Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Pedro Henrique Takemura Feitosa da Silva

Operadores de Calderón-Zygmund e o Teorema $T(1)$

São Carlos - SP
2021.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Pedro Henrique Takemura Feitosa da Silva

Operadores de Calderón-Zygmund e o Teorema $T(1)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

São Carlos - SP
2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Pedro Henrique Takemura Feitosa da Silva, realizada em 26/05/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner (UFSCar)

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon (FFCLRP/USP)

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira (UFRGS)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho aos meu irmãos, Caio e Manu.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me guiar, me proteger e ser a minha luz em tempos difíceis.

Agradeço fortemente à minha família, aos meus pais, Adriana e Edson por sempre me darem segurança, apoio e incentivo. E aos meus irmãos, Caio e Manuela pelos ótimos momentos que passamos juntos.

Tenho a maior gratidão pelo Prof. Gustavo Hoepfner pela parceria e orientação neste ano de trabalho. Agradeço por sua paciência, pelos ensinamentos e dicas e por ter contribuído imensamente em minha formação acadêmica.

Sou eternamente grato a todos os amigos e colegas de turma que fizeram parte dessa minha trajetória em São Carlos. Um agradecimento especial para o Christão, Carlitos, Gabriel, Hermano, Iza, Rachel e Rafa, pelos finais de semana estudando na UFSCar, pelas noites no boteco, rolês de forró, churrascos, as inúmeras conversas e risadas. Por causa deles e desses momentos que meus dias se tornaram muito mais leves. Agradeço também aos amigos de Londrina, especialmente a Luba, Gu e Rei que, apesar da distância, mantivemos contato via Skype com horas de conversas.

Agradeço aos professores e professoras do Departamento de Matemática, tanto da UFSCar quanto da UEL, pelos ensinamentos e conhecimentos transmitidos e por contribuírem em minha formação acadêmica e pessoal. Um agradecimento especial ao Prof. Paulo Liboni por toda a ajuda.

Finalmente, agradeço à FAPESP por financiar este projeto Nº2019/02997-9.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar, de forma detalhada, um dos principais tópicos de estudo da Análise Harmônica: os operadores de Calderón-Zygmund. Fizemos aqui, em sua maior parte, uma revisão bibliográfica dos livros [GFK1] e [GFK2], abordando conceitos necessários para provarmos o Teorema $T(1)$ de G. David e J-L. Journé provado em artigo [D-J] e que caracteriza a limitação L^2 de uma classe de operadores.

A prova do Teorema $T(1)$ apresentada aqui segue nível de detalhe difícil de se encontrar na literatura e é a nossa maior contribuição para a comunidade brasileira de matemática que segue a linha de pesquisa em Análise Harmônica.

Este texto busca ser acessível para qualquer um que tenha conhecimentos básicos de Teoria da Medida e Análise Funcional, como por exemplo em [BSS], [FLD], [CNW] e [BZS].

Palavras-chave: Análise Harmônica, integrais singulares, operadores de Calderón-Zygmund, limitação de operadores.

Abstract

The purpose of this work is to present, in a detailed way, one of the main topics of Harmonic Analysis: the singular integral operators or, in its general form, the Calderón-Zygmund operators. We did here, for the most part, a literature review of [GFK1] and [GFK2], aprocching necessary concepts to prove the so known $T(1)$ Theorem, which was first proved by G. David and J-L. Journé in the article [D-J], which characterizes the L^2 boundedness of a certain class of operators.

The proof of the $T(1)$ Theorem here is present thoroughly, which isn't common to find in the literature and this is our greatest contribution for the Brazilian mathematicians community, who research in Harmonic Analysis.

This text may be accessible for anyone who has basic notions in Measure Theory and Functional Analysis, for instance see [BSS], [FLD], [CNW] e [BZS].

Keywords: Harmonic Analysis, singular integrals, Calderón-Zygmund operators, boundedness of operators.

Sumário

Introdução

Os operadores de Calderón-Zygmund são, em um certo sentido, operadores lineares contínuos T associados a um núcleo $K(x,y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e que admitem uma representação integral

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy,$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \not{i}n\mathrm{supp}\, f$. A teoria de integrais singulares está intimamente ligado ao estudo das equações diferencias, teoria de operadores e teoria de análise complexa. Um clássico exemplo de integral singular, que está conectado ao estudo de funções analíticas no semi-plano $\mathrm{Re}(z) > 0$, é a transformada de Hilbert

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{t-s} ds.$$

Podemos separar essa classe de operadores em dois tipos: aqueles que são do tipo convolução e os que são do tipo não-convolução. A primeira classe de operadores, os operadores T do tipo convolução são dados por

$$Tf(x) = W * f(x),$$

em que W é uma distribuição temperada que estende uma função K definida $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, isto é, W é elemento de $\mathcal{S}'$, o dual do espaço de Schwartz, definido por

$$\langle W, f \rangle = \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dizer que W estende K significa que W coincide com K longe da origem. Neste primeiro caso, sabe-se que o estudo de integrais singulares do tipo convolução é mais simples. Em geral, para se obter a limitação L^p de tais operadores, usamos exclusivamente técnicas que envolvem a transformada de Fourier (veja os Teoremas 3.2.5, 4.3.4 e 4.4.7) e a decomposição de Calderón-Zygmund (veja os Teoremas 4.4.2 e 4.4.10). Isso em geral não é possível quando tratamos de operadores que não são do tipo convolução. Em geral, garantir a limitação L^p de integrais singulares é na verdade um problema que se reduz em provar sua limitação L^2 (veja os teoremas 4.4.2 e 4.4.7). De fato, uma condição suficiente para que se obter a limitação L^p de tais operadores é sua limitação em L^2, ou pelo menos em algum L^r (veja o Teorema 4.4.2). Logo, se garantimos a limitação L^2 de T, consequentemente T é limitada em L^p, para $1 < p < \infty$. Ora, o Teorema 3.2.5 caracteriza a limitação L^2 dos operadores T do tipo convolução da seguinte forma: T ser limitado em L^2 equivale a dizer que a transformada de Fourier de seu núcleo distribucional W é uma função limitada. Posteriormente, vemos um critério para obtermos operadores limitados em L^2. Com efeito, sempre que K satisfizer certas condições de tamanho, suavidade e cancelamento, o operador T associado a K será limitado em L^2.

Os operadores do tipo não-convolução são operadores lineares contínuos $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ que admitem uma representação integral

$$\langle Tf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)g(x)dydx,$$

para todas funções $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty$ cujos suportes não se interceptam, em que K é uma função de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ satisfazendo certas condições de tamanho e suavidade. Neste caso, dizemos que T é um operador associado ao um núcleo padrão K. Quando tais operadores T admitem extensão limitada em L^2, dizemos então que T é um operador de Calderón-Zygmund. Apesar do contexto, é possível provar que um operador de Calderón-Zygmund é sempre limitado em L^p, para todo $1 < p < \infty$, ou seja, a limitação L^2 de T ainda é condição suficiente para que T seja limitada em L^p. Este fato se encontra no Teorema 6.3.1 e pode ser provado sem muitas dificuldades utilizando a decomposição de Calderón-Zygmund. Logo, limitar em L^p esta classe de operadores associados a núcleos padrões, se reduz a garantir sua limitação em L^2, o que é uma tarefa muito difícil. É aqui que o Teorema $T(1)$ entra em cena, trazendo justamente um critério para avaliar quando tais operadores são limitados em L^2:

Teorema 1. *(Teorema T(1) - David & Journé, '84) Um operador linear contínuo $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ associado a um núcleo padrão K é limitado em L^2 se, e somente se, T satisfaz as seguintes condições*

(1) $T(1) \in BMO$

(2) $T^*(1) \in BMO$

(3) T satisfaz WBP.

Sua demonstração é bastante extensa e requer uma série de pré-requisitos e resultados preliminares. Veja a Seção 6.4 do Capítulo 6.

A discussão feita nos parágrafos anteriores só é possível se antes estudarmos alguns tópicos de Teoria da Medida, Teoria das Distribuições e conceitos básicos da Análise Harmônica Clássica, como as funções maximais de Hardy-Littlewood e a transformada de Fourier. Todos estes conceitos se encontram nos Capítulos 1 e 2

O Capítulo 3 traz uma discussão sobre operadores que são invariantes por translação. Tais operadores, quando limitados em L^p, são caracterizados por serem do tipo convolução. Uma vez que há uma classe de integrais singulares que são do tipo convolução, este capítulo traz uma noção um pouco mais geral de tais operadores.

O estudo de integrais singulares começa no Capítulo 4, que segue uma ordem histórica do surgimento de tais operadores. Começando pela transformada de Hilbert, sua relação com funções analíticas e sua limitação em L^p. Passamos então com um breve resumo sobre as transformadas de Riesz, que são operadores de $\mathbb{R}^n$, que estendem em $\mathbb{R}^n$ a transformada de Hilbert . Em seguida discutimos as integrais singulares homogêneas, que são generalizações das transformadas de Hilbert e de Riesz. Por fim, operadores integrais singulares mais gerais do tipo convolução.

Introduzimos o espaço BMO no Capítulo 5. Discutimos algumas das propriedades deste espaços, provamos a Desigualdade de John-Nirenberg e fazemos uma breve discussão sobre a dualidade entre os espaços BMO e H^1.

Finalmente, no Capítulo 6 nos dedicamos ao estudo dos operadores de Calderón-Zygmund $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$. Introduzimos conceitos fundamentais e provamos uma série de lemas que nos preparará para a prova do Teorema $T(1)$. Vale ressaltar que cada parte a demonstração aqui feita foi inspirada nas referências [DKT], [AVZ], [GFK2] e [STN], obtendo assim uma versão detalhada do resultado. Além disso, a última seção do Capítulo 6 nos dedicamos a um aplicação do Teorema $T(1)$ afim de caracterizar a limitação $L^2 \to L^2$ de operadores pseudo-diferenciais com símbolos em $\mathcal{S}^0_{1,1}$.

Destaco que buscamos apresentar maior parte dos detalhes das demonstrações, muitas vezes omitidas nas referências seguidas. Por outro lado, os resultados cujas demonstrações foram omitidas são acompanhados de uma referência para o leitor curioso.

Capítulo 1

Os Espaços L^p e Interpolação

1.1 Espaços L^p e $L^{p,\infty}$

Seja X um espaço de medida com μ uma medida positiva em X. Dada uma função f μ-mensurável, definimos a norma L^p de f, $0 < p \leq \infty$, por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}, \ p \neq \infty,$$
$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess.sup}\,|f| = \inf\{M > 0 : \mu(\{|f| > M\}) = 0\}.$$

Ao longo deste trabalho estaremos considerando funções assumindo valores complexos, a menos que seja dito o contrário. O espaço das funções μ-mensuráveis que são p-integráveis, com $p \neq \infty$, isto é, que têm norma L^p finita, será denotado por $L^p(X, \mu)$. O espaço das funções μ-mensuráveis essencialmente limitadas, ou seja, que têm norma L^∞ finita, será denotado por $L^\infty(X, \mu)$. Denotaremos $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, em que $|\cdot|$ representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

É conhecido que os espaços L^p, com $1 \leq p \leq \infty$, munidos da norma $\|\cdot\|_{L^p}$ é um espaço de Banach. Além disso, dado $1 < p < \infty$, se p' é seu expoente conjugado, isto $1/p + 1/p' = 1$, então o dual de L^p é o $L^{p'}$. Além disso, por dualidade, vale que

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \left|\int_X fg d\mu\right|.$$

Os espaços $L^{p,\infty}(X, \mu)$, lê-se L^p fraco, com $0 < p < \infty$, é o espaço de todas as funções f μ-mensuráveis de X tais que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{\gamma d_f(\gamma)^{1/p} : \gamma > 0\} < \infty,$$

em que d_f é a função distribuição de f, dada por

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}), \quad \text{para todo } \alpha \geq 0.$$

O espaço L^∞ fraco é definido por ser o próprio $L^\infty(X,\mu)$. Pela desigualdade de Chebyshev,

$$\|f\|_{L^p}^p \geq \alpha^p d_f(\alpha), \ \ \alpha \geq 0,$$

com $1 \leq p < \infty$, é evidente que $L^{p,\infty} \supset L^p$ e além disso, vale a desigualdade

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Uma propriedade bastante útil da função distribuição é o fato de podermos expressar a norma L^p de uma função f em termos de $d_f(\alpha)$.

Proposição 1.1.1. *Seja (X,μ) um espaço de medida σ-finito. Para toda $f \in L^p(X,\mu)$, com $0 < p < \infty$, vale que*

$$\|f\|_{L^p} = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Além disso, dadas uma função crescente $\phi \in \mathbb{C}^1([0,\infty))$, com $\phi(0) = 0$, e uma função mensurável f de X, tal que $\phi(|f|) \in L^1(X,\mu)$, vale que

$$\int_X \phi(|f|) d\mu = \int_0^\infty \phi'(\alpha) d_f(\alpha) d\alpha.$$

Demonstração. Veja em [GFK1], Proposição 1.1.4. □

Ao longo deste trabalho, trabalharemos mais especificamente com os espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. Definimos a seguir o espaço das funções Lebesgue mensuráveis que são localmente p-integráveis. Para $1 \leq p < \infty$, Denotamos por $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções f Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int_K |f(x)| dx < \infty,$$

para todo subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$. O caso em que $p = 1$, as funções de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ são ditas localmente integráveis. Com uma aplicação direta da desigualdade de Hölder, prova-se que o espaço L^1_{loc} contém cada $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$. Em geral, para $0 < p < q < \infty$, valem as inclusões

$$L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Feito um breve resumo sobre os espaços L^p, definimos a seguir a convolução entre duas funções integráveis.

Definição 1.1.2. *Dadas duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a* ***convolução*** *de f com g é a função $f * g$ definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy. \tag{1.1.1}$$

A convolução de duas funções integráveis está bem definida, pois pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dydx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|dy\|f\|_{L^1}\\ &= \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1}<\infty.\end{aligned}$$

Além disso, por uma simples mudança de variável, verifica-se $f*g=g*f$.

Definição 1.1.3. *Uma família de funções integráveis $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma aproximação da identidade se*

(a) existe $c>0$ tal que $\|\phi_\varepsilon\|_{L^1}\leq c$, para todo $\varepsilon>0$;

(b) $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\varepsilon(x)dx=1$, para todo $\varepsilon>0$;

(c) para todo $\delta>0$, valer que $\int_{|x|>\delta}|\phi_\varepsilon(x)|dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exemplo 1.1.4. *Seja ϕ uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ com $\int\phi=1$ e defina $\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}x)$, para todo $\varepsilon>0$ e $x\in\mathbb{R}^n$. Então, a família $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma aproximação da identidade. De fato, as condições (a) e (b) da Definição 1.1.3 são satisfeitas, já que $\|\phi_\varepsilon\|_{L^1}=\|\phi\|_{L^1}<\infty$ e $\int\phi_\varepsilon=\int\phi=1$. Para verificar o item (c), considere $\delta>0$ e veja que*

$$\int_{|x|>\delta}|\phi_\varepsilon(x)|dx=\int_{|x|>\delta}\varepsilon^{-n}|\phi(\varepsilon^{-1}x)|dx=\int_{|x|>\delta/\varepsilon}|\phi(x)|dx.$$

Como $|\phi(x)|\chi_{|x|>\delta/\varepsilon}\to 0$ q.t.p., quando $\varepsilon\to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos a convergência

$$\int_{|x|>\delta/\varepsilon}|\phi(x)|dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

e portanto o item (c) é satisfeito.

Teorema 1.1.5. *Seja $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma aproximação da identidade de $\mathbb{R}^n$. São válidas as convergências:*

(1) Para toda $f\in L^p$, com $1\leq p<\infty$, $\|\phi_\varepsilon*f-f\|_{L^p}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$;

(2) Dada uma função $f\in L^\infty$ contínua numa vizinhança de um compacto $K\subset\mathbb{R}^n$, vale que $\|\phi_\varepsilon*f-f\|_{L^\infty}\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, ou seja, $\phi_\varepsilon*f\to f$ uniformemente em K. Em particular, vale a convergência pontual em K.

Demonstração. (1) Seja g uma função contínua suportada num compacto $K_0\subset\mathbb{R}^n$. Para todo $x\in\mathbb{R}^n$ e para y suficientemente próximo da origem, é evidente que

$$|g(x-y)-g(x)|^p \leq (|g(x-y)|+|g(x)|)^p \leq (2\|g\|_{L^\infty})^p \chi_{K_0}$$

Quando $|y| \to 0$, $|g(x-y)-g(x)|^p \to 0$. Sendo a χ_{K_0} integrável, usamos o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|^p dx \longrightarrow 0, \quad |y| \to 0. \tag{1.1.2}$$

Dada uma função $f \in L^p$ e $\varepsilon' > 0$, pela densidade do espaço das funções contínua com suporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sempre é possível encontrar $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g-f\|_{L^p} < \varepsilon'$. Escreva $f_y(x) = f(x-y)$ e $g_y(x) = g(x-y)$; note que $\|f_y\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ e $\|g_y\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$. Pela convergência (1.1.2), tome $\delta > 0$ tal que $\|g_y - g\|_{L^p} < \varepsilon'$ para todo $|y| < \delta$. Assim, se $|y| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\|f_y - f\|_{L^p} &\leq \|f_y - g_y\|_{L^p} + \|g_y - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\
&= 2\|g - f\|_{L^p} + \|g_y - g\|_{L^p} \\
&< 3\varepsilon'
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p dx \longrightarrow 0, \quad |y| \to 0. \tag{1.1.3}$$

Como $\{\phi_\varepsilon\}$ é aproximação da identidade, existe $c > 0$ tal que $\|\phi_\varepsilon\|_{L^1} < c$. Dado $\varepsilon' > 0$, tome $\delta > 0$, tal que

$$|y| < \delta \implies \|f_y - f\|_{L^p}^p < \left(\frac{\varepsilon'}{2c}\right)^p.$$

Uma vez que $\int \phi_\varepsilon = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y) f(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y) f(x) dy \\
&= \int_{|y|<\delta} (f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y) dy + \int_{|y|\geq\delta} (f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y) dy.
\end{aligned}$$

Vejamos a norma L^p de cada uma das integrais da última igualdade:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{|y|<\delta} (f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y) dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x)||\phi_\varepsilon(y)| dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{|y|<\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |\phi_\varepsilon(y)| dy \\
&\leq \int_{|y|<\delta} \|f_y - f\|_{L^p} |\phi_\varepsilon(y)| dy \\
&< \frac{\varepsilon'}{2}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|y|\geq\delta}(f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y)dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{|y|\geq\delta}\|f_y-f\|_{L^p}|\phi_\varepsilon(y)|dy$$
$$\leq 2\|f\|_{L^p}\int_{|y|\geq\delta}|\phi_\varepsilon(y)|dy \longrightarrow 0, \quad \varepsilon\longrightarrow 0.$$

A convergência a zero acima vem do fato de $\{\phi_\varepsilon\}$ ser aproximação da identidade (Definição 1.1.3 (c)). Assim, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, $\int_{|y|\geq\delta}|\phi_\varepsilon(y)|dy < \frac{\varepsilon'}{4\|f\|_{L^p}}$. Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{|y|\geq\delta}(f(x-y)-f(x))\phi_\varepsilon(y)dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Calculando a norma L^p de $\phi_\varepsilon * f - f$, temos que, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno,

$$\|\phi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} < \varepsilon',$$

o que conclui a prova de (1).

(2) Sem perda de generalidade, suponha que $f\in L^\infty$ seja contínua numa vizinhança de um compacto $K\subset\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Então f é uniformemente contínua em K; dado $\varepsilon'>0$, tome $\delta>0$ de modo que

$$|f(x-y)-f(x)| < \frac{\varepsilon'}{2c}, \qquad \text{para todos } |y|<\delta \text{ e } x\in K,$$

em que $c>0$ é como em (1). Assim, para todo $|y|<\delta$, $\|f_y-f\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon'}{2c}$. Considere $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno tal que $\int_{|y|\geq\delta}|\phi_\varepsilon(y)|dy < \frac{\varepsilon'}{4\|f\|_{L^p}}$. No que segue,

$$\begin{aligned}
|\phi_\varepsilon * f(x) - f(x)| &= \int_{|y|<\delta}|f(x-y)-f(x)||\phi_\varepsilon(y)|dy + \int_{|y|\geq\delta}|f(x-y)-f(x)||\phi_\varepsilon(y)|dy\\
&\leq \int_{|y|<\delta}\|f_y-f\|_{L^\infty}|\phi_\varepsilon(y)|dy + \int_{|y|\geq\delta}\|f_y-f\|_{L^\infty}|\phi_\varepsilon(y)|dy\\
&\leq \frac{\varepsilon'}{2c}\int_{|y|<\delta}|\phi_\varepsilon(y)|dy + 2\|f\|_{L^\infty}\int_{|y|\geq\delta}|\phi_\varepsilon(y)|dy\\
&< \frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.1.6. *Seja $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma família de funções que satisfaz os itens (a) e (c) da Definição 1.1.3. Suponha que para alguma constante $a\in\mathbb{C}$, $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\varepsilon = a$.*

(1) Para toda $f\in L^p$, com $1\leq p<\infty$, $\|\phi_\varepsilon * f - af\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$;

(2) Se $f\in L^\infty$ é contínua numa vizinhança de um compacto $K\subset\mathbb{R}^n$, então $\|\phi_\varepsilon * f - af\|_{L^\infty} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$.

Demonstração. Imediato do Teorema 1.1.5. Basta aplicar o teorema para $\{a^{-1}\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, que é uma aproximação da identidade. □

1.2 Interpolação

Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços mensuráveis. Considere com $0 < p, q \leq \infty$. Dizemos que T um operador (linear ou sublinear) forte-(p,q) se for limitado de $L^p(X)$ em $L^q(Y)$, isto é, existe uma constante $C_{p,q} < \infty$ tal que

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \leq C_{p,q}\|f\|_{L^p(X)}.$$

Neste caso, denotamos a norma de T por $\|T\|_{L^p\to L^q}$. Quando T é um operador limitado de $L^p(X)$ em $L^{q,\infty}(Y)$, dizemos que T é do tipo fraco-(p,q); neste caso T satisfaz

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq C_{p,q}\|f\|_{L^p(X)},$$

para alguma constante $C_{p,q} < \infty$ e a norma de T denotada por $\|T\|_{L^p\to L^{q,\infty}}$. Em muitos casos, o operador T pode estar definido somente num subespaço denso de L^p. Uma vez obtida uma estimativa forte (ou fraca) (p,q) para T neste subespaço denso, pode-se então concluir a limitação forte (ou fraca) (p,q) de T em todo L^p. Por isso, verificar a limitação de um operador T é suficiente verificá-lo num subespaço denso.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Sejam (X,μ) espaço mensurável σ-finito, (Y,ν) espaço mensurável e $0 < p < q \leq \infty$. Considere T um operador que mapeia $L^p(X)+L^q(X)$ no espaço das funções mensuráveis de Y. Suponha que existam constantes A, B tais que*

$$\|Tf\|_{L^{p,\infty}(Y)} \leq A\|f\|_{L^p(X)}, \textit{para toda } f \in L^p(X) \tag{1.2.1}$$

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq B\|f\|_{L^q(X)}, \textit{para toda } f \in L^q(X). \tag{1.2.2}$$

Então, para todo $p < r < q$ e toda $f \in L^r(X)$, vale

$$\|Tf\|_{L^r(X)} \leq C\|f\|_{L^r(X)}, \tag{1.2.3}$$

em que a constante C é dada por

$$C = 2\left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{1/r} A^{\frac{1/r-1/q}{1/p-1/q}} B^{\frac{1/p-1/r}{1/p-1/q}}$$

Demonstração. Ver Teorema 1.3.2 em [GFK1]. □

Vale observar que o teorema anterior implica que limitação forte-(p,p) e limitação forte-(q,q) de um operador T é suficiente para sua limitação forte-(r,r), para todo r entre p e q. Esta afirmação decorre do fato da norma L^p controlar a norma $L^{p,\infty}$.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin)**.** *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços mensuráveis σ-finitos. Seja T um operador linear que mapeia funções simples de X em funções mensuráveis de Y. Sejam $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ e suponha que existam constantes M_0, M_1 tais que*

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \tag{1.2.4}$$

$$\|Tf\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \tag{1.2.5}$$

para toda função f simples de X. Então para todo função simples f de X, vale

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p(X)}, \tag{1.2.6}$$

em que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Consequentemente, quando $p < \infty$, T admite uma única extensão limitada de L^p em L^q.

Demonstração. Ver Teorema 1.3.4 em [GFK1]. □

Existe um resultado mais geral do que o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin que nos permite interpolar uma família de operadores que depende analiticamente de um parâmetro ao qual essa família está indexada. Para enunciarmos este resultado, façamos algumas considerações antes. Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços mensuráveis σ-finitos e considere a faixa no plano complexo $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$. Suponha que para cada $z \in \overline{S}$, exista um operador linear T_z que mapeia funções simples de X em funções mensuráveis de Y tal que

$$\int_Y |T_z(\chi_A)\chi_B| d\nu(y) < \infty, \tag{1.2.7}$$

para todo $A \subset X$ e $B \subset Y$ conjuntos mensuráveis com medida finita. Diremos que a família $\{T_z\}_{z\in\overline{S}}$ é analítica se para toda f e g funções simples de X e Y respectivamente, a função

$$z \mapsto \int_Y T_z(f) g d\nu \tag{1.2.8}$$

for analítica na faixa aberta $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ e contínua no fecho $\overline{S}$. Diremos que a família analítica $\{T_z\}_z$ tem crescimento admissível se existe uma constante $0 < \tau_0 < \pi$ tal que para toda f e g funções simples de X e Y respectivamente, existe uma constante $C = C(f,g) < \infty$ de modo que, para todo $z \in \overline{S}$,

$$\log \left| \int_Y T_z(f) g d\nu \right| \leq C e^{\tau_0 |\mathrm{Im}\,(z)|} \tag{1.2.9}$$

Teorema 1.2.3. *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medidas σ-finitos. Considere $\{T_z\}_z$ uma* *família de operadores analítica com crescimento admissível que mapeia funções simples de X em funções mensuráveis de Y. Sejam $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$ e $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$. Sejam M_0 e M_1 funções reais positivas tais que para algum $0 < \tau_1 < \pi$, vale que*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-\tau_1 |y|} \log M_j(y) < \infty, \quad j = 0, 1. \tag{1.2.10}$$

Fixe $\theta \in (0,1)$ e sejam p e q dados por

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{1.2.11}$$

Suponha que para toda função simples f de X, tem-se

$$\|T_{iy}(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0(y) \|f\|_{L^{p_0}} \tag{1.2.12}$$

$$\|T_{iy+1}(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_0(y) \|f\|_{L^{p_1}}. \tag{1.2.13}$$

Então, para toda função simples f de X,

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \leq M(\theta) \|f\|_{L^p},$$

em que M é dado por

$$M(x) = \exp\left\{ \frac{\sin(\pi x)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\log M_0(t)}{\cosh(\pi t) - \cos(\pi x)} + \frac{\log M_1(t)}{\cosh(\pi t) + \cos(\pi x)} \right] dt \right\},$$

para $0 < x < 1$. Por densidade das funções simples, T_θ estende-se continuamente em todo $L^p(X)$.

Demonstração. Ver Teorema 1.3.7 em [GFK1]. □

Capítulo 2

Funções Maximais, Transformada de Fourier e Distribuições

2.1 Função Maximal de Hardy-Littlewood

Definição 2.1.1. *Dados $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e f uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$, definimos a média de f na bola $B(x, \delta)$ por*

$$\operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} f = \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} f(y)dy,$$

em que $|B(x,\delta)|$ denota a medida de Lebesgue de $B(x,\delta)$. Podemos denotar também a média de f em $B(x,\delta)$ por

$$⨍_{B(x,\delta)} f(y)dy.$$

A função maximal de Hardy-Littlewood centrada de f é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &= \sup_{\delta>0} \operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |f| \\ &= \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^n \nu_n} \int_{|y|<\delta} |f(x-y)|dy. \end{aligned}$$

Dizemos que $\mathcal{M}$ é o operador maximal de Hardy-Littlewood centrado.

A segunda igualdade se obtém fazendo a troca de variável $u = x - y$ e notando que $|B(x,\delta)| = \delta^n |B(0,1)| = \delta^n \nu_n$, em que ν_n representa a medida de Lebesgue da bola unitária. Veremos mais adiante que $\mathcal{M}$ é um operador do tipo fraco - $(1,1)$ e do tipo forte - (p,p), para $1 < p < \infty$.

Observação 2.1.2. *Vejamos algumas propriedade da função maximal de Hardy-Littlewood:*

(1) $\mathcal{M}$ é um operador positivo, isto significa que

$$\mathcal{M}f = \mathcal{M}|f| \geq 0, \quad \textit{para toda função } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

(2) $\mathcal{M}$ é um operador limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Basta observar que se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}f(x)| &= \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^n \nu_n} \int_{|y|<\delta} |f(x-y)|dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^n \nu_n} \int_{|y|<\delta} dy \\ &= \|f\|_{L^\infty} \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^n \nu_n} \delta^n \nu_n \\ &= \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Daí, segue que $\|\mathcal{M}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

(3) $\mathcal{M}$ é um operador subaditivo e homogêneo positivo em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, dadas funções f e g localmente integráveis e um escalar λ, valem $\mathcal{M}(f+g) \leq \mathcal{M}f+\mathcal{M}g$ e $\mathcal{M}(\lambda f) = |\lambda|\mathcal{M}f$. De fato, para todos $\delta > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |f+g| &= \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} |f(y)+g(y)|dy \\ &\leq \frac{1}{|B(x,\delta)|} \left(\int_{B(x,\delta)} |f(y)|dy + \int_{B(x,\delta)} |g(y)|dy \right) \\ &= \operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |f| + \operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |g| \\ &\leq \mathcal{M}f(x) + \mathcal{M}g(x) \end{aligned}$$

Logo, tomando o supremo sobre $\delta > 0$, obtemos $\mathcal{M}(f+g) \leq \mathcal{M}f + \mathcal{M}g$. Agora, dado um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, é evidente que $\operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |\lambda f| = |\lambda| \operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)} |f|$ e portanto $\mathcal{M}(\lambda f) = |\lambda|\mathcal{M}f$.

(4) Seja f é uma função localmente integrável. Se $\mathcal{M}f$ é integrável, então $f = 0$ em quase toda parte. Com efeito, considere f uma função localmente integrável e $R > 0$. Como $B(0,R) \subseteq B(x,|x|+R)$, então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &\geq \operatorname*{Avg}_{B(x,|x|+R)} |f| \\ &= \frac{1}{\nu_n(|x|+R)^n} \int_{B(x,|x|+R)} |f(y)|dy \\ &\geq \frac{1}{\nu_n(|x|+R)^n} \int_{B(0,R)} |f(y)|dy \\ &= \frac{\|f \cdot \chi_{B(0,R)}\|_{L^1}}{\nu_n(|x|+R)^n}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|f \cdot \chi_{B(0,R)}\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\nu_n(|x|+R)^n} \leq \|\mathcal{M}f\|_{L^1} < \infty. \tag{2.1.1}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares na integral acima,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\nu_n(|x|+R)^n} &= \int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} \frac{d\theta r^{n-1}dr}{\nu_n(r+R)^n}\\ &= \frac{|S^{n-1}|}{\nu_n}\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}dr}{(r+R)^n} = +\infty.\end{aligned}$$

Por (2.1.1)*, devemos ter que* $\|f\cdot\chi_{B(0,R)}\|_{L^1}=0$*, para todo* $R>0$*. Logo,* $f=0$ *em quase toda parte.*

(5) *O item (4) equivale a dizer que se* f *é localmente integrável e* $f\neq 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $\mathcal{M}f$ *não é integrável.*

(6) *A condição* $\mathcal{M}f(x_0)=0$*, para algum* $x_0\in\mathbb{R}^n$*, é suficiente para que* $f(x)=0$*, para quase todo* $x\in\mathbb{R}^n$*. De fato, em* (2.1.1)*, trocando* x *por* x_0*, obtemos que* $\|f\cdot\chi_{B(0,R)}\|_{L^1}=0$*, para todo* $R>0$*. Portanto,* $f=0$ *em quase toda parte.*

Definição 2.1.3. *A função maximal de Hardy-Littlewood não-centrada* Mf *de uma função localmente integrável* f *é definida por*

$$Mf(x) = \sup_{\substack{\delta>0\\ |y-x|<\delta}} \operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)} |f|.$$

Dizemos que M *é o operador maximal de Hardy-Littlewood não-centrado.*

As funções maximal não-centrada Mf e maximal centrada $\mathcal{M}f$ são comparáveis no seguinte sentido: $\mathcal{M}f\leq Mf$ e $Mf\leq 2^n\mathcal{M}f$. Para verificar a primeira estimativa, observe que, para todos $\delta>0$ e $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)}|f| \leq \sup_{\substack{\delta>0\\ |y-x|<\delta}} \operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)}|f| = Mf(x).$$

E então, obtemos $\mathcal{M}f(x) = \sup_{\delta>0}\operatorname*{Avg}_{B(x,\delta)}|f| \leq Mf(x)$. Por outro lado, sejam $x\in\mathbb{R}^n$, $\delta>0$ e $|y-x|<\delta$. Como $B(y,\delta)\subseteq B(x,2\delta)$, temos

$$\begin{aligned}\operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)}|f| &= \frac{1}{\delta^n\nu_n}\int_{B(y,\delta)}|f(z)|dz\\ &\leq \frac{1}{\delta^n\nu_n}\int_{B(x,2\delta)}|f(z)|dz\\ &= 2^n\frac{1}{(2\delta)^n\nu_n}\int_{B(x,2\delta)}|f(z)|dz\\ &= 2^n\operatorname*{Avg}_{B(x,2\delta)}|f|\\ &\leq 2^n\mathcal{M}f(x).\end{aligned}$$

Com isso, temos que $Mf(x)\leq 2^n\mathcal{M}f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1.4. *Dada uma coleção finita de bolas abertas* $\{B_1, \ldots, B_k\}$ *em* $\mathbb{R}^n$*, existe uma subcoleção* $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_l}\}$ *de bolas disjuntas tal que*

$$\sum_{r=1}^{l} |B_{j_r}| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right|.$$

Demonstração. Ver Lema 2.1.6 em [GFK1]. □

Teorema 2.1.5. *Os operadores maximais de Hardy-Littlewood* $\mathcal{M}$ *e* M *são do tipo fraco-*$(1,1)$ *e do tipo forte-*(p,p)*, para* $1 < p < \infty$*, e satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{1,\infty}} \leq 3^n \|f\|_{L^1} \tag{2.1.2}$$

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leq 3^{n/p} \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}. \tag{2.1.3}$$

Por M *e* $\mathcal{M}$ *serem comparáveis, as mesmas estimativas valem para* M*. Ademais, se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\{Mf > \alpha\}} |f(y)| dy. \tag{2.1.4}$$

Demonstração. Provemos primeiramente (2.1.4). Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \geq 0$ e defina o conjunto $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}$. Afirmamos que E_α é aberto. De fato, dado $x_0 \in E_\alpha$, temos

$$Mf(x_0) = \sup_{\substack{\delta > 0 \\ |y - x_0| < \delta}} \operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)} |f| > \alpha.$$

Então existem $\delta_0 > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_0 \in B(y_0, \delta_0) = B_0$ e $\operatorname*{Avg}_{B_0} |f| > \alpha$. Para todo $x \in B_0$, temos que

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{\substack{\delta > 0 \\ |y - x| < \delta}} \operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)} |f| \\ &> \operatorname*{Avg}_{B_0} |f| \\ &> \alpha. \end{aligned}$$

Logo, $B_0 \subset E_\alpha$, donde obtemos que E_α é aberto. Seja $K \subset E_\alpha$ um conjunto compacto. A afirmação provada anteriormente garante que para cada $x \in K$, existe $B_x \subset E_\alpha$ uma bola aberta contendo x de modo que $\operatorname*{Avg}_{B_x} |f| > \alpha$, isto é,

$$\int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha |B_x|. \tag{2.1.5}$$

É evidente que $\{B_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K. Por compacidade de K, tome $\{B_{x_1}, \ldots, B_{x_k}\}$ subcobertura finita. Pelo Lema 2.1.4, existe uma subcoleção de bolas disjuntas $\{B_{x_{j_1}}, \ldots, B_{x_{j_l}}\}$

tal que
$$\sum_{r=1}^{l} |B_{x_{j_r}}| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i} \right|.$$
Escreva $B = \bigcup_r B_{x_{j_r}}$. Pela desigualdade acima e por (2.1.5),

$$\begin{aligned}
|K| \leq \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i} \right| &\leq 3^n \sum_{r=1}^{l} |B_{xj_r}| \\
&\leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{r=1}^{l} \int_{B_{x_{j_r}}} |f(y)| dy \\
&= \frac{3^n}{\alpha} \sum_{r=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_{B_{x_{j_r}}}(y) dy \\
&= \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \sum_{r=1}^{l} \chi_{B_{x_{j_r}}}(y) dy \\
&= \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_B(y) dy \\
&\leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{E_\alpha} |f(y)| dy.
\end{aligned}$$

Uma vez que a medida de Lebesgue é regular,

$$|E_\alpha| = \sup_K |K| \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{E_\alpha} |f(y)| dy,$$

em que o supremo é tomado sobre todos os compactos contidos em E_α. Portanto fica provada (2.1.4). No que segue, para todo $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\alpha d_{Mf}(\alpha) &= \alpha |\{Mf > \alpha\}| \\
&= \alpha |E_\alpha| \\
&\leq 3^n \int_{E_\alpha} |f(y)| dy \\
&\leq 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

donde obtemos
$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1.6}$$
Assim como na Observação 2.1.2 (2), prova-se que

$$\|Mf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.1.7}$$

As estimativas (2.1.6) e (2.1.7) implicam que M é um operador sublinear bem definido e finito q.t.p. em $L^1 + L^\infty$; logo também o é em L^p, $1 < p < \infty$, uma vez que para toda $f \in L^p$, existem $g \in L^1$ e $h \in L^\infty$ tais que $f = g + h$. Além disso, por interpolação (Teorema 1.2.1) temos que M é do tipo forte-(p,p).

Como $Mf = M|f|$, obtemos[1]

$$\|Mf\|_{L^p} \leq 3^{n/p}\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}.$$

Por fim, a limitação de $\mathcal{M}$ é imediata, pois M controla pontualmente $\mathcal{M}$. □

2.1.1 Controlando Operadores Maximais

Veremos aqui nesta seção alguns operadores maximais e qual a relação deles com o operador maximal de Hardy-Littlewood. Dadas uma função g em $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}g(\varepsilon^{-1}x).$$

Se g é integrável e $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = 1$, então a família $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma aproximação da identidade. Se considerarmos uma função $k = \nu_n^{-1}\chi_{B(0,1)}$, em que ν_n é a medida da bola unitária, então claramente k é integrável e tem integral igual a 1. A função maximal de Hardy-Littlewood de uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ expressa-se em termos da convolução de $|f|$ por k_ε:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}f(x) &= \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\nu_n\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)}|f(x-y)|dy\\ &= \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\nu_n\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\chi_{B(0,1)}(\varepsilon^{-1}y)dy\\ &= \sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|k_\varepsilon(y)dy\\ &= \sup_{\varepsilon>0}|f| * k_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Dizemos que uma função f em $\mathbb{R}^n$ é radial quando $f(x) = f(y)$, sempre que $|x| = |y|$. Toda função radial f pode ser escrita por

$$f(x) = \phi(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para alguma função ϕ definida na semi-reta não negativa $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

Teorema 2.1.6. *Seja $k \geq 0$ uma função contínua em quase todo ponto de $\mathbb{R}^+$. Suponha que $K(x) = k(|x|)$ seja integrável e radialmente decrescente, isto é,*

$$|x| \leq |y| \implies K(x) \geq K(y). \tag{2.1.8}$$

Então, para toda função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, vale a estimativa

$$\sup_{\varepsilon>0}|f| * K_\varepsilon(x) \leq \|K\|_{L^1}\mathcal{M}f(x). \tag{2.1.9}$$

[1]Veja o Exercício 1.3.3 de [GFK1]. A constante que controla a norma de $\mathcal{M}$ é melhor do que a obtida usando o Teorema 1.2.1.

Em particular, (2.1.9) *é válida para toda função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, com* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Como k é contínua q.t.p. em $\mathbb{R}_+$, existe uma sequência de funções contínuas com suporte compacto k_j tal que $k_j \nearrow k$ em quase toda parte. Logo, $K_j(x) = k_j(|x|)$ é uma sequência de funções contínuas radiais com suporte compacto tal que $K_j \nearrow K$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, vale a convergência $K_j \to K$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, para provar (2.1.9), é suficiente supor que K é contínua com suporte compacto e satisfaz (2.1.8). É suficiente também provar (2.1.9) para $x = 0$. De fato, se vale $\sup_{\varepsilon>0} |f| * K_\varepsilon(0) \leq \|K\|_{L^1} \mathcal{M}f(0)$ para toda função localmente integrável f, em particular é válida para a translação $\tau^{-x} f(t) = f(t + x)$, que é localmente integrável:

$$\sup_{\varepsilon>0} |\tau^{-x} f| * K_\varepsilon(0) \leq \|K\|_{L^1} \mathcal{M}(\tau^{-x} f)(0). \tag{2.1.10}$$

Por uma lado, $\mathcal{M}(\tau^{-x} f)(0) = \mathcal{M}f(x)$. Por outro, $|\tau^{-x} f| * K_\varepsilon(0) = |f| * K_\varepsilon(x)$. Portanto, de (2.1.10) obtemos (2.1.9).

Fixemos K uma função radial contínua com suporte compacto que satisfaz (2.1.8) e suponha que $\operatorname{supp} K \subset B(0, R)$. Fixe também f uma função localmente integrável e tome $x = 0$. Considere $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$. Por coordenadas polares e usando o fato de K ser radial,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(-y) dy = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)| K_\varepsilon(re_1) r^{n-1} d\theta dr. \tag{2.1.11}$$

Defina as funções

$$F(r) = \int_{S^{n-1}} |f(r\theta)| d\theta, \qquad G(r) = \int_0^r F(s) s^{n-1} ds.$$

Integrando por partes (2.1.11) e usando as funções F e G,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(-y) dy &= \int_0^{\varepsilon R} F(r) r^{n-1} K_\varepsilon(re_1) dr \\ &= G(\varepsilon R) K_\varepsilon(\varepsilon R e_1) - G(0) K_\varepsilon(0) + \int_0^{\varepsilon R} G(r) d(-K_\varepsilon(re_1)). \end{aligned}$$

Veja que $G(0) = 0$ e $K_\varepsilon(0) < \infty$. O fato de f ser localmente integrável implica que $G(\varepsilon R) < \infty$. E como $\operatorname{supp} K_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon R)$, $K_\varepsilon(\varepsilon R e_1) = 0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(-y) dy = \int_0^{\varepsilon R} G(r) d(-K_\varepsilon(re_1)).$$

Sendo $\nu_n = |B(0, 1)|$, temos

$$\begin{aligned} G(r) &= \int_0^r F(s) s^{n-1} ds \\ &= \int_{|y|<r} |f(y)| dy \\ &\leq \mathcal{M}f(0) \nu_n r^n, \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G(r)d(-K_\varepsilon(re_1)) &\leq \mathcal{M}f(0)\int_0^\infty \nu_n r^n d(-K_\varepsilon(re_1))\\ &= \mathcal{M}f(0)\int_0^\infty \nu_n n r^{n-1}K_\varepsilon(re_1)dr\\ &= \mathcal{M}f(0)\|K\|_{L^1}.\end{aligned}$$

A primeira igualdade acima é obtida integrando por partes e usando o fato de K se anular anular em $|x| > R$. A segunda igualdade é verificada fazendo a mudança para coordenadas polares e usando o fato de K ser radial. Com isso, obtivemos a estimativa

$$|f| * K_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|K_\varepsilon(-y)dy = \int_0^\infty G(r)d(-K_\varepsilon(re_1)) \leq \mathcal{M}f(0)\|K\|_{L^1},$$

o que conclui a demonstração do teorema.

□

Corolário 2.1.7. *Se ϕ é uma função controlada pontualmente por uma função Φ integrável, radial e decrescente, então*

$$\sup_{\varepsilon>0}|f * \phi_\varepsilon(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1}\mathcal{M}f(x), \quad \textit{para toda } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{2.1.12}$$

Demonstração. A demonstração é aplicação direta do Teorema 2.1.6:

$$\begin{aligned}|f * \phi_\varepsilon(x)| &\leq |f| * |\phi_\varepsilon|(x)\\ &\leq |f| * \Phi_\varepsilon(x)\\ &\leq \|\Phi\|_{L^1}\mathcal{M}f(x).\end{aligned}$$

□

Observação 2.1.8. *Consideremos uma função ϕ nas condições do Corolário 2.1.7. A estimativa (2.1.12) e o Teorema 2.1.2 implicam que o operador maximal*

$$Tf = \sup_{\varepsilon>0}|f * \phi_\varepsilon(x)|$$

é limitado de L^p em L^p, para todo $1 < p \leq \infty$, e limitado de L^1 em $L^{1,\infty}$.

2.1.2 Algumas Aplicações

Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços mensuráveis e $0 < p, q < \infty$. Considere D um subespaço denso de $L^p(X, \mu)$. Suponha que, para todo $\varepsilon > 0$, T_ε seja um operador linear que mapeia

$L^p(X,\mu)$ no espaço das funções mensuráveis de Y. Defina o operador maximal

$$T_*f(y) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(y)|, \quad f \in L^p, y \in Y \tag{2.1.13}$$

e assuma que T_*f seja uma função ν-mensurável, para toda $f \in L^p(X,\mu)$.

Teorema 2.1.9. *Considere T_ε e T_* como anteriormente e suponha que exista $B > 0$ tal que*

$$\|T_*f\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq B\|f\|_{L^p(X)}, \quad f \in D, \tag{2.1.14}$$

ou seja T_* é do tipo fraco-(p,q). Suponha também que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f) = Tf \tag{2.1.15}$$

existe, é finito ν-qtp e define um operador linear em D. Nestas condições, para toda $f \in L^p(X)$, o limite (2.1.15) existe, é finito ν-qtp e se estende unicamente a um operador linear T em $L^p(X)$ tal que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq B\|f\|_{L^p(X)}, \quad \forall f \in L^p(X). \tag{2.1.16}$$

Demonstração. Dada $f \in L^p(X)$, definimos a oscilação de f por

$$\mathcal{O}_f(y) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\theta\to 0} |T_\varepsilon f(y) - T_\theta f(y)|.$$

Afirmamos que $\nu(\{y \in Y : O_f(y) > 0\}) = 0$, para toda função $f \in L^p$ e todo $\delta > 0$. De fato, dada $f \in L^p$ e $\eta > 0$, considere $g \in D$ tal que $\|f-g\|_{L^p} < \eta$. Por hipótese, quando $\varepsilon \to 0$, $T_\varepsilon g \to Tg$ ν-q.t.p. Logo, é claro que a oscilação $\mathcal{O}_g(y) = 0$ para quase todo $y \in Y$. Por linearidade de T_ε, para quase todo $y \in Y$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_f(y) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\theta\to 0} |T_\varepsilon f(y) - T_\theta f(y)| \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\theta\to 0} |T_\varepsilon g(y) - T_\theta g(y)| + \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\theta\to 0} |T_\varepsilon (f-g)(y) - T_\theta (f-g)(y)| \\
&= \mathcal{O}_{f-g}(y).
\end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\nu(\{y \in Y : \mathcal{O}_f(y) > \delta\}) &\leq \nu(\{y \in Y : \mathcal{O}_{f-g}(y) > \delta\}) \\
&\leq \nu(\{y \in Y : 2T_*(f-g)(y) > \delta\}) \\
&\leq \left(\frac{\|2T_*(f-g)\|_{L^{q,\infty}}}{\delta}\right)^q \\
&\leq \left(\frac{2B\|f-g\|_{L^p}}{\delta}\right)^q \\
&\leq \left(\frac{2B\eta}{\delta}B\right)^q,
\end{aligned}$$

em que na segunda desigualdade usamos o fato de $\mathcal{O}_f \leq 2T_*(f)$ e na quarta desigualdade a limitação fraca-(p,q) de T_*. Fazendo $\eta \to 0$, obtemos que $\nu(\{y \in Y : \mathcal{O}_f(y) > \delta\}) = 0$. Logo, $\mathcal{O}_f(y) = 0$ para quase todo $y \in Y$ e portanto $T_\varepsilon f(y)$ é de Cauchy para quase todo $y \in Y$. Assim, existe o limite $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = Tf$ ν-q.t.p. e portanto T fica unicamente definida em todo L^p como extensão de T, inicialmente definida num denso D.

Por fim, como $|Tf| \leq T_*(f)$, para toda $f \in L^p$, temos que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \leq \|T_* f\|_{L^{q,\infty}(Y)} \leq B\|f\|_{L^p},$$

e isto conclui a demonstração. □

Corolário 2.1.10. *(Diferenciação de Lebesgue) Para qualquer função $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, vale que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x), \tag{2.1.17}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Consequentemente, $|f| \leq \mathcal{M}f$ qtp.

Demonstração. Como $\mathbb{R}^n = \cup_{N\in\mathbb{N}} B(0,N)$, é suficiente provar (2.1.17) para quase todo $x \in B(0,N)$, para $N = 1,2,\ldots$ fixado. Dada f uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$, defina as funções integráveis $f_N = f \cdot \chi_{B(0,N+1)}$ e $k = {\nu_n}^{-1}\chi_{B(0,1)}$, em que $\nu_n = |B(0,1)|$. Para $0 < \varepsilon < 1$, considere o operador linear T_ε dado pela convolução com k_ε, em que $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}k(\varepsilon^{-1}x)$:

$$T_\varepsilon f(x) = f * k_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy.$$

Veja que o operador maximal T_* correspondente, dado por $T_*f = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f|$, é controlado pontualmente pela função maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}f$, pois

$$|T_\varepsilon f| = |f * k_\varepsilon| \leq |f| * k_\varepsilon \leq \sup_{\varepsilon>0} |f| * k_\varepsilon = \mathcal{M}f.$$

Uma vez que $\mathcal{M}$ é limitado de L^1 em $L^{1,\infty}$, T_* também o será e ainda

$$\|T_*\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq \|\mathcal{M}\|_{L^1\to L^{1,\infty}}.$$

Afirmamos que (2.1.17) é válida para toda função f contínua em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. De fato, sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ dados. Tome $\delta > 0$ tal que $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $|y| < \delta$. No caso em que $x \notin \operatorname{supp} f$, podemos considerar $\delta > 0$ de modo que f se anule em $B(x,\delta)$ e assim, para todo $r < \delta$, $f \cdot \chi_{B(x,r)} = 0$ donde obtemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = 0 = f(x).$$

Por outro lado, se $x \in \operatorname{supp} f$ e $r < \delta$, então

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{\nu_n r^n}\int_{|y|<r} f(x-y)dy - \frac{1}{\nu_n r^n}\int_{|y|<r} f(x)dy\right| \\ &\leq \frac{1}{\nu_n r^n}\int_{|y|<r} |f(x-y)-f(x)|dy \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x).$$

Fica provada (2.1.17) para toda função contínua com suporte compacto. Uma vez que o espaço destas funções é denso em L^1 e T_* é limitado de L^1 em $L^{1,\infty}$, aplicamos o Teorema 2.1.9 concluir que

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy$$

existe, para toda $f \in L^1$ e para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, fixada $f \in L^1_{\text{loc}}$, a igualdade acima é válida para $f_N \in L^1$. Se $0 < \varepsilon < 1$ e $x \in B(0,N)$, é evidente que $B(0,N+1) \supset B(x,\varepsilon)$ e então $f_N \cdot \chi_{B(x,\varepsilon)} = f \cdot \chi_{B(x,\varepsilon)}$. Logo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f_N(y)dy = f_N(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e em particular para quase todo $x \in B(0,N)$. Porém, em $B(0,N)$, $f_N = f$ e neste caso, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f(x),$$

para quase todo $x \in B(0,N)$. Pela arbitrariedade de N, obtemos o limite (2.1.17) para toda função $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Por fim, uma vez provada (2.1.17), é fácil verificar que $|f| \leq \mathcal{M}f$:

$$|f| = \lim_{\varepsilon\to 0}|T_\varepsilon f| \leq \sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f| = T_* f \leq \mathcal{M}f.$$

□

Corolário 2.1.11. *Seja $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com integral igual a 1 e suponha que K_0 seja uma função contínua integrável, radial e decrescente tal que $|k| \leq K_0$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e toda $f \in \mathcal{L}^p$, com $1 \leq p < \infty$,*

$$\lim_{\varepsilon to 0} f * k_\varepsilon(x) = f(x).$$

Demonstração. Pelo Exemplo 1.1.4, temos que $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}k(\varepsilon^{-1}x)$ é uma aproximação da identidade. Se f for uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, então, pelo Teorema 1.1.5, $k_\varepsilon * f \to f$, $\varepsilon \to 0$, uniformemente em compactos. Logo, para toda f função contínua com suporte compacto, vale que $k_\varepsilon * f \to f$, $\varepsilon \to 0$ pontualmente. Pelo Corolário 2.1.10, temos que o operador maximal T_* satisfaz a estimativa

$$T_* f(x) \leq \|K_0\|_{L^1} \mathcal{M} f(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que $\mathcal{M}$ é limitado de L^p em L^p (Teorema 2.1.5), seque que T_* também o é, com

$$\|T_*\|_{L^p \to L^p} \leq \|K_0\|_{L^1} \|\mathcal{M}\|_{L^p \to L^p}.$$

Em particular, T_* é do tipo fraco-(p,p). Sendo assim, podemos aplicar o Teorema 2.1.9 e concluir que $f * k_\varepsilon \to f$, quando $\varepsilon \to 0$, qtp e para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Corolário 2.1.12. *Seja $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com integral igual a $b \in \mathbb{C}$ e suponha que K_0 seja uma função contínua integrável, radial e decrescente tal que $|k| \leq K_0$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e toda $f \in \mathcal{L}^p$, com $1 \leq p < \infty$,*

$$\lim_{\varepsilon to 0} f * k_\varepsilon(x) = b f(x).$$

Demonstração. Basta usar o Corolário 1.1.6 na prova do Corolário 2.1.11. □

Uma aplicação do Corolário 2.1.10 da Diferenciação de Lebesgue é a seguinte:

Proposição 2.1.13. *Dadas uma função integrável $f \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$, existe uma família de cubos $\{Q_j\}_j$ de cubos abertos tal que $f(x) \leq \alpha$, para quase todo $x \in (\cup_j Q_j)^c$ e*

$$\alpha < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x) dx \leq 2^n \alpha. \tag{2.1.18}$$

Demonstração. Fixado $\alpha > 0$, decomponha $\mathbb{R}^n$ em uma malha de cubos, com arestas paralelas aos eixos coordenadas, Q cujos interiores são disjuntos tais que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \leq \alpha,$$

o que é possível já que f é uma função integrável e $\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \to 0$, quando $|Q| \to \infty$. Denote por $\mathcal{G}_0$ a coleção dos cubos.

Divida ao meio o lado de cada cubo Q de $\mathcal{G}_0$ e obtenha 2^n subcubos congruentes. Colecione todos os subcubos numa família $\mathcal{G}_1$ e selecione todos aqueles que satisfazem

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx > \alpha, \tag{2.1.19}$$

Os cubos selecionados pela desigualdade acima serão colecionados numa família denotada por $\mathcal{S}_1$. Agora, cada cubo de $\mathcal{G}_1 \backslash \mathcal{S}_1$ é subdivido em 2^n subcubos congruentes como feito anteriormente formando portanto uma família de subcubos $\mathcal{G}_2$. Selecione todos aqueles que satisfazem (2.1.19) e denote por $\mathcal{S}_2$ a família destes novos cubos selecionados. Continue este processo indefinidamente obtendo assim a família $\mathcal{S} = \cup_m \mathcal{S}_m$ dos cubos selecionados. Pela construção feita, veja que se $Q \in \mathcal{S}_m$, para algum m, é um cubo selecionado, existe um único cubo da geração anterior $\tilde{Q} \in \mathcal{G}_{m-1}$ não selecionado que contém Q. Portanto, por Q ser selecionado e ser um subcubo de $\tilde{Q}$ de medida $|Q| = 2^n|\tilde{Q}|$, temos que

$$\alpha < \frac{1}{Q}\int_Q f(x)dx \leq 2^n \frac{1}{\tilde{Q}}\int_{\tilde{Q}} f(x)dx \leq 2^n\alpha.$$

Denote por $F = \overline{\cup\,\mathcal{S}}$ o fecho da união dos cubos de $\mathcal{S}$. Note que se $x \in F$, então existe uma sequência de cubos que contém x cuja intersecção é $\{x\}$. Pelo Teorema de Diferenciação de Lebesgue, segue que que $f(x) \leq \alpha$, para quase todo $x \in F$. $\square$

2.2 A Classe de Schwartz

Comecemos fixando algumas notações. Um multi-índice é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos. Denotamos por $\mathbb{Z}_+^n$ o conjunto dos multi-índices. Dados α um multi-índice e $x \in \mathbb{R}^n$, definimos a norma de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ e x na potência α por $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Denotamos por $\partial_j f$ a j-ésima derivada parcial de f e $\partial_j^m f$ j-ésima derivada parcial de ordem $m > 0$ de f. As derivadas parciais ∂^α de ordem $|\alpha|$ são dadas por

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Dado um inteiro não negativo k, denotamos por $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções de $\mathbb{R}^n$ continuamente diferenciáveis de ordem até k. Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a união de $\cup_{k>0}\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, ou seja é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com todas derivadas contínuas. Por fim $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, geralmente o denotamos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e o chamamos de espaço das funções teste.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo α um multi-índice. Pode-se verificar que existe uma contante $C_{n,\alpha} > 0$ tal que

$$|x^\alpha| \leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|}. \tag{2.2.1}$$

Além disso, se $k \in \mathbb{Z}_+$, existem contantes $C_{n,k}, C'_{n,k} > 0$, tais que

$$|x|^k \leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=m} |x^\beta| \tag{2.2.2}$$

$$(1 + |x|)^k \leq C'_{n,k} \sum_{|\beta|\leq m} |x^\beta|. \tag{2.2.3}$$

Para duas funções f e g em $\mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, é válida a **Regra de Leibniz**

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g,$$

em que $\beta \leq \alpha$ indica que $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 2.2.1. *Uma função f em $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ é uma* ***função de Schwartz*** *se para todo par de multi-índices α, β, existir uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $\mathcal{S}$, a classe de Schwartz formada por todas a funções de Schwartz de $\mathbb{R}^n$.

Observe que uma função de Schwartz f é tal que ela e todas as suas derivadas decaem mais rápido que a inversa de qualquer monômio. Isso se evidencia pela definição:

$$|\partial^\beta f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{|x^\alpha|}.$$

A classe de Schwartz é uma espaço vetorial munido de uma família de seminormas $\{\rho_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$. Neste caso, uma pré-base para vizinhanças da origem em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$B_r = \{f \in \mathcal{S} : \rho_{\alpha,\beta}(f) < r\}.$$

A topologia induzida em $\mathcal{S}$ por esta família de seminormas torna $\mathcal{S}$ um espaço de Frechét, isto é, um espaço vetorial localmente convexo metrizável e completo. Veja [CNW] e [RDN] para mais detalhes.

Vejamos algumas propriedades básicas da classe de Schwartz.

Observação 2.2.2. *(1) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, então o a função $f \otimes g : (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mapsto f(x)g(y)$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$.*

(2) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e P é um polinômio de $\mathbb{R}^n$, então $P \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Dados qualquer multi-índice γ e $f \in \mathcal{S}$, vale que $\partial^\gamma f \in \mathcal{S}$.

(4) Uma função f é Schwartz se, e somente se,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(x^\beta f(x))| < \infty, \qquad \text{para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \tag{2.2.4}$$

(5) Sejam $N > 0$ um inteiro e α um multi-índice. Defina

$$\rho_{\alpha,N}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|. \tag{2.2.5}$$

Então, $\rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty$, para todos multi-índices α, β se, e somente se, $\rho_{\alpha,N}(f) < \infty$ para todo inteiro $N > 0$ e todo multi-índice α. Pode-se provar facilmente que a família de seminormas $\{\rho_{\alpha,N}\}_{\alpha,N}$ induz em $\mathcal{S}$ uma topologia equivalente a induzida por $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$.

(6) A classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.2.3. *Sejam $f_k, f \in \mathcal{S}$, com $k \in \mathbb{N}$. A sequência $f_k \to f$ em $\mathcal{S}$ se, para todos multi-índices α e β, valer que*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)(x)| = 0$$

Proposição 2.2.4. *Se $f_k \to f$ em $\mathcal{S}$, então $f_k \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $0 < p \leq \infty$. Ademais, existe uma constante $C_{n,p} > 0$ tal que*

$$\|\partial^\beta f\|_{L^p} \leq C_{n,p} \sum_{|\alpha| \leq \left[\frac{n+1}{p}\right]+1} \rho_{\alpha,\beta}(f), \tag{2.2.6}$$

em que $\left[\frac{n+1}{p}\right]$ denota a parte inteira de $\frac{n+1}{p}$.

Demonstração. Note que é suficiente provarmos somente a estimativa (2.2.6).

Para $p = \infty$ é trivial, já que $\|\partial^\beta f(x)\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\beta f(x)| = \rho_{0,\beta}(f)$. Considere então $p \neq \infty$ e tome $f \in \mathcal{S}$. Vejamos

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\beta f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta f(x)|^p dx \\
&= \int_{|x|<1} |\partial^\beta f(x)|^p dx + \int_{|x|\geq 1} |x|^{-(n+1)} |\partial^\beta f(x)|^p |x|^{n+1} dx \\
&\leq \nu_n \|\partial^\beta f\|_{L^\infty}^p + \sup_{x\geq 1} |x|^{n+1} |\partial^\beta f(x)|^p \int_{|x|\geq 1} |x|^{-(n+1)} dx \\
&\leq C_n \left(\|\partial^\beta f\|_{L^\infty}^p + \sup_{x\geq 1} |x|^{n+1} |\partial^\beta f(x)|^p \right),
\end{aligned}
$$

Em que $C_n = \max\{\nu_n, \omega_{n-1}\}$. Escreva $m = \left[\frac{n+1}{p}\right] + 1$. Temos que $m \geq \frac{n+1}{p}$ e então

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\geq 1} |x|^{n+1} |\partial^\beta f(x)|^p &= \sup_{x\geq 1} (|x|^{\frac{n+1}{p}} |\partial^\beta f(x)|)^p \\
&\leq \sup_{x\geq 1} (|x|^m |\partial^\beta f(x)|)^p \\
&\leq \left(\sup_{x\geq 1} |x|^m |\partial^\beta f(x)| \right)^p
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\beta f\|_{L^p} &\leq C_{n,p} \left[\|\partial^\beta f\|_{L^\infty}^p + \left(\sup_{x\geq 1} |x|^m |\partial^\beta f(x)| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C'_{n,p} \left(\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} + \sup_{x\geq 1} |x|^m |\partial^\beta f(x)| \right).
\end{aligned}
$$

Considere uma constante $C'_n > 0$ tal que $|x|^m \leq C'_n \sum_{|\alpha|=m} |x^\alpha|$. Com isso,

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^m |\partial^\beta f(x)| \leq C'_n \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|.
$$

Logo, obtemos

$$
\|\partial^\beta f\|_{L^p} \leq C'_{n,p} \left(\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} + C'_n \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \right)
$$

Observe que a norma L^∞ da derivada parcial da f é, em particular uma seminorma de $\mathcal{S}$; neste caso $\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} = \rho_{0,\beta}(f)$. Portanto, obtemos (2.2.6). □

Proposição 2.2.5. *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então fg e $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,*

$$
\partial^\alpha (f * g) = (\partial f) * g = f * (\partial g). \tag{2.2.7}
$$

Demonstração. Ver Proposição 2.2.7 em [GFK1]. □

2.3 Transformada de Fourier

Nesta seção trataremos da transformada de Fourier na classe de Schwartz e exploraremos algumas de suas propriedades básicas. Para fixar notação, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y$ representa o produto interno usual de x com y em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1. *A transformada de Fourier de uma função Schwartz f, denotada por $\widehat{f}$, é a função*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \tag{2.3.1}$$

Note que a definição da transformada de Fourier está bem definida, já que f é em particular integrável e portanto a integral (2.3.1) é absolutamente convergente. Além disso, é fácil ver que definição acima faz sentido para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dada uma função mensurável f de $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$, definimos, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \tau^y f(x) &= f(x - y) && (Translação) \\ \delta^a f(x) &= f(ax) && (Dilatação) \\ \widetilde{f}(x) &= f(-x) && (Reflexão). \end{aligned}$$

Proposição 2.3.2. *Dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $t > 0$, temos que*

(1) $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,

(2) $\widehat{f + g} = \widehat{f} + \widehat{g}$,

(3) $\widehat{af} = a\widehat{f}$,

(4) $\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$,

(5) $\widehat{\overline{f}} = \overline{\widetilde{\widehat{f}}}$,

(6) $\widehat{\tau^y f}(\xi) = e^{2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$,

(7) $(e^{2\pi i y \cdot \xi} f)^\wedge(\xi) = \tau^y(\widehat{f})(\xi)$,

(8) $\widehat{\delta^t f} = \widehat{f}_t = t^{-n} \delta^{t^{-1}} \widehat{f}$,

(9) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$,

(10) $(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi)$,

(11) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

(12) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$,

(13) $\widehat{f \circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi)$, *em que A é uma matriz ortogonal.*

Demonstração. Ver Proposição 2.2.11 em [GFK1]. □

Corolário 2.3.3. *Se f e g são radiais em $\mathcal{S}$, então $\widehat{f}$, $f * g$ e fg também são.*

Demonstração. Ver Corolário 2.2.12 em [GFK1]. □

Proposição 2.3.4. *A transformada de Fourier é contínua em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $f_k \to f$ em $\mathcal{S}$, então $\widehat{f_k} \to \widehat{f}$ em $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Para provar a continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}$, é suficiente provarmos que dada $f \in \mathcal{S}$, as seminormas $\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{f})$ são controladas por uma soma de seminormas de f. De fato, usando a Proposição 2.3.2, temos que

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{f}(\xi)| &= |\xi^\alpha((-2\pi i x)^\beta f(x))^\wedge(\xi)| \\
&= (2\pi)^{-|\alpha|}|[\partial^\alpha((-2\pi i x)^\beta f(x))]^\wedge(\xi)| \\
&= (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha(x^\beta f(x)) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx\right| \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(x^\beta f(x))| dx \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1}\partial^\alpha(x^\beta f(x)) \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} dx.
\end{aligned}$$

A integral na última linha é absolutamente convergente e, como f é uma função Schwartz, o supremo acima é controlado por uma soma de seminormas de f, o que conclui a demonstração. □

Definição 2.3.5. *A transformada de Fourier inversa de uma função Schwartz f, denotada por $f^\vee$, é definida por*

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x). \tag{2.3.2}$$

Um análogo da Proposição 2.3.2 pode ser feito para a transformada de Fourier inversa.

Teorema 2.3.6. *Dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, valem as seguintes propriedades:*

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx$,

(2) $(\widehat{f})^\vee = f = (f^\vee)^\wedge$,

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$,

(4) *(Identidade de Plancherel)* $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2}$,

(5) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g^\vee(x)dx$.

Demonstração. Ver Teorema 2.2.14 em [GFK1]. □

O item (4) por sua vez é conhecido como identidade de Plancherel e é ela que nos permite dizer que a transformada de Fourier é uma isometria em L^2.

Corolário 2.3.7. *A transformada de Fourier em um homeomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Ver Corolário 2.2.15 [GFK1]. □

2.4 Teoria das Distribuições

Recorde que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções teste e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Schwartz. As inclusões

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

são trivialmente verificadas.

Definição 2.4.1. *A convergência nos espaços citados acima são definidos da seguinte forma:*

(1) $f_k \to f$ *em* $\mathcal{C}^\infty \iff f_k, f \in \mathcal{C}^\infty$ *e* $\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\leq N} |\partial^\alpha (f_k - f)(x)| = 0$, *para todo multi-índice* α *e todo inteiro* $N = 1, 2, \ldots$.

(2) $f_k \to f$ *em* $\mathcal{S} \iff f_k, f \in \mathcal{S}$ *e* $\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)(x)| = 0$, *para todos multi-índices* α, β.

(3) $f_k \to f$ *em* $\mathcal{C}_0^\infty \iff f_k, f \in \mathcal{C}_0^\infty$, *se existe* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto, tal que* $\operatorname{supp}(f_k) \subset K$ *e* $\lim_{k\to\infty} \|\partial^\alpha (f_k - f)\|_{L^\infty} = 0$, *para todos multi-índices* α.

Observação 2.4.2. *É elementar prova as implicações:*

$$\text{Convergência em } \mathcal{C}_0^\infty \overset{(1)}{\Longrightarrow} \text{convergência em } \mathcal{S} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \text{convergência em } \mathcal{C}^\infty.$$

Se para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, α multi-índice e $N > 0$ um inteiro, definirmos

$$\tilde{\rho}_{\alpha,N}(f) = \sup_{|x|\leq N} |\partial^\alpha f(x)|,$$

então $\{\tilde{\rho}_{\alpha,N}\}_{\alpha,N}$ é uma família de seminormas em $\mathcal{C}^\infty$. Pode-se mostrar que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é completo com com relação a esta família seminormas e e que é um espaço de Frechét.

Consideremos agora os espaços duais, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos, discutidos na seção anterior

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n))' =& \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))' =& \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))' =& \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

A convergência nestes duais é definida por

$$\begin{aligned} T_k \to T \text{ em } \mathcal{D}' &\iff T_k f \to T f, \ \ \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty, \\ T_k \to T \text{ em } \mathcal{S}' &\iff T_k f \to T f, \ \ \forall f \in \mathcal{S}, \\ T_k \to T \text{ em } \mathcal{E}' &\iff T_k f \to T f, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty \end{aligned}$$

As inclusões $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ implicam que

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Os elementos de $\mathcal{D}'$ são chamados de distribuições, os de $\mathcal{S}'$ distribuições temperadas e os de $\mathcal{E}'$ de distribuições com suporte compacto.

Aplicar uma distribuição u em uma função teste f será denotado por $u(f) = \langle u, f\rangle$.

A seguinte proposição caracteriza a continuidade de funcionais lineares em $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}_0^\infty$. Veja a sua demonstração na Proposição 2.3.4 em [GFK1].

Proposição 2.4.3. *(a) Um funcional linear u em $\mathcal{C}_0^\infty$ é uma distribuição se, e somente se, para todo compacto K de $\mathbb{R}^n$, existe $m > 0$ um inteiro tal que*

$$|\langle u, f\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}, \tag{2.4.1}$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada em K e para algum $C > 0$.

(b) Um funcional linear u em $\mathcal{S}$ é uma distribuição temperada se, e somente se, existem $m, k > 0$ inteiros tais que

$$|\langle u, f\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq k} \rho_{\alpha,\beta}(f), \tag{2.4.2}$$

para toda $f \in \mathcal{S}$ e para algum $C > 0$.

(c) Um funcional linear u em $\mathcal{C}^\infty$ é uma distribuição com suporte compacto se, e somente se, existem $N, m > 0$ inteiros tais que

$$|\langle u, f\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{\rho}_{\alpha,N}(f), \tag{2.4.3}$$

para toda $f \in \mathcal{S}$ e para algum $C > 0$.

Observação 2.4.4. *Uma vez que as famílias de seminormas $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ e $\{\rho_{\alpha,N}\}$ induzem em $\mathcal{S}$ a mesma topologia, podemos trocar em (2.4.2) $\rho_{\alpha,\beta}$ por $\rho_{\alpha,N}$.*

Exemplo 2.4.5. *Vejamos alguns exemplos:*

(1) A função delta de Dirac na origem δ_0 é definida por

$$\langle \delta_0, \phi\rangle = \phi(0),$$

para toda função suave $\phi \in \mathcal{C}^\infty$. Afirmamos que $\delta_0 \in \mathcal{E}'$. De fato, se $\phi_k \to \phi$ em $\mathcal{C}^\infty$, então, em particular, $\phi_k(0) \to \phi(0)$, o que equivale a $\langle \delta_0, \phi_k\rangle \to \langle \delta_0, \phi\rangle$. Logo, δ_0 é contínua e portanto $\delta_0 \in \mathcal{E}'$. O delta de Dirac num ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é definido por

$$\langle \delta_{x_0}, \phi\rangle = \phi(x_0).$$

De forma similar, prova-se que δ_{x_0} é uma distribuição com suporte compacto.

(2) Dada uma função $g \in \mathcal{C}^\infty$, podemos identificá-la com uma distribuição L_g dada por

$$L_g\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(x)dx.$$

Em geral, o funcional dado pela integral contra uma função g será denotado simplesmente por g, subentendendo-se que g é uma distribuição dada por L_g. Afirmamos que: (i) 1 é uma distribuição temperada, porém não é distribuição com suporte compacto; (ii) funções contínuas com suporte compacto são distribuições de $\mathcal{E}'$; (iii) $e^{|x|^2}$ é uma distribuição, mas não é distribuição temperada. Para provar (i), provaremos que o funcional linear

$$L_1(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx$$

pertence a $\mathcal{S}'$ mas não pertence a $\mathcal{E}'$. De fato, se $\phi \in \mathcal{S}$, então

$$\begin{aligned} |L_1(\phi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [(1+|x|)^{n+1}|\phi(x)|] \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)}dx \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [(1+|x|)^{n+1}|\phi(x)|]. \end{aligned}$$

O supremo na última linha é menor ou igual a uma soma de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$. Logo, pela Proposição 2.4.3 (b), L_1 é contínuo e portanto pertence a $\mathcal{S}'$. Para ver que $L_1 \notin \mathcal{E}'$, basta observar que a função constante igual a 1 é de $\mathcal{C}^\infty$ mas $L_1(1)$ não é finito, ou seja, L_1 não está bem definida em $\mathcal{C}^\infty$.

Para verificar a afirmação (ii), sejam f função de $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto e $\phi \in \mathcal{C}^\infty$. Tome $N > 0$ suficientemente grande de modo que $\operatorname{supp} f \subset \overline{B}(0,N)$. Então

$$\begin{aligned} |L_f(\phi)| &\leq \int_{|x|\leq N} |\phi(x)||f(x)|dx \\ &\leq \|f\|_{L^1} \sup_{|x|\leq N} |\phi(x)|. \end{aligned}$$

Por fim, provemos (iii). Seja $u(x) = e^{|x|^2}$ e considere o funcional linear

$$\langle u, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)e^{|x|^2}dx.$$

Sejam $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ e um compacto B de $\mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{supp}\phi \subset B$. Então

$$\begin{aligned} |\langle u, \phi\rangle| &\leq \int_B |\phi(x)|e^{|x|^2}dx \\ &\leq |B|\|\phi\|_{L^\infty} \sup_{x\in B} e^{|x|^2}. \end{aligned}$$

O que prova, que $e^{|x|^2}$ *é uma distribuição. Porém, não é uma distribuição temperada, pois tomando* $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ *em* $\mathcal{S}$, $\langle u, \phi \rangle$ *não é finito e portanto* u *não está bem definida em* $\mathcal{S}'$.

(3) Funções localmente integráveis são distribuições. De fato, se $g \in L^1_{loc}$, *a integral*

$$L_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) g(x) dx$$

é finita, para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$, *pois*

$$\begin{aligned} |L_g(\phi)| \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)||g(x)| dx \\ \leq & \|\phi\|_{L^\infty} \int_K |g(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

em que K *é um compacto de* $\mathbb{R}^n$ *que suporta* ϕ. *Esta última desigualdade implica imediatamente* $L_g \in \mathcal{D}'$.

(4) Uma consequência imediata do item (3) é que toda função $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, *é uma distribuição, já que toda função* L^p *é uma função de* L^1_{loc}. *Mais do que isso, toda* $f \in L^p$ *é um distribuição temperada. Em geral, não é válido que uma função* $f \in L^p$ *seja uma distribuição com suporte compacto. Uma condição suficiente para que* $f \in \mathcal{E}'$ *é que* f *tenha suporte compacto. Este fato decorre diretamente do item (2) (ii).*

Provemos que f *é distribuição temperada. De fato, se* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então, pela Desigualdade de Hölder,*

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq \|\phi\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}.$$

Como $\|\phi\|_{L^{p'}}$ *é controlado por uma soma de seminormas de* ϕ, *segue que* $f \in \mathcal{S}'$.

Agora, seja $f \in L^p$ *suportada num compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$. *Sejam* $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ *e* $N > 0$ *suficientemente grande de modo que* $K \subset \overline{B}(0, N)$. *Então*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) dx \right| = & \left| \int_K f(x)\phi(x) dx \right| \\ \leq & \int_K |f(x)||\phi(x)| dx \\ \leq & \sup_{|x| \leq N} |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \chi_K(x) dx \\ \leq & \sup_{|x| \leq N} |\phi(x)| \|f\|_{L^p} \|\chi_K\|_{L^{p'}} \\ = & \|f\|_{L^p} |K|^{1/p'} \sup_{|x| \leq N} |\phi(x)| \\ = & \|f\|_{L^p} |K|^{1/p'} \tilde{\rho}_{0,N}(\phi). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.4.3, f *é distribuição com suporte compacto.*

(5) As medidas finita de Borel é uma distribuição temperada. Neste caso, identificamos uma

medida μ com o funcional

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu(x).$$

De fato, considere μ uma medida finita de Borel em $\mathbb{R}^n$, ou seja $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Dada $\phi \in \mathcal{S}$, temos que

$$|\langle \mu, \phi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi| d\mu(x) \leq \mu(\mathbb{R}^n) \|\phi\|_{L^\infty},$$

o que prova que μ é uma distribuição temperada.

(6) Seja g função de $\mathbb{R}^n$ uma função com crescimento polinomial, isto é, existem constantes $k \in \mathbb{R}$ e $C > 0$ tais que $|g(x)| \leq C(1+|x|)^k$. Então g é distribuição temperada. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e tome um inteiro m tal que $m - k \geq n+1$. Observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) g(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)||g(x)| dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)(1+|x|)^k dx \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^m |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(m-k)} dx \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|)^m |\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)} dx, \end{aligned}$$

donde obtemos imediatamente que g é uma distribuição temperada. Ademais, dada qualquer função $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se g tem um crescimento polinomial, então o produto mg é uma distribuição temperada, pois $|m(x)g(x)| \leq \|m\|_{L^\infty} C(1+|x|)^k$, ou seja, mg tem também crescimento polinomial.

2.4.1 O Espaço das Distribuições Temperadas

Nosso foca nesta seção será estudar o espaço das distribuições temperadas, bem como definir conceitos e estabelecer resultados que se farão úteis no decorrer deste trabalho. Veremos mais a diante que operadores invariantes por translação, que são limitados de L^p em L^q, são dados pela convolução com uma distribuição temperada. Assim, é necessário que façamos um breve estudo das distribuições temperadas e exploremos algumas de suas propriedades.

Começaremos aqui com uma série de definições que estendem muitas das que definimos para funções. Essencialmente, o que fazemos para estender tais conceitos para objetos mais abstratos que funções, neste caso as distribuições temperadas, é estender por dualidade.

Considere $u \in \mathcal{S}'$ e α um multi-índice. A derivada distribucional de u, denotada por $\partial^\alpha u$ é definida por

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{2.4.4}$$

A transformada de Fourier de uma distribuição temperada u é definida por

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S} \tag{2.4.5}$$

e analogamente, a transformada de Fourier inversa de u é definida por

$$\langle u^{\vee}, \phi \rangle = \langle u, \phi^{\vee} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{2.4.6}$$

Em vista da Proposição 2.3.4 e do Corolário 2.3.7, ambas $\widehat{u}$ e $u^{\vee}$ estão bem definidas como distribuição temperada. Além disso, ambas as definições (2.4.5) e (2.4.6) fazem sentido, uma fez que a transformada de Fourier é um homeomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

Dados $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ definimos a translação, dilatação e reflexão de $u \in \mathcal{S}'$, respectivamente por

$$\langle \tau^h u, \phi \rangle = \langle u, \tau^{-h} \phi \rangle, \tag{2.4.7}$$

$$\langle \delta^{\lambda} u, \phi \rangle = \langle u, \lambda^{-n} \delta^{\lambda^{-1}} \phi \rangle, \tag{2.4.8}$$

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \tilde{\phi} \rangle. \tag{2.4.9}$$

Uma vez que a classe de Schwartz é invariante por translação, dilatação e reflexão, estão bem definidas (2.4.7), (2.4.8) e (2.4.9).

Dadas uma distribuição temperada $u \in \mathcal{S}'$, e uma função Schwartz $h \in \mathcal{S}$, definimos a convolução $h * u$ por

$$\langle h * u, \phi \rangle = \langle u, \tilde{h} * \phi \rangle, \tag{2.4.10}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Como a convolução de duas funções Schwartz é uma função Schwartz, está bem definida a convolução $u * h$.

Para definirmos a multiplicação da distribuição temperada u por uma função h, devemos exigir que $h \in \mathcal{C}^{\infty}$, bem como suas derivadas $\partial^{\alpha} h$, tenham um crescimento polinomial, isto é, para todo multi-índice α, existem $C_{\alpha} > 0$ e um inteiro $k_{\alpha} > 0$ tais que

$$|\partial^{\alpha} h(x)| \leq C_{\alpha} (1 + |x|)^{k_{\alpha}}.$$

O produto de h por u é definido como

$$\langle hu, \phi \rangle = \langle u, h\phi \rangle. \tag{2.4.11}$$

O fato de h ter um crescimento polinomial nos permite provar facilmente que o produto de $\phi \in \mathcal{S}$ por h é uma função Schwartz; basta usar a regra de Leibiniz. Em particular, fica bem definida o produto de u com qualquer função Schwartz.

Considere agora uma distribuição $u \in \mathcal{D}'$. Dizemos u se anula num conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se para toda função teste ϕ suportada em A, valer que

$$\langle u, \phi \rangle = 0.$$

Assim, definimos o suporte da distribuição u, denotado por $\operatorname{supp} u$, como sendo o menor fechado

K para o qual u se anula em $\mathbb{R}^n \backslash K$, ou seja, para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ com $\operatorname{supp} \phi \subseteq \mathbb{R}^n \backslash K$,

$$\langle u, \phi \rangle = 0 \tag{2.4.12}$$

Observação 2.4.6. *Os elementos de $\mathcal{E}'$ recebem o nome de distribuições com suporte compacto justamente porque possuem compacto no sentido da definição dada no parágrafo anterior. De fato, se $u \in \mathcal{E}'$, então existem $C > 0$ e inteiros $N, m > 0$, tais que*

$$|\langle u, f \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq N} |\partial^\alpha f(x)|,$$

para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sem particular, se $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada fora da bola $B(0, N)$, então f se anula na bola e portanto $\sup_{|x| \leq N} |\partial^\alpha f(x)| = 0$. Isto prova que $\operatorname{supp} u \subset B(0, N)$. Por outro lado, suponha que u é uma distribuição cujo suporte $\operatorname{supp} u$ é compacto. Tome $N > 0$ suficientemente grande de modo que $B(0, N) \supseteq \operatorname{supp} u$. Considere η uma função suave tal que

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 1, \quad \text{se } |x| \leq N \\ \eta(x) &= 0, \quad \text{se } |x| \geq N + 1. \end{aligned}$$

Dada uma função $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$, é evidente $(1 - \eta)\phi$ está suportada em $\mathbb{R}^n \backslash B(0, N)$. Logo, como u está suportada em $B(0, N)$, $\langle u, (1 - \eta)\phi \rangle = 0$ e então

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \eta\phi \rangle + \langle u, (1 - \eta)\phi \rangle = \langle u, \eta\phi \rangle, \quad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty \tag{2.4.13}$$

Fica bem definida a distribuição u' em $\mathcal{E}'$ dada por

$$\langle u', f \rangle = \langle u, \eta f \rangle, \quad f \in \mathcal{C}^\infty. \tag{2.4.14}$$

Em particular, em vista de (2.4.14), $u' = u$ em $\mathcal{C}_0^\infty$ e portanto, u será interpretada como distribuição de $\mathcal{E}'$ como dada em (2.4.14). Por continuidade de u em $\mathcal{C}_0^\infty$, temos que para o compacto $K = \overline{B}(0, N + 1)$, existem $C, m > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |\langle u, f \rangle| = |\langle u, \eta f \rangle| &\leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(\eta f)\|_{L^\infty} \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq N+1} |\partial^\alpha(\eta f)| \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada em K. Pela regra de Leibniz, verifica-se facilmente que esta última soma é controlada por uma soma de seminormas de f em $\mathcal{C}^\infty$ o que conclui que u é de fato uma distribuição com suporte compacto.

Exemplo 2.4.7. *Um exemplo de distribuição com suporte compacto é a função delta de Dirac δ_0, que está suportada em $\{0\}$. De fato, para qualquer função teste ϕ suportada fora da origem, $\phi(0) = 0$ Logo, $\langle \delta_0, \phi \rangle = 0$, o que prova que $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$.*

Dizemos que uma distribuição $u \in \mathcal{D}'$ coincide com uma função f num aberto U de $\mathbb{R}^n$ quando a ação de u sobre funções teste com suporte em U é dada pela integral contra f. Mais precisamente

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx, \quad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U).$$

Neste caso, escrevemos $u = f$.

Teorema 2.4.8. *Sejam $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então a convolução $\phi * u$ coincide com uma função $\mathcal{C}^\infty$ e*

$$\phi * u(x) = \langle u, \tau^x \tilde{\phi} \rangle. \tag{2.4.15}$$

Além disso, tanto $\phi * u$ quanto suas derivadas $\partial^\alpha(\phi * u)$ tem crescimento polinomial e vale a seguinte identidade

$$\partial^\alpha(\phi * u) = (\partial^\alpha \phi) * u.$$

Em particular, se u tem suporte compacto, então a convolução $\phi * u$ é uma função Schwartz.

Demonstração. Ver Teorema 2.3.20 em [GFK1]. □

Teorema 2.4.9. *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então sua transformada de Fourier $\widehat{u}$ é uma função analítica real em $\mathbb{R}^n$; em particular $\widehat{u}$ é uma função de $\mathcal{C}^\infty$. Além disso, $\widehat{u}$ e suas derivadas $\partial^\alpha \widehat{u}$ têm crescimento polinomial e $\widehat{u}$ admite extensão holomorfa em $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.3.21 em [GFK1]. □

Proposição 2.4.10. *Sejam u_j, u e v distribuições temperadas, $f_j, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α um multi-ídice e $a > 0$. São válidas a seguintes propriedades*

(1) $\widehat{u+v} = \widehat{u} + \widehat{v}$

(2) $\widehat{bu} = b\widehat{u}$

(3) Se $u_j \to u$ em $\mathcal{S}'$, então $\widehat{u_j} \to \widehat{u}$,

(4) $\widehat{\tilde{u}} = \tilde{\widehat{u}}$

(5) $(\tau^y u)^\wedge = e^{-2\pi i x \cdot y}\widehat{u}$

(6) $(e^{2\pi i x \cdot y} u)^\wedge = \tau^y \widehat{u}$

(7) $(\delta^a u)^\wedge = a^{-n}\delta^{a^{-1}}\widehat{u}$

(8) $(\partial^\alpha u)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}$

(9) $\partial^\alpha \widehat{u} = ((-2\pi i x)^\alpha u)^\wedge$

(10) $(\widehat{u})^\vee = u = (u^\vee)^\wedge$

(11) $\widehat{f * u} = \widehat{f}\,\widehat{u}$

(12) $\widehat{fu} = \widehat{f} * \widehat{u}$

(13) (Regra de Leibniz)

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{|\gamma| \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^\gamma f)(\partial^{\alpha-\gamma} u)$$

(14) Se $u_k, u \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, e* $u_k \to u$ *em* L^p*, então* $u_k \to u$ *em* $\mathcal{S}'$*.*

Demonstração. Para provar esta proposição, basta utilizar as propriedades já provadas da transformada de Fourier em $\mathcal{S}$ e os conceitos definidos nesta seção sobre as distribuições temperadas. Para mais detalhes ver Proposição 2.3.23 em [GFK1] □

Capítulo 3

Operadores do Tipo Convolução em L^p e Multiplicadores

3.1 Operadores que Comutam com Translação

Nesta seção discutiremos sobre operadores que comutam com translação. Veremos que tais tipos de operadores limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$ são caracterizados por serem dados pela convolução com uma distribuição temperada. As propriedades que queremos extrair de tais operadores estão diretamente ligados com a distribuição temperada que os representa. Por exemplo, operadores associados e distribuições temperadas cuja transformada de Fourier é uma função L^∞ caracteriza a limitação de L^2 em L^2. Além disso, como um dos focos deste trabalho é explorar operadores integrais singulares, que são também operadores dados pela convolução com uma distribuição temperada, faz-se importante um olhar detalhado sobre operadores do tipo convolução.

Definição 3.1.1. *Considere X um espaço de funções mensuráveis de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que X é fechado por translação quando para toda função $f \in X$, a translação $\tau^y f \in X$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Se Y é um outro espaço de funções mensuráveis fechado por translação e $T : X \to Y$ um operador, dizemos que T é comuta com translação (ou invariante por translação) quando*

$$T(\tau^y f) = \tau^y(Tf),$$

para toda $f \in X$ e todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Observe que fixada u um distribuição temperada, o operador $f \mapsto f * u$ comuta com translação. De fato,

$$\tau^y(u * u)(x) = f * u(x-y) = \langle u, \tau^{x-y}\tilde{f}\rangle = \langle u, \tau^x\tau^{-y}\tilde{f}\rangle = \langle u, \tau^x(\widetilde{\tau^y f})\rangle = (\tau^y f) * u(x).$$

O Teorema 3.1.4 nos dá que um operador T ser dado pela convolução com uma distribuição temperada é uma condição necessária para T ser invariante por translação.

Lema 3.1.2. *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ um operador linear limitado que comuta com translação. Para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, as derivadas de Tf, no sentido distribucional, são funções de L^q e satisfazem*

$$\partial^\alpha(Tf) = T(\partial^\alpha f), \quad \textit{para todo multi-índice } \alpha, \tag{3.1.1}$$

ou seja, o operador ∂^α comuta com T.

Demonstração. Consideremos o caso em que $\alpha = e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Por um lado, vendo Tf como distribuição, temos que para toda $\phi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle \frac{\tau^{he_j}(Tf) - Tf}{h}, \phi \right\rangle = \left\langle Tf, \frac{\tau^{-he_j}\phi - \phi}{h} \right\rangle,$$

o que equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{Tf(y - he_j) - Tf(y)}{h} \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} Tf(y) \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} dy. \tag{3.1.2}$$

Por outro lado, usando o fato de T ser linear e invariante por translação, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{Tf(y - he_j) - Tf(y)}{h} \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y)\phi(y) dy. \tag{3.1.3}$$

Igualando (3.1.2) com (3.1.3),

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(y) \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} dy = \int_{\mathbb{R}^n} T\left(\frac{\tau^{he_j} f - f}{h}\right)(y)\phi(y) dy. \tag{3.1.4}$$

Como $\phi \in \mathcal{S}$, temos a convergência $\frac{\tau^{-he_j}\phi(y) - \phi(y)}{h} \to \partial_j \phi$, $h \to 0$ em $\mathcal{S}$. Em particular, esta convergência vale em $L^{q'}$. E como $Tf \in L^q$, temos que pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(y) \left(\frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} - \partial_j \phi \right) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(y)| \left| \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} - \partial_j \phi \right| dy \\ &\leq \|Tf\|_{L^q} \left\| \frac{\tau^{-he_j}\phi - \phi}{h} - \partial_j \phi \right\|_{L^{q'}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \to 0$. Logo, obtemos a convergência

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(y) \frac{\phi(y + he_j) - \phi(y)}{h} dy \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} Tf(y) \partial_j \phi(y) dy. \tag{3.1.5}$$

Agora, como tomamos $f \in \mathcal{S}$, com o mesmo argumento usado para ϕ, temos que

$$\frac{\tau^{he_j} f - f}{h} \longrightarrow -\partial_j f, \quad \text{em } L^p. \tag{3.1.6}$$

E uma vez que T é limitada de L^p em L^q,

$$T\left(\frac{\tau^{he_j}f - f}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0} T(-\partial_j f), \quad \text{em } L^q. \tag{3.1.7}$$

Como em particular ϕ é uma função de $L^{q'}$, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left[T\left(\frac{\tau^{he_j}f - f}{h}\right)(y) - T(-\partial_j f)(y)\right]\phi(y)dy\right| \\ &\qquad\qquad \le \int_{\mathbb{R}^n}\left|T\left(\frac{\tau^{he_j}f - f}{h}\right)(y) - T(-\partial_j f)(y)\right||\phi(y)|dy \\ &\qquad\qquad \le \left\|T\left(\frac{\tau^{he_j}f - f}{h}\right) - T(-\partial_j f)\right\|_{L^q}\|\phi\|_{L^{q'}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \to 0$. Portanto, fazendo $h \to 0$ em (3.1.4),

$$-\langle\partial_j(Tf), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} Tf(y)\partial_j\phi(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)T(\partial_j f)(y)dy,$$

donde segue que $\partial_j(Tf) = T(\partial_j f)$. Para um multi-índice α qualquer, basta usar indução em $|\alpha|$. □

Lema 3.1.3. *Seja $1 \le q \le \infty$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Suponha que as derivadas distribucionais $\partial^\alpha h$ sejam funções $L^q(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma função contínua H tal que h coincide com H em quase toda parte. Além disso,*

$$|H(0)| \le C_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha h\|_{L^q}. \tag{3.1.8}$$

Demonstração. Ver Lema 2.5.4 em [GFK1]. □

Teorema 3.1.4. *Sejam $1 \le p, q \le \infty$ e considere $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ operador linear limitado que comuta com translação. Então existe uma única distribuição temperada w tal que*

$$Tf(x) = f * w(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para toda função Schwartz f.

Demonstração. Considere uma função $f \in \mathcal{S}$. Então Tf é uma função de L^q e pelo Lema 3.1.2, todas as suas derivadas distribucionais $\partial^\alpha(Tf)$ também estão em L^q. Logo, pelo Lema 3.1.3, existe $H = H_f$ uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ (que depende de f) tal que $Tf = H$, em quase toda parte e além disso

$$|H(0)| \le C_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha(Tf)\|_{L^q}. \tag{3.1.9}$$

Defina um funcional linear u em $\mathcal{S}$ por

$$\langle u, f\rangle = H_f(0), \quad f \in \mathcal{S}. \tag{3.1.10}$$

A definição de u independe da função H, pois se G fosse uma outra função contínua em $\mathbb{R}^n$ tal que $Tf = G$ q.t.p., então $H = G$ q.t.p. e por continuidade de G e H, segue que $H = G$ em toda parte. Em particular $G(0) = H(0)$.

Usando a estimativa (3.1.9), o fato de ∂^α comutar com T, temos o seguinte

$$\begin{aligned}|\langle u, f\rangle| = |H_f(0)| &\leq C_{n,q} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial(Tf)\|_{L^q}\\ &= C_{n,q} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|T(\partial^\alpha f)\|_{L^q}\\ &\leq C_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^q}.\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.2.4, a norma L^q é controlada por uma soma de seminormas de $\mathcal{S}$. Logo, u é uma distribuição temperada.

Afirmamos que, para toda $f \in \mathcal{S}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\langle u, \tau^{-x} f\rangle = H_f(x). \tag{3.1.11}$$

De fato, dadas $f \in \mathcal{S}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, considere $H_{f,x}$ a função contínua associada $\tau^{-x}f$ que satisfaz $H_{f,x} = T(\tau^{-x}f)$ q.t.p. Neste caso $H_{f,x}(0) = \langle u, \tau^{-x}f\rangle$. Provemos que $H_{f,x}(0) = H_f(x)$. Com efeito, veja que

$$H_{f,x}(y) = T(\tau^{-x}f)(y) = \tau^{-x}(Tf)(y) = Tf(x+y) = H_f(x+y) = \tau^{-x}H_f(y),$$

em que a primeira e a penúltima igualdade acima é válida para quase todo y, e a segunda igualdade usamos o fato de T comutar com translação. Logo, as funções $H_{f,x} = \tau^{-x}H_f$ são iguais qtp. A continuidade delas implica que $H_{f,x}(y) = \tau^{-x}H_f(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Em particular para $y = 0$, temos que $H_f(x) = H_{f,x}(0) = \langle u, \tau^{-x}f\rangle$, e portanto fica provado (3.1.11).

Uma vez provada (3.1.11), afirmamos que T tem a seguinte representação

$$Tf(x) = f * \tilde{u}(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Basta observar as seguintes igualdades

$$f * \tilde{u}(x) = \langle \tilde{u}, \tau^{-x}\tilde{f}\rangle = \langle u, (\tau^{-x}\tilde{f})\tilde{}\,\rangle = \langle u, \tau^{-x}f\rangle = H_f(x) = Tf(x).$$

Por fim, provemos a unicidade de $\tilde{u}$. Suponha que v seja outra distribuição temperada tal que $f * \tilde{u} = f * v$ q.t.p., para toda $f \in \mathcal{S}$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos $\langle \tilde{u}, \tau^{-x}\tilde{f}\rangle = \langle v, \tau^{-x}\tilde{f}\rangle$. Dada $g \in \mathcal{S}$, temos que $\tau^x\tilde{g} \in \mathcal{S}$ e $\tau^x(\tau^x\tilde{g})\tilde{} = g$ e portanto

$$\langle \tilde{u}, g\rangle = \langle \tilde{u}, \tau^x(\tau^x\tilde{g})\tilde{}\,\rangle = \langle v, \tau^x(\tau^x\tilde{g})\tilde{}\,\rangle = \langle v, g\rangle.$$

□

3.2 Os Espaços $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Definição 3.2.1. *Dados $1 \leq p, q \leq \infty$, denotamos por $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos operadores lineares limitados $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ que são invariantes por translação. A norma de um operador T de $\mathscr{M}^{p,q}$ é definido por*

$$\|T\|_{\mathscr{M}^{p,q}} = \|T\|_{L^p \to L^q}.$$

Note que o Teorema 3.1.4 garante que todo operador de $\mathscr{M}^{p,q}$ é dado por uma convolução com uma distribuição temperada.

Teorema 3.2.2. *Se $1 \leq q < p < \infty$, então $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.5.6 em [GFK1]. □

Teorema 3.2.3. *Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e $T \in \mathscr{M}^{p,q}$. Então existe um operador linear limitado $T' : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ que coincide com T em $L^p \cap L^{q'}$ e*

$$\|T\|_{\mathscr{M}^{p,q}} = \|T'\|_{\mathscr{M}^{q',p'}},$$

o que indica que os espaços $\mathscr{M}^{p,q}$ e $\mathscr{M}^{q',p'}$ são isometricamente isomorfos.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.7 em [GFK1]. □

Veremos a seguir que existe uma caracterização dos espaços $\mathscr{M}^{p,p}$ para alguns casos de $p \geq 1$.

Teorema 3.2.4. *Um operador T pertence a $\mathscr{M}^{1,1}$ se, e somente se, existe uma medida μ de Borel regular finita em $\mathbb{R}^n$ tal que $Tf = f * \mu$, para toda $f \in \mathcal{S}$. Neste caso,*

$$\|T\|_{L^1 \to L^1} = \|\mu\|_{\mathscr{M}},$$

em que $\|\mu\|_{\mathscr{M}} = |\mu|(\mathbb{R}^n)$ é a variação total de μ.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.8 em [GFK1]. □

Teorema 3.2.5. *Um operador linear T pertence a $\mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, T é dado pela convolução com uma distribuição temperada $u \in \mathcal{S}$ cuja transformada de Fourier $\widehat{u}$ é uma função $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Neste caso,*

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^\infty}.$$

Demonstração. Suponha que exista uma distribuição temperada u tal que $\widehat{u} \in L^\infty$ e

$$Tf = f * u,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. É claro que T comuta com translação. É preciso somente verificar que T é um operador limitado. É suficiente verificar sua limitação num subespaço denso de L^2, neste caso em $\mathcal{S}$. Observe que pelo Identidade de Plancherel (Teorema 2.3.6 (4)), temos que

$$\begin{aligned}
\|f * u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * u(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|\widehat{u}\|_{L^\infty}^2 \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 \\
&= \|\widehat{u}\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\|f * u\|_{L^2} \leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty}\|\widehat{f}\|_{L^2}$, para função $f \in \mathcal{S}$. Por densidade de $\mathcal{S}$ em L^2, T se estende continuamente a todo L^2 de modo que

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty}$$

e portanto $T \in \mathscr{M}^{2,2}$. Por outro lado, se $T \in \mathscr{M}^{2,2}$ então o Teorema 3.1.4 nos garante a existência de uma distribuição temperada $u \in \mathcal{S}'$ tal que

$$Tf = f * u, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Provaremos que $\widehat{u} \in L^\infty$. Considere então $R > 0$ e $\phi_R \in \mathcal{C}_0^\infty$ tal que $\phi_R = 0$ em $|x| \geq 2R$ e $\phi_R = 1$ em $|x| \leq R$. Note que, $\phi_R^\vee \in \mathcal{S}$. Então, é claro que

$$(T(\phi_R^\vee))^\wedge = (\phi_R^\vee * u)^\wedge = \phi_R \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Uma vez que $\phi_R\widehat{u} = \widehat{u}$ em $B(0,R)$, temos que $\widehat{u} \in L^2(B(0,R))$, para todo $R > 0$ e portanto $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, se $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f\widehat{u}$ é uma função $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usando o fato de T ser limitada e a Identidade de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\widehat{u}(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f^\vee * u)^\wedge(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |(f^\vee * u)(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |T(f^\vee)(x)|^2 dx \\
&= \|T(f^\vee)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|T\|_{L^2 \to L^2}^2 \|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

donde obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\|T\|_{L^2 \to L^2}^2 - |\widehat{u}(x)|^2)^2 |f(x)|^2 dx \geq 0. \tag{3.2.1}$$

Uma vez que

$$\|T(f^\vee)\|_{L^2} \leq \|T\|_{L^2\to L^2}\|\|f\|_{L^2},$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty$, então por densidade, é também válida para toda função $f \in L^\infty$ com suporte compacto, que em particular são funções de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, (3.2.1) é válida para toda função f limitada com suporte compacto. Para cada $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$, considere $f_{r,y}(x) = (2r)^{-n/2}\chi_{y+[-r,r]^n}(x)$ que é limitada com suporte compacto. Então, $f_{r,y}$ satisfaz (3.2.1) e então

$$\frac{1}{(2r)^{n/2}}\int_{y+[-r,r]^n}(\|T\|^2_{L^2\to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2)^2 dx \geq 0,$$

para todo $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue (Corolário 2.1.10), temos que para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|T\|^2_{L^2\to L^2} - |\widehat{u}(y)|^2 = \lim_{r\to 0}\int_{y+[-r,r]^n}(\|T\|^2_{L^2\to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2)^2 dx \geq 0.$$

Logo, $\|T\|_{L^2\to L^2} \geq |\widehat{u}(y)|$, para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$, o que implica que $\widehat{u} \in L^\infty$ e

$$\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|T\|_{L^2\to L^2}.$$

Portanto, segue a igualdade $\|\widehat{u}\|_{L^\infty} = \|T\|_{L^2\to L^2}$. □

O teorema anterior será uma ferramenta bastante útil no capítulo seguinte, o qual tratamos de integrais singulares. O caso em que tais integrais são do tipo convolução, buscamos a limitação L^2 delas via transformada de Fourier e portanto a caracterização de $\mathcal{M}^{2,2}$ se fará útil.

Como consequência do Teorema 3.2.5, temos que todo operador linear T de $\mathscr{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p < 2$, é também dado pela convolução com uma distribuição temperada cuja transformada de Fourier é limitada. De fato, pelo Teorema 3.2.3, temos que T pode ser identificado como um operador de $\mathscr{M}^{p',p'}$ com norma

$$\|T\|_{L^p\to L^p} = \|T\|_{L^{p'}\to L^{p'}}.$$

Note que $p' = 1 + (p-1)^{-1} > 2 > p$. Pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 1.2.2), temos que T é limitada de L^2 em L^2 com norma

$$\|T\|_{L^2\to L^2} \leq \|T\|_{L^p\to L^p}.$$

Sendo T um operador de $\mathscr{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 3.1.4, existe uma distribuição temperada u tal que

$$Tf = f * u, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Porém o fato de T ser limitada em L^2 implica necessariamente que $\widehat{u} \in L^\infty$. Portanto, fica provada a afirmação.

Definição 3.2.6. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções*

$m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que o operador

$$T_m f = (\widehat{f} m)^\vee, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

é limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$. A norma de $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|T_m\|_{L^p \to L^p}. \tag{3.2.2}$$

Os elementos de $\mathscr{M}_p$ são chamados de L^p-multiplicadores.

Notemos que m ser um elemento de $\mathscr{M}_p$ é condição necessária e suficiente para que o T_m seja um operador de $\mathscr{M}^{p,p}$. De fato, basta observar que o operador associado a m é um operador do tipo convolução

$$T_m f = (\widehat{f} m)^\vee = [(f * (m^\vee))^\wedge]^\vee = f * (m^\vee).$$

Sendo $m^\vee$ é uma distribuição temperada, segue que T_m é do tipo convolução. Vendo T_m como operador dado pela convolução com $m^\vee \in \mathcal{S}'$, é evidente que $m \in \mathscr{M}_p$ se, e somente se $T_m \in \mathscr{M}^{p,p}$. Em vista dos teoremas 3.2.4 e 3.2.5 que caracterizam os operadores de $\mathscr{M}^{1,1}$ e $\mathscr{M}^{2,2}$ respectivamente, temos que os L^1-multiplicadores são as medidas finitas de Borel em $\mathbb{R}^n$ e os L^2-multiplicadores são as funções L^∞.

Recorde também do Teorema 3.2.3 que um operador T pertence a $\mathscr{M}^{p,p}$ se e somente se pertence a $\mathscr{M}^{p',p'}$ e além disso

$$\|T\|_{L^p \to L^p} = \|T\|_{L^{p'} \to L^{p'}}.$$

É claro então que $m \in \mathscr{M}_p$ se, e somente se $m \in \mathscr{M}_{p'}$.

Capítulo 4

Integrais Singulares

4.1 A Transformada de Hilbert

4.1.1 Propriedades Básicas da Transformada de Hilbert

Para começarmos a discutir sobre a transformada de Hilbert, definimos primeiro uma distribuição temperada W_0 como segue. Para toda função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, defina

$$\langle W_0, \phi \rangle = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx. \tag{4.1.1}$$

Uma vez que a integral de $1/x$ sobre intervalos simétricos é zero, podemos reescrever W_0 por

$$\langle W_0, \phi \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} dx. \tag{4.1.2}$$

Observe que o segundo termo da expressão do lado direito da igualdade é uma integral absolutamente convergente, pois como ϕ é uma função Schwartz,

$$\int_{|x| \geq 1} \frac{|\phi(x)|}{|x|} dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\phi(x)| \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{x^2} dx = 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\phi(x)| < \infty.$$

Provemos que o limite em (4.1.2) existe. De fato, pelo Teorema do Valor Médio e usando o fato de $\phi \in \mathcal{S}$, temos que, para algum $0 < \xi < x$,

$$\chi_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{|\phi(x) - \phi(0)|}{|x|} = \chi_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} |\phi'(\xi)| \leq \chi_{|x| \leq 1} \|\phi'\|_{L^\infty}. \tag{4.1.3}$$

Como a função do lado direito é integrável, pelo Teorema da Convergência Dominada o limite em (4.1.2) existe e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx = \int_{|x| \leq 1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx.$$

E portanto W_0 está bem definida. Para ver que W_0 é de fato uma distribuição temperada, note que pela desigualdade (4.1.3),

$$|\langle W_0, \phi\rangle| \leq \frac{2}{\pi}\|\phi'\|_{L^\infty} + \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\phi(x)|.$$

É claro que a termo do lado direito é uma soma de seminormas de ϕ e poratnto $W_0 \in \mathcal{S}'$.

Definimos a seguir o primeiro operador integral singular que estudares: a transformada de Hilbert.

Definição 4.1.1. *A transformada de Hilbert de uma função Schwartz $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é definida por*

$$H\phi(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x-y)}{y}dy = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x-y)}{y}dy \tag{4.1.4}$$

Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$, definimos sua transformada de Hilbert truncada por

$$H^{(\varepsilon)}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|y|\geq\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy, \tag{4.1.5}$$

A transformada maximal de Hilbert de $f \in L^p(\mathbb{R})$ é dada por

$$H^{(*)}f(x) = \sup_{\varepsilon>0}|H^{(\varepsilon)}f(x)|. \tag{4.1.6}$$

Note que pela Desigualdade de Holder, a transformada truncada $H^{(\varepsilon)}f$ está bem definida para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p < \infty$, e é finita em quase toda parte. Logo, a transformada maximal também está bem definida.

É evidente da definição que a transformada de Hilbert (4.1.4) é dada pela convolução com a distribuição temperada W_0:

$$H\phi(x) = W_0 * \phi(x)$$

Calculemos a transformada de Fourier de W_0. Dada uma função Schwartz ϕ, temos

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{W_0}, \phi\rangle = \langle W_0, \hat{\phi}\rangle &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)e^{-2\pi i x\xi}}{\xi}dxd\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}\frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\xi}d\xi dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{\frac{1}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq\varepsilon}\frac{\cos(2\pi x\xi)}{\xi} - i\frac{\sin(2\pi x\xi)}{\xi}d\xi dx \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq 2\pi\varepsilon} -i\frac{\sin(x\xi)}{\xi}d\xi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{-i}{\pi}\text{sgn}(x)\phi(x)\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon}\geq|\xi|\geq 2\pi\varepsilon} -i\frac{\sin(|x|\xi)}{\xi}d\xi dx,
\end{aligned}$$

em que $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. A penúltima igualdade segue do fato de que a função cosseno é par e $1/\xi$ é ímpar. Logo sua integral sobre os intervalos simétricos $\frac{1}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq \varepsilon$ é zero. É possível encontrar uma constante $M > 0$ que limita, uniformemente em ε, as integrais $\int_{\frac{2\pi}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq 2\pi\varepsilon} -i\frac{\sin(|x|\xi)}{\xi} d\xi$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_{\frac{2\pi}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq 2\pi\varepsilon} -i\frac{\sin(|x|\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq M.$$

Donde obtemos

$$\left| \frac{-i}{\pi} \operatorname{sgn}(x)\phi(x) \int_{\frac{2\pi}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq 2\pi\varepsilon} -i\frac{\sin(|x|\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq \frac{M}{\pi}|\phi(x)|.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo fato de $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} \geq |\xi| \geq \varepsilon} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi$, obtemos

$$\langle \widehat{W_0}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} -i\operatorname{sgn}(x)\phi(x)dx. \tag{4.1.7}$$

Isto implica que a transformada de Fourier de W_0 coincide com a função limitada $-i\operatorname{sgn}(\xi)$. Logo, pelo Teorema 3.2.5, H é um operador limitado de L^2 em L^2.

Podemos caracterizar H pela sua transformada de Fourier. Dada uma função Schwartz ϕ, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{H\phi}(\xi) &= \widehat{W_0}(\xi)\hat{\phi}(\xi) \\ &= -i\operatorname{sgn}(\xi)\hat{\phi}(\xi). \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Por densidade de $\mathcal{S}$ em L^2 e pela identidade de Plancherel, a identidade acima é válida em todo L^2. Ademais, H é uma isometria de L^2. Com efeito, pela identidade (4.1.8) e a identidade de Plancherel temos que, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|Hf\|_{L^2} = \|\widehat{Hf}\|_{L^2} = \| - i\operatorname{sgn} \cdot \hat{f}\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{4.1.9}$$

Por fim, H satisfaz a a seguinte identidade em L^2

$$H^2 = -I, \tag{4.1.10}$$

em que I é o operador identidade de L^2. De fato, para toda função Scwhartz f, é válido que

$$\begin{aligned} \widehat{H^2 f}(\xi) &= -i\operatorname{sgn}(\xi)\widehat{Hf}(\xi)) \\ &= -i\operatorname{sgn}(\xi)(-i\operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)) \\ &= -\widehat{f}. \end{aligned}$$

Como a transformada de Fourier é uma isometria de L^2, segue a identidade (4.1.10).

4.1.2 Relação de H com Funções Analíticas

Considere o núcleo de Poisson dado por

$$P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \ y > 0.$$

Seja a função real $P(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$, cuja integral em $\mathbb{R}$ é igual a 1. Logo, $\{P_y\}_{y>0}$, em que $P_y(x) = y^{-1}P(y^{-1}x)$, é uma aproximação da identidade e portanto, para toda função $f \in L^p(\mathbb{R})$, valem as convergências

$$\begin{aligned} \|f * P_y - f\|_{L^p} &\overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0, \\ |f * P_y(x) - f(x)| &\overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Veja que a função $z \mapsto \frac{i}{\pi z}$ é analítica no semiplano superior $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ e escreva

$$\frac{i}{\pi z} = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} + \frac{ix}{\pi(x^2+y^2)} = P_y(x) + iQ_y(x),$$

com $Q_y(x) = \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}$. Sendo $\frac{i}{\pi z}$ analítica em $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$, temos que P_y e Q_y são harmônicas conjugadas. Considere $Q(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$ e $Q_y(x) = y^{-1}Q(y^{-1}x)$. Como Q não é integrável, a família $\{Q_y\}_{y>0}$ não é uma aproximação da identidade. Porém, para cada $y > 0$ fixado, Q_y é uma função de $L^p(\mathbb{R})$, para $1 < p < \infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |Q_y(x)|^p dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^p}{(x^2+y^2)^p}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x^2+y^2)^p}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{y} \frac{x^p}{(x^2+y^2)^p}dx + \frac{2}{\pi}\int_y^{+\infty} \frac{x^p}{(x^2+y^2)^p}dx \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{y} \frac{1}{y^p}dx + \frac{2}{\pi}\int_y^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{y^{p-1}}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Sejam $1 < p < \infty$ e f uma função de $L^p(\mathbb{R})$. Defina a função

$$F_f(x+iy) = f * P_y(x) + if * Q_y(x) \tag{4.1.11}$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-t)+iy}dt, \tag{4.1.12}$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$. Para ver que F_f está bem definida, vamos provar que as convoluções em sua parte real e imaginária convergem absolutamente. É fácil de verificar que

$$f * P_y(x) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{4.1.13}$$

Uma vez que $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$ é uma função de $L^p(\mathbb{R})$, para todo $1 < p < \infty$, $t \mapsto ((x-t)^2+y^2)^{-1}$ também a é. Logo, pela Desigualdade de Hölder, a integral (4.1.13) converge absolutamente. Por outro lado, temos

$$f * Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt. \tag{4.1.14}$$

Como Q_y é uma função de $L^p(\mathbb{R})$, a integral (4.1.14) é absolutamente convergente pela Desigualdade de Hölder. Agora, afirmamos que a função F_f é analítica. Com efeito, a analiticidade da função $z = x + iy \mapsto \frac{i}{\pi z} = P_y(x) + iQ_y(x)$ no semiplano superior $y > 0$ implica que as funções $P_y(x)$ e $Q_y(x)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(f * P_y)(x) = f * \frac{\partial P_y}{\partial x}(x) = f * \frac{\partial Q_y}{\partial y}(x) = \frac{\partial}{\partial y}(f * Q_y)(x).$$

Analogamente, prova-se que $\frac{\partial}{\partial y}(f * P_y)(x) = -\frac{\partial}{\partial x}(f * Q_y)(x)$, e portanto F_f é analítica em $y > 0$.

Teorema 4.1.2. *Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \le p < \infty$, valem as convergências*

$$\begin{aligned} \|f * Q_\varepsilon - f\|_{L^p} &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0, \\ |f * Q_\varepsilon(x) - f(x)| &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0, \quad \textit{para quase todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então para todo $x \in \mathbb{R}$

$$F_\phi(x+iy) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{(x-t)+iy}dt \longrightarrow \phi(x) + iH\phi(x), \quad y \to 0^+. \tag{4.1.15}$$

Demonstração. Defina a função

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}, & \text{se } |t| \ge 1 \\ \frac{t}{t^2+1}, & \text{se } |t| < 1, \end{cases} \tag{4.1.16}$$

e considere $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\psi(\varepsilon^{-1}x)$, $\varepsilon > 0$. Para uma função f em $L^p(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\psi_\varepsilon(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varepsilon^{-1}\psi(\varepsilon^{-1}t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\varepsilon} f(x-t)\varepsilon^{-1}\psi(\varepsilon^{-1}t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|<\varepsilon} f(x-t)\varepsilon^{-1}\psi(\varepsilon^{-1}t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\varepsilon}\left(\frac{f(x-t)t}{t^2+\varepsilon^2} - \frac{f(x-t)}{t}\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|<\varepsilon}\frac{f(x-t)t}{t^2+\varepsilon^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)t}{t^2+\varepsilon^2}dt - \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\varepsilon}\frac{f(x-t)}{t}dt \\ &= Q_\varepsilon * f(x) - H^{(\varepsilon)}f(x). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte identidade

$$\frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x) = Q_\varepsilon * f(x) - H^{(\varepsilon)} f(x). \tag{4.1.17}$$

Observe que a integral de ψ é zero, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = \int_{|t|\geq 1} \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_{|t|<1} \frac{t}{t^2+1} dt$$

e cada uma das funções dentro das integrais são ímpares. Logo, suas integrais sobre intervalos simétricos é zero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0.$$

Considere a função integrável

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1}, & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1, & \text{se } |t| < 1. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

É evidente que Ψ é uma função radial e não crescente na semi-reta $[0, +\infty)$. Afirmamos que $|\psi| \leq |\Psi|$. O caso em que $|t| < 1$ é imediato. Quando $|t| \geq 1$,

$$|\psi(t)| = \left|\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}\right| = \frac{1}{|t|}\frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} = \Psi(t).$$

Veja que $\|\psi_\varepsilon\|_{L^1} < \infty$, uma vez que

$$\begin{aligned}
\|\psi_\varepsilon\|_{L^1} &= \|\psi\|_{L^1} \\
&\leq \int_{|t|\geq 1} \left|\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}\right| dt + \int_{|t|<1} \frac{|t|}{t^2+1} dt \\
&\leq \int_{|t|\geq 1} \frac{1}{|t|(t^2+1)} dt + \int_{|t|<1} \frac{1}{t^2+1} dt \\
&\leq \int_{|t|\geq 1} \frac{1}{(t^2+1)} dt + \int_{|t|<1} \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)} dt = \pi.
\end{aligned}$$

Além disso, dado $\delta > 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{|t|>\delta} |\psi_\varepsilon(t)| dt = \int_{|t|>\frac{\delta}{\varepsilon}} \psi(t) dt \to 0, \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Estamos em condições de aplicar o Corolário 1.1.6, com ψ_ε e $a = 0$, para obter a convergência em L^p

$$\|Q_\varepsilon * f - H^{(\varepsilon)} f\|_{L^p} = \|f * \psi_\varepsilon\|_{L^p} \to 0, \quad \text{quando } \varepsilon \to 0.$$

Sendo Ψ um majorante radial de ψ_ε, podemos aplicar o Corolário 2.1.12 com $a = 0$, obtendo a convergência em quase toda parte

$$Q_\varepsilon * f - H^{(\varepsilon)} f = f * \psi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Por fim, como $\{P_y\}_{y>0}$ é uma aproximação da identidade, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos que

$$\lim_{y\to 0^+} \phi * P_y(x) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1.19}$$

E por definição de transformada de Hilbert,

$$\lim_{y\to 0^+} H^{(y)}\phi = H\phi \text{ em toda parte.}$$

Logo, $\lim_{y\to 0^+} \phi * Q_y = H\phi$. Sendo $F_\phi(x+iy) = \phi * P_y(x) + i\phi * Q_y(x)$, obtemos

$$\lim_{y\to 0^+} F_\phi(x+iy) = \phi(x) + iH\phi(x).$$

□

A convergência (4.1.19) segue do seguinte lema

Lema 4.1.3. *Seja $\phi \in L^1$ com $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ e $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}x)$. Se $f \in \mathcal{S}$, então vale a convergência pontual*

$$\phi_\varepsilon * f \longrightarrow f.$$

Demonstração. Observe que, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned}\langle \phi_\varepsilon, f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(tx) dx \longrightarrow f(0) = \langle \delta_0, f\rangle, \quad \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

ou seja, $\phi_\varepsilon \to \delta_0$ em $\mathcal{S}'$. Como $\phi_\varepsilon * f(x) = \langle \phi_\varepsilon, \tau^x \widetilde{f}\rangle$ e $\delta_0 * f(x) = f(x)$, segue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \phi_\varepsilon * f(x) = f(x).$$

□

4.1.3 Limitação de H e $H^{(*)}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$

A transformada de Hilbert será o primeiro operador integral singular que provaremos ser limitado em L^p, para $1 < p < \infty$. Para isto, assuma o seguinte lema auxiliar. Nos referimos à prova do Teorema 5.1.7 em [GFK1].

Lema 4.1.4. *Para toda função real $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é válida a identidade*

$$(H(f))^2 = f^2 + 2H(fH(f)).$$

Teorema 4.1.5. *Seja $1 < p < \infty$. A transformada de Hilbert satisfaz a seguinte estimativa L^p*

$$\|Hf\|_{L^p} \leq 2\max\{p, p(p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{4.1.20}$$

Consequentemente, H se estende continuamente a todo L^p.

Demonstração. Provaremos primeiro a limitação de H em $L^p(\mathbb{R})$ para $p = 2^k$, com $k = 1, 2, \ldots$, por indução em k. Uma vez que transformada de Hilbert é limitada de L^2 em L^2, fica já provada o caso em que $k = 1$. Neste caso, a norma $\|H\|_{L^2 \to L2} = 1$, uma vez que

$$\|Hf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Suponha que para algum $p = 2^k$, com inteiro $k > 0$, exista $C_p > 0$ tal que

$$\|Hf\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p},$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Provemos que H é limitada em L^{2p}. Tome $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ uma função real não nula. Então, usando o Lema 4.1.4, a hipótese de indução sobre H e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{L^{2p}} = \|(Hf)^2\|_{L^p}^{1/2} &= \|f^2 + 2H(fH(f))\|_{L^p}^{1/2} \\
&\leq (\|f^2\|_{L^p} + 2\|H(fH(f))\|_{L^p})^{1/2} \\
&\leq (\|f\|_{L^{2p}}^2 + 2C_p\|fH(f)\|_{L^p})^{1/2} \\
&\leq (\|f\|_{L^{2p}}^2 + 2C_p\|f\|_{L^{2p}}\|Hf\|_{L^{2p}})^{1/2}.
\end{aligned}$$

Obtemos então a seguinte estimativa

$$\|Hf\|_{L^{2p}}^2 \leq \|f\|_{L^{2p}}^2 + 2C_p\|f\|_{L^{2p}}\|Hf\|_{L^{2p}}.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por $\|f\|_{L^{2p}}^2 \neq 0$ e supondo que $\|Hf\|_{L^{2p}} < \infty$, temos que

$$\left(\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}}\right)^2 - 2C_p\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}} - 1 \leq 0,$$

o que implica em

$$\left(\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}}\right)^2 - 2C_p\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}} + C_p^2 \leq 1 + C_p^2.$$

A expressão do lado esquerdo da desigualdade acima é um quadrado perfeito e portanto

$$\frac{\|Hf\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{L^{2p}}} \leq C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}.$$

Isso mostra que H é limitada de L^{2p} em L^{2p} com norma no máximo C_{2p} e

$$C_{2p} \leq C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}. \tag{4.1.21}$$

Assim concluímos que H é limitada em $L^p(\mathbb{R})$ para $p = 2^k$, com $k = 1, 2, \ldots$

No que segue, a limitações que temos para H até agora são

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}, \quad f \in L^2 \\ \|Hf\|_{L^{p_0}} &= \|f\|_{L^{p_0}}, \quad f \in L^{p_0}, \end{aligned}$$

para $p_0 = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Pelo por interpolação (Teorema 1.2.2), temos que, para todo $p \geq 2$, H é limitada de L^p em L^p. Como $p \geq 2$, seu expoente conjugado p' é tal que $1 < p' \leq 2$. O adjunto H^* de H é igual a $-H$. Logo, por dualidade $H^* = -H$ é limitada de $L^{p'}$ em $L^{p'}$ e portanto, para todo $1 < p < \infty$, fica provado que H é limitada em L^p.

Analisemos a norma de H. Para tal, considere a seguinte identidade

$$\cot \frac{x}{2} = \cot x + \sqrt{1 + \cot^2(x)}, \tag{4.1.22}$$

que é válida para todo $0 < x \leq \pi/2$. Afirmamos que para todo $p = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ vale que

$$C_p \leq \cot \frac{\pi}{2p}.$$

Provaremos por indução em k. Para $k = 1$, temos que $\|H\|_{L^2 \to L^2} = 1 = \cot(\pi/4)$, o que implica em

$$C_2 = \cot \frac{\pi}{2 \cdot 2}.$$

Suponha agora que

$$C_p \leq \cot \frac{\pi}{2p},$$

para algum $p = 2^k$. Como $C_{2p} \leq C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}$, usamos a hipótese de indução e a identidade (4.1.22) para obter

$$C_{2p} \leq \cot \frac{\pi}{2p} + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\pi}{2p}} = \cot \frac{\pi}{2 \cdot 2p}.$$

Logo, fica provado que

$$\|H\|_{L^p \to L^p} \leq \cot \frac{\pi}{2p},$$

para todo $p = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Por dualidade, segue que

$$\|H\|_{L^{p'} \to L^{p'}} = \|H^*\|_{L^{p'} \to L^{p'}} = \|H\|_{L^p \to L^p} \leq \cot \frac{\pi}{2p}.$$

Como $\cot \pi/(2p) = \tan(\pi/(2p'))$,

$$\|H\|_{L^{p'} \to L^{p'}} \leq \tan \frac{\pi}{2p'},$$

com $p' = \frac{2^k}{2^k-1}$ sendo o expoente conjugado de p. Obteremos agora um controle para a norma de H, para todo $1 < p < \infty$. A seguir, provaremos que

$$\|H\|_{L^p \to L^p} \leq 2p, \tag{4.1.23}$$

para todo $p \geq 2$. Primeiro, note que $\cot(\pi/2p) \leq p$, para todo $p \geq 2$. Para p como sendo potências de 2, (4.1.23) é válida. Seja $2 < p < \infty$ e suponha que p não seja potência de 2. Considere um inteiro $k \geq 0$ tal que $2^k \leq p \leq 2^{k+1}$. Sabemos que H é limitada em L^{2^k} e em $L^{2^{k+1}}$ com normas

$$\|H\|_{L^{2^k} \to L^{2^k}} \leq 2^k$$
$$\|H\|_{L^{2^{k+1}} \to L^{2^{k+1}}} \leq 2^{k+1}.$$

Pelo Teorema 1.2.2, H é limitada em L^p, com $2^k \leq p \leq 2^{k+1}$, e norma

$$\begin{aligned}
\|H\|_{L^p \to L^p} &\leq (2^k)^{1-\theta} 2^{(k+1)\theta} \\
&= 2^\theta 2^k \\
&\leq 2p.
\end{aligned}$$

Por dualidade, para $2 \leq p < \infty$, e portanto $1 < p' \leq 2$,

$$\|H\|_{L^{p'} \to L^{p'}} \leq 2p = 2\frac{p'}{p'-1}.$$

Finalmente, a estimativa (4.1.20) é facilmente obtida com as estimativas acima. □

Fica evidente pelo teorema anterior que a norma de H satisfaz

$$\|H\|_{L^p \to L^p} \leq 2 \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{se } 1 < p \leq 2 \\ p, & \text{se } p \geq 2. \end{cases} \tag{4.1.24}$$

Discutiremos agora sobre a transformada maximal de Hilbert $H^{(*)}$ definida em (4.1.6). Por um lado, a transformada de Hilbert é definida como sendo o limite pontual de suas transformadas truncadas $H^{(\varepsilon)}$. Por outro lado, definimos a transformada de Hilbert maximal como sendo o supremo das transformadas truncadas. Provaremos a seguir que $H^{(*)}$ é limitada em L^p, para $1 < p < \infty$.

Teorema 4.1.6. *Seja $1 < p < \infty$. A transformada de Hilbert maximal $H^{(*)}$ é limitada de $L^p(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$ e satisfaz*

$$\|H^{(*)} f\|_{L^p} \leq C \max\{p, (p-1)^{-2}\} \|f\|_{L^p}, \quad \textit{para toda } f \in L^p, \tag{4.1.25}$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Consideremos o núcleo de Poisson P_ε e seu conjugado harmônico Q_ε, dados por $P_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$ e $Q_\varepsilon(x) = \frac{x}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Fixado $1 < p < \infty$, suponhamos inicialmente que para toda função f de L^p

$$f * Q_\varepsilon = Hf * P_\varepsilon, \ \ \varepsilon > 0. \tag{4.1.26}$$

Escreva

$$H^{(\varepsilon)} f = H^{(\varepsilon)} f - f * Q_\varepsilon + Hf * P_\varepsilon \tag{4.1.27}$$

Defina uma função ψ como em (4.1.16) na demonstração do Teorema 4.1.2:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}, & \text{se } |t| \geq 1 \\ \frac{t}{t^2+1}, & \text{se } |t| < 1, \end{cases} \tag{4.1.28}$$

Considere a função integrável Ψ radialmente decrescente

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1}, & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1, & \text{se } |t| < 1, \end{cases} \tag{4.1.29}$$

definida da mesma forma que foi definida em (4.1.18) e que controla pontualmente a função ψ. Recorde também da identidade (4.1.17) obtida no Teorema 4.1.2:

$$\frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x) = Q_\varepsilon * f(x) - H^{(\varepsilon)} f(x).$$

Pelo Corolário 2.1.12, temos que a função maximal $\sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi}|f * \psi_\varepsilon|$ é controlada pontualmente pela função maximal de Hardy-Littlewood de f

$$\sup_{\varepsilon>0} |H^{(\varepsilon)} f(x) - Q_\varepsilon * f(x)| = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi}|f * \psi_\varepsilon| \leq \frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1} \mathcal{M} f(x). \tag{4.1.30}$$

Por outro lado, sendo $P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} P(\varepsilon^{-1} x)$, com $P(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ uma função integrável, com integral igual a 1, radial decrescente, podemos aplicar novamente o Corolário 2.1.12 para obter o controle da função maximal $\sup_{\varepsilon>0} |Hf * P_\varepsilon|$ pela função maximal de Hardy-Littlewood de Hf:

$$\sup_{\varepsilon>0} |Hf * P_\varepsilon(x)| \leq \|P\|_{L^1} \mathcal{M}(Hf)(x) = \mathcal{M}(Hf)(x). \tag{4.1.31}$$

Pelas estimativas (4.1.30) e (4.1.31) temos que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |H^{(\varepsilon)} f| &= |H^{(\varepsilon)} f - f * Q_\varepsilon + Hf * P_\varepsilon| \\ &\leq \sup_{\varepsilon>0} |H^{(\varepsilon)} f(x) - Q_\varepsilon * f| + \sup_{\varepsilon>0} |Hf * P_\varepsilon| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1} \mathcal{M} f + \mathcal{M}(Hf) \end{aligned}$$

Logo, tomando o supremo em ε do lado esquerdo obtemos

$$|H^{(*)}f| \leq \frac{1}{\pi}\|\Psi\|_{L^1}\mathcal{M}f + \mathcal{M}(Hf). \tag{4.1.32}$$

A desigualdade acima e o fato de $\mathcal{M}$ e H serem limitada em L^p nos dá a limitação L^p da transformada de Hilbert maximal $H^{(*)}$. Note que para provar a limitação em L^p de $H^{(*)}$ foi necessário supor a igualdade (4.1.26). Provaremos agora (4.1.26) e em seguida a estimativa para a norma $\|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p}$.

Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R})$ considere uma sequência de funções Scwhartz ϕ_j tal que $\phi_j \to f$ em L^p. Por continuidade da transformada de Hilbert em L^p, temos que $H\phi_j \to Hf$ em L^p. Uma vez que as funções P_ε e Q_ε são funções de $L^{p'}$ (como discutido na seção 4.1.2), temos pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{gathered}
|\phi_k * Q_\varepsilon(x) - f * Q_\varepsilon(x)| \leq \|Q_\varepsilon\|_{L^{p'}}\|\phi_k - f\|_{L^p} \longrightarrow 0 \\
|(H\phi_k) * Q_\varepsilon(x) - (Hf) * Q_\varepsilon(x)| \leq \|Q_\varepsilon\|_{L^{p'}}\|H\phi_k - Hf\|_{L^p} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty.
\end{gathered}$$

Logo, é suficiente provar (4.1.26) para funções em $\mathcal{S}$. Para tal, vamos provar a seguinte identidade:

$$(-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|})^\vee(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+1} = Q(x). \tag{4.1.33}$$

É um fato que $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$. Suponha que provamos (4.1.33) e seja $f \in \mathcal{S}$. Tome transformada de Hilbert em ambos os lados de (4.1.33) para obter $-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{P}(\xi) = \widehat{Q}(\xi)$, o que implica que $-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{P_\varepsilon}(\xi) = \widehat{Q_\varepsilon}(\xi)$. Multiplicando ambos os lados por $\widehat{f}(\xi)$, temos $\widehat{Hf}(\xi)\widehat{P_\varepsilon}(\xi) = \widehat{Q_\varepsilon}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, donde obtemos a igualdade $f * Q_\varepsilon = Hf * P_\varepsilon$. Voltemos agora a prova de (4.1.33). Usando o fato da função $\mathrm{sgn}(\xi)\cos(\xi)$ ter integral zero sobre intervalos simétricos e integrando por parte duas vezes,

$$\begin{aligned}
(-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|})^\vee(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|\xi|}(-i\mathrm{sgn}(\xi))e^{2\pi i x\xi}d\xi \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-2\pi|\xi|}\mathrm{sgn}(\xi)\sin(2\pi x\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi}\sin(x\xi)d\xi \\
&= \frac{x}{\pi} - \frac{x^2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi}\sin(x\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Estas duas últimas igualdades nos dá

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi}\sin(x\xi)d\xi = \frac{x}{\pi(x^2+1)}.$$

e portanto, $(-i\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|})^\vee(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$.

Vamos estimar agora norma $\|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p}$. Recorde, do Teorema 2.1.5 que o operador maximal $\mathcal{M}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R})$ com norma

$$\|\mathcal{M}\|_{L^p\to L^p} \leq 3^{1/p}\frac{p}{p-1}.$$

Recorde também do Teorema 4.1.5 que a transformada de Hilbert é limitada em L^p com norma

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leq \max\left\{2p, \frac{2p}{p-1}\right\}, \quad 1<p<\infty.$$

Note que a constante que limita a norma de H é maior ou igual a 1, pois quando $1<p\leq 2$, temos $1<2p<2p(p-1)^{-1}$. Quando $2\leq p<\infty$, temos $2p(p-1)^{-1}<2p$ e $2p>1$. Assim, calculando a norma L^p em (4.1.32), obtemos

$$\begin{aligned}\|H^{(*)}f\|_{L^p} &\leq \left(\pi^{-1}\|\Psi\|_{L^1}\|\mathcal{M}\|_{L^p\to L^p} + \|\mathcal{M}\|_{L^p\to L^p}\|H\|_{L^p\to L^p}\right)\|f\|_{L^p} \\ &\leq 2C\|\mathcal{M}\|_{L^p\to L^p}\|H\|_{L^p\to L^p}\|f\|_{L^p} \\ &\leq 6C\frac{p}{p-1}\max\{2p, 2p(p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p} \\ &= C'\frac{p}{p-1}\max\{2p, 2p(p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

Em que a constante $C=\max\{\pi^{-1}\|\Psi\|_{L^1}, 1\}$ e $C'=6C$. O caso em que $2\leq p<\infty$, temos $p(p-1)^{-1}=1+(p-1)^{-1}\leq 2$. Como observado anteriormente $2p(p-1)^{-1}<2p$. Assim,

$$\begin{aligned}\|H^{(*)}f\|_{L^p} &\leq C'\frac{p}{p-1}2p\|f\|_{L^p} \\ &\leq 4C'p\|f\|_{L^p}\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $1<p\leq 2$, vimos que $1<2p<2p(p-1)^{-1}$ e portanto

$$\begin{aligned}\|H^{(*)}f\|_{L^p} &\leq C'\frac{p}{p-1}\frac{2p}{p-1}\|f\|_{L^p} \\ &\leq 8C'\frac{1}{(p-1)^2}\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\|H^{(*)}\|_{L^p\to L^p} \leq C\max\{p, (p-1)^{-2}\}.$$

□

4.2 A Transformada de Riesz

Vimos na seção anterior algumas propriedades da transformada de Hilbert, em particular que H (como $H^{(*)}$) é um operador linear limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1<p<\infty$. A transformada de Riesz R_j, para $j=1,\dots,n$, por sua vez é um operador em $\mathbb{R}^n$ que generaliza a transformada de Hilbert. Sua limitação em L^p será tratada com mais cuidado nas seções seguintes quando estudarmos integrais singulares homogêneas. Para definirmos as transformadas de Riesz, introduzimos para cada $j = 1, \ldots, n$, para $n \geq 2$, a seguinte distribuição temperada W_j em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\langle W_j, \phi\rangle &= C_n \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\phi(y)dy \\ &= C_n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}}\phi(y)dy,\end{aligned}$$

em que $C_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, definimos transformada de Riesz R_j como sendo o operador dado pela convolução com W_j. Mais precisamente, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$R_j f(x) = f * W_j(x) \tag{4.2.1}$$

$$= C_n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy. \tag{4.2.2}$$

Podemos caracterizar a transformada de Riesz em termos de sua transformada de Fourier. De forma ao feito para a transformada de Hilbert, a transformada de Riesz pode ser vista como um operador associado a multiplicador. De fato, para toda função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale que

$$\widehat{R_j\phi}(\xi) = \frac{-i\xi_j}{|\xi|}\widehat{\phi}(\xi) \tag{4.2.3}$$

Para mais detalhes sobre esta caracterização, ver Proposição 5.1.14 e Lema 5.1.15 em [GFK1]. Observe que a função $\xi \mapsto \frac{-i\xi_j}{|\xi|}$ é uma função limitada. Logo, pelo Teorema 3.2.5 que caracteriza operadores de $\mathscr{M}^{2,2}$, temos que R_j é limitada em L^2. Por densidade de $\mathcal{S}$ em L^2 e pela identidade de Plancherel, segue que a identidade (4.2.3) se estende em todo $L^2(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se $f \in L^2$ e $f_k \in \mathcal{S}$ é uma sequência tal que $f_k \to f$ em L^2, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f_k}(\xi) - i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \|\widehat{f_k} - \widehat{f}\|_{L^2}^2 = \|f_k - f\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0.$$

E portanto,

$$\widehat{R_j f}(\xi) = \lim_{k\to\infty}\widehat{R_j f_k}(\xi) = \lim_{k\to\infty} -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f_k}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f_k}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi),$$

com o limite acima sendo em L^2.

Uma propriedade das transformadas de Riesz análoga a propriedade $-I = H^2$ da transformada de Hilbert H é a seguinte identidade

$$-I = \sum_{j=1}^{n} R_j^2, \tag{4.2.4}$$

válida em $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $f \in L^2$, então pela identidade (4.2.3)

$$\begin{aligned}\widehat{R_j^2 f}(\xi) &= \frac{-i\xi_j}{|\xi|}\widehat{R_j f}(\xi) \\ &= \left(\frac{-i\xi_j}{|\xi|}\right)^2 \widehat{f}(\xi) \\ &= -\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Logo, somando em j, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{R_j^2 f}(\xi) = -\widehat{f}(\xi).$$

Usando o fato de que a transformada de Fourier é uma isometria em L^2, segue a identidade (4.2.4).

4.3 Integrais Singulares Homogêneas e Maximais

As integrais singulares homogêneas T_Ω que veremos nesta seção são operadores integrais em $\mathbb{R}^n$ que generalizam as transformadas de Hilbert e de Riesz.

Dizemos que uma distribuição temperada u é homogênea de grau $\gamma \in \mathbb{C}$, quando para todo $\lambda > 0$ e toda função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, valer que

$$\langle u, \delta^\lambda \rangle = \lambda^{-n-\gamma}\langle u, \phi \rangle.$$

Uma função f é homogênea de grau γ quando

$$f(\lambda x) = \lambda^\gamma f(x), \quad \lambda > 0.$$

É fácil provar que uma função homogênea de grau γ é uma distribuição homogênea de grau γ, ou seja, a definição de homogeneidade para distribuições estende a noção de homogeneidade para funções. Além disso uma distribuição temperada u é homogênea de grau γ se, e somente se, $\widehat{u}$ for homogênea de grau $-n-\gamma$, isto é,

$$\langle u, \delta^\lambda \phi \rangle = \lambda^{-n-\gamma}\langle u, \phi \rangle \iff \langle \widehat{u}, \delta^\lambda \phi \rangle = \lambda^\gamma \langle \widehat{u}, \phi \rangle. \tag{4.3.1}$$

Considere uma função Ω de $\mathbb{R}^n$ que é integrável na esfera S^{n-1} com $\int_{S^{n-1}} \Omega = 0$. Considere a seguinte função

$$K_\Omega(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

É evidente que a função K_Ω é homogênea de ordem $-n$, isto é, $K_\Omega(\lambda x) = \lambda^{-n} K_\Omega(x)$, para todo $\lambda > 0$. Queremos definir agora uma distribuição temperada que coincida com K_Ω fora da origem. Para isto, associada a K_Ω, definimos a seguinte distribuição temperada W_Ω

$$\langle W_\Omega, \phi\rangle = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} K_\Omega(x)\phi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} K_\Omega(x)\phi(x)dx. \tag{4.3.2}$$

Dada qualquer função teste ϕ suportada em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, é fácil de ver que a ação de W_Ω em ϕ é a mesma que K_Ω em ϕ, mais precisamente

$$\langle W_\Omega, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} K_\Omega(x)\phi(x)dx,$$

consequentemente, W_Ω é uma distribuição temperada que coincide com K_Ω em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Nos referimos a W_Ω (ou K_Ω) como sendo o núcleo do operador T_Ω definido mais aiante. Às vezes se faz conveniente vermos o limite em (4.3.2) quando $\varepsilon\to 0$ no anel $1/\varepsilon \geq |x| \geq \varepsilon$ ou ainda, quando $\varepsilon\to 0$ e $N\to\infty$ no anel $N\geq |x|\geq\varepsilon$. O fato de K_Ω ser homogênea de grau $-n$ implica também que W_Ω é uma distribuição de grau $-n$. Neste caso,

$$\langle W_\Omega, \delta^\lambda\phi\rangle = \langle W_\Omega, \phi\rangle.$$

E portanto, $\widehat{W_\Omega}$ é uma distribuição homogênea de grau zero. Vamos verificar que de fato W_Ω é uma distribuição temperada. Pelo fato de Ω ter integral zero, temos que que K_Ω tem integral zero sobre anéis $a\leq |x|\leq b$ que não contêm a origem. Basta integrar por coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_{a\leq|x|\leq b} K_\Omega(x)dx &= \int_{a\leq|x|\leq b}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}dx\\ &= \int_a^b\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)d\sigma(\theta) = 0.\end{aligned}$$

Primeiro, provemos que o limite em (4.3.2) existe. Como K_Ω tem integral nula sobre anéis, podemos escrever

$$\langle W_\Omega, \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1\geq|x|\geq\varepsilon} K_\Omega(x)(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{|x|\geq 1} K_\Omega(x)\phi(x)dx. \tag{4.3.3}$$

Pela Teorema do Valor Médio,

$$|K_\Omega(x)(\phi(x)-\phi(0))|\chi_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \leq \frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}|\nabla\phi(\xi)||x| \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n-1}}.$$

A função do lado direito da desigualdade é integrável na bola $|x|\leq 1$, pois

$$\int_{|x|\leq 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n-1}} = \int_0^1\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(\theta)|}{r^{n-1}}d\sigma(\theta)r^{n-1}dr = \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, o limite em (4.3.3) existe e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1\geq|x|\geq\varepsilon} K_\Omega(x)(\phi(x)-\phi(0))dx = \int_{|x|\leq 1} K_\Omega(x)(\phi(x)-\phi(0))dx$$

O segundo termo do lado direito de (4.3.3) é uma integral absolutamente convergente, pois

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1}|K_\Omega(x)\phi(x)|dx &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x\phi(x)|\int_{|x|\geq 1}\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^{n+1}}dx\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x\phi(x)|\int_1^{+\infty}\int_{S^{n-1}}\frac{|\Omega(\theta)|}{r^2}d\sigma(\theta)dr\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x\phi(x)|\|\Omega\|_{L^1(\mathcal{S}^{n-1})}<\infty.\end{aligned}$$

Logo,

$$|\langle W_\Omega,\phi\rangle| \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty}\|\Omega\|_{L^1(\mathcal{S}^{n-1})} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x\phi(x)|\|\Omega\|_{L^1(\mathcal{S}^{n-1})},$$

e como a expressão do lado direito é uma soma de seminormas de ϕ em $\mathcal{S}$, temos que $W_\Omega \in \mathcal{S}'$.

Observação 4.3.1. *Se considerarmos a função* $\Omega(\theta) = \frac{\theta}{\pi|\theta|} = \frac{1}{\pi}\mathrm{sgn}(\theta)$, *com* $\theta \in S^0 = \{-1,1\}$, *temos que o* $K_\Omega(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x/|x|)}{\pi|x|} = \frac{1}{\pi x}$ *é justamente o núcleo da transformada de Hilbert. Analogamente, considerando*

$$\Omega_j(\theta) = C_n\theta_j,\quad \theta\in S^{n-1},$$

com $C_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)$, *obtemos* $K_{\Omega_j}(x) = C_n x_j|x|^{-n-1}$ *o núcleo da transformada de Riesz.*

Definição 4.3.2. *Considere* $1 \leq p < \infty$ *e* $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ *com integral zero em* S^{n-1}. *Dados* $0<\varepsilon<N$ *e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *definimos as integrais singulares truncados*

$$T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy. \tag{4.3.4}$$

Caso a função Ω *seja limitada, definimos*

$$T_\Omega^{(\varepsilon)}f(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy. \tag{4.3.5}$$

O operador integral singular (ou simplesmente integral singular) T_Ω *associado a* Ω *é definido como sendo o operador dado pela convolução com* W_Ω*:*

$$T_\Omega f = f * W_\Omega,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4.3.6}$$

É fácil ver que pela definição de W_Ω, T_Ω *é dada pelo limite*

$$T_\Omega f(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x).$$

A integral singular maximal associada a Ω é definida por

$$T_\Omega^{(**)}f = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f|. \tag{4.3.7}$$

Caso a função Ω seja limitada, definimos

$$T_\Omega^{(*)}f = \sup_{\varepsilon>0} |T_\Omega^{(\varepsilon)}f|. \tag{4.3.8}$$

Vejamos que as integrais singulares truncadas $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}$ estão bem definidas para toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, pela Desigualdade de Minkowski para integrais,

$$\begin{aligned}
\|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\varepsilon\le|y|\le N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right|^p dx\right)^{1/p} \\
&\le \int_{\varepsilon\le|y|\le N}\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dx\right)^{1/p} dy \\
&= \|f\|_{L^p}\int_\varepsilon^N\int_{S^{n-1}}\frac{\Omega(\theta)}{r}drd\sigma(\theta) \\
&= \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\log(N/\varepsilon)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f$ está bem definida como função de L^p, para toda função $f \in L^p$ e portanto, $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}$ é finita em quase toda parte. Provemos agora que quando Ω é limitada, as integrais truncadas $T_\Omega^{(\varepsilon)}f$ estão bem definidas. De fato, $T_\Omega^{(\varepsilon)}f$ são absolutamente convergentes para toda $f \in L^p$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon\le|y|}|f(x-y)|\frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}dy &\le \|\Omega\|_{L^\infty}\int_{|y|\ge\varepsilon}\frac{|f(x-y)|}{|y|^n}dy \\
&\le \|\Omega\|_{L^\infty}\begin{cases} \|f\|_{L^p}\int_{|y|\ge\varepsilon} y^{-np'}dy, & \text{se } 1<p<\infty, \\ \|f\|_{L^1}\varepsilon^{-n}, & \text{se } p=1. \end{cases}
\end{aligned}$$

O caso $1 < p < \infty$, temos $np' > n$ e portanto a integral $\int_{|y|\ge\varepsilon}|y|^{-np'}dy$ é convergente. O que prova que as integrais $T_\Omega^{(\varepsilon)}f$ são absolutamente convergente, quando Ω é limitada e portanto estão bem definidas e são finitas em quase toda parte.

Afirmamos que quando a função Ω é limitada, a integrais maximais $T_\Omega^{(*)}$ e $T_\Omega^{(**)}$ são comparáveis. Com efeito, como vimos anteriormente, as integrais

$$\int_{\varepsilon\le|y|} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy$$

são absolutamente convergentes. Sendo assim, podemos escrevê-las como

$$\int_{\varepsilon\le|y|} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy = \lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon\le|y|\le N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy.$$

Pela própria definição de $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}$, temos que

$$\left|\int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy\right| \leq \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x)|,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $N \to \infty$ do lado esquerdo e em seguida tomando o supremo em $\varepsilon > 0$ em ambos os lados, obtemos que

$$T_\Omega^{(*)}f \leq T_\Omega^{(**)}f.$$

Por outro lado, reescreva $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x) &= \int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy \\
&= \int_{\varepsilon\leq|y|} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy - \int_{|y|\geq N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy \\
&= T_\Omega^{(\varepsilon)}f(x) - T_\Omega^{(N)}f(x).
\end{aligned}$$

Logo, $|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f| \leq 2T_\Omega^{(*)}f$ e portanto

$$T_\Omega^{(**)}f \leq 2T_\Omega^{(*)}f.$$

Sendo assim, quando Ω for uma função limitada, podemos trabalhar com qualquer uma das integrais truncadas. No caso das transformadas de Hilbert e de Riesz, as funções Ω associadas é claramente limitada (vide Observação 4.3.1) e portanto, $H^{(*)} \simeq H^{(**)}$ e $R_j^{(*)} \simeq R_j^{(**)}$.

4.3.1 Limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Consideremos uma função Ω integrável em S^{n-1}, com $n \geq 2$, com integral zero em S^{n-1}. Considere também a seguinte função

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|} - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)\right)d\sigma(\theta). \tag{4.3.9}$$

Afirmamos que m está bem definida e é finita em quase toda parte. Primeiro, observe que a função m é homogênea de grau zero. De fato, basta notar que $\log\frac{1}{|(\lambda\xi)\cdot\theta|} = \log\frac{1}{\lambda} + \log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}$ e usar que Ω tem integral zero na esfera:

$$\int_{S^{n-1}} \log\frac{1}{|(\lambda\xi)\cdot\theta|}d\sigma(\theta) = \int_{S^{n-1}} \log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}\Omega(\theta)d\sigma(\theta).$$

Além disso, é claro que $\mathrm{sgn}((\lambda\xi)\cdot\theta) = \mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)$. Assim, fica fácil de ver que $m(\lambda\xi) = m(\xi)$. Veja que se $\xi' \in S^{n-1}$, então

$$|m(\xi')| \leq \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|\log\frac{1}{|\xi'\cdot\theta|}d\sigma(\theta) + \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.$$

A homogeneidade de m e a desigualdade acima indica que, para provar que m é finita em quase toda parte de $\mathbb{R}^n$, é suficiente provar que para quase todo $\xi' \in S^{n-1}$ vale que

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\xi' \cdot \theta|} d\sigma(\theta) < \infty. \tag{4.3.10}$$

Note que a função dentro da integral é positiva, já que $|\xi \cdot \theta| \leq |\xi||\theta| = 1$. Para provar (4.3.10), basta verificar então que a função

$$\xi' \longmapsto \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\xi' \cdot \theta|} d\sigma(\theta)$$

é integrável em S^{n-1} e

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \int_{S^{n-1}} \log \frac{1}{|\xi' \cdot \theta|} d\xi' d\sigma(\theta) \leq C_n \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}. \tag{4.3.11}$$

Veja a Observação 5.2.4 em [GFK1]) para mais detalhes.

O Teorema 4.3.4 a seguir nos dá que a transformada de Fourier dos núcleos W_Ω é exatamente a função m e portanto a limitação das integrais singulares T_Ω em L^2 está diretamente ligada com a limitação de m. Antes de enunciar e provar o Teorema 4.3.4, assumiremos o seguinte lema técnico:

Lema 4.3.3. *Seja $a \in \mathbb{R}$ não nulo. Para todo $0 < \varepsilon < N < \infty$, valem*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \frac{\cos(ra) - \cos(r)}{r} dr = \log \frac{1}{|a|} \tag{4.3.12}$$

$$\left| \int_\varepsilon^N \frac{\cos(ra) - \cos(r)}{r} dr \right| \leq 2 \left| \log \frac{1}{|a|} \right| \tag{4.3.13}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira} - \cos(r)}{r} dr = \log \frac{1}{|a|} - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a) \tag{4.3.14}$$

$$\left| \int_\varepsilon^N \frac{e^{-ira} - \cos(r)}{r} dr \right| \leq 2 \left| \log \frac{1}{|a|} \right| + 4. \tag{4.3.15}$$

Demonstração. Ver Lema 5.2.5 em [GFK1]. □

Teorema 4.3.4. *Sejam $n \geq 2$ e Ω uma função integrável em S^{n-1} com integral nula em S^{n-1}. A transformada de Fourier de W_Ω é dada por*

$$\widehat{W_\Omega}(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \left(\log \frac{1}{|\xi \cdot \theta|} - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi \cdot \theta) \right) d\sigma(\theta). \tag{4.3.16}$$

Demonstração. Para $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, escreva $\xi' = |\xi|^{-1}\xi \in \mathcal{S}^{n-1}$. Calculemos $\widehat{W_\Omega}$. Tome ϕ uma função na classe de Schwartz e vejamos o seguinte

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{W_\Omega}, \phi \rangle = \langle W_\Omega, \widehat{\phi} \rangle &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\varepsilon\le|x|\le N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\widehat{\phi}(x)dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\varepsilon\le|x|\le N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi)e^{-2\pi i\xi\cdot x}d\xi dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_{\varepsilon\le|x|\le N} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}e^{-2\pi i\xi\cdot x}dxd\xi.
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, o fato de Ω ter integral nula na esfera, o Teorema de Fubini e fazendo uma simples mudança de variável, a integral dentro do limite é igual a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_\varepsilon^N \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(\theta)}{r^n} e^{-2\pi i r\theta\cdot\xi} r^{n-1} d\sigma(\theta)drd\xi \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_\varepsilon^N \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(\theta)}{r} e^{-2\pi i r\theta\cdot\xi} d\sigma(\theta)drd\xi \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_\varepsilon^N \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(\theta)}{r} (e^{-2\pi i r\theta\cdot\xi} - \cos(2\pi r|\xi|)) d\sigma(\theta)drd\xi \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi i r|\xi|\theta\cdot\xi'} - \cos(2\pi r|\xi|)}{r} drd\sigma(\theta)d\xi \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} dsd\sigma(\theta)d\xi.
\end{aligned}$$

Observe que, pela estimativa (4.3.15) do Lema 4.3.3, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \phi(\xi) \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} dsd\sigma(\theta) \right| \\
&\qquad \le |\phi(\xi)| \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \left| \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} ds \right| d\sigma(\theta) \\
&\qquad \le |\phi(\xi)| \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \left(2\log\frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} + 4 \right) d\sigma(\theta) \\
&\qquad \le 2|\phi(\xi)| \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log\frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} d\sigma(\theta) + 2\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \right).
\end{aligned}$$

Afim de usar o Teorema da Convergência Dominada, afirmamos que é integrável em $\mathbb{R}^n$ a função

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto |\phi(\xi)| \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log\frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} d\sigma(\theta).$$

De fato, como $\phi \in \mathcal{S}$ e a estimativa (4.3.11) é válida, usando coordenas polares temos o seguinte

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(\xi)| \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} d\sigma(\theta) d\xi \\
&\quad \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1}|\phi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} d\sigma(\theta) d\xi \\
&\quad = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1}|\phi(x)| \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{n+1}} dr \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} d\sigma(\theta) d\xi' \\
&\quad \le C_n' \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1}|\phi(x)| < \infty.
\end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\langle \widehat{W_\Omega}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} ds d\sigma(\theta) d\xi.$$

Note que, pela estimativa (4.3.15) do Lema 4.3.3,

$$|\Omega(\theta)| \left| \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} ds \right| d\sigma(\theta) \le |\Omega(\theta)| \left(2\log \frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} + 4 \right),$$

e que a função do lado direito da desigualdade é integrável em S^{n-1}. Pelo Teorema da Convergência Dominada novamente e usando o limite (4.3.14) do Lema 4.3.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{W_\Omega}, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{2\pi|\xi|\varepsilon}^{2\pi|\xi|N} \frac{e^{-is\theta\cdot\xi'} - \cos(s)}{s} ds d\sigma(\theta) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \left(\log \frac{1}{|\theta\cdot\xi'|} - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\theta\cdot\xi') \right) d\sigma(\theta) d\xi,
\end{aligned}$$

o que implica imediatamente em (4.3.16). □

Uma consequência imediata do teorema anterior e do Teorema 3.2.5 é a caracterização da limitação $L^2(\mathbb{R}^n)$ das integrais singulares do tipo T_Ω.

Corolário 4.3.5. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.4, temos que a integral singular T_Ω é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, a função*

$$\xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \left(\log \frac{1}{|\xi\cdot\theta|} - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta) \right) d\sigma(\theta) \tag{4.3.17}$$

for uma função de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observação 4.3.6. *Vale observar que quando a função Ω for uma função ímpar, isto é, $\Omega(-\theta) = -\Omega(\theta)$, a função em (4.3.17) é sempre limitada. De fato, como a função $\theta \mapsto \log \frac{1}{|\xi\cdot\theta|}$ é uma função par, seu produto com Ω é uma função ímpar. Provemos que*

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\xi\cdot\theta|} d\sigma(\theta) = 0. \tag{4.3.18}$$

De fato, como a função $\Omega(x/|x|)\log\frac{1}{\xi\cdot(x/|x|)}$ é ímpar em $\mathbb{R}^n$, sua integral sobre anéis é nula e então

$$\begin{aligned}0 = \int_{a\le|x|\le b}\Omega(x/|x|)\log\frac{1}{|\xi\cdot x/|x||}dx &= \int_a^b\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)\log\frac{1}{\xi\cdot\theta}r^{n-1}d\sigma(\theta)dr\\ &= \frac{b^n-a^n}{n}\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}d\sigma(\theta).\end{aligned}$$

Então, necessariamente (4.3.18) é válida. No que segue, pela integrabilidade de Ω na esfera,

$$\begin{aligned}\left|\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)\right)d\sigma(\theta)\right| &= \left|\int_{S^{n-1}}\Omega(\theta)i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)d\sigma(\theta)\right|\\ &\le \int_{S^{n-1}}|\Omega(\theta)i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi\cdot\theta)|d\sigma(\theta)\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\theta)|d\sigma(\theta)\\ &= \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}<\infty\end{aligned}$$

e portanto, neste caso, a função em (4.3.17) é limitada. Assim, fica provado o seguinte corolário. O caso em que a função Ω é par será analisado com mais cuidado e veremos que para obter-se a limitação em L^2 de T_Ω é preciso de uma condição mais fort sobre Ω.

Corolário 4.3.7. *Se Ω é uma função ímpar, integrável em S^{n-1} e com integral nula, o operador integral singular T_Ω é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

4.3.2 Métodos de Rotação

Nesta seção provaremos que os operadores integrais singulares T_Ω e $T^{(**)}$ são limitados em $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando Ω é uma função ímpar.

Definição 4.3.8. *Sejam $\theta\in S^{n-1}$ e $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A transformada direcional de Hilbert (na direção θ) de f é dada por*

$$\mathscr{H}_\theta f(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t\theta)}{t}dt. \tag{4.3.19}$$

Para uma função $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ definimos as transformada direcional maximal de Hilbert como

$$\mathscr{H}_\theta^{(**)}f(x) = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f(x)|, \tag{4.3.20}$$

em que $\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}$ é a transformada direcional de Hilbert truncada

$$\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\le|t|\le N}\frac{f(x-t\theta)}{t}dt. \tag{4.3.21}$$

Provemos que o operador $\mathscr{H}_\theta$ está bem definido para toda função Schwartz f. De fato, reescreva $\mathscr{H}_\theta f(x)$ por

$$\mathscr{H}_\theta f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1\geq|t|\geq\varepsilon}\frac{f(x-t\theta)-f(x)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq 1}\frac{f(x-t\theta)}{t}dt, \tag{4.3.22}$$

o que é possível, pois a integral de $1/t$ sobre os intervalos simétricos $\varepsilon \leq |t| \leq 1$ é zero. Para ver que o limite acima exite, basta dominar a função dentro da integral pela função característica do intervalo $[-1,1]$ utilizando o teorema do valor médio e usar o fato de f ser Schwartz

$$\chi_{\varepsilon\leq|t|\leq 1}(t)\left|\frac{f(x-t\theta)-f(x)}{t}\right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty}\chi_{|t|\leq 1}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, o limite em (4.3.22) existe e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1\geq|t|\geq\varepsilon}\frac{f(x-t\theta)-f(x)}{t}dt = \int_{|t|\leq 1}\frac{f(x-t\theta)-f(x)}{t}dt.$$

O segundo termo do lado direito de (4.3.22) é absolutamente convergente, pois

$$\begin{aligned}\int_{|t|\geq 1}\left|\frac{f(x-t\theta)}{t}\right| &\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|)^2|f(y)|\int_{|t|\geq 1}(1+|x-t\theta|)^{-2}dt\\ &\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|)^2|f(y)|\int_{|t|\geq 1}(1+|x-t\theta|)^{-2}dt\\ &\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^n}(1+|y|)^2|f(y)|\int_{|t|\geq 1}(1+|x|)^2(1+|t|)^{-2}dt < \infty,\end{aligned}$$

em que na última linha foi usada a desigualdade $(1+|x-y|)^{-N} \leq (1+|y|)^N(1+|x|)^{-N}$.

Para provar que $\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}$ está bem definida para toda função $f \in L^p$, com $1 \leq p < \infty$, basta usar a desigualdade de Minkowski para integrais e obter a seguinte estimativa

$$\|\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f\|_{L^p} \leq \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{N}{\varepsilon}\right)\|f\|_{L^p}.$$

O que prova portanto que $\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f$ é finita em quase toda parte e consequentemente $\mathscr{H}_\theta^{(**)}f$ está também bem definida.

Teorema 4.3.9. *Sejam $1 < p < \infty$ e $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ uma função ímpar com integral nula em S^{n-1}. Então os operadores T_Ω e $T_\Omega^{(**)}$ são limitados de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com normas*

$$\|T_\Omega\|_{L^p\to L^p} \leq a\|\Omega\|_{L^1}\begin{cases}(p-1)^{-1}, & se\ 1 < p \leq 2\\ p, & se\ p \geq 2.\end{cases}, \tag{4.3.23}$$

$$\|T_\Omega^{(**)}\|_{L^p\to L^p} \leq a\|\Omega\|_{L^1}\begin{cases}(p-1)^{-2}, & se\ 1 < p \leq 2\\ p, & se\ p \geq 2.\end{cases}, \tag{4.3.24}$$

para alguma constante $a > 0$ que independe da dimensão n e de p.

Demonstração. Considere $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{S}^{n-1}$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (s, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Observe que

$$\mathscr{H}_{e_1} f(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - te_1)}{t} dt = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s - t, x')}{t} dt = H(f(\cdot, x'))(s), \qquad (4.3.25)$$

em que H é a transformada de Hilbert. Como H é limitada em $L^p(\mathbb{R})$, temos que $\mathscr{H}_{e_1}$ também a é, pois pelo Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_{e_1} f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{H}_{e_1} f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |H(f(\cdot, x'))(s)|^p ds dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|H(f(\cdot, x'))\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&\le \|H\|_{L^p \to L^p}^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|f(\cdot, x')\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&= \|H\|_{L^p \to L^p}^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathscr{H}_{e_1}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|\mathscr{H}_{e_1}\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|H\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})}$.

Observe que dada uma matriz ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$, vale que

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{e_1}(f \circ A)(A^{-1}x) &= \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f \circ A(A^{-1}x - te_1)}{t} \\
&= \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x - tAe_1)}{t} \\
&= \mathscr{H}_{Ae_1} f(x)
\end{aligned}$$

e portanto obtemos a identidade

$$\mathscr{H}_{Ae_1} f(x) = \mathscr{H}_{e_1}(f \circ A)(A^{-1}x). \qquad (4.3.26)$$

Em vista desta identidade e do fato de que para todo $\theta \in \mathcal{S}^{n-1}$, existe uma matriz ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$ tal que $Ae_1 = \theta$, vale que $\mathscr{H}_\theta$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Basta observar que, como $\mathscr{H}_{e_1}$ é limitada em L^p,

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_\theta f\|_{L^p} &= \mathscr{H}_{e_1} f \circ A(A^{-1}x) \\
&\le \|\mathscr{H}_{e_1}\|_{L^p \to L^p} \|f \circ A\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \|H\|_{L^p \to L^p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Agora, de forma análoga, podemos provar as identidade (4.3.25) e (4.3.26) para $\mathscr{H}_{e_1}^{(\varepsilon,N)}$ e consequentemente obter as mesmas identidade para $\mathscr{H}_{e_1}^{(**)}$, ou seja

$$\mathscr{H}_{Ae_1}^{(**)} f(x) = \mathscr{H}_{e_1}^{(**)} f \circ A(A^{-1}x), \tag{4.3.27}$$

$$\mathscr{H}_{e_1}^{(**)} f(x) = H^{(**)}(f(\cdot, x'))(s). \tag{4.3.28}$$

Uma vez que $H^{(*)}$ e $H^{(**)}$ são comparáveis com $H^{(**)}f \leq 2H^{(*)}f$ e $H^{(*)}$ é limitada em L^p (Teorema 4.1.25), obtemos a limitação em L^p de $\mathscr{H}_{e_1}^{(**)}$ como segue

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_{e_1}^{(**)} f\|_{L^p}^p &= \int_{R^n} |\mathscr{H}_{e_1}^{(**)} f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |H^{(**)}(f(\cdot, x'))(s)|^p ds dx' \\
&\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|H^{(*)}(f(\cdot, x'))\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&\leq 2^p \|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p}^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|f(\cdot, x')\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&= 2^p \|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p}^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,
\end{aligned}$$

e então

$$\|\mathscr{H}_{e_1}^{(**)}\|_{L^p \to L^p} \leq 2\|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p}.$$

É por esta limitação e pela identidade (4.3.27) que conseguimos então a limitação de $\mathscr{H}_{\theta}^{(**)}$ em L^p para todo θ. Este fato prova-se de forma análoga à limitação de $\mathscr{H}_{\theta}$ e além disso, vale

$$\|\mathscr{H}_{\theta}^{(**)}\|_{L^p \to L^p} \leq 2\|H^{(*)}\|_{L^p \to L^p} \tag{4.3.29}$$

Tome uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como Ω é uma função ímpar, temos o seguinte

$$T_{\Omega}^{(\varepsilon,N)} f(x) = \int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y) dy = -\int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x+y) dy,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
T_{\Omega}^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} [f(x-y) - f(x+y)] dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\Omega(\theta)}{r^n} [f(x-r\theta) - f(x+r\theta)] r^{n-1} dr d\sigma(\theta) \\
&= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \int_{\varepsilon}^{N} \frac{f(x-r\theta) - f(x+r\theta)}{r} dr d\sigma(\theta).
\end{aligned}$$

Por uma simples mudança de variável, podemos reescrever a transformada direcional truncada como

$$\mathscr{H}_{\theta}^{(\varepsilon,N)} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{N} \frac{f(x-r\theta) - f(x+r\theta)}{r} dr,$$

o que nos permite escrever a integral singular truncada $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}$ em termos de $\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,\theta)}$

$$T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f(x)d\sigma(\theta). \tag{4.3.30}$$

Sendo assim, passando o módulo em ambos os lados de (4.3.30), obtemos

$$\begin{aligned} |T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x)| &\leq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)||\mathscr{H}_\theta^{(\varepsilon,N)}f(x)|d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|\mathscr{H}_\theta^{(**)}f(x)d\sigma(\theta), \end{aligned}$$

que é válida para todo $0<\varepsilon<N<\infty$. Portanto, tomando o supremo do lado esquerdo,

$$|T_\Omega^{(**)}f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)|\mathscr{H}_\theta^{(**)}f(x)d\sigma(\theta). \tag{4.3.31}$$

Em (4.3.30), fazendo $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos que

$$T_\Omega f(x) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\mathscr{H}_\theta f(x)d\sigma(\theta). \tag{4.3.32}$$

Por fim, mostraremos que (4.3.31) e (4.3.32) implicam na limitação L^p de $T_\Omega^{(**)}$ e T_Ω respectivamente. De fato, pela desigualdade de Minkowski para integrais e usando a limitação L^p de $\mathscr{H}_\theta$, temos

$$\begin{aligned} \|T_\Omega f\|_{L^p} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta)\mathscr{H}_\theta f(x)d\sigma(\theta)\right|^p dx\right]^{1/p} \\ &\leq \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\theta)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{H}_\theta f(x)|^p dx\right)^{1/p} d\sigma(\theta) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\theta)|\|\mathscr{H}_\theta f\|_{L^p}d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\|H\|_{L^p\to L^p}\|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Portanto, T_Ω é limitada em L^p com norma

$$\|T_\Omega\|_{L^p\to L^p} \leq \frac{\pi}{2}\|\Omega\|_{L^1(\mathcal{S}^{n-1})}\|H\|_{L^p\to L^p}. \tag{4.3.33}$$

De forma similar, usando a desigualdade de Minkowski para integrais e o fato de $\mathscr{H}_\theta^{(**)}$ ser limitada em L^p, prova-se que $T_\Omega^{(**)}$ é limitada em L^p com norma

$$\|T_\Omega^{(**)}\|_{L^p\to L^p} \leq \pi\|\Omega\|_{L^1(\mathcal{S}^n-1)}\|H^{(*)}\|_{L^p\to L^p}. \tag{4.3.34}$$

As estimativas (4.3.23) e (4.3.24) são obtidas facilmente por (4.3.33), (4.3.34), (4.1.20) e (4.1.25). □

Observação 4.3.10. *O teorema anterior pode ser encontrado em [GFK1] no Teorema 5.2.7 e o controle das normas* (4.3.23) *e* (4.3.24) *encontra-se na Observação 5.2.9 também em [GFK1]. Ao decorrer deste trabalho foi observado um pequeno erro na norma da integral maximal no que é apresentado em [GFK1]. De fato, na Observação 5.2.9 em [GFK1], as normas $L^p \to L^p$ dos operadores T_Ω e $T_\Omega^{(**)}$ são controladas por $(p-1)^{-1}$, caso $1 < p \leq 2$, e por p, caso $2 \geq p$. E em vista do controle que se tem para as normas da transformada de Hilbert em* (4.1.20) *e da maximal de Hilbert em* (4.1.25)*, fica claro que as normas de T_Ω e $T_\Omega^{(**)}$ são controladas por constantes diferentes, como obtido em 4.3.9. Este pequeno detalhe observado no livro do Grafakos [GFK1] foi necessário para rever a norma $L^p \to L^p$ da integral singular maximal $T_\Omega^{(**)}$, para o caso em que Ω é uma função par. De fato, a limitação L^p de integrais singulares associadas a Ω ímpar é um fato fundamental para que possamos obter a limitação L^p de $T_\Omega^{(**)}$ associada a Ω par.*

Como consequência do teorema que acabamos de provar temos de imediato que as transformada de Riesz R_j e sua transformada maximal $R_j^{(*)}$, com $j = 1, \ldots, n$ e $n \geq 2$, são limitadas em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p < \infty$. Basta recordar que, se definirmos para cada j, as funções

$$\Omega_j'(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}\theta_j, \quad \theta \in S^{n-1},$$

então R_j é dada pela convolução com $W_{\Omega_j'}$. Note que além de Ω_j' satisfazer as hipóteses do Teorema 4.3.9, ela também é limitada. Neste caso, as transformadas maximais de Riesz $R_j^{(*)}$ e $R_j^{(**)}$ são comparáveis, e portanto obtemos também a limitação L^p de $R_j^{(*)}$. Fica então provado o seguinte corolário.

Corolário 4.3.11. *Para cada $j = 1 \ldots, n$, a transformada de Riesz R_j e a transformada de Riesz maximal $R_j^{(*)}$ são limitadas em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, com*

$$\|R_j\|_{L^p \to L^p} \leq b\|\Omega_j'\|_{L^1} \begin{cases} (p-1)^{-1}, & se\ 1 < p \leq 2 \\ p, & se\ p \geq 2. \end{cases}, \tag{4.3.35}$$

$$\|R_j^{(*)}\|_{L^p \to L^p} \leq b\|\Omega_j'\|_{L^1} \begin{cases} (p-1)^{-2}, & se\ 1 < p \leq 2 \\ p, & se\ p \geq 2. \end{cases}, \tag{4.3.36}$$

para alguma constante $b > 0$.

4.3.3 Integrais Singulares Homogêneas com Núcleos Pares

Toda função pode ser decomposta como a soma de uma função par com uma ímpar. Em particular, dada uma função $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ com integral nula em S^{n-1}, podemos escrever

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2,$$

em que Ω_1 é uma função par e Ω_2 ímpar. Logo, se T_Ω é a integral singular associada a Ω,

$$T_\Omega = T_{\Omega_1} + T_{\Omega_2}.$$

Como Ω_2 é ímpar, T_{Ω_2} é limitada em L^2 e portanto, para que T_Ω seja limitada em L^2, é suficiente buscar condições obter a limitação L^2 de integrais singulares T_Ω associadas a uma função par Ω. O fato é que exigir somente que Ω seja par não garante que T_Ω seja limitada em L^2. É por este motivo que precisamos impor a seguinte condição de integrabilidade sobre Ω. Uma condição que é suficiente assumir sobre Ω, para quando Ω é par, é a integrabilidade de $|\Omega|^q$ em S^{n-1}, para $q > 1$ (Veja Corolário 4.5 de [DKT]). Porém, uma condição mais fraca do que $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, $q > 1$, é a seguinte condição $L \log L$

$$c_\Omega = \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^+ |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) < \infty, \tag{4.3.37}$$

e esta é a melhor condição que se pode assumir sobre Ω, quando Ω é uma função par. Este fato foi provado por A.P. Calderón e A. Zygmund provaram em [CZ01].

Afirmamos que independente da paridade de Ω, a condição (4.3.37) é suficiente para a limitação $L^2(\mathbb{R}^n)$ de T_Ω. Provaremos então que (4.3.37) é uma condição mais forte do que pedir que a transformada de Fourier W_Ω seja uma função limitada. De fato, precisamos provar que a função dada em (4.3.17) é uma função limitada. Uma vez que Ω é integrável na esfera e tem integral nula, é suficiente limitarmos uniformemente em $\xi' \in S^{n-1}$ a integral

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|} d\sigma(\theta).$$

Para provar essa limitação, vamos usar os seguintes fatos

$$AB \leq A \log A + e^B, \quad \text{para todo } A \geq 1 \text{ e } B > 0; \tag{4.3.38}$$

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{|\xi \cdot \theta|^\alpha} d\sigma(\theta) = C_{n,\alpha} \frac{1}{|\xi|^\alpha}, \quad \text{para algum } C_{n,\alpha} \text{ e para } \mathrm{Re}(\alpha) < 1. \tag{4.3.39}$$

A primeira desigualdade prova-se facilmente usando elementos de Cálculo 1. O segundo fato pode ser encontrado no Apêndice D.3 em [GFK1]. Para $\xi' \in \mathcal{S}^{n-1}$, veja o seguinte

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|} d\sigma(\theta) \\
&= \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|} d\sigma(\theta) + \int_{\{|\Omega| \leq 1\}} |\Omega(\theta)| \log \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|} d\sigma(\theta) \\
&\leq 2 \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} |\Omega(\theta)| \log |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) + 2 \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|^{1/2}} d\sigma(\theta) + 2 \int_{S^{n-1}} \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|^{1/2}} d\sigma(\theta) \\
&\leq 2 \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^+ |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) + 4 \int_{S^{n-1}} \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|^{1/2}} d\sigma(\theta) \\
&= 4c_\Omega + C_n.
\end{aligned}$$

Logo, a função $\xi' \in S^{n-1} \mapsto \int_{S^{n-1}} \Omega(\theta) \log \frac{1}{|\theta \cdot \xi'|} d\sigma(\theta)$ é limitada e portanto, a função (4.3.17) é limitada. Pelo Corolário 4.3.5, temos que T_Ω é limitada de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Vejamos agora que a condição (4.3.37) sobre Ω é mais forte que a integrabilidade de Ω em S^{n-1} e

$$\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \leq C_n(c_\Omega + 1). \tag{4.3.40}$$

Com efeito, usando a desigualdade (4.3.38), temos que

$$\begin{aligned}
\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} &= \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) \\
&= \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) + \int_{\{|\Omega| \leq 1\}} |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) \\
&\leq \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} |\Omega(\theta)| \log |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) + \int_{\{|\Omega| \geq 1\}} e d\sigma(\theta) + \int_{\{|\Omega| \leq 1\}} e d\sigma(\theta) \\
&\leq \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^+ |\Omega(\theta)| d\sigma(\theta) + e\omega_{n-1} \\
&= c_\Omega + e\omega_{n-1} \\
&\leq C_n(c_\Omega + 1).
\end{aligned}$$

Sendo assim, para a função par $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ com integral nula em S^{n-1} e satisfazendo (4.3.37), temos que da integral singular T_Ω é limitada em L^2. Então, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $T_\Omega f$ está bem definida como função de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Agora, recorde de (4.2.4), que a transformada de Riesz satisfaz a seguinte identidade em L^2

$$-I = \sum_{j=1}^{n} R_j R_j. \tag{4.3.41}$$

Logo, em L^2, é válida a identidade

$$T_\Omega = -\sum_{j=1}^{n} R_j R_j T_\Omega. \tag{4.3.42}$$

Pelo Corolário 4.3.11, os operadores R_j são limitados em L^p. Se provarmos então que os operadores $R_j T_\Omega$ são integrais singulares da forma T_{Ω_j}, para alguma função ímpar $\Omega_j \in L^1(S^{n-1})$ com integral nula em $\mathcal{S}^{n-1}$, então $R_j T_{\Omega_j}$ será limitada em L^p e portanto, em vista da identidade (4.3.42), o operador T_Ω será limitado em L^p. Esta é a ideia por trás da demonstração do seguinte teorema.

Teorema 4.3.12. *Sejam $n \geq 2$ e Ω uma função par em $L^1(S^{n-1})$ com integral nula em S^{n-1}. Suponha que Ω satisfaz a condição (4.3.37). Então a integral singular T_Ω é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p < \infty$, com norma*

$$\|T_\Omega\|_{L^p \to L^p} \leq C_n \max\{p^2, (p-1)^{-2}\}(c_\Omega + 1), \tag{4.3.43}$$

para alguma constante dimensional $C_n > 0$.

Demonstração. Recorde da definição da distribuição temperada W_Ω

$$\langle W_\Omega, \phi\rangle = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

que coincide com a função $K_\Omega(x) = \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Como Ω é uma função par e a função sinal sgn é ímpar, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função $\theta \mapsto \Omega(\theta)\text{sgn}(\xi \cdot \theta)$ é uma função ímpar e portanto, sua integral sobre $\mathcal{S}^{n-1}$ é zero. Sendo assim, em vista do Teorema 4.3.4, temos que

$$\widehat{W_\Omega}(\xi) = \int_{\mathcal{S}^{n-1}} \Omega(\theta)\log\frac{1}{|\xi\cdot\theta|}d\sigma(\theta). \tag{4.3.44}$$

É evidente de (4.3.44) que $\widehat{W_\Omega}$ é uma função par. Pela discussão que precede o presente teorema, o operador T_Ω é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Defina, para cada $j = 1, \dots, n$, os operadores

$$T_j = R_j T_\Omega. \tag{4.3.45}$$

Afirmamos que T_j é dado pela convolução com $K_j = \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\right)^\vee$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}
\widehat{T_j f}(\xi) &= \widehat{R_j(T_\Omega f)}(\xi)\\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{T_\Omega f}(\xi)\\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega * f}(\xi)\\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\widehat{f}(\xi)\\
&= \left[\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\right)^\vee * f\right]^\wedge(\xi)\\
&= (K_j * f)^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

Como $\widehat{W_\Omega}(\xi)$ é uma função limitada, seu produto com a função limitada $-i\xi_j|\xi|^{-1}$ é também uma função limitada, logo $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$ é uma distribuição temperada. Então, sua transformada de Fourier inversa, que é K_j, está bem definida como distribuição temperada. É evidente então que $\widehat{K_j}(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$ é uma função ímpar.

Nosso primeiro objetivo aqui é provar que K_j coincide com uma função integrável num anel. Para tal, reescreva

$$W_\Omega = W_\Omega^0 + W_\Omega^1 + W_\Omega^\infty, \tag{4.3.46}$$

em que

$$\begin{aligned}\langle W_\Omega^0, \phi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|x|\le 1/2}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\phi(x)dx, \quad \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\\ W_\Omega^1(x) &= \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\chi_{\{1/2\le|x|\le 2\}}\\ \langle W_\Omega^\infty, \phi\rangle &= \int_{|x|\ge 2}\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\phi(x)dx, \quad \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

O fato de $\phi\in\mathcal{S}$ nos garante que o limite de W_Ω^0 existe e que a integral de W_Ω^∞ é absolutamente convergente. Além disso, provar que W_Ω^0 e W_Ω^∞ são distribuições temperadas é análogo a quando provamos que W_Ω é uma distribuição temperada. A função W_Ω^1 é claramente integrável e portanto pode ser interpretada como distribuição temperada. Sendo assim, podemos decompor K_j da seguinte forma

$$K_j = K_j^0 + K_j^1 + K_j^\infty,$$

em que

$$\begin{aligned}K_j^0 &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi)\right)^\vee\\ K_j^1 &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^1}(\xi)\right)^\vee\\ K_j^\infty &= \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^\infty}(\xi)\right)^\vee.\end{aligned}$$

Note que W_Ω^0 e W_Ω^1 são distribuições com suporte compacto e portanto, suas transformadas de Fourier são funções suaves que têm crescimento polinomial. Logo, como $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}$ é uma função limitada, as funções $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi)$ e $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^1}(\xi)$ são distribuição temperada e por isso K_j^0 e K_j^1 estão bem definidas. No caso de W_Ω^∞, temos

$$\widehat{W_\Omega^\infty} = \widehat{W_\Omega} - \widehat{W_\Omega^0} - \widehat{W_\Omega^1}.$$

Como $\widehat{W_\Omega^0}$ e $\widehat{W_\Omega^1}$ têm crescimento polinomial, existem constantes C_0, C_1 tais que $|\widehat{W_\Omega^l}(\xi)| \le C_l(1+|\xi|)^{k_l}$, $l = 0, 1$. Usando o fato de W_Ω ser limitada,

$$\begin{aligned}|\widehat{W_\Omega^\infty}(\xi)| &\le \|W_\Omega\|_{L^\infty} + C_0(1+|\xi|)^{k_0} + C_1(1+|\xi|)^{k_1}\\ &\le C(1+|\xi|)^k,\end{aligned}$$

em que $C = \max\{\|W_\Omega\|_{L^\infty}, C_0, C_1\}$ e $k = \max\{k_0, k_1\}$. Logo, a função $\widehat{W_\Omega^\infty}$ tem crescimento polinomial, o que garante que $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^\infty}(\xi)$ também o tem e portanto é uma distribuição temperada. Assim, K_Ω^∞ está bem definida como distribuição temperada.

Defina o anel $A = \{x\in\mathbb{R}^n : 2/3 \le |x| \le 3/2\}$ e considere $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty$ suportada em A.

Temos que

$$
\begin{aligned}
\langle K_j^0, \phi\rangle &= \left\langle \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi)\right)^\vee, \phi\right\rangle \\
&= \left\langle -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega^0}(\xi), \phi^\vee(\xi)\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{W_\Omega^0}(\xi), -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\phi^\vee(\xi)\right\rangle \\
&= \left\langle W_\Omega^0, \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\phi^\vee(\xi)\right)^\wedge\right\rangle \\
&= -\left\langle W_\Omega^0, \widetilde{R_j\phi}\right\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}R_j\phi(-y)dy \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}R_j\phi(y)dy.
\end{aligned}
$$

A última igualdade usamos o fato de Ω ser par. Note que para tal ϕ suportada em A, $R_j\phi$ não é um valor principal, pois para $|y|\le 1/2$ temos $|x-y|\ge 1/6$, para todo $x\in A$, e então

$$
\begin{aligned}
R_j\phi(y) &= C_n\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}\phi(x)dx \\
&= C_n\int_{2/3\le|x|\le 3/2}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}\phi(x)dx \\
&= C_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y_j-x_j}{|y-x|^{n+1}}\phi(x)dx
\end{aligned}
$$

No que segue, obtemos

$$
\langle K_j^0, \phi\rangle = C_n\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|y|\le 1/2}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\phi(x)dxdy.
$$

Usando o fato de a função $\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^{-n}}$ ter integral nula sobre anéis, usando o Teorema de Fubini, Teorema do Valor Médio para a função $x_j|x|^{-n-1}$ e o Teorema da Convergência Dominada, mostra-se que

$$
\langle K_j^0, \phi\rangle = C_n\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\int_{|y|\le 1/2}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\left(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}-\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)dydx. \tag{4.3.47}
$$

A igualdade (4.3.47) implica que K_j^0 coincide com uma função em A; neste caso

$$
K_j^0(x) = C_n\int_{|y|\le 1/2}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\left(\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}-\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right)dy,\quad x\in A. \tag{4.3.48}
$$

Usando o Teorema do Valor Médio, coordenadas polares e o fato de Ω ser integrável na esfera, verificamos que a função em (4.3.48) é limitada em A:

$$
\begin{aligned}
|K_j^0(x)| &\leq \int_{|y|\leq 1/2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right| dy \\
&\leq C_n' \int_{|y|\leq 1/2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1}} dy \\
&= C_n' \int_0^{1/2} \int_{S^{n-1}} \frac{|\Omega(\theta)|}{r^{n-1}} d\sigma(\theta) r^{n-1} dr \\
&= \frac{C_n'}{2} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\|K_j^0\|_{L^\infty(A)} \leq C_n^{(1)} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \tag{4.3.49}
$$

De forma análoga, provamos que, para algum C_n,

$$
\langle K_j^\infty, \phi \rangle = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \int_{|y|\geq 2} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy dx,
$$

o que indica que K_j^∞ coincide com a função limitada em A

$$
K_j^\infty(x) = C_n \int_{|y|\geq 2} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy, \quad x \in A. \tag{4.3.50}
$$

Para ver que (4.3.50) em limitada em A, note que para $2/3 \leq |x| \leq 3/2$ e $|y| \geq 2$, vale que $|x-y| \geq 1/2$ o que implica que $|y| \leq 4|x-y|$. Assim, para todo $x \in A$,

$$
\begin{aligned}
|K_j^\infty(x)| &\leq C_n \int_{|y|\geq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} \frac{|x_j - y_j|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\leq C_n \int_{|y|\geq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&= C_n \int_{|y|\geq 2} |\Omega(y/|y|)| \frac{4^n}{|y|^{2n}} dy \\
&= C_n \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \int_2^\infty \frac{4^n}{r^{n+1}} dr \\
&= C_n \frac{2^n}{n} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}.
\end{aligned}
$$

Logo, K_j^∞ é limitada e

$$
\|K_j^\infty\|_{L^\infty(A)} \leq C_n^{(2)} \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})} \tag{4.3.51}
$$

Vejamos agora que, o fato de Ω satisfazer $c_\Omega < \infty$ implica que a função integrável W_Ω^1 satisfaz

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |W_\Omega^1(x)| \log^+ |W_\Omega^1(x)| dx < \infty. \tag{4.3.52}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |W_\Omega^1(x)| \log^+ |W_\Omega^1(x)| dx \\
&\qquad = \int_{1/2\le|x|\le 2} \frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n} \log^+ \left(\frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n}\right) dx \\
&\qquad \le \int_{1/2\le|x|\le 2} \frac{|\Omega(x/|x|)|}{|x|^n} \log^+(2^n|\Omega(x/|x|))dx \\
&\qquad = (\log 2 - \log 1/2) \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^+(2^n|\Omega(\theta)|)d\sigma(\theta) \\
&\qquad = \log 4 \int_{2^n|\Omega|\ge 1} |\Omega(\theta)| \log(2^n|\Omega(\theta)|)d\sigma(\theta) \\
&\qquad = \log 4 \left(\int_{2^n|\Omega|\ge 1} |\Omega(\theta)| \log|\Omega(\theta)|d\sigma(\theta) + \int_{2^n|\Omega|\ge 1} |\Omega(\theta)| \log 2^n d\sigma(\theta)\right) \\
&\qquad \le \log 4 \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \log^+|\Omega(\theta)|d\sigma(\theta) + n\log(2)\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}\right) \\
&\qquad = \log 4(c_\Omega + n\log(2)\|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})}) < \infty.
\end{aligned}
$$

Assumiremos o seguinte fato[1]: a função $K_j^1 = R_j(W_\Omega^1)$ é integrável na bola $|x| \le 3/2$ e satisfaz a seguinte estimativa

$$
\|K_j^1\|_{L^1(A)} \le C_n' \left[\int_{\mathbb{R}^n} |W_\Omega^1(x)| \log^+ |W_\Omega^1(x)| dx + 1\right] \le C_n^{(3)}(c_\Omega + 1). \tag{4.3.53}
$$

Uma vez que $K_j = K_j^0 + K_j^1 + K_j^\infty$, em que as funções K_j^0 e K_j^∞ são limitadas em A e K_j^1 integrável em A, vemos que K_j coincide com uma função integrável em A. Isto significa que a ação de K_j sobre uma função suave ϕ suportada em A pode ser interpretada como uma integral de K_j contra ϕ.

A transformada de Fourier de K_j,

$$
\widehat{K_j}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi),
$$

é uma função homogênea de grau zero, pois ambas as funções $\frac{\xi_j}{|\xi|}$ e $\widehat{W_\Omega}(\xi)$ são homogêneas de grau zero. Logo, por (4.3.1), K_j é homogênea de grau $-n$, ou seja, K_j satisfaz

$$
\langle K_j, \delta^\lambda \phi\rangle = \langle K_j, \phi\rangle, \tag{4.3.54}
$$

para todo $\lambda > 0$ e toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, para uma $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada no anel $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : 3/4 \le |x| \le 4/3\} \subset A$, e para $8/9 < \lambda < 9/8$, temos que a função $\delta^{1/\lambda}\phi(x) = \phi(x/\lambda)$ está suportada no anel $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 2/3 \le |x| \le 3/2\}$. Neste caso,

[1]Não faremos a prova deste fato. Veja o Exercício 1.3.7 de [GFK1]

como K_j coincide com uma função integrável em A e é homogênea de grau $-n$, temos

$$\begin{aligned}\langle K_j, \delta^{1/\lambda}\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x/\lambda)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx.\end{aligned}$$

Temos então a seguinte igualdade,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)dx, \tag{4.3.55}$$

para toda ϕ suportada em $3/4 \leq |x| \leq 4/3$ e todo $8/9 < \lambda < 9/8$. A igualdade (4.3.55) implica que dado um subintervalo $J \subset [8/9, 9/8]$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)d\lambda dx &= \frac{1}{|J|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_J \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)d\lambda dx \\ &= \frac{1}{|J|}\int_J\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)dxd\lambda \\ &= \frac{1}{|J|}\int_J\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dxd\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx,\end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)\phi(x)d\lambda dx, \tag{4.3.56}$$

para toda função ϕ suportada em A_1. A igualdade (4.3.56) implica[2] que para todo subintervalo $J \subset [8/9, 9/8]$ existe um conjunto de medida nula $E_J \subset A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : 3/4 \leq |x| \leq 4/3\}$ tal que

$$K_j(x) = \fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda, \quad \forall x \in A_1 \backslash E_J. \tag{4.3.57}$$

Em particular, existe uma conjunto de medida nula $E_J \subset A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : 27/32 < |x| < 32/27\}$ tal que

$$K_j(x) = \fint_J \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda, \quad \forall x \in A_2 \backslash E_J. \tag{4.3.58}$$

Considere o subintervalo $J_0 = [\sqrt{8/9}, \sqrt{9/8}]$ de $[8/9, 9/8]$. Afirmamos que existe um conjunto de medida nula $E_0 \subset A_2$ tal que

$$\fint_{J_0} \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x)d\lambda, \tag{4.3.59}$$

[2] Aqui usamos o seguinte resultado: dados um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g \in L^1(U)$, se $\int_U g(x)\phi(x)dx = 0$, para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$, então $g = 0$ quase sempre.

para todo $x \in A_2 \backslash E_0$ e para todo $r \in J_0$. De fato, para cara $r \in J_0 \cap \mathbb{Q}$, o intervalo rJ_0 está contido em $[8/9, 9/8]$ e por (4.3.57), existe E_{rJ_0} conjunto de medida nula em A_2 tal que

$$K_j(x) = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda, \quad \forall x \in A_1 \backslash E_{rJ_0}. \tag{4.3.60}$$

Tomando $E_0 = \bigcup_{r \in J_0 \cap \mathbb{Q}} E_{rJ_0} \subset A_2$, temos que E_0 tem medida nula e $A_2 \backslash E_0 \subset A_2 \backslash E_{rJ_0}$, para todo $r \in J_0 \cap \mathbb{Q}$. Logo, por (4.3.60), temos que para todo $x \in A_2 \backslash E_0$ e todo $r \in J_0 \cap \mathbb{Q}$

$$K_j(x) = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda. \tag{4.3.61}$$

Em particular, para $r = 1$,

$$\fint_{J_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda = K_j(x) = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda,$$

para todo $x \in A_2 \backslash E_0$ e todo $r \in J_0 \cap \mathbb{Q}$. Logo, para cada $x \in A_2 \backslash E_0$, é constante a função

$$r \in J_0 \cap \mathbb{Q} \longmapsto \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda = K_j(x) \tag{4.3.62}$$

e portanto estende-se continuamente a todo J_0. Sendo constante em $J_0 \cap \mathbb{Q}$, necessariamente a função (4.3.62) deve ser constante em J_0 e portanto

$$\fint_{J_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda = K_j(x) = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda x) d\lambda, \tag{4.3.63}$$

para todo $x \in A_2 \backslash E_0$ e todo $r \in J_0$, o que prova (4.3.59). Se escrevemos $x = \delta\theta \in A_2$, com $\theta \in S^{n-1}$ e $27/32 < \delta < 32/27$, então para quase todo $\theta \in S^{n-1}$ e quase todo $27/32 < \delta < 32/27$ vale

$$\fint_{J_0} \lambda^n K_j(\lambda \delta \theta) d\lambda = \fint_{rJ_0} \lambda^n K_j(\lambda \delta \theta) d\lambda, \tag{4.3.64}$$

para todo $r \in J_0$. Fixe δ_0 para o qual seja válida (4.3.64) e defina Ω_j em S^{n-1} por

$$\Omega_j(\theta) = \fint_{J_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda \delta_0 \theta) d\lambda, \tag{4.3.65}$$

para quase todo $\theta \in S^{n-1}$. Então para quase todo $\theta \in S^{n-1}$,

$$\Omega_j(\theta) = \fint_{rJ_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda \delta_0 \theta) d\lambda, \tag{4.3.66}$$

para todo $r \in J_0$. A integrabilidade de K_j em $A = \{x \in \mathbb{R}^n : 2/3 \leq |x| \leq 3/2\}$ implica que Ω_j

é integrável na esfera S^{n-1}. Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |\Omega_j(\theta)|d\sigma(\theta) &= \int_{S^{n-1}} \left| \fint_{J_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda \right| d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{1}{|J_0|} \int_{S^{n-1}} \int_{J_0} \delta_0^n \lambda^n |K_j(\lambda\delta_0\theta)| d\lambda d\sigma(\theta) \\ &= \frac{1}{|J_0|} \int_{S^{n-1}} \int_{\delta_0 J_0} \lambda^n |K_j(\lambda\theta)| \delta_0^{-1} d\lambda d\sigma(\theta).\end{aligned}$$

Como $27/33 < \delta_0 < 32/27$, temos $\delta_0 J_0 \subset (2/3, 3/2)$, e então

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |\Omega_j(\theta)|d\sigma(\theta) &\leq \frac{1}{\delta_0|J_0|} \int_{S^{n-1}} \int_{2/3}^{3/2} \lambda^n |K_j(\lambda\theta)| d\lambda d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{3}{2\delta_0|J_0|} \int_{S^{n-1}} \int_{2/3}^{3/2} |K_j(\lambda\theta)| \lambda^{n-1} d\lambda d\sigma(\theta) \\ &= \frac{3}{2\delta_0|J_0|} \int_{2/3<|x|<3/2} |K_j(x)| dx < \infty.\end{aligned}$$

O que prova que $\Omega_j \in L^1(S^{n-1})$ e

$$\|\Omega_j\|_{L^1(S^{n-1})} \leq C\|K_j\|_{L^1(A)}. \tag{4.3.67}$$

Claramente para todo $r \in J_0$, é válido que $r^{-1} \in J_0$. Então, em vista de (4.3.66), para todo $r \in J_0$,

$$\fint_{rJ_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda = \Omega_j(\theta) = \fint_{r^{-1}J_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda.$$

Por uma simples mudança de variável, vemos que

$$\fint_{rJ_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda = \fint_{J_0} \delta_0^n r^n \lambda^n K_j(r\lambda\delta_0\theta)d\lambda,$$

donde obtemos a seguinte igualdade, para todo $r \in J_0$,

$$\Omega_j(\theta) = \fint_{r^{-1}J_0} \delta_0^n \lambda^n K_j(\lambda\delta_0\theta)d\lambda = \fint_{J_0} \delta_0^n r^n \lambda^n K_j(r\lambda\delta_0\theta)d\lambda. \tag{4.3.68}$$

Agora, considere $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ e seja $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função radial não nula e não negativa suportada no anel $32/(27\sqrt{2}) < |x| < 27\sqrt{2}/32$; note que este anel contém S^{n-1}.

Usando a igualdade (4.3.68),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Psi(re_1)\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}}\Omega_j(\theta)d\sigma(\theta)&\\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \fint_{J_0} \delta_0^n\lambda^n K_j(r\lambda\delta_0\theta)\Psi(re_1)r^n d\lambda d\sigma(\theta)\frac{dr}{r}\\
&= \fint_{J_0}\int_0^\infty\int_{S^{n-1}} \delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0 r\theta)\Psi(re_1)r^{n-1}d\sigma(\theta)drd\lambda\\
&= \fint_{J_0}\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0^n\lambda^n K_j(\lambda\delta_0 x)\Psi(x)dxd\lambda\\
&= \fint_{J_0}\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\Psi((\lambda\delta_0)^{-1}x)dxd\lambda\\
&= \fint_{J_0}\langle K_j, \delta^{(\lambda\delta_0)^{-1}}\Psi\rangle d\lambda\\
&= \fint_{J_0}\langle K_j, \Psi\rangle d\lambda\\
&= \langle K_j, \Psi\rangle.
\end{aligned}$$

Usamos o Teorema de Fubini na segunda igualdade, o fato de Ψ ser radial na terceira igualdade e a mudança de variável $x\mapsto\lambda\delta_0 x$ na quarta. A penúltima igualdade usamos o fato de K_j ser homogênea de grau $-n$ em (4.3.54). Por fim, a antepenúltima igualdade se justifica pelo fato da função $x\mapsto\Psi((\lambda\delta_0)^{-1}x)$ estar suportada no anel

$$\lambda\delta_0\frac{32}{(27\sqrt{2})} < |x| < \lambda\delta_0\frac{27\sqrt{2}}{32},$$

que está contido em $A=\{x\in\mathbb{R}^n : 2/3\le|x|\le 3/2\}$, já que $\lambda\in J_0=[\sqrt{8/9},\sqrt{9/8}]$ e $\delta_0\in(27/32,32/27)$ implicam que

$$\left(\lambda\delta_0\frac{32}{27\sqrt{2}},\lambda\delta_0\frac{27\sqrt{2}}{32}\right)\subset\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}},\lambda\sqrt{2}\right)\subset\left(\sqrt{8/9}\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{9/8}\sqrt{2}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right),$$

ou seja, $x\mapsto\Psi((\lambda\delta_0)^{-1}x)$ está suportada em A. Obtemos então a seguinte identidade

$$\langle K_j,\Psi\rangle = \int_0^\infty\Psi(re_1)\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}}\Omega_j(\theta)d\sigma(\theta). \tag{4.3.69}$$

Por outro lado, a transformada de Fourier de K_j é igual a $-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)$ e

$$\begin{aligned}
\langle K_j, \Psi\rangle &= \langle \widehat{K_j}, \Psi^{\vee}\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\widehat{\Psi}(-\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -i\frac{(-\xi_j)}{|\xi|}\widehat{W_\Omega}(\xi)\widehat{\Psi}(\xi)d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} -i\frac{(-r\theta_j)}{r}\widehat{W_\Omega}(r\theta)\widehat{\Psi}(r\theta)r^{n-1}d\sigma(\theta)dr \\
&= -\int_0^\infty \widehat{\Psi}(r\theta)r^{n-1}dr \int_{S^{n-1}} -i\theta_j\widehat{W_\Omega}(\theta)d\sigma(\theta),
\end{aligned}$$

em que na terceira igualdade usamos a mudança de variável $\xi \mapsto -\xi$ e o fato de $\widehat{W_\Omega}$ ser uma função par. A quarta igualdade estamos usando coordenadas polares e na última a homogeneidade de grau zero de $\widehat{W_\Omega}$. Como $\Psi \in \mathcal{S}$ é uma função radial, sua transformada de Fourier $\widehat{\Psi} \in \mathcal{S}$ também a é. Sendo assim,

$$\int_0^\infty \widehat{\Psi}(r\theta)r^{n-1}dr = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \widehat{\Psi}(r\theta)r^{n-1}drd\sigma(\theta) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\Psi}(x)dx = C_\Psi < \infty.$$

No que segue, é evidente que a função $\theta \in S^{n-1} \mapsto \theta_j\widehat{W_\Omega}(\theta)$ é ímpar e portanto sua integral em S^{n-1} é zero[3], e portanto

$$\langle K_j, \Psi\rangle = -C_\Psi \int_{S^{n-1}} -i\theta_j\widehat{W_\Omega}(\theta)d\sigma(\theta) = 0. \tag{4.3.70}$$

Igualando (4.3.69) e (4.3.70) obtemos que

$$\int_0^\infty \Psi(re_1)\frac{dr}{r}\int_{S^{n-1}} \Omega_j(\theta)d\sigma(\theta) = 0.$$

O fato de Ψ ser radial e estar suportada num anel $0 < a \leq |x| \leq b$, implica que a integral de Ψ na igualdade acima ocorre em um intervalo (a, b), donde obtemos que a integral $\int_0^\infty \Psi(re_1)\frac{dr}{r}$ é finita. Logo, devemos ter

$$\int_{S^{n-1}} \Omega_j(\theta)d\sigma(\theta) = 0. \tag{4.3.71}$$

Concluímos então que Ω_j é uma função integrável em S^{n-1} com integral nula. Assim, fica bem definida a distribuição temperada W_{Ω_j}.

Agora, vamos provar que

$$K_j = W_{\Omega_j} \tag{4.3.72}$$

Para tal, provaremos primeiro que K_j coincide (como distribuição) com W_{Ω_j} no anel $\sqrt{8/9} <$

[3] A prova desta afirmação é feita de forma análoga a feita na Observação 4.3.6.

$|x| < \sqrt{9/8}$, isto é, para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada em $\sqrt{8/9} < |x| < \sqrt{9/8}$,

$$\langle K_j, \phi\rangle = \langle W_{\Omega_j}, \phi\rangle.$$

De fato, em vista de (4.3.63), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{J_0} K_j(\delta_0\lambda x)\delta_0^n\lambda^n\phi(x)d\lambda dx \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \fint_{J_0} K_j(\delta_0\lambda r\theta)\delta_0^n\lambda^n r^n\phi(r\theta)d\lambda d\sigma(\theta)\frac{dr}{r} \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \fint_{rJ_0} K_j(\delta_0\lambda\theta)\delta_0^n\lambda^n\phi(r\theta)d\lambda d\sigma(\theta)\frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

A função ϕ está suportada em $\sqrt{8/9} < |x| < \sqrt{9/8}$ e r varia entre $\sqrt{8/9}$ e $\sqrt{9/8}$. Por (4.3.66) temos

$$\Omega_j(\theta) = \fint_{rJ_0} K_j(\delta_0\lambda\theta)\delta_0^n\lambda^n\phi(r\theta)d\lambda,$$

donde obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \Omega_j(\theta)\phi(r\theta)d\sigma(\theta)\frac{dr}{r}. \tag{4.3.73}$$

Por outro lado, em vista do suporte de ϕ, a ação de W_{Ω_j} não é um valor principal e então

$$\begin{aligned}
\langle W_{\Omega_j}, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega_j(x/|x|)}{|x|^n}\phi(x)dx \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \Omega_j(\theta)\phi(r\theta)d\sigma\theta\frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

Com o que foi obtido em (4.3.73), obtemos que $K_j = W_{\Omega_j}$ em $\sqrt{8/9} < |x| < \sqrt{9/8}$. Provaremos agora que $K_j = W_{\Omega_j}$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Considere $M > 0$ e uma função $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada no anel $A_M = \{x \in \mathbb{R}^n : M^{-1} \leq |x| \leq M\}$. Considere para A_M uma cobertura finita de k anéis da forma $\sqrt{8/9}s_j < |x| < \sqrt{9/8}s_j$, com $s_j > 0$. Subordinada a esta cobertura, considere uma partição da unidade $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, com cada ϕ_j suave e suportada em $\sqrt{8/9}s_j < |x| < \sqrt{9/8}s_j$, tal que

$$\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j.$$

Note que as dilatações $x \mapsto \delta^{s_j}\phi_j(x) = \phi_j(s_jx)$ estão suportadas em $\sqrt{8/9} < |x| < \sqrt{9/8}$. Por este motivo, como K_j e W_{Ω_j} são homogêneas de grau $-n$ e coincidem no anel $\sqrt{8/9} < |x| < \sqrt{9/8}$, também coincidem em anéis da forma $\sqrt{8/9}s < |x| < \sqrt{9/8}s$. De fato, basta observar que

$$\langle K_j, \psi\rangle = \langle K_j, \delta^s\psi\rangle = \langle W_{\Omega_j}, \delta^s\psi\rangle = \langle W_{\Omega_j}, \psi\rangle,$$

para toda ψ suave com suporte em $\sqrt{8/9}s < |x| < \sqrt{9/8}s$. Em particular, a igualdade acima é válida para $\psi = \phi_j$. Com isso, concluímos que $\langle K_j, \phi\rangle = \langle W_{\Omega_j}, \phi\rangle$, já que $\phi = \sum \phi_j$. Logo, K_j e W_{Ω_j} coincidem em anéis da forma A_M, para todo $M > 0$. Isto implica que coincidem em

$\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, pois para toda função suave ϕ suportada num compacto $K \subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, é possível tomar $M > 0$ suficientemente grande de modo que o anel A_M contenha K, ou seja ϕ tem suporte num anel A_M. Portanto,

$$\langle K_j, \psi\rangle = \langle W_{\Omega_j}, \psi\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. É evidente que, por essa coincidência de K_j e W_{Ω_j}, a distribuição $K_j - W_{\Omega_j}$ está suportada na origem. Logo, existem[4] um inteiro $k > 0$ e escalares a_α tais que

$$K_j - W_{\Omega_j} = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Por $K_j - W_{\Omega_j}$ ser homogênea de grau $-n$, existe um escalar b tal que $K_j - W_{\Omega_j} = b\delta_0$.

Recorde que $\widehat{K_j}$ é uma função ímpar. Logo, K_j é ímpar no sentido distribucional, isto é, $\widetilde{K_j} = -K_j$, pois

$$\langle \widetilde{K_j}, \phi\rangle = \langle K_j, \widetilde{\phi}\rangle = \langle \widehat{K_j}, (\widetilde{\phi})^\vee\rangle = \langle \widetilde{\widehat{K_j}}, \phi^\vee\rangle = \langle -\widehat{K_j}, \phi^\vee\rangle = \langle -K_j, \phi\rangle.$$

E como $K_j = W_{\Omega_j}$ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e K_j é ímpar, temos que W_{Ω_j} é também uma função ímpar em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Logo, Ω_j é uma função ímpar em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, já que, por definição, $W_{\Omega_j}(x) = \frac{\Omega_j(x/|x|)}{|x|^n}$, $x \neq 0$. Além disso, como $K_j - W_{\Omega_j}$ é uma distribuição ímpar, segue que $b\delta_0$ também o é. Logo, para toda $\phi \in \mathcal{S}$,

$$b\phi(0) = \langle \widetilde{b\delta_0}, \phi\rangle = -\langle b\delta_0, \phi\rangle = -b\phi(0),$$

e portanto $b = 0$. Por conseguinte, obtemos que $K_j = W_{\Omega_j}$ em todo $\mathbb{R}^n$.

O que concluímos então é que Ω_j é uma função ímpar integrável em S^{n-1} com integral nula na esfera. E em vista das estimativas (4.3.49), (4.3.51), (4.3.53) e (4.3.67) e do fato de $K_j = K_j^0 + K_j^1 + K_j^\infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Omega_j\|_{L^1} &\leq C\|K_j\|_{L^1(A)} \\
&\leq \|K_j^0\|_{L^\infty}|A| + \|K_j^1\|_{L^1(A)} + \|K_j^\infty\|_{L^\infty}|A| \\
&\leq C_n^{(1)}\|\Omega\|_{L^1} + C_n^{(3)}(c_\Omega + 1) + C_n^{(2)}\|\Omega\|_{L^1} \\
&\leq C_n(c_\Omega + 1),
\end{aligned}$$

em que $C_n = \max\{C_n^{(1)}\|\Omega\|_{L^1}, C_n^{(2)}\|\Omega\|_{L^1}, C_n^{(3)}\}$. E assim, temos um controle para a norma L^1 de Ω_j

$$\|\Omega_j\|_{L^1} \leq C_n(c_\Omega + 1), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.3.74}$$

Toda essa construção foi foi feita para concluirmos que $R_jT_\Omega = T_{\Omega_j}$. E em vista das propriedades obtidas para Ω_j, temos pelo Teorema 4.3.9 a limitação de L^p em L^p dos operadores

[4] A Proposição 2.4.1 em [GFK1] nos garante que toda distribuição u suportada na origem é combinação linear de derivadas da função delta de Dirac δ_0

T_{Ω_j} com norma

$$\|T_{\Omega_j}\|_{L^p\to L^p} \le a_j\|\Omega_j\|_{L^1}\begin{cases}(p-1)^{-1}, & \text{se } 1<p\le 2\\ p, & \text{se } p\ge 2.\end{cases}$$

Pelo Corolário 4.3.11, a transformada de Riesz R_j é também limitada em L^p com norma

$$\|R_j\|_{L^p\to L^p} \le b\|\Omega_j'\|_{L^1}\begin{cases}(p-1)^{-1}, & \text{se } 1<p\le 2\\ p, & \text{se } p\ge 2.\end{cases},$$

Consequentemente, segue a limitação L^p do operador $T_\Omega = -\sum_{j=1}^n R_jT_{\Omega_j}$,com norma

$$\begin{aligned}\|T_\Omega\|_{L^p\to L^p} &\le \sum_{j=1}^n \|R_jT_{\Omega_j}\|_{L^p\to L^p}\\ &\le \sum_{j=1}^n \|R_j\|_{L^p\to L^p}\|T_{\Omega_j}\|_{L^p\to L^p}\\ &\le \sum_{j=1}^n c\|\Omega_j'\|_{L^1}\|\Omega_j\|_{L^1}\max\{p^2,(p-1)^{-2}\}\\ &\le \sum_{j=1}^n c\|\Omega_j'\|_{L^1}C_n(c_\Omega+1)\max\{p^2,(p-1)^{-2}\}\\ &= \widetilde{C_n}(c_\Omega+1)\max\{p^2,(p-1)^{-2}\},\end{aligned}$$

em que $c=\max\{a_1,\dots,a_n,b\}$ e $\widetilde{C_n} = cC_n\sum_{j=1}^n\|\Omega_j'\|_{L^1}$. □

Veremos agora a limitação L^p de integrais singulares maximais com núcleos pares. Recorde da definição de $T_\Omega^{(**)}$. Dada uma função $\Omega\in L^1(S^{n-1})$ com média nula, a integral singular maximal associada é

$$T_\Omega^{(**)}f = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f|,\quad f\in L^p(\mathbb{R}^n), 1<p<\infty,$$

onde $T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f$ são as integrais truncadas

$$T_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x) = \int_{\varepsilon\le|y|\le N} f(x-y)\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}dy.$$

Para a prova do teorema seguinte, vamos considerar uma função maximal direcional auxiliar. Dada $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta\in S^{n-1}$, defina

$$M_\theta f(x) = \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f(x-r\theta)|dr. \tag{4.3.75}$$

Provemos que M_θ é limitada em L^p, para todo $1<p<\infty$, com norma

$$\|M_\theta\|_{L^p\to L^p} \le \frac{3p}{p-1} \tag{4.3.76}$$

Primeiro, dada uma matriz ortogonal $A \in \mathcal{O}(n)$, podemos provar que vale a identidade

$$M_{Ae_1}f(x) = M_{e_1}(f \circ A)(A^{-1}x).$$

Provar a identidade acima é similar a prova de (4.3.27) obtida para $\mathscr{H}_\theta^{(**)}$. Portanto, dada qualquer direção $\theta \in S^{n-1}$, podemos tomar $A \in \mathcal{O}(n)$ tal que $Ae_1 = \theta$. Para provar a limitação de M_θ em L^p é suficiente que M_{e_1} é limitada em L^p, pois

$$\|M_\theta f\|_{L^p} \leq \|M_{e_1}\|_{L^p \to L^p} \|f\|_{L^p}.$$

Considere a função maximal de Hardy-Littlewood em $\mathbb{R}$

$$\mathcal{M}f(t) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(t-r)| dr.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escreva $x = (x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e então

$$M_{e_1}f(x) = \mathcal{M}(f(x', \cdot))(t).$$

Pelo Teorema 2.1.5, temos

$$\|\mathcal{M}\|_{L^p \to L^p} \leq \frac{3p}{p-1}.$$

Logo, a limitação de M_{e_1} em $L^p(\mathbb{R}^n)$ decorre do seguinte

$$\begin{aligned}
\|M_{e_1}f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |M_{e_1}f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |M_{e_1}f(x', t)|^p dt dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}(f(x', \cdot))(t)|^p dt dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\mathcal{M}(f(x', \cdot))\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&\leq \|\mathcal{M}\|_{L^p \to L^p}^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|f(x', \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dx' \\
&\leq \left(\frac{3p}{p-1}\right)^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\|M_{e_1}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{3p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto obtemos (4.3.76). Uma vez que

$$\frac{p}{p-1} \leq 2 \begin{cases} (p-1)^{-1}, & 1 < p \leq 2 \\ 1, & p \geq 2, \end{cases}$$

segue que

$$\|M_\theta\|_{L^p\to L^p} \le 3\cdot 2\begin{cases}(p-1)^{-1}, & 1<p\le 2\\ 1, & p\ge 2.\end{cases} \tag{4.3.77}$$

Observação 4.3.13. *Estudando a demonstração do Teorema 5.2.11 (teorema seguinte) em [GFK1], o qual nos dá a limitação L^p de $T_\Omega^{(**)}$, com Ω sendo uma função par, viu-se a necessidade de assumir que a função Ω fosse limitada. Isto foi apontado para o autor do livro, e por este motivo algumas correções foram feitas. Veja a errata Errata - Classical Fourier Analysis - L. Grafakos, páginas 341 - 353. As contas apresentadas aqui para obter a limitação de T_Ω, com Ω não limitada, são diferentes, mas motivadas pela ideia proposta na correção de L. Grafakos. A ideia aqui é decompor Ω_m como uma soma de funções Ω_m que são limitadas, satisfazem $c_{\Omega_m}<\infty$ e têm integral nula de modo que vale a convergência $c_{\Omega_m}\to c_\Omega$. Isso nos permite obter a limitação L^p mais facilmente de $T_\Omega^{(**)}$, no caso geral em que Ω é não limitada, usando o Teorema da Convergência Dominada. Os detalhes estão no seguinte teorema.*

Teorema 4.3.14. *Sejam $n\ge 2$ e Ω uma função par em $L^1(S^{n-1})$ com integral nula em S^{n-1}. Suponha que Ω satisfaz a condição (4.3.37). Então a integral singular T_Ω é limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1<p<\infty$, com norma*

$$\|T_\Omega^{(**)}\|_{L^p\to L^p} \le C_n' \max\{p^2,(p-1)^{-3}\}(c_\Omega+1). \tag{4.3.78}$$

Demonstração. considere uma função Φ suave e radial tal que $\Phi(x)=0$, para $|x|\le 1/4$, $\Phi(x)=1$, para $|x|\ge 3/4$ e $0\le\Phi\le 1$. Dada $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1<p<\infty$, defina a integral singular truncada

$$\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}(\Phi(y/\varepsilon)-\Phi(y/N))f(x-y)dx,$$

e a integral singular maximal associada

$$\widetilde{T}_\Omega^{(**)}f(x)=\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}f(x)|. \tag{4.3.79}$$

Para ver que $\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}f$ está bem definida como função de L^p, para toda $f\in L^p$, basta usar a desigualdade de Minkowski para integrais, o fato de $y\mapsto\Phi(y/\varepsilon)-\Phi(y/N)$ ser limitada por 2 e suportada em $\varepsilon/4\le|y|\le(3/4)N$ e a integrabilidade de Ω em S^{n-1} para obter

$$\|\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)}f\|_{L^p}\le 2\log(3N/\varepsilon)\|\Omega\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

Logo, $\widetilde{T}_\Omega^{(**)}$ também está bem definida. Reescreva agora ambas a integrais truncadas

$$\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) = \int_{|y|\geq \varepsilon/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/\varepsilon)f(x-y)dy - \int_{|y|\geq N/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/N)f(x-y)dy$$

e

$$\begin{aligned} T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)dy \\ &= \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/\varepsilon)f(x-y)dy - \int_{|y|\geq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/N)f(x-y)dy. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o fato de $\Phi(y/\varepsilon) = 1$ em $|x| \geq \varepsilon > (3/4)\varepsilon$ (o mesmo trocando ε por N). Assim,

$$\begin{aligned} &\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) - T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) \\ &\quad = \left[\int_{|y|\geq\varepsilon/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/\varepsilon)f(x-y)dy - \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/\varepsilon)f(x-y)dy\right] \\ &\qquad - \left[\int_{|y|\geq N/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/N)f(x-y)dy - \int_{|y|\geq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/N)f(x-y)dy\right] \\ &\quad = \int_{\varepsilon/4\leq|y|\leq\varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/\varepsilon)f(x-y)dy - \int_{N/4\leq|y|\leq N} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y/N)f(x-y)dy. \end{aligned}$$

Tomando o módulo desta diferença, aplicando a desigualdade triangular e usando o fato de $0 \leq \Phi \leq 1$,

$$\begin{aligned} &\left||\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x)| - |T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x)|\right| \\ &\quad \leq |\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) - T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x)| \\ &\quad \leq \int_{\varepsilon/4\leq|y|\leq\varepsilon} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}|f(x-y)|dy + \int_{N/4\leq|y|\leq N} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n}|f(x-y)|dy \\ &\quad = \int_{S^{n-1}}\int_{\varepsilon/4}^{\varepsilon} \frac{|\Omega(\theta)|}{r}|f(x-r\theta)|drd\theta + \int_{S^{n-1}}\int_{N/4}^{N} \frac{|\Omega(\theta)|}{r}|f(x-r\theta)|drd\theta \\ &\quad \leq \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \left[\frac{8}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|f(x-r\theta)|dr + \frac{8}{2N}\int_{-N}^{N}|f(x-r\theta)|dr\right] d\theta \\ &\quad \leq 16\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| M_\theta f(x) d\theta. \end{aligned}$$

Uma vez que é válida[5]

$$|\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f(x) - T_\Omega^{(**)} f(x)| \leq \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) - T_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x)|,$$

obtemos a seguinte estimativa para a integral singular maximal

$$|\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f(x) - T_\Omega^{(**)} f(x)| \leq 16\int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| M_\theta f(x) d\theta.$$

[5]Aqui estamos usando o simples fato de que $|\sup_{a\in A}|a| - \sup_{b\in B}|b|| \leq \sup_{a\in A,\, b\in B}|a-b|$

Usando então a desigualdade de Minkowski para integrais, obtemos primeiro

$$\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f - T_\Omega^{(**)} f\|_{L^p} \leq \int_{S^{n-1}} |\Omega(\theta)| \|M_\theta\|_{L^p \to L^p} \|f\|_{L^p} d\theta.$$

O fato do operador direcional maximal M_θ ser limitado em L^p com norma $\|M_\theta\|_{L^p \to L^p} \leq 3p(p-1)^{-1} \leq 6 \max\{p, (p-1)^{-1}\}$ implica que

$$\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f - T_\Omega^{(**)} f\|_{L^p} \leq 96 \|\Omega\|_{L^1} \max\{p, (p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^p}.$$

Logo, $\widetilde{T}_\Omega^{(**)} - T_\Omega^{(**)}$ é limitada em L^p e portanto, para provar que $T_\Omega^{(**)}$ é limitada em L^p, é suficiente provar essa limitação L^p para $\widetilde{T}_\Omega^{(**)}$. Agora, assumiremos que a função par Ω é limitada. Se valer a estimativa

$$\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)}\|_{L^p \to L^p} \leq C_n' \max\{p^2, (p-1)^{-3}\}(c_\Omega + 1), \tag{4.3.80}$$

para Ω par e limitada, então para uma dada função Ω par que satisfaz $c_\Omega < \infty$, definimos para cada $m \geq 1$,

$$\Omega_m = \Omega \chi_{|\Omega| \leq 2^m} - \kappa_m,$$

em que

$$\kappa_m = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|\Omega| \leq 2^m} \Omega d\sigma.$$

Note que κ_m foi escolhido de modo que Ω_m tenha integral zero na esfera S^{n-1}. Se provarmos que $c_{\Omega_m} \to c_\Omega$, então (4.3.80) é válida para Ω qualquer. De fato, veja primeiro que cada Ω_m é uma função par e limitada, o que implica que $c_{\Omega_m} < \infty$ e satisfaz (4.3.80). Se valer que $\Omega_j \to \Omega$ q.t.p., então pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) = \lim_{j \to \infty} \widetilde{T}_{\Omega_j}^{(\varepsilon,N)} f(x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, note que

$$\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f \leq \lim_{j \to \infty} \widetilde{T}_{\Omega_j}^{(**)} f$$

e portanto, pelo Lema de Fatou e pela estimativa (4.3.80), temos que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_\Omega^{(**)} f\|_{L^p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \to \infty} |\widetilde{T}_{\Omega_j}^{(\varepsilon,N)} f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leq \liminf_{j \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T}_{\Omega_j}^{(\varepsilon,N)} f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
&= \liminf_{j \to \infty} \|\widetilde{T}_{\Omega_j}^{(**)} f\|_{L^p} \\
&\leq C_n' \max\{p^2, (p-1)^{-3}\} \liminf_{j \to \infty} (c_{\Omega_j} + 1) \|f\|_{L^p} \\
&= C_n' \max\{p^2, (p-1)^{-3}\}(c_\Omega + 1) \|f\|_{L^p},
\end{aligned}$$

o que prova a estimativa (4.3.80) para Ω qualquer. Agora, para provar a convergência $c_{\Omega_m} \to c_\Omega$, provamos o seguinte:

(i) $\kappa_m \to 0$

(ii) $\Omega_m \to \Omega$ q.t.p.

(iii) $|\Omega_m| \log^+ |\Omega_m| \to |\Omega| \log^+ |\Omega|$ q.t.p.

(iv) $c_{\Omega_m} \to c_\Omega$.

(i) Uma vez que $\Omega\chi_{|\Omega|\leq 2^m} \to \Omega$ q.t.p. e $|\Omega\chi_{|\Omega|\leq 2^m}| \leq |\Omega|$, aplicamos o Teorema da Convegência Dominada para obter a convergência

$$\int_{|\Omega|\leq 2^m} \Omega d\sigma \longrightarrow \int_{S^{n-1}} \Omega d\sigma = 0,$$

e portanto $\kappa_m \to 0$.

A prova do item (ii) é trivial, já que por (i) $\kappa_m \to 0$.

Pelo item (ii), temos que $|\Omega_m| \to |\Omega|$ q.t.p. e a continuidade da função logaritmo nos dá a convergência $\log |\Omega_m| \to \log |\Omega|$ q.t.p. Estas convergências implicam em $|\Omega_m| \log^+ |\Omega_m| \to |\Omega| \log^+ |\Omega|$ q.t.p. e então o item (iii) fica provado.

O item (iv) segue do Teorema da Convergência Dominada já que a sequência $|\Omega_m| \log^+ |\Omega_m|$ é limitada e converge (pelo item (iii)) para uma função $L^1(S^{n-1})$, ou seja

$$c_{\Omega_m} = \int_{S^{n-1}} |\Omega_m| \log^+ |\Omega_m| d\sigma \longrightarrow \int_{S^{n-1}} |\Omega| \log^+ |\Omega| d\sigma = c_\Omega.$$

Sejam K_j, Ω_j e $T_j = R_j T_\Omega$ como no Teorema 4.3.12 e escreva

$$F_j(z) = R_j\left(\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\Phi(x)\right)(z) = C_n \text{p.v.}\int_{|R^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}\Phi(y)\frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}}dy. \tag{4.3.81}$$

Como supomos que a função Ω é limitada e como Φ está suportada em $|x| \geq 1/4$, a função $x \mapsto |x|^{-n}\Phi(x)$ está em L^2. Logo a função ao qual estamos aplicando R_j está em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto a definição de F_j faz sentido. Em vista da identidade (4.3.41) que é válida em L^2, temos que

$$-\frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j F_j(x).$$

Pela identidade acima, podemos reescrever $\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x/|x|)}{|x|^n}(\Phi(y/\varepsilon) - \Phi(y/N))f(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{\varepsilon^n} \frac{\Omega(\frac{x}{\varepsilon}/\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|)}{\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^n}\Phi(y/\varepsilon) - \frac{1}{N^n}\frac{\Omega(\frac{x}{N}/\left|\frac{x}{N}\right|)}{\left|\frac{x}{N}\right|^n}\Phi(y/N)\right] f(x-y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=1}^n R_j F_j(y/\varepsilon) - \frac{1}{N^n}\sum_{j=1}^n R_j F_j(y/N)\right] f(x-y)dy \\
&= -\left[\frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=1}^n R_j F_j(\cdot/\varepsilon) - \frac{1}{N^n}\sum_{j=1}^n R_j F_j(\cdot/N)\right] * f(x) \\
&= -\left[\frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=1}^n F_j(\cdot/\varepsilon) - \frac{1}{N^n}\sum_{j=1}^n F_j(\cdot/N)\right] * R_j f(x).
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do seguinte fato

$$(R_j g) * f = g * (R_j f),$$

que se verifica facilmente a seguir

$$\begin{aligned}
(R_j g) * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} R_j g(y) f(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z_j}{|z|^{n+1}} g(y-z)f(x-y)dzdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z_j}{|z|^{n+1}} g(v)f(x-v-z)dzdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} C_n \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z_j}{|z|^{n+1}} f((x-v)-z)dzg(v)dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} R_j f(x-v)g(v)dv \\
&= g * (R_j f)(x).
\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}
-\widetilde{T}_\Omega^{(\varepsilon,N)} f(x) &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{\varepsilon^n} F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{N^n}F_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right] R_j f(y)dy. \\
&= A_1^{(\varepsilon,N)} f(x) + A_2^{(\varepsilon,N)} f(x) + A_3^{(\varepsilon,N)} f(x),
\end{aligned}$$

em que

$$
\begin{aligned}
A_1^{(\varepsilon,N)}f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) R_j f(y)dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N^n} \int_{|x-y|\leq N} F_j\left(\frac{x-y}{N}\right) R_j f(y)dy \\
A_2^{(\varepsilon,N)}f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|>\varepsilon} \left(F_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right) R_j f(y)dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N^n} \int_{|x-y|>N} \left(F_j\left(\frac{x-y}{N}\right) - K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\right) R_j f(y)dy \\
A_3^{(\varepsilon,N)}f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|>\varepsilon} K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) R_j f(y)dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N^n} \int_{|x-y|>N} K_j\left(\frac{x-y}{N}\right) R_j f(y)dy
\end{aligned}
$$

Na demonstração do Teorema 4.3.12 ficou evidente que, no anel $A = \{z \in \mathbb{R}^n : 2/3 \leq |z| \leq 3/2\}$, K_j coincide com a função integrável

$$K_j(z) = C_n \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} dy, \tag{4.3.82}$$

em que C_n é a constante proveniente da definição da transformada de Riesz. Afirmamos que $K_j(z)$ é dada por (4.3.82), em todo anel da forma $A_s = \{z \in \mathbb{R}^n : (2/3)s \leq |z| \leq (3/2)s\}$, para $s > 0$. De fato, recorde do teorema anterior que K_j é uma distribuição homogênea de grau $-n$, isto é, $\langle K_j, \delta^\lambda \phi\rangle = \langle K_j, \phi\rangle$. Tome $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada em A_s. Temos então que a função $\delta^s\phi(z) = \phi(sz)$ está suportada em A. Logo, a ação de K_j em $\delta^s\phi$ é dada pela integral de K_j (dada por (4.3.82)) contra $\delta^s\phi$. Sendo assim, pela homogeneidade de K_j (como distribuição), temos que

$$
\begin{aligned}
\langle K_j, \phi\rangle &= \langle K_j, \delta^s\phi\rangle \\
&= \int_A K_j(z)\phi(sz)dz \\
&= \int_A C_n\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} \phi(sz)dydz \\
&= \int_{A_s} C_n\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{s^{-1}z_j - y_j}{|s^{-1}z-y|^{n+1}} \phi(z)dys^{-n}dz \\
&= \int_{A_s} C_n\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{s^{-n}|y|^n} \frac{s^{-1}(z_j - y_j)}{s^{-n-1}|z-y|^{n+1}} \phi(z)s^{-n}dys^{-n}dz \\
&= \int_{A_s} C_n\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \frac{z_j - y_j}{|z-y|^{n+1}} \phi(z)dydz,
\end{aligned}
$$

donde segue que (4.3.82) é válido em cada anel A_s, para todo $s > 0$. Consequentemente, (4.3.82) é válido em todo $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, uma vez que $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} = \cup_{s>0}A_s$. No que segue, pela definição de F_j em (4.3.81) e por (4.3.82), para todo $|z| \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F_j(z) - K_j(z) &= C_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - 1) \frac{z_j - y_j}{|z - y|^{n+1}} dy \\
&= C_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 3/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - 1) \frac{z_j - y_j}{|z - y|^{n+1}} dy \\
&= C_n \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 3/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - 1) \left(\frac{z_j - y_j}{|z - y|^{n+1}} - \frac{z_j}{|z|^{n+1}} \right) dy \\
&= C_n \int_{|y| \leq 3/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - 1) \left(\frac{z_j - y_j}{|z - y|^{n+1}} - \frac{z_j}{|z|^{n+1}} \right) dy,
\end{aligned}$$

em que a segunda igualdade usa-se o fato de $\Phi = 1$ em $|x| \geq 3/4$. A terceira igualdade é válida, pois Φ é radial e Ω tem integral zero em S^{n-1}. A última igualdade verifica-se usando a Teorema do Valor Médio para a função $\frac{z_j}{|z|^{n+1}}$ e Teorema da Convergência Dominada.

Usando novamente o Teorema do Valor Médio para $\frac{z_j}{|z|^{n+1}}$, usando que $|\Phi - 1| \leq 1$ e coordenadas polares, podemos obter a seguinte estimativa

$$|F_j(z) - K_j(z)| \leq C'_n \|\Omega\|_{L^1} \frac{1}{|z|^{n+1}}, \quad |z| \geq 1.$$

Isto nos permite estimar o j-ésimo termo de $A_2^{(\varepsilon,N)} f(x)$ por

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|>\varepsilon} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \frac{|R_j f(y)|}{(|x-y|/\varepsilon)^{n+1}} dy + \frac{1}{N^n} \int_{|x-y|>N} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \frac{|R_j f(y)|}{(|x-y|/N)^{n+1}} dy.$$

No primeiro termo da expressão acima, como $|x - y| > \varepsilon$, temos $1 + \frac{|x-y|}{\varepsilon} \leq 2\frac{|x-y|}{\varepsilon}$ e então

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|>\varepsilon} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \frac{|R_j f(y)|}{(|x-y|/\varepsilon)^{n+1}} dy \leq \frac{2^{n+1}}{\varepsilon^n} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|R_j f(y)|}{\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} + 1\right)^{n+1}} dy. \tag{4.3.83}$$

De forma análoga, obtemos esta mesma estimativa trocando ε por N. Considere a função $K(x) = (1 + |x|)^{-(n+1)}$ que é decrescente, radial e integrável em $\mathbb{R}^n$. Logo, podemos reescrever

$$\frac{2^{n+1}}{\varepsilon^n} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|R_j f(y)|}{\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} + 1\right)^{n+1}} dy = 2^{n+1} C'_n \|\Omega\|_{L^1} |R_j f| * K_\varepsilon(x), \tag{4.3.84}$$

em que $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1} x)$. Pelo Teorema 2.1.6, temos que

$$\sup_{\varepsilon > 0} |R_j f| * K_\varepsilon \leq \|K\|_{L^1} \mathcal{M}(R_j f),$$

e portanto, por (4.3.83) e (4.3.84)

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|>\varepsilon} C'_n \|\Omega\|_{L^1} \frac{|R_j f(y)|}{(|x-y|/\varepsilon)^{n+1}} dy \leq C''_n \|\Omega\|_{L^1} \|K\|_{L^1} \mathcal{M}(R_j f).$$

Analogamente, obtemos a mesma estimativa trocando ε por N. Assim, conseguimos estimar o j-ésimo termo de $A_2^{(\varepsilon,N)}f(x)$ e portanto obtetemos a seguinte estimativa

$$\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_2^{(\varepsilon,N)}f(x)| \leq C_n\|\Omega\|_{L^1}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{M}(R_jf)(x), \tag{4.3.85}$$

para alguma constante dimensional C_n. Sabemos que a função maximal de Hardy-Littlewood é limitada em L^p, $1<p<\infty$, com norma

$$\|\mathcal{M}\|_{L^p\to L^p} \leq 3^n\frac{p}{p-1} \leq 2\cdot 3^n\begin{cases}(p-1)^{-1}, & \text{se } 1<p\leq 2\\ 1, & \text{se } p\geq 2.\end{cases} \tag{4.3.86}$$

Vimos no Corolário 4.3.11 que R_j é limitada em L^p com norma

$$\|R_j\|_{L^p\to L^p} \leq b\|\Omega_j'\|_{L^1}\begin{cases}(p-1)^{-1}, & \text{se } 1<p\leq 2\\ p, & \text{se } p\geq 2.\end{cases} \tag{4.3.87}$$

Logo, pelas estimativas (4.3.40), (4.3.85), (4.3.86) e (4.3.87), temos que

$$\left\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|A_2^{(\varepsilon,N)}f|\right\|_{L^p} \leq C_n(c_\Omega+1)\begin{cases}(p-1)^{-2}, & \text{se } 1<p\leq 2\\ p, & \text{se } p\geq 2,\end{cases} \tag{4.3.88}$$

para alguma constante dimensional C_n.

Analisemos agora o termo $A_3^{(\varepsilon,N)}f(x)$. Recorde que na demonstração do Teorema 4.3.12 foi provado que $K_j = W_{\Omega_j}$ em $\mathbb{R}^n$. Como W_{Ω_j} coincide com a função $\frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n}$ fora da origem, temos que, longe da origem,

$$K_j(x) = \frac{\Omega_j(x/|x|)}{|x|^n},$$

em que as funções Ω_j são integráveis em S^{n-1} e satisfazem

$$\|\Omega_j\|_{L^1(S^{n-1})} \leq C_n(c_\Omega+1), \tag{4.3.89}$$

para algum $C_n>0$. Limitaremos os j-ésimos termos de $A_3^{(\varepsilon,N)}f(x)$. Considere

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n}K_j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\chi_{|x-y|>\varepsilon}R_jf(y) - \frac{1}{N^n}K_j\left(\frac{x-y}{N}\right)\chi_{|x-y|>N}R_jf(y)dy\right|\\
&\quad= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n}K_j\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\chi_{|y|>\varepsilon}R_jf(x-y) - \frac{1}{N^n}K_j\left(\frac{y}{N}\right)\chi_{|y|>N}R_jf(x-y)dy\right|\\
&\quad= \left|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq N}\frac{\Omega_j(y/|y|)}{|y|^n}R_jf(x-y)dy\right|\\
&\quad\leq T_{\Omega_j}^{(**)}(R_jf)(x).
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
|A_3^{(\varepsilon,N)} f(x)| &\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} \frac{\Omega_j(y/|y|)}{|y|^n} R_j f(x-y) dy \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j f)(x),
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_3^{(\varepsilon,N)} f(x)| \ \leq \sum_{j=1}^{n} T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j f)(x). \tag{4.3.90}$$

Tomando a norma L^p do termo dentro da somatória, temos

$$\|T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j f)\|_{L^p} \leq \|T_{\Omega_j}^{(**)}\|_{L^p \to L^p} \|R_j\|_{L^p \to L^p} \|f\|_{L^p}.$$

Em vista das estimativas (4.3.24), do Teorema 4.3.9, e (4.3.35), do Corolário 4.3.11, temos

$$\|T_{\Omega_j}^{(**)}(R_j f)\|_{L^p} \leq a \|\Omega_j\|_{L^1} \begin{cases} (p-1)^{-3}, & \text{se } 1 < p \leq 2 \\ p^2, & \text{se } p \geq 2, \end{cases}$$

para alguma constante a. Logo, tomando a norma L^p em (4.3.90) e usando a estimativa (4.3.89), obtemos o seguinte

$$\left\| \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_3^{(\varepsilon,N)} f| \right\|_{L^p} \leq C_n (c_\Omega + 1) \|f\|_{L^p} \begin{cases} (p-1)^{-3}, & \text{se } 1 < p \leq 2 \\ p^2, & \text{se } p \geq 2, \end{cases} \tag{4.3.91}$$

para alguma constante dimensional C_n.

Agora, temos que obter uma estimativa para a norma L^p de $A_1^{(\varepsilon,N)}$. Para isto, vamos mostrar que existe uma função G_j de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$|F_j(x)| \leq G_j(x), \quad \forall |x| \leq 1 \tag{4.3.92}$$

$$\int_{S^{n-1}} |G_j(\theta)| d\sigma(\theta) \leq c_n (c_\Omega + 1), \tag{4.3.93}$$

para alguma constante c_n. Primeiro, observemos que se $|x| \leq 1/8$ e $|y| \geq 1/4$, $|x-y| \geq 1/8$ e $|y| \leq 2|x-y|$. Assim,

$$\begin{aligned}
|F_j(x)| &= C_n \left| \int_{|y| \geq 1/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} \Phi(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy \right| \\
&\leq C_n \int_{|y| \geq 1/4} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&\leq C_n' \int_{|y| \geq 1/4} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{2n}} dy \\
&\leq C_n'' \|\Omega\|_{L^1},
\end{aligned}$$

donde obtemos que

$$|F_j(x)| \leq C_n' \|\Omega\|_{L^1}. \tag{4.3.94}$$

Por outro lado, para $1/8 \leq |x| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|F_j(x)| &\leq \Phi(x)|K_j(x)| + |F_j(x) - \Phi(x)K_j(x)| \\
&\leq |K_j(x)| + C_n \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy \right|.
\end{aligned}$$

Escreva da seguinte forma

$$|F_j(x)| \leq |K_j(x)| + C_n(P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)). \tag{4.3.95}$$

em que

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \left| \int_{|y| \leq 1/16} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) dy \right| \\
P_2(x) &= \left| \int_{1/16 \leq |y| \leq 2} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy \right| \\
P_3(x) &= \left| \int_{|y| \geq 2} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy \right|.
\end{aligned}$$

Para obter P_1 foi usado o fato de que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1/16} (\Phi(y) - \Phi(x)) \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} dy = 0,$$

que é verificada facilmente usando coordenadas polares, a radialidade de Φ e a média nula de Ω. Usamos também o Teorema do Valor Médio para a função $x \mapsto \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, para $1/8 \leq |x| \leq 1$, e o Teorema da Convergência Dominada para obter então

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq 1/16} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) dy \\
&\qquad = \int_{|y| \leq 1/16} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} (\Phi(y) - \Phi(x)) \left(\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right) dy
\end{aligned}$$

Para $1/8 \leq |x| \leq 1$ estimamos P_1 da seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_1(x) &\leq \int_{|y| \leq 1/16} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} |\Phi(y) - \Phi(x)| \left| \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right| dy \\
&\leq C_n \sup_{1/16 \leq |\xi| \leq 17/16} |\nabla_x f_j(\xi)| \int_{|y| \leq 1/16} \frac{1}{|x|^{n+1}} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1}} dy \\
&\leq C_n' \|\Omega\|_{L^1},
\end{aligned}$$

em que na segunda desigualdade usamos o Teorema do Valor Médio para a função $f_j(x) = \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ e o fato de $0 \leq \Phi \leq 1$. Para estimar P_3, observe que se $|y| \geq 2$ e $1/8 \leq |x| \leq 1$, então

$|y| \leq 2|x-y|$ e assim

$$\begin{aligned}
P_3(x) &\leq \int_{|y|\geq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} |\Phi(y)-\Phi(x)| \frac{|x_j-y_j|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\leq 2\int_{|y|\geq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} \frac{1}{|x-y|^n} dy \\
&\leq C_n \int_{|y|\geq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{2n}} dy \\
&\leq C_n' \|\Omega\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Agora, para obter uma estimativa para P_2, usamos o Teorema do Valor Médio para a função Φ como segue

$$\begin{aligned}
P_2(x) &\leq \int_{1/16\leq|y|\leq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n} |\Phi(y)-\Phi(x)| \frac{|x_j-y_j|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\leq \|\Phi\|_{L^\infty} \int_{1/16\leq|y|\leq 2} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^n|x-y|^{n-1}} dy \\
&\leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1/2}|x-y|^{n-1}} dy
\end{aligned}$$

Recorde que $K_j(x) = |x|^{-n}\Omega_j(x/|x|)$. Definimos a função

$$G_j(x) = C_n \left(\|\Omega\|_{L^1} + |\Omega_j(x/|x|)| + |x|^{n-3/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1/2}|x-y|^{n-1}} dy \right),$$

para uma constante conveniente C_n. Pode-se provar facilmente que G_j é uma função homogênea de grau zero, isto é, $G_j(\lambda x) = G_j(x)$, para todo $\lambda > 0$. Vamos verificar que tal G_j satisfaz (4.3.92) e (4.3.93). Primeiro, provemos (4.3.92). Da forma que foi definida G_j e em vista das estimativas obtidas para cada P_j e de (4.3.95), vemos que para $1/8 \leq |x| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
|F_j(x)| &\leq |K_j(x)| + C_n(P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)) \\
&\leq C_n' \left(\|\Omega\|_{L^1} + |K_j(x)| + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1/2}|x-y|^{n-1}} dy \right) \\
&\leq C_n'' \left(\|\Omega\|_{L^1} + \frac{1}{8^n}|K_j(x)| + \frac{1}{8^{n-3/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(y/|y|)|}{|y|^{n-1/2}|x-y|^{n-1}} dy \right) \\
&\leq G_j(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, por causa de (4.3.94), temos que para $|x| \leq 1/8$,

$$|F_j(x)| \leq C_n' \|\Omega\|_{L^1} \leq |G_j(x)|,$$

e portanto, fica provada (4.3.92).

Para provar (4.3.93), provamos que G_j é integrável no anel $1/2 \leq |x| \leq 2$, o que é suficiente provar que a integral dupla

$$I = \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-1/2}} dy < \infty.$$

Reescreva a integral I como uma soma $I_1 + I_2 + I_3$, em que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} \int_{1/4 \leq |y| \leq 4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-1/2}} dydx \\
I_2 &= \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} \int_{|y| \geq 4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-1/2}} dydx \\
I_3 &= \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} \int_{|y| \leq 1/4} \frac{\Omega(y/|y|)}{|x-y|^{n-1}|y|^{n-1/2}} dydx.
\end{aligned}$$

Na integral I_1, estimamos $|x|^{n-3/2} \leq 2^{n-3/2}$ e $|y|^{-(n-1/2)} \leq 4^{n-1/2}$ para obter, para alguma constante C_n'

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C_n |x|^{n-3/2} \int_{1/4 \leq |y| \leq 4} \Omega(y/|y|) \int_{|x-y| \leq 6} |x-y|^{n-1} dxdy \\
&\leq C_n' \|\Omega\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Na integral I_2, temos que $|x-y| \geq 2$, $|y| \leq 2|x-y|$ e assim segue

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} dx \int_{|y| \geq 4} 2^{n-1} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^{2n-3/2}} dy \\
&= C_n' \|\Omega\|_{L^1},
\end{aligned}$$

para alguma constante C_n'.

Por fim, a integral I_3 é estimada usando o fato de que $|x-y| \geq 1/4$, quando $1/2 \leq |x| \leq 2$ e $|y| \leq 1/4$. Então

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_{1/2 \leq |x| \leq 2} |x|^{n-3/2} dx \int_{|y| \geq 4} 4^{n-1} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^{n-1/2}} dy \\
&= C_n \|\Omega\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Obtemos portanto a seguinte estimativa

$$I \leq C_n \|\Omega\|_{L^1(S^{n-1})},$$

para alguma constante C_n. Integrando $|G_j|$ sobre o anel $1/2 \leq |x| \leq 2$,

$$\begin{aligned}\int_{1/2\leq|x|\leq 2} |G_j(x)|dx &= C_n(\|\Omega\|_{L^1} + |\Omega_j(x/|x|) + |x|^{n-3/2}I) \\ &\leq C_n'(\|\Omega\|_{L^1} + \|\Omega_j\|_{L^1} + \|\Omega\|_{L^1}) \\ &\leq C_n''(c_\Omega + 1),\end{aligned}$$

em que na última desigualdade usamos que $\|\Omega_j\|_{L^1} \leq c_\Omega + 1$ por (4.3.89). A estimativa acima, a homogeneidade e integrabilidade de G_j em $1/2 \leq |x| \leq 2$ implicam que

$$\int_{1/2\leq|x|\leq 2} |G_j(x)|dx = \int_{1/2}^{2} r^{n-1}dr \int_{S^{n-1}} |G_j(\theta)|d\sigma(\theta) \leq C_n''(c_\Omega + 1),$$

e portanto (4.3.93) é satisfeita.

Provada as estimativas (4.3.93) e (4.3.92), estamos em condições de obter uma estimativa para a norma L^p de $\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_1^{(\varepsilon,N)} f|$. Veja que por coordenadas polares, usando (4.3.92) e a homogeneidade de G_j,

$$\begin{aligned}\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_1^{(\varepsilon,N)} f(x)| &\leq 2\sup_{\varepsilon>0}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|y|\leq\varepsilon} |F_j(y/\varepsilon)||R_j f(x-y)|dy \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}} |G_j(\theta)|\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} |R_j f(x-r\theta)|drd\sigma(\theta) \\ &\leq 4\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}} |G_j(\theta)|M_\theta(R_j f)(x)d\sigma(\theta).\end{aligned}$$

Calculando a norma L^p e usando a Desigualdade de Minkowski para integrais, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_1^{(\varepsilon,N)} f|\right\|_{L^p} &\leq 4\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}} |G_j(\theta)|\|M_\theta(R_j f)\|_{L^p}d\sigma(\theta) \\ &\leq 4\sum_{j=1}^{n}\|G_j\|_{L^1(S^{n-1})}\|M_{e_1}\|_{L^p\to L^p}\|R_j\|_{L^p\to L^p}\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

A estimativa (4.3.93) e as limitações (4.3.77) e (4.3.87) implicam em

$$\left\|\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_1^{(\varepsilon,N)} f|\right\|_{L^p} \leq C_n(c_\Omega + 1)\|f\|_{L^p}\begin{cases}(p-1)^{-2}, & \text{se } 1 < p \leq 2 \\ p, & \text{se } p \geq 2,\end{cases} \tag{4.3.96}$$

para alguma constante C_n.

Por fim, pelas estimativas (4.3.96), (4.3.88) e (4.3.91), conseguimos limitar $\widetilde{T}_\Omega^{(**)}$ em L^p

da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}_{\Omega}^{(**)} f\|_{L^p} &= \left\| \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} \widetilde{T}_{\Omega}^{(\varepsilon,N)} f \right\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{j=1,2,3} \left\| \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |A_j^{(\varepsilon,N)} f| \right\|_{L^p} \\
&\leq C_n(c_\Omega + 1) \max\{p^2, (p-1)^{-3}\} \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

□

4.4 Operadores Integrais Singulares

4.4.1 Decomposição de Calderón-Zygmund

Vimos nas seções anteriores alguns caso específicos de operadores integrais singulares, como por exemplo as integrais singulares homogêneas, as quais são dadas pela convolução com uma distribuição temperada que coincide com uma função homogênea. Nesta seção, estudaremos integrais singulares mais gerais. De fato, aqui trataremos ainda de operadores do tipo convolução, cujo núcleo distribucional coincide com uma função K definida em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Veremos que é necessário impor algumas condições de tamanho, regularidade e cancelamento sobre K para que possamos obter a limitação L^p desta nova classe de operadores. Um resultado fundamental para conseguirmos limitar integrais singulares em L^p é a Descomposição de Calderón-Zygmund, que provaremos a seguir. Antes disso, definimos o seguinte. Dizemos quem um subconjunto Q de $\mathbb{R}^n$ é um cubo diádico quando for um cubo cujos lados são paralelos aos eixos coordenadas e a medida de seus lados são múltiplos de potências de 2, isto é, Q é da forma

$$Q = [2^k m_1, 2^k(m_1+1)) \times \ldots \times [2^k m_n, 2^k(m_n+1)),$$

com $k, m_1, \ldots, m_n$ números inteiros. É evidente que a medida do lado de cada cubo diádico Q é 2^k, para algum k inteiro. Note que fixado $k \in \mathbb{Z}$, a família de cubos diádicos $\mathcal{Q}_k$, cujo lado é 2^k é uma família disjunta e decompõe $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_k} Q.$$

Ademais, dado um cubo $Q \in \mathcal{Q}_k$, sempre existe um único cubo $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{k+1}$ que contém Q. É por este motivo que, dados quaisquer dois cubos diádicos Q_1 e Q_2 em $\cup_k \mathcal{Q}_k$, ou Q_1 e Q_2 são disjuntos, ou um contém o outro.

Teorema 4.4.1 (Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Dadas $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$, existem funções g e b de $\mathbb{R}^n$ tais que*

(1) $f = g + b$

(2) $\|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ *e* $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^n \alpha$

(3) $b = \sum_j b_j$*, em que cada* b_j *está suportada num cubo diádico* Q_j*. Além disso,* $Q_j \cap Q_k = \emptyset$*, para* $j \neq k$*.*

(4) $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$.

(5) $\|b_j\|_{L^1} \leq 2^{n+1}\alpha|Q_j|$.

(6) $\sum_j |Q_j| \leq \alpha^{-1}\|f\|_{L^1}$.

Demonstração. Considere uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ em cubos diádicos Q disjuntos de mesma medida tais que

$$|Q| \geq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1} \tag{4.4.1}$$

o que é possível, já que α e $\|f\|_{L^1}$ são valores fixados. Denote por $S^{(0)} = \mathcal{G}_0$ a coleção dos cubos desta malha. Divida ao meio os lados de um cubo Q de $S^{(0)}$, e obtenha 2^n subcubos de Q, todos de mesma medida. Faça isto para cada cubo de $S^{(0)}$, colecione estes subcubos numa família $\mathcal{G}_1$ e selecione todos aqueles que satisfazem

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx > \alpha, \tag{4.4.2}$$

caso existir. Note que os cubos de $\mathcal{G}_0$ não satisfazem a condição acima, em vista de (4.4.1). Os cubos de $\mathcal{G}_1$ que satisfazem (4.4.2) forma a família da primeira geração, que denotaremos por $S^{(1)}$. Cada cubo Q de $\mathcal{G}_1$ que não satisfaz é subdivido em 2^n subcubos de mesma medida. Colecione todos estes subcubos numa família $\mathcal{G}_2$ e selecione todos aqueles que satisfazem (4.4.2). Estes subcubos selecionados denotamos por $S^{(2)}$, que forma a segunda geração de cubos. continue este processo indefinidamente. Obtemos assim, uma família enumerável de cubos $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^{(k)}$. Note que pode ocorrer de a família S ser vazio. Isso ocorre quando (4.4.2) não é satisfeita, para nenhum cubo de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, $|f| \leq \alpha$ em quase toda parte, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue; basta tomar então $b = 0$ e $g = f$ e portanto o teorema fica provado. Observe que pela construção os cubos de S são dois a dois disjuntos.Para cada cubo selecionado Q_j, defina as funções b_j por

$$b_j = \left(f - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx\right)\chi_{Q_j}.$$

Tome então $b = \sum_j b_j$ e $g = f - b$. Note que b está bem definida, já que a família de cubos selecionados $S = \{Q_j\}_j$ é disjunta. Observe que as funções b_j foram definidas de modo que tenham integral nula. Vamos verificar que g e b satisfazem os itens (1) - (6).

Considere Q_j um cubo selecionado; então ele é de alguma geração $S^{(k)}$. Pela construção, existe um único cubo não selecionada Q_j^* de $\mathcal{G}^{(k-1)}$, que contém Q_j. Denotando o lado de um cubo Q por $l(Q)$, temos que $l(Q_j) = 2^{-1}l(Q_j^*)$ e então $|Q_j^*| = 2^n|Q_j|$. Por Q_j^* não ser selecionado, Q_j^* não satisfaz (4.4.2), ou seja,

$$\frac{1}{|Q_j^*|}\int_{Q_j^*} |f(x)|dx \leq \alpha.$$

Logo, calculando a média de f em Q_j, temos que

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq \frac{2^n}{|Q_j^*|}\int_{Q_j^*} |f(x)|dx \leq 2^n\alpha, \tag{4.4.3}$$

o que implica em
$$\|b_j\|_{L^1} \leq 2\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq 2^{n+1}\alpha|Q_j|.$$
Portanto, fica provado o item (5). Como os cubos selecionados são dois a dois disjuntos, segue que
$$\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_j \int_{Q_j} |f(x)|dx \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}.$$
Pela forma que foi definida a função $g = f - b$, é evidente que
$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy, & x \in \bigcup_j Q_j. \end{cases} \tag{4.4.4}$$
Provemos que g é uma função limitada. Observe que em cada cubo Q_j, g é constante igual $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy$. Logo, por (4.4.3), temos que
$$|g(x)| \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy \leq 2^n\alpha,$$
para todo $x \in Q_j$ e para todo j. Isto prova que g é limitada em $\bigcup_j Q_j$. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$, então x não pertence a nenhum cubo selecionado, isto é, dados $k = 1, 2, \ldots$ e $Q \in S^{(k)}$, temos $x \notin Q$. Pela construção, para cada $k = 1, 2, \ldots$, existe um cubo $Q_x^{(k-1)}$ não selecionado de $\mathcal{G}_{k-1}$ que contém x. Por $Q_x^{(k-1)}$ não ser selecionado, $Q_x^{(k-1)}$ não satisfaz (4.4.2) e portanto
$$\left|\frac{1}{|Q_x^{(k-1)}|}\int_{Q_x^{(k-1)}} f(y)dy\right| \leq \frac{1}{|Q_x^{(k-1)}|}\int_{Q_x^{(k-1)}} |f(y)|dy \leq \alpha. \tag{4.4.5}$$
A sequência de cubos $\{Q_x^{(k)}\}_k$ é uma sequência decrescente de cubos tal que $\bigcap_k \overline{Q_x^{(k)}} = \{x\}$. Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue (Corolário 2.1.10), para quase todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$, temos
$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{Q_x^{(k)}}\int_{Q_x^{(k)}} f(y)dy.$$
Logo, em vista de (4.4.5), temos que $|f(x)| \leq \alpha$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$, o que implica em $|g(x)| \leq \alpha \leq 2^n\alpha$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \bigcup_j Q_j$. Portanto g é uma função $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com norma $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^\alpha$. Por (4.4.4) é fácil verificar que $\|g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$. □

Observe que pelos itens (1) e (2) da Decomposição de Calderón-Zygmund, b é também uma funcção integrável de $\mathbb{R}^n$ com norma
$$\|b\|_{L^1} \leq 2\|f\|_{L^1}.$$
Por g ser uma função limitada e integrável, g é uma função de $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p < \infty$ e usando o fato de $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^n\alpha$, vemos que
$$\|g\|_{L^p} \leq 2^{n/p'}\alpha^{1/p'}\|f\|_{L^1}^{1/p}. \tag{4.4.6}$$

4.4.2 Limitação Tipo Fraco-$(1,1)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$ de Integrais Singulares

Considere uma função mensurável K definida em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ localmente integrável em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Suponha que K satisfaça a condição de tamanho

$$\sup_{R>0}\int_{R\leq|x|\leq 2R}|K(x)|dx = A_1 < \infty. \tag{4.4.7}$$

Afirmamos que (4.4.7) é equivalente a

$$\sup_{R>0}\frac{1}{R}\int_{|x|\leq R}|K(x)||x|dx = A_1' < \infty, \tag{4.4.8}$$

e mais fraca do que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^n|K(x)| = A_1'' < \infty. \tag{4.4.9}$$

Provemos primeiro a equivalência entre (4.4.7) e (4.4.8). Observe que, se (4.4.8) é satisfeita, então, para todo $R>0$,

$$\begin{aligned}\int_{R\leq|x|\leq 2R}|K(x)|dx &\leq \frac{1}{R}\int_{R\leq|x|\leq 2R}|K(x)||x|dx\\ &\leq \frac{1}{R}\int_{|x|\leq 2R}|K(x)||x|dx\\ &\leq 2A_1' < \infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, se (4.4.7) ocorrer, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\int_{|x|\leq R}|K(x)||x|dx &= \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{-k}R\leq|x|\leq 2^{-k+1}R}|K(x)||x|dx\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k+1}\int_{2^{-k}R\leq|x|\leq 2^{-k+1}R}|K(x)|dx\\ &\leq 2A_1 < \infty.\end{aligned}$$

Logo, são equivalentes (4.4.7) e (4.4.8).

Agora, para ver que a condição (4.4.9) implica em (4.4.7), basta integrar por coordenadas polares e obter o seguinte

$$\begin{aligned}\int_{R\leq|x|\leq 2R}|K(x)|dx &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^n|K(x)|\int_{R\leq|x|\leq 2R}|x|^{-n}dx\\ &= A_1''\omega_{n-1}\int_R^{2R}\frac{dr}{r}\\ &= A_1''\omega_{n-1}\log(2) < \infty.\end{aligned}$$

Queremos aqui uma distribuição temperada que coincida com K em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. É conveniente então considerar o "valor principal"de K e esperar que este sim é uma distribuição temperada que coincide com K. O valor principal ao qual nos referimos é a distribuição W dada por

$$\langle W, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{|x|\geq\delta_j} K(x)\phi(x)dx, \tag{4.4.10}$$

para alguma sequência $\delta_j \searrow 0$. Porém, uma condição necessária e suficiente para que W em (4.4.10) esteja bem definida como distribuição temperada é que exista o limite

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\delta_j\leq|x|\leq 1} K(x)dx = L. \tag{4.4.11}$$

De fato, suponha primeiro que o limite (4.4.11) existe e escreve

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq\delta_j} K(x)\phi(x)dx \\
&\qquad = \phi(0)\int_{1\geq|x|\geq\delta_j} K(x)dx + \int_{1\geq|x|\geq\delta_j} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{|x|\geq 1} K(x)\phi(x)dx.
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

O limite em j do primeiro termo do lado direito da igualdade existe por hipótese. Analisaremos os dois termos restantes do lado direito. Observe que pelo Teorema do Valor Médio,

$$|K(x)(\phi(x)-\phi(0))|\chi_{1\geq|x|\geq\delta_j} \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty}|K(x)||x|\chi_{|x|\leq 1}.$$

Como K satisfaz (4.4.8), segue do Teorema da Convergência Dominada que existe o limite

$$\lim_{j\to\infty} \int_{1\geq|x|\geq\delta_j} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx = \int_{|x|\leq 1} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx.$$

Agora, o último termo é absolutamente convergente, pois

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq 1} K(x)\phi(x)dx &= \sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^m\leq|x|\leq 2^{m+1}} |K(x)\phi(x)|dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\phi(x)| \sum_{m=0}^{\infty}\int_{2^m\leq|x|\leq 2^{m+1}} \frac{|K(x)|}{(1+|x|)^N}dx \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A_1}{(1+2^m)^N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\phi(x)| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Logo, em vista de (4.4.12), concluímos que o limite em (4.4.10) existe e

$$\langle W, \phi\rangle = \phi(0)L + \int_{|x|\leq 1} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{|x|\geq 1} K(x)\phi(x)dx. \tag{4.4.13}$$

Para ver que W é uma distribuição temperada, basta notar que

$$|\langle W, \phi\rangle| \leq L\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)| + A_1'\|\nabla\phi\|_{L^\infty} + CA_1\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\phi(x)|.$$

A suficiência da condição (4.4.11) é trivial, em vista de (4.4.12).

É conveniente se perguntar quando tal sequência δ_j existe de modo que exista o limite em (4.4.11). Veremos em seções seguintes que impondo-se uma condição de cancelamento sobre o núcleo K, é possível encontrar tal sequência δ_j.

Vale observar que a definição de W depende da sequência δ_j e portanto, sequências diferentes que convergem a zero podem nos fornecer distribuições temperadas W diferentes. Mais adiante veremos um exemplo que deixará claro essa dependência de δ_j.

Agora, sobre a função K, considere as seguintes condições de suavidade:

(1) Condição sobre o gradiente de K:

$$|\nabla K(x)| \leq A_2 \frac{1}{|x|^{n+1}}, \quad x \neq 0. \tag{4.4.14}$$

(2) Condição Lipschitz fraca:

$$|K(x-y) - K(x)| \leq A_2 \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \quad |x| \geq 2|y|, \ \delta > 0. \tag{4.4.15}$$

(3) Condição de Hörmander:

$$\sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx = A_2 < \infty. \tag{4.4.16}$$

É fato que a condição de Hörmander é a mais fraca das condições de suavidade listadas acima. Mais precisamente, é fácil provar que valem as implicações

$$(4.4.14) \implies (4.4.15) \implies (4.4.16).$$

Em geral, consideramos a função K satisfazendo a condição de tamanho (4.4.7) e a mais fraca das condições de suavidade: a condição e Hörmander (4.4.16). Associada a K, assumimos que W, dada por (4.4.10), está bem definida como distribuição temperada para alguma sequência $\delta_j \searrow 0$. Os operadores integrais singulares os quais estamos interessados em obter limitação tanto L^p quanto uma limitação fraca-$(1,1)$, são aqueles dados pela convolução com W, isto é,

$$T\phi = \phi * W, \tag{4.4.17}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Explicitamente, temos que

$$T\phi(x) = \lim_{j \to \infty} \int_{|x-y| \geq \delta_j} K(x-y)\phi(y)dy.$$

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para a limitação $L^1 \to L^{1,\infty}$ e $L^p \to L^p$ da integral singular T.

Teorema 4.4.2. *Considere K uma função definida em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ que satisfaz as condições (4.4.7) e (4.4.16) para alguma constante A_1, A_2. Suponha que exista $\delta_j \searrow 0$ tal que W dada por (4.4.10) seja uma distribuição temperada. Suponha também que o operador T dado por (4.4.17) satisfaça uma estimativa $L^r(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|T\phi\|_{L^r} \leq B\|\phi\|_{L^r},$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$, para alguma constante B e algum $1 < r < \infty$, isto é, T admite extensão limitada em L^r. Então T é limitada de L^p em L^p e de L^1 em $L^{1,\infty}$ com normas

$$\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq C_n(A_2 + B) \tag{4.4.18}$$

$$\|T\|_{L^p\to L^p} \leq C_n' \max\{p, (p-1)^{-1}\}(A_2 + B), \tag{4.4.19}$$

para alguma constante C_n e C_n'.

Demonstração. Fixe $\alpha > 0$ e uma função f dada pela combinação linear finita de funções características de cubos diádicos disjuntos. A classe destas funções formam um conjunto conjunto denso de L^p. Portanto, vamos obter a limitação fraca-$(1,1)$ de T nesse conjunto e por densidade, estende-se para todo L^1. Aplicamos a Decomposição de Calderón-Zygmund para a função f numa altura $\gamma\alpha > 0$, em que γ é uma constante a ser escolhida. Temos então duas funções g e b que satisfazem (1)-(6) do Teorema 4.4.1. Denote por y_j o centro de cada cubo Q_j, que suporta b_j e considere os cubos Q_j^* também centrado em y_j e com lado $l(Q_j^*) = 2\sqrt{n}l(Q_j)$. Por f ser uma função simples, temos que cada b_j é uma função limitada e portanto, b_j é uma função de L^r, para todo j. Logo, Tb_j está bem definida como função de L^r. Fixe $x \notin Q_j^*$. Observe que se $y \in Q_j$, então $|x - y| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}l(Q_j)$. E como b_j está suportada em Q_j,

$$Tb_j(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{|x-y|\geq\delta_k} K(x-y)b_j(y)dy = \int_{Q_j} K(x-y)b_j(y)dy.$$

Como $x - Q_j$ é um compacto que não contém a origem, a última integral é absolutamente convergente. Observe também que se $x \in -y_j + (Q_j^*)^c$, então $|x| \geq \sqrt{n}l(Q_j) \geq 2|y - y_j|$, para todo $y \in Q_j$. Usamos agora o fato de as funções b_j terem integral nula e a condição de Hörmander para obter o seguinte.

$$\begin{aligned}
\int_{(\cup_i Q_i^*)^c} \sum_j |Tb_j(x)|dx &\leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c} |K(x-y) - K(x-y_j)|dxdy \\
&= \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{-y_j+(Q_j^*)^c} |K(x-(y-y_j)) - K(x)|dxdy \\
&\leq \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{|x|\geq 2|y-y_j|} |K(x-(y-y_j)) - K(x)|dxdy \\
&\leq A_2 \sum_j \|b_j\|_{L^1} \\
&\leq A_2 2^{n+1}\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

E portanto, fica provado que

$$\int_{(\cup_i Q_i^*)^c} \sum_j |Tb_j(x)|dx \le A_2 2^{n+1} \|f\|_{L^1}.$$

No que segue, usando a desigualdade obtida acima, a linearidade de T e a decomposição $f = g + b$, temos

$$\begin{aligned}
|\{|Tf| \ge \alpha\}| &\le |\{|Tg| \ge \alpha/2\}| + |\{|Tb| \ge \alpha/2\}| \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r}\|Tg\|_{L^r}^r + |\cup_i Q_i^*| + |\{x \notin \cup_i Q_i^* : |\sum_j Tb_j(x)| \ge \alpha/2\}| \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r} B^r \|g\|_{L^r}^r + (2\sqrt{n})^n \sum_j |Q_j| + \frac{2}{\alpha}\int_{(\cup_i Q_i^*)^c} \sum_j |Tb_j(x)|dx \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r} B^r \|g\|_{L^\infty}^{r-1}\|g\|_{L^1} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma\alpha}\|f\|_{L^1} + \frac{2}{\alpha}A_2 2^{n+1}\|f\|_{L^1} \\
&\le \frac{2^r}{\alpha^r} B^r 2^{n(r-1)}(\gamma\alpha)^{r-1}\|f\|_{L^1} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma\alpha}\|f\|_{L^1} + \frac{2}{\alpha}A_2 2^{n+1}\|f\|_{L^1} \\
&= \left(\frac{(2^{n+1}B\gamma)^r}{2^n\gamma} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} + 2^{n+1}A_2\right)\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Tomando então $\gamma = 2^{-(n+1)}B^{-1}$, o último termo é majorado por

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(2^{n+1}B2^{-(n+1)}B^{-1})^r}{2^n 2^{-(n+1)}B^{-1}} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{2^{-(n+1)}B^{-1}} + 2^{n+1}A_2\right)\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1} \\
&\qquad \le (2 + 2^{n+1}(2\sqrt{n})^n + 2^{n+2})(A_2 + B)\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1} \\
&\qquad = C_n(A_2 + B)\frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade obtida foi a seguinte

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| \ge \alpha\}| \le C_n(A_2 + B)\frac{A_2}{\alpha}\|f\|_{L^1},$$

donde segue a estimativa (4.4.18) fraca-$(1, 1)$ para T.

Por interpolação[6], a limitação L^r e a limitação fraca-(1,1) de T implicam que T é limitada de L^p em L^p, para todo $1 < p < r$, e com norma

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \le C_n'(A_2 + B)(p-1)^{-1/p}.$$

Usamos agora o adjunto de T para obter a limitação para $p > r$ da seguinte maneira. O operador adjunto de T, denotado por T^* é definido como o único operador que satisfaz

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle.$$

[6] Aqui estamos usando e assumindo o Exercício 1.3.2 de [GFK1]

O núcleo distribucional de T^*, denotado por W^*, coincide com a função $K^*(x) = K(-x)$ em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. É evidente que K^* satisfaz as mesmas condições (4.4.7) e (4.4.16) que K satisfaz. Além disso, o limite (4.4.11) para K^* também existe. A limitação L^r de T nos dá que o operador adjunto T^* mapeia $L^{r'}$ em $L^{r'}$ com norma $\leq B$. Pelo mesmo argumento usado para T, temos que T é limitada de L^p em L^p, para todo $1 < p < r'$, com norma

$$\|T^*\|_{L^p \to L^p} \leq C'_n(A_2 + B)(p-1)^{-1/p}.$$

Logo, como $r < p < \infty$ se, e somente se, $1 < p' < r'$, temos que por dualidade T é limitado em L^p, pois

$$\|T\|_{L^p \to L^p} = \|T^*\|_{L^{p'} \to L^{p'}} \leq C'_n(A_2 + B)(p'-1)^{-1/p'} = C'_n(A_2 + B)(p-1)^{1-1/p}.$$

O que obtemos então é que para todo $r < p < \infty$, T é limitado em L^p com norma

$$\begin{aligned}\|T\|_{L^p \to L^p} &\leq C'_n(A_2 + B) \max\{(p-1)^{-1/p}, (p-1)^{1-1/p}\} \\ &\leq C'_n(A_2 + B) \max\{p, (p-1)^{-1}\},\end{aligned}$$

e assim fica provada a desigualdade (4.4.19). A segunda desigualdade acima obtém-se separando em casos: quando $1 < p \leq 2$ ou $2 \leq p < \infty$. No caso $1 < p \leq 2$, temos que

$$\max\{(p-1)^{-1/p}, (p-1)^{1-1/p}\} = (p-1)^{-1/p} \leq (p-1)^{-1}.$$

O outro caso em que $2 \leq p < \infty$,

$$\max\{(p-1)^{-1/p}, (p-1)^{1-1/p}\} = (p-1)^{1-1/p} \leq p.$$

□

Note que foi necessário impor uma condição de limitação L^r sobre o operador T para que pudéssemos concluir sua limitação em L^p. Mais adiante, veremos que impondo uma condição a mais sobre o núcleo, esta será suficiente para limitação L^2 de T e consequentemente, T será limitada em L^p via o teorema anterior.

4.4.3 Desigualdade de Cotlar, Limitações Fraca-(1,1) e Forte-(p,p) de Integrais Singulares Maximais

Assim como na seção anterior, considere um núcleo K definida em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ satisfazendo a condição de tamanho

$$|K(x)| \leq A_1 |x|^{-n}, \quad \text{para todo } x \neq 0. \tag{4.4.20}$$

Dado $\varepsilon > 0$, definimos os núcleos truncados

$$K^{(\varepsilon)}(x) = K(x)\chi_{|x|\geq\varepsilon}, \tag{4.4.21}$$

que estão bem definidas como funções de $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p \leq \infty$. Com efeito, para $p \neq \infty$ a condição de tamanha (4.4.20) nos dá que

$$\begin{aligned}
\|K^{(\varepsilon)}\|_{L^p}^p &= \int_{|x|\geq\varepsilon} |K(x)|^p dx \\
&\leq A_1^p \int_{|x|\geq\varepsilon} |x|^{-np} dx \\
&= A_1^p \omega_{n-1} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^{n(p-1)+1}} \\
&= A_1^p \omega_{n-1} \frac{\varepsilon^{-n(p-1)}}{n(p-1)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|K^{(\varepsilon)}(x)| \leq A_1|x|^{-n}\chi_{|x|\geq\varepsilon} \leq A_1\varepsilon^{-n},$$

e portanto $\|K\|_{L^\infty} \leq A_1\varepsilon$. Associadas a estes núcleos truncados, definimos as integrais singulares truncadas $T^{(\varepsilon)}$ como sendo os operadores dados pela convolução com $K^{(\varepsilon)}$:

$$T^{(\varepsilon)}f(x) = f * K^{(\varepsilon)}(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)K(y)dy, \tag{4.4.22}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p < \infty$. Pela Desigualdade de Hölder, pela condição de tamanho em K e por K ser uma função de $L^{p'}$, para todo $1 < p' \leq \infty$, a convolução acima é uma integral absolutamente convergente.

Definimos a integral singular maximal associada ao núcleo K por

$$T^{(*)}f = \sup_{\varepsilon>0} |T^{(\varepsilon)}f|.$$

Veja que para definir o operador maximal foi suficiente exigir a condição de tamanho (4.4.20) sobre K. Tal condição é mais forte do que a condição

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq|x|\leq 2R} |K(x)|dx \leq A_1 < \infty. \tag{4.4.23}$$

Neste caso, os núcleos truncados $K^{(\varepsilon)}$ podem não ser integráveis e por este motivo, temos que definir os seguintes núcleos truncados

$$K^{(\varepsilon,N)}(x) = K(x)\chi_{\varepsilon\leq|x|\leq N}. \tag{4.4.24}$$

Assim, se K satisfaz (4.4.23) e $0 < \varepsilon < N$, tome j_0 tal que $2^{j_0+1}\varepsilon \geq N$. Então, $K^{(\varepsilon,N)}$ é

integrável, pois
$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq N}|K(x)|dx \leq \sum_{j=0}^{j_0}\int_{2^j\varepsilon\leq|x|\leq 2^{j+1}\varepsilon}|K(x)|dx \leq j_0A_1.$$
Dada então uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$, definimos as integrais singulares truncadas $T^{(\varepsilon,N)}$ como sendo os operadores dados pela convolução com o núcleo truncado $K^{(\varepsilon,N)}$:

$$T^{(\varepsilon,N)}f(x) = f * K^{(\varepsilon,N)}(x) = \int_{\varepsilon\leq|y|\leq N} f(x-y)K(y)dy. \tag{4.4.25}$$

Pela Desigualdade de Minkowski para integrais, $T^{(\varepsilon,N)}f$ está bem definida como função de L^p, para toda $f \in L^p$, com $1 \leq p \leq \infty$. Fica bem definida a integral singular maximal associada ao núcleo K que satisfaz a condição de tamanho fraca (4.4.23):

$$T^{(**)}f = \sup_{0<\varepsilon<N<\infty}|T^{(\varepsilon,N)}f|. \tag{4.4.26}$$

O caso em que K satisfaz a condição de tamanho (4.4.20), os operadores maximais $T^{(*)}$ e $T^{(**)}$ são comparáveis. Mais precisamente, é válido que $T^{(*)}f \leq T^{(**)}f$ e $T^{(**)}f \leq 2T^{(*)}f$.

Teorema 4.4.3 (Desigualdade de Cotlar)**.** *Considere K uma função definida em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ satisfazendo as seguintes condições*

(1) Condição de tamanho
$$|K(x)| \leq A_1|x|^{-n}, \quad \textit{para todo } x \neq 0. \tag{4.4.27}$$

(2) Condição Lipischitz fraca

$$|K(x-y) - K(x)| \leq A_2\frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \tag{4.4.28}$$

para alguma $\delta > 0$ e para todo $|x| \geq 2|y|$.

(3) Condição de cancelamento

$$\sup_{0<r<R<\infty}\left|\int_{r<|x|<R}K(x)dx\right| = A_3 < \infty \tag{4.4.29}$$

Suponha que exista $\delta_j \searrow 0$ tal que W dada por (4.4.10) seja uma distribuição temperada. Considere o operador integral singular T dado pela convolução com W. Então, existe uma constante $C_{n,\delta}$ tal que

$$T^{(*)}f \leq M(Tf) + C_{n,\delta}(A_1 + A_2 + A_3)Mf, \tag{4.4.30}$$

em que M é o operador maximal de Hardy-Littlewood.

Demonstração. Seja ϕ uma função suave radial e decrescente suportada na bola $|x| \leq 1/2$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$. Recorde que dada uma função g, temos $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}g(\varepsilon^{-1}x)$. Para cada

$\varepsilon > 0$, defina W_ε por

$$\langle W_\varepsilon, \psi \rangle = \varepsilon^{-n} \langle W, \psi_{\varepsilon^{-1}} \rangle,$$

em que $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(t^{-1}x)$. Por W ser uma ditribuição temperada, W_ε também a é, para todo $\varepsilon > 0$. Considere a função $K_{\varepsilon^{-1}}(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x)$. É elementar provar que $K_{\varepsilon^{-1}}$ satisfaz as condições (4.4.27), (4.4.15) e (4.4.29) com as mesmas constante e uniformemente em $\varepsilon > 0$. Pode-se provar facilmente também somente usando as definições as seguintes igualdades

$$f * K^{(\varepsilon)} = f * ({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)})_\varepsilon = (f * W) * \phi_\varepsilon + f * ({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi), \tag{4.4.31}$$

em que ${K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)}(x) = K_{\varepsilon^{-1}}\chi_{|x|\geq 1}$. Na prova deste teorema nos focaremos em estimar, uniformemente em $\varepsilon > 0$, os dois termos do lado direito da igualdade acima. Provemos que para todo $\varepsilon > 0$, vale que

$$|({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)(x)| \leq c(A_1 + A_2 + A_3)(1 + |x|)^{-n-\delta}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4.32}$$

Primeiro observamos que o fato de W coincidir com K fora da origem, implica que W_ε coincide com K_ε. De fato, considere $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ suportada longe da origem. Então $\psi_{\varepsilon^{-1}}(x) = \varepsilon^n \psi(\varepsilon x)$ está suportada também longe da origem. Logo a ação de W sobre $\psi_{\varepsilon^{-1}}$ coincide com a ação de K sobre $\psi_{\varepsilon^{-1}}$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle W_\varepsilon, \psi \rangle &= \varepsilon^{-n} \langle W, \psi_{\varepsilon^{-1}} \rangle \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x)\psi_{\varepsilon^{-1}}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\psi(x)dx \end{aligned}$$

Se $|x| \geq 1$, então como ϕ tem suporte em $|y| \leq 1/2$, a função $y \mapsto \tau^x\widetilde{\phi}(y) = \phi(x - y)$ está suportada na bola fechada $\overline{B}(x, 1/2)$, que é um compacto que não contém a origem. Logo,

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x) &= \langle W_{\varepsilon^{-1}}, \tau^x\widetilde{\phi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_{\varepsilon^{-1}}(x - y)\psi(y)dy. \end{aligned}$$

Como a integral de ϕ é igual a 1, temos que para $|x| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (K_{\varepsilon^{-1}}(x) - K_{\varepsilon^{-1}}(x - y))\phi(y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon^{-1}}(x) - K_{\varepsilon^{-1}}(x - y)||\phi(y)|dy. \end{aligned}$$

Pelo fato de ϕ estar suportada em $|y| \leq 1/2$, temos que $|x| \geq 2|y|$. Portanto usando a condição

(4.4.28), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K_{\varepsilon^{-1}}(x) - K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)||\phi(y)|dy &\leq \frac{A_2}{|x|^{n+\delta}} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\delta |\phi(y)|dy \\
&\leq 2^{n+\delta} \frac{A_2}{(1+|x|)^{n+\delta}} \int_{|y|\leq 1/2} |y|^\delta |\phi(y)|dy \\
&\leq 2^n \|\phi\|_{L^1} \frac{A_2}{(1+|x|)^{n+\delta}}. \qquad (4.4.33)
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $|x| < 1$, temos que ${K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)}(x) = K_{\varepsilon^{-1}}(x)\chi_{|x|\geq 1} = 0$ e então

$$|({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)(x)| = |W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x)|.$$

Afirmamos que existe uma sequência $\delta_j' \searrow 0$ tal que

$$W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x) = \lim_{j\to\infty} \int_{|y|\geq \delta_j'} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\phi(y)dy.$$

De fato, fazendo uma simples mudança de variável, temos que

$$\begin{aligned}
W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x) &= \varepsilon^n \langle W, (\tau^x \widetilde{\phi})_\varepsilon \rangle \\
&= \varepsilon^n \lim_{j\to\infty} \int_{|y|\geq \delta_j} K(y)(\tau^x \widetilde{\phi})_\varepsilon(y)dy \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{|x-y|\geq \varepsilon^{-1}\delta_j} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\phi(y)dy,
\end{aligned}$$

ou seja, basta tomar $\delta_j' = \varepsilon^{-1}\delta_j$. Agora, tome j suficientemente grande, de modo que $\delta_j' < 1/8$ e escreva

$$\begin{aligned}
W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x) &= \lim_{j\to\infty} \int_{|x-y|\geq \delta_j'} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\phi(y)dy \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{|x-y|\geq 1/8} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)\phi(y)dy, \\
I_2 &= \lim_{j\to\infty} \int_{1/8\geq|x-y|\geq\delta_j'} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)(\phi(y)-\phi(x))dy \\
&= \int_{1/8\geq|x-y|} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)(\phi(y)-\phi(x))dy \\
I_3 &= \phi(x) \lim_{j\to\infty} \int_{1/8\geq|x-y|\geq\delta_j'} K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)dy.
\end{aligned}$$

Cada uma das integrais I_j está bem definida. De fato, veja que integral I_1 é absolutamente convergente; basta usar a condição de tamanho para $K_{\varepsilon^{-1}}$ e o fato da integral ocorrer longe da origem, obtendo então

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_{|x-y|\geq 1/8} |K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)||\phi(y)|dy \\ &\leq 8^n A_1 \|\phi\|_{L^1} < \infty. \end{aligned} \tag{4.4.34}$$

Veja agora que pelo Teorema do Valor Médio para ϕ e a condição de tamanho de K temos

$$|K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)||\phi(x)-\phi(y)|\chi_{1/8\geq|x-y|\geq\delta_j'} \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(\xi)|A_1|x-y|^{-n+1}\chi_{|x-y|\leq 1/8}.$$

A função do lado direito da desigualdade é integrável e portando pelo Teorema da Convergência dominada vale a igualdade em I_2 e ainda, usando a condição de tamanho de $K_{\varepsilon^{-1}}$ e coordenadas polares,

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_{|x-y|\leq 1/8} |K_{\varepsilon^{-1}}(x-y)||\phi(y)-\phi(x)|dy \\ &\leq cA_1 \int_{|x-y|\leq 1/8} |x-y|^{-n+1}dy \\ &= \frac{c\omega_{n-1}}{8} A_1 < \infty \end{aligned} \tag{4.4.35}$$

em que $c = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\nabla\phi(\xi)|$. Como $W_{\varepsilon^{-1}}$ está bem definida como distribuição temperada:

$$\langle W_{\varepsilon^{-1}}, \phi\rangle = \lim_{\delta_j'\to 0} \int_{|x|\geq\delta_j'} K_{\varepsilon^{-1}}(x)\phi(x)dx,$$

o limite em I_3 necessariamente existe e ainda, pela condição de cancelamento

$$\begin{aligned}|I_3| &\leq \|\phi\|_{L^\infty} \sup_{0<r<R<\infty} \left|\int_{r\leq|y|\leq R} K_{\varepsilon^{-1}}(y)dy\right| \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty} A_3. \end{aligned} \tag{4.4.36}$$

Logo, pelas estimativas (4.4.34), (4.4.35) e (4.4.36), podemos obter uma constante C_n, tal que para todo $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}|({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)(x)| &= |W_{\varepsilon^{-1}} * \phi(x)| \\ &\leq C_n(A_1+A_2+A_3) \\ &\leq 2^{n+\delta} C_n \frac{(A_1+A_2+A_3)}{(1+|x|)^{n+\delta}}. \end{aligned} \tag{4.4.37}$$

E portanto, das estimativas (4.4.33) e (4.4.37), segue (4.4.32) que queríamos provar:

$$|({K_{\varepsilon^{-1}}}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)(x)| \leq c_{n,\delta}(A_1+A_2+A_3)(1+|x|)^{-n-\delta}, \text{ para todo } x\in\mathbb{R}^n,$$

para alguma constante $c_{n,\delta} > 0$ que depende da dimensão n e de δ. A função do lado direito da desigualdade $\Phi(x) = (1+|x|)^{-n-\delta}$ é radial decrescente e integrável. Pelo Corolário 2.1.7, obtemos a seguinte estimativa para o operador maximal

$$\sup_{\varepsilon>0} |f * (K_{\varepsilon^{-1}}{}^{(1)} - W_{\varepsilon^{-1}} * \phi)_\varepsilon| \leq c_{n,\delta}(A_1 + A_2 + A_3)\|\Phi\|_{L^1} Mf.$$

Nos resta agora estimar a função $(f * W) * \phi_\varepsilon$. Para tal, note que como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * W$ é $\mathcal{C}^\infty$. Por ϕ ser uma função radial decrescente e integrável, o Corolário 2.1.7 implica em

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * W) * \phi_\varepsilon| \leq M(f * W) = M(Tf). \tag{4.4.38}$$

Em vista da igualdade (4.4.31) e das estimativas obtidas (4.4.32) e (4.4.38), segue a Desigualdade de Cotlar:

$$T^{(*)} f = \sup_{\varepsilon>0} |f * K^{(\varepsilon)}| \leq M(Tf) + C_{n,\delta}(A_1 + A_2 + A_3) Mf.$$

□

Observe que a Desigualdade de Cotlar implica na limitação L^p do operador maximal $T^{(*)}$, desde que T seja limitada em L^p. Em particular, se T for limitada em algum L^r e K uma função nas condições do Teorema 4.4.30, então o Teorema 4.4.2 implica que T é limitada em L^p para todo $1 < p < \infty$ e portanto, em vista da limitação em L^p do operador maximal de Hardy-Littlewood, a Desigualdade de Cotlar implica que a integral singular maximal $T^{(*)}$ é limitada em L^p. Note que a Desigualdade de Cotlar foi obtida para o operador $T^{(*)}$, já que as condições que impomos sobre o núcleo K são as condições forte de tamanho. Neste caso, o mesmo vale para $T^{(**)}$. Porém, a Desigualdade de Cotlar pode não valer, caso K satisfaça a condição (4.4.23), já que esta é mais fraca que (4.4.27).

No seguinte teorema, sob condições mais fracas sobre K, obtemos uma estimativa do tipo fraco-$(1,1)$ para o operador $T^{(**)}$. Porém, para isto, será necessário impor uma condição L^2 sobre $T^{(**)}$.

Teorema 4.4.4. *Seja K uma função definida em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e integrável em compactos de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que*

(1) Condição de tamanho

$$\sup_{R>0} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |K(x)| dx \leq A_1 < \infty \tag{4.4.39}$$

(2) Condição de Hörmander

$$\sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx = A_2 < \infty. \tag{4.4.40}$$

Suponha que o operador maximal $T^{(**)}$ dado em (4.4.26) seja limitado em L^2 com norma

$\|T^{(**)}\|_{L^2\to L^2} \leq B$. *Então* $T^{(**)}$ *é limitado de* L^1 *em* $L^{1,\infty}$ *com norma*

$$\|T^{(**)}\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq C_n(A_1 + A_2 + B), \tag{4.4.41}$$

para alguma constante dimensional C_n.

Demonstração. Comece fixando uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$. Aplique a Decomposição de Calderón-Zygmund para f numa altura $\gamma\alpha$, em que $\gamma > 0$ é uma constante a ser escolhida de forma apropriada. Então, $f = g + b$, com g e b funções satisfazendo os itens de (1) a (6) do Teorema 4.4.1, $b = \sum_j b_j$ e cada b_j suportada num cubo diádico Q_j. Denote por Q_j^* um cubo de mesmo centro que Q_j, cujos lados são paralelos aos lados de Q_j de tamanho $l(Q_j^*) = 2\sqrt{n}l(Q_j)$. Para provar a limitação fraco-$(1,1)$ de T, é suficiente provar a seguinte estimativa

$$|\{x \notin \cup_j Q_j^* : |T^{(**)}b(x)| \geq \alpha/2\}| \leq 2^{n+8}A_2\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}. \tag{4.4.42}$$

De fato, suponha que (4.4.42) seja válida e veja que, por $T^{(**)}$ ser limitada em L^2, pelas propriedades (2), (6) do Teorema 4.4.1 e pela observação que sucede a demonstração da Decomposição de Calderón-Zygmund (4.4.6), temos

$$\begin{aligned}
|\{|T^{(**)}g| \geq \alpha/2\}| + |\cup_j Q_j^*| &\leq \frac{2^2}{\alpha^2}\|T^{(**)}g\|_{L^2}^2 + \sum_j |Q_j^*| \\
&\leq \frac{2^2}{\alpha^2}B^2\|g\|_{L^2}^2 + (2\sqrt{n})^n\sum_j |Q_j| \\
&\leq (2^{2+n}B^2\gamma + (2\sqrt{n})^n\gamma^{-1})\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo $\gamma = (2^{n+5}(A_1 + A_2 + B))^{-1}$,

$$\begin{aligned}
|\{|T^{(**)}f| \geq \alpha\}| &\leq |\{|T^{(**)}g| \geq \alpha/2\}| + |\cup_j Q_j^*| + |\{x \notin \cup_j Q_j^* : |T^{(**)}b(x)| \geq \alpha/2\}| \\
&\leq (2^{2+n}B^2\gamma + (2\sqrt{n})^n\gamma^{-1} + 2^{n+8}A_2)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}. \\
&\leq C_n(A_1 + A_2 + B)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha},
\end{aligned}$$

em que $C_n = 2^{-3} + (2\sqrt{n})^n 2^{n+3} + 2^{n+8}$, o que implica em

$$\|T^{(**)}\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \leq C_n(A_1 + A_2 + B).$$

Agora, para provar (4.4.42), é suficiente provar que, para todo $x \notin \cup_j Q_j$, vale que

$$T^{(**)}b(x) \leq 4E_1(x) + 2^{n+2}E_2(x) + 2^{n+3}\alpha\gamma A_1, \tag{4.4.43}$$

em que

$$E_1(x) = \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b_j(y)|dy,$$
$$E_2(x) = \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)|dy,$$

com y_j denotando o centro de Q_j. A necessidade de (4.4.42) para (4.4.43) é verificada a seguir. Se fixarmos $\gamma \leq (2^{n+5}A_1)^{-1}$, então vale $2^{n+3}A_1\gamma\alpha \leq \alpha/4 < \alpha/3$ e, notando que $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{12} + \frac{\alpha}{12}$, temos

$$\begin{aligned}|\{x \notin \cup_j Q_j^* : |T^{(**)}b(x)| \geq \alpha/2\}| &\leq |\{x \notin \cup_j Q_j^* : 4E_1(x) \geq \alpha/12\}| \\ &\quad + |\{x \notin \cup_j Q_j^* : 2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x) \geq \alpha/12\}| \\ &\leq \frac{48}{\alpha}\int_{(Q_j^*)^c} E_1(x)dx + 2^{n+6}\gamma \int_{(Q_j^*)^c} E_2(x)dx. \end{aligned} \tag{4.4.44}$$

Analisemos cada uma das integrais agora. Estimamos a integral de E_1 usando o Teorema de Fubini e a condição de Hörmander de K:

$$\begin{aligned}\int_{(\cup_j Q_j^*)^c} E_1(x)dx &\leq \sum_i \int_{(Q_i^*)^c}\int_{Q_i} |K(x-y) - K(x-y_i)||b_i(y)|dydx \\ &= \sum_i \int_{Q_i} |b_i(y)| \int_{(Q_i^*)^c} |K(x-y) - K(x-y_i)|dxdy \\ &\leq \sum_i \int_{Q_i} |b_i(y)| \int_{|x-y_i|\geq 2|y-y_i|} |K(x-y) - K(x-y_i)|dxdy \\ &\leq A_2 \sum_i \|b_i\|_{L^1} \\ &\leq A_2 2^{n+1}\|f\|_{L^1}. \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

Na segunda desigualdade usamos o fato de que se $x \notin Q_i^*$ e $y \in Q_i$, então

$$|x-y_i| \geq \frac{1}{2}l(Q_i^*) = \sqrt{n}l(Q_i) \geq 2|y-y_i|.$$

De forma análoga, provamos que

$$\begin{aligned}\int_{(\cup_j Q_j^*)^c} E_2(x)dx &\leq \sum_i \int_{Q_i}\int_{(Q_i^*)^c} |K(x-y) - K(x-y_i)|dxdy \\ &\leq \sum_i \int_{Q_i} |b_i(y)| \int_{|x-y_i|\geq 2|y-y_i|} |K(x-y) - K(x-y_i)|dxdy \\ &\leq A_2 \sum_i |Q_i| \\ &\leq A_2 \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha\gamma}. \end{aligned} \tag{4.4.46}$$

As estimativas (4.4.45) e (4.4.46) nos permite estimar (4.4.44):

$$\begin{aligned}|\{x \notin \cup_j Q_j^* : |T^{(**)}b(x)| \geq \alpha/2\}| &\leq \frac{3}{\alpha} A_2 2^{n+5} \|f\|_{L^1} + 2^{n+6} A_2 \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha} \\ &\leq 2^{n+8} A_2 \frac{\|f\|L^1}{\alpha},\end{aligned}$$

donde obtemos (4.4.42). Portanto, precisamos provar (4.4.43) para concluir a demonstração. Uma vez que $b = \sum_j b_j$, para estimar $T^{(**)}b$, basta estimar $|T^{(\varepsilon,N)}b_j|$, uniformemente em ε e N. Para tal, é fácil verificar que

$$|T^{(\varepsilon,N)}b_j| \leq |T^{(\varepsilon)}b_j| + |T^{(N)}b_j|. \tag{4.4.47}$$

Consequentemente, $T^{(**)}b \leq 2T^{(*)}b$. Note que a integrais truncadas $T^{(\varepsilon)}b_j$ estão bem definidas, já que b_j tem suporte compacto. Fixemos $x \notin \cup_j Q_j^*$ e $\varepsilon > 0$ e defina

$$\begin{aligned} J_1 = J_1(x,\varepsilon) &= \{j : |x-y| < \varepsilon, \forall y \in Q_j\}, \\ J_2 = J_2(x,\varepsilon) &= \{j : |x-y| > \varepsilon, \forall y \in Q_j\}, \\ J_3 = J_3(x,\varepsilon) &= \{j : |x-y| = \varepsilon, \text{para algum } y \in Q_j\}. \end{aligned}$$

Note que os conjuntos J_1, J_2 e J_3 contém os índices j tais que $Q_j \subset B(x,\varepsilon)$, $Q_j \supset B(x,\varepsilon)$ e $Q_j \cap \partial B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ respectivamente. Além disso os conjuntos J_i são disjuntos entre si. Observe que se $j \in J_1$, então $Q_j \subset B(x,\varepsilon)$, por definição de J_1. Neste caso,

$$T^{(\varepsilon)}b_j(x) = \int_{Q_j \cap B(x,\varepsilon)^c} b_j(y)K(x-y)dy = 0.$$

Se $j \in J_2$ e $y \in Q_j$, então $|x-y| > \varepsilon$ e portanto

$$K^{(\varepsilon)}(x-y) = K(x-y).$$

Em vista destas observações sobre J_i, temos que para $x \notin \cup_j Q_j^*$,

$$\begin{aligned} T^{(\varepsilon)}b(x) &= \sum_j T^{(\varepsilon)}b_j(x) \\ &= \sum_{j\in J_2} T^{(\varepsilon)}b_j(x) + \sum_{j\in J_3} T^{(\varepsilon)}b_j(x) \\ &= \sum_{j\in J_2} K * b_j(x) + \sum_{j\in J_3} T^{(\varepsilon)}b_j(x). \end{aligned} \tag{4.4.48}$$

A seguir, vamos estimar a soma em J_2 por $E_1(x)$ usando o fato de cada b_j ter integral nula.

Para todo $\varepsilon > 0$, vale que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j\in J_2} T^{(\varepsilon)} b_j(x)\right| &\leq \sum_j |K * b_j(x)| \\ &\leq \sum_j \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y_j)||b_j(y)|dy = E_1(x).\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_2} T^{(\varepsilon)} b_j(x)\right| \leq E_1(x). \tag{4.4.49}$$

Resta-nos estimar $\sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_3} T^{(\varepsilon)} b_j(x)\right|$. A contas a seguir valem também N no lugar de ε. Fixe $\varepsilon > 0$, um cubo Q_j com $j \in J_3(x,\varepsilon)$ e $x \notin \cup_j Q_j^*$. Existe, pela definição de J_3, $y_0 \in Q_j$ tal que $|x - y_0| = \varepsilon$. Como em particular $x \notin Q_j^*$ e $y_0 \in Q_j$, temos que $|x - y_j| \geq \frac{l(Q_j^*)}{2}$ e $|y_j - y_0| \leq \frac{\sqrt{n}}{2} l(Q_j)$. Então,

$$\varepsilon = |x - y_0| \geq |x - y_j| - |y_j - y_0| \geq \frac{\sqrt{n}}{2} l(Q_j).$$

Além disso, para todo $y \in Q_j$, $|y - y_0| \leq \sqrt{n} l(Q_j) \leq \varepsilon/2$, donde segue que $\varepsilon/2 \leq |x-y| \leq 3\varepsilon/2$, para todo $y \in Q_j$. Isto prova que a união $\cup_{j\in J_3} Q_j$ está contida no anel $B(x, 3\varepsilon/2)\backslash B(x,\varepsilon/2)$. Para cada $j \in J(x,\varepsilon)$, denote por $c_j(\varepsilon) = \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} b_j(y)\chi_{B(x,\varepsilon)^c}(y)dy$. Pela Decomposição de Calderón-Zygmund, $\|b\|_{L^1} \leq 2^{n+1}\alpha\gamma|Q_j|$. Logo, $c_j(\varepsilon) \leq 2^{n+1}\alpha\gamma$. Sendo assim, pela definição de $c_j(\varepsilon)$, temos que para todo $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j\in J_3} T^{(\varepsilon)} b_j(x)\right| &= \left|\sum_{j\in J_3}\int_{Q_j} b_j(y)\chi_{B(x,\varepsilon)^c}K(x-y)dy\right| \\
&\leq \left|\sum_{j\in J_3}\int_{Q_j} (b_j(y)\chi_{B(x,\varepsilon)^c} - c_j(\varepsilon)(y))K(x-y)dy\right| \\
&\qquad + \left|\sum_{j\in J_3} c_j(\varepsilon)\int_{Q_j} K(x-y)dy\right| \\
&\leq \left|\sum_{j\in J_3}\int_{Q_j} (b_j(y)\chi_{B(x,\varepsilon)^c} - c_j(\varepsilon)(y))(K(x-y)-K(x-y_j))dy\right| \\
&\qquad + 2^{n+1}\alpha\gamma\int_{\cup_{j\in J_3}Q_j} |K(x-y)|dy \\
&\leq \sum_j\int_{Q_j} (|b_j(y)| + c_j(\varepsilon)(y))|K(x-y)-K(x-y_j)|dy \\
&\qquad + 2^{n+1}\alpha\gamma\int_{\varepsilon/2\leq|x-y|\leq 3\varepsilon/2} |K(x-y)|dy \\
&= \sum_j\int_{Q_j} |b_j(y)||K(x-y)-K(x-y_j)|dy \\
&\qquad + 2^{n+1}\alpha\gamma\sum_j\int_{Q_j} |K(x-y)-K(x-y_j)|dy + 2^{n+1}\alpha\gamma(2A_1) \\
&= E_1(x) + 2^{n+1}\alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+2}\alpha\gamma A_1,
\end{aligned}
$$

e portanto, para todo $x \notin \cup_j Q_j^*$,

$$
\sup_{\varepsilon>0}\left|\sum_{j\in J_3} T^{(\varepsilon)} b_j(x)\right| \leq E_1(x) + 2^{n+1}\alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+2}\alpha\gamma A_1. \tag{4.4.50}
$$

Em vista das estimativas (4.4.49) e (4.4.50), obtemos de (4.4.48)

$$
T^{(*)}b(x) = \sup_{\varepsilon>0}|T^{(\varepsilon)}b(x)| \leq 2E_1(x) + 2^{n+1}\alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+2}\alpha\gamma A_1. \tag{4.4.51}
$$

Logo, obtemos a estimativa (4.4.43) para $T^{(**)}b$,

$$
|T^{(**)}b(x)| \leq 2|T^{(*)}b(x)| \leq 4E_1(x) + 2^{n+2}\alpha\gamma E_2(x) + 2^{n+3}\alpha\gamma A_1.
$$

$\square$

Uma consequência imediata do Teorema 4.4.4 é que as transformadas maximais de Hilbert $H^{(*)}$ e de Riesz $R_j^{(*)}$ são limitadas de L^1 em $L^{1,\infty}$. De fato, as funções $k(x) = 1/x$ e $k_j(x) = x_j/|x|^{n+1}$ são os núcleos de H e R_j respectivamente e satisfazem trivialmente a condição de tamanho (4.4.20), que é mais forte que (4.4.39) e a condição do gradiente (4.4.14), que por sua vez é mais forte que a condição de Hörmander. Neste caso, os operadores $H^{(**)}$ e $H^{(*)}$

são comparáveis; o mesmo vale para $R_j^{(*)}$ e $R_j^{(**)}$. Ademais, pelos Teoremas (4.1.6) e (4.3.11), $H^{(*)}$ e $R_j^{(*)}$ são limitadas, em particular, em L^2. Portanto o Teorema 4.4.4 implica na limitação fraca-$(1,1)$ dos operadores maximais $H^{(*)}$ e $R_j^{(*)}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Fica provado assim o seguinte corolário

Corolário 4.4.5. *As transformadas maximais de Hilbert $H^{(*)}$ e de Riesz $R_j^{(*)}$, dadas por*

$$H^{(*)}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{f(x-y)}{|y|} dy,$$
$$R_j^{(*)}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} C_n \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|} f(x-y) dy,$$

são limitadas de L^1 em $L^{1,\infty}$.

Outra consequência é a limitação L^p de $T^{(**)}$, para $1 < p < 2$.

Teorema 4.4.6. *Sob as hipóteses do Teorema 4.4.4, a integral singular maximal $T^{(**)}$ é limitada de L^p em L^p, para todo $1 < p < 2$.*

Demonstração. Como T é limitada em L^2 por hipótese e o Teorema 4.4.4 nos dá a limitação fraca-$(1,1)$ de $T^{(**)}$, basta utilizar interpolação (Teorema 1.2.1) para obter a limitação de L^p em L^p de $T^{(**)}$, para todo $1 < p < 2$.

□

4.4.4 Condições Suficientes para Limitação L^p de Integrais Singulares e Integrais Singulares Maximais

Vamos denotar por K uma função definida em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, localmente integrável em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, satisfazendo as seguintes condições:

(1) Condição de tamanho

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq|x|\leq 2R} |K(x)| dx \leq A_1 < \infty \tag{4.4.52}$$

(2) Condição de Hörmander

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx = A_2 < \infty. \tag{4.4.53}$$

(3) Condição de cancelamento

$$\sup_{0<r<R<\infty} \left| \int_{r<|x|<R} K(x) dx \right| = A_3 < \infty. \tag{4.4.54}$$

Tais condições são suficientes para a existência de uma distribuição temperada W, que coincide com K fora da origem, da forma

$$\langle W, \phi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{j\geq|x|\geq\delta_j} K(x)\phi(x)dx, \tag{4.4.55}$$

para alguma sequência $\delta_j \searrow 0$. De fato, a condição de cancelamento (4.4.54) implica que para alguma sequência $\delta_j \searrow 0$, existe o limite

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\delta_j\leq|x|\leq 1} K(x)dx = L.$$

Em vista de K satisfazer a condição de tamanho (4.4.52), a existência do limite acima é uma condição necessária e suficiente para que W, dada em (4.4.55), esteja bem definida como uma distribuição temperada que coincida com K fora da origem.

Teorema 4.4.7. *Suponha que K satisfaça as condições (4.4.52), (4.4.53) e (4.4.54) e considere a distribuição temperada W dada por (4.4.55). Recorde da definição dos núcleos truncados $K^{(\varepsilon,N)} = K\chi_{\varepsilon\leq|\cdot|\leq N}$. Nestas condições, temos que*

$$\sup_{0<\varepsilon<N<\infty} \|(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge\|_{L^\infty} \leq 15(A_1 + A_2 + A_3), \tag{4.4.56}$$

e portanto

$$\|\widehat{W}\|_{L^\infty} \leq 15(A_1 + A_2 + A_3). \tag{4.4.57}$$

Consequentemente, o operador integral singular T dado pela convolução com W é limitado em L^2.

Demonstração. Comecemos por provar a estimativa (4.4.56). Fixe $0 < \varepsilon < N < \infty$ e tome $\xi \in \mathbb{R}^n$. Vamos considerar três casos. O primeiro, considere $\varepsilon < |\xi|^{-1} < N$. Neste caso, escreva

$$\begin{aligned}(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi) &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq N} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ &= I_1^{(\varepsilon)}(\xi) + I_2^{(N)}(\xi),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}I_1^{(\varepsilon)}(\xi) &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\ I_2^{(N)}(\xi) &= \int_{|\xi|^{-1}\leq|x|\leq N} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.\end{aligned}$$

Vamos estimar cada uma das integrais. Reescreva $I_1^{(\varepsilon)}$ da seguinte forma

$$I_1^{(\varepsilon)}(\xi) = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq|\xi|^{-1}} K(x)dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq|\xi|^{-1}} K(x)(e^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1)dx. \tag{4.4.58}$$

O primeiro termo do lado direito podemos estimar por A_3, usando a condição de cancelamento. O segundo termo usamos a Teorema do Valor Médio para a função $e^{-2\pi i(\cdot)\cdot\xi}$ e obtemos, para algum $\eta = tx$, com $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned}
|I_1^{(\varepsilon)}(\xi)| &\leq A_3 + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq |\xi|^{-1}} |K(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1|dx \\
&\leq A_3 + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq |\xi|^{-1}} |K(x)||\nabla_x(e^{-2\pi i(\cdot)\cdot\xi})(\eta)||x|dx \\
&\leq A_3 + 2\pi \frac{1}{|\xi|^{-1}} \int_{|x| \leq |\xi|^{-1}} |K(x)||x|dx \\
&\leq A_3 + 2\pi(2A_1).
\end{aligned}$$

A última desigualdade é justificada pelo fato de as condições (4.4.7) e (4.4.8) serem equivalentes. Logo, obtemos uma estimativa uniforme em $\varepsilon > 0$ para I_1

$$|I_1^{(\varepsilon)}(\xi)| \leq A_3 + 4\pi A_1. \tag{4.4.59}$$

Para estimar $I_2^{(N)}(\xi)$, escreva $z = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ e note que $e^{2\pi i z\cdot\xi} = -1$. Fazendo a mudança de variável $x = y - z$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_2^{(N)}(\xi) &= \int_{|\xi|^{-1} \leq |y-z| \leq N} K(y-z)e^{-2\pi i(y-z)\cdot\xi}dy \\
&= -\int_{|\xi|^{-1} \leq |y-z| \leq N} K(y-z)e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy.
\end{aligned}$$

Neste caso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_2^{(N)}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1} \leq |x| \leq N} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx - \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1} \leq |y-z| \leq N} K(x-z)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= J_1(\xi) + J_2(\xi) + J_3(\xi) + J_4(\xi) + J_5(\xi),
\end{aligned}$$

em que cada J_k é dado por

$$\begin{aligned}
J_1(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1} \leq |x-z| \leq N} (K(x) - K(x-z))e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\
J_2(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1} \leq |x| \leq N \\ |x-z| \leq |\xi|^{-1}}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\
J_3(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1} \leq |x| \leq N \\ |x-z| \geq N}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\
J_4(\xi) &= -\frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1} \leq |x-z| \leq N \\ |x| \leq |\xi|^{-1}}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\
J_5(\xi) &= -\frac{1}{2}\int_{\substack{|\xi|^{-1} \leq |x-z| \leq N \\ |x| \geq N}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.
\end{aligned}$$

Para escrever $I_2^{(N)}$ como soma das integrais J_k, usamos a identidade

$$\int_A f - \int_B g = \int_B (f-g) + \int_{A\setminus B} f - \int_{B\setminus A} f.$$

Vamos agora estimar cada uma integrais J_k. Veja que como $2|z| = |\xi|^{-1}$, pela condição de Hörmander (4.4.53),

$$|J_1(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{2|z|\leq|x-z|\leq N} |K(x) - K(x-z)|dx \leq \frac{1}{2}A_2.$$

Na integral J_2, temos

$$|x-z| \leq |\xi|^{-1} \quad \text{e} \quad |\xi|^{-1} \leq |x| \leq N \quad \Longrightarrow \quad |\xi|^{-1} \leq |x| \leq \frac{3}{2}|\xi|^{-1}.$$

Pela a condição de tamanho

$$|J_2(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{|\xi|^{-1}\leq|x|\leq\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \leq \frac{1}{2}A_1.$$

Por outro lado,

$$|\xi|^{-1} \leq |x-z| \leq N \quad \text{e} \quad |x| \leq |\xi|^{-1} \Longrightarrow \frac{1}{2}|\xi|^{-1} \leq |x| \leq |\xi|^{-1}.$$

Logo, J_4 é estimada também usando a condição de tamanho

$$|J_4(\xi)| \leq \frac{1}{2}A_1.$$

Agora, quando $|x-z| \geq N$ e $|\xi|^{-1} \leq |x| \leq N$, temos $\frac{1}{2}N \leq |x| \leq N$. Para $|x-z| \leq N$ e $|x| \geq N$, temos $N \leq |x| \leq \frac{3}{2}N$. Assim, usando novamente a condição de tamanho (4.4.52) podemos estimar J_3 e J_5 também por $\frac{1}{2}A_1$.

Logo, estimamos $I_2^{(N)}$ uniformemente em $N > 0$

$$|I_2^{(N)}| \leq \sum_{k=1}^{5} |J_k(\xi)| \leq \frac{1}{2}A_2 + 2A_1. \tag{4.4.60}$$

Portanto, para o caso em que $\varepsilon \leq |\xi|^{-1} \leq N$, em vista das estimativas (4.4.59) e (4.4.60), obtemos que para todo ε e N

$$\begin{aligned} |(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi)| &\leq |I_1^{(\varepsilon)}| + |I_2^{(N)}| \\ &\leq A_3 + 4\pi A_1 + \frac{1}{2}A_2 + 2A_1 \\ &\leq 15(A_1 + A_2 + A_3). \end{aligned} \tag{4.4.61}$$

O segundo caso é quando $\varepsilon < N \leq |\xi|^{-1}$. Escreva

$$(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi) = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq N} K(x)dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq N} K(x)(e^{-2\pi ix\cdot\xi} - 1)dx.$$

De forma análoga ao que foi feito para estimar (4.4.58), temos

$$|(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi)| \leq A_3 + 4\pi A_1 \leq 15(A_1 + A_2 + A_3). \tag{4.4.62}$$

Por fim, o terceiro caso é $|\xi|^{-1} \leq \varepsilon < N$. Aqui, escrevemos

$$(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi) = \int_{|\xi|^{-1}\leq|x|\leq N} K(x)dx - \int_{|\xi|^{-1}\leq|x|\leq\varepsilon} K(x)dx = I_2^{(N)} - I_2^{(\varepsilon)}.$$

Em vista da estimativa (4.4.60), temos que

$$|(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi)| \leq 4A_1 + A_2 \leq 15(A_1 + A_2 + A_3). \tag{4.4.63}$$

O que conclui-se das estimativas (4.4.61), (4.4.62) e (4.4.63) é que

$$|(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge(\xi)| \leq 15(A_1 + A_2 + A_3),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\varepsilon < N$, o que implica de imediato a estimativa (4.4.56).

Agora, como $K^{(\delta_j,j)}$ tem transformada de Fourier Limitada, pelo Teorema 3.2.5, o operador $T^{(\delta_j,j)}f = f * K^{(\delta_j,j)}$ é limitado em L^2 com norma $\|(K^{(\varepsilon,N)})^\wedge\|_{L^\infty}$. Podemos ver a distribuição temperada W como

$$\langle W, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K^{(\delta_j,j)}(x)\phi(x)dx.$$

Sendo assim, $Tf = f * W = \lim_{j\to\infty} f * T^{(\delta_j,j)}$ e pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\|f * W\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} |f * K^{(\delta_j,j)}(x)|^2 dx \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f * K^{(\delta_j,j)}(x)|^2 dx \\
&= \liminf_{j\to\infty} \|f * K^{(\delta_j,j)}\|_{L^2}^2 \\
&\leq (15(A_1 + A_2 + A_3))^2 \|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Isto prova que o operador integral singular T é limitado em L^2, o que equivale a $\widehat{W}$ ser uma função limitada com

$$\|\widehat{W}\|_{L^\infty} \leq 15(A_1 + A_2 + A_3).$$

$\square$

Como consequência do teorema anterior, obtemos então a limitações L^p e fraca-$(1,1)$ de T. De fato, as condições sobre o núcleo K são suficientes para a limitação L^2 de T. Pelo

Teorema 4.4.2 a limitação L^2 de T implica que que T é do tipo fraco-$(1,1)$ e limitada de L^p em L^p. Fica provado então o seguinte corolário.

Corolário 4.4.8. *Sob as hipóteses do Teorema 4.4.7, a integral singular T, dada pela convolução com a distribuição temperada W, admite extensão limitada de L^p em L^p e de L^1 em $L^{1,\infty}$. Além disso, existe uma constante dimensionais $C_n > 0$, de modo que T satisfaz as seguintes estimativas*

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \leq C_n(A_1 + A_2 + A_3)\max\{p,(p-1)^{-1}\}$$
$$\|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}} \leq C_n(A_1 + A_2 + A_3).$$

Exemplo 4.4.9. *Seja $\tau \neq 0$ em $\mathbb{R}$ e defina, para todo $x \neq 0$,*

$$K(x) = \frac{1}{|x|^{n+i\tau}}.$$

Considere também

$$\langle W, \phi\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_{|x|\geq\delta_k}\phi(x)\frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}. \tag{4.4.64}$$

O propósito deste exemplo é exibir duas sequências δ_k e δ_k' que nos dá duas distribuições temperadas W e W' diferentes. Antes disso, verifiquemos que K satisfaz as condições (4.4.52), (4.4.53) e (4.4.54). De fato, veja que

$$\int_{R\leq|x|\leq 2R}|K(x)|dx = \int_{R\leq|x|\leq 2R}\frac{1}{|x|^n}dx = \omega_{n-1}\int_R^{2R}\frac{dr}{r} = \omega_{n-1}\log(2),$$

o que implica que K satisfaz a condição de tamanho (4.4.52). Uma vez que K é suave fora da origem, vamos verificar que K satisfaz a condição do gradiente, o que é suficiente para K satisfazer a condição de Hörmander (4.4.53). É fácil verificar que

$$\nabla K(x) = -(n+i\tau)\frac{x}{|x|^{n+1+i\tau}}.$$

Logo, é evidente que K satisfação a condição do gradiente, pois

$$|\nabla K(x)| = |n+i\tau|\frac{1}{|x|^{n+1}}.$$

Por fim, verificamos a condição de cancelamento como segue. Para todo $r < R$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{r\leq|x|\leq R}\frac{1}{|x|^{n+i\tau}}dx\right| &= \omega_{n-1}\left|\int_r^R\frac{1}{r^{1+i\tau}}dr\right|\\ &= \omega_{n-1}\frac{|r^{-i\tau}-R^{-i\tau}|}{|\tau|}\\ &\leq 2\frac{\omega_{n-1}}{|\tau|}.\end{aligned}$$

Isto prova que K satisfaz a condição (4.4.54).

Retornemos agora para a distribuição W. Primeiro, tome $\delta_k = e^{\frac{2\pi k}{\tau}}$. Neste caso, veja que o seguinte fato

$$\int_{\delta_k \le |x| \le 1} \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}} = \omega_{n-1} \int_{\delta_k}^{1} \frac{dr}{r^{1+i\tau}}$$
$$= \omega_{n-1} \frac{(1-\delta_k^{-i\tau})}{-i\tau}$$
$$= \omega_{n-1} \frac{(1-e^{2\pi k i})}{-i\tau} = 0$$

é suficiente para que W esteja bem definida como uma distribuição temperada. Além disso, temos que

$$\langle W, \phi \rangle = \int_{|x|\le 1} (\phi(x) - \phi(0)) \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}} + \int_{|x|\ge 1} \phi(x) \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}.$$

Por outro lado, tomando $\delta_k' = e^{\frac{-2\pi(k+1)}{\tau}}$, é fácil verificar que

$$\int_{\delta_k' \le |x| \le 1} \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}} = -\frac{2\omega_{n-1}}{i\tau}.$$

Neste caso, W' dada por

$$\langle W', \phi \rangle = \int_{|x|\le 1} (\phi(x) - \phi(0)) \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}} - \phi(0) \frac{2\omega_{n-1}}{i\tau} + \int_{|x|\ge 1} \phi(x) \frac{dx}{|x|^{n+i\tau}}$$

está bem definida como distribuição temperada e claramente é diferente de W.

O seguinte teorema nos apresenta condições suficiente para as integrais singulares maximais $T^{(**)}$ sejam limitadas em L^p. De fato, além das condições de tamanho e de suavidade para K, a condição adicional de cancelamento é suficiente para que $T^{(**)}$ seja limitada em L^p, para todo $1 < p < \infty$. Note que as condições para se obter a limitação L^p de T e de $T^{(**)}$ são as mesmas.

Teorema 4.4.10. *Suponha que K seja uma função definida em $R^n \backslash \{0\}$ localmente integral em $R^n \backslash \{0\}$ e que satisfaz as condições (4.4.52), (4.4.53) e (4.4.54). Então a integral singular maximal $T^{(**)}$ é limitada em L^p, $1 < p < \infty$, com norma*

$$\|T^{(**)}\|_{L^p \to L^p} \le C_n \max\{p, (p-1)^{-1}\}(A_1 + A_2 + A_3), \tag{4.4.65}$$

para alguma constante dimensional $C_n > 0$.

Demonstração. Em vista das condições satisfeitas pelo núcleo K, consideramos aqui, para alguma sequência $\delta_j \searrow 0$, a distribuição temperada W dada por

$$\langle W, \phi \rangle = \lim_{j \to \infty} \int_{j \ge |x| \ge \delta_j} K(x)\phi(x)dx,$$

e o operador integral singular T dado pela convolução com W.

Comece fixando $1 < p < \infty$ e uma função com suporte compacto $f \in L^p \cap L^\infty$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tome $|z_1 - x| \leq \varepsilon/2$ e $|z_2 - x| \leq N/2$. Reescreva $T^{(\varepsilon,N)}f(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T^{(\varepsilon,N)}f(x) &= \int_{\varepsilon \leq |x-y|} K(x-y)f(y)dy - \int_{N \leq |x-y|} K(x-y)f(y)dy \\
&= \int_{\varepsilon \leq |x-y|} (K(x-y) - K(z_1 - y))f(y)dy + \int_{\varepsilon \leq |x-y|} K(z_1 - y)f(y)dy \\
&\quad - \int_{N \leq |x-y|} (K(x-y) - K(z_2 - y))f(y)dy - \int_{N \leq |x-y|} K(z_2 - y)f(y)dy \\
&= \int_{\varepsilon \leq |x-y|} (K(x-y) - K(z_1 - y))f(y)dy + Tf(z_1) - T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1) \\
&\quad - \int_{N \leq |x-y|} (K(x-y) - K(z_2 - y))f(y)dy - Tf(z_2) + T(f\chi_{|x-\cdot|<N})(z_2).
\end{aligned}$$

A última igualdade decorre da seguinte igualdade

$$Tf(z_1) = T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1) + \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(z_1 - y)f(y)dy. \tag{4.4.66}$$

De fato, analisemos o segundo termo do lado direito da igualdade. Como $|x-y| \geq \varepsilon$ e z_1 foi tomado de modo que $|z_1 - x| \leq \varepsilon/2$, então $|z_1 - y| \geq \varepsilon/2$. Logo,

$$\begin{aligned}
T(f\chi_{|x-\cdot|\geq\varepsilon})(z_1) &= \lim_{\delta_j \to 0} \int_{|z_1 - y| \geq \delta_j} K(z_1 - y)f(y)\chi_{|x-y|\geq\varepsilon}dy \\
&= \int_{|z_1 - y|\geq\varepsilon} K(z_1 - y)f(y)\chi_{|x-y|\geq\varepsilon}dy \\
&= \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(z_1 - y)f(y)dy.
\end{aligned}$$

Donde obtemos (4.4.66). O mesmo vale para z_2, com N no lugar de ε.

Denote por

$$\begin{aligned}
F_x(z_1) &= \int_{\varepsilon \leq |x-y|} |K(x-y) - K(z_1 - y)||f(y)|dx + |Tf(z_1)| + |T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1)| \\
G_x(z_2) &= \int_{N \leq |x-y|} |K(x-y) - K(z_2 - y)||f(y)|dx + |Tf(z_2)| + |T(f\chi_{|x-\cdot|<N})(z_2)|.
\end{aligned}$$

Então, claramente

$$|T^{(\varepsilon,N)}f(x)| \leq F_x(z_1) + G_x(z_2).$$

O termo do lado esquerdo é constante em z_1, z_2. Temos também $F_x(z_1)$ é constante em z_2 e $G_x(z_2)$ constante em z_1. Então, calculando a média em $z_1 \in B(x, \varepsilon/2)$ e em seguida $z_2 \in$

$B(x, \varepsilon/2)$ na estimativa acima, obtemos

$$|T^{(\varepsilon,N)}f(x)| \leq \fint_{|z_1-x|<\varepsilon/2} F_x(z_1)dz_1 + \fint_{|z_2-x|<N/2} G_x(z_2)dz_2, \tag{4.4.67}$$

Pelo Corolário 4.4.8, T é limitado em L^p com norma

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \leq C_n \max\{p, (p-1)^{-1}\}(A_1 + A_2 + A_3).$$

Por simplicidade denote a constante do lado direito por $A = C_n \max\{p, (p-1)^{-1}\}(A_1+A_2+A_3)$. Pela desigualdade de Hölder e usando a limitação L^p de T, temos que

$$\int_{|z_1-x|\leq\varepsilon/2} |T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1)|dz_1 \leq |B(x, \varepsilon/2)|^{1/p'} A\|f\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}.$$

E portanto, dividindo pela medida da bola $|B(x, \varepsilon/2)|$, obtemos

$$\begin{aligned} \fint_{|z_1-x|\leq\varepsilon/2} |T(f\chi_{|x-\cdot|<\varepsilon})(z_1)|dz_1 &\leq \frac{A\|f\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}}{|B(x,\varepsilon/2)|^{1/p}} \\ &= A\left(\fint_{B(x,\varepsilon/2)} |f(z_1)|^p dz_1\right)^{1/p} \\ &\leq A(M(|f|^p)(x))^{1/p}, \end{aligned} \tag{4.4.68}$$

em que M é a função maximal de Hardy-Littlewood. No que segue, usando a condição de Hörmander,

$$\begin{aligned} &\fint_{2|x-z_1|\leq\varepsilon} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} |K(x-y) - K(z_1-y)||f(y)|dydz_1 \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \fint_{2|x-z_1|\leq\varepsilon} \int_{|y|\geq 2|x-z_1|} |K(y) - K(y-(x-z_1))|dydz_1 \\ &\leq A_2\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned} \tag{4.4.69}$$

Agora, é fácil ver que

$$\fint_{|z_1-x|\leq\varepsilon/2} |Tf(z_1)|dz_1 \leq M(Tf)(x). \tag{4.4.70}$$

Claramente, as estimativas (4.4.68), (4.4.69) e (4.4.70) são válidas trocando z_1 por z_2 e ε por N. As estimativas (4.4.68), (4.4.69) e (4.4.70) (e as respectivas análogas) nos permite estimar a integral de F_x (e G_x) em (4.4.67) como segue

$$\fint_{|z_1-x|<\varepsilon/2} F_x(z_1)dz_1 \leq A_2\|f\|_{L^\infty} + M(Tf)(x) + A[M(|f|^p)(x)]^{1/p} \tag{4.4.71}$$

$$\fint_{|z_2-x|<N/2} G_x(z_2)dz_2 \leq A_2\|f\|_{L^\infty} + M(Tf)(x) + A[M(|f|^p)(x)]^{1/p}. \tag{4.4.72}$$

Em vista do controle em (4.4.67) sobre o operador truncado, as estimativas obtidas (4.4.71) e

(4.4.72), implicam em

$$|T^{(**)}f(x)| \leq 2[A_2\|f\|_{L^\infty} + M(Tf)(x) + A \cdot M(|f|^p)(x)^{1/p}.] \tag{4.4.73}$$

Definindo um operador S_p por

$$S_p f = M(Tf) + A \cdot M(|f|^p)^{1/p},$$

temos que

$$|T^{(**)}f(x)| \leq 2A_2\|f\|_{L^\infty} + 2S_p f(x). \tag{4.4.74}$$

O fato de M for do tipo fraco-$(1,1)$ e fraco-(p,p) [7] com norma

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L^{1,\infty}} &\leq 3^n\|f\|_{L^1}, \\ \|Mf\|_{L^{p,\infty}} &\leq 2 \cdot 3^{n/p}\|f\|_{L^p}, \end{aligned} \tag{4.4.75}$$

implica que S_p é também do tipo fraco-(p,p). Basta observar que (4.4.75) implica em

$$\begin{aligned} \|S_p f\|_{L^{p,\infty}} &\leq \|M(Tf)\|_{L^{1,\infty}} + A\|M(|f|^p)^{1/p}\|_{L^{p,\infty}} \\ &\leq 2 \cdot 3^{n/p}\|Tf\|_{L^p} + A\|M(|f|^p)\|_{L^{1,\infty}}^{1/p} \\ &\leq 2 \cdot 3^{n/p}A\|f\|_{L^p} + A\|M(|f|^p)\|_{L^{1,\infty}}^{1/p} \\ &\leq 2 \cdot 3^{n/p}A\|f\|_{L^p} + 3^{n/p}A\||f|^p\|_{L^1}^{1/p} \\ &\leq 3^{n+1}A\|f\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{4.4.76}$$

A segunda desigualdade segue do simples fato $\||g|^{1/p}\|_{L^{p,\infty}} \leq \||g|\|_{L^{1,\infty}}^{1/p}$.

Dada uma função $f \in L^p$, escreva $f = f_\infty + f_1$, em que $f_\infty = f\chi_{|f|\leq\alpha/16A_2} \in L^\infty \cap L^p$ e $f_1 = f\chi_{|f|\geq\alpha/16A_2} \in L^1 \cap L^p$. Aplicamos a Decomposição de Calderón-Zygmund para a função f_1 num nível $\alpha\gamma > 0$, em que $\gamma > 0$ será escolhido de forma apropriada; temos $f_1 = g_1 + b_1$, com g_1 e b_1 satisfazendo os itens (1)-(6) do Teorema 4.4.1. Recorde que g_1 é também uma função L^p com norma $\|g_1\|_{L^p} \leq 2^{n/p'}(\alpha\gamma)^{1/p'}\|f_1\|_{L^1}^{1/p}$. Pela forma que foi definida f_1, é fácil ver que

$$\|f_1\|_{L^1}^{1/p} \leq \left(\frac{16A_2}{\alpha}\right)^{1/p'}\|f\|_{L^p}, \tag{4.4.77}$$

e portanto

$$\|g_1\|_{L^p} \leq 2^{(n+4)/p'}(A_2\gamma)^{1/p'}\|f\|_{L^p}. \tag{4.4.78}$$

Em vista da estimativa (4.4.74), pela sublinearidade de $T^{(**)}$ e pela decomposição $f = f_\infty +$

[7] A limitação fraca-(p,p) do operador maximal de Hardy-Littlewood decorre diretamente do fato de M ser limitado de L^p em L^p. Porém o Exercício 2.1.4 em [GFK1] nos fornece um melhor controle sobre a norma $\|M\|_{L^p \to L^{p,\infty}}$

$g_1 + b_1$, temos que

$$\begin{aligned}|\{T^{(**)}f > \alpha\}| &\leq |T^{(**)}f_\infty + \{T^{(**)}g_1 + T^{(**)}b_1 > \alpha\}| \\ &\leq |\{T^{(**)}f_\infty > \alpha/4\}| + |\{T^{(**)}g_1 > \alpha/4\}| + |\{T^{(**)}b_1 > \alpha/2\}| \\ &\leq c_1 + c_2 + c_3,\end{aligned} \tag{4.4.79}$$

em que as constantes c_j são definidas por

$$\begin{aligned}c_1 &= |\{2A_2\|f_\infty\|_{L^\infty} + 2S_p f_\infty > \alpha/4\}|, \\ c_2 &= |\{2A_2\|g_1\|_{L^\infty} + 2S_p g_1 > \alpha/4\}|, \\ c_3 &= |\{T^{(**)}b_1 > \alpha/2\}|.\end{aligned}$$

Escolhendo $\gamma = 2^{-n-5}(A_1 + A_2)^{-1}$ e usando o item (2) do Teorema 4.4.1, temos

$$\|g_1\|_{L^\infty} \leq 2^n(\gamma\alpha) = \frac{\alpha}{2^5(A_1 + A_2)} \quad \Longrightarrow \quad 2A_2\|g_1\|_{L^\infty} \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Além disso, note que, pela definição de f_∞,

$$2A_2\|f_\infty\|_{L^\infty} \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Estas estimativas para f_∞ e g_1 implicam em

$$\begin{aligned}c_1 &\leq |\{S_p(f_\infty) > \alpha/8\}| \\ c_2 &\leq |\{S_p(g_1) > \alpha/8\}|\end{aligned}$$

e portanto, obtemos

$$\begin{aligned}c_1 &\leq \frac{8^p}{\alpha^p}\|S_p(f_\infty)\|^p_{L^p,\infty}, \\ c_2 &\leq \frac{8^p}{\alpha^p}\|S_p(g_1)\|^p_{L^p,\infty}.\end{aligned}$$

Observe que como $\gamma = (2^{n+5}(A_1 + A_2))^{-1}$, (4.4.78) implica em

$$\|g_1\|^p_{L^p} \leq \left(\frac{2^{n+4}A_2}{2^{n+5}(A_1 + A_2)}\right)^{p-1}\|f\|^p_{L^p} \leq \|f\|^p_{L^p}.$$

Logo, como S_p é do tipo fraco-(p,p), satisfaz (4.4.76) e vale trivialmente $\|f_\infty\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$, temos

$$c_1 + c_2 \leq {B_n}^p\frac{A^p}{\alpha^p}\|f\|^p_{L^p} \tag{4.4.80}$$

com $B_n = 2 \cdot 8 \cdot 3^{n+1}$.

Uma vez que γ foi tomado de modo que $\gamma \leq (2^{n+5}A_1)^{-1}$, considerando cubos Q_j, com $l(Q_j)^* = 2\sqrt{n}l(Q_j)$ como na demonstração do Teorema 4.4.4, e tendo em vista a estimativa

(4.4.42), obtida também na mesma demonstração, estimamos c_3 como segue.

$$\begin{aligned}
c_3 &\leq |\cup_j Q_j^*| + |\{x \notin \cup_j Q_j^* : |T^{(**)} b_1(x)| \geq \alpha/2\}| \\
&\leq (2\sqrt{n})^n \frac{\|f_1\|_{L^1}}{\gamma\alpha} + 2^{n+8} A_2 \frac{\|f_\infty\|_{L^1}}{\alpha} \\
&\leq \left(\frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} + 2^{n+8} A_2\right) \frac{(16A_2)^{p-1}}{\alpha^{p-1}} \frac{\|f_1\|_{L^p}^p}{\alpha} \\
&\leq \left(\frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} + \frac{2^3}{\gamma}\right) (16A_2)^{p-1} \frac{\|f_1\|_{L^p}^p}{\alpha^p} \\
&= \frac{(2\sqrt{n})^n + 2^3}{2^{n+5}} \frac{(16A_2)^{p-1}}{A_1 + A_2} \frac{\|f_1\|_{L^p}^p}{\alpha^p} \\
&\leq C_n^p (16(A_1 + A_2))^p \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\alpha^p}.
\end{aligned} \tag{4.4.81}$$

Em que $C_n = \frac{(2\sqrt{n})^n + 2^3}{2^{n+5}(16A_2)^2} + 1$. Usando as estimativas (4.4.80) e (4.4.81) em (4.4.79),

$$|\{T^{(**)} f > \alpha\}| \leq (B_n^p + C_n^p) \frac{A^p}{\alpha^p} \|f\|_{L^p}^p,$$

o que implica que $T^{(**)}$ é do tipo fraca-(p,p), para todo $1 < p < \infty$, e

$$\begin{aligned}
\|T^{(**)} f\|_{L^{p,\infty}} &\leq (B_n^p + C_n^p)^{1/p} A \|f\|_{L^p} \\
&\leq D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^p},
\end{aligned} \tag{4.4.82}$$

em que $D_n = B_n + C_n$.

Por fim, para se obter a limitação $L^p \to L^p$ de $T^{(**)}$, usaremos interpolação da seguinte forma. Fixado $2 \leq p < \infty$, a estimativa (4.4.82) substituindo p por $\frac{p+1}{2}$ e $2p$:

$$\begin{aligned}
\|T^{(**)} f\|_{L^{\frac{p+1}{p},\infty}} &\leq D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{\frac{p+1}{2}, 2(p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \\
&\leq 2D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}, \\
\|T^{(**)} f\|_{L^{2p,\infty}} &\leq D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{2p, (2p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^{2p}} \\
&\leq 2D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \|f\|_{L^{2p}}.
\end{aligned}$$

Por interpolação, Teorema 1.2.1, para todo $\frac{p+1}{2} < q < 2p$, $T^{(**)}$ é limitado em L^q. Em particular, para $q = p$, temos que a integral singular maximal $T^{(**)}$ é limitada de L^p em L^p, com norma

$$\begin{aligned}
\|T^{(**)}\|_{L^p \to L^p} &\leq 2 \left(\frac{p}{p - \frac{p+1}{2}} + \frac{p}{2p - p}\right)^{1/p} 2D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \\
&= 2^2 \left(2\frac{p}{p-1} + 1\right)^{1/p} D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \\
&\leq 20 D_n (A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Isto prova que para todo $2 < p < \infty$, $T^{(**)}$ é limitado em L^p. Em particular, $T^{(**)}$ é limitado em L^2 e portanto, pelo Teorema 4.4.4, $T^{(**)}$ é do tipo fraco-$(1,1)$. O caso em que $1 < p < 2$, usamos interpolação pra a limitação fraca-$(1,1)$ e fraca-$(2p,2p)$. De fato, temos as estimativas

$$\|T^{(**)}f\|_{L^{1,\infty}} \leq D_n'(A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^1},$$
$$\|T^{(**)}f\|_{L^{2p,\infty}} \leq D_n'(A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^{2p}},$$

para alguma constante dimensional D_n'. Pelo Teorema 1.2.1, $T^{(**)}$ é limitado em L^p e

$$\begin{aligned}
\|T^{(**)}\|_{L^p \to L^p} &\leq 2\left(\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2p-p}\right)^{1/p} D_n'(A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \\
&\leq 2\left(\frac{2}{p-1} + 1\right)^{1/p} D_n'(A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\} \\
&\leq 6D_n'(A_1 + A_2 + A_3) \max\{p, (p-1)^{-1}\},
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do presente teorema. $\square$

Capítulo 5

Espaço BMO e a Desigualdade de John-Nirenberg

5.1 Propriedades do Espaço BMO

Dada uma função $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e Q um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, denotamos f_Q a média de f em Q, dada por

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx = \fint_Q f(x)dx.$$

A oscilação de f em Q é a função $|f - f_Q|$ e a oscilação média de f em Q nada mais é do que a média da oscilação de f em Q, isto é,

$$\frac{1}{Q}\int_Q |f(x) - f_Q|dx.$$

Definimos a seguir a classe das funções com oscilação média limitada em $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.1.1. *Dizemos que uma função f localmente integrável de $\mathbb{R}^n$ é uma função BMO (Bounded Mean Oscillation) quando*

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx < \infty,$$

em que o supremo é tomado sobre todos os cubos de $\mathbb{R}^n$. De forma equivalente, podemos trocar os cubos por bolas. Denotamos por $BMO(\mathbb{R}^n)$ o espaços das funções BMO.

É fácil de provar que $BMO(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{BMO}$ satisfaz as propriedades

$$\|f + g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$$
$$\|\lambda f\|_{BMO} = |\lambda|\|f\|_{BMO},$$

para toda $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Porém $\|\cdot\|_{BMO}$ não define uma norma em $BMO(\mathbb{R}^n)$, já que funções que diferem por uma constante possuem "normas"BMO iguais.

Observação 5.1.2. *As respectivas demonstrações de cada um dos itens abaixo podem ser encontradas na Proposição 3.1.2 e Proposição 3.2.5 em* [GFK2].

(1) Se $\|f\|_{BMO} = 0$, então necessariamente f é constante q.t.p.

(2) É válido que $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L^\infty},$$

ou seja, o espaço das funções L^∞ está incluso continuamente em $BMO(\mathbb{R}^n)$.

(3) Uma caracterização para uma funções de $BMO(\mathbb{R}^n)$. Suponha que exista uma constante $A > 0$ tal que para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$, exista $C_Q > 0$ tal que

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - C_Q| dx \leq A.$$

Então $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

(4) O espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translação e por dilatação e valem

$$\|f(\cdot - h)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$$
$$\|f(\lambda\, \cdot)\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}.$$

(5) Se f e g são funções BMO, então $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e $|f|$ também as são.

(6) Defina a "norma"BMO da seguinte forma

$$\|f\|_{BMO_\flat} = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx,$$

em que o supremo é tomado sobre todas a bolas B de $\mathbb{R}^n$. A normas $\|\cdot\|_{BMO}$ e $\|\cdot\|_{BMO_\flat}$ são equivalentes. Mais precisamente, existem constantes dimensionais c_n e C_n tais que

$$c_n\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO_\flat} \leq C_n\|f\|_{BMO}.$$

Portanto, em $BMO(\mathbb{R}^n)$ podemos trabalhar tanto com a norma $\|\cdot\|_{BMO}$, quanto com a norma $\|\cdot\|_{BMO_\flat}$

(7) Todas propriedades de $\|\cdot\|_{BMO}$ são válidas também para $\|\cdot\|_{BMO_\flat}$.

(8) Dado $\delta > 0$, existe uma constante $C_{n,\delta} > 0$ tal que para qualquer bola $B = B(x_0, R)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, vale que

$$R^\delta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_B|}{(R + |x - x_0|)^{n+\delta}} dx \leq C_{n,\delta}\|f\|_{BMO}. \tag{5.1.1}$$

O item (8) da observação anterior é suficiente para demonstrar que toda função BMO seja uma distribuição temperada. De fato, tome $\delta = 1$, $x_0 = 0$ e $R = 1$. Então, para toda $f \in BMO$, vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_B|}{(1+|x|)^{n+1}} \leq C_n \|f\|_{BMO},$$

para alguma constante dimensional $C_n > 0$. Dada $\phi \in \mathcal{S}$, observe que

$$\begin{aligned}
|\langle f, \phi\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\phi(x)|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_B||\phi(x)|dx + |f_B| \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1+|x|)^{n+1}|\phi(x)|\} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_B|}{(1+|x|)^{n+1}} dx + |f_B|\|\phi\|_{L^1} \\
&\leq C_n \|f\|_{BMO} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1+|x|)^{n+1}|\phi(x)|\} + |f_B|\|\phi\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Como a norma $\|\phi\|_{L^1}$ é controlado por uma soma de semi-normas de ϕ, segue que f é de fato uma distribuição temperada.

Um exemplo clássico de uma função que prova que a inclusão $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ é própria, é a função $\log|x|$. Vamos provar que existe uma constante A tal que para toda bola $B = B(x_0, R)$, existe uma constante $C_{x_n,R}$ tal que

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |\log(x) - C_{x_0,R}|dx \leq A.$$

De fato, fixe uma bola $B = B(x_0, R)$ e suponha primeiro que $|x_0| \geq 2R$. Neste caso, tome $C_{x_0,R} = \log|x_0|$. Note que para $|x - x_0| < R$ e $|x_0| > 2R$, temos $\frac{|x_0|}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}|x_0|$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|} \int_{|x-x_0|<R} \left|\log|x| - \log|x_0|\right| dx &= \frac{1}{|B|} \int_{|x-x_0|<R} \left|\log \frac{|x|}{|x_0|}\right| dx \\
&\leq \frac{1}{|B|} |B| \max\left\{\log \frac{3}{2}, \left|\log \frac{1}{2}\right|\right\} \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $|x_0| \leq 2R$, tome $C_{x_0,R} = \log R$. Neste caso, se $|x - x_0| < R$, temos $|x| \leq 3R$ e então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|} \int_{|x-x_0|<R} \left|\log|x| - \log R\right| dx &= \frac{1}{\nu_x R^n} \int_{|x-x_0|<R} \left|\log \frac{|x|}{R}\right| dx \\
&\leq \frac{1}{\nu_n R^n} \int_{|x|<3R} \left|\log \frac{|x|}{R}\right| dx \\
&= \frac{1}{\nu_n} \int_{|y|<3} \left|\log|y|\right| dy = B < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, basta toma $A = \max\{\log 2, B\}$ e $C_{x_0,R} = \max\{\log|x_0|, \log R\}$.

5.2 Desigualdade de John-Nirenberg

Provamos nesta seção a Desigualdade de John-Nirenberg.

Teorema 5.2.1. *Dadas uma função $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, Q um cubo de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$, vale a seguinte desigualdade*

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\} \leq |Q| e^{1+\frac{-A\alpha}{\|f\|_{BMO}}}, \tag{5.2.1}$$

com $A = \frac{1}{2^n e}$.

Demonstração. É suficiente provar (5.2.1) para $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ com norma $\|f\|_{BMO} = 1$. De fato, suponha que (5.2.1) é válido para funções BMO com norma 1. Se $\|f\|_{BMO} = c \neq 1$ e $\alpha > 0$, basta tomar $c^{-1}f$ cuja norma BMO é igual a 1 e considerar a constante $c^{-1}\alpha$ para obter a estimativa (5.2.1).

Considere então $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ com norma $\|f\|_{BMO} = 1$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ um cubo e $b > 1$ a ser escolhido. A ideia da prova consiste em fazer uma decomposição de Calderón-Zygmund para a oscilação $|f - f_Q|$ de f num nível b. Escreva $Q^{(0)} = Q$. Subdivida $Q^{(0)}$ em 2^n subcubos de mesmo tamanho, cujos lados têm tamanho $l(Q)/2$. Selecione os subcubos R que satisfazem

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x) - f_Q| dx > b. \tag{5.2.2}$$

Note que Q não satisfaz (5.2.2), pois

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \|f\|_{BMO} = 1 < b.$$

Cada subcubo R que não satisfaz (5.2.2) é subdividido em 2^n subcubos de mesma medida cujo o lado é a metade do lado de R. Selecione os novos subcubos que satisfazem (5.2.2). Continue este processo indefinidamente e obtenha uma família enumerável de cubos selecionados $\mathcal{G}_1 = \{Q_j^{(1)}\}_j$, a primeira geração de cubos. A família $\mathcal{G}_1$ satisfaz se seguintes propriedades

(A-1) $\operatorname{int} Q_j^{(1)} \subset Q^{(0)}$.

(B-1) $b < \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}} |f(x) - f_{Q^{(0)}}| dx \leq 2^n b$;

(C-1) $|f_{Q_j^{(1)}} - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n b$;

(D-1) $\sum_j |Q_j^{(1)}| \leq \frac{1}{b}\sum_j \int_{Q_j^{(1)}} |f(x) - f_{Q^{(0)}}| dx \leq |Q^{(0)}|$;

(E-1) $|f - f_{Q^{(0)}}| \leq b$ q.t.p em $Q^{(0)} \backslash (\cup_j Q_j^{(1)})$.

O item (A-1) é imediato da construção. A primeira desigualdade em (B-1) segue do fato de $Q_j^{(1)}$ ser selecionado, enquanto a segunda segue do seguinte fato: para cada cubo $Q_j^{(1)}$, existe um único cubo não selecionado $\widetilde{Q}_j^{(1)}$ que o contém cujo lado $l(\widetilde{Q}_j^{(1)}) = 2l(Q_j^{(1)})$. Logo, $\frac{|\widetilde{Q}_j^{(1)}|}{|Q_j^{(1)}|} = 2^n$

e portanto

$$\frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}}|f(x)-f_Q^{(0)}|dx \leq 2^n\frac{1}{|\widetilde{Q}_j^{(1)}|}\int_{\widetilde{Q}_j^{(1)}}|f(x)-f_Q^{(0)}|dx \leq 2^n b.$$

O item (C-1) é provado usando o item (B-1) como segue

$$|f_{Q_j^{(1)}} - f_{Q^{(0)}}| = \left|\frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}}(f(x)-f_{Q^{(0)}})dx\right| \leq \frac{1}{|Q_j^{(1)}|}\int_{Q_j^{(1)}}|f(x)-f_{Q^{(0)}}|dx \leq 2^n b.$$

Para provar o item (D-1), usamos também o item (B-1) para a primeira desigualdade e, para a segunda, usamos o fato de $Q^{(0)}$ não satisfazer (5.2.2)

$$\begin{aligned}\sum_j |Q_j^{(1)}| &\leq \frac{1}{b}\sum_j \int_{Q_j^{(1)}}|f(x)-f_{Q^{(0)}}|dx \\ &\leq \int_{\cup_j Q_j^{(1)}}|f(x)-f_{Q^{(0)}}|dx \\ &\leq \int_{Q^{(0)}}|f(x)-f_{Q^{(0)}}|dx \\ &\leq |Q^{(0)}|.\end{aligned}$$

O item (E-1) segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue (Teorema 2.1.10), pois, para quase todo x,

$$|f(x)-f_Q| = \lim_{|Q_k(x)|\to 0}\frac{1}{|Q_k(x)|}\int_{Q_k(x)}|f(y)-f_Q|dy,$$

em que $Q_k(x)$ é uma sequência de cubo decrescente que contém x. Por construção, para cada $x \in Q\setminus \cup_j Q_j^{(1)}$, existe uma sequência de cubos não selecionados $\{Q_{j,x}\}_j$ que contêm x e

$$\bigcap_j \overline{Q_{j,x}} = \{x\}.$$

Logo, para quase todo $x \in Q^{(0)}\setminus \cup_j Q_j^{(1)}$, como $Q_{j,x}$ não é selecionado, temos

$$|f(x)-f_{Q^{(0)}}| = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{|Q_{j,x}|}\int_{Q_{j,x}}|f(y)-f_{Q^{(0)}}|dy \leq b.$$

Fixe um cubo $Q_j^{(1)}$ da primeira geração e subdivida-o em 2^n subcubos de mesma medida e cujos lados são iguais a $\frac{|Q_j^{(1)}|}{2}$. Selecione todos os subcubos R que satisfazem

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x)-f_{Q_j^{(1)}}|dx > b. \tag{5.2.3}$$

Certamente o cubo $Q_j^{(1)}$ não satisfaz (5.2.3). Cada subcubo R que não satisfaz (5.2.3) é subdividido em 2^n subcubos de mesma medida cujo o lado é a metade do lado de R. Selecione os novos subcubos que satisfazem (5.2.3) e continue este processo indefinidamente, obtendo assim uma família enumerável de cubo $\{Q_{j,k}^{(2)}\}_k$. Repita este processo para cada j. Obtemos então a segunda geração de cubos $\mathcal{G}_2 = \{Q_l^{(2)}\} = \cup_j \{Q_{j,k}^{(2)}\}_k$. Cada cubo satisfaz propriedades análogas as (A-1) - (E-1). Note que para cada $Q_l^{(2)}$ existe um único cubo $Q_j^{(1)}$ da primeira geração, que contém o interior de $Q_l^{(2)}$.

Indutivamente, obtenha cubos da m-ésima geração $\{Q_s^{(m)}\}_s$ satisfazendo as seguintes propriedades

(A-m) Para cada $Q_s^{(m)}$, existe um único $Q_{r_s}^{(m-1)}$ tal que $\operatorname{int} Q_s^{(m)} \subset Q_{r_s}^{(m-1)}$.

(B-m) $b < \frac{1}{|Q_s^{(m)}|} \int_{Q_{r_s}^{(m-1)}} |f(x) - f_{Q_{r_s}^{(m-1)}}|dx \leq 2^n b$;

(C-m) $|f_{Q_s^{(m)}} - f_{Q_{r_s}^{(m-1)}}| \leq 2^n b$;

(D-m) $\sum_s |Q_s^{(m)}| \leq \frac{1}{b} \sum_r |Q_r^{(m-1)}|$;

(E-m) $|f - f_{Q_{r_s}^{(m-1)}}| \leq b$, q.t.p. em $Q_{r_s}^{(m-1)} \backslash (\cup_j Q_s^{(m)})$.

Os itens (A-m), (B-m), (C-m) e (E-m) são provados de forma análoga aos itens da primeira geração de cubos. Para provar o item (D-m), basta observar que, pelo item (B-m), temos

$$\begin{aligned}
\sum_s |Q_s^{(m)}| &\leq \frac{1}{b} \sum_s \int_{Q_{r_s}^{(m-1)}} |f(x) - f_{Q_{r_s}^{(m-1)}}|dx \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_r \int_{Q_r^{(m-1)}} |f(x) - f_{Q_r^{(m-1)}}|dx \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_r |Q_r^{(m-1)}| \|f\|_{BMO} \\
&= \frac{1}{b} \sum_r |Q_r^{(m-1)}|.
\end{aligned}$$

Uma consequência do item (D-m) é a seguinte

$$\sum_s |Q_s^{(m)}| \leq \frac{1}{b^m} |Q^{(0)}|. \tag{5.2.4}$$

Basta aplicar (D-m) m vezes.

Afirmamos agora que

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n 2b, \quad \text{q.t.p em } Q^{(0)} \backslash \cup_l Q_l^{(2)}. \tag{5.2.5}$$

Fixemos um cubo $Q_j^{(1)}$ e considere a família $\{Q_{j,k}^{(2)}\}_k$ que está contida em $Q_j^{(1)}$. Para provar (5.2.5), recorde que são válidas

$$\begin{aligned}
|f_{Q_j^{(1)}} - f_{Q^{(0)}}| &\leq 2^n b \\
|f - f_{Q_j^{(1)}}| &\leq b \quad \text{q.t.p em } Q_j^{(1)} \backslash \cup_k Q_{j,k}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} |f - f_{Q^{(0)}}| &\leq |f - f_{Q_j^{(1)}}| + |f_{Q_j^{(1)}} - f_{Q^{(0)}}| \\ &\leq b + 2^n b \\ &\leq 2^n 2b \qquad \text{q.t.p em } Q_j^{(1)} \backslash (\cup_k Q_{j,k}^{(2)}). \end{aligned}$$

Por outro lado, em vista do item (E-1), temos que

$$|f - f_{Q^{(0)}}| \leq b \qquad \text{q.t.p em } Q^{(0)} \backslash (\cup_j Q_j^{(1)}).$$

Existem conjuntos E_j e E_0 de medida nula, com

$$E_j \subset Q_j^{(1)} \backslash \cup_k Q_{j,k}^{(2)} \quad \text{e} \quad E_0 \subset Q^{(0)} \backslash \cup_j Q_j^{(1)},$$

tais que

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n 2b, \quad \forall x \in (Q_j^{(1)} \backslash \cup_k Q_{j,k}^{(2)}) \backslash E_j \tag{5.2.6}$$

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq b, \quad \forall x \in (Q^{(0)} \backslash \cup_j Q_j^{(1)}) \backslash E_0. \tag{5.2.7}$$

Note que, para $i \neq j$, temos que $Q_j^{(1)} \cap Q_i^{(1)} = \emptyset$, $\cup_k Q_{j,k}^{(2)} \subset Q_j^{(1)}$ e $\cup_k Q_{i,k}^{(2)} \subset Q_i^{(1)}$, o que implicam em

$$Q_j^{(1)} \backslash \cup_k Q_{j,k}^{(2)} = Q_j^{(1)} \backslash \cup_l Q_l^{(2)}.$$

Defina o conjunto de medida nula $E_1 = \cup_j E_j \subset (\cup_j Q_j^{(1)}) \backslash (\cup_l Q_l^{(2)})$ e tome $E = E_1 \cup E_0$, que também tem medida nula. Se $x \in (Q^{(0)} \backslash \cup_l Q_l^{(2)}) \backslash E$, então $x \in Q^{(0)}$, $x \notin E_1$, $x \notin E_0$ e $x \notin \cup_l Q_l^{(2)}$. Se $x \in Q_j^{(1)}$, para algum j, então $x \in (Q_j^{(1)} \backslash \cup_l Q_l^{(2)}) \backslash E_1$, o que implica, por (5.2.6), que

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n 2b. \tag{5.2.8}$$

Por outro lado, $x \notin Q_j^{(1)}$, para todo j, então $x \in (Q_j^{(0)} \backslash \cup_j Q_j^{(1)}) \backslash E_0$ e portanto, por (5.2.7),

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq b \leq 2^n 2b. \tag{5.2.9}$$

As estimativas (5.2.8) e (5.2.9) implicam então na estimativa (5.2.5).

Fixemos um cubo $Q_l^{(2)}$. São válidas as estimativas

$$|f - f_{Q_l^{(2)}}| \leq b, \quad \text{q.t.p em } Q_l^{(2)} \backslash \cup_s Q_s^{(3)} \tag{5.2.10}$$

$$|f_{Q_l^{(2)}} - f_{Q_{j_l}^{(1)}}| \leq 2^n b \tag{5.2.11}$$

$$|f_{Q_{j_l}^{(1)}} - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n b. \tag{5.2.12}$$

Logo, para quase todo $x \in Q_l^{(2)} \setminus \cup_s Q_s^{(3)}$, é válido que

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n 3b.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, é válido que

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n 3b, \quad \text{q.t.p em } Q^{(0)} \setminus \cup_s Q_s^{(3)}. \tag{5.2.13}$$

Recursivamente, prova-se que para todo $m \geq 1$,

$$|f(x) - f_{Q^{(0)}}| \leq 2^n mb, \quad \text{q.t.p em } Q^{(0)} \setminus \cup_s Q_s^{(m)}. \tag{5.2.14}$$

A estimativa (5.2.14) implica que, para cada geração m, existe uma conjunto de medida nula E_m em $Q^{(0)} \setminus \cup_l Q_s^{(m)}$ tal que

$$\{x \in Q^{(0)} \setminus \cup_s Q_s^{(m)} : |f(x) - f_{Q^{(0)}}| > 2^n mb\} \subset E_m \cup (\cup_s Q_s^{(m)}).$$

Logo,

$$\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > 2^n mb\} \subset E_m \cup (\cup_s Q_s^{(m)}),$$

o que prova que $\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > 2^n mb\} \subset \cup_s Q_s^{(m)}$ q.t.p.

Fixemos agora $\alpha > 0$ e escolha um inteiro m suficientemente grande de modo que

$$2^n mb < \alpha \leq 2^n (m+1) b.$$

Por fim, obtemos a estimativa desejada como segue

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| &\leq |\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > 2^n mb\}| \\
&\leq \left| \bigcup_s Q_s^m \right| \\
&\leq \frac{1}{b} \sum_s |Q_s^{(m)}| \\
&\leq \frac{1}{b^m} |Q| \\
&= |Q| e^{-k \log b} \\
&\leq |Q| e^{(1 - \frac{\alpha}{2^n b}) \log b}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $b = e > 1$, obtemos

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq |Q| e^{1 - \frac{\alpha}{2^n e}},$$

que é justamente a desigualdade (5.2.1) para o caso em que $\|f\|_{BMO} = 1$. $\square$

Vejamos agora algumas consequências da Desigualdade de John-Nirenberg.

Corolário 5.2.2. *Considere uma constante $\gamma < \frac{1}{2^n e}$ e um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Então é válida a seguinte estimativa*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\frac{\gamma|f(x)-f_Q|}{\|f\|_{BMO}}}dx \leq 1 + \frac{2^n e^2\gamma}{1-2^n\gamma}. \tag{5.2.15}$$

Demonstração. Em vista da Proposição 1.1.1 e considerando a função $\phi(t) = e^t - 1$, temos que

$$\int_X (e^{|f(x)|}-1)d\mu(x) = \int_0^\infty e^\alpha \mu(\{|f|>\alpha\})d\alpha.$$

Considere uma função mensurável $h \geq 0$ de $\mathbb{R}^n$ e Q um cubo. A identidade acima nos dá que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha |\{x \in Q : |h(x)| > \alpha\}|d\alpha &= 1 + \frac{1}{|Q|}\int_Q (e^{h(x)}-1)dx \\ &= \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{h(x)}dx. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Dada uma função $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, e uma constante $\gamma < \frac{1}{2^n e}$, considere a função

$$h = \gamma\frac{|f-f_Q|}{\|f\|_{BMO}} \geq 0,$$

que é uma função $BMO(\mathbb{R}^n)$. Pela Desigualdade de John-Niremberg (5.2.1), temos que

$$\begin{aligned} |\{x \in Q : |f-f_Q| > \frac{\alpha}{\gamma}\|f\|_{BMO}\}| &\leq e|Q|e^{\frac{-\alpha\gamma^{-1}\|f\|_{BMO}}{2^n e\|f\|_{BMO}}} \\ &= e|Q|e^{-A\frac{\alpha}{\gamma}}, \end{aligned}$$

em que $A = \frac{1}{2^n e}$. Logo, usando identidade (5.2.16) para esta h, obtemos a estimativa desejada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\gamma\frac{|f(x)-f_Q|}{\|f\|_{BMO}}}dx &\leq 1 + \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty e^\alpha e|Q|e^{-A\frac{\alpha}{\gamma}}d\alpha \\ &= 1 + e\int_0^\infty e^{(1-\frac{A}{\gamma})\alpha}d\alpha \\ &= 1 + \frac{2^n e^2\gamma}{1-2^n e\gamma}. \end{aligned}$$

□

O corolário anterior implica que as funções $BMO(\mathbb{R}^n)$ são exponecialmente integráveis em compactos, no seguinte sentido, dada $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, K um compacto de $\mathbb{R}^n$ e uma constante $c < (2^n e\|f\|_{BMO})^{-1}$, vale que

$$\int_K e^{c|f(x)|}dx < \infty.$$

Para verificar este fato, basta aplicar o Corolário 5.2.2 para um cubo $Q \supset K$ e $\gamma = c\|f\|_{BMO} < (2^n e)^{-1}$.

Para cada $1 < p < \infty$, e $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definimos a norma $\|\cdot\|_{BMO_p}$ por

$$\|f\|_{BMO_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{1/p}, \tag{5.2.17}$$

em que o supremo é tomado sobre todos os cubos de $\mathbb{R}^n$. É claro que podemos trocar cubos por bolas e essas normas são comparáveis. Uma outra aplicação da Desigualdade de John-Nirenberg é que podemos obter uma "caracterização L^p"para norma de $BMO(\mathbb{R}^n)$, no sentido de que as normas $\|\cdot\|_{BMO}$ e $\|\cdot\|_{BMO_p}$ são comparáveis.

Corolário 5.2.3. *Para todo $1 < p < \infty$, existe uma constante $B_{p,n}$ tal que*

$$\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO_p} \leq B_{p,n}\|f\|_{BMO} \tag{5.2.18}$$

para toda função $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Faremos uso da Proposição 1.1.1 para calcular a norma L^p de $|f - f_Q|$ e em seguida a Desigualdade de John-Nirenberg estimá-la. Tome $A = (2^n e)^{-1}$. temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx &= \frac{p}{|Q|} \int_0^\infty \alpha^{p-1} |\{|f - f_Q| > \alpha\}| d\alpha \\
&\leq \frac{p}{|Q|} e|Q| \int_0^\infty \alpha^{p-1} e^{\frac{-A\alpha}{\|f\|_{BMO}}} d\alpha \\
&= pe \frac{\|f\|_{BMO}^p}{A^p} \int_0^\infty \beta^{p-1} e^{-\beta} d\beta \\
&= pe \frac{\|f\|_{BMO}^p}{A^p} \Gamma(p),
\end{aligned}$$

em que Γ é a função Gamma dada por $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$. Basta tomar $B_{p,n} = \left(\frac{pe\Gamma(p)}{A^p}\right)^{1/p}$ e obtemos a segunda estimativa de (5.2.18). A outra desigualdade segue da Desigualdade de Hölder:

$$\int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \left(\int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{1/p} |Q|^{1-1/p}.$$

Logo, obtemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx \right)^{1/p},$$

o que implica de imediato a primeira desigualdade de (5.2.18). □

5.3 Dualidade entre BMO e H^1

Esta seção será dedicada a uma breve discussão sobre a relação existente entre os espaços BMO e H^1 definido a seguir.

Comecemos definindo o que é uma distribuição temperada limitada. Seja $\nu \in \mathcal{S}'$ e suponha que para toda $\phi \in \mathcal{S}$, a convolução

$$\phi * \nu \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Diz-se então que ν é uma distribuição limitada.

Recorde do núcleo de Poisson

$$P(x) = c_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

em que c_n é uma constante dimensional. Para $t > 0$, consideramos a aproximação da identidade $P_t(x) = t^{-n} P(t^{-1}x)$. Dada $\nu \in \mathcal{S}'$ distribuição limitada, a convolução $P_t * \nu$ está bem definida, já que P_t é uma função de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definição 5.3.1. *O espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das distribuições limitadas $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que a função maximal*

$$M(f,P)(x) = \sup_{t>0} |P_t * f(x)| \tag{5.3.1}$$

é uma função de $L^1(\mathbb{R}^n)$. A norma de um elemento f de $H^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\|f\|_{H^1} = \|M(f,P)\|_{L^1}.$$

Uma observação sobre $H^1(\mathbb{R}^n)$ é que ele é identificado como um subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Veja o Teorema 2.1.2 de [GFK2]. Existem também outras maneiras equivalentes de definir a norma de $H^1(\mathbb{R}^n)$. Veja a Definição 2.1.3, o Teorema 2.1.4 em [GFK2] e o Teorema 1, da página 91, em [STN].

Definição 5.3.2. *Diz-se que uma função a é um H^1-átomo (associado a uma bola B) se*

(1) $\operatorname{supp} a \subseteq B$;

(2) $|a| \leq |B|^{-1}$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx = 0$.

Denotamos por $H^1_a(\mathbb{R}^n)$ o espaço das combinações lineares finitas de H^1-átomos.

Teorema 5.3.3 (Decomposição Atômica)**.** *Dada $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $\{a_k\}_k$ de H^1-átomos e uma sequência $\{\lambda_k\}_k$ de escalares tais que $\sum_k |\lambda_k| < \infty$ e*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \quad \text{em } H^1.$$

Em outras palavras, $H^1_a(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n)$. Ademais,

$$\sum_k |\lambda_k| \approx \|f\|_{H^1}.$$

Para a demonstração do teorema anterior veja o Teorema 2, página 107, em [STN].

Considere $f \in BMO$ e defina o seguinte funcional linear

$$L_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx,$$

para toda $g \in H_a^1(\mathbb{R}^n)$. Para verificar que a integral acima é absolutamente convergente basta usar o fato de g ter integral nula e a definição do espaço BMO. Logo L_f está bem definida.

A dualidade entre BMO e H^1 (teorema seguinte) foi provado por C. Fefferman e E. M. Stein em [F-S] e provar que o dual de H^1 é o espaço BMO usa-se justamente a decomposição atômica de H^1.

Teorema 5.3.4. *Dada uma função $f \in BMO$, L_f se estende a um funcional linear contínuo de $H^1(\mathbb{R}^n)$ com norma*

$$\|L_f\| \leq c\|f\|_{BMO}.$$

Reciprocamente, dado um funcional linear L de H^1, existe uma função $f \in BMO$ tal que $L = L_f$, com

$$\|f\|_{BMO} \leq c'\|L\|.$$

Veja o Teorema 1, página 142, em [STN], para prova deste resultado.

Capítulo 6

Integrais Singulares: Tipo Não-Convolução

Este é o principal capítulo da dissertação, e usamos como referência [GFK1]. O resultado mais importante deste trabalho é o Teorema $T(1)$ de G. David e J-L. Journé em [D-J], que caracteriza a limitação L^2 dos operadores de Calderón-Zygmund.

6.1 Operadores Associados a Núcleos Padrões

Considere $K(x, y)$ uma função definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$, em que Δ denota a diagonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Suponha que para algum $A > 0$ e algum $\delta > 0$, valem as condições: a condição de tamanho

$$|K(x, y)| \leq \frac{A}{|x-y|^n}, \quad x \neq y, \tag{6.1.1}$$

e as condições de suavidade

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{A|x-x'|^\delta}{(|x-y| + |x'-y|)^{n+\delta}}, \tag{6.1.2}$$

para todo $|x - x'| \leq \frac{1}{2} \max\{|x-y|, |x'-y|\}$, e

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq \frac{A|y-y'|^\delta}{(|y-x| + |y'-x|)^{n+\delta}}, \tag{6.1.3}$$

para todo $|y-y'| \leq \frac{1}{2} \max\{|y-x|, |y'-x|\}$. A função K nestas condições é chamada de núcleo padrão associada as constantes δ, A. Denotamos por $\mathrm{SK}(\delta, A)$ a classe dos núcleos padrões.

Uma observação simples é que se $|x-x'| \leq \frac{1}{2} \max\{|x-y|, |x'-y|\}$, então

$$\max\{|x-y|, |x'-y|\} \leq 2 \min\{|x-y|, |x'-y|\}. \tag{6.1.4}$$

Isto implica na comparação de $|x-y|$ e $|x'-y|$. Claramente a mesma observação é válida trocando x por y.

Se K é um núcleo padrão de $\mathrm{SK}(\delta, A)$, então é fácil ver que

$$K^*(x,y) = K(y,x) \tag{6.1.5}$$

é também núcleo padrão de $\mathrm{SK}(\delta, A)$. Podemos dizer então que a classe $\mathrm{SK}(\delta, A)$ é invariante por esta operação. O núcleo K^* é chamado de adjunto de K.

As condições de suavidade exigidas sobre K são mais fracas do que a seguinte condição sobre o gradiente de K

$$|\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leq \frac{A}{|x-y|^{n+1}}, \quad x \neq y. \tag{6.1.6}$$

De fato, considere $|x-x'| \leq \frac{1}{2}\max\{|x-y|, |x'-y|\}$ e, sem perda de generalidade, suponha que $\max\{|x-y|, |x'-y|\} = |x-y|$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi = x + \theta(x'-x)$, com $0 < \theta < 1$, temos que

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq |\nabla_x K(\xi,y)||x-x'| \leq \frac{A}{|\xi-y|^{n+1}}|x-x'|.$$

Observe que, como supomos $|x'-y| \leq |x-y|$,

$$\begin{aligned} |\xi - y| &\geq |x-y| - |x'-x| \\ &\geq \frac{1}{2}|x-y| \\ &\geq \frac{1}{4}(|x-y| + |x'-y|). \end{aligned}$$

Logo, sempre que $|x-x'| \leq \frac{1}{2}\max\{|x-y|, |x'-y|\}$,

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq \frac{A4^{n+1}|x-x'|}{(|x-y| + |x'-y|)^{n+1}}.$$

A condição de suavidade (6.1.3) é verificada de forma análoga. Portanto, $K \in \mathrm{SK}(1, 4^{n+1}A)$.

Exemplo 6.1.1. *A função $K(x,y) = |x-y|^{-n}$ é um núcleo padrão de $\mathrm{SK}(1, n4^{n+1})$. Basta observar o gradiente de K:*

$$\nabla_x K(x,y) = \frac{-n}{|x-y|^{n+1}}(x-y),$$

o que implica que $|\nabla_x K(x,y)| = \frac{n}{|x-y|^n}$ e portanto, satisfaz (6.1.6), para $A = n$.

Queremos agora condições para que núcleos padrões se estendam como distribuição temperada, no seguinte sentido. Dado um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$, queremos uma distribuição temperada $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, que coincida com K em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$, isto é, para toda função

$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ suportada longe da diagonal, vale a seguinte representação integral pra W

$$\langle W, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\Phi(x,y)dxdy. \tag{6.1.7}$$

Note que a integral em (6.1.7) é absolutamente convergente, pois como Φ está suportada longe da diagonal Δ, existe $c > 0$ tal que $|x-y| \geq c$, para todo $(x,y) \in \operatorname{supp} \Phi$. Logo, como Φ é uma função Schwartz, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)||\Phi(x,y)|dxdy \\
&\qquad \leq A \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(x,y)|}{|x-y|^n} dxdy \\
&\qquad \leq \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n} [(1+|x|)^{n+1}(1+|y|)^{n+1}|\Phi(x,y)|] \frac{1}{c^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}} \\
&\qquad < \infty.
\end{aligned}$$

Consideremos agora um operador linear contínuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. O Teorema do Núcleo de Schwartz[1] nos garante a existência de uma distribuição temperada $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que, para toda função $f, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle Tf, \phi \rangle = \langle W, \phi \otimes f \rangle, \tag{6.1.8}$$

em que $\phi \otimes f(x,y) = \phi(x)f(y)$. Como W é uma distribuição temperada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existem constantes C, N, M, tais que

$$|\langle Tf, \phi \rangle| = |\langle W, \phi \otimes f \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq N} \rho_{\alpha,\beta}(\phi) \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq M} \rho(f).$$

Chamamos de núcleo distribucional de T a distribuição temperada W. Observe que caso W seja uma distribuição temperada que coincida com um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$, então se $\operatorname{supp} \phi \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$, o produto tensorial $\phi \otimes f$ está suportada longe da diagonal, e portanto, Tf agindo sobre ϕ tem uma representação integral

$$\langle Tf, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \phi(x) dxdy. \tag{6.1.9}$$

O operador adjunto de T, $T^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definido como sendo o único operador que satisfaz

$$\langle T^* f, \phi \rangle = \langle T\phi, f \rangle,$$

para todas $f, \phi \in \mathcal{S}$. Suponha que T tem núcleo distribucional W. Definimos W^* por

$$\langle W^*, \Phi \rangle = \langle W, \Phi^* \rangle,$$

[1] Veja o Teorema 5.2.1 em [HRM]

em que $\Phi^*(x,y) = \Phi(y,x)$ e o chamamos de núcleo (distribucional) adjunto de W. Neste caso, W^* é o núcleo de T^*, pois dadas funções $f, \phi \in \mathcal{S}$, é evidente que $(f \otimes \phi)^*(x,y) = \phi \otimes f(x,y)$ e portanto

$$\langle T^* f, \phi \rangle = \langle T\phi, f \rangle = \langle W, \phi \otimes f \rangle = \langle W^*, f \otimes \phi \rangle.$$

Além disso, caso W coincida com um núcleo padrão K, é claro que W^* vai coincidir com K^*. Vejamos alguns exemplos agora.

Exemplo 6.1.2. *Suponha que uma função K definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$ satisfaça somente as condições (6.1.1) e (6.1.2). Se K for uma função anti-simétrica, isto é,*

$$K(x,y) = -K(y,x), \quad x \neq y$$

então necessariamente K satisfaz a segunda condição de suavidade (6.1.3). Além disso existe uma distribuição temperada W em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que estende K.

É imediato ver que K de fato satisfaz a condição (6.1.3). Basta usar sua anti-simetria e a condição (6.1.2). Agora, defina W como

$$\langle W, \Phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \int_{|x-y| \geq \varepsilon} K(x,y)\Phi(x,y)dydx, \quad \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \tag{6.1.10}$$

Pela anti-simetria de K e pela condição de tamanho, podemos provar que o limite acima existe e

$$\langle W, \Phi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(\Phi(x,y) - \Phi(y,x))dydx,$$

Portanto W está bem definida como distribuição temperada em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Podemos assim definir um operador $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ cujo núcleo distribucional em W da seguinte forma

$$\langle Tf, \phi \rangle = \langle W, \phi \otimes f \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)(f(y)\phi(x) - f(x)\phi(y))dydx. \tag{6.1.11}$$

Exemplo 6.1.3. *Seja A uma função Lipschitz na reta $\mathbb{R}$, ou seja, para alguma constante L,*

$$|A(x) - A(y)| \leq L|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Defina o seguinte núcleo

$$K_A(x,y) = \frac{1}{(x-y) + i(A(x) - A(y))}.$$

É fácil ver que K_A é anti-simétrica. A condição de tamanho (6.1.1) é satisfeita, pois como $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $|x-y| \leq |(x-y) + i(A(x) - A(y))|$. *Vejamos que K_A satisfaz a condição de* *suavidade* (6.1.3). *De fato, suponha que* $|y-y'| \le \frac{1}{2}\max\{|y-x|, |y'-x|\}$. *Então*

$$\begin{aligned}
|K_A(x,y) - K_A(x,y')| &= \frac{|(y-y') + i((A(y) - A(y'))|}{[(x-y) + i(A(x) - A(y))][(x-y') + i(A(x) - A(y'))]} \\
&\le \frac{|(y-y') + i((A(y) - A(y')))}{|x-y||x-y'|} \\
&\le \frac{(1+L)|y-y'|}{|x-y||x-y'|}.
\end{aligned}$$

Pela observação feita em (6.1.4), *temos que*

$$\begin{aligned}
|x-y| + |x-y'| &\le 2\max\{|x-y|, |x-y'|\} \\
&\le 4\min\{|x-y|, |x-y'|\}.
\end{aligned}$$

Isto implica que $(|x-y| + |x-y'|)^2 \le 16|x-y||x-y'|$ *e portanto*

$$|K_A(x,y) - K_A(x,y')| \le \frac{16(1+L)|y-y'|}{(|x-y| + |x-y'|)^2}.$$

O que provamos então é que $K_A \in \mathrm{SK}(1, 16(1+L))$.

Exemplo 6.1.4. *Seja* A *como no exemplo anterior. Para um inteiro* $m \ge 1$ *e* $x, y \in \mathbb{R}$, *defina*

$$K_m(x,y) = \left(\frac{A(x) - A(y)}{x-y}\right)^m \frac{1}{x-y} \tag{6.1.12}$$

É claro também que K_m *é anti-simétrica e satisfaz a condição de tamanho* (6.1.1), *pois* A *é Lipschitz. Afirmamos que* K_m *satisfaz* (6.1.3). *Suponha então* $|y-y'| \le \frac{1}{2}\max\{|y-x|, |y'-x|\}$. *No que segue*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{A(x) - A(y)}{x-y} - \frac{A(x) - A(y')}{x-y'}\right| \\
&\qquad = \left|\frac{(x-y')(A(x) - A(y)) - (x-y)(A(x) - A(y'))}{(x-y)(x-y')}\right| \\
&\qquad = \left|\frac{(x-y)(A(y') - A(y)) - (y-y')(A(x) - A(y))}{(x-y)(x-y')}\right| \\
&\qquad \le 2L\frac{|y-y'|}{|x-y'|}.
\end{aligned}$$

Usamos agora $|a^m - b^m| \le |a-b| \sum_{j=0}^{m-1} |a|^{m-1-j}|b|^j$ *para obter*

$$
\begin{aligned}
&|K_m(x,y) - K_m(y,x)| \\
&\quad = \left| \left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y} \right)^m \frac{1}{x-y} - \left(\frac{A(x)-A(y')}{x-y'} \right)^m \frac{1}{x-y'} \right| \\
&\quad \leq \left| \left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y} \right)^m - \left(\frac{A(x)-A(y')}{x-y'} \right)^m \right| \frac{1}{|x-y|} \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{A(x)-A(y')}{x-y'} \right)^m \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-y'} \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{|x-y|} \left| \frac{A(x)-A(y)}{x-y} - \frac{A(x)-A(y')}{x-y'} \right| \sum_{j=0}^{m-1} \left| \frac{A(x)-A(y)}{x-y} \right|^{m-1-j} \left| \frac{A(x)-A(y')}{x-y'} \right|^j \\
&\qquad\qquad + L^m \frac{|y-y'|}{|x-y||x-y'|}. \\
&\quad \leq (2m+1)L^m \frac{|y-y'|}{|x-y||x-y'|}. \\
&\quad = \frac{16(2m+1)L^m|y-y'|}{(|x-y|+|x-y'|)^2}.
\end{aligned}
$$

Logo, K_m é um núcleo padrão de $\mathrm{SK}(1, 16(2m+1)L^m)$. *O operador cujo núcleo é $\frac{1}{i\pi}K_m$ recebe o nome de comutador de Calderón.*

Definiremos agora a classe dos operadores de Calderón-Zygmund.

Definição 6.1.5. *Considere um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$ e $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo com núcleo distribucional W. Dizemos que T está associado com K se W coincide com K em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$. Neste caso, vale a seguinte representação integral para T*

$$
Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)dy, \tag{6.1.13}
$$

para toda $f \in \mathcal{C}_0^\infty$ e todo $x \notin \operatorname{supp}(f)$.

Além disso, diremos que o operador T, associado a K, é um operador de Calderón-Zygmund quando T se estende a um operador limitado em L^2, isto é,

$$
\|T\phi\|_{L^2} \leq B\|\phi\|_{L^2}, \quad \forall \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{6.1.14}
$$

Denotaremos por $\mathrm{CZO}(\delta, A, B)$ a classe dos operadores de Calderón-Zygmund.

Observação 6.1.6. *Notemos que, quando T é um operador associado a um núcleo padrão K, é válida a representação integral de T como em* (6.1.9)

A proposição seguinte estende a representação integral de T para funções limitadas com suporte compacto.

Proposição 6.1.7. *Seja $T \in \mathrm{CZO}(\delta, A, B)$ com núcleo padrão K. Sejam f, ϕ funções limitadas com suporte compacto, cujos suportes não se interceptam. Então vale a seguinte representação* *integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\phi(x)dydx.$$

Além disso, para quase todo $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{supp}(f)$,

$$Tf(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x_0,y)f(y)dy.$$

Definição 6.1.8. *Seja* $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$ *núcleo padrão e* $\varepsilon > 0$. *Definimos o núcleo truncado* $K^{(\varepsilon)}$ *por*

$$K^{(\varepsilon)}(x,y) = K(x,y)\chi_{|x-y|>\varepsilon}.$$

Dado $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *operador linear contínuo, definimos o operador truncado de* T *por*

$$T^{(\varepsilon)}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^{(\varepsilon)}(x,y)f(y)dy,$$

e o operador maximal de T *por*

$$T^{(*)}f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T^{(\varepsilon)}f(x)|. \tag{6.1.15}$$

Proposição 6.1.9. *Sejam* $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$ *e* $T \in \mathrm{CZO}(\delta, A, B)$ *associado a* K. *Suponha que exista* $B' > 0$ *tal que*

$$\sup_{\varepsilon>0} \|T^{(\varepsilon)}\|_{L^2\to L^2} \leq B'.$$

Então existe um operador linear T_0 *de* L^2 *em* L^2 *tal que:*

(1) O núcleo distribucional de T_0 *coincide com* K *em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$.

(2) Existe uma sequência $\varepsilon_j \searrow 0$ *tal que, para toda* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *vale a convergência*

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^{(\varepsilon_j)}f(x)g(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} T_0f(x)g(x)dx,$$

ou seja, $T_0 f$ *é limite fraco* de* $T^{(\varepsilon_j)}f$ *em* L^2.

(3) T_0 *é limitado em* L^2 *com norma*

$$\|T_0\|L^2 \to L^2 \leq B'.$$

(4) Existe uma função limitada b *com norma* $\|b\|_{L^\infty} \leq B + B'$ *tal que*

$$Tf = T_0f + bf, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Veja a Proposição 4.1.11 em [GFK2]. □

Observe que o item (4) da proposição anterior indica que um núcleo padrão K não determina unicamente um operador de Calderón-Zygmund.

6.2 Extensão para Funções $L^\infty \cap C^\infty$

Os operadores de Calderón-Zygmund por definição agem sobre a classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, são operadores $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ associados a núcleos padrões e que admitem extensão limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$. O Teorema $T(1)$ nos dá condições necessárias e suficientes para que T admita extensão limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e tais condições envolvem a distribuição $T(1)$. Precisamos então dar um sentido para T agindo sobre a função constante igual a 1. Isso é o que faremos nesta seção: estender a ação de T para funções suaves limitadas.

Comece por considerar o espaço das funções teste $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e denote por $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $\mathcal{D}$ das funções teste que têm integral nula. A topologia em $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ será a topologia induzida por $\mathcal{D}$. Neste caso, um funcional linear em $D_0(\mathbb{R}^n)$ é contínuo se, e somente se, dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existem constantes $C_K, M > 0$ tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq M} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty},$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_0(K)$. Claramente, é válido a inclusão $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$. Dada uma função $f \in \mathcal{C}^\infty \cap L^\infty$, definimos a seguir Tf como elemento de $\mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 6.2.1. *Considere $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ operador linear contínuo associado a um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$. Considere $f \in \mathcal{C}^\infty \cap L^\infty$. Dada $\phi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, seja $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta = 1$ numa vizinhança de $\operatorname{supp}\phi$. Definimos ação de Tf sobre ϕ por*

$$\langle Tf, \phi\rangle = \langle T(\eta f), \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)(1-\eta(y))\phi(x)dydx. \tag{6.2.1}$$

Observação 6.2.2. *Ser válida a definição (6.2.1) implica que*

$$\langle Tf, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle T(\eta_j f), \phi\rangle,$$

em que η é tomada como na definição acima e $\eta_j(x) = \eta(x/j)$, que é uma sequência de funções que converge q.t.p. para a função constante igual a 1. De fato, consideremos $\phi \in \mathcal{D}_0$ suportada numa bola $B(x_0, R)$. Sem perda de generalidade, considere η tal que $\eta = 1$ em $B(x_0, 3R)$ e $\eta = 0$ em $\mathbb{R}^n \backslash B(x_0, 4R)$. Assumindo a independência de η na definição (6.2.1), temos

$$\begin{aligned}\langle Tf, \phi\rangle &= \langle T(\eta_j f), \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)(1-\eta_j(y))\phi(x)dydx \\ &= \langle T(\eta_j f), \phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(x_0,y)) f(y)(1-\eta_j(y))\phi(x)dydx.\end{aligned}$$

A segunda igualdade estamos usando o fato de ϕ ter integral nula. Basta verificarmos portanto que integral dupla acima converge a zero quando $j \to \infty$. Observe que a integral dupla acima ocorre em $|x - x_0| < R$ e $|y - x_0| \geq 3R$, o que implica que $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - y|$. Pela condição *de suavidade do núcleo, temos que*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))f(y)(1-\eta_j(y))\phi(x)dydx\right| \\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} A\frac{|x-x_0|^\delta}{|y-x_0|^{n+\delta}}|f(y)||\phi(x)|dydx \\
&\qquad\qquad \leq A\|f\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^\infty}\int_{|x-x_0|<R}|x-x_0|^\delta dx\int_{|y-x_0|\geq 3R}\frac{dy}{|y-x_0|^{n+\delta}} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))f(y)(1-\eta_j(y))\phi(x)dydx \longrightarrow 0, \quad j\to 0.$$

Verifiquemos que (6.2.1) está bem definida, isto é, a expressão do lado direito da igualdade é convergente. Note que o termo $\langle T(\eta f),\phi\rangle$ está bem definida, pois ηf é uma função Schwartz, T age sobre funções sobre $\mathcal{S}$ e ϕ é, em particular, uma função Schwartz. Provemos agora que a integral dupla em (6.2.1) é convergente. Para isso, tome $x_0 \in \operatorname{supp}\phi$. Considere

$$\begin{aligned}
I_x &= \{y\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| > \frac{1}{2}|y-x_0|\} \\
J_x &= \{y\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| \leq \frac{1}{2}|y-x_0|\}.
\end{aligned}$$

A integral em y é escrita como a soma das integrais nessas regiões. Provemos que cada uma destas integrais é convergente. De fato, observe que quando $y\in I_x$, $|x-y|\geq|x-x_0|$. Além disso, $I_x\subset B(x_0,2|x-x_0|)$. Logo, em vista da condição (6.1.1) de tamanho de K, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{I_x}|K(x,y)f(y)(1-\eta(y))|dy|\phi(x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{I_x}\frac{A}{|x-y|^n}|f(y)|dy|\phi(x)|dx \\
&\leq A\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B(x_0,2|x-x_0|)}\frac{|\phi(x)|}{|x-x_0|^n}dydx \\
&= A2^n\nu_n\|f\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx=0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y)-K(x_0,y))\phi(x)dx.$$

Logo, reescreva

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{J_x}K(x,y)f(y)(1-\eta(y))dy\phi(x)dx \\
&\qquad\qquad = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{J_x}(K(x,y)-K(x_0,y))f(y)(1-\eta(y))dy\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

No que segue, pela condição de suavidade (6.1.2), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{J_x} |K(x,y)-K(x_0,y)||f(y)||1-\eta(y)|dy|\phi(x)|dx \\
&\qquad\qquad \le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{J_x} \frac{A|x-x_0|^\delta}{(|x-y|+|x_0-y|)^{n+\delta}}\|f\|_{L^\infty}dy|\phi(x)|dx \\
&\qquad\qquad \le A\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|y-x_0|\ge 2|x-x_0|}\frac{1}{|x_0-y|^{n+\delta}}dy|x-x_0|^\delta|\phi(x)|dx \\
&\qquad\qquad \le \omega_{n-1}A\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{2|x-x_0|}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{r^{n+\delta}}dr|x-x_0|^\delta|\phi(x)|dx \\
&\qquad\qquad = \frac{\omega_{n-1}A}{\delta 2^\delta}\|f\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^1} < \infty.
\end{aligned}
$$

Isto conclui a prova de que a integral dupla em (6.2.1) é convergente e portanto Tf está bem definida. E como $\|\phi\|_{L^1} \le |\operatorname{supp}\phi|\|\phi\|_{L^\infty}$, segue que Tf está bem definida como elemento de $\mathcal{D}_0'(\mathbb{R}^n)$.

Agora, note que a definição (6.2.1) de Tf independe da escolha de x_0. Devemos verificar ainda que a definição dada em (6.2.1) independe da escolha da função η e que, quando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Tf coincide com a definição (6.2.1). Primeiramente, provemos a independência de η. Tome então $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função que satisfaz (6.2.1), tal que $0 \le \zeta \le 1$ e $\zeta = 1$ numa vizinhança de $\operatorname{supp}\phi$. A função $\eta - \zeta$ se anula numa vizinhança do suporte de ϕ e portanto, $f(\eta-\zeta)$ e ϕ tem suportes disjuntos. Logo, como $f(\eta-\zeta)$ é uma função Schwartz, cujo suporte é disjunto do suporte de ϕ, temos que T satisfaz (6.1.6), ou seja,

$$
\langle T(f(\eta-\zeta)),\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)(\eta(y)-\zeta(y))\phi(x)dxdy.
$$

Por linearidade de T, obtemos a independência de η:

$$
\begin{aligned}
&\langle T(f\eta),\phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)(1-\eta(y))\phi(x)dxdy \\
&\qquad\qquad = \langle T(f\zeta),\phi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)(1-\zeta(y))\phi(x)dxdy.
\end{aligned}
$$

Por fim, se f for uma função Schwartz, ηf e $(1-\eta)f$ também a são. Por linearidade de T,

$$
\langle Tf,\phi\rangle = \langle T(f\eta),\phi\rangle + \langle T(f(1-\eta)),\phi\rangle.
$$

E como $\operatorname{supp}(1-\eta)\cap\operatorname{supp}\phi = \emptyset$, a representação integral de T

$$
\langle T(f(1-\eta)),\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)(1-\eta(y))\phi(x)dxdy.
$$

O que prova que a definição (6.2.1) coincide com a definição de T em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

6.3 A Limitação L^p dos Operadores de Calderón-Zygmund

Na própria definição dos operadores de Calderón-Zygmund foi exigido que o operador $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ admitisse extensão limitada em L^2. Nesta seção veremos que tal condição é suficiente para que obtenhamos a limitação $L^p \to L^p$ e a limitação do tipo fraco-$(1,1)$, tanto de T quanto do operador maximal $T^{(*)}$.

Teorema 6.3.1. *Sejam $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$ um núcleo padrão e $T \in \mathrm{CZO}(\delta, A, B)$ operador associado a K. Então necessariamente T admite extensão limitada do tipo forte-(p,p), para todo $1 < p < \infty$, e do tipo fraco-$(1,1)$. Além disso, T satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \le C_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^1}, \tag{6.3.1}$$

$$\|Tf\|_{L^p} \le C_{n,\delta}(A+B)\max\{p,(p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p}. \tag{6.3.2}$$

Demonstração. Fixe $\alpha > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por T ser um operador de Calderón-Zygmund, T está bem definida, a princípio, para funções de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por este motivo, considere a seguinte classe de funções simples

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \chi_{Q_j} : Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ é cubo diádico, } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } N > 0 \text{ um inteiro} \right\}.$$

Tal classe $\mathcal{F}_0$ é densa em L^1 e, em particular, é um subconjunto de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos obter a estimativa (6.3.1) para $f \in \mathcal{F}_0$ e estendê-la por densidade a todo L^1. Considere então $f \in \mathcal{F}_0$ e aplique a decomposição de Calderón-Zygmund (Teorema 4.4.1) para f numa altura $\gamma\alpha$, em que $\gamma > 0$ será escolhido posteriormente. Escrevemos então $f = g + b$, em que $b = \sum_j b_j$ e com as condições (1)-(6) do Teorema 4.4.1 sendo satisfeitas.O fato de ambas as funções f e g serem limitadas implica que cada b_j é uma função limitada. Então é claro que $b_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$, já que b_j tem suporte compacto. Podemos aqui aplicar a Proposição 6.1.7 para b_j afim de se ter uma representação integral para Tb_j:

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x,y) b_j(y) dy.$$

Denote por Q_j^* cubo concêntrico a Q_j e com lado é $l(Q_j^*) = 2\sqrt{n}\, l(Q_j)$. Como T é limitada em L^2 e $\|g\|_{L^2} \le 2^n \gamma\alpha \|f\|_{L^1}^{1/2}$ (pela Observação (4.4.6)), e usando o item (6) da Decomposição de Calderón-Zygmund, temos

$$\begin{aligned}
|\{|Tf| > \alpha\}| &\le |\{|Tg| > \alpha/2\}| + |\{|Tb| > \alpha/2\}| \\
&\le \frac{2^2}{\alpha^2}\|Tg\|_{L^2}^2 + |\cup Q_j^*| + |\{x \notin \cup Q_j^* : |Tb(x)| > \alpha/2\}| \\
&\le \frac{2^2}{\alpha^2} B^2 \|g\|_{L^2}^2 + (2\sqrt{n})^n \sum_j |Q_j| + \frac{2}{\alpha}\sum_i \int_{\cap_j (Q_j^*)^c} |Tb_i(x)| dx \\
&\le \frac{2^2}{\alpha^2} B^2 (2^n \gamma\alpha \|f\|_{L^1}) + (2\sqrt{n})^n \frac{\|f\|_{L^1}}{\gamma\alpha} + \frac{2}{\alpha}\sum_i \int_{(Q_i^*)^c} |Tb_i(x)| dx,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$|\{|Tf| > \alpha\}| \leq \left(\frac{(2^{n+1}B\gamma)^2}{2^n\gamma} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma}\right)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}\sum_i \int_{(Q_i^*)^c} |Tb_i(x)|dx. \tag{6.3.3}$$

Provemos agora que

$$\sum_j \int_{(Q_i^*)^c} |Tb_i(x)|dx \leq C_{n,\delta}\|f\|_{L^1},$$

para alguma constante $C_{n,\delta}$. Denote por y_j o centro de Q_j. Veja que se $x \notin Q_j^*$ e $y \in Q_j$, então

$$\begin{aligned}
|x - y_j| &\geq \frac{1}{2}l(Q_j^*) = \sqrt{n}l(Q_j) \\
|y - y_j| &\leq \frac{1}{2}\text{diag}Q_j = \frac{1}{2}\sqrt{n}l(Q_j),
\end{aligned}$$

e portanto

$$|y - y_j| \leq \frac{1}{2}|x - y_j|.$$

Usando agora que cada b_j tem integral zero e a condição de suavidade (6.1.3), estimamos a soma das integrais $\sum_i \int_{(Q_i^*)^c} |Tb_i(x)|dx$ como segue

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha}\sum_i \int_{(Q_i^*)^c} |Tb_i(x)|dx &= \sum_i \int_{(Q_i^*)^c} \left|\int_{Q_i} b_i(y)K(x,y)dy\right| dx \\
&\leq \sum_i \int_{Q_i}\int_{(Q_i^*)^c} |b_i(y)||K(x,y) - K(x,y_j)|dxdy \\
&\leq \sum_i \int_{Q_i}\int_{|x-y_j|\geq 2|y-y_j|} |b_i(y)||K(x,y) - K(x,y_j)|dxdy \\
&\leq A\sum_i \int_{Q_i}\int_{|x-y_j|\geq 2|y-y_j|} |b_i(y)|\frac{|y-y_i|^\delta}{|x-y_j|^{n+\delta}}dxdy \\
&\leq A\sum_i \int_{Q_i} |b_i(y)||y-y_i|^\delta \int_{S^{n-1}} d\sigma(\theta)\int_{2|y-y_j|}^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n+\delta}}drdy \\
&= \frac{A\omega_{n-1}}{\delta 2^\delta}\sum_i \|b_j\|_{L^1} \\
&\leq C_{n,\delta}A2^{n+1}\|f\|_{L^1},
\end{aligned}$$

em que $C_{n,\delta} = \frac{\omega_{n-1}}{\delta 2^\delta}$. Retornando a (6.3.3), e escolhendo $\gamma = B^{-1}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|\{|Tf| > \alpha\}| &\leq \left[\frac{(2^{n+1}B\gamma)^2}{2^n\gamma} + \frac{(2\sqrt{n})^n}{\gamma} + 2^{n+2}C_{n,\delta}A\right]\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}. \\
&\leq C'_{n,\delta}(A+B)\frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha},
\end{aligned}$$

com $C'_{n,\delta} = \max\{2^{2n+2} + (2\sqrt{n})^n, 2^{n+2}C_{n,\delta}\}$. Logo, obtemos a estimativa

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq C'_{n,\delta}(A+B)\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_0,$$

e portanto fica provada (6.3.1).

Para obtermos a limitação L^p de T, usamos interpolação[2] entre $T: L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ e $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, o que obtemos é a limitação L^p de T, para todo $1 < p < 2$. Por outro lado, o operador adjunto T^* de T é associado ao núcleo padrão $K^*(x,y) = K(y,x)$. Logo, T^* também limitado em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 < p < 2$. Por dualidade, T é limitado em $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, para todo $2 < p' < \infty$. A estimativa (6.3.2) é obtida usando mesmo argumento feito na demonstração do Teorema 4.4.2. $\square$

Observação 6.3.2. *Pelo teorema anterior, dado um operador de Calderón-Zygmund T, as expressões Tf estão bem definidas como função de $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$, ou como função $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Repare também que existe uma similaridade entre o Teorema 6.3.1 e o Teorema 4.4.2: nas hipóteses de ambos os teoremas foi necessário exigir uma limitação em L^r para que se pudesse concluir a limitação $L^p(\mathbb{R}^n)$ do operador em questão. Além disso as estimativa que os operadores satisfazem são essencialmente as mesmas.

A Proposição 6.1.7 nos dá uma representação integral para o operador T agindo sobre funções limitadas e com suporte compacto. A proposição seguinte estende esta representação integral para T agindo sobre funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [GFK2], Proposição 4.2.3.

Proposição 6.3.3. *Seja T um operador de Calderón-Zygmund associado a um núcleo padrão K. Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, com suporte $\operatorname{supp} f \subsetneq \mathbb{R}^n$, vale que, para quase todo $x \notin \operatorname{supp} f$,*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

O seguinte teorema é um análogo a Desigualdade de Cotlar (Teorema 4.4.30) e nos permitirá obter a limitação L^p e fraca-$(1,1)$ do operador maximal $T^{(*)}$ definido em (6.1.15).

Teorema 6.3.4. *Sejam $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$ um núcleo padrão e $T \in \mathrm{CZO}(\delta, A, B)$ operador associado a K. Considere um parâmetro $r \in (0,1)$. Existe uma constante $C_{n,r}$ tal que*

$$|T^{(*)} f(x)| \le C_{n,r,\delta}[(M|Tf|^r)^{1/r}(x) + (A+B)Mf(x)], \tag{6.3.4}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \le p < \infty$. Aqui M denota o operador maximal de Hardy-Littlewood. Consequentemente, $T^{(*)}$ é do tipo fraco-$(1,1)$, limitado de L^p em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, e satisfaz as estimativas

$$\|T^{(*)} f\|_{L^{1,\infty}} \le C_{n,r,\delta}(A+B)\|f\|_{L^1} \tag{6.3.5}$$

$$\|T^{(*)} f\|_{L^p} \le C_{n,\delta}(A+B) \max\{p, (p-1)^{-1}\}\|f\|_{L^p}, \tag{6.3.6}$$

par alguma constante $C_{n,r,\delta}$ e $C_{n,\delta}$.

[2] Veja Teorema 1.2.1 e o Exercício 1.3.2 em [GFK1]

Demonstração. Sejam $0 < r < 1$, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Fixe $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $f = f_0 + f_\infty$, em que f_0, f_∞ são funções $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} f_0 &= f\chi_{B(x,\varepsilon)}, \\ f_\infty &= f\chi_{B(x,\varepsilon)^c}. \end{aligned}$$

Note que $x \notin \operatorname{supp} f_\infty$, já que $\operatorname{supp} f_\infty \subset B(x,\varepsilon)^c$. Pela Proposição 6.3.3, podemos dizer que $Tf_\infty(x)$ tem representação integral:

$$\begin{aligned} Tf_\infty(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f_\infty(y)dy \\ &= \int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x,y)f(y)dy \\ &= T^{(\varepsilon)}f(x). \end{aligned}$$

Seja $z \in B(x, \varepsilon/2)$. Então $z \notin \operatorname{supp} f_\infty$ e assim $Tf_\infty(z)$ também tem representação integral. Note ainda que se $|x-y| \geq \varepsilon$, então $|z-x| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ e portanto, pela condição de suavidade (6.1.2) de K,

$$\begin{aligned} |Tf_\infty(x) - Tf_\infty(z)| &\leq \int_{|x-y|\geq\varepsilon} |K(z,y) - K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leq A|z-x|^\delta \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{|f(y)|}{(|x-y|+|z-y|)^{n+\delta}}dy \\ &\leq A\frac{\varepsilon^\delta}{2^\delta} \int_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{|f(y)|}{(|x-y|+\frac{\varepsilon}{2})^{n+\delta}}dy \\ &= |f| * K_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

em que K é uma função radial, integrável e decrescente dada por

$$K(x) = \frac{2^n}{(2|x|+1)^{n+\delta}}\chi_{|x|\geq 1}.$$

Pelo Corolário 2.1.12, temos que a função maximal $\sup_{\varepsilon>0} |f| * K_\varepsilon$ é controlada pontualmente por um múltiplo da função maximal de Hardy-Littlewood Mf e assim

$$|Tf_\infty(x) - Tf_\infty(z)| \leq AD_{n,\delta}(Mf)(x).$$

Logo, para $z \in B(x, \varepsilon/2)$ e $0 < r < 1$, temos que

$$\begin{aligned} |T^{(\varepsilon)}f(x)|^r &= |Tf_\infty(x)|^r \\ &\leq |Tf_\infty(x) - Tf_\infty(z)|^r + |Tf_\infty(z)|^r \\ &\leq A^r D^r_{n,\delta}(Mf)(x)^r + |Tf(z)|^r + |Tf_0(z)|^r. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Os termos $|T^{(\varepsilon)}f(x)|^r$ e $Mf(x)^r$ são constante em z portanto, calculando a média de (6.3.7) sobre $z \in B(x, \varepsilon/2)$, obtemos[3]

$$\begin{aligned}|T^{(\varepsilon)}f(x)| &\leq \left(A^r D^r_{n,\delta}(Mf)(x)^r + \fint_{B(x,\varepsilon/2)} |Tf(z)|^r dz + \fint_{B(x,\varepsilon/2)} |Tf_0(z)|^r dz\right)^{1/r} \\ &\leq 4^{1/r-1}\left[AD_{n,\delta}(Mf)(x) + (M|Tf|^r)^{1/r}(x) + \left(\fint_{B(x,\varepsilon/2)} |Tf_0(z)|^r dz\right)^{1/r}\right]. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

O terceiro termo do lado direito da desigualdade acima é estimado usando a Desigualdade de Kolmogorov[4], já que T é um operador do tipo fraco-$(1,1)$, pelo Teorema 6.3.1:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\int_{B(x,\varepsilon/2)} |Tf_0(z)|^r dz\right)^{1/r} &\leq \left(\frac{1}{|B(x,\varepsilon/2)|}\frac{\|T\|_{L^{1,\infty}\to L^1}}{1-r}|B(x,\varepsilon/2)|^{1-r}\|f_0\|^r_{L^1}\right)^{1/r} \\ &\leq \frac{C_{n,\delta}(A+B)}{(1-r)^{1/r}}|B(x,\varepsilon/2)|^{-1}\|f_0\|_{L^1} \\ &\leq C_{n,r,\delta}(A+B)(Mf)(x).\end{aligned}$$

Logo, voltando para (6.3.8) e tomando o supremo em $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}T^{(*)}f(x) &\leq 4^{1/r-1}[AD_{n,\delta}(Mf)(x) + (M|Tf|^r)^{1/r}(x) + C_{n,r,\delta}(A+B)(Mf)(x)] \\ &\leq C'_{n,r,\delta}[(A+B)(Mf)(x) + (M|Tf|^r)^{1/r}(x)],\end{aligned}$$

donde obtemos a estimativa (6.3.4).

Vamos obter agora a estimativa fraca-$(1,1)$ de $T^{(*)}$. Para tal, usaremos o fato do operador maximal de Hardy-Littlewood M e do operador de Calderón-Zygmund T serem do tipo fraco-$(1,1)$. Usaremos também que M é do tipo fraco-(p,p)[5], para todo $1 < p < \infty$, e o simples fato de que

$$\||f|^q\|_{L^{p,\infty}} = \|f\|^q_{L^{pq,\infty}}, \quad 0 < p, q, \infty \tag{6.3.9}$$

No que segue,

$$\begin{aligned}\|(M|Tf|^r)^{1/r}\|_{L^{1,\infty}} &= \|M|Tf|^r\|^{1/r}_{L^{1/r,\infty}} \\ &\leq C_{n,r}\||Tf|^r\|^{1/r}_{L^{1/r,\infty}} \\ &= C_{n,r}\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \\ &\leq C_{n,r}\|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}\|f\|_{L^1} \\ &\leq C'_{n,r,\delta}(A+B)\|f\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

[3]Aqui estamos usando duas vezes a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, para $1 \leq p < \infty$,

[4]Se S é um operador sublinear do tipo fraco-$(1,1)$ com norma $\|S\|_{L^{1,\infty}\to L^1} \leq B$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita, então

$$\int_U |Sf(x)|^q dx \leq \frac{B^q|U|^{1-q}}{(1-q)}\|f\|^q_{L^1}.$$

[5]Exercício 2.1.13 em [GFK1]

Em vista da estimativa (6.3.4), temos de imediato que

$$\|T^{(*)}f\|_{L^{1,\infty}} \leq 2C_{n,r,\delta}[\|(M|Tf|^r)^{1/r}\|_{L^{1,\infty}} + (A+B)\|Mf\|_{L^{1,\infty}}]$$

E usando o obtido em (6.3.10) e a limitação fraca-$(1,1)$ de M,

$$\|T^{(*)}f\|_{L^{1,\infty}} \leq C''_{n,r,\delta}(A+B)\|f\|_{L^1}.$$

Por fim, para a limitação L^p de $T^{(*)}$, fixe $r = 1/2$. Como M é limitado em $L^{2p}(\mathbb{R}^n)$ com norma

$$\|M\|_{L^{2p}\to L^{2p}} \leq 3^{n/(2p)}\frac{2p}{2p-1} \leq 3^{n/2}\cdot 2$$

e em vista de (6.3.9),

$$\begin{aligned}\|(M|Tf|^{1/2})^2\|_{L^p} &= \|M|Tf|^{1/2}\|^2_{L^2p}\\ &\leq (3^{n/2}\cdot 2)^2\||Tf|^2\|^2_{L^{2p}}\\ &\leq 3^n\cdot 4\|T\|_{L^p\to L^p}\|f\|_{L^p}\\ &\leq 3^n\cdot 4C_{n,\delta}\max\{p,(p-1)^{-1}\}(A+B)\|f\|_{L^p}.\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

As estimativas (6.3.4) e (6.3.11) implicam portanto em

$$\begin{aligned}\|T^{(*)}f\|_{L^p} &\leq C_{n,\delta}[\|(M|Tf|^2)^{1/2}\|_{L^p} + (A+B)\|Mf\|_{L^p}]\\ &\leq C'_{n,\delta}\max\{p,(p-1)^{-1}\}(A+B)\|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

6.4 A Limitação $L^\infty \to BMO$

Provaremos nesta seção que operadores associados a núcleos padrões mapeiam continuamente L^∞ em BMO. Isto mostra também que o espaço BMO serve como um substituto para o espaço L^∞, já que, em geral, tais operadores não são limitadas de L^∞ para L^∞.

Teorema 6.4.1. *Considere $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ operador de Calderón-Zygmund associado a um núcleo padrão K. Para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, Tf é uma função BMO e*

$$\|Tf\|_{BMO} \leq c\|f\|_{L^\infty}.$$

Demonstração. Seja Q um cubo de $\mathbb{R}^n$ centrado em x_0 e denote por Q^* o cubo de centro x_0 cujo lado $l(Q^*) = 2\sqrt{n}l(Q)$. Escreva $f = f_1 + f_2$, em que

$$\begin{aligned}f_1 &= f\chi_{Q^*}\\ f_2 &= f - f\chi_{Q^*}.\end{aligned}$$

Veja que, em vista da Proposição 6.3.3, podemos considerar $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que

$$Tf_2(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x_0, y) f(y) dy,$$

pois $x_0 \notin \operatorname{supp} f_2$ e $\operatorname{supp} f_2 \subset \mathbb{R}^n \backslash Q^*$. Para estimar a norma BMO de Tf, vejamos primeiro o que segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(x_0)| dx &= \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q^*} (K(x,y) - K(x_0,y)) f_2(y) dy \right| dx \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q^*} |K(x,y) - K(x_0,y)| |f_2(y)| dy dx \\
&\leq 2\|f\|_{L^\infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q^*} |K(x,y) - K(x_0,y)| dy dx.
\end{aligned}$$

Como $x \in Q$ e $y \notin Q^*$, temos que $|x - x_0| \leq \frac{1}{2}|y - x_0|$. Pela condição de suavidade de K,

$$\begin{aligned}
\int_Q \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q^*} |K(x,y) - K(x_0,y)| dy dx &\leq A \int_Q \int_{|y-x_0| \geq 2|x-x_0|} \frac{|x-x_0|^\delta}{|y-x_0|^{n+\delta}} dy dx \\
&= A \int_Q |x-x_0|^\delta \left(\int_{|y| \geq 2|x-x_0|} \frac{1}{|y|^{n+\delta}} dy \right) dx \\
&= A \int_Q |x-x_0|^\delta \left(\omega_{n-1} \int_{2|x-x_0|}^\infty \frac{1}{r^{\delta+1}} dr \right) dx \\
&= \frac{A\omega_{n-1}}{2^\delta \delta} |Q|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(x_0)| dx \leq c\|f\|_{L^\infty},$$

O que implica que

$$\|Tf_2\|_{BMO} \leq c\|f\|_{L^\infty}. \tag{6.4.1}$$

Por outro lado, como $f_1 \in L^2$ e T é limitada em L^2, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(x)| dx &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\
&\leq \|T\|_{L^2 \to L^2} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{Q^*} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + c\|f\|_{L^\infty} \\
&\leq \|T\|_{L^2 \to L^2} \|f\|_{L^\infty} \left(\frac{|Q^*|}{|Q|} \right)^{1/2}, \\
&= (2\sqrt{n})^{n/2} \|T\|_{L^2 \to L^2} \|f\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|Tf_1\|_{BMO} \leq c\|f\|_{L^\infty}. \tag{6.4.2}$$

Tomando $c_Q = Tf_2(x_0)$ e usando as estimativa (6.4.1) e (6.4.2), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x) - c_Q|dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x) - c_Q|dx \\ &\leq \|Tf_1\|_{BMO} + \|Tf_2\|_{BMO} \\ &\leq c\|f\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

e assim

$$\|Tf\|_{BMO} \leq c\|f\|_{L^\infty},$$

para toda $f \in L^\infty$ com suporte compacto. □

Como a classe das funções de L^∞ com suporte compacto não é denso em L^∞, a continuidade $L^\infty \to BMO$ de T não pode ser estendida por densidade. É por este motivo que definimos a seguir T agindo sobre uma função limitada. Considere $f \in L^\infty$, Q um cubo de $\mathbb{R}^n$ centrado em x_0. Sejam Q^* e $f = f_1 + f_2$ como anteriormente. Como f_1 é limitada com suporte compacto, $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto Tf_1 está bem definida como função de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$Tf(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(x_0,y))f_2(y)dy, \quad x \in Q. \tag{6.4.3}$$

As contas feitas na prova do teorema anterior garantem que a integral acima converge absolutamente. Provemos que a definição (6.4.3) independe do cubo Q. De fato, considere $\overline{Q} \supset Q$ um outro cubo centrado em x_0. Temos duas definições para $Tf(x)$, caso $x \in Q$. Vamos verificar a elas diferem por uma constante. Escreva $f = \overline{f_1} + \overline{f_2}$, em que $\overline{f_1} = f\chi_{\overline{Q}^*}$. Então, para $x \in Q$,

$$\begin{aligned}&\left[Tf_1(x) - \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(x_0,y))f_2(y)dy\right] - \left[T\overline{f_1}(x) - \int_{\mathbb{R}^n}(K(x,y) - K(x_0,y))\overline{f_2}(y)dy\right] \\ &\quad = T(f_1 - \overline{f_1})(x) - \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus \overline{Q}^*}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)dy \\ &\quad = T(f\chi_{\overline{Q}^*\setminus Q^*})(x) - \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n\setminus \overline{Q}^*}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)dy \\ &\quad = \int_{\overline{Q}^*\setminus Q^*} K(x,y)f(y)dy - \int_{\overline{Q}^*\setminus Q^*}(K(x,y) - K(x_0,y))f(y)dy \\ &\quad = \int_{\overline{Q}^*\setminus Q^*} K(x_0,y)f(y)dy,\end{aligned}$$

o que prova que a diferença é constante e portanto coincidem como funções de BMO, caso a forem. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$, tomamos um cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ suficientemente grande que contém x e calculamos $Tf(x)$ pela fórmula (6.4.3), ou seja a ação de T sobre uma função limitada fica definida por (6.4.3). Ademais, caso f seja limitada com suporte compacto, a definição (6.4.3) coincide com a definição original de T, já que para um cubo suficientemente grande, $f = f_1$.

Verifiquemos que T assim definida é operador limitado de L^∞ em BMO. De fato, se $x \in Q$, então

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)|dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)-K(x_0,y)||f_2(y)|dydx.$$

Na prova do teorema anterior, o termo do lado direito da desigualdade é controlado por um múltiplo da norma L^∞ de f. Logo, temos que para todo cubo Q,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)|dx \leq c\|f\|_{L^\infty} \quad \Longrightarrow \quad \|Tf\|_{BMO} \leq c\|f\|_{L^\infty}.$$

6.5 O Teorema $T(1)$

Na seção anterior vimos como a limitação $L^2 \to L^2$ dos operadores de Calderón-Zygmund é, de certa forma, suficiente para a limitação $L^p(\mathbb{R}^n)$ e a limitação fraca-$(1,1)$. O Teorema $T(1)$ J. David e J-L. Journé (ver [D-J]) apresentada nesta seção nos fornece condições necessárias e suficientes para que um operador T associado a um núcleo padrão seja limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A demonstração apresentada aqui segue a ideia original do artigo [D-J], mas nos baseamos fortemente em [GFK2], [DKT], [STN] [AVZ] para escrevê-la.

Começamos aqui enunciando e provando o Lema de Cotlar, que será uma ferramenta essencial para uma parte da prova do Teorema $T(1)$.

Lema 6.5.1 (Lema de Cotlar-Knapp-Stein)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{T_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ uma família de operadores lineares limitados $T_j : H \to H$. Considere uma sequência $\{\gamma(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de números positivos com*

$$A = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma(j) < \infty.$$

Suponha também que sejam válidas

$$\begin{aligned} \|T_i^* T_j\| &\le \gamma(i-j)^2, \\ \|T_i T_j^*\| &\le \gamma(i-j)^2, \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

em que T_j^* denota o operador adjunto de T_j e $\|\cdot\|$ denota a norma de operadores $\|\cdot\|_{H\to H}$. Então para todo $n \le m$ inteiros, vale que

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} T_j \right\| \le A. \tag{6.5.2}$$

Demonstração. Façamos algumas observações. É fácil provar que se T é um operador limitado em H, então

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \|T\| \\ \|TT^*\| &= \|T\|^2. \end{aligned}$$

Quando T é um operador auto-adjunto, $\|T^2\| = \|T\|^2$ e, por indução, podemos provar que se m é uma potência de 2, $\|T\|^m = \|T^m\|$. De fato, se é válido $\|T\|^m = \|T^m\|$, para m uma potência de 2, então, como T^m é também auto-adjunto

$$\|T\|^{2m} = (\|T\|^m)^2 = \|T^m\|^2 = \|T^{2m}\|,$$

donde segue a afirmação. Agora, note que como TT^* é um operador auto-adjunto, temos que

$$\|T\|^{2m} = \|TT^*\|^m = \|(TT^*)^m\|.$$

Considerando $T = \sum_{j=n}^{m} T_j$, temos que

$$(TT^*)^k = \sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=n}^{m} T_{j_1}T_{j_2}^* \ldots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*.$$

Podemos estimar o termo geral desta somatória de duas maneiras:

$$\begin{aligned} \|(T_{j_1}T_{j_2}^*) \ldots (T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*)\| &\leq \|T_{j_1}T_{j_2}^*\| \ldots \|T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| \\ &\leq \gamma(j_1 - j_2)^2 \ldots \gamma(j_{2k-1} - j_{2k})^2, \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \|T_{j_1}(T_{j_2}^*T_{j_3}) \ldots (T_{j_{2k-2}}^*T_{j_{2k-1}})T_{j_{2k}}^*\| &\leq \|T_{j_1}\|\|T_{j_2}^*T_{j_3}\| \ldots \|T_{j_{2k-2}}^*T_{j_{2k+2}}\|\|T_{j_{2k}}\| \\ &\leq A^2\gamma(j_2 - j_3)^2 \ldots \gamma(j_{2k-2} - j_{2k-1})^2. \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Fazendo a média geométrica de (6.5.3) e (6.5.4), e somando sobre $j_1, \ldots, j_{2k}$, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \|(TT^*)^k\| &\leq \sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=n}^{m} \|T_{j_1}T_{j_2}^* \ldots T_{j_{2k-1}}T_{j_{2k}}^*\| \\ &\leq A \sum_{j_1,\ldots,j_{2k}=n}^{m} \gamma(j_1 - j_2)\gamma(j_2 - j_3) \ldots \gamma(j_{2k-1} - j_{2k}). \end{aligned}$$

Somamos primeiro em j_1 e usamos que $\sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \gamma(j_1 - j_2) \leq A$. Em seguida, somamos em j_2 e usamos $\sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \gamma(j_2 - j_3) \leq A$. Prosseguindo assim até j_{2k-1}, ficamos com

$$\|(TT^*)^k\| \leq AA^{2k-1} \sum_{j_{2k}=n}^{m} 1 = (m - n + 1)A^{2k}.$$

Usando o fato de que $\|T\|^{2k} = \|(TT^*)^k\|$, concluímos que

$$\|T\| \leq (m - n + 1)^{1/2k} A,$$

e quando $k \to \infty$, segue que

$$\|T\| \leq A.$$

$\square$

Definição 6.5.2. *Um operador linear contínuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaz a propriedade de limitação fraca (WBP) se para todo subconjunto limitado $B \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante C_B tal que,*

$$|\langle T(\tau^{x_0}\phi_R), \tau^{x_0}\psi_R\rangle| \leq C_B R^{-n}, \tag{6.5.5}$$

para toda $\phi, \psi \in B$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$.

Observemos aqui que T satisfazer a propriedade de limitação fraca é uma condição mais fraca do que T ser limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, suponha que T admita extensão limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Um conjunto $B \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ser limitado em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ equivale[6] a dizer que existem um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, que suporta toda $f \in B$, e constantes M_N, $N = 0, 1, 2, \ldots$, tais que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq M_N,$$

para toda $\phi \in B$ e todo $|\alpha| \leq N$. Dadas $\phi, \psi \in B$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, temos que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
|\langle T(\tau^{x_0}\phi_R), \tau^{x_0}\psi_R\rangle| &\leq \|T(\tau^{x_0}\phi_R)\|_{L^2}\|\tau^{x_0}\psi_R\|_{L^2} \\
&\leq \|T\|_{L^2\to L^2}\|\tau^{x_0}\phi_R\|_{L^2}\|\tau^{x_0}\psi_R\|_{L^2} \\
&= \|T\|_{L^2\to L^2} R^{-n}\|\phi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
&\leq \|T\|_{L^2\to L^2}|K| M_0^2 R^{-n},
\end{aligned}$$

o que implica que T satisfaz WBP.

Enunciaremos a seguir o resultado principal desta dissertação.

Teorema 6.5.3 (Teorema $T(1)$ - David-Journé, 84'). *Seja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear contínuo associado a um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$, com $0 < \delta \leq 1$ e $A < \infty$. Então T admite extensão limitada $L^2 \to L^2$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas*

(1) $T(1)$ é uma função BMO,

(2) $T^*(1)$ é uma função BMO,

(3) T satisfaz WBP.

Pelo fato da prova do Teorema $T(1)$ ser muito extensa, a dividiremos em sessões, na qual provaremos uma série de lemas importantes para a conclusão da demonstração.

6.5.1 Necessidade das Condições (1)-(3)

Suponhamos que T admita uma extensão limitada em L^2. Vimos numa observação que precede o enunciado do Teorema $T(1)$ que necessariamente T satisfaz WBP. Então, precisamos provar somente que as distribuição temperadas $T(1)$ e $T^*(1)$ coincidem com funções BMO.

Lema 6.5.4. *Considere $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ operador linear limitado associado a um núcleo padrão $K \in \mathrm{SK}(\delta, A)$. Seja B um subconjunto limitado de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e suponha que exista uma contante M tal que, para todo $\phi \in B$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$,*

$$R^{n/2}\left[\|T(\tau^{x_0}\phi_R)\|_{L^2} + \|T^*(\tau^{x_0}\phi_R)\|_{L^2}\right] \leq M. \tag{6.5.6}$$

Então $T(1)$ e $T^*(1)$ coincidem com funções BMO.

[6] Veja Teorema 6.5 em [RDN]

Observação 6.5.5. *Observe que se T é um operador limitado em L^2, então a hipótese do Lema 6.5.4 é trivialmente satisfeita, e portanto a necessidade do Teorema $T(1)$ fica provada.*

Provemos a seguir o Lema 6.5.4.

Demonstração. Fixemos uma função $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ suportada na bola $B(0,4)$ tal que $\phi = 1$ em $|x| \leq 2$ e $0 \leq \phi \leq 1$. É claro então que $\phi(\cdot/R) \to 1$ pontualmente, quando $R \to \infty$. A contas feitas a seguir podem ser reproduzidas facilmente para o operador adjunto T^* de T, já que T^* também é um operador contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ associado a um núcleo padrão. Provaremos que $T(1)$ é limite fraco de $T(\phi(\cdot/R))$, no seguinte sentido: para toda função $g \in \mathcal{D}_0$,

$$\lim_{R\to\infty} \langle T(\phi(\cdot/R)), g\rangle = \langle T(1), g\rangle.$$

De fato, fixe $g \in \mathcal{D}_0$ e considere $\eta \in \mathcal{D}$ tal que $\eta = 1$ numa vizinhança do suporte de g. Neste caso, $(1-\eta)$ e g têm suportes disjuntos. Logo $(1-\eta)\phi(\cdot/R)$ e g também têm suportes disjuntos, o que implica que $\langle T((1-\eta)\phi(\cdot/R)), g\rangle$ admite representação integral. Tome $x_0 \in \operatorname{supp} g$ e usando o fato de g ter integral nula, escreva

$$\begin{aligned}\langle T(\phi(\cdot/R)), g\rangle &= \langle T(\eta\phi(\cdot/R)), g\rangle + \langle T((1-\eta)\phi(\cdot/R)), g\rangle \\ &= \langle T(\eta\phi(\cdot/R)), g\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(x_0,y))g(x)(1-\eta(y))\phi(y/R)dydx.\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Seja $R_0 > 0$ suficientemente grande de modo que $\operatorname{supp}\eta \subset B(0,R_0)$. Se $R \geq R_0$, então para todo $x \in \operatorname{supp}\eta$, $|x| \leq R$ e portanto $\phi(x/R) = 1$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} &(K(x,y) - K(x_0,y))g(x)(1-\eta(y))\phi(y/R)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(x_0,y))g(x)(1-\eta(y))dydx.\end{aligned}$$

Além disso, para todo $x \in \operatorname{supp}\eta$ e $R \geq R_0$, temos $\eta(x)\phi(x/R) = \eta(x)$. Logo, quando $R \to \infty$, $\langle T(\eta\phi(\cdot/R)), g\rangle \to \langle T(\eta), g\rangle$. Sendo assim, quando $R \to \infty$ em (6.5.7),

$$\langle T(\phi(\cdot/R)), g\rangle \longrightarrow \langle T(\eta), g\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (K(x,y) - K(x_0,y))g(x)(1-\eta(y))dydx = \langle T(1), g\rangle.$$

Note que as funções $\phi(\cdot/R)$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$, já que são limitadas com suporte compacto. Logo, por hipótese $T(\phi(\cdot/R))$ está bem definida como função de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Provamos a seguir que $T(\phi(\cdot/R)) \in BMO$, uniformemente em $R > 0$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que para toda bola $B = B(x_0, r)$ e todo raio $R > 0$, existe $C_{B,R}$ satisfazendo

$$\frac{1}{|B|}\int_B |T(\phi(\cdot/R))(x) - C_{B,R}| \leq C. \tag{6.5.8}$$

Para provar (6.5.8), provaremos as seguintes estimativas

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|T\left[\phi\left(\frac{\cdot - x_0}{r}\right)\phi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right](x)\right| dx \le CM \tag{6.5.9}$$

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|T\left[(1-\phi\left(\frac{\cdot - x_0}{r}\right)\phi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right](x) - T\left[\left(1-\phi\left(\frac{\cdot - x_0}{r}\right)\phi(\frac{\cdot}{R})\right)\right](x_0)\right| dx \le C\frac{A}{\delta} \tag{6.5.10}$$

Provemos primeiro a estimativa (6.5.10). Como $\phi = 1$ na bola $B(0,2)$ a função $y \mapsto 1 - \phi(r^{-1}(y-x_0))$ está suportada em $|y-x_0| \ge 2r$. Logo a função $(1-\phi((y-x_0)/r))\phi(y/R)$ também está suportada em $|y-x_0| \ge 2r$. Como a integral em (6.5.10) ocorre em $x \in B(x_0, r)$, cada termo dentro da integral admite uma representação integral:

$$T\left[\left(1-\phi\left(\frac{\cdot - x_0}{r}\right)\phi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\right)\right](x) = \int_{|y-x_0|\ge 2r} K(x,y)\left(1-\phi\left(\frac{y-x_0}{r}\right)\phi\left(\frac{y}{R}\right)\right)dy,$$

para cada $x \in B(x_0, r)$, em particular é válida para x_0. Note que $2|x-x_0| < 2r \le |y-x_0|$. Usando a condição de suavidade de K e que $0 \le \phi \le 1$, estimamos a integral de (6.5.10) por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B\int_{|y-x_0|\ge 2r} |K(x,y)-K(x_0,y)||1-\phi((y-x_0)/r)||\phi(y/R)|dydx \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_{|y-x_0|\ge 2r} |K(x,y)-K(x_0,y)||\phi(y/R)|dydx \\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_{|y-x_0|\ge 2r} \frac{A|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+\delta}}dydx \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{|B|}A\int_B |x-x_0|^{\delta}dx\int_{2r}^{+\infty}\frac{ds}{s^{\delta+1}} \\
&\le \frac{\omega_{n-1}A}{2^{\delta}\delta},
\end{aligned}$$

o que conclui a prova de (6.5.10).

Para provar a estimativa (6.5.9), defina $\phi_{\varepsilon,a}(x) = \phi(\varepsilon(x+a))\phi(x)$ e considere a família $\mathcal{F} = \{\phi_{\varepsilon,a}\}_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ 0<\varepsilon\le 1}}$. Note que cada $\phi_{\varepsilon,a}$ está suportada na bola $|x| \le 4$. Para cada $N = 0,1,2,\ldots$, se $|\alpha| \le N$, então

$$\begin{aligned}
|\partial^{\alpha}\phi_{\varepsilon,a}(x)| &\le \sum_{\beta\le\alpha}\varepsilon^{|\beta-\alpha|}|\partial^{\alpha-\beta}\phi(\varepsilon(x+a))\partial^{\beta}\phi(x)| \\
&\le \sum_{|\gamma|,|\beta|\le N}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^{\gamma}\phi(\varepsilon(x+a))\partial^{\beta}\phi(x)| \\
&= C_N < \infty,
\end{aligned}$$

para todo $0 < \varepsilon \le 1$ e todo $a \in \mathbb{R}^n$. Isso prova que $\{\phi_{\varepsilon,a}\}$ é uma família limitada em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Escolhendo $a = x_0/r$, é fácil de provar as seguintes igualdades

$$\phi(x/R)\phi((x-x_0)/r) = r^n\tau^{x_0}[(\phi((\cdot+a)r/R)\phi(\cdot))_r](x) \tag{6.5.11}$$

$$= R^n[\phi(\cdot)\phi(-a+(R/r)(\cdot))]_R(x), \tag{6.5.12}$$

em que $\psi_t(\cdot) = t^{-n}\psi(t^{-1}(\cdot))$. Escreva

$$\zeta(x) = \phi((x+a)r/R)\phi(x),$$
$$\zeta'(x) = \phi(x)\phi(-a+(R/r)x).$$

Se $r \leq R$, $\zeta \in \mathcal{F}$. Caso $r \geq R$, $\zeta' \in \mathcal{F}$. Logo, reescrevemos

$$\phi(x/R)\phi((x-x_0)/r) = \begin{cases} r^n\tau^{x_0}\zeta_r(x), & \text{se } r \leq R \\ R^n\zeta'_R(x), & \text{se } r \geq R. \end{cases}$$

Quando $r \leq R$, usando a hipótese sobre T, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|}\int_B |T[\phi((x-x_0)/r)\phi(x/R)](x)|dx &= \frac{r^n}{|B|}\int_B |T(\tau^{x_0}\zeta_r)(x)|dx \\ &= \frac{r^{n/2}}{|B|^{1/2}} r^{n/2}\|T(\tau^{x_0}\zeta_r\|_{L^2}) \\ &\leq \frac{M}{\nu_n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $r \geq R$, usamos também a hipótese sobre T para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|}\int_B |T[\phi((x-x_0)/r)\phi(x/R)](x)|dx &= \frac{R^n}{|B|}\int_B |T(\zeta'_r)(x)|dx \\ &\leq \frac{R^{n/2}}{|B|^{1/2}} R^{n/2}\|T(\zeta'_r)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{M}{\nu_n^{1/2}}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prove de (6.5.9). Ora, para obter a estimativa (6.5.8) basta tomar $C_{B,R} = T[(1-\phi(\frac{\cdot - x_0}{r})\phi(\frac{\cdot}{R}))](x_0)$ e usar as estimativas que acabamos de provar (6.5.9) e (6.5.10). Logo, a estimativa (6.5.8) equivale a dizer que $T(\phi(\cdot/R))$ é uma função BMO e

$$\|T(\phi(\cdot/R))\|_{BMO} \leq C, \quad \forall R > 0,$$

ou equivalentemente, $T(\phi(\cdot/R)) \in B_{BMO}(0, C)$. Usando o fato de que o espaço BMO é o dual de H^1, temos que pelo Teorema de Banach-Alaoglu, a bola $B_{BMO}(0, C)$ é compacta na topologia fraca*. A separabilidade de L^1 garante que H^1 é também separável e portanto a bola $B_{BMO}(0, C)$ é sequencialmente compacta. Logo, podemos conseguir uma sequência $R_j \to \infty$ e uma função $b \in BMO$ tal que

$$T(\phi(\cdot/R_j)) \xrightarrow{w^*} b,$$

equivalentemente

$$\langle T(\phi(\cdot/R_j)), g\rangle \longrightarrow \langle b, g\rangle, \quad \forall g \in H^1.$$

Em particular, para $g \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, é válida a convergência acima[7]. Por unicidade do limite, concluímos que $T(1) = b \in BMO$. $\square$

6.5.2 Suficiência das Condições (1)-(3): Caso $T(1) = T^*(1) = 0$

A prova da suficiência das condições (1)-(3) do Teorema $T(1)$ é divida em dois caso. Provaremos o primeiro caso em que $T(1) = T^*(1) = 0$. Fixemos uma função radial $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ suportada na bola unitária $B(0,1)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Considere a sequência de funções $\phi_j(x) = 2^{-jn}\phi(2^{-j}x)$ e defina os operadores

$$\begin{aligned} S_j f &= \phi_j * f \\ \Delta_j &= S_j - S_{j-1}. \end{aligned}$$

A radialidade de ϕ implica que o operador S_j é auto-adjunto, isto é,

$$\langle S_j f, g\rangle = \langle S_j g, f\rangle.$$

Consequentemente Δ_j também o é.

A ideia da demonstração aqui será decompor o operador T como uma soma de operadores que dependem de S_j e Δ_j. Tais operadores são "melhores"do que T e a limitação L^2 deles, juntamente com um argumento de quase ortogonalidade (Lema de Cotlar), nos permitirá provar a limitação L^2 de T. Para tal, considere o seguinte lema.

Lema 6.5.6. *Seja*

$$R_N = \sum_{j=-N}^{N} (S_j T \Delta_j + \Delta_j T S_j - \Delta_j T \Delta_j). \tag{6.5.13}$$

Então, para todos $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty$, vale o limite

$$\lim_{N\to\infty} \langle R_N f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle.$$

Demonstração. Note que se expandirmos R_N, obtemos

$$\begin{aligned} R_N = \sum_{j=-N}^{N} &= S_j T S_j - S_{j-1} T S_{j-1} \\ &= S_N T S_N - S_{-N-1} T S_{-N-1}. \end{aligned}$$

A sequência $\{\phi_j\}_{j\geq 1}$ é uma aproximação da identidade. Logo, $S_N f \to f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Logo, como T é um operador contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, temos que para todas funções $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle S_N T S_N f, g\rangle = \langle T S_N f, S_N g\rangle \longrightarrow \langle Tf, g\rangle \quad N \to \infty.$$

[7] Veja o Corolário 2.4.8 em [GFK2]

Fixadas as funções $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, devemos provar que

$$\langle S_{-N} T S_{-N} f, g \rangle \longrightarrow 0, \quad N \to \infty.$$

A condição de limitação fraca de T será essencial para provar esta convergência. Para cada inteiro $N \geq 1$, defina as funções

$$f_N(x) = \phi * f_{2^{-N}}(x),$$

em que $f_{2^{-N}}(x) = 2^{nN} f(2^N x)$. Como f tem suporte compacto, digamos $\operatorname{supp} f \subset B(0, R)$, as funções $f_{2^{-N}}$ estão suportadas em $B(0, 2^{-N}R) \subset B(0, R)$. Logo,

$$\operatorname{supp} f_N \subset \operatorname{supp} \phi + \operatorname{supp} f_{2^{-N}} \subset B(0,1) + B(0,R),$$

ou seja, todas as f_N estão suportadas num compacto fixo de $\mathbb{R}^n$. Ademais, é fácil ver que, para todo multi-índice

$$\|\partial^\alpha f_N\|_{L^\infty} \leq \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}.$$

Assim, a sequência de funções $\{f_N\}$ é limitada em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definindo g_N da mesma forma que foi definida f_N, a sequência $\{g_N\}$ também é limitada em $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denote por K_0 o compacto de $\mathbb{R}^n$ que suporta f_N e g_N. Pela propriedade de limitação fraca de T, temos o seguinte

$$|\langle T(2^{-nN} f_N(2^{-N} \cdot)), 2^{-nN} g_N(2^{-N} \cdot) \rangle| \leq C_{K_0} 2^{-nN}. \tag{6.5.14}$$

Porém, observe o seguinte

$$\begin{aligned}
f_N(2^{-N}x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(2^{-N}x - y) f_{2^{-N}}(y) dy \\
&= 2^{nN} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(2^{-N}x - y) f(2^N y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(2^{-N}(x - y)) f(y) dy \\
&= 2^{nN} \phi_{-N} * f \\
&= 2^{nN} S_{-N} f(x).
\end{aligned}$$

Analogamente, $g(2^{-N}x) = 2^{nN} S_{-N} g(x)$. Podemos reescrever (6.5.14) como

$$|\langle T S_{-N} f, S_{-N} g \rangle| \leq C_{K_0} 2^{-nN},$$

e equivalentemente

$$|\langle S^{-N} T S_{-N} f, g \rangle| \leq C_{K_0} 2^{-nN} \longrightarrow 0 \quad N \to \infty.$$

□

Passaremos a denotar o operador $S_j T \Delta_j$ por T_j. Nos preocuparemos agora em obter uma limitação L^2 para tal operador T_j. Mais especificamente, veremos que T_j é também um operador de Calderón-Zygmund associado a um núcleo K_j. Analogamente, o mesmo poderá ser provado para ambos os operadores $\Delta_j T S_j$ e $\Delta_j T \Delta_j$. E poderemos concluir então que R_N é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Comecemos por achar o núcleo de T_j. Considerando ϕ como antes, defina a função $\psi = \phi - \phi_{-1}$, ou seja,

$$\psi(x) = \phi(x) - 2^n \phi(2x).$$

É evidente que ψ tem integral zero e está suportada na bola unitária $|x| \leq 1$. Usaremos a notação ψ_j para denotar a sequência de funções $\psi_j(x) = 2^{-jn}\psi(2^{-j}x)$, assim como foi feito para ϕ_j. É fácil de ver que $\phi_j - \phi_{j-1} = \psi_j$. Sejam $f, g \in \mathcal{S}$. Usando que S_j é auto-adjunta e que a soma de Riemann converge em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle T_j f, g\rangle &= \langle T\Delta_j f, S_j g\rangle \\
&= \left\langle T\left(\int_{R^n} (\phi_j - \phi_{j-1})(\cdot - y) f(y)dy\right), \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(\cdot - x) g(x)dx\right\rangle \\
&= \left\langle T\left(\int_{R^n} \tau^y \psi_j(\cdot) f(y)dy\right), \int_{\mathbb{R}^n} \tau^x \phi_j(\cdot) g(x)dx\right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle T(\tau^y\psi_j), \tau^x\phi_j\rangle f(y)g(x)dydx. \qquad (6.5.15)
\end{aligned}$$

Logo, o núcleo de T_j é

$$K_j(x,y) = \langle T(\tau^y\psi_j), \tau^x\phi_j\rangle.$$

De forma análoga, o núcleo do adjunto $T_j^* = \Delta_j T^* S_j$ de T_j é

$$K_j^*(x,y) = \langle T^*(\tau^y\phi_j), \tau^x\psi_j\rangle,$$

isto é, $K_j^*(x,y) = K_j(y,x)$.

Provemos a seguir um lema sobre o núcleo K_j.

Lema 6.5.7. *Seja $p(x) = (1 + |x|)^{-n-\delta}$, em que $\delta > 0$ vem da condição do núcleo padrão K, e denote $p_j(x) = 2^{-jn}p(2^{-j}x)$. Então K_j satisfaz as seguintes propriedades*

(a) $|K_j(x,y)| \leq Cp_j(x-y)$;

(b) $|K_j(x,y) - K_j(x',y)| \leq C\min\{1, 2^{-j}|x-x'|\}(p_j(x-y) + p_j(x'-y))$, *e a desigualdade análoga para y;*

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)dy = 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$;

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)dx = 0$, *para todo* $y \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. (a) Dividiremos o item em dois casos. Suponha primeiro que $|x-y| \leq 10 \cdot 2^j$ e defina $\phi_{x,y}(u) = \phi(u - 2^{-j}(x-y))$. Claramente cada $\phi_{x,y}$ está suportada na bola $B(2^{-j}(x-y), 1)$.

Observe que para todo $u \in B(2^{-j}(x-y), 1)$, vale que

$$|u| \leq |u - 2^{-j}(x-y)| + 2^{-j}|x-y| \leq 11.$$

Logo, as funções $\phi_{x,y}$ estão suportadas em $B(0, 11)$, ou seja, suportadas num compacto fixo. Além disso,

$$\|\partial^\alpha \phi_{x,y}\|_{L^\infty} = \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} < \infty,$$

para todo multi-índice α e todo $|x-y| \leq 2^j 10$. Portanto a família $\{\phi_{x,y}\}$ é um conjunto limitado de $\mathcal{C}_0^\infty$. Observe o simples fato

$$\begin{aligned}
\tau^y(\phi_{x,y})_j(u) &= 2^{-jn}\phi_{x,y}(2^{-j}(u-y)) \\
&= 2^{-jn}\phi(2^{-j}(u-x)) \\
&= \tau^x\phi_j(u).
\end{aligned}$$

Pela propriedade de limitação fraca de T, temos que

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &= |\langle T\tau^y\psi_j, \tau^x\phi_j\rangle| \\
&= |\langle T\tau^y\psi_j, \tau^y(\phi_{x,y})_j\rangle \\
&\leq C2^{-jn} \\
&= C2^{-jn}\frac{(1+2^{-j}|x-y|)^{n+\delta}}{(1+2^{-j}|x-y|)^{n+\delta}} \\
&\leq C11^{n+\delta}2^{-jn}p(2^{-j}(x-y)) \\
&= C'p_j(x-y).
\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que $|x-y| \geq 10 \cdot 2^j$. Neste caso, são disjuntas as bolas $B(x, 2^{-j}))$ e $B(y, 2^{-j}))$, e portanto os suportes de $\tau^x\phi_j$ e $\tau^y\psi_j$ também o são. Logo, $K_j(x,y) = \langle T\tau^y\psi_j, \tau^x\phi_j\rangle$ tem representação integral. Como ψ tem integral zero, escrevemos

$$\begin{aligned}
K_j(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(u,v)\phi_j(u-x)\psi_j(v-y)dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} [K(u,v) - K(u,y)]\phi_j(u-x)\psi_j(v-y)dudv.
\end{aligned}$$

Na integral acima, temos que $|u-x|, |v-y| \leq 2^j$, o que implica que $|u-y|$ e $|x-y|$ são comparáveis. De fato, basta observar que

$$|u-y| \leq 2^j + |x-y| \leq \frac{11}{10}|x-y|,$$

e também

$$|x-y| \leq 2^j + |u-y| \leq \frac{1}{10}|x-y| + |u-y|,$$

ou seja, $\frac{9}{10}|x-y| \leq |u-y|$. No que segue,

$$2|y-v| \leq 2 \cdot 2^j \leq \frac{1}{5}|x-y| \leq \frac{2}{9}|u-y| \leq |u-y|.$$

Usando a condição de suavidade de K e que $|u-y|$ e $|x-y|$ são comparáveis, estimamos K_j por

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y)| &\leq A \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v-y|^\delta}{|u-y|^{n+\delta}} \phi_j(u-x)\psi_j(v-y)dudv \\
&\leq A\left(\frac{10}{9}\right)^{n+\delta} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{j\delta}}{|x-y|^{n+\delta}} \phi_j(u-x)\psi_j(v-y)dudv \\
&= C_{n,\delta} A \|\phi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^1} \frac{1}{|x-y|^{n+\delta}} \\
&\leq C'_{n,\delta} A \|\phi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^1} p_j(x-y),
\end{aligned}$$

e portanto o item (a) fica provado.

(b) Suponhamos primeiro que $|x-x'| \geq 2^j$. Este caso segue facilmente do item (a), pois

$$\begin{aligned}
|K(x,y) - K(x',y)| &\leq |K(x,y) + |K(x',y)| \\
&\leq C(p_j(x-y) + p_j(x'-y)) \\
&= C\min\{1, 2^j|x-x'|\}(p_j(x-y) + p_j(x'-y)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $|x-x'| \leq 2^j$, então considere ξ no segmento entre x e x', isto é, $\xi = (1-\theta)x + \theta x'$, para alguma $\theta \in [0,1]$. Temos que

$$\begin{aligned}
p_j(\xi - y) &= \frac{2^{-jn}}{(1+2^{-j}|\xi-y|)^{n+\delta}} \\
&= \frac{2^{-jn}}{(1+|2^{-j}\theta(x'-x) - 2^{-j}(y-x)|)^{n+\delta}} \\
&\leq 2^{-jn}\frac{(1+2^{-j}\theta|x'-x|)^{n+\delta}}{(1+2^{-j}|y-x|)^{n+\delta}} \\
&\leq 2^{n+\delta}\frac{2^{-jn}}{(1+2^{-j}|y-x|)^{n+\delta}} \\
&= 2^{n+\delta}p_j(x-y).
\end{aligned}$$

Com mesmo argumento, provamos também que

$$p_j(\xi - y) \leq 2^{n+\delta}p_j(x'-y),$$

e portanto

$$p_j(\xi - y) \leq 2^{n+\delta}(p_j(x-y) + p_j(x'-y)). \tag{6.5.16}$$

Calculemos a seguir as derivadas parciais de K_j. Vejamos que por linearidade de T,

$$\frac{K_j(x,y) - K(x+he_k,y)}{h} = \left\langle T(\tau^y\psi_j), \frac{\tau^x\phi_j(\cdot) - \tau_x\phi_j(\cdot - he_k)}{h} \right\rangle.$$

Uma vez que $\frac{\tau^x\phi_j(\cdot)-\tau^x\phi_j(\cdot-he_k)}{h} \to \partial_k(\tau^x\phi_j)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e T é contínua, temos que

$$\partial_{x_k}K_j(x,y) = \langle T(\tau^y\psi_j), \partial_k(\tau^x\phi_j)\rangle = 2^{-j}\langle T(\tau^y\psi_j), \tau^x(\partial_k\phi)_j\rangle.$$

Assim como foi feito no item anterior, podemos provar que

$$|\partial_k(\tau^x\phi_j)| \leq C2^{-j}p_j(x-y).$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
|K_j(x,y) - K_j(x',y)| &\leq |\nabla_x K_j(\xi,y)||x-x'| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |\partial_{x_k}K_j(\xi,y)||x-x'| \\
&\leq C\sum_{k=1}^n p_j(\xi-y)|x-x'| \\
&\leq n2^{n+\delta}C(p_j(x-y)+p_j(x'-y))2^{-j}|x-x'| \\
&= n2^{n+\delta}C(p_j(x-y)+p_j(x'-y))\min\{1, 2^{-j}|x-x'|\}.
\end{aligned}$$

O mesmo argumento vale para $\nabla_y K_j$, o qual nos dá o item (2) na variável y.

(c) Consideremos, para cada $R \geq 2^j$, a função

$$h_R(u) = \int_{|y|\leq R} \tau^u\psi_j(y)dy = 2^{-jn}\int_{|y|\leq R}\psi(2^{-j}(y-u))dy.$$

A função $y \mapsto \tau^u\psi_j(y)$ está suportada na bola $B(u,2^j)$. Note que se $|u| \geq R+2^j$ e $|y| \leq R$, então $|u-y| \geq 2^j$, o que implica que $h_R(u) = 0$. Se $|u| \leq R-2^j$ e $|u-y| \leq 2^j$, então $|y| \leq R$ e portanto, neste caso, $B(u,2^j) \subset B(0,R)$. E como ψ tem integral zero, segue que $h_R(u) = 0$. Logo, h_R está suportada no anel $R-2^j \leq |u| \leq R+2^j$. Porque a soma de Riemman converge em $\mathcal{S}$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq 1} K_j(x,y)dy &= \int_{|y|\leq 1}\langle T(\tau^y\psi_j), \tau^x\phi_j\rangle dy \\
&= \left\langle T\left(\int_{|y|\leq 1}\tau^y\psi_j(\cdot)dy\right), \tau^x\phi_j\right\rangle \\
&= \langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle.
\end{aligned}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, podemos tomar R suficientemente grande de modo que h_R e $\tau^x\phi_j$ tenham suportes disjuntos. Assim, $\langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle$ tem representação integral

$$\langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(u,v)h_R(v)\tau^x\phi_j(u)dudv.$$

Pela condição de tamanho de K, estimamos a integral acima por

$$|\langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{A}{|u-v|^n}|h_R(v)||\tau^x\phi_j(u)|dudv. \tag{6.5.17}$$

Note que a integral em v ocorre no suporte de h_R, ou seja, no anel $R-2^j \leq |v| \leq R+2^j$. Note ainda que $|h_R(v)| \leq \|\psi\|_{L^1}$. Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, vamos considerar $R > 2(|x| + 2^{j+1})$. Para esta escolha de R, vemos que os suportes de h_R e $\tau^x\phi_j$ são disjuntos e portanto (6.5.17) é válida. Na integral (6.5.17), temos $|u| \leq |x| + 2^j$ e $R - 2^j \leq |v| \leq R + 2^j$, o que implica em $|u-v| \geq \frac{R}{2}$. Estimamos (6.5.17) como segue

$$\begin{aligned}
|\langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle| &\leq A\|\psi\|_{L^1}\int_{R-2^j\leq|v|\leq R+2^j}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^n}{R^n}|\tau^x\phi_j(u)|dudv\\
&= A\|\psi\|_{L^1}\|\phi\|_{L^1}\int_{R-2^j\leq|v|\leq R+2^j}\frac{2^n}{R^n}dv\\
&= A\|\psi\|_{L^1}\|\phi\|_{L^1}2^n n\omega_{n-1}\left[(1+2^jR^{-1})^n - (1-2^jR^{-1})^n\right] \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)dy &= \lim_{R\to\infty}\int_{|y|\leq R} K_j(x,y)dy\\
&= \lim_{R\to\infty}\langle Th_R, \tau^x\phi_j\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) Considere $R > 2^j$ e defina as funções

$$h_R(u) = \int_{|x|\leq R}\tau^u\phi_j(x)dx - 1.$$

Como estamos supondo que $T^*(1) = 0$, temos que pela linearidade de T,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq R} K_j(x,y)dx &= \int_{|x|\leq R}\langle T\tau^y\psi_j, \tau^x\phi_j\rangle dx - \langle T^*(1), \tau^y\psi_j\rangle\\
&= \left\langle T\tau^y\psi_j, \int_{|x|R\leq R}\tau^x\phi_j(\cdot)dx\right\rangle - \langle T\tau^y\psi_j, 1\rangle\\
&= \langle T(\tau^y\psi_j), h_R\rangle\\
&= \langle T^*h_R, \tau^y\psi_j\rangle.
\end{aligned}$$

Observe que se $|u| \leq R - 2^j$ e $|u - x| \leq 2^j$, então $|x| \leq R$, e portanto, como ϕ tem integral igual a 1, temos que $h_R(u) = 0$. Logo, h_R está suportada em $|u| \geq R - 2^j$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, a função

$\tau^y\psi_j$ está suportada na bola $B(0,|y|+2^j)$. Assim, se $R>3(|y|+2^j)$, então é evidente que o suporte de $\tau^y\psi_j$ e h_R são disjuntos. Neste caso, $\langle T^*h_R,\tau^y\psi_j\rangle$ admite representação integral e, como ψ tem integral zero, escrevemos

$$\begin{aligned}\langle T^*h_R,\tau^y\psi_j\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(u,v)h_R(u)\tau^y\psi_j(v)dudv\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} [K(u,v)-K(u,y)]h_R(u)\tau^y\psi_j(v)dudv\\ &= \int_{|v-y|\le 2^j}\int_{|u|\ge R-2^j} [K(u,v)-K(u,y)]h_R(u)\tau^y\psi_j(v)dudv. \end{aligned}\tag{6.5.18}$$

Na integral acima, $|v-y|\le 2^j$ e $|u|\ge R-2^j$. Pela escolha de R, vemos que $R-|y|-2^j\ge 2(|y|+2^j)\ge 2\cdot 2^j$. Logo, $|u-y|\ge R-2^j-|y|\le 2\cdot 2^j\ge 2|v-y|$. Sendo assim, pela condição de suavidade de K, estimamos (6.5.18):

$$\begin{aligned}|\langle T^*h_R,\tau^y\psi_j\rangle| &\le \int_{|v-y|\le 2^j}\int_{|u|\ge R-2^j}\frac{A|v-y|^\delta}{|u-y|^{n+\delta}}|h_R(u)||\tau^y\psi_j(v)|dudv\\ &\le A2^{j\delta}(\|\phi\|_{L^1}+1)\int_{|v-y|\le 2^j}\int_{|u|\ge R-2^j}\frac{1}{|u-y|^{n+\delta}}|\tau^y\psi_j(v)|dudv\\ &= A2^{j\delta}(\|\phi\|_{L^1}+1)\|\psi\|_{L^1}\int_{|u|\ge R-2^j}\frac{1}{|u-y|^{n+\delta}}du\\ &\le A2^{j\delta}(\|\phi\|_{L^1}+1)\|\psi\|_{L^1}\int_{|u-y|\ge\frac{2}{3}R}\frac{1}{|u-y|^{n+\delta}}du, \end{aligned}\tag{6.5.19}$$

em que na última desigualdade usamos o seguinte fato: quando $|u|\ge R-2^j$, temos $|u-y|\ge R-(|y|+2^j)\ge\frac{2}{3}R$. Fazendo $R\to\infty$, vemos que a integral (6.5.19) tende a zero e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n}K_j(x,y)dx=\lim_{R\to\infty}\langle T^*h_R,\tau^y\psi_j\rangle=0,\quad \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

$\square$

Em vista do lema anterior e da representação integral de T_j em (6.5.15), vale que

$$T_jf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K_j(x,y)f(y)dy,\quad \forall f\in\mathcal{S}.\tag{6.5.20}$$

Como consequência do lema anterior, temos que T_j é um operador limitado em L^2. De fato, dada uma função $f\in\mathcal{S}$, usando a representação integral de T_jf e o item (a),

$$\begin{aligned}\|T_jf\|_{L^2}^2 &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x,y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|K_j(x,y)||f(y)|^2dy\right)dx\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}p_j(x-y)dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}p_j(x-y)|f(y)|^2dy\right)dx\\ &= C\|p\|_{L^1}^2\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|T_j f\|_{L^2} \leq C\|p\|_{L^1}\|f\|_{L^2},$$

e portanto T_j se estende a um operador limitado em L^2 com norma $\|T_j\|_{L^2\to L^2} \leq C\|p\|_{L^1}$. Dada uma função $f \in L^2$, podemos considerar $f_k \in \mathcal{S}$ tal que $f_k \to f$ em L^2. Em vista das estimativa obtidas para K_j no Lema 6.5.7, é fácil ver que, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{k\to\infty} T_j f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)f(y)dy,$$

o limite em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos então a extensão de T_j em L^2 por

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)f(y)dy.$$

Por dualidade, T_j ser limitado em L^2 implica que seu adjunto T_j^* também é limitado em L^2 e portanto a composta $T_jT_k^*$ faz sentido como operador de L^2 em L^2, para todos j,k inteiros. Além disso, dadas $f \in L^2$, temos que

$$\begin{aligned}
T_jT_k^* f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,z)T_k^* f(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,z)K_k^*(z,y)f(y)dydz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,z)K_k(y,z)dzf(y)dy.
\end{aligned}$$

Logo, o núcleo do operador $T_jT_k^*$ é a função

$$A_{j,k}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,z)K_k(y,z)dz.$$

Provemos o seguinte lema:

Lema 6.5.8. *O núcleo $A_{j,k}$ de $T_jT_k^*$ satisfaz as seguintes estimativas:*

(a') $\int_{\mathbb{R}^n} |A_{j,k}(x,y)|dy \leq C2^{-\delta|j-k|}$;

(b') $\int_{\mathbb{R}^n} |A_{j,k}(x,y)|dx \leq C2^{-\delta|j-k|}$.

Demonstração. É suficiente provarmos este lema para $j \leq k$, pois $A_{j,k}(x,y) = A_{k,j}(y,x)$. Sendo assim, suponha $j \leq k$. Pelo Lema 6.5.7, itens (a) e (b), temos que

$$\begin{aligned}
|A_{j,k}(x,y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,z)[K_k(y,z) - K_k(y,x)]dz\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |K_j(x,z)||K_k(y,z) - K_k(y,x)|dz \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}[p_j(z-y) + p_k(x-y)]dz.
\end{aligned}$$

Veja que

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_j(z-y)dy = \|p\|_{L^1} < \infty.$$

Provemos a seguinte estimativa

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}dx \leq C2^{-\delta(k-j)}. \tag{6.5.21}$$

De fato, podemos reescrever a integral em (6.5.21) como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} p_j(x)\min\{1, 2^{-k}|x|\}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\min\{1, 2^{j-k}|x|\}dx \end{aligned} \tag{6.5.22}$$

Estimamos a integral (6.5.22) primeiro na bola unitária e depois em seu complementar. Observe que como $0 < \delta \leq 1$ e estamos supondo $j \leq k$,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 1} p(x)\min\{1, 2^{j-k}|x|\}dx &\leq 2^{j-k}\|p\|_{L^1} \\ &\leq 2^{\delta(j-k)}\|p\|_{L^1} \\ &= 2^{-\delta|k-j|}\|p\|_{L^1}\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $x \mapsto 2^{j-k}x$, estimamos o segundo termo por

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq 1} p(x)\min\{1, 2^{j-k}|x|\}dx &= \int_{|x|\geq 1} \frac{\min\{1, 2^{j-k}|x|\}}{(1+|x|)^{n+\delta}}dx \\ &= 2^{\delta(j-k)}\int_{|x|\geq 1} \frac{\min\{1, |x|\}}{(2^{j-k}+|x|)^{n+\delta}}dx \\ &\leq 2^{\delta(j-k)}\int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^{n+\delta}}dx \\ &= 2^{-\delta|k-j|}\frac{\omega_{n-1}}{\delta}.\end{aligned}$$

Uma vez provada (6.5.21), obtemos o item (a') como segue

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |A_{j,k}(x,y)|dy &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}[p_j(z-y)+p_k(x-y)]dydz \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}\int_{\mathbb{R}^n}[p_j(z-y)+p_k(x-y)]dydz \\ &= 2C\|p\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1, 2^{-k}|x-z|\}dz \\ &\leq C'\|p\|_{L^1}2^{-\delta(k-j)}.\end{aligned}$$

Para provar o item (b'), escrevemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |A_{j,k}(x,y)|dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}[p_j(z-y)+p_k(x-y)]dzdx\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}p_j(z-y)dzdx\\ &\qquad + C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}p_k(x-y)dzdx\\ &= C\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}dx\right]p_j(z-y)dz\\ &\qquad + C\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x-z)\min\{1,2^{-k}|x-z|\}dz\right]p_j(x-y)dx\\ &\leq 2C\|p\|_{L^1}2^{-\delta(k-j)}.\end{aligned}$$

□

A limitação L^2 dos operadores T_j é suficiente para que a composição $T_jT_k^*$ seja também limitada em L^2. Além disso, o Lema 6.5.8 implica que

$$\|TjT_k^*\|_{L^2\to L^2} \leq C2^{-\delta|j-k|}.$$

De fato, dada $f\in\mathcal{S}$, temos que pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|T_jT_k^*f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} A_{j,k}(x,y)f(y)dy\right|^2 dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|A_{j,k}(x,y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|A_{j,k}(x,y)||f(y)|^2dy\right)dx\\ &\leq C2^{-\delta|j-k|}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|A_{j,k}(x,y)|dx|f(y)|^2dy\\ &\leq C'2^{-2\delta|j-k|}\|f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Logo, para todos j,k inteiros,

$$\|T_jT_k^*\|_{L^2\to L^2} \leq C'2^{-\delta|j-k|}. \tag{6.5.23}$$

Certamente, também temos a mesma estimativa para $T_j^*T_k$:

$$\|T_j^*T_k\|_{L^2\to L^2} \leq C'2^{-\delta|j-k|}. \tag{6.5.24}$$

O Lema de Cotlar (Lema 6.5.1) é aplicável para os operadores T_j e portanto para o operador R_N definido em (6.5.13). Obtemos então a limitação L^2 de R_N, com norma

$$\|R_N\|_{L^2\to L^2} \leq c\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-\delta|j|} < \infty.$$

Em vista da convergência $\lim_{N\to\infty}\langle R_N f, g\rangle = \langle Tf, g\rangle$ obtida no Lema 6.5.6, temos necessariamente que T é limitado em L^2 com norma

$$\|T\|_{L^2\to L^2} \leq c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-\delta|j|},$$

o que conclui a prova do Teorema $T(1)$, para o caso inicial $T(1) = T^*(1) = 0$.

6.5.3 Suficiência das Condições (1)-(3): Caso Geral

A prova do caso geral do Teorema $T(1)$ é imediato do seguinte lema.

Lema 6.5.9. *Dada uma função $a \in BMO$, existe um operador de Calderón-Zygmund L tal que*

$$L1 = a \quad e \quad L^*1 = 0. \tag{6.5.25}$$

De fato, assuma que o lema acima está provado, e suponha que $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ satisfaz as condições (1)-(3). O Lema 6.5.9 nos garante a existência de operadores de Calderón-Zygmund L e M tais que

$$\begin{aligned} L1 = T1 \quad & L^*1 = 0 \\ M1 = T^*1 \quad & M^*1 = 0. \end{aligned}$$

Definindo o operador $S = T - L - M^*$, temos que S satisfaz a propriedade de limitação fraca, já que T satisfaz e L e M são limitados em L^2, por definição de operador de Calderón-Zygmund. Recorde que a limitação L^2 é suficiente para a propriedade de limitação fraca. Veja que

$$S1 = S^*1 = 0.$$

Logo, pelo caso anterior, S é limitado em L^2 e consequentemente, T é limitado em L^2. Portanto, concluímos a prova do Teorema $T(1)$ no caso geral. Para provarmos agora o Lema 6.5.9, precisamos da noção de medida de Carleson e alguns resultados relacionados.

Definição 6.5.10. *Uma medida μ em $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ é chamada de medida de Carleson se existir uma constante $C > 0$ tal que, para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$, vale que*

$$\mu(\overline{Q}) \leq C|Q|, \tag{6.5.26}$$

em que $\overline{Q} = Q \times (0, l(Q))$ é o cubo de $\mathbb{R}^{n+1}_+$ com base Q e altura $l(Q)$.

Usaremos o seguinte resultado para a prova do Lema 6.5.9. Sua demonstração pode ser encontrada em [STN] Cap. IV, §4.3, Teorema 3. Veja também o Teorema 9.5, Teorema 9.6 e o Corolário 9.7 em [DKT].

Proposição 6.5.11. *Dada uma função $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com integral zero e $a \in BMO$, a medida $|\psi_t * a(x)|^2 \frac{dxdt}{t}$ é uma medida de Carleson e satisfaz a seguinte estimativa L^2:*

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |P_t * f(x)|^2 |\psi_t * a(x)|^2 \frac{dxdt}{t}\right)^{1/2} \leq C\|a\|_{BMO}\|f\|_{L^2}, \tag{6.5.27}$$

em que $P(x) = c_n(1+|x|)^{\frac{n+1}{2}}$ denota o núcleo de Poisson e $P_t(x) = t^{-n}P(t^{-1}x)$.

Observação 6.5.12. *A proposição anterior pode ser estendida como segue. Seja ϕ uma função integrável de $\mathbb{R}^n$ controlada pontualmente por uma função integrável Φ radial e decrescente. Dada uma medida de Carleson μ, existe uma constante $C = C(\mu, \Phi)$ tal que*

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t * f(x)|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

Em particular, se $\mu = |\psi_t * a(x)|^2 \frac{dxdt}{t}$, obtemos

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t * f(x)|^2 |\psi_t * a(x)|^2 \frac{dxdt}{t}\right) \leq C\|a\|_{BMO}\|f\|_{L^2}.$$

Provemos agora o Lema 6.5.9. A prova de tal lema segue a apresentada em [AVZ].

Demonstração. (Lema 6.5.9) Seja $\phi \in \mathcal{D}$ uma função radial decrescente, com suporte na bola $B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. Defina o operador P_t dado pela convolução com ϕ_t:

$$P_t f = \phi_t * f, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Considere também a função

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j(x_j\phi(x)) = \sum_{j=1}^n [\phi(x) + x_j\partial_j\phi(x)].$$

Note que ψ é uma função radial suportada em $B(0,1)$, pois se $\phi(x) = F(|x|)$, em que F é uma função da semi-reta, então $\partial_j\phi(x) = x_j|x|^{-1}F'(|x|)$ e portanto

$$\psi(x) = nF(|x|) + |x|F'(|x|).$$

Além disso, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 0$, pois

$$\widehat{\psi}(\xi) = -\sum_{j=1}^n \xi_j\partial_j\widehat{\phi}(\xi),$$

o que implica que $\widehat{\psi}(0) = 0$. Defina o operador Q_t dado pela convolução com ψ_t:

$$Q_t f = \psi_t * f, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Afirmamos que

$$Q_t = -t\frac{d}{dt}P_t,$$

em que $\frac{d}{dt}P_t f = \frac{d\phi_t}{dt} * f$. De fato, basta notar o seguinte

$$\begin{aligned}
-t\frac{d}{dt}(\phi_t(x)) &= -t\frac{d}{dt}(t^{-n}\phi(t^{-1}x)) \\
& nt\frac{1}{t^{n+1}}\phi(t^{-1}x) - t\frac{1}{t^n}\frac{d}{dt}(\phi(t^{-1}x)) \\
&= n\frac{1}{t^n}\phi(t^{-1}x) - \frac{1}{t^{n-1}}\nabla\phi(t^{-1}x)\cdot(-t^{-2}x) \\
&= n\frac{1}{t^n}\phi(t^{-1}x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{t^{n+1}}\partial_j\phi(x^{-1}x) \\
&= \frac{1}{t^n}\sum_{j=1}^{n}\left[\phi(t^{-1}x) + \frac{x_j}{t}\partial_j\phi(x^{-1}x)\right] \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j(x_j\phi(x))\right)_t \\
&= \psi_t(x).
\end{aligned}$$

Defina os operadores $L_m : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ por

$$\langle L_m f, g\rangle = \int_{1/m}^{m}\langle Q_t(Q_t(a)P_t(f)), g\rangle\frac{dt}{t}, \quad m \geq 1. \tag{6.5.28}$$

No decorrer da demonstração ficará evidente que L_m está bem definido. Seguimos o seguinte roteiro para a prova deste lema:

(1) O operadores L_m são operadores de Calderón-Zygmund uniforme em m, isto é, cada L_m está associado a um núcleo padrão $\mathcal{L}_m(x,y)$, cujas estimativas do núcleo são satisfeitas uniformemente em m e L_m é limitado em L^2 uniformemente em m;

(2) Existe uma operador de Calderón-Zygmund $L : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}\langle L_m f, g\rangle = \langle Lf, g\rangle;$$

(3) L é o operador que satisfaz $L1 = a$ e $L^*1 = 0$.

(1) Fixe $t > 0$. Como ψ é uma função radial, Q_t é um operador auto-adjunto e então

$$\begin{aligned}
\langle Q_t(Q_t(a)P_t(f)), g\rangle &= \langle Q_t(a)P_t(f), Q_t(g)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)P_t(f)(u)Q_t(g)(u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\psi_t(u-x)f(y)g(x)dxdydu
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de L_m, temos que

$$\langle L_m f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\psi_t(u-x)du\frac{dt}{t}\right] f(y)g(x)dxdy,$$

donde segue que o núcleo de L_m é a função

$$\mathcal{L}_m(x,y) = \int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\psi_t(u-x)du\frac{dt}{t}. \tag{6.5.29}$$

O operador L_m tem a seguinte representação integral

$$\langle L_m f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{L}_m(x,y)f(y)g(x)dxdy, \tag{6.5.30}$$

para toda $f, g \in \mathcal{S}$. Uma vez que ψ tem integral zero e está suportada em $B(0,1)$,

$$\begin{aligned}
|Q_t(a)(u)| &= |a * \psi_t(u)| \\
&= \left|\frac{1}{t^n}\int_{|u-v|<t}\psi(t^{-1}(u-v))a(v)dv\right| \\
&= \left|\frac{1}{t^n}\int_{|u-v|<t}\psi(t^{-1}(u-v))(a(v)-a_{B(u,t)})dv\right| \\
&\leq \nu_n\|\psi\|_{L^\infty}\frac{1}{\nu_n t^n}\int_{|u-v|<t}|a(v)-a_{B(u,t)}|dv \\
&\leq \nu_n\|\psi\|_{L^\infty}\|a\|_{BMO}.
\end{aligned} \tag{6.5.31}$$

Logo, a função $Q_t(a)$ é uma função limitada com $\|Q_t(a)\|_{L^\infty} \leq C\|a\|_{BMO}$. É por este motivo que a definição de L_m faz sentido para funções $f \in \mathcal{C}^\infty \cap L^\infty$.

Afirmamos que a função

$$(x,y) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\psi_t(u-x)du. \tag{6.5.32}$$

está suportada na faixa $\{(x,y) : |x-y| \leq 2t\}$. Ora, se $|x-y| > 2t$ e $u \in \mathbb{R}^n$, então $|u-x| > t$ ou $|u-x| > t$. Logo, a integral em (6.5.32) é zero, por causa dos suportes de ϕ e ψ. Para $|x-y| \leq 2t$, podemos escrever

$$1 \leq 1 + \frac{|x-y|}{t} \leq 3.$$

Dado $N \geq 1$, estimamos a integral em (6.5.32) como segue

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\psi_t(u-x)du\right| &\leq C\|a\|_{BMO}\int_{|x-y|\leq 2t}|\phi_t(u-y)||\psi_t(u-x)|du \\
&\leq C\|a\|_{BMO}\frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{t^n}\|\phi\|_{L^1}\frac{3^n}{\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^N} \\
&= C'\|a\|_{BMO}\frac{1}{t^n\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^N}
\end{aligned} \tag{6.5.33}$$

Se tomarmos $N = n+1$, então estimamos $\mathcal{L}_m$ usando (6.5.31) e (6.5.33) por

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_m(x,y)| &\leq \int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(a)(u)||\phi_t(u-y)||\psi_t(u-x)|du \\
&= C\|a\|_{BMO}\int_{1/m}^{m} \frac{1}{t^n\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{n+1}}\frac{dt}{t} \\
&\leq C\|a\|_{BMO}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(t+|x-y|)^{n+1}}dt \\
&= C\|a\|_{BMO}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(t+|x-y|)^{n+1}}dt \\
&= \frac{C}{n}\|a\|_{BMO}\frac{1}{|x-y|^n},
\end{aligned}$$

para todo $x \neq y$. Logo, obtemos a condição de tamanho para $\mathcal{L}_m$

$$|\mathcal{L}_m(x,y)| \leq \frac{C}{n}\|a\|_{BMO}\frac{1}{|x-y|^n}, \quad x \neq y. \tag{6.5.34}$$

Uma vez que o quociente de Newton converge em $\mathcal{S}$ e como $Q_t(a)(\cdot)\phi_t(\cdot - y)$ pode ser visto como elemento de $\mathcal{S}'$, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_x\mathcal{L}_m(x,y) &= \int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\nabla_x(\psi_t(u-x))du\frac{dt}{t} \\
&= \int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)\frac{1}{-t^{n+2}}\nabla_x\psi(t^{-1}(u-x))du\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Para obter a condição de suavidade de $\mathcal{L}_m$, repita o argumento feito para $\mathcal{L}_m$ trocando-o por $\nabla_x\mathcal{L}_m$, trocando ψ por $\nabla_x\psi$ e escolhendo $N = n+2$ para obter

$$|\nabla_x\mathcal{L}_m(x,y)| \leq C\|a\|_{BMO}\frac{1}{|x-y|^{n+1}}, \tag{6.5.35}$$

para todo $x \neq y$. O mesmo vale para ∇_y. A condição sobre o gradiente de L_m é mais forte do que a de suavidade dada pela definição de núcleo padrão. Isso conclui a prova de que $\mathcal{L}_m$ é um núcleo padrão. E portanto, L_m é um operador associado ao núcleo padrão $\mathcal{L}_m$. Note que, em vista das estimativas (6.5.34) e (6.5.35), $\mathcal{L}_m$ é núcleo padrão uniformemente em m.

Provemos agora que L_m se estende a um operador limitado em L^2, uniforme em m. Dadas funções $f, g \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
|\langle L_m f, g\rangle|^2 &= \left|\int_{1/m}^{m} \langle Q_t(Q_t(a)P_t(f)), g\rangle\frac{dt}{t}\right|^2 \\
&= \left|\int_{1/m}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(x)P_t(f)(x)Q_t(g)(x)\frac{dxdt}{t}\right|^2 \\
&\leq \int_{0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(a)(x)P_t(f)(x)|^2\frac{dxdt}{t}\int_{0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|^2\frac{dxdt}{t}.
\end{aligned}$$

Analisemos cada integral separadamente. Pela identidade de Plancherel, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

Afirmamos que a transformada de Fourier de ψ satisfaz

$$\widehat{\psi}(\xi) \leq \begin{cases} C|\xi|, & |\xi| \leq 1 \\ C|\xi|^{-1}, & |\xi| \geq 1. \end{cases} \tag{6.5.36}$$

De fato, a primeira desigualdade prova-se usando que $\widehat{\psi}(0) = 0$ e o Teorema do do Valor Médio. A segunda desigualdade é trivial, já que $\widehat{\psi}$ é uma função Schwartz. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{1/|\xi|} + \int_{1/|\xi|}^{+\infty} \right) |\widehat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{1/|\xi|} |\xi|^2 t^2 \frac{dt}{t} + \int_{1/|\xi|}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|^2 t^2} \frac{dt}{t} \right) |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= C' \|g\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq C\|g\|_{L^2}. \tag{6.5.37}$$

Por outro lado, como $a \in BMO$, a Proposição 6.5.11 nos dá que $|Q_t(a)(x)|^2 \frac{dxdt}{t}$ é uma medida de Carleson. Pela Observação 6.5.12, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(f)(x)|^2 |Q_t(a)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq C\|a\|_{BMO}^2 \|f\|_{L^2}^2. \tag{6.5.38}$$

As estimativas (6.5.37) e (6.5.38) implicam portanto que L_m é limitada em L^2 uniformemente em m:

$$|\langle L_m f, g\rangle| \leq C\|a\|_{BMO} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}. \tag{6.5.39}$$

(2) Primeiramente, vejamos que a sequência $\{\mathcal{L}_m\}_m$, assim como $\{\nabla_x \mathcal{L}_m\}$ e $\{\nabla_y L_m\}$, converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$. Seja $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$ compacto. Logo, $c = \inf_{(x,y)\in E} |x-y| > 0$. Pela estimativa obtida em (6.5.33), temos que, para todo $(x, y) \in E$,

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{L}_{m+p}(x,y) - \mathcal{L}_m(x,y)| \\
&\quad \leq \left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p}\right) \left|\int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(u)\phi_t(u-y)(\psi_t(u-x))du\right| \frac{dt}{t} \\
&\quad \leq C\|a\|_{BMO} \left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p}\right) \frac{1}{(t+|x-y|)^{n+1}} dt \\
&\quad \leq C\|a\|_{BMO} \left(\int_0^{1/m} + \int_m^{+\infty}\right) \frac{1}{(t+c)^{n+1}} dt \longrightarrow 0, \quad m \to \infty. \qquad (6.5.40)
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}_m$ converge a uma função, que denotaremos por $\mathcal{L}$, uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$. O mesmo argumento nos dá que o gradiente $\nabla_{x,y}\mathcal{L}_m$ converge uniformemente a uma função, e portanto para $\nabla_{x,y}\mathcal{L}$.

Provemos agora que o limite $\lim_{m\to\infty}\langle L_m f, g\rangle$ existe. Com efeito, sejam $f, g \in \mathcal{S}$ e veja o seguinte

$$\begin{aligned}
&|\langle (L_{m+p} - L_m) f, g\rangle|^2 \\
&= \left|\left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} Q_t(a)(x) P_t(f)(x) Q_t(g)(x) \frac{dxdt}{t}\right|^2 \\
&\leq \left[\left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(a)(x) P_t(f)(x)||Q_t(g)(x)| \frac{dxdt}{t}\right]^2 \\
&\leq \left(\int_0^{1/m} + \int_m^{+\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(a)(x) P_t(f)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \left(\int_0^{1/m} + \int_m^{+\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|^2 \frac{dxdt}{t}.
\end{aligned}$$

Quando $m \to \infty$, é claro que as integrais acima tendem a 0. Portanto, o limite $\lim_{m\to\infty}\langle L_m f, g\rangle$ existe e define um operador linear $L : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$

$$\langle Lf, g\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle L_m f, g\rangle, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad (6.5.41)$$

Nossa tarefa agora é verificar que o operador L é um operador de Calderón-Zygmund. Ora, a limitação L^2 de L decorre diretamente da estimativa (6.5.39); basta fazer $m \to \infty$, obtendo então

$$|\langle Lf, g\rangle| \leq C\|a\|_{BMO}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}. \qquad (6.5.42)$$

Uma vez válida a representação integral (6.5.30) de L_m, temos que a convergência $\mathcal{L}_m \to \mathcal{L}$ em compactos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$ implica que, dadas duas funções $f, g \in \mathcal{D}$ com suportes disjuntos,

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \lim_{m\to\infty} \langle L_m f, g\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m(x,y) f(y) g(x) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x,y) f(y) g(x) dxdy.
\end{aligned}$$

Recorde que estimativas (6.5.34) e (6.5.35) do núcleo padrão $\mathcal{L}_m$ são satisfeitas uniformemente em m. Como $\mathcal{L}_m$ converge a $\mathcal{L}$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$, vale também a convergência pontual. Logo, $\mathcal{L}$ satisfaz as estimativas do núcleo padrão, e portanto concluímos que L é também um operador de Calderón-Zygmund.

(3) Para a conclusão da demonstração do lema, provemos que $L1 = a$ e $L^*1 = 0$.

Considere $g \in \mathcal{D}_0$ e calculemos $\langle L_m^* 1, g\rangle$, usando a definição em (6.2.1). Por um lado,

$$\begin{aligned} \langle L_m^* 1, g\rangle &= \langle L_m^* \eta, g\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m^*(x,y) g(x)(1-\eta(y))dxdy \\ &= \langle L_m g, \eta\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m(y,x) g(x)(1-\eta(y))dxdy. \end{aligned} \tag{6.5.43}$$

Pelo item (2) anterior, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \langle L_m g, \eta\rangle = \langle Lg, \eta\rangle. \tag{6.5.44}$$

A função $\eta \in \mathcal{D}$ é tal que $\eta = 1$ numa vizinhança do suporte de g. Logo, $(1-\eta)$ e g têm suportes disjuntos. A contas feitas em (6.5.40) valem no compacto $\operatorname{supp}(1-\eta) \times \operatorname{supp}(g) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$. Portanto $\mathcal{L}_m$ converge uniformemente a $\mathcal{L}$ em $\operatorname{supp}(1-\eta) \times \operatorname{supp}(g)$, donde segue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_m(y,x) g(x)(1-\eta(y))dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(y,x) g(x)(1-\eta(y))dxdy. \tag{6.5.45}$$

Em vista de (6.5.44) e (6.5.45), quando $m \to \infty$ em (6.5.43) obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \langle L_m^* 1, g\rangle &= \langle Lg, \eta\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(y,x) g(x)(1-\eta(y))dxdy \\ &= \langle L^*\eta, g\rangle + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}^*(x,y) g(x)(1-\eta(y))dxdy \\ &= \langle L^* 1, g\rangle, \end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{m\to\infty} \langle L_m^* 1, g\rangle = \langle L^* 1, g\rangle \tag{6.5.46}$$

Analogamente, prova-se que

$$\lim_{m\to\infty} \langle L_m 1, g\rangle = \langle L1, g\rangle. \tag{6.5.47}$$

Afirmamos que

$$\langle L_m^* f, g\rangle = \int_{1/m}^{m} \langle P_t(Q_t(a)Q_t(f)), g\rangle \frac{dt}{t}. \tag{6.5.48}$$

Com efeito, isto decorre do fato de P_t e Q_t serem auto-adjuntas:

$$\begin{aligned}\langle L_m^* f, g\rangle &= \langle L_m g, f\rangle \\ &= \int_{1/m}^{m} \langle Q_t(Q_t(a)P_t(g)), f\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/m}^{m} \langle Q_t(a)P_t(g), Q_t(f)\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/m}^{m} \langle P_t(g), Q_t(a)Q_t(f)\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/m}^{m} \langle g, P_t(Q_t(a)Q_t(f))\rangle \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Note que, assim como L_m, o operador L_m^* está também definida para $f \in \mathcal{C}^\infty \cap L^\infty$. Logo, como ψ tem integral nula, $Q_t(1) = 0$ e portanto

$$\langle L_m^*(1), g\rangle = 0.$$

Em vista da igualdade (6.5.46), segue que

$$\langle L^*(1), g\rangle = 0, \quad \forall g \in \mathcal{D}_0,$$

donde obtemos que $L^*1 = 0$, como queríamos.

Restá-nos provar que $L1 = a$. Observe que como ϕ tem integral igual a 1 e Q_t é autoadjunto

$$\begin{aligned}\langle L_m 1, g\rangle &= \int_{1/m}^{m} \langle Q_t(Q_t(a)P_t(1)), g\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/m}^{m} \langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Interpretamos $\langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle$ como uma integral de $Q_t(a)$ contra $Q_t(g)$, já que $Q_t(a)$ é limitada e $Q_t(g)$ é integrável. Além disso, vimos que $\|Q_t(a)\|_{L^\infty} \leq C\|a\|_{BMO}$. Afirmamos que, para alguma constante C dependendo de g e ψ, é válida a estimativa

$$\|Q_t(g)\|_{L^1} \leq \begin{cases} Ct, & 0 < t \leq 1 \\ Ct^{-1}, & t \geq 1. \end{cases} \tag{6.5.49}$$

De fato, considere um compacto $E \subset \mathbb{R}^n$ de modo que

$$E \supset \operatorname{supp}(\psi_1) + \operatorname{supp} g \supset \operatorname{supp}(\psi_1 * g).$$

Logo, para todo $0 < t \leq 1$, $\operatorname{supp}(\psi_t * g) \subset E$. Como $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|dx &= \int_E |\psi_t * g(x)|dx \\
&= \int_E \left| \int_{|z|\leq t} \psi_t(z)g(x-z) - g(x)dz \right| dx \\
&\leq \|\nabla g\|_{L^\infty} \int_{|z|\leq t} |\psi_t(z)||z|dz \\
&\leq \|\nabla g\|_{L^\infty} \|\psi\|_{L^1} t.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $g \in \mathcal{D}_0$, $\int_{\mathbb{R}^n} g = 0$. Para $t \geq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Q_t(g)(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|x-y|\leq t} \psi_t(x-y)g(y)dy \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{|x-y|\leq t} (\psi_t(x-y) - \psi_t(x))g(y)dy \right| dx \\
&\leq \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-y|\leq t} |\psi(t^{-1}(x-y)) - \psi(t^{-1}x)||g(y)|dydx \\
&\leq \|\nabla \psi\|_{L^\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x-y|\leq t} |y||g(y)|dydx \\
&\leq \|\nabla \psi\|_{L^\infty} \frac{1}{t^{n+1}} \nu_n t^n \int_{\mathbb{R}^n} |yg(y)|dy \\
&= C\|\nabla \psi\|_{L^\infty} \nu_n \frac{1}{t}.
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos (6.5.49). A estimativa (6.5.49) nos permite provar que sequência $\langle L_m 1, g\rangle$ converge. Basta observar que

$$
\begin{aligned}
|\langle (L_{m+p} - L_m)(1), g\rangle| &= \left| \left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p} \right) \langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle \frac{dt}{t} \right| \\
&\leq \left(\int_{1/m+p}^{1/m} + \int_m^{m+p} \right) \|Q_t(a)\|_{L^\infty} \|Q_t(g)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&\leq C\|a\|_{BMO} \left(\int_0^{1/m} + \int_m^{+\infty} \right) \|Q_t(g)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&\leq C\|a\|_{BMO} \left(\int_0^{1/m} t\frac{dt}{t} + \int_m^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{dt}{t} \right) \longrightarrow 0, \quad m \longrightarrow \infty.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, existe o limite

$$
\lim_{m\to\infty} \int_{1/m}^{m} \langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle \frac{dt}{t}. \tag{6.5.50}
$$

Como (6.5.47) ocorre, segue que

$$
\langle L1, g\rangle = \int_0^{+\infty} \langle Q_t(a), Q_t(g)\rangle \frac{dt}{t}.
$$

Equivalentemente, por Fubini, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle L1, g\rangle &= \int_0^{+\infty} \langle Q_t^2(a), g\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \left\langle \int_0^{+\infty} Q_t^2(a)\frac{dt}{t}, g \right\rangle.\end{aligned} \tag{6.5.51}$$

Provemos agora que, a menos de uma constante normalizadora,

$$\int_0^{+\infty} Q_t^2(a)\frac{dt}{t} = a.$$

Para isto, veja que ψ ser radial equivale a sua transformada de Fourier $\widehat{\psi}$ também ser radial. Podemos escrever $\widehat{\psi}(\xi) = G(|\xi|)$, para alguma função G definida em $[0, +\infty)$. Então, em vista de (6.5.36), para $\xi \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} \widehat{\psi}(t\xi)^2 \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} G(t|\xi|)^2 \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} G(t)^2 \frac{dt}{t} = \lambda > 0.$$

Uma vez que $a \in BMO$ pode ser visto como elemento de $\mathcal{S}'$, segue que $\widehat{a} \in \mathcal{S}'$. Daí

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\psi_t * \psi_t * a)(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\psi_t * \psi_t)(x-y) g(x) dx a(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_t * \psi_t * g)(y) a(y) dy \\ &= \langle a, \psi_t * \psi_t * g\rangle \\ &= \langle \widehat{a}, \widehat{\psi}(t\,\cdot)^2\, g^\vee\rangle.\end{aligned}$$

Integrando com respeito a medida $\frac{dt}{t}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} (\psi_t * \psi_t * a)(x) g(x) dx \frac{dt}{t} &= \int_0^{\infty} \langle \widehat{a}, \widehat{\psi}(t\,\cdot)^2 g^\vee\rangle \frac{dt}{t} \\ &= \left\langle \widehat{a}, \int_0^{\infty} \widehat{\psi}(t\,\cdot)^2 \frac{dt}{t} g^\vee \right\rangle \\ &= \langle \widehat{a}, \lambda g^\vee\rangle \\ &= \langle a, \lambda g\rangle,\end{aligned}$$

donde segue portanto que

$$\langle a, \lambda g\rangle = \left\langle \int_0^{+\infty} Q_t^2(a)\frac{dt}{t}, g \right\rangle.$$

Se trocarmos ψ por $\lambda^{-1/2}\psi$, obtemos

$$\langle a, g\rangle = \left\langle \int_0^{+\infty} Q_t^2(a)\frac{dt}{t}, g \right\rangle,$$

para toda $g \in \mathcal{D}_0$, e assim $L1 = a$. □

6.5.4 Uma Aplicação

Nosso objetivo desta seção final é fazer uma aplicação do Teorema $T(1)$. Para isto, façamos uma breve discussão sobre os operadores pseudo-diferenciais, introduzidos por Calderón-Vaillamourt, Kohn-Niremberg, Hörmander, entre outros. Veja [C-V], [C], [HR] e [JL].

Um operador pseudo-diferencial (associado a σ) é um operador da forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi, \tag{6.5.52}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, em que $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dizemos que σ é o símbolo de T. Para que a integral acima convirja absolutamente será necessário exigir algumas condições sobre σ.

Note que operadores pseudo-diferenciais operadores diferenciais generalizam os operadores diferenciais. De fato, se $\sigma(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, então, usando as propriedades de transformada de Fourier, T pode ser escrita como uma soma de derivadas de f.

Sejam $\rho \geq 0$, $\delta \leq 1$ e $m > 0$ um inteiro. Denotamos por $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$ a classe dos símbolos $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que satisfazem

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}, \tag{6.5.53}$$

para todos multi-índices α e β. Para σ satisfazendo (6.5.53) e usando o fato de que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pode-se provar que a integral em (6.5.52) converge absolutamente. Denotamos também por $\mathcal{L}^m_{\rho,\delta}$ a classe dos operadores pseudo-diferenciais cujo símbolo está em $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$. Nesta seção estaremos interessados na classe dos símbolos $\mathcal{S}^0_{1,1}$ e caracterizaremos a limitação $L^2 \to L^2$ de operadores pseudo-diferenciais de $\mathcal{L}^0_{1,1}$ via o Teorema $T(1)$.

Primeiramente, provemos que todo operador pseudo-diferencial T de $\mathcal{L}^m_{\rho,\delta}$ mapeia continuamente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, considere $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e veja o seguinte

$$\begin{aligned}
|\langle Tf, g\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\sigma(x,\xi)||\widehat{f}(\xi)||g(x)|d\xi dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^m|\widehat{f}(\xi)||g(x)|d\xi dx \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{m+n+1}|\widehat{f}(\xi)|\|g\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{n+1}} < \infty.
\end{aligned}$$

Como $\|g\|_{L^1}$ é controlada por uma soma de seminormas de g, segue que Tf é uma distribuição temperada. Portanto, T é um operador linear contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos T um operador de $\mathcal{L}^0_{1,1}$. O fato de T estar associado a um núcleo padrão decorre do seguinte resultado. Veja a Proposição 1, página 271, em [STN] para sua demonstração.

Teorema 6.5.13. *Seja T um operador pseudo-diferencial com símbolo em $\mathcal{S}^0_{1,1}$. Então existe um núcleo $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta)$ satisfazendo*

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}, \tag{6.5.54}$$

para todos multi-índices α, β e $x \neq y$, de modo que, para toda $f \in \mathcal{D}$ e todo $x \notin \operatorname{supp} f$,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy.$$

É evidente que a condição (6.5.54) é suficiente para que K seja um núcleo padrão. Logo, todo operador $T \in \mathcal{L}^0_{1,1}$ está associado a um núcleo padrão.

Verifiquemos agora que todo operador $T \in \mathcal{L}^0_{1,1}$ (com símbolo σ) satisfaz WBP. Com efeito, considere $B \subset \mathcal{D}$ um subconjunto limitado. Sejam $\phi, \psi \in B$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle T(\tau^{x_0}\phi_R), \tau^{x_0}\psi_R\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} T(\tau^{x_0}\phi_R)(x)\psi_R(x-x_0)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)(\tau^{x_0}\phi_R)^\wedge(\xi)\psi_R(x-x_0)d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-x_0)\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{\phi}(R\xi)\psi_R(x-x_0)d\xi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} R^{-n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(Rx+x_0, R^{-1}\xi)\widehat{\phi}(\xi)\psi(x)d\xi dx.
\end{aligned}$$

Na última igualdade fizemos a mudança de variável $x \mapsto \frac{x-x_0}{R}$ e $\xi \mapsto R\xi$. Como $\sigma \in \mathcal{S}^0_{1,1}$, σ é uma função limitada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Logo,

$$|\langle T(\tau^{x_0}\phi_R), \tau^{x_0}\psi_R\rangle| \leq R^{-n}\|\sigma\|_{L^\infty}\|\widehat{\phi}\|_{L^1}\|\psi\|_{L^1},$$

donde segue que T satisfaz WBP.

Apesar de todo operador pseudo-diferencial $T \in \mathcal{L}^0_{1,1}$ estar associado a um núcleo padrão, não é verdade que admitam extensão limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Em outras palavras, nem todo $T \in \mathcal{L}^0_{1,1}$ é um operador de Calderón-Zygmund. Veja o exemplo de tal operador dado por C.H. Ching em [CH]. Veja também o contraexemplo da página 66 de [JL] e a observação 24 de [AVZ].

Calcularemos agora $T(1)$ de um operador pseudo-diferencial $T \in \mathcal{L}^0_{1,1}$. Em vista da Observação 6.2.2, temos que

$$\langle T1, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle T\eta_j, \phi\rangle,$$

em que $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, com $\eta = 1$ em $|x| \leq 1$, $\eta = 0$ em $|x| \geq 2$ e η_j é a sequência de funções $\eta_j(x) = \eta(x/j)$. Vejamos o seguinte

$$\begin{aligned}\langle T\eta_j, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} T\eta_j(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{\eta_j}(\xi)\phi(x)d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(j^{-1}\xi)}\sigma(x,j^{-1}\xi)\widehat{\eta}(\xi)\phi(x)d\xi dx.\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos o fato de que $\widehat{\eta_j}(\xi) = j^n\widehat{\eta}(j\xi)$ e fizemos a mudança de variável $\xi \mapsto j\xi$. Uma vez que σ é uma função limitada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|e^{2\pi i x\cdot(j^{-1}\xi)}\sigma(x,j^{-1}\xi)\widehat{\eta}(\xi)\phi(x)| \leq \|\sigma\|_{L^\infty}|\widehat{\eta}(\xi)||\phi(x)|.$$

Como a função do lado direito da desigualdade acima é integrável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pelo do Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{j\to\infty}\langle T\eta_j, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\eta}(\xi)d\xi\right)\sigma(x,0)\phi(x)dx.$$

Note que como η é uma função de $\mathcal{S}$, a inversão de Fourier nos dá que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\eta}(\xi)d\xi = \eta(0) = 1.$$

Logo, para toda $\phi \in \mathcal{D}_0$,

$$\langle T1, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle T\eta_j, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\sigma(x,0)\phi(x)dx.$$

Portanto $T1 = \sigma(x,0) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$, ou seja $T1 \in BMO(\mathbb{R}^n)$, para todo operador pseudo-diferencial T com símbolo $\sigma \in \mathcal{S}^0_{1,1}$. Sendo assim, pelo Teorema $T(1)$ fica provado o próximo teorema.

Teorema 6.5.14. *Um operador pseudo-diferencial T de $\mathcal{L}^0_{1,1}$ admite extensão limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $T^*1 \in BMO$.*

Referências Bibliográficas

[AVZ] ÁLVAREZ, J. GUZMAN-PARTIDA M. , *The T(1) theorem revisited*, Surveys in Mathematics and its Applications, Vol. 13, Pages 41-94, 2018.

[BSS] BASS, R.F. *Real Analysis for Graduate Students*, Version 3.1, 2016.

[BZS] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Univesitext, Springer, 2011.

[C-V] A. P. CALDERÓN, R. VAILLANCOURT, *A class of bounded pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 69 (1972), 1185-1187.

[CZ01] CALDERÓN, A. P., ZYGMUND, A. *On singular integrals*, American Journal of Mathematics, vol. 78 (1956), pp. 289-309.

[CZ02] CALDERÓN, A. P., ZYGMUND, A. *On the existence of certain singular integrals,* Acta Mathematica, vol. 88 (1952), pp.85-139

[CH] CHING, C.-H. *Pseudo-differential operators with non-regular symbols*, J. Diff. Eq. Vol. 11 (1972), 436-447

[CNW] CONWAY, J.B. *A Course in Function Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer, New York, 1985.

[C] R. COIFMAN, Y. MEYER. *Au-delá des opérateurs pseudo-différentiels*, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

[DKT] DUOANDIKOETXEA J. *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[D-J] DAVID, G., JOURNÉ, J-L. *A Boundedness Criterion for Generalized Calderon-Zygmund Operators*, Pages: 371 - 397, Annals of Mathematics, 1984.

[F-S] FEFFERMAN, C., STEIN, E. M., *Hp spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), no. 3–4, 137–193

[FLD] FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[GFK1] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*, Third Edition, Graduate Texts in Math. 249, Springer, New York, 2014.

[GFK2] GRAFAKOS, L. *Modern Fourier Analysis*, Third Edition, Graduate Texts in Math. 250, Springer, New York, 2014.

[HRM] HÖRMANDER, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution theory and Fourier Analysis*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[HR] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III: Pseudo-Differential Operators.* Springer, 2007.

[HNE] HOUNIE, J. *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[JL] JOURNÉ, J-L *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón*, Lecture notes 994, Springer-Verlag, 1983.

[RDN] RUDIN, W. *Function Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill Inc, 1991.

[STN] STEIN, E. M. *Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press 1993.