UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Isabela Pereira Lima Dias

Introdução à Mecânica Quântica Relativística: A Equação de Klein-Gordon

Sorocaba

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CAMPUS SOROCABA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Isabela Pereira Lima Dias

Introdução à Mecânica Quântica Relativística: A Equação de Klein-Gordon

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *Campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física. Sorocaba, 25 de junho de 2021.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia

Sorocaba

2021

Pereira Lima Dias, Isabela

Introdução à mecânica quântica relativística: a equação de Klein-Gordon / Isabela Pereira Lima Dias -- 2021.
49f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): James Alves de Souza
Banca Examinadora: Antonio Luís Venezuela, Gustavo Garcia Rigolin
Bibliografia

1. Mecânica quântica relativística. 2. Partícula livre. 3. Equação de Klein-Gordon. I. Pereira Lima Dias, Isabela. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - *Campus* Sorocaba
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física

Trabalho de Conclusão de Curso

<u>Folha de aprovação</u>

ISABELA PEREIRA LIMA DIAS

"INTRODUÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA: A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON"

Orientador James Alves de Souza
Prof. Dr. James Alves de Souza (DFQM - UFSCar, Sorocaba)

Coorientador ______________________
Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia (Unifesp - Osasco)

Membro 1 ______________________
Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (DFQM - UFSCar, Sorocaba)

Membro 2 ______________________
Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin (DF - UFSCar, São Carlos)

Sorocaba, 25 de junho de 2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
***CAMPUS* SOROCABA**
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA
Rodovia João Leme dos Santos, Km 110 - SP-264
Bairro do Itinga - Sorocaba - São Paulo - Brasil
CEP 18052-780
Telefone: (15) 3229-8859

ATA DA DEFESA PÚBLICA

ATA Nº 01/2021.

Aos vinte e cinco dias do mês de junho de 2021, por videoconferência pela plataforma do Google Meet, realizou-se a defesa pública do Trabalho de Conclusão de Curso da estudante Isabela Pereira Lima Dias do Curso de Licenciatura em Física – Sorocaba, devidamente matriculada na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Prof. Dr. James Alves de Souza, Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia (Unifesp - Osasco), Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (DFQM - UFSCar, Sorocaba) e Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin (DF - UFSCar, São Carlos) segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso. Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas do TCC do curso:

James Alves de Souza
Prof. Dr. James Alves de Souza (DFQM - UFSCar, Sorocaba) — Nota: **10 (Dez)**

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia (Unifesp - Osasco) — Nota: **10 (Dez)**

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (DFQM - UFSCar, Sorocaba) — Nota: **10 (Dez)**

Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin (DF - UFSCar, São Carlos) — Nota: **10 (Dez)**

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **10 (Dez)**.

Sorocaba, 25 de junho de 2021.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Dr. James Alves de Souza pelo aceite em me orientar e por tornar esse trabalho tão didático. Muito obrigada pelas discussões de altíssimo nível, por sempre estimular minha postura científica e independência de estudos. Espero ser, algum dia, uma física tão boa quanto você!

Ao meu coorientador, professor Dr. Raphael de Oliveira Garcia pelas discussões acerca da escolha de minha área de pesquisa .

Aos meus avós, Paulo Vicente Pereira e Lázara Pinheiro Pereira, por me amarem incondicionalmente.

À minha irmã, Gabriela Pereira Lima Dias por existir.

Ao restante da minha família por incentivarem meus estudos.

À minha psicóloga e amiga, Tânia Antonioli pela inestimável contribuição e reflexões sobre a psique.

À minha amiga Jéssica Leonel pela convivência diária durante o período de estágio, cultivando uma amizade para o resto da vida.

Ao meu namorado, Bruno Veloso pelos momentos de estudo na biblioteca da UFSCar e também aqueles que ainda vivenciaremos.

À todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico, intelectual e pessoal, muito obrigada!

"Quando tudo se precipita com a rapidez do raio, quando a força de seu ser se aniquila, e você se vê, ah! arrebatado, arrastado pela torrente, esmagado contra os rochedos? Não há momento que não os destrua, a você e aos seus; não há momento que não produza, em você próprio, um destruidor. O mais inocente passeio custa a vida de milhares de pobres insetos, um só de seus passos arruina o paciente labor das formigas e enterra um mundo inteiro em um túmulo indigno. Ah! O que me comove não são as grandes e raras catástrofes do mundo, essas inundações, esses tremores de terra que devoram as cidades; o que me dilacera o coração é a força destruidora que está oculta no ventre da natureza, e nada produz que não destrua o próximo e não se destrua a si mesma. E, assim, prossigo claudicante minha angustiosa caminhada, rodeado pelo céu, pela terra e por suas forças ativas: avisto apenas um monstro que devora e rumina eternamente".

Johann Wolfgang von Goethe

Resumo

O final do século XIX e início do século XX foi marcado pelo surgimento de duas teorias que revolucionaram a Física, a teoria da relatividade restrita e a mecânica quântica. A teoria da relatividade restrita fornece uma generalização das ideias de Newton sobre o espaço e o tempo, impondo uma velocidade limite para as interações na natureza, dada pela velocidade da luz no vácuo, tornando as leis de movimento de Newton compatíveis com as leis do eletromagnetismo de James Clerk Maxwell. Já a mecânica quântica surgiu da necessidade da construção de uma teoria aplicável à fenômenos atômicos, impactando a forma de pensar ciência de uma maneira bastante significativa, explicando a estabilidade de átomos e estrelas e fornecendo suporte para descrição de fenômenos e aplicações tecnológicas na eletrônica e telecomunicações modernas. Apesar de existir algumas incompatibilidades entres essas duas teorias, a unificação das duas conduziu a uma teoria muito consistente dada pela mecânica quântica relativística, a qual é capaz de descrever o comportamento de partículas elementares no limite de altas energias. Uma vez que essa área é bastante ampla, nos restringimos neste trabalho às equações de onda relativísticas considerando o seu desenvolvimento mais introdutório, dado pela equação de Klein-Gordon. Para isso introduzimos os conceitos fundamentais da relatividade restrita, como os postulados desta teoria, as implicações relacionadas à estrutura do espaço-tempo no limite de altas velocidades, a notação relativística através de quadrivetores e ainda discutimos os conceitos de covariância, contravariância e invariância. Com relação à mecânica quântica nos restringimos a descrição da equação de onda de Schrödinger para uma partícula livre. Para introduzir a equação de onda relativística de Klein-Gordon mostramos que esta pode ser obtida a partir da necessidade de modificação da equação de Schrödinger, pelo fato desta não ser covariante sob transformações de Lorentz. Considerando a equação de Klein-Gordon para uma partícula livre foi possível discutir as implicações de tratarmos uma função de onda no regime relativístico com relação à interpretação da função de onda, da equação de continuidade, o postulado da existência de antipartículas e como a equação de onda de Schrödinger pode ser recuperada considerando o limite de baixas velocidades, mostrando que a equação de Klein-Gordon pode ser considerada como uma generalização relativística direta da equação de Schrödinger da mecânica quântica para partículas com spin-0.

Palavras-chave: Mecânica quântica. Relatividade restrita. Partícula livre. Transformações de Lorentz. Equação de Klein-Gordon.

Abstract

The end of the 19th century and the beginning of the 20th century was marked by the emergence of two theories that revolutionized Physics, the theory of special relativity and quantum mechanics. The theory of special relativity provides a generalization of Newton's ideas about space and time, imposing a speed limit for interactions in nature given by the speed of light in free space, making Newton's laws of motion compatible with the laws of James Clerk Maxwell for electromagnetism. Quantum mechanics, on the other hand, was formulated from the necessity to build a theory applicable to atomic phenomena, impacting the way of thinking about science in a very significant way, explaining the stability of atoms and stars and providing support for the description of phenomena and technological applications in modern electronics and telecommunications. Although there are some incompatibilities between these two theories, their unification provide a very consistent theory named as relativistic quantum mechanics to approach the behavior of elementary particles in high-energy physics. Since this field is quite broad, in this work we restrict ourselves to relativistic wave equations, considering their most introductory development, given by the Klein-Gordon equation. For this purpose, we introduce the fundamental concepts of special relativity, such as its postulates, the implications related to the structure of space-time for high-speed regime, the four-vectors notation, and we also discuss the concepts of covariance, contravariance and invariance. Regarding quantum mechanics, we restrict ourselves to the description of the free-particle Schrödinger wave equation. The relativistic Klein-Gordon wave equation was introduced from the necessity of modification of the Schrödinger equation to make it covariant under Lorentz transformations. Considering the free-particle Klein-Gordon equation we discuss what is meant by a relativistic wavenfuncion, an equivalent continuity equation, the postulate of existence of antiparticles and how the Schrödinger wave equation can be recovered considering the non-relativistic limit, showing that the Klein-Gordon equation can be considered as a direct relativistic generalization of the quantum mechanics Schrödinger equation for spin-zero particles.

Keywords: Quantum mechanics. Special relativity. Free particle. Lorentz transformations. Klein-Gordon equation.

Sumário

1 Introdução

O final do século XIX e início do século XX foi o período em que a relatividade restrita, também conhecida como relatividade especial, e a mecânica quântica se firmaram como teorias físicas robustas para descrição de fenômenos físicos em diferentes domínios. Enquanto a primeira revolucionou nossa concepção de espaço e tempo, estabelecendo uma velocidade máxima de propagação das interações, a mecânica quântica forneceu, de maneira fundamental, a descrição para as interações entre os constituintes mais elementares da matéria. Com isso, a descrição da natureza através da mecânica newtoniana ficou restrita ao limite macroscópico e de baixas velocidades.

A obtenção das equações de Maxwell e da lei de força de Lorentz foram algumas das contribuições intelectuais mais proeminentes do século XIX. O físico Hendrik Lorentz (1853-1928) estabeleceu que as interações entre matéria e radiação fossem descritas pela sua lei de força, além de propor transformações matemáticas entre as coordenadas de diferentes sistemas de referência em estado de movimento relativo. Por esta razão, tais transformações ficaram conhecidas como transformações de Lorentz (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977).

Através dos trabalhos de Henri Poincaré (1854-1912) e Albert Einstein (1879-1955), os resultados apresentados inicialmente por Lorentz foram interpretados de maneira mais geral e com isto, foi estruturada uma teoria que hoje conhecemos por relatividade restrita. Esta teoria nos traz a concepção das propriedades de simetria do espaço-tempo de uma maneira mais geral que a mecânica newtoniana, estabelecendo o postulado de que as ondas eletromagnéticas se propagam com a velocidade da luz no vácuo, independentemente do estado de movimento relativo entre fonte e observador. Matematicamente, o princípio de relatividade impõe transformações para as leis físicas. Podemos dizer hoje, que o conceito de invariância é um dos mais poderosos e importantes da Física, pois este estabelece que as leis físicas que descrevem a natureza devem ser as mesmas sob as transformações de Lorentz. Este conceito é estendido para vetores, ou de maneira mais geral, para tensores, que descrevem propriedades físicas de um sistema, cujas componentes são transformadas matematicamente entre um referencial e outro de maneiras diferentes, dando origem aos conceitos de contravariância e covariância. Através desses conceitos foi possível verificar a consistência das equações de Maxwell com a relatividade e a necessidade de correção da mecânica newtoniana para sistemas tratados no regime de altas energias. A generalização fornecida pela relatividade foi essencial para o desenvolvimento de novas tecnologias, como sistemas modernos de navegação global GPS (*Global Positioning System*) (LÄMMERZAHL, 2006).

O avanço experimental durante o referido período proveu evidências consistentes da limitação da física clássica para descrição de interações em escalas atômicas e subatômicas. Dentre as mais notórias, podemos citar o descobrimento do elétron como um constituinte atômico, por J. J. Thomson (1856-1940), a definição da carga elétrica como múltiplo da carga elementar, por Millikan (1868-1953), a descoberta do núcleo atômico, por Rutherford (1871-1937), a hipótese da radiação de corpo negro por Planck (1858-1947), os experimentos de Frank (1882-1964) e Hertz (1887-1975) demonstrando as propriedades discretas da absorção de radiação eletromagnética, entre outros (WEINBERG, 1977).

A mecânica quântica não relativística foi estabelecida na década de 1930, através do desenvolvimento da descrição matricial por Heisenberg (1901-1976) em 1925, a descrição ondulatória por Schrödinger (1887-1961) em 1926 e, posteriormente, a demonstração da equivalência entre as duas abordagens realizada por Paul Dirac (1902-1984). Esta emerge como uma teoria com alto grau de precisão para a descrição de sistemas atômicos, da radiação eletromagnética e suas interações com a matéria, além de tratar partículas materiais e radiação no mesmo nível. Com isso, é possível explicar a estabilidade de átomos através das interações entre seus constituintes mais elementares, conferindo características a estes como carga elétrica, número de spin, entre outras, e seu formalismo é usual em diversos campos da Física, tais como Física de Partículas, Física do Estado Sólido, entre outras (DIRAC, 1982).

A ciência moderna é, portanto, marcada pelo uso dos conceitos e formalismos da mecânica quântica para confrontar os avanços das técnicas experimentais como a possibilidade de manipular a natureza em seus extremos, seja em relação a pequenas distâncias ou baixas temperaturas, permitindo que sistemas físicos manifestem sua natureza quântica em escala macroscópica, especialmente nos materiais supercondutores e a superfluidez em gases fermiônicos, entre outras aplicações mais avançadas. Além da mecânica quântica fornecer uma descrição fundamental para a matéria, esta tem auxiliado de maneira essencial em diversas aplicações tecnológicas como na eletrônica, telecomunicações, medicina e computação (MERZBACHER, 1998; ROBINETT, 1997; ROHLF, 1994).

Apesar de individualmente bem sucedidas, existem algumas incompatibilidades entre a mecânica quântica não relativística e a relatividade, visto que a primeira não é aplicável para fenômenos físicos que envolvam velocidades comparáveis com a velocidade da luz no vácuo. A existência de uma velocidade limitante na natureza impõe sérias restrições aos fenômenos quânticos previstos, confrontando as ideias mais fundamentais da mecânica quântica não relativística com relação ao conceito de medição, não localidade, simultaneidade, etc. (LIFSHITZ; PITAEVSKII, 1971).

Uma pergunta imediata que surge diante de tais divergências é a seguinte: é possível descrever fenômenos quânticos preservando os postulados da relatividade restrita? Esta questão pode ser respondida através da formulação da mecânica quântica relativística, que consiste em unificar a mecânica quântica com as equações de transformação impostas pela relatividade. Neste sentido, a teoria de Dirac fornece uma equação bastante geral para descrever partículas com spin-1/2. Contudo, neste trabalho nos restringimos ao formalismo da mecânica quântica relativística em seu desenvolvimento mais introdutório, dado pela equação de Klein-Gordon, a qual pode ser considerada como uma generalização relativística direta da equação de Schrödinger da mecânica quântica. Para mostrar isso, consideramos a equação de onda de Schrödinger para uma partícula livre com spin-0.

Como a relatividade e a mecânica quântica abrangem praticamente toda a Física, consideramos os aspectos mais fundamentais da física clássica, mecânica quântica e relatividade restrita, com o objetivo de fornecer uma leitura mais agradável e introdutória com relação aos conceitos tratados. Adicionalmente, uma vez que a mecânica quântica relativística carrega amplo tecnicismo através de seu formalismo matemático, nos preocupamos em uniformizar a notação e as discussões das equações deduzidas de uma maneira mais elementar, para facilitar a interpretação dos resultados e não obscurecer a fenomenologia envolvida nas mesmas.

Neste contexto, fizemos inicialmente uma discussão acerca dos postulados da relatividade restrita, deduzindo as transformações de Lorentz e discutindo suas implicações para descrição de eventos em dois referenciais inerciais diferentes. A partir disso, mostramos como os conceitos de energia e momento devem ser modificados no regime de altas energias em comparação com as mesmas descrições na mecânica newtoniana. Discutimos também as implicações relacionadas à estrutura do espaço-tempo, noções de invariância, covariância e contravariância, como as equações relativísticas podem ser tratadas no espaço quadridimensional de Minkowski e como podemos recuperar a mecânica newtoniana no limite de baixas velocidades.

Através dos conceitos fundamentais da mecânica quântica não relativística deduzimos a equação de onda de Schrödinger e discutimos as principais consequências, como a não covariância da equação de Schrödinger, de formular uma equação de onda relativística a partir da energia de uma partícula livre no contexto da relatividade restrita. Posteriormente, deduzimos a primeira formulação relativística consistente da mecânica quântica, dada pela equação de Klein-Gordon, a qual descreve a dinâmica de partículas com spin-0, e discutimos as principais implicações relacionadas a interpretação da função de onda para obtenção de uma equação de continuidade relativística, o postulado da existência de antipartículas e como podemos recuperar a equação de onda de Schrödinger considerando o limite de baixas velocidades.

2 A Teoria da Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica

A mecânica quântica relativística é a unificação da teoria da relatividade restrita com a mecânica quântica e é desenvolvida em um contexto matemático mais abrangente daquele que estamos acostumados nos cursos de graduação em Física. Devido a isso, fizemos uma digressão neste capítulo dos conceitos fundamentais da teoria da relatividade restrita e da mecânica quântica não relativística, no que concerne a equação de Schrödinger especificamente. Adicionalmente, introduzimos as noções básicas sobre quadrivetores e como podemos tratar algumas propriedades físicas relativísticas no espaço-tempo de Minkowski.

2.1 Velocidade Limite de Propagação das Interações

Na mecânica clássica de Newton descrevemos as interações entre partículas materiais através de um potencial de interação que depende da posição, ou equivalentemente, das coordenadas das partículas interagentes. Se analisarmos a interação de duas partículas através de campos de forças gravitacionais ou eletrostáticos, por exemplo, é possível perceber que a força em uma das partículas, devido a interação com a outra, em qualquer instante de tempo depende apenas da posição destas partículas. Isso significa que se realizarmos qualquer mudança na posição de uma delas, isso será percebido instantaneamente na outra.

Os experimentos mostram que interações instantâneas entre sistemas, como as duas partículas, não existem na natureza, independentemente do campo de forças considerado. O que observamos geralmente é que para todo sistema, quando o mesmo é estimulado ou perturbado, existe um tempo de resposta, que pode ser maior ou menor dependendo do sistema e das propriedades analisadas. Como resultado, é possível observar que existe uma velocidade máxima para este tempo de resposta, ou seja, existe uma velocidade limite de propagação das interações. É como se uma partícula enviasse um sinal para a outra durante a interação informando a mesma que o seu estado foi modificado, de maneira que, após receber tal sinal, a partícula interagente responderia à alteração realizada na primeira (LANDAU, L.D ;LIFSHITZ, 1972).

A existência de tal velocidade limite para as interações implica ao mesmo tempo que o movimento de qualquer sistema na natureza não pode ser desenvolvido a uma velocidade maior do que esta. Ou seja, a velocidade limite de propação das interações é uma constante universal e é dada pela velocidade da luz no vácuo. Esta é designada usualmente pela letra c e pode ser obtida pelas equações de Maxwell através da susceptibilidade elétrica ε_0 e da permeabilidade magnética μ_0 do vácuo,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 2,99789 \times 10^8 \ \frac{m}{s}. \tag{2.1}$$

Se compararmos a ordem de grandeza de c, que é de $10^8 \ m/s$, com a velocidade v de sistemas descritos pela mecânica newtoniana, como a velocidade de um carro que é da ordem de $10 \ m/s$, a velocidade do som no ar à temperatura ambiente $10^2 \ m/s$, ou ainda a de um satélite em relação a Terra $10^3 \ m/s$, podemos considerar que $c \to \infty$ para estes sistemas. Isso justifica a consideração de interações instantâneas na mecânica newtoniana e o porquê desta teoria descrever de maneira bastante satisfatória uma diversidade muito grande de fenômenos em que é observada a relação $v/c << 1$ (GRIFFITHS, 2014).

Todavia, se considerarmos sistemas em um regime de energia no qual velocidades próximas à da luz $v/c \to 1$ podem ser alcançadas, a mecânica newtoniana falha consideravelmente. Sistemas a esta velocidade são encontrados na escala microscópica, como prótons e elétrons, por exemplo. Estas partículas podem ser aceleradas à velocidades de mais de $99,99\%$ da velocidade da luz em aceleradores de partículas como o grande colisor de hadrons (*LHC - Large Hadron Collider*). Para descrever o comportamento de tais sistemas é necessário o uso da teoria da relatividade restrita de Einstein.

A teoria da relatividade aparece como uma generalização da mecânica newtoniana, pois é capaz de descrever sistemas em todo o intervalo de velocidades, desde $v/c \to 0$ à $v/c \to 1$. Neste contexto, podemos dizer que a mecânica newtoniana é um caso limite da teoria da relatividade.

Esta generalização introduziu mudanças fundamentais no que diz respeito ao tempo, à relação entre espaço e tempo e às relações espaciais entre eventos diferentes ocorrendo em referenciais inerciais diferentes. Um *evento* pode ser descrito como um fenômeno natural ou artificial (criado em um laboratório) que ocorre em uma determinada posição e instante de tempo. Este pode ser desde um relâmpago a uma simples colisão de duas bolas de gude. Para descrevermos um evento é necessário um sistema de coordenadas, que pode ser qualquer, cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc., de maneira que possamos quantificar as propriedades desejadas de um sistema em relação àquele evento. Portanto, é necessário três coordenadas, (x, y, z) por exemplo, que definem a posição do sistema, e o tempo t em que o evento ocorreu, ou seja, precisamos das coordenadas (x, y, z, t), se escolhermos trabalhar com um sistema de coordenadas cartesianas.

O sistema de coordenadas define o sistema de referência ou o referencial do sistema físico em estudo. Dependendo da simetria do problema que está sendo analisado a escolha do sistema de coordenadas é feita de maneira a descrever as leis que regem o sistema da forma mais simples possível. Neste trabalho consideramos apenas os referenciais em que a primeira lei de Newton, ou lei da inércia, é aplicável, ou seja, referenciais em que a velocidade de uma partícula livre se mantém constante, em magnitude e direção, se nenhuma força externa é exercida sobre a mesma. Estes são chamados de *referenciais inerciais*. A consideração de todos os referenciais, incluindo os não inerciais, é feita na teoria da relatividade geral de Einstein .

Um referencial inercial é também caracterizado pelas operações de simetria de translação temporal e espacial e de rotação espacial, ou seja, o universo em que o sistema físico está sendo descrito é homogêneo e isotrópico. Isso significa que todos os pontos deste universo em qualquer instante de tempo são equivalentes (homogeneidade) e que todas as direções neste universo são equivalentes (isotropia). Uma implicação experimental direta disso é a observação de que todas as leis da natureza são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Esta observação é conhecida como o *princípio da relatividade*.

Tanto a mecânica newtoniana quanto a relatividade restrita são alicerçadas neste princípio. A diferença está relacionada com as leis de transformação das equações que descrevem o sistema de um referencial inercial para outro. As equações newtonianas se transformam de acordo com as *transformações de Galileu*, as quais transformam o espaço mas descrevem o tempo da mesma maneira em todos os referenciais inerciais, independentemente do observador, ou seja, o *tempo é absoluto*. Já as equações da relatividade restrita se transformam de acordo com as *transformações de Lorentz*, que transformam o tempo e o espaço. Estas são tratadas com um pouco mais de detalhes na próxima seção.

2.2 Transformações de Lorentz

Se considerarmos um evento ocorrendo em um referencial inercial S, como uma partícula livre se movendo, o observador neste referencial irá descrever todas as propriedades desse sistema através das coordenadas (x, y, z, t). Se outro observador for descrever o mesmo evento em um referencial inercial diferente S', através das coordenadas correspondentes (x', y', z', t'), é observado experimentalmente que as leis que regem o movimento da partícula devem ser as mesmas em ambos os referenciais inerciais. Como já discutido, isso é uma consequência de considerarmos um universo homogêneo e isotrópico. A pergunta que surge é: Qual a relação entre as coordenadas do sistema S e as coordenadas do sistema S', ou seja, como estas se transformam para que as leis de movimento se mantenham as mesmas, ou equivalentemente, invariantes?

As leis de Newton são conhecidas por serem invariantes sob as transformações de Galileu de um referencial inercial para outro. Considerando o movimento de S' em relação a S com uma velocidade $\mathbf{v}$ arbitrária, as coordenadas de S' e o tempo t' neste referencial são transformados como:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \tag{2.2a}$$

$$t' = t, \tag{2.2b}$$

em que o tempo é absoluto. Note que os vetores no espaço tridimensional estão representados por letras em negrito, ou seja, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Apesar de efetivas, as transformações de Galileu são limitadas à mecânica newtoniana. As equações de Maxwell do eletromagnetismo não são invariantes sob tais transformações. Para checar se havia algo inconsistente com as equações de Maxwell, Michelson (1852-1931) e Morley (1838-1923) desenvolveram um experimento para explorar a não invariância destas equações e tentar determinar a velocidade absoluta da Terra. Se este resultado fosse observado, deveria existir um referencial absoluto para a luz, chamado de *éter*. Contudo, Michelson e Morley não conseguiram verificar a existência do éter e este resultado pode ser considerado como a fundação experimental para a aceitação da teoria da relatividade restrita e a necessidade de corrigir a mecânica newtoniana para sistemas com velocidades próximas à velocidade da luz. Para saber mais sobre o experimento de Michelson e Morley e as implicações de seus resultados veja Resnick (1991).

Com a teoria da relatividade restrita de Einstein, tanto as leis de Newton quanto as equações de Maxwell permanecem invariantes quando são transformadas de um referencial inercial para outro. Esta teoria é fundamentada em dois postulados bem conhecidos:

1. *Todos os referenciais inerciais são equivalentes*: Isso significa que nenhum experimento realizado fornece condições para determinar o valor absoluto da velocidade de um observador. Os resultados de qualquer experimento realizado por um observador são independentes de sua velocidade relativa a outros observadores, os quais não estão envolvidos no experimento. Como já descrito anteriormente, este é conhecido como o princípio da relatividade.

2. *Existe uma velocidade máxima na natureza, dada por c*: Se uma partícula é medida com velocidade c em um referencial inercial, a medida em qualquer outro referencial inercial também fornecerá o valor c. Ou seja, além da velocidade da luz ser máxima, esta é a mesma em qualquer referencial inercial independentemente da velocidade da fonte e do observador.

Einstein encontrou leis de transformação de um referencial para outro que são consistentes com estes postulados. Considerando uma fonte de luz na origem do referencial inercial S, uma frente de onda da luz é emitida no tempo $t = 0$, de maneira que a distância da frente de onda em relação à origem em qualquer instante de tempo t posterior é dada por,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \tag{2.3}$$

Vamos considerar a origem do segundo referencial S' coincidindo com a origem de S em $t' = t = 0$ quando a frente de onda luminosa é emitida, e o movimento relativo de S' em relação a S na direção do eixo-x, por simplicidade, de maneira que $\mathbf{v} = v\hat{x}$. Nestas condições a distância da frente de onda em relação à origem de S' em um tempo posterior t' medido em S' é dada pela equação,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{2.4}$$

Se considerarmos as transformações de Galileu (2.2) nas condições especificadas é possível verificar imediatamente que estas não fornecem resultados consistentes em relação as equações (2.3) e (2.4). O conjunto de transformações que são consistentes com estas equações são conhecidas como *transformações de Lorentz* e são dadas por:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.5a}$$

$$y' = y, \tag{2.5b}$$

$$z' = z, \tag{2.5c}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right), \tag{2.5d}$$

em que o termo $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma$ é conhecido usualmente como fator de Lorentz. Uma demonstração detalhada das transformações de Lorentz, a partir dos postulados da relatividade especial, é apresentada no apêndice A. As relações acima mostram que o espaço e o tempo se tornam intimamente relacionados, diferentemente da mecânica newtoniana em que ambos são tratados independentemente.

Note que se considerarmos o limite de $c \to \infty$ tem-se $\gamma \to 1$. Neste limite as equações de transformação de Lorentz são reduzidas às equações de transformação de Galileu, apresentadas em (2.2). As transformações de Lorentz também mostram que se tivermos $v > c$, as coordenadas x e t tornam-se imaginárias, pois teremos uma raiz quadrada negativa em γ. Uma interpretação imediata para este resultado é que um sistema com velocidade maior do que a velocidade da luz é fisicamente inconcebível. A inconsistência também é observada para o referencial se movendo com velocidade $v = c$, a qual fornece $\gamma \to \infty$. Portanto, $v < c$ aparece como um limite natural nas equações de transformação de Lorentz.

Os resultados que podem ser obtidos a partir das transformações de Lorentz conduziu a uma revolução na nossa visão do espaço e do tempo. A partir destas transformações é possível mostrar que o intervalo Δs, ou a "distância", entre dois eventos quaisquer 1 e 2, descritos pelas coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) e (x_2, y_2, z_2, t_2), respectivamente, no referencial S e o intervalo $\Delta s'$ descrito por (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) no referencial S' são os mesmos, $\Delta s = \Delta s'$, nos dois referenciais. Isso é consistente com o postulado que diz que a velocidade da luz é a mesma nos dois referenciais S e S' e em qualquer outro referencial inercial. O intervalo Δs é definido por (LANDAU, L.D ;LIFSHITZ, 1972; NUSSENZVEIG, 1998):

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \tag{2.6}$$

Como Δs é constante em todos os referenciais inerciais este é invariante sob as transformações de Lorentz. Na equação acima $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ para $\alpha = x, y, z$ e t, para ambos os referenciais S e S'.

Outros dois resultados muito interessantes obtidos a partir das transformações de Lorentz (2.5) é a contração de *Lorentz-Fitzgerald* e a *dilatação do tempo*. O primeiro é obtido quando medimos o comprimento de um objeto, como uma barra, nos referenciais S e S'. Supondo que a barra está em repouso em S o seu comprimento L pode ser medido na direção-x, por exemplo, de maneira que $L = x_2 - x_1$, com x_1 e x_2 representando as coordenadas das duas extremidades da barra. Como a barra está em repouso em S, o seu comprimento é descrito como o comprimento próprio da mesma $L = l_0$. O comprimento da barra no referencial S' é obtido pelas equações (2.5) e é descrito por $l = L' = x'_2 - x'_1$, de maneira que (JACKSON, 1998; NUSSENZVEIG, 1998),

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma}. \tag{2.7}$$

O resultado acima mostra que observadores em referenciais inerciais diferentes irão medir comprimentos diferentes, de maneira que o comprimento de qualquer objeto tem seu valor máximo no referencial em que o mesmo está em repouso. É importante enfatizar que nada de físico está acontecendo com a barra durante a medida dos dois observadores. A diferença nos dois resultados reside no fato de os dois observadores estarem realizando experimentos de medida diferentes. Para medir o comprimento da barra é necessário realizar a medida de ambas as extremidades da barra simultaneamente. Como o tempo também se transforma na relatividade, medir simultaneamente em S não significa medir simultaneamente em S'.

A dilatação do tempo é verificada quando é feita a transformação de intervalos de tempo de um referencial para outro. Para uma medida no referencial S um observador irá verificar um intervalo de tempo em seu relógio como sendo $\Delta t = t_2 - t_1$. Considerando que o relógio em S esteja em repouso, ou seja, na mesma posição $x_2 - x_1 = 0$ durante a medida de Δt (tempo próprio), podemos utilizar a transformação de Lorentz para o tempo e obter o intervalo de tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ medido pelo observador em S', cujo resultado é dado por (JACKSON, 1998; RESNICK, 1991; GRIFFITHS, 2014),

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t. \tag{2.8}$$

Como $\gamma > 1$, o intervalo de tempo medido em S' é maior que o intervalo de tempo medido em S, ou seja, relógios em movimento parecem funcionar mais lentamente que relógios em repouso. Apesar de contra intuitivo, a dilatação do tempo é bem estabelecida experimentalmente, particularmente em medidas do tempo de vida de partículas elementares, e também na solução de problemas da Física como o famoso experimento mental do paradoxo dos gêmeos. Para verificar outros resultados obtidos a partir das equações de transformação de Lorentz, como as equações de transformação de velocidades, força, trabalho, entre outros, veja as referências (RINDLER, 1977; RESNICK, 1991; TAYLOR; WHEELER, 1992).

Podemos afirmar, sem perda de generalidade, que as equações que expressam as leis da natureza da mecânica newtoniana e de Maxwell do eletromagnetismo são invariantes com relação às transformações de Lorentz para as coordenadas e para o tempo de um referencial inercial para outro. Mas como isso se aplica à mecânica quântica? A equação de onda de Schrödinger é invariante sob as transformações de Lorentz? Discutiremos sobre isso no momento oportuno. Como nosso objetivo é obter uma equação de onda relativística, na próxima seção discutiremos sobre como a energia e o momento são descritos na relatividade.

2.3 Energia e Momento Relativísticos

Uma das equações mais importantes e fundamentais da teoria da relatividade, e talvez a mais famosa de toda a Física, é a que expressa a equivalência entre massa e energia, $E = m_0c^2$, sendo m_0 a massa da partícula medida em S, no qual a mesma está em repouso. Esta também é conhecida como massa de repouso ou massa própria, em analogia ao comprimento e tempo próprios. Para um observador em S' a massa m da partícula é medida segundo a relação (RESNICK, 1991),

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0. \tag{2.9}$$

Este resultado mostra que um observador no referencial S' se movendo à velocidade v irá medir uma massa maior para a partícula do que um outro observador no referencial S. Para $v = 0$, a equação acima fornece $m = m_0$, que é a massa de repouso da partícula.

Podemos também atribuir o referencial diretamente à partícula e realizar o experimento com um único observador no referencial S, como se fosse um cientista analisando o comportamento da partícula em um laboratório. Isso equivale a estabelecermos um sistema de coordenadas que estará sempre acompanhando a partícula, ou seja, o referencial próprio da partícula que permite definir suas dimensões, tempo e massa próprios, pois neste a partícula estará sempre em repouso. Neste caso, as mesmas relações anteriores são verificadas. Dessa forma, v pode ser descrita como a velocidade da partícula em relação a um observador em repouso em S, ou seja, v é a conexão entre os referenciais inerciais próprio da partícula e do observador e não necessariamente a conexão entre dois observadores situados em dois referenciais inerciais diferentes.

A massa de repouso m_0 é a medida de inércia de um objeto na mecânica newtoniana, independentemente da sua velocidade. O momento linear de uma partícula se movendo com velocidade $\mathbf{v}$ é definido, neste caso, por $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$. Na relatividade, para que a lei de conservação do momento seja invariante sob as transformações de Lorentz o momento deve ser descrito pela massa m, dada pela equação (2.9) (RESNICK, 1991), ou seja,

$$\mathbf{p} = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \mathbf{v} = m\mathbf{v}, \tag{2.10}$$

a qual é válida em todos os referenciais inerciais.

Na mecânica newtoniana a energia cinética de uma partícula com velocidade v é definida por $E_c = m_0 v^2/2$ ou em função do momento linear $E_c = p^2/2m_0$. Na relatividade, como a massa m, dada pela equação (2.9), é também uma quantidade variável pode-se mostrar que (RINDLER, 1982; NUSSENZVEIG, 1998),

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right], \tag{2.11}$$

sendo $E = mc^2$ a energia total da partícula. A equação acima mostra que a variação da energia cinética da partícula está relacionada à variação de sua velocidade e de sua massa, uma vez que podemos escrever $E_c = (m - m_0)\, c^2$.

Tanto o momento quanto a energia cinética relativísticos, dados pelas equações (2.10) e (2.11), respectivamente, precisam ser reduzidos às expressões definidas na mecânica newtoniana quando $v/c << 1$. Se fizermos a expansão em série de Taylor do fator de Lorentz γ, tem-se:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^3 + \cdots . \tag{2.12}$$

Se substituirmos essa expressão nas equações (2.10) e (2.11) e desprezar os termos de ordem maior do que 2, uma vez que $v/c << 1$, obtém-se $p = m_0 v$ e $E_c = m_0 v^2/2$, como esperado.

Uma vez que o momento linear p é uma propriedade que descreve a quantificação do movimento de um sistema físico, estando relacionado à definição de força e energia, é sempre interessante expressar a energia cinética do sistema com o seu momento. No caso relativístico a equação que conecta a energia total (E) de qualquer partícula livre com o seu momento e a sua massa de repouso é dada por:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \tag{2.13}$$

Esta equação é demonstrada na próxima seção.

Na relatividade as quantidades p_x, p_y, p_z e E/c^2 se relacionam assim como as coordenadas do espaço (x, y, z) e do tempo (t), respectivamente. Se considerarmos o mesmo procedimento para obtenção das transformações de Lorentz para o espaço e o tempo entre os referenciais inerciais S e S', é possível mostrar que as transformações de Lorentz para a energia e o momento são dadas por (FRENCH, 1968):

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(p_x - \frac{Ev}{c^2}\right), \tag{2.14a}$$

$$p'_y = p_y, \tag{2.14b}$$

$$p'_z = p_z, \tag{2.14c}$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(E - vp_x\right). \tag{2.14d}$$

Dessa forma a conservação da energia e do momento ficam unificadas em uma única lei, ou seja, se a energia é conservada em qualquer referencial inercial, então o momento também precisa ser conservado. Se a relatividade for descrita em um espaço quadridimensional, formado pelas três coordenadas do espaço mais a coordenada do tempo, é possível descrever a conservação do momento e da energia através da conservação do quadrivetor momento, cuja componente temporal é a energia do sistema. Na próxima seção discutimos brevemente sobre a representação das propriedades relativísticas de um sistema no espaço-tempo.

2.4 Quadrivetores e a Métrica do Espaço-tempo

O espaço-tempo é uma construção matemática que funde as três dimensões euclidianas do espaço (x, y, z) e a dimensão do tempo (t) em um único espaço quadridimensional, usualmente chamado de *espaço-tempo de Minkowski* ou simplesmente *espaço de Minkowski*. Essa denominação é devido a Hermann Minkowski (1864-1909), um dos professores de Eisntein, que percebeu que era necessário descrever o espaço e o tempo como uma única entidade. Dessa forma, um quadrivetor é qualquer conjunto de quatro componentes dado por (x, y, z, ct) que se transforma da mesma maneira que um evento sob as transformações de Lorentz, ou seja, um evento pode ser representado por um ponto no espaço de Minkowski. Note que o tempo foi multiplicado pela velocidade da luz c para formar a quarta dimensão espacial do espaço de Minkowski.

As componentes do quadrivetor (x, y, z, ct) podem ser representadas por x^μ, com μ assumindo os valores $1, 2, 3, 4$ ou os valores $0, 1, 2, 3$. No primeiro caso tem-se $x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ct)$, sendo $x^4 = ct$, e no segundo caso $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, sendo $x^0 = ct$. Neste trabalho adotamos a segunda notação, em que a componente temporal é dada por x^0. Como o espaço de Minkowski é uma variedade quadridimensional que apresenta localmente similaridades ao espaço euclidiano, podemos escrever (JACKSON, 1998),

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}). \tag{2.15}$$

As transformações de Lorentz para o espaço e para o tempo dadas pelas equações

(2.5) podem ser descritas na forma de quadrivetores como:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \tag{2.16a}$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \tag{2.16b}$$

$$x'^2 = x^2, \tag{2.16c}$$

$$x'^3 = x^3, \tag{2.16d}$$

em que $\beta = v/c$.

Como estamos descrevendo o sistema em um espaço mais abrangente, algumas denominações devem ser feitas com relação a forma como as componentes do quadrivetor no espaço de Minkowski se transformam para garantir que as leis físicas obtidas se mantenham *invariantes* sob as transformações de Lorentz. Para isso introduzimos dois tipos de vetores, chamados de *contravariantes*, cujas componentes são representadas por x^μ, e os vetores *covariantes*, com componentes representadas por x_μ. No espaço tridimensional de coordenadas cartesianas, o qual estamos habituados a trabalhar, não existe distinção entre vetores contravariantes e covariantes, ou seja, $x^\mu = x_\mu$.

Para tornar essas definições um pouco mais claras vamos considerar a definição matemática das leis de transformação de vetores contravariantes e covariantes e complementá-las com um exemplo físico. Por simplicidade vamos considerar primeiramente o vetor diferencial deslocamento $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ no espaço tridimensional. Para este ser classificado como um vetor contravariante suas componentes devem se transformar de um referencial inercial S' para outro S da seguinte forma (ARFKEN; WEBER, 2007),

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_j a_{ij} dx_j, \tag{2.17}$$

em que a_{ij} é o cosseno diretor do ângulo formado entre os eixos x'_i e x_j. Note que consideramos as componentes do vetor em S' como função de suas componentes em S. Qualquer conjunto de componentes se transformando de acordo com a equação (2.17) é definido como um vetor contravariante e suas componentes devem ser descritas com um índice sobrescrito A^i. Dessa forma, a equação (2.17) deve ser reescrita como:

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_j a_{ij} dx^j, \tag{2.18}$$

Para representar a definição de um vetor covariante vamos considerar o gradiente de uma função escalar $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ como protótipo,

$$\nabla\varphi = \hat{e}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \hat{e}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \hat{e}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}. \tag{2.19}$$

Este se transforma do referencial S' para S como (ARFKEN; WEBER, 2007),

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}, \tag{2.20}$$

em que $\varphi(x^1, x^2, x^3) = \varphi(x'^1, x'^2, x'^3)$, ou $\varphi = \varphi'$, é uma quantidade escalar. Comparando as equações (2.18) e (2.20), nota-se que na segunda tem-se $\partial x^j/\partial x'^i$ em vez de $\partial x'^i/\partial x^j$. Portanto, se as componentes de um vetor se transformam de acordo com a equação (2.20), este é covariante e suas componentes devem ser descritas com um índice subscrito A_i, ou seja,

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j. \tag{2.21}$$

Mas qual o significado físico destas transformações para classificarmos uma grandeza como invariante, contravariante e covariante?

Como já discutido anteriormente uma grandeza ou lei física é invariante se mediante uma transformação, como as transformações de Galileu ou de Lorentz, de um referencial para outro elas se mantém as mesmas. Para as equações de Maxwell se manterem invariantes em relação a dois referenciais inerciais diferentes é necessário que as mesmas se transformem de acordo com as equações de transformação de Lorentz e não de Galileu. Por outro lado, se tivermos trabalhando em regimes de baixa energia, as leis de transformação de Galileu são suficientes para garantir a invariância das equações de movimento de Newton. Portanto, a invariância significa que, independetemente da representação matemática que utilizamos para descrever um fenômeno físico, as leis físicas devem ser as mesmas. Essa independência é desejada e esperada, uma vez que o universo considerado é homogêneo e isotrópico, ou seja, os referenciais considerados são inerciais. Outra forma mais intuitiva de expressarmos essa ideia é dizermos que as propriedades físicas obtidas independem do sistema de coordenadas utilizado, ou seja, podemos utilizar coordenadas cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc., que o resultado será o mesmo, invariante.

Contudo, podemos ter uma grandeza vetorial qualquer que apresenta a mesma magnitude e direção em sistemas de coordenadas diferentes, mas suas componentes são diferentes nos sistemas de coordenadas considerados. Apesar da magnitude e da direção desta grandeza serem invariantes, o vetor que define tal grandeza será classificado como contravariante ou covariante se suas componentes se transformam de um referencial para outro de acordo com as equações (2.18) e (2.21), respectivamente.

Seguindo os exemplos destas mesmas equações para a classificação dos vetores, se considerarmos um gás formado por inúmeras partículas em um recipiente a uma temperatura T constante, a temperatura será a mesma independentemente de considerarmos o sistema em coordenadas cartesianas (x, y, z) ou esféricas (r, θ, φ), pois T é um escalar. Logo, a temperatura é um invariante com relação à mudança no sistema de coordenadas $T(x, y, z) = T(r, \theta, \varphi)$. Se considerarmos a transformação das componentes das posições ou das velocidades das partículas que formam o gás, de coordenadas cartesianas para esféricas, estas serão transformadas de acordo com a equação (2.18), pois as posições ou as velocidades das partículas são vetores contravariantes. Mas se analisarmos a conversão do gradiente de temperatura de coordenadas cartesianas $\nabla T(x, y, z)$ para esféricas $\nabla T(r, \theta, \varphi)$, as componentes de ∇T serão convertidas ou transformadas de acordo com a equação (2.21), pois ∇T é um vetor covariante. Independente da forma como uma grandeza física é classificada, se é invariante, contravariante ou covariante, em todos os casos significa que as propriedades e leis físicas observadas em um sistema são independentes do sistema de coordenadas ou do referencial inercial escolhidos.

Essa classificação é mais relevante e necessária na relatividade geral de Einstein, em que a geometria do espaço-tempo pode ser significativamente diferente da utilizada na relatividade restrita (NARLIKAR, 2010). Neste caso, o conceito de vetor deve ser estendido para um conceito mais geral dado pela Álgebra Tensorial (LICHNEROWICZ, 1972; BISHOP; GOLDBERG, 1980). No caso da relatividade restrita, neste trabalho tal diferença é citada apenas para definirmos algumas operações no espaço de Minkowski.

Considerando dois quadrivetores arbitrários A e B podemos definir a operação de *contração* como,

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu \equiv A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A_\mu B^\mu. \tag{2.22}$$

É conveniente definir para cada vetor contravariante A^μ um vetor covariante A_μ através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de maneira que $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ e $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, em que:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

O tensor $g_{\mu\nu}$ define a métrica para especificar a medida da distância no espaço-tempo e é chamado de *métrica de Minkowski*. As transformações que satisfazem a regra apresentada na matriz (2.23), ou seja,

$$g_{00} = 1, \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu,$$

é chamado de *grupo de Lorentz*.

Considerando o vetor posição $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r})$ na equação (2.22) e a métrica de Minkowski $g_{\mu\nu}$, de maneira que $x_\mu = (ct, -\mathbf{r})$, tem-se,

$$x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2, \tag{2.24}$$

que é a distância entre dois eventos descrita na equação (2.6), ou seja, $\Delta s^2 = x^\mu x_\mu$.

A definição de contração é utilizada porque tem a propriedade muito especial de que qualquer contração de dois quadrivetores é invariante sob as transformações de Lorentz.

Isso foi verificado na equação (2.24) em que consideramos $x^\mu x_\mu$. Se considerarmos o tempo próprio ao quadrado $(\Delta t)^2 = d\tau^2$, fazendo $\Delta t' = dt$ na equação (2.8), tem-se

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 = dt^2 - \frac{v^2 dt^2}{c^2} = \frac{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2}{c^2} = \frac{d(x^\mu x_\mu)}{c^2}, \tag{2.25}$$

mostrando que o tempo próprio ao quadrado é um invariante de Lorentz. Vamos verificar isso para o quadrivetor momento p^μ.

O quadrivetor velocidade v^μ de uma partícula no espaço-tempo é obtido pela derivada de x^μ em relação ao tempo próprio da mesma, ou seja,

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d(ct)}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}). \tag{2.26}$$

O quadrivetor momento ou quadrimomento da partícula pode ser obtido multiplicando o resultado acima pela sua massa de repouso m_0, ou seja, $p^\mu = m_0 v^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \mathbf{v})$ de maneira que,

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \tag{2.27}$$

em que utilizamos a energia total da partícula $E = mc^2$ e o seu momento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, veja equações (2.10) e (2.11). Como estamos em um espaço vetorial, a multiplicação do quadrivetor v^μ pela constante m_0 continua sendo um quadrivetor, assim como a derivada de x^μ em relação ao tempo próprio da partícula para a definição do quadrivetor velocidade.

Se considerarmos a contração da quadrivelocidade tem-se,

$$v^\mu v_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \mathbf{v}^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\gamma^2 c^2}{\gamma^2} = c^2. \tag{2.28}$$

Como o resultado é uma constante, tem-se que a quadrivelocidade ao quadrado também é um invariante de Lorentz. A partir deste resultado podemos calcular a contração do quadrimomento como sendo $p^\mu p_\mu = m_0^2 v^\mu v_\mu = m_0^2 c^2$, que é constante, de maneira que $p^\mu p_\mu$ é um invariante de Lorentz.

Se utilizarmos o resultado da equação (2.27) para calcular a contração do momento e o resultado $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$ obtemos:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2, \\ m_0^2 c^2 &= \frac{E^2}{c^2} - p^2, \\ \therefore E^2 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \end{aligned}$$

ficando demonstrada assim a equação (2.13) da seção 2.3. É interessante notar que, apesar do momento e da energia relativísticos não serem invariantes de um referencial inercial para outro, a combinação de ambos em $p^\mu p_\mu$ é um invariante de Lorentz(GREINER, 2000).

Na próxima seção apresentamos os conceitos básicos da mecânica quântica para descrever a equação de onda de Schrödinger e as primeiras considerações para conceber uma teoria que une a relatividade restrita e a mecânica quântica.

2.5 A Equação de Onda de Schrödinger

A mecânica quântica (MQ) e a teoria da relatividade de Einstein são as duas teorias da Física de maior sucesso que existem. Como discutido na seção anterior, a relatividade restrita fornece uma extensão da mecânica newtoniana para sistemas no regime de altas energias. A mecânica newtoniana se mostrou muito eficiente e satisfatória para a descrição de objetos na escala macroscópica e para velocidades $v/c << 1$. Quando são considerados objetos na escala microscópica, como elétrons, átomos e a luz, para sinais muito fracos, as leis da física clássica também falham consideravelmente. A MQ foi desenvolvida para descrição de sistemas neste contexto, baixas energias e escalas microscópicas, mas isso não significa que a mesma está limitada aos microfenômenos.

A história da MQ é iniciada no início do sécuclo XX e foram necessários em torno de 25 anos para formular uma teoria que fosse capaz de explicar todas as observações experimentais conhecidas naquela época no contexto especificado. Mesmo depois de quase 100 anos de sua consolidação, com os avanços tecnológicos para a melhoria na precisão com que as medições e a manipulação de sistemas na escala atômica podem ser feitas, os experimentos observados continuam em notável concordância com as previsões da MQ. Devido a isso a MQ é vista hoje como a teoria fundamental da Física. Além da explicação de fenômenos e sistemas fundamentais, a MQ tem auxiliado significativamente o desenvolvimento de uma nova era tecnológica que abrange desde dispositivos eletrônicos modernos, como lasers, transistores, microscopia eletrônica, formação de imagens por ressonância magnética, entre outros, à transmissão e processamento de informação com a computação quântica.

Diante da imensa quantidade de tópicos e fenômenos fundamentais que podem ser discutidos a partir da MQ, neste trabalho vamos nos restringir apenas à descrição da equação de onda de Schrödinger, já que o nosso objetivo é fornecer os primeiros passos para obtenção de uma equação de onda relativística.

A equação de Schrödinger é a equação fundamental da dinâmica na MQ, equivalendo em importância à segunda lei de Newton na mecânica newtoniana. Uma maneira simples de obter a equação de Schrödinger é a partir da consideração das ondas de matéria de de Broglie, a qual descrevemos a seguir.

Em 1905 Einstein explicou o efeito fotoelétrico mostrando que a luz pode ser descrita por entidades com energia discreta e massa de repouso nula, chamadas de fótons, e que podem se comportar como partículas. A energia destas "partículas" é dada por,

$$E = h\nu = \hbar\omega, \tag{2.29}$$

em que $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, ou constante de Dirac, e $\nu = \omega/2\pi$ é a frequência da luz.

Em 1924, Louis de Broglie (1892-1987) postulou que se a luz pode se comportar como onda, em experimentos em que são observados os fenômenos de interferência e difração, ou como partícula, como no efeito fotoelétrico, então partículas também deveriam apresentar um comportamento semelhante, ou seja, características de partículas, como massa e momento, ou características ondulatórias, como frequência e comprimento de onda, dependendo das condições experimentais. Para de Broglie, uma partícula de massa m se movendo com velocidade v é caracterizada pelo comprimento de onda,

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{2.30}$$

sendo $p = mv$ o momento da partícula.

Apesar de contraintuitiva, a hipótese de de Broglie concordava com a condição de quantização do momento angular de Bohr. Poucos anos depois de apresentar sua hipótese a mesma foi comprovada experimentalmente fazendo com que de Broglie fosse agraciado com o prêmio Nobel de 1929 (WEINBERG, 1977; ASPECT; VILLAIN, 2017; ROHLF, 1994).

Para obter a equação de Schrödinger em uma dimensão para descrever a onda de matéria de de Broglie para uma partícula livre, vamos considerar uma onda plana com amplitude A se propagando na direção-x dada pela função:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{2.31}$$

sendo i a unidade imaginária, $k = 2\pi/\lambda$ o número de onda e $\omega = 2\pi\nu$ a frequência angular da onda. Utilizando as equações (2.29) e (2.30) podemos escrever o número de onda e a frequência angular da onda em função do momento e da energia da partícula livre, ou seja, $k = p\hbar$ e $\omega = E/\hbar$, respectivamente. Substituindo na função de onda (2.31) tem-se,

$$\psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}. \tag{2.32}$$

Derivando a equação acima duas vezes em relação a x e uma vez em relação ao tempo t obtém-se:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi(x,t) \quad \Rightarrow \quad \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{p^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\psi(x,t) \quad \Rightarrow \quad \psi(x,t) = -i\frac{2m\hbar}{p^2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}, \tag{2.34}$$

em que utilizamos $i^2 = -1$ e a relação entre momento e energia de uma partícula livre $E = p^2/2m$. Igualando as duas expressões acima tem-se,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}. \tag{2.35}$$

Esta é a equação de Schrödinger dependente do tempo para uma partícula livre se movendo em uma única dimensão. Sua generalização para três dimensões $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é imediata e é descrita por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t},$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \qquad (2.36)$$

em que introduzimos o operador vetorial diferencial $\nabla = \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{y}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{z}\frac{\partial}{\partial z}$ ao quadrado, conhecido como laplaciano ∇^2. Note que os versores do sistema de coordenadas cartesianas foram representados aqui em negrito, **x**, **y** e **z**, para não confundir com a notação de operadores para os quais utilizamos o símbolo ($\wedge$).

Para descrever grandezas físicas a partir da equação de Schrödinger de acordo com o aparato matemático fundamental da MQ, precisamos identificar as mesmas nos operadores diferenciais da equação (2.36), ou seja, precisaremos descrever as grandezas como operadores. Um operador $\hat{L}$ é uma entidade que, quando aplicado em uma função $\psi(\mathbf{r},t)$, ele transforma a mesma em uma outra função $\phi(\mathbf{r},t)$. Essa operação é representada por $\hat{L}\psi(\mathbf{r},t)=\phi(\mathbf{r},t)$. Neste trabalho consideramos apenas operadores lineares (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977; SAKURAI; NAPOLITANO, 1994; GRIFFITHS, 2019). A equação básica para a teoria de operadores lineares tem a forma,

$$\hat{L}\psi(\mathbf{r},t) = \alpha\psi(\mathbf{r},t), \qquad (2.37)$$

em que os números α formam o *espectro de autovalores* do operador $\hat{L}$ e as soluções $\psi(\mathbf{r},t)$ da equação (2.37) são chamadas as *autofunções* do operador $\hat{L}$. Na MQ estes operadores representam usualmente propriedades físicas, como energia e momento, e os seus autovalores correspondentes são os valores mensuráveis, ou seja, equivalentes aos valores das propriedades físicas medidas nos experimentos. Estes são conhecidos também como oberváveis e podem assumir valores contínuos ou discretos. Como estes autovalores são necessariamente reais, para que a teoria possa ser comparada com resultados experimentais, os operadores associados a estes autovalores são classificados como *hermitianos*. Para saber mais sobre a álgebra de operadores e sua importância na MQ, veja Cohen-Tannoudji (1977).

Neste contexto, as quantidades físicas dadas pelo momento e a energia da partícula livre são descritas na MQ pelos seguintes operadores diferenciais:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \qquad (2.38)$$

$$\hat{H} = \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (2.39)$$

em que foi introduzido o operador hamiltoniano $\hat{H}$. Este corresponde à energia total E do sistema, dada pela energia cinética E_c mais a energia potencial $V(\mathbf{r})$. Como o sistema considerado é uma partícula livre a energia total desse sistema é dada pela energia cinética $E_c = p^2/2m$ apenas. Para o caso geral, em que a partícula se movimenta em um campo de forças descrito por um potencial $V(\mathbf{r})$, devemos considerar $\hat{H} = \hat{E}_c + \hat{V}(\mathbf{r})$, de maneira que a equação de Schrödinger dependente do tempo em sua forma completa fica,

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r},t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r},t),$$

$$\therefore \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{2.40}$$

Pelas expressões acima podemos escrever a equação de Schrödinger dependente do tempo simplesmente como,

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}. \tag{2.41}$$

A equação diferencial (2.41) é de primeira ordem no tempo. Isso significa que a função de onda $\psi(\mathbf{r},t)$, para qualquer instante de tempo, determina completamente o estado de um sistema físico na MQ. Na mecânica newtoniana o estado do sistema é descrito completamente através da posição e do momento, ou seja, são necessárias duas condições, uma vez que a equação de Newton correspondente à segunda lei é de segunda ordem no tempo $F = ma = m\,(d^2x/dt^2)$.

Se considerarmos a evolução do sistema por um tempo muito longo, o mesmo irá atingir um estado estacionário $\psi_n(\mathbf{r},t)$ com uma energia definida E_n, a qual permanece constante no tempo. Para verificar como isso pode ser observado na equação de Schrödinger, vamos expressar a função de onda dada pela equação (2.32) como $\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. Logo,

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\psi(\mathbf{r},t). \tag{2.42}$$

Para um tempo muito longo $\psi(\mathbf{r},t) \to \psi_n(\mathbf{r},t)$ e $E = E_n$, de maneira que a equação de Schrödinger (2.41) torna-se,

$$\hat{H}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}). \tag{2.43}$$

Na equação (2.43) foi omitida a dependência temporal, pois a partir do instante de tempo em que o sistema atinge um estado estacionário, este será o mesmo para qualquer instante de tempo posterior. A equação (2.43) é a equação de Schrödinger independente do tempo, em que as funções de onda $\psi_n(\mathbf{r})$ são as autofunções do operador hamiltoniano $\hat{H}$ e E_n são os autovalores de energia correspondentes, ou autoenergias.

Para descrevermos as propriedades de um sistema físico a partir da equação de Schrödinger precisamos determinar a função de onda $\psi(\mathbf{r},t)$ do sistema, pois como descrito anteriormente, a partir dela é possível determinar completamente o estado do sistema. Como a função de onda é uma entidade complexa precisamos calcular $|\psi(\mathbf{r},t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$ para associar a mesma com as propriedades físicas do sistema, as quais são reais. Esta deve satisfazer a condição de normalização dada por,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} = 1, \tag{2.44}$$

na qual $d\mathbf{r} = dxdydz$, de maneira que a integral acima representa a integração em todo o espaço tridimensional.

Como a equação de Schrödinger não fornece um valor bem definido, ou determinístico, de uma propriedade física do sistema, como sua posição ou momento, por exemplo, a expressão dada pelo módulo $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ é interpretada como uma densidade de probabilidade. Dessa forma podemos calcular o valor esperado de qualquer observável O, descrito pelo operador $\hat{O}$ correspondente, através da expressão:

$$\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{O}\psi(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}. \tag{2.45}$$

Um resultado surpreendente obtido a partir da equação de Schrödinger em três dimensões é a descrição do espectro de energia do átomo de hidrogênio observado experimentalmente. Apesar desta permitir obter soluções analíticas e numéricas para uma grande variedade de problemas envolvendo a dinâmica de partículas, a equação de Schrödinger é válida para sistemas em que a velocidade das partículas é limitada por $v/c << 1$. Devido a isso, a equação (2.41) é usualmente chamada de *equação de Schrödinger não relativística*. Na próxima seção analisamos a consequência de considerar a energia de uma partícula livre relativística diretamente na equação de Schrödinger.

2.5.1 Equação de Shcrödinger para uma Partícula Livre Relativística

A descrição de fenômenos no regime de altas energias requer a investigação de equações de onda relativísticas. Isso significa equações que são invariantes sob as transformações de Lorentz.

Fazer a transição de uma teoria não relativística para uma descrição relativística implica em tratar igualmente as coordenadas espaciais e a coordenada temporal na teoria. Isso já cria um problema para o caso da equação de Schrödinger (2.41), pois esta possui dependência de primeira ordem no tempo e de segunda ordem para as coordenadas espaciais. Como descrito anteriormente, a conservação do momento e da energia é verificada na relatividade através da conservação do quadrivetor momento, cuja componente temporal é a energia do sistema. Ou seja, a assimetria no espaço e tempo verificada na equação de Schrödinger faz com que a mesma não seja invariante sob as transformações de Lorentz.

Isso pode ser verificado imediatamente pela consideração da energia total de uma partícula livre relativística com momento $\mathbf{p}$. Pela equação (2.13) tem-se,

$$E = \left(p^2c^2 + m_0^2c^4\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.46}$$

Para utilizar a equação de Schrödinger é necessário definir um operador hamiltoniano $\hat{H}$ para a partícula de momento $\mathbf{p}$, que forneça a autoenergia dada por (2.46).

Fazendo a expansão em série de Taylor da energia total E, é possível inferir que para o operador hamiltoniano $\hat{H}$ (SAKURAI; NAPOLITANO, 1994):

$$\hat{H} = \left(\hat{p}^2c^2 + m_0^2c^4\right)^{\frac{1}{2}} = m_0c^2\left(1 + \frac{\hat{p}^2}{m_0^2c^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\therefore \hat{H} = m_0c^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{\hat{p}^4}{8m_0^3c^2} + \frac{\hat{p}^6}{16m_0^5c^4} + \cdots \tag{2.47}$$

O resultado obtido na equação (2.47) mostra que não é possível estabelecermos uma função de onda que forneça uma equação de onda relativística que seja invariante sob transformações de Lorentz, uma vez que esta teria uma única derivada no tempo e uma série infinita de derivadas espaciais crescentes, ou seja, não é possível considerar igualmente as coordenadas espaciais e a coordenada temporal na equação. Seguindo as regras de transformação das componentes dos vetores descritas na seção 2.4, podemos dizer também que a equação de Schrödinger não é covariante sob transformações de Lorentz. Isso significa que a equação de onda de Schrödinger precisa ser modificada para tratar a propagação da partícula livre no regime relativístico. No próximo capítulo mostramos como isso pode ser feito considerando o mesmo invariante de Lorentz (2.46), tendo como resultado a equação de Klein-Gordon, e as implicações desta para partículas de spin-0.

3 Partículas de Spin Zero: A Equação de Klein-Gordon

Antes de prosseguirmos com a modificação da equação de Schrödinger para obtenção da equação de Klein-Gordon é interessante justificar o motivo de nos restringirmos à descrição de partículas com spin-0. As partículas que compõem os objetos à nossa volta, como prótons, nêutrons e elétrons, todas elas possuem spin-1/2 (férmions). Algumas poucas partículas possuem spin-0, como o méson-π, que existe por um espaço de tempo muito pequeno antes do seu decaimento, da ordem de atossegundos ($10^{-18}s$) a nanossegundos ($10^{-9}s$), e o bóson de Higgs, descoberto recentemente em 2012. Qual o motivo então de considerarmos neste trabalho uma equação de onda relativística tão restritiva?

A resposta para esta pergunta segue a mesma direção de considerarmos insistentemente na Física o problema do oscilador harmônico simples ($F = -kx$), uma vez que sistemas reais sempre apresentam dissipações e são bem mais complexos que esta simplificação. A generalização da mecânica quântica para incluir a relatividade não é uma tarefa fácil. Partículas com spin-1/2 são descritas de maneira adequada pela equação de Dirac (GROSS, 1999; GREINER, 2000; OHLSSON, 2011). Esta descreve tanto a natureza relativística das partículas quanto o seu spin. Ao considerarmos a equação de Klein-Gordon para partículas com spin-0, podemos primeiramente entender vários aspectos da natureza relativística da mecânica quântica sem adicionar a complicação do spin. Essa abordagem inicial torna-se ainda mais importante e interessante porque o spin possui um papel essencial na determinação de propriedades dos átomos e da matéria, de maneira que os resultados obtidos com a equação de Klein-Gordon podem ser comparados com resultados obtidos a partir de modelos mais gerais, como a teoria de Dirac, para fornecer mais informações sobre a natureza do spin e a sua influência em várias propriedades da matéria.

Em 1926 a equação de Klein-Gordon (KG) foi introduzida por vários físicos, como Klein, Fock, Schrödinger e de Broglie, como uma proposta de generalização relativística da equação de Schrödinger. Apesar da equação levar o nome de Oskar Klein (1894-1977) e Walter Gordon (1893-1939) ela foi obtida independentemente por vários pesquisadores. A equação de KG aparece publicada pela primeira vez em um trabalho de Klein em 1926, sobre uma unificação da teoria quântica com a relatividade em um espaço de cinco dimensões (KLEIN, 1927). A principal contribuição no trabalho de Gordon foi a aplicação da mecânica ondulatória relativística no efeito Compton (GORDON, 1926). Apesar da perda de interesse na equação de KG após o surgimento da teoria de Dirac em 1928, ela reaparece alguns anos depois, quando em 1934 Pauli (1900-1958) e Weisskopf (1908-

2002) a reconsideram a luz de uma nova interpretação que permite prever a existência de anti-partículas de uma forma bem mais natural que a teoria de Dirac (KRAGH, 1984). Contudo, a versão de Pauli-Weisskopf da equação de KG se aplica apenas para bósons, não podendo ser vista como uma alternativa para a teoria de Dirac. Em 1934 nenhuma partícula elementar com spin-0 era conhecida. Somente com a descoberta do méson-π em 1947 por Cecil Powell, o brasileiro César Lattes e Giuseppe Occhialini, que a equação de KG pôde ser aplicada a um sistema físico real. Apesar disso, desde meados dos anos 1930 a equação de KG tem sido reconhecida como pertencente às equações fundamentais da teoria quântica de campos. Para saber mais sobre a origem da equação de KG veja Kragh (1984) .

3.1 Obtenção da Equação de Klein-Gordon

Como descrito no capítulo anterior a não covariância da equação de Schrödinger pode ser revelada considerando o autovalor de energia de uma partícula livre relativística dado por $E = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{\frac{1}{2}}$, o qual não permite descrever a coordenada temporal do quadrivetor momento, relacionada à energia, da mesma forma que as coordenadas espaciais. Como a equação de Schrödinger possui dependência de segunda ordem para as coordenadas espaciais e de primeira para a coordenada temporal, o que explica a existência da raiz quadrada do hamiltoniano H, uma forma de contornar esse problema para tornar a equação de Schrödinger covariante é trabalhar com uma expressão que contenha H^2.

Para isso vamos considerar a equação de Schrödinger escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \hat{H}\psi(\mathbf{r},t), \\ \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi(\mathbf{r},t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Multiplicando ambos os lados por $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}\right)$, obtemos:

$$\left(i^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}^2\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0. \tag{3.2}$$

Considerando o operador hamiltoniano para uma partícula livre relativística $\hat{H}^2 = (\hat{p}^2c^2 + m_0^2c^4)$ na equação (3.2), sendo $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, tem-se,

$$\begin{aligned} &\left(i^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2 - m_0^2c^4\right)\psi(\mathbf{r},t), \\ \therefore &\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que a última passagem foi feita dividindo-se todos os termos da equação por $\hbar^2c^2$ e colocando-se -1 em evidência. A equação (3.3) é a equação de onda relativística de

Klein-Gordon para uma partícula livre com spin-0, a qual é covariante sob transformações de Lorentz (FESHBACH; VILLARS, 1958; SUCHER, 1963).

Vamos checar o limite não relativístico da equação de Klein-Gordon assim como fizemos para o caso das transformações de Lorentz, que são reduzidas às equações de transformação de Galileu neste limite, mostrando que a relatividade restrita de Eisntein é uma generalização da mecânica newtoniana, veja seção 2.2. Para isso, vamos considerar a função de onda relativística $\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$, para o operador hamiltoniano no limite não relativístico dado por $H \approx E + m_0c^2$, conforme a equação (2.47). A energia E é a energia total da partícula de acordo com a mecânica clássica $E = E_c + V(\mathbf{r})$ e como estamos considerando uma partícula livre $E = E_c = p^2/2m_0$. Dessa forma, a função de onda relativística $\psi(\mathbf{r},t)$ pode ser escrita em termos da função de onda não relativística, dada por $\psi_0(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, como:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\frac{H}{\hbar}t} &= \psi(\mathbf{r})e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}\right)t}e^{-i\left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)t}, \\ \therefore \psi(\mathbf{r},t) &= \psi_0(\mathbf{r},t)e^{-i\alpha t}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo $\alpha = m_0c^2/\hbar$.

Substituindo a expressão (3.4) na equação de Klein-Gordon (3.3) tem-se:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_0(\mathbf{r},t)e^{-i\alpha t} = 0. \tag{3.5}$$

A derivada segunda no tempo de $\psi(\mathbf{r},t)$ é calculada como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi_0(\mathbf{r},t)e^{-i\alpha t}\right), \\ &= \frac{\partial\psi_0(\mathbf{r},t)}{\partial t}e^{-i\alpha t} - i\alpha\psi_0(\mathbf{r},t)e^{-i\alpha t}, \\ \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\psi_0(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}e^{-i\alpha t} - 2i\alpha\frac{\partial\psi_0(\mathbf{r},t)}{\partial t}e^{-i\alpha t} - \alpha^2\psi_0(\mathbf{r},t)e^{-i\alpha t}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo o resultado (3.6) na equação (3.5) e explicitando a expressão para α ficamos com,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i\frac{m_0c^2}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\right) - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi_0(\mathbf{r},t) &= 0, \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i\frac{m_0}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_0(\mathbf{r},t) &= 0, \\ \therefore \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i\frac{m_0}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\psi_0(\mathbf{r},t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Fazendo o limite clássico de $c \to \infty$ na equação (3.7) o primeiro termo tende a zero.

Multiplicando ambos os lados da equação restante por $\hbar^2/2m_0$ obtemos,

$$\left(-2i\frac{m_0}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\psi_0(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi_0(\mathbf{r},t) = 2i\frac{m_0}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m_0}\right)\frac{\partial\psi_0(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi_0(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi_0(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{3.8}$$

que é a equação de Schrödinger não relativística para uma partícula livre, veja equação (2.36). Este resultado mostra que a equação de Klein-Gordon é, de fato, uma generalização relativística da equação de Schrödinger para uma partícula livre.

3.1.1 A Equação de Klein-Gordon em Notação Relativística

Como a equação de Klein-Gordon é covariante sob as transformações de Lorentz, podemos escrever a mesma na notação de quadrivetores da relatividade. O momento na mecânica quântica é descrito pelo operador $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, de maneira que precisamos definir o quadrivetor gradiente ou quadrigradiente.

Como vimos, o operador vetorial diferencial dado por ∇ é dado pelas derivadas parcias das coordenadas (x, y, z), por exemplo, em suas respectivas direções. O quadrigradiente deve incluir também a derivada da coordenada associada ao tempo ($x^0 = ct$) do espaço de Minkowski. Dessa forma, o quadrigradiente ∇^μ das coordenadas contravariantes (x^μ) pode ser descrito por:

$$\nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\nabla^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \boldsymbol{\nabla}\right). \tag{3.9}$$

Analogamente para as coordenadas covariantes (x_μ), veja seção 2.4, tem-se:

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\boldsymbol{\nabla}\right). \tag{3.10}$$

Consequentemente, o operador laplaciano ∇^2 irá assumir uma forma diferente no espaço de Minkowski, sendo chamado de operador d'Alambertiano $\Box$ definido por,

$$\Box = \nabla^\mu\nabla_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2, \tag{3.11}$$

que é um covariante de Lorentz, assim como o operador quadrimomento $\hat{p}^\mu = -i\hbar\nabla^\mu$, cujo quadrado neste caso é dado por $\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu = -\hbar^2\Box$. Nas próximas seções utilizaremos o operador d'Alambertiano ou $\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu = -\hbar^2\nabla^\mu\nabla_\mu$, conforme a conveniência.

Dessa forma, a equação de Klein-Gordon em notação relativística fica:

$$\left(\nabla^\mu\nabla_\mu + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0. \tag{3.12}$$

3.2 A Mecânica Quântica Relativística segundo a Equação de Klein-Gordon

Agora que obtemos a equação relativística para as funções de onda, vamos verificar algumas consequências observadas a partir da equação de Klein-Gordon, considerando a mesma filosofia geral da mecânica quântica de que a função de onda de uma partícula contém toda a informação possível sobre a partícula.

Considerando a função de onda (2.32), agora no contexto relativístico, podemos escrever,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}, \tag{3.13}$$

sendo A uma constante de normalização. Substituindo a mesma na equação de Klein-Gordon (3.12) tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^\mu \nabla_\mu + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) Ae^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu} &= 0, \\
\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{-ip}{\hbar}\right)^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right] Ae^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu} &= 0, \\
\left(-\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{r}, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Resolvendo a equação (3.14) obtemos para a energia da partícula livre relativística:

$$E = \pm\left(p^2 c^2 + m_0^2 c^4\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

O resultado (3.15) mostra que a equação de Klein-Gordon admite energias positivas e negativas. Isso é completamente contraintuito com relação a interpretação da mecânica quântica, uma vez que este resultado conduz, a princípio, à existência de infinitos níveis de energia negativa. Discutiremos mais adiante que as soluções que conduzem a energias negativas estão fisicamente conectadas com antipartículas. Como estas podem ser observadas na natureza, a equação de Klein-Gordon fornece uma indicação do valor da energia que antipartículas podem assumir.

O surgimento de energias negativas na solução da equação de Klein-Gordon traz a necessidade de checarmos o significado de uma função de onda relativística. Na teoria quântica não relativística, a probabilidade de encontrarmos uma partícula em uma região do espaço entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ em um determinado instante de tempo t é dada por $P(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}$, em que a densidade de probabilidade é descrita como $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Note que $\rho(\mathbf{r}, t)$ é uma quantidade positiva por definição.

A densidade de probabilidade se relaciona com a corrente, ou fluxo, de probabilidade $\mathbf{j}$ através da equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \tag{3.16}$$

A equação (3.16) é a lei de conservação usual não relativística, a qual estabele que a taxa de mudança na densidade ρ em um volume infinitesimal é balanceada pela corrente $\mathbf{j}$ deixando o volume. Para encontrarmos o equivalente relativístico de ρ precisamos, necessariamente, encontrar um equivalente relativístico para $\mathbf{j}$, para podermos escrever uma equação de continuidade relativística.

Manipulando matematicamente a equação de Klein-Gordon (3.12), veja apêndice B, é possível mostrar que,

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)} - \psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)}\right) = -\nabla\cdot\Big(\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^*(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)\Big). \tag{3.17}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (3.17) por $i\hbar/2m_0$, de maneira que possamos obter dimensão de densidade de probabilidade ($1/m^3$) na parte temporal da equação (3.17), esta assume a forma de uma equação de continuidade (3.16) para:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar}{2m_0c}\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)} - \psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)}\right), \tag{3.18}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar}{2m_0}\Big(\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^*(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)\Big). \tag{3.19}$$

Após obter o equivalente relativístico para a equação de continuidade seria natural sugerir uma interpretação para $\rho(\mathbf{r},t)$ como sendo uma densidade de probabilidade. Contudo, para um dado tempo t, $\psi(\mathbf{r},t)$ e $\partial\psi(\mathbf{r},t)/\partial t$ podem assumir valores arbitrários, de maneira que $\rho(\mathbf{r},t)$, dado pela equação (3.18), pode ser positivo ou negativo. Como $\rho(\mathbf{r},t)$ não é arbitrariamente positivo, este não pode ser uma densidade de probabilidade. A razão disto está no fato da equação de Klein-Gordon ser de segunda ordem no tempo e, assim como a equação da segunda lei de Newton, são necessárias duas condições do sistema para termos total informação sobre o estado do mesmo. No caso da mecânica newtoniana é necessário saber a posição $x(t)$ e o momento, ou a velocidade $dx(t)/dt$, do sistema em um determinado instante de tempo t. Analogamente, na equação de Klein-Gordon é necessário saber $\psi(\mathbf{r},t)$ e $\partial\psi(\mathbf{r},t)/\partial t$ para um dado t.

Apesar da interpretação de probabilidade não ser aplicável para $\rho(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ na formulação de Klein-Gordon, estes ainda podem ser vistos como uma *densidade de carga* $\rho'(\mathbf{r},t)$ e uma *densidade de corrente de carga* $\mathbf{j}'(\mathbf{r},t)$, simplesmente se considerarmos a multiplicação das equações (3.18) e (3.19) pela carga elementar e, ou seja,

$$\rho'(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar e}{2m_0c}\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)} - \psi(\mathbf{r},t)\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial(ct)}\right), \tag{3.20}$$

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r},t) = \frac{i\hbar e}{2m_0}\Big(\psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^*(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)\Big). \tag{3.21}$$

Neste contexto $\rho'(\mathbf{r},t)$ admite valores positivos, negativos e zero, sendo consistente com a possibilidade de existência de partículas e antipartículas, como previsto pela teoria.

Para entender isso melhor vamos considerar as energias obtidas para a partícula livre na equação (3.15), $E = \pm\left(p^2c^2 + m_0^2c^4\right)^{\frac{1}{2}}$. Consequentemente, teremos duas soluções possíveis para a partícula com um dado momento $\mathbf{p}$, uma com energia positiva $\psi_{(+)}(\mathbf{r}, t)$ e outra com energia negativa $\psi_{(-)}(\mathbf{r}, t)$, ou seja,

$$\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = A_{(\pm)} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} \mp |E| t)}, \tag{3.22}$$

em que $A_{(\pm)}$ são constantes de normalização. Fazendo a derivada no tempo de (3.22),

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \mp \frac{i\,|E|}{\hbar}\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t), \tag{3.23}$$

e substituindo na densidade de carga $\rho'(\mathbf{r}, t)$, equação (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned}
\rho'_{(\pm)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left[\psi^*_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\left(\mp\frac{i\,|E|}{\hbar}\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\right) - \psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\left(\pm\frac{i\,|E|}{\hbar}\psi^*_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\right)\right], \\
&= \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\mp\frac{i\,|E|}{\hbar}\psi^*_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\right), \\
\therefore\ \rho'_{(\pm)}(\mathbf{r}, t) &= \pm\frac{e\,|E|}{m_0c^2}\psi^*_{(\pm)}(\mathbf{r}, t)\psi_{(\pm)}(\mathbf{r}, t).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

O resultado fornecido pela equação (3.24) sugere a interpretação de que $\psi_{(+)}(\mathbf{r}, t)$ especifica partículas com massa de repouso m_0 e carga positiva $+e$, enquanto que $\psi_{(-)}(\mathbf{r}, t)$ especifica partículas com a mesma massa, mas com carga negativa $-e$. É possível demonstrar, a partir de um hamiltoniano descrevendo a interação de uma partícula carregada com um campo eletromagnético (FESHBACH; VILLARS, 1958), que de fato existe uma correspondência de um para um entre as soluções de energia negativa e as soluções de energia positiva com carga oposta da equação de Klein-Gordon. Essa simetria conduz ao postulado de que as soluções com energia negativa representa uma partícula de carga oposta e mesma massa da partícula original, isto é, a existência de antipartículas. Esta previsão foi comprovada experimentalmente em 1932 pelo jovem Carl Anderson (1905-1991) (ANDERSON, 1933) que, seguindo o trabalho de Dirac, descobriu a antipartícula do elétron, chamada de pósitron ou antielétron. Sua descoberta foi uma excelente confirmação da teoria quântica relativística, lhe garantindo aos 31 anos de idade apenas, o prêmio Nobel em Física de 1936.

Neste trabalho discutimos as consequências da equação de Klein-Gordon examinando apenas as soluções para uma partícula livre com spin-0. Partículas com spin-0, como o meson-π (pion) ou o meson-K (kaon), interagem fortemente com outras partículas ou campos eletromagnéticos. É possível mostrar as implicações de considerarmos potenciais eletromagnéticos no formalismo da equação de Klein-Gordon e até mesmo a generalização direta da teoria não relativística do átomo de hidrogênio para um elétron com spin-0 orbitando o núcleo atômico. Para ver mais sobre tais implicações e propriedades veja as referências (GREINER, 2000; NOLINDER; SANDBERG, 2014).

4 Conclusões

Neste trabalho apresentamos a mecânica quântica relativística em um nível introdutório, elencando seus aspectos fundamentais de uma maneira mais familiar e elementar. Nosso objetivo é introduzir o assunto a estudantes de graduação que possuem pouco contato com teorias físicas como a relatividade restrita e a mecânica quântica em sua grade curricular. Sabendo das dificuldades de compreensão de uma teoria tão tecnicista em seu formalismo matemático, nos preocupamos em fornecer os elementos necessários para compreensão dos seus principais aspectos, sem que o estudante disponha de técnicas mais avançadas da física matemática. Além disso, fomos motivados pelo ensejo de prover um material mais robusto e com maior uniformidade e clareza em relação a notação, haja vista que nos deparamos com uma notação nos livros mais avançados da área, que dista consideravelmente daquela em que estamos habituados a trabalhar, como a notação vetorial no espaço euclidiano.

Ainda, notamos as perspectivas favoráveis para esta apresentação, pois no decorrer deste trabalho perpassamos por muitos tópicos importantes da Física, partindo das limitações da mecânica newtoniana para fenômenos a altas velocidades, apresentamos a teoria da relatividade restrita como uma teoria mais geral, estabelecendo a invariância das equações do eletromagnetismo sob as transformações impostas por esta teoria e por fim checamos a invariância da equação de Schrödinger. Partindo da equação de Schrödinger, demonstramos o quão poderosa é a metodologia da Física para validar extensões de teorias físicas na busca de fenômenos mais gerais ou até mesmo corrigir problemas de interpretação em determinados regimes. Desta forma, demonstramos que partindo da equação de Schrödinger podemos obter uma equação de onda relativisticamente correta para descrição de partículas com spin-0, a equação de Klein-Gordon. Através da equação de Klein-Gordon discutimos como a solução para energia negativa pode ser associada à existência de antipartículas, cuja existência é comprovada experimentalmente. Este fato é vigoroso pois o nosso estudo das equações de onda relativísticas permitiu a obtenção de informações acerca dos constituintes mais elementares da matéria, utilizando ténicas básicas do cálculo diferencial e integral. Com isto, esperamos ter demonstrado ao leitor o porquê da matemática ser uma das metodologias essenciais da Física, uma vez que permite tratarmos conceitos abstratos, objetos puramente matemáticos que podem ser fisicamente interpretados, como no caso das antipartículas.

Este trabalho pode ser extendido considerando o estudo da equação de Dirac e de suas simetrias para a descrição de partículas de spin-1/2 (DIRAC, 1982). Com este grau de liberdade a mais no sistema, o seu tratamento exige técnicas e métodos mais avançados da física matemática, de maneira que estudos adicionais devem ser conduzidos para tornar o tema acessível, pelo menos a nível introdutório, para alunos de graduação.

Referências

ANDERSON, C. D. The Positive Electron. *Physical Review*, American Physical Society, v. 43, n. 15, p. 491–494, march 1933. ISSN 1536-6065. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.43.491>.

ARFKEN, G.; WEBER, H. *Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. 910 p. ISBN 978-85-352-2050-6.

ASPECT, A.; VILLAIN, J. *The birth of wave mechanics (1923–1926)*. 2017. 583–585 p.

BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I. *Tensor Analisys on Manifold*. 1. ed. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1980.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 1977.

DIRAC, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics*. [S.l.]: Oxford Science, 1982. 324 p. ISSN 00255572.

FESHBACH, H.; VILLARS, F. Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 30, n. 1, p. 24–45, jan 1958. ISSN 00346861. Disponível em: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10-.1103/RevModPhys.30.24>.

FRENCH, A. P. *Special relativity*. [S.l.]: WW Norton Company Inc, 1968. 1–286 p.

GOETHE, J. W. von. *Os Sofrimentos do Jovem Werther*. Clássicos. São Paulo: Abril, 2010. 176 p.

GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 40, n. 1-2, p. 117–133, jan 1926. ISSN 14346001. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01390840>.

GREINER, W. Relativistic Quantum Mechanics. In: *1*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2000. v. 1, p. 1–424. ISBN 9783540674573.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 4. ed. Edinburgh: Pearson, 2014.

GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2019. 347 p. ISBN 978-85-7605-927-1.

GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. [S.l.]: Wiley, 1999. ISBN 9780471353867.

JACKSON, J. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. Estados Unidos da América: Wiley, 1998. 808 p.

KLEIN, O. Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 41, n. 10, p. 407–442, oct 1927. ISSN 14346001. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01400205>.

KRAGH, H. Equation with the many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 52, n. 11, p. 1024–1033, nov 1984. ISSN 0002-9505.

LÄMMERZAHL, C. Relativity and technology. In: *Annalen der Physik (Leipzig)*. [s.n.], 2006. v. 15, n. 1-2, p. 5–18. ISSN 00033804. Disponível em: <www.ann-phys.org>.

LANDAU, L.D ;LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. [S.l.]: Pergamon Press, 1972. ISSN 19450699.

LICHNEROWICZ, A. *Elementos de Cálculo Tensorial*. 1. ed. [S.l.]: Aguilar, 1972. 1–269 p.

LIFSHITZ, E.; PITAEVSKII, M. L. P. *Relativistic Quantum Theory*. [S.l.]: Pergamon, 1971. ISSN 23318422.

MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: Wiley, 1998.

NARLIKAR, J. *An Introduction to Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. 1–363 p.

NOLINDER, A.; SANDBERG, E. The Klein-Gordon Equation and Pionic Atoms. 2014.

NUSSENZVEIG, M. H. *Curso de Física Básica 4 - Ótica Relatividade Física Quântica*. 1. ed. São Paulo: Bülcher, 1998. 444 p. ISBN 978-85-212-0163-2.

OHLSSON, T. *Relativistic quantum physics: From advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory*. [S.l.: s.n.], 2011. 1–297 p. ISBN 9781139032681.

RESNICK, R. *Introdução a Relatividade Especial*. [S.l.]: Poligono, 1991. 242 p.

RINDLER, W. *Essential Relativity*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1977.

RINDLER, W. *Introduction to Special Relativity*. .: Oxford University Press, 1982. 1–185 p.

ROBINETT, R. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1997.

ROHLF, J. W. *Modern physics from alpha to Z0*. [S.l.: s.n.], 1994. 664 p. ISBN 978-0-471-57270-1.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. San Francisco: Addison Wesley, 1994. 550 p. ISBN 0805382917.

SUCHER, J. Relativistic invariance and the square-root Klein-Gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of PhysicsAIP, v. 4, n. 1, p. 17–23, dec 1963. ISSN 00222488. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1703882>.

TAYLOR, E. F.; WHEELER, A. J. *Spacetime Physics*. 2. ed. New York: W.H.Freeman and Co, 1992. ISBN ISBN:0-7167-2327-1.

WEINBERG, S. *Discoveries and Interpretations: Studies in Contemporary Scholarship*. [S.l.], 1977. v. 106, n. 4, 17–35 p.

Apêndices

APÊNDICE A – Dedução das Transformações de Lorentz

Neste apêndice mostramos como as equações de transformação de Lorentz podem ser derivadas a partir dos dois postulados da relatividade especial, *o princípio da relatividade* e o da *velocidade limite c para as interações*, veja seção 2.2. Este último também é conhecido como o *princípio da constância da velocidade da luz*.

Seja dois referenciais inerciais S e S' com coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z'), respectivamente, com o referencial S' se movendo com velocidade $\mathbf{v}$ em relação a S ao longo do eixo comum $x - x'$. Podemos fazer isso sem perda de generalidade uma vez que o espaço é homogêneo e isotrópico. Considerando a origem dos dois referenciais inerciais coincidindo em $t = t' = 0$ quando uma frente de onda luminosa é emitida a partir da origem de S com velocidade c, as distâncias da frente de onda em relação à origem dos dois referenciais inerciais S e S', em quaisquer instantes de tempo t e t' posteriores, são descritas pela equação de uma esfera que expande o seu raio em relação ao tempo com uma taxa c, ou seja,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \tag{A.1}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \tag{A.2}$$

As equações de transformação de Lorentz fornece a relação funcional entre as coordenadas espaciais e o tempo de um evento, para um observador situado no referencial S, com as mesmas de outro observador situado em S'. Como estamos considerando um universo homogêneo, ou seja, todas as posições são equivalentes, tais equações de transformação precisam ser lineares, de maneira que a forma mais geral para as mesmas é (RESNICK, 1991),

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{aligned} \tag{A.3}$$

em que os coeficientes a_{ij} são constantes que determinaremos a fim de encontrarmos as equações de transformação desejadas.

Como o eixo-x coincide com o eixo-x' para todo t e t', devemos ter $y = 0$ e $z = 0$ caracterizando os pontos sobre x, os quais resultam sempre em $y' = 0$ e $z' = 0$, para os pontos sobre x'. Dessa forma, os coeficientes a_{21}, a_{24}, a_{31} e a_{34} devem se anular, caracterizando uma transformação do tipo:

$$y' = a_{22}y + a_{23}z; \qquad z' = a_{32}y + a_{33}z. \tag{A.4}$$

Analogamente, o plano-xy deve se transformar no plano-$x'y'$, os quais são caracterizados por $z = 0$ e $z' = 0$, respectivamente. O mesmo é considerado para os planos xz e $x'z'$, em que $y = 0$ deve fornecer $y' = 0$. Para obter tais resultados devemos ter a_{23} e a_{32} iguais a zero, de maneira que:

$$y' = a_{22}y; \quad z' = a_{33}z. \tag{A.5}$$

Os coeficientes a_{22} e a_{33} são determinados utilizando-se o *Princípio da Relatividade*. Devido à equivalência entre os referenciais inerciais, S e *S'*, e como o movimento relativo entre os mesmos é na direção $x - x'$, as medidas ao longo das direções y e z do referencial S devem ser idênticas, ou seja, invariantes, em relação às medidas ao longo das direções y' e z', respectivamente, do referencial S'. Isto significa que a_{22} e a_{33} são iguais a 1 e, portanto,

$$y' = y; \quad z' = z. \tag{A.6}$$

Pelas equações (A.3) e (A.5), resta obter as transformações para x' e t', ou seja,

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Devido à isotropia do espaço, devemos ter a_{12}, a_{13}, a_{42} e a_{43} todos nulos, caso contrário, o movimento dependeria das direções y e z.

Para a equação de transformação no eixo-x', nota-se que um ponto em $x' = 0$ parece estar se movendo com velocidade v no referencial S no sentido positivo de x, de maneira que $x' = 0$ precisa ser idêntico a $x = vt$, ou seja, devemos ter $x' = a_{11}(x - vt)$. Pela relação de transformação para x' em (A.7) devemos ter $x' = a_{11}x - a_{11}vt = a_{11}x + a_{14}t$, o que fornece $a_{14} = -va_{11}$, de maneira que as quatro relações de transformação (A.3) são reduzidas a:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Substituindo as expressões (A.8) na equação (A.2) tem-se:

$$\begin{gathered} a_{11}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2, \\ (a_{11}^2 - c^2a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(va_{11}^2 + c^2a_{41}a_{44})xt = (c^2a_{44}^2 - v^2a_{11}^2)t^2. \end{gathered} \tag{A.9}$$

Para que a equação (A.9) concorde com a equação (A.1), devemos ter:

$$\begin{aligned} c^2a_{44}^2 - v^2a_{11}^2 &= c^2, \\ a_{11}^2 - c^2a_{41}^2 &= 1, \\ va_{11}^2 + c^2a_{41}a_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Como temos um sistema com três incógnitas e três equações é possível mostrar que:

$$a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad a_{41} = -\frac{v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

de maneira que as equações de transformação de Lorentz em sua forma final são descritas por:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{A.10}$$

$$y' = y, \tag{A.11}$$

$$z' = z, \tag{A.12}$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{A.13}$$

APÊNDICE B – Equivalente Relativístico da Densidade e Corrente de Probabilidades

Neste apêndice vamos derivar o quadrivetor corrente j_μ para a equação de Klein-Gordon para obtenção de uma equação relativística de continuidade. A equação de Klein-Gordon é descrita por,

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0, \tag{B.1}$$

de maneira que o seu conjugado complexo fica:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi^*(\mathbf{r},t) = 0. \tag{B.2}$$

Multiplicando a equação (B.1) à esquerda por $\psi^*(\mathbf{r},t)$, a equação (B.2) por $\psi(\mathbf{r},t)$ e fazendo a diferença entre as duas equações tem-se:

$$\psi^*\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi - \psi\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0. \tag{B.3}$$

Escrevendo a equação (B.3) utilizando a notação de quadrivetores obtemos:

$$\psi^*\left(\nabla_\mu\nabla^\mu + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi - \psi\left(\nabla_\mu\nabla^\mu + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0,$$

$$\nabla_\mu\left(\psi^*\nabla^\mu\psi - \psi\nabla^\mu\psi^*\right) = 0,$$

$$\therefore \nabla_\mu j^\mu = 0. \tag{B.4}$$

Dessa forma, podemos escrever o quadrivetor corrente j_μ como:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0}\left(\psi^*\nabla_\mu\psi - \psi\nabla_\mu\psi^*\right). \tag{B.5}$$

Note que j_μ foi multiplicado pelo fator $i\hbar/2m_0$. Isso foi feito para que a componente temporal j_0, dada por,

$$j_0 = \frac{i\hbar}{2m_0}\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial(ct)} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial(ct)}\right), \tag{B.6}$$

tenha dimensão de densidade de probabilidade em analogia à equação de continuidade não relativística $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$.

Dessa forma podemos identificar na equação (B.6) a densidade ρ como sendo,

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \tag{B.7}$$

de maneira que $\nabla_\mu j^\mu = 0$ pode ser vista como a equação relativística de continuidade, a qual admite valores positivos, negativos ou nulos.