, J. P. dos S. A Geometria. Campinas: **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 19, n. 2, p. 221-249, 2009.

RECORDE, R. **The ground of arts**: teaching the perfect worke and practise of Arithmeticke, both in whole Numbers and Fractions after a more easie and exact forme then in former time hath been set foorth. Londres: Roger Jackson, 1618. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=i8NJomIVzlgC>. Acesso em: 6 mar. 2021.

REDLIN, L.; VIET, N.; WATSON, S. Thales' Shadow. **Mathematics Magazine**, v. 73, n. 5, p. 347–353, 2000. <https://doi.org/10.2307/2690810>.

REIS, A.; REIS, L. **Curso elementar de Mathematica**: Arithmetica. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1892. 713 p. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/127570>. Acesso em: 3 fev. 2021.

REY PUENTE, F. **Os sentidos do tempo em Aristóteles**. 1998. Tese (Doutorado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciencias Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

RHODES, P.J. **The Athenian Constitution**: Written in the School of Aristotle. Liverpool: Liverpool University Press, 2017. 441 p. ISBN 978-1-78694-070-4.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2012. 512 p. ISBN 978-8537808887.

RORRES, C. The Golden Crown. In: RORRES, C. **Archimedes**. Nova York: NYU, 1995. Disponível em: <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html>. Acesso em: 22 jan. 2021.

ROSA, C. M.; SANTOS, F. F. T. dos. A História da Matemática nos cursos de licenciatura: o caso das instituições públicas de Goiás. **NEXUS Mathematicae**, v. 3, e20006, 2020.

ROSE, D. Genre in the Sydney School. In: Gee, J.; Handford, M. (ed). **The Routledge handbook of discourse analysis**. Londres: Routledge, 2012. p. 209-225. ISBN 978-0-203-80906-8.

ROSEN, F. A. **The algebra of Mohammed ben Musa**. Londres: Oriental Translation Fund, 1831. Disponível em: <https://archive.org/details/algebraofmohamme00khuwrich/>. Acesso em: 8 mar. 2021.

ROSENFELD, B. **Apollonius of Perga**: Conics, Books 1-7. [s. L.] Pennsylvania State University, 2008. Disponível em: <http://www.personal.psu.edu/sxk37/Apollonius.html>. Acesso em: 12 fev. 2021.

ROWLAND, I. The Fra Giocondo Vitruvius at 500 (1511–2011). **Journal of the Society of Architectural Historians**, v. 70, n.3, p. 285–289, 2011. <https://doi.org/10.1525/jsah.2011.70.3.285>.

SANTOS, A. A. **A historiografia da matemática no século XVIII**: a escrita da história das matemáticas por Jean Etienne Montucla e o contexto francês. 2016a. Tese (Doutorado em História da Ciência) - Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SANTOS, L. G. M. dos. **Problemas interessantes e o número de Euler**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João Del-Rei, 2016.

SANTOS, M. R. dos. **Compreensões de professores do ensino médio acerca da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017.

SARMA, N. Measures of time in ancient India. **Endeavour**, v. 15, n.4, p.185–188, 1991. <https://doi.org/10.1016/0160-9327(91)90125-U>.

SCHMEH, K. Jarl Van Eycke löst 400 Jahre alte Längengrad-Botschaft. **Cipherbrain**, 18 fev. 2021. Disponível em: <https://scienceblogs.de/klausis-krypto-kolumne/2021/02/18/jarl-van-eycke-loest-400-jahre-alte-laengengrad-botschaft/>. Acesso em: 4 mai. 2021.

SEELIG, C. Freundschaft mit Arzten: Heinrich Zangger, Moritz Katzenstein, Hans Miihsam, Ruuolf Ehrmillln und Gustav Bucky. In: SEELIG, C. (ed.) **Helle Zeit, dunkle Zeit**: in memoriam Albert Einstein. Zurique, Europa Verlag; Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1986. p. 39-65. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-84225-1>.

SEFRIN-WEIS, H. **Pappus of Alexandria**: Book 4 of the Collection. Londres: Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-005-2>.

SHIRLEY, S. Career story: The importance of being ERNIE. **Significance**, v. 3, n. 1, p. 33-36, 2006. <https://doi.org/10.1111/j.1740-9713.2006.00151.x>.

SIU, M. K. 'No, I don't use history of mathematics in my class. Why?' In: FURINGHETTI, F.; Kaijser, S.; Tzanakis, C. **Proceedings of the HPM 2004**: History and Pedagogy of Mathematics ICME 10 Satellite Meeting and 4th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education. ed. rev. Iraklion: University of Crete, 2006. p. 268-277. ISBN 960-88712-8-X.

SPENCE, I.; WAINER, H. William Playfair: A Daring Worthless Fellow. **Chance**, v. 10, n.1, p. 31-34, 1997. <https://doi.org/10.1080/09332480.1997.10554795>.

STEINER, J. Einfache Beweise der Isoeperimetrische Hauptsätze. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)**, v. 1838, n. 18, p. 281-296, 1838. <https://doi.org/10.1515/crll.1838.18.281>.

STEINER, J. Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général: Premier mémoire. **Journal für die reine und angewandete Mathematik**, v. 1842, n. 24, P. 93–162, 1842. <https://doi.org/10.1515/crll.1842.24.93>.

STONE, P. **The luck of the draw**: The role of lotteries in decision making. Nova York: Oxford University Press, 2011. 208 p. ISBN 978-0-19-975610-0.

STRUIK, D. J. Reviewed Work: Frans van Schooten der Jungere. by J. E. Hofmann. The **American Mathematical Monthly**, v. 70, n. 9, p. 1030-1031, 1963. <https://doi.org/10.2307/2313101>.

STRUIK, D. J. **A concise History of Mathematics**. 4. ed. Nova York: Dover. 1987. 228 p. ISBN 0-486-60255-9.

STUMPP, M. M. **A simetria modular e as Villas de Andrea Palladio**. 2013. Tese (Doutorado em Arquitetura) - Faculdade de Arquitetura, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

THE IMPORTANCE of Being E.R.N.I.E. Direção: Neilson-Baxter, R. K. Produção: J.B. Holmes. Reino Unido: Realist Film Unit, 1964. Documentário (22 minutos). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rOAfbb5D3Dw>. Acesso em: 29 out. 2020.

THE INTERNATIONAL Bureau of Weights and Measures. **Nature**, v. 28, p. 592–596, out. 1883. <https://doi.org/10.1038/028592a0>.

THOMOPOULOS, N. T. **Essentials of Monte Carlo simulation**: statistical methods for building simulation models. Nova York: Springer, 2013. 174 p. ISBN 978-1-4614-6022-0.

THORNDIKE, L. **Science and thought in the fifteenth century**: studies in the history of medicine and surgery, natural and mathematical science, philosophy and politics. Nova York: Columbia University Press, 1929.

TIKHOMIROV, V. M. Stories about Maxima and Minima. Tradução de Abe Shenitzer. Providence: **American Mathematical Society**, 1990. (Mathematical World, v. 1). ISBN 0-8218-0165-1.

TOOMER, G. J. **Ptolemy's Almagest**. Londres: Duckworth, 1984. ISBN 0-7156-1588-2.

TORRICELLI, E. **Lezioni accademiche di Evangelista Torricelli**. 2. ed. Milão: Giovanni Silvestre, 1823. 249 p. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_aISbv0R3rjEC/>. Acesso em: 23 mar. 2021.

TUFTE, E. **The visual display of quantitative information**. Cheshire: Graphics Press, 2001. ISBN 0-9613921-4-2. Disponível em: <https://archive.org/details/visualdisplayofq00tuft>. Acesso em: 1 abr. 2020.

VAN BRUMMELEN, G. **The mathematics of the heavens and the Earth**: the early history of trigonometry. Princeton: Princeton University Press, 2009. ISBN 978-0-691-12973-0.

VAN LANGREN, M. F. **La verdadera longitud por mar y tierra**: demonstrada y dedicada a su Magd. Catholica Phillipo IV. Flandres: [s. n.], 1644. Disponível em: <https://archive.org/details/ayer_qb_225_l36_1644/>. Acesso em: 16 jan. 2021.

VENEZUELA, A. L. Análise Combinatória: metodologia de apoio ao professor. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 9, n. 1, p. e21015, 2021. <https://doi.org/10.26571/reamec.v9i1.10440>.

VIANA, M. C. V.; SILVA, C. M. Concepções de Professores de Matemática sobre a Utilização da História da Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem. In: Encontro Nacional De História Da Matemática, 9., Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

VIANNA, C. R. Usos Didáticos para a História da Matemática. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 1., Recife, 1995. RAUL NETO, F. (ed.). **Anais** [...]. Sociedade Brasileira de História da Matemática: Recife, 1998. p. 65-79.

VITRUVIUS. **The Ten Books on Architecture**. Tradução de Morris Hicky Morgan. Cambridge: Harvard University Press; Oxford: Harvard University Press, 1914. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/20239/20239-h/20239-h.htm>. Acesso em: 7 jan. 2021.

VOGEL, K. Montucla, Jean Étienne. In: GILLISPIE, C. C.; HOLMES, F. L.; KOERTGE, N. **Complete Dictionary of Scientific Biography**. Detroit: Charles Scribner's Sons. 2008. 26 v. ISBN 9780684315591.

VON BIELFELD, J. F. **The elements of universal erudition, containing an analytical abridgment of the sciences, polite arts, and belles lettres**. Tradução W. Hooper. Londres: G. Scott, 1770. v. 3. Disponível em: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/68610>. Acesso em: 20 dez. 2020.

VON NEUMANN, J. Various techniques used in connection with random digits. In: Symposium on Monte Carlo Method, 1949, Los Angeles. **Proceedings** [...]. Washington: US Government Printing Office, 1951. v. 12, p. 36-38. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series). Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=osu.32435030295547>. Acesso em: 31 jan. 2021.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. 2. ed. rev. e amp. São Paulo: Editora Blucher, 1996. 249 p. ISBN 85-212-0056-0.

WAINER, H. The Birth of Statistical Graphics and Their European Childhood: On the historical development of W.E.B. Du Bois's graphical narrative of a people. **Chance**, v. 30, n. 3, p. 61-67, 2017. <https://doi.org/10.1080/09332480.2017.1383117>.

WIEGERT, J. The sagacity of circles: a history of the isoperimetric problem. **Convergence**: jul. 2010. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-sagacity-of-circles-a-history-of-the-isoperimetric-problem-introduction>. Acesso em: 11 mar. 2021.

WILKINS, G. A. The IAU style manual. **Transactions of the International Astronomical Union**, v. 20, n. 2, p. Siii-S50, 1988. <https://doi.org/10.1017/S0251107X0001628X>.

WOOD, B.; BETTIN, H. The Planck Constant for the Definition and Realization of the Kilogram. **Annalen Der Physik**, v. 531, n. 5, p. 1800308, 2019. <https://doi.org/10.1002/andp.201800308>.

YANO, M. Indian Sine Table of 36 Entries. **History of Science in South Asia**, v. 7, p. 42-51, out. 2019. <https://doi.org/10.18732/hssa.v7i0.43>.

ZHMUD, L. Pythagoras as a mathematician. **Historia Mathematica**, v. 16, n. 3, p. 249-268, 1989. <https://doi.org/10.1016/0315-0860(89)90020-7>.

ZHMUD, L. Eudemus' History of Mathematics. In: BODNÁR, I.; FORTENBAUGH, W.W. (eds.). **Eudemus of Rhodes**: Rutgers University Studies in Classical Humanities. New Brunswick: Transaction Publishers, 2002. (Rutgers University Studies in Classical Humanities, v. 11). p. 263-306. ISBN 0-7658-0134-5.

ZHMUD, L. **Pythagoras and the early Pythagoreans**. Tradução de Kevin Windle e Rosh Ireland. Oxford: Oxford University Press, 2012. ISBN 978-0-19-928931-8.