

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

GUILHERME MARTINS JACOMINI

**AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE RESISTENTE DE VIGAS DE
CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS UTILIZANDO OS
PROCEDIMENTOS NORMATIVOS DA ABNT NBR 16935:2021**

SÃO CARLOS

2021

GUILHERME MARTINS JACOMINI

**AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE RESISTENTE DE VIGAS DE
CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS UTILIZANDO OS
PROCEDIMENTOS NORMATIVOS DA ABNT NBR 16935:2021**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a conclusão da graduação em Engenharia Civil

Orientadora: Profa. Dra. Margot Fabiana Pereira

São Carlos

2021

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Cleide e Valnei, à minha irmã, Gabriela.

*À minha família e aos meus amigos que
estiveram comigo a todo momento.*

AGRADECIMENTO

Agradeço, primeiramente, a mim que fui capaz de enfrentar todos os obstáculos para chegar a este momento.

Agradeço aos meus pais por terem me dado todo o apoio durante o período da graduação.

Agradeço à minha irmã que foi essencial em me aconselhar para seguir meus sonhos e não desistir tão facilmente.

Agradeço à minha família que esteve comigo durante esse período.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Margot, por todo suporte e orientação durante a elaboração deste trabalho.

*Eu vou! Eu sou! Eu posso! Eu vou realizar meu sonho. Eu vou continuar.
Eu vou me dedicar e ir até o fim. Eu vou resolver os problemas.
Custe o que custar. Eu não abandonarei o meu sonho até vê-lo
andar com as próprias pernas. Alerta! Vivo! Realizado!*

- ROBERT SCHULLER

RESUMO

O Concreto Reforçado com Fibras (CRF) é um compósito que apresenta propriedades mecânicas aprimoradas quando comparado ao concreto simples. A adição de fibras na matriz cimentícia do concreto tem por objetivo a melhora no desempenho do material, fornecendo um controle da fissuração e um aumento da capacidade de deformação pós-fissuração. Dessa forma, a demanda desse material aumentou nas últimas décadas, sendo mais comumente aplicado em pavimentos e revestimento de túneis, mas sendo possível a utilização em elementos lineares. Para a utilização do CRF em elementos estruturais, utilizam-se principalmente as fibras de aço por fornecerem melhores respostas mecânica quando solicitados a diferentes carregamentos. Para aplicação em projetos de estruturas, necessita-se da utilização de procedimentos normativos que garantam a segurança e desempenho deste elemento. Contudo, no Brasil, a norma vigente sobre os procedimentos que devem ser adotados para a utilização do compósito em termos estruturais, a ABNT NBR 16935 (2021), foi lançada recentemente e os estudos que aplicam esta metodologia ainda são raros na literatura. Neste contexto, o presente trabalho visa a utilização dos procedimentos de dimensionamento apresentados pela ABNT NBR 16935 (2021), assim como um estudo comparativo entre os resultados da capacidade resistente de elementos lineares obtidos experimentalmente e pelo método normativo. Dessa forma, os estudos conduzidos neste trabalho demonstraram que os procedimentos normativos tendem a superestimar a capacidade resistente das vigas analisadas, porém estes valores aparentaram estar de acordo com os encontrados na literatura quando aplicado os procedimentos do Modelo Código da *fib* (2012). A aplicação das leis constitutivas conseguiu demonstrar a influência na taxa de armadura dos elementos conforme o teor de fibras é alterado, podendo obter uma redução de 10% no valor da armadura longitudinal.

Palavras-chave: Concreto reforçado com fibras, ABNT NBR 16935:2021, dimensionamento, elemento estrutural, taxa de armadura.

ABSTRACT

Fiber Reinforced Concrete (FRC) is a composite that has improved mechanical properties when compared to plain concrete. The addition of fibers in the cementitious matrix of concrete aims to improve the performance of the material, providing crack control and a post-cracking deformation capacity increase. Thus, the demand for this material has increased in recent decades, being more commonly applied to pavements and tunnel lining, being possible to use it in linear elements. For the use of FRC in structural members, steel fibers are mainly used because they provide better mechanical responses when required for different loads. For application in structural projects, it is necessary to use design methods that guarantee the safety and performance of the members. However, in Brazil, the current standard on the procedures that must be adopted for the use of the FRC in design, ABNT NBR 16935: 2021, was recently published and studies that apply this methodology are still rare in the literature. In this context, the present work aims to use the design procedures presented by ABNT NBR 16935: 2021, as well as a comparative study between the results of the resistant capacity of linear members obtained experimentally and by the design method. Thus, the studies conducted in this work demonstrate that the normative procedures tend to overestimate the resistant capacity of the analyzed beams, however, these values appear to be similar to those found in the literature when applying the procedures of the *fib* Model Code (2012). The application of the constitutive laws can demonstrate the influence on the reinforcement rate of the members as the fiber content is altered, being able to obtain a 10% reduction in the value of the longitudinal reinforcement.

Keyword: Fiber reinforced concrete, ABNT NBR 16935:2021, design, structural member, reinforcement rate

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema das linhas de tensões para o concreto simples (a) e com adição de fibras (b).	21
Figura 2 - Curvas Tensão-CMOD obtidas para CRFA de $f_{ck} = 35\text{MPa}$ e com diferentes consumos de fibra de aço.....	22
Figura 3 - Curvas de carga por deslocamento de concretos com diferentes níveis	23
Figura 4 - Ilustração do comportamento do CRF com volume de fibras abaixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico em um ensaio de tração na flexão.....	24
Figura 5 – Comportamento de <i>Softening</i> (a) e <i>Hardening</i> (b) do CRF em tensão axial.	25
Figura 6 – Concreto com reforço de fibras com compatibilidade de dimensões (a) e sem compatibilidade de dimensões (b).	26
Figura 7 – Exemplificação do comportamento da matriz e das fibras de alto e baixo módulo de elasticidade.....	29
Figura 8 - Respostas do CRF para ensaios de tensão axial e de flexão.	35
Figura 9 - Esquema do ensaio de flexão pela norma EN14651 (2007).	36
Figura 10 - Exemplo de curva obtida em um ensaio de flexão.	36
Figura 11 – Modelo construtivo para o comportamento pós-fissuração.	38
Figura 12 – Esquema utilizado no modelo plástico rígido para obtenção do f_{Ftu} em termos de f_{R3}	38
Figura 13 – Esquema do modelo linear para determinação de f_{Fts} (a) e f_{Ftu} (b).	39
Figura 14 – Diagrama de tensão e deformação no ELU para momento fletor e força normal.	42
Figura 15 – Correlação entre valores experimentais e analíticos para força cortante.	56
Figura 16 - Correlação entre valores experimentais e analíticos para momento fletor.	57
Figura 17 – Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os extraídos da literatura.	58
Figura 18 – Comportamento do valor da área de aço conforme aumento do teor de fibras.....	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Equações para determinação do diâmetro equivalente das fibras de acordo com o Grupo e o Tipo.....	30
Tabela 2 - Geometria das fibras de acordo com sua classificação.	31
Tabela 3 - Coeficientes de ponderação para o CFR.	43
Tabela 4 – Dados extraídos da literatura	49
Tabela 5 – Detalhes das armaduras utilizadas em nos ensaios.....	50
Tabela 6 – Resultados experimentais obtidos na literatura.	51
Tabela 7 – Valores de força cortante experimentais e normativas com coeficiente de ponderação igual a 1.....	53
Tabela 8 – Valores de momento fletor experimentais e normativos com coeficiente de ponderação igual a 1 para o modelo rígido plástico e linear.	54
Tabela 9 – Dados iniciais das vigas para aplicação dos procedimentos de cálculo.	59
Tabela 10 – Valores do limite de proporcionalidade e das resistências residuais.....	60
Tabela 11 – Valores da posição da linha neutra, área de aço e deformação do CRF.....	61
Tabela 12 – Valores de redução da área de aço.....	63
Tabela 13 - Dados do Exemplar B0-450-10-450.....	70
Tabela 14 - Dados do Exemplar B0-450-10-450.....	74
Tabela 15 – Dados da viga V1 adotada para dimensionamento.....	79

LISTA DE SIMBOLOS

f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	Resistência média à compressão do concreto
f_{cd}	Resistência de cálculo à compressão do concreto
V_f	Volume de fibras
ℓ_c	Comprimento crítico da fibra
ℓ_f	Comprimento da fibra
d_f	Diâmetro da fibra
λ_f	Fator de forma da fibra
d_e	Diâmetro equivalente da fibra
t	Espessura da fibra
w	Largura da fibra retangular
σ_{ct}	Resistência a flexão do concreto reforçado com fibras
σ_{ct}	Resistência a flexão da matriz do concreto
σ_f	Resistência das fibras
ρ_m	Razão de volume da matriz do concreto
ρ_f	Razão de volume das fibras
ε_y	Deformação de tração da barra de aço longitudinal
f_y	Tensão de escoamento do aço
E_s	Módulo de elasticidade do aço
ε_f	Deformação das fibras
σ_y	Tensão de tração desenvolvida na fibra no arrancamento
σ_t	Tensão de tração do concreto com fibra
η_t	Eficiência de aderência da fibra
x	Posição da linha neutra
e	Distância do topo do elemento ao bloco de tensão de tração
M_n	Momento nominal resistido pelo elemento linear
A_s	Área de aço da armadura
d	Distância do topo do elemento até o centroide da armadura convencional
h	Altura do elemento linear
a	Altura do diagrama de tensão de compressão
b_w	Largura do elemento linear
$CMOD$	Medida da abertura do entalhe
f_L	Resistência à tração na flexão do CRF (limite de proporcionalidade)
f_{RI}	Resistência residual à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_1 = 0,5$ mm

f_{R2}	Resistência residual à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_2 = 1,5$ mm
f_{R3}	Resistência residual à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_3 = 2,5$ mm
f_{R4}	Resistência residual à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_4 = 3,5$ mm
$f_{R1,k}$	Resistência residual característica à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_1$
$f_{R2,k}$	Resistência residual característica à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_2$
$f_{R3,k}$	Resistência residual característica à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_3$
$f_{R4,k}$	Resistência residual característica à tração na flexão do CRF correspondente ao $CMOD_4$
F_j	Força correspondente ao $CMOD_j$
l	Vão de ensaio do corpo de prova
h_{sp}	Distância entre a ponta do entalhe e a face superior do corpo de prova
f_{Fts}	Resistência à tração direta do CRF, valor de serviço
f_{Ftu}	Resistência à tração direta do CRF, valor último
w	Abertura de fissura
w_u	Abertura de fissura última
f_{Ftuk}	Resistência característica à tração direta do CRF, valor último
ℓ_{cs}	Comprimento característico da fibra
s_{rm}	Espaçamento médio entre as fissuras
ϵ_{Fu}	Deformação última do CRF
α_c	Parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão
λ	Relação entre a profundidade y do diagrama retangular de compressão equivalente e a profundidade efetiva x da linha neutra
γ	Coefficiente de ponderação
M_{Rd}	Momento resistente de cálculo para o Modelo Rígido Plástico
M_{ad}	Momento resistente de cálculo na armadura para o Modelo Rígido Plástico
M_{ud}	Momento resistente de cálculo do CRF para o Modelo Rígido Plástico
R_{cc}	Força resultada do concreto comprimido
R_{ct}	Força resultado do concreto tracionado
R_{st}	Força resultado da armadura tracionada
V_{Rd}	Força cortante resistida pelo elemento linear
$V_{Rd,F}$	Força cortante resistida pelo CRF
V_{sw}	Força cortante resistida pela armadura transversal
A_{sl}	Área de seção transversal da armadura que se estende além da seção considerada
ρ_l	Taxa de armadura longitudinal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Justificativa.....	15
1.2	Objetivos	16
1.3	Metodologia.....	16
1.4	Organização do Trabalho	18
2	CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS.....	19
2.1	Interação Fibra-Matriz.....	20
2.2	Aplicação do CRF em elementos estruturais	27
3	MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO	32
3.1	Modelo código da <i>fib</i> (2012).....	34
3.2	ABNT NBR 16935 (2021)	40
3.2.1	Elementos Lineares sujeitos a flexão simples no ELU	41
3.2.1.1	Elementos lineares sujeitos à força cortante.....	45
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	48
4.1	Base de dados	48
4.2	Comparação dos resultados experimentais com os procedimentos normativos.....	52
4.3	Influência da adição de fibras na capacidade resistente das vigas	59
5	CONCLUSÃO	64
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	66
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
	APÊNDICE A – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NORMATIVOS	70
	APÊNDICE B – ÁREA DE AÇO PARA ELEMENTOS LINEARES SOB FLEXÃO SIMPLES.....	79

1 INTRODUÇÃO

A grande utilização do concreto se fundamenta pelas diversas vantagens apresentadas por ele, sendo algumas delas: baixo custo de produção, alta durabilidade, boa resistência à compressão, controle tecnológico bem difundido, versatilidade arquitetônica, resistência ao fogo, etc. Em contra partida, o material também apresenta limitações: baixa resistência à tração, pouca capacidade de deformação e comportamento frágil. Pensando em um aprimoramento dessas desvantagens, atualmente, utiliza-se a armação do concreto por barras de aço.

O concreto armado (CA), então, se comporta de maneira mais satisfatória do que quando comparado ao concreto simples. A utilização das armaduras de aço fornece um aumento na capacidade resistência para os elementos em concreto e uma deformabilidade maior, visto que o aço e o concreto conseguem trabalhar solidariamente resistindo aos esforços solicitantes (LEE *et al.*, 2016). Pensando neste contexto da utilização de elementos que auxiliam no desempenho do concreto, tem-se o conhecimento acerca dos aditivos e adições que podem ser responsáveis por fornecer melhorias específicas para a mistura.

A utilização de diferentes componentes responsáveis por melhorar o comportamento mecânico do concreto vem sendo muito estudada nos últimos tempos. Um exemplo de utilização, é a adição de fibras na matriz cimentícia do concreto que, basicamente, são responsáveis por diminuir a fragilidade apresentada pelo material, obtendo um aumento da deformabilidade pós-pico de tensão e uma maior absorção de energia (tenacidade) quando o material é submetido à diferentes tipos de carregamentos, além de ser responsável pelo controle da fissuração e do lascamento em situações de incêndio (FIGUEIREDO, 2005).

O crescente interesse pelo uso das fibras como reforço do concreto refere-se principalmente às suas propriedades melhoradas em relação ao concreto simples. As fibras podem ser classificadas como microfibras (diâmetro menor que 0,3mm) e macrofibras (diâmetro maior que 0,3mm). Enquanto a primeira é utilizada principalmente para o controle de fissuração e combate ao incêndio, a segunda é utilizada, além do controle de fissuração, para o desempenho estrutural, funcionando como um reforço ao concreto ao passo que podem fornecer aumento na resistência do material, na absorção de energia e na ductilidade pós-fissuração e, em alguns casos, simplificação dos processos construtivos (substituição ou diminuição de armaduras pelas fibras) (BURATTI; MAZZOTTI; SAVOIA, 2011; LOPES, 2005).

A adição de fibras descontínuas dispersas na matriz cimentícia dá origem ao chamado Concreto Reforçado com Fibras (CRF) o qual apresenta uma mudança no comportamento mecânico, pois as fibras podem atuar como pontes de transferência de tensões através das fissuras existentes, assim, o concreto pode apresentar um comportamento pseudo-dúctil. As fibras utilizadas na matriz cimentícia podem ser de diferentes tipos de materiais, formas e tamanhos, entretanto, as fibras de aço estão sendo mais comumente utilizadas em elementos com proposta de reforço estrutural. Assim, o emprego do reforço com fibras de aço vem sendo utilizados considerando essa melhoria no desempenho.

Contudo, um dos principais aspectos e desvantagens referente a adição das fibras na dosagem do concreto é a perda da trabalhabilidade da mistura, podendo ser reparada com a utilização de aditivos que ajudam a deixar a mistura mais fluida. Outro aspecto é a utilização do concreto com o reforço das fibras como um material estrutural, visto que, nos métodos de dimensionamento, é essencial acrescentar a parcela de contribuição das fibras na resistência do compósito. Porém, os modelos constitutivos difundidos e consolidados atualmente que tratam de elementos estruturais de concreto, como por exemplo a ABNT NBR 6118 (2014), levam em consideração apenas a armadura por barras longitudinais e transversais e a atuação do concreto. Desse modo, os modelos que incluem o comportamento das fibras de aço na mistura apresentam-se como uma nova abordagem de aplicação e estão em constante desenvolvimento.

Conforme apontado por Carnio (2017), desde os anos 90 as fibras de aço tiveram um grande avanço de utilização no Brasil, visto que as possibilidades de aplicação desde material são vastas e, para isso, torna-se necessário normalizações que visam a qualidade e segurança na aplicação da construção civil. O Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA), portanto, vem sendo frequentemente estudado nos últimos tempos devido suas características e aplicações, e com isso, tem-se o aumento na demanda pela utilização desse material.

Atualmente, tem-se algumas normalizações que envolvem o uso do CRF em âmbito nacional, sendo algumas delas: ABNT NBR 8953 - Concreto para fins estruturais — Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência (2015), ABNT NBR 15305 – Produtos pré-fabricados de materiais cimentícios reforçados com fibras de vidro – Procedimentos para o controle de fabricação (2005), ABNT NBR 15530 - Fibras de aço para concreto — Requisitos e métodos de ensaio (2019) e recentemente, em 18/02/2021, foram publicada as normas ABNT NBR 16935 - Projeto de estruturas de concreto reforçado

com fibras — Procedimento (2021), ABNT NBR 16940 - Concreto reforçado com fibras — Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) — Método de ensaio (2021), ABNT NBR 16938 - Concreto reforçado com fibras — Controle da qualidade (2021).

Destaca-se entre elas a ABNT NBR 16935 (2021) que trata sobre projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras, e apresenta, entre outros aspectos, procedimentos para o dimensionamento de elementos lineares constituídos por este material. Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo avaliar a representatividade do método de dimensionamento proposto pela ABNT NBR 16935 (2021), por meio de comparações com resultados experimentais e além disso, avaliar qual o efeito de se considerar a contribuição das fibras na capacidade resistente do elemento.

1.1 Justificativa

Nas últimas décadas, percebe-se um crescente interesse no desenvolvimento e utilização do Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA). Houve um avanço nas pesquisas sobre as propriedades mecânicas do material e sua aplicação em elementos estruturais, já que o material apresenta um aumento na resistência residual de tração, ductilidade e absorção de energia quando comparado ao concreto convencional. Neste contexto, nota-se a importância e necessidade de estudos que tem por objetivo a elaboração de modelos analíticos e numéricos que pudessem nortear os procedimentos de dimensionamento normativo.

No Brasil, há uma norma que apresenta os procedimentos para dimensionamento de elementos com CRFA, publicado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), e que garante um desempenho mecânico para esses elementos, a ABNT NBR 16935 (2021). Adicionalmente, tem-se a ABNT NBR 15530 (2019) que tem por objetivo garantir a qualidade de utilização das fibras de aço e classificá-las. Já no panorama mundial, existem recomendações normativas estabelecidas, como o Modelo Código da *fib* (2012) que contribuiu de maneira significativa no avanço de especificações técnicas para a elaboração de procedimentos para a utilização do material.

Como a ABNT NBR 16935 (2021) foi publicada muito recentemente, pesquisas que aplicam seus procedimentos ainda não são encontradas na literatura, justificando a importância dessa pesquisa. Neste contexto, a pesquisa em questão tem por

objetivo verificar, se utilizando os procedimentos normativos da ABNT NBR 16935 (2021), os resultados analíticos estão em concordância com os resultados experimentais e assim ajudar na disseminação do uso do CRFA em âmbito nacional.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho foi a avaliação dos procedimentos normativos apresentados pela ABNT NBR 16935 (2021) para elementos lineares. Os resultados buscados englobam a capacidade resistente de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço submetidas a flexão simples. Pretendeu-se, então:

1. Realizar uma revisão bibliográfica sobre o CRFA e os procedimentos normativos de dimensionamento de elementos estruturais compostos por esse material;
2. Avaliar a representatividade do método de dimensionamento proposto pela ABNT NBR 16935 (2021) em comparação com resultados experimentais extraídos da literatura e;
3. Avaliar a influência da consideração da parcela de contribuição das fibras na capacidade resistente, focando no impacto em relação armadura necessária.

1.3 Metodologia

Para a análise dos procedimentos normativos fornecidos pela ABNT NBR 16935 (2021), a execução deste trabalho foi dividida nas seguintes etapas:

- **Revisão bibliográfica:** a primeira etapa refere-se a uma extensa revisão bibliográfica acerca do Concreto Reforçado com Fibras (CRF) objetivando um maior conhecimento sobre o tema e a fundamentação sobre a importância e vantagens de utilização deste compósito. Em especial, um estudo sobre o Modelo Código da *fib* (2012), visto que este documento se apresenta como base para diversos procedimentos normativos internacionais, incluindo a norma brasileira, a ABNT NBR 16935 (2021), no qual seu conteúdo também consta neste trabalho;

- **Base de dados de ensaios:** em uma segunda etapa, buscou-se na literatura artigos que avaliaram características e parâmetros de resistência residual à tração indireta do CRF, especificamente, do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Nestes artigos era fundamental que os autores tivessem realizado ensaios de caracterização do CRF, como o ensaio de flexão de 3 pontos com entalhe, conforme a ABNT NBR 16940 (2021) ou EN 14651 (2007), de modo a ser obtido os valores de resistências residuais à tração na flexão. Assim, nesta etapa foram selecionados alguns estudos e criou-se uma base de dados com os resultados experimentais;
- **Comparação dos resultados experimentais com os obtidos pelos procedimentos normativos:** os procedimentos normativos foram aplicados para a mesma geometria e característica dos materiais dos ensaios experimentais. Assim foi possível obter valores analíticos que pudessem ser comparados aos obtidos experimentalmente e, portanto, verificar a aplicabilidade dos métodos expostos na ABNT NBR 16935 (2021) e se fornecem resultados confiáveis.
- **Análise da influência da adição de fibras na capacidade resistente de vigas:** nesta etapa, foi feito o dimensionamento de vigas com diferentes volumes de fibras a fim de verificar a influência na área de armadura necessária. Adotou-se a geometria para uma viga fictícia a qual foi submetida a um valor constante de momento fletor. Foram consideradas três resistências distintas (25, 35 e 45 MPa) e três teores de fibras de 0,25%, 0,375% e 0,50% (propriedades mecânica dos materiais retirada de Lee (2017)).
- **Análise dos resultados:** todos os resultados obtidos foram apresentados em forma de tabelas e figuras representando todo o comportamento obtido nas análises e as discussões pertinentes em cada etapa. Houve também uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com os obtidos nos artigos selecionados, demonstrando um comportamento similar em todos os casos. Complementando, fez-se as devidas conclusões sobre todo o processo elaborado nesta monografia.

1.4 Organização do Trabalho

A pesquisa foi realizada e organizada de forma a se obter um fluxo de informações, no qual a primeira etapa consistiu na introdução e justificativa do tema abordado, apresentando algumas características gerais do concreto reforçado com fibras, passando pelos objetivos traçados durante o desenvolvimento do trabalho, além de apresentar a metodologia aplicada visando obter os resultados pertinentes.

No Capítulo 2, encontram-se o estado da arte sobre o Concreto Reforçado com Fibras (CRF), contemplando propriedades do compósito e sua caracterização. Apresenta-se nesse capítulo conceitos importantes sobre o material, atrelado aos embasamentos teóricos obtidos pela revisão bibliográfica realizada: as propriedades mecânicas das fibras e do CRF, o comportamento do material quando solicitado a tensões de tração, compressão e a flexão e especificações normativas para o compósito.

O Capítulo 3 trata de alguns métodos de dimensionamentos disponíveis na literatura. O conhecimento de como as fibras atuam na capacidade resistente do elemento estrutural e diferentes abordagens é essencial para o correto dimensionamento. Três procedimentos normativos foram descritos, sendo o método da ACI 544-4R-88 como exemplificação e o Modelo Código da *fib* (2012) como embasamento para a norma nacional utilizada nesta pesquisa, a ABNT NBR 16935 (2021). Procurou-se descrever todos os passos necessários para os cálculos de elementos lineares analisados no Estado Limite Último (ELU).

Os resultados e as discussões são apresentados no Capítulo 4, em que há a apresentação do banco de dados obtido, tanto pela extração de dados da literatura, quanto os cálculos realizados e atribuição de parâmetros necessários para aplicação dos procedimentos normativos e os valores obtidos de acordo com os objetivos expostos.

Por fim, no Capítulo 5 é apresentada a conclusão obtida ao longo da elaboração deste trabalho e todas as ressalvas encontradas.

2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

Sabe-se que o Concreto Reforçado com Fibras (CRF) vem sendo crescentemente utilizado em diversas situações na construção civil, principalmente em pavimentos, pisos, revestimento de túneis, obras de saneamento e elementos pré-fabricados em geral (BELLETTI et al., 2008; BURATTI; MAZZOTTI; SAVOIA, 2011; FIGUEIREDO, 2005).

A introdução de fibras aleatórias ao concreto causa modificações relacionadas no comportamento do concreto tanto no estado fresco, como no endurecido. No estado fresco, por exemplo, há a redução da trabalhabilidade (MEHTA; MONTEIRO, 2014). Já no estado endurecido observa-se principalmente alteração no comportamento pós-fissuração que passa a apresentar maior capacidade de deformação. Vale salientar que as fibras atuam desde as primeiras idades do concreto, como por exemplo, no processo de cura que também é afetado pela ação das fibras que causam um efeito de confinamento da pasta, reduzindo o aparecimento de microfissuras prematuras advindas da retração do concreto.

No contexto da utilização do CRF como um material constituinte de um elemento estrutural, é imprescindível o desenvolvimento de métodos e modelos que descrevem o comportamento do concreto com reforço das fibras. Para embasar esses modelos analíticos, pesquisas experimentais vem sendo desenvolvidas ao longos dos anos, as quais contemplam, por exemplo, ensaios laboratoriais de compressão uniaxial, ensaios de tração direta e compressão diametral, ensaios de flexão e de cisalhamento, como forma de caracterização do comportamento do material, e assim, possibilitando a formulação de modelos que estimam a resposta mecânica utilizando diversas teorias e estratégias.

Comitês ao redor do mundo vem discutindo e estudando estratégias para a consolidação de procedimentos para dimensionamentos e utilização desses materiais (JANSSON; GYLLTOFT, 2008). As características fornecidas pela adição das fibras podem ser inseridas nos métodos de dimensionamentos, pois como mencionado, já se sabe que as fibras contribuem nas propriedades mecânicas e atuam no desempenho estrutural do concreto. No Brasil, a norma que trata sobre os procedimentos de projeto para utilização do CRF como material estrutural e aplicações estruturais, ABNT NBR 16935 (2021), foi publicada recentemente e, portanto, ainda é precário estudos que tenham ela como objetivo de pesquisa.

Outro tema de pesquisa é a substituição total ou parcial da armadura de flexão pelas fibras de aço. Lopes (2005) realizou ensaios de flexão com vigas em concreto reforçado com fibras de aço com a redução de 50% da armadura longitudinal, apresentando mais rigidez

em regime elástico, indicando melhor desempenho no estado de serviço. Concluiu-se que é possível obter um elemento estrutural com menor taxa de armadura à flexão, em contrapartida, os custos da produção de uma viga com fibras, mesmo com a redução da armadura, podem ser superiores. Os elementos de CRF podem ter vantagens como: maior durabilidade, menor custo de manutenção e menor tempo de execução.

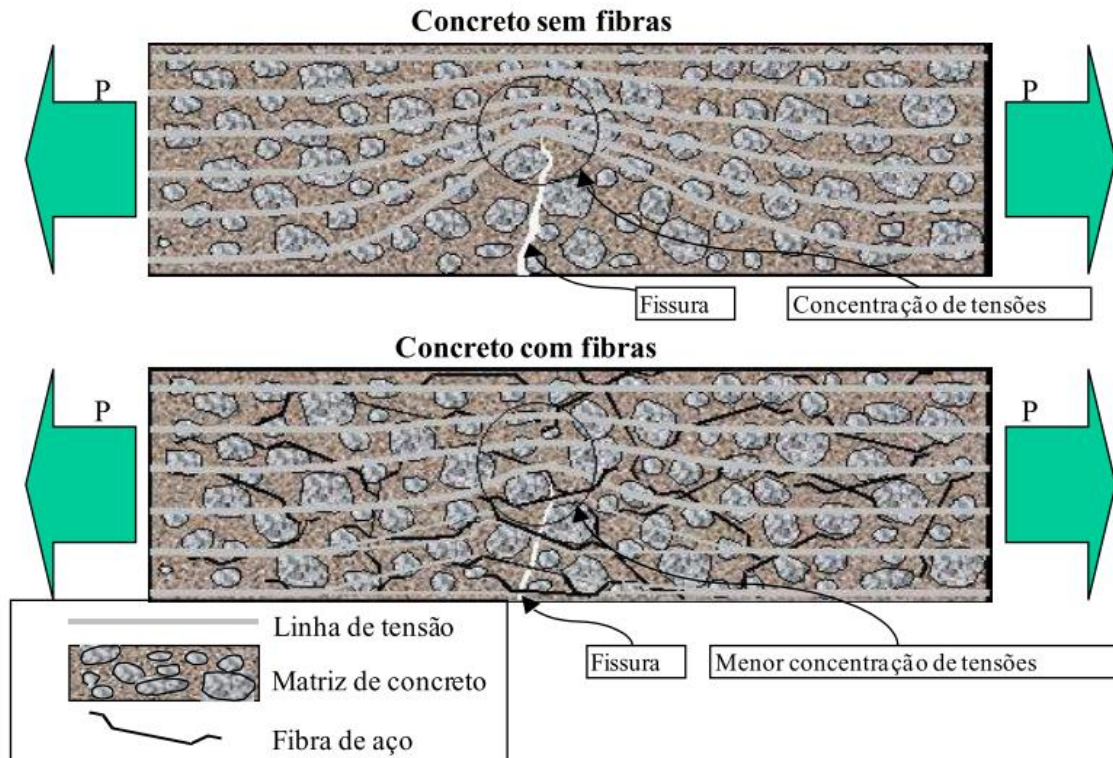
Por outro lado, a utilização de fibras em elementos cujas armaduras longitudinais apresentam-se com taxas mínimas, há um aumento de resistência quando comparados aos exemplares sem fibras, porém tem-se uma diminuição da ductilidade do material (RODRIGUES JÚNIOR, 2009). De acordo com alguns pesquisadores, esse fato pode ser explicado devido ao efeito de confinamento das fibras de aço, ocasionando um aumento da aderência entre o aço e o concreto, fator redutor da ductilidade. Portanto, com a utilização das fibras, os cálculos das taxas de armaduras convencionais mínimas e máximas precisam, também, levar em consideração a ação das fibras e a alteração de comportamento do material.

2.1 Interação Fibra-Matriz

A danificação no concreto é caracterizada pelo o aparecimento de fissuras ao longo da seção transversal do material. Este comportamento está atrelado a todos os tipos de carregamentos que o material é submetido. Com o aparecimento de uma fissura, há a interrupção da propagação de tensão no interior da matriz cimentícia que é desviada para a seção não fissurada do material. Com esse desvio, é possível que ocorra uma concentração de tensão na extremidade da fissura e caso esta tensão supere a tensão máxima resistida pela matriz, ocorrerá a ruptura do material.

Com a adequada utilização das fibras na etapa de dosagem no concreto, elas ficam dispersas aleatoriamente na matriz. Conforme ocorre o aparecimento das fissuras ao longo do elemento, as fibras poderão atuar no cruzamento da abertura da fissura. Assim, as tensões conseguem ser transferidas pelas fibras e o acúmulo de tensões é suavizado, caracterizando uma diminuição da característica frágil do concreto simples. A Figura 1 apresenta o comportamento do concreto simples e do concreto reforçado com fibras, na qual as linhas representam a trajetória de tensões no elemento.

Figura 1 - Esquema das linhas de tensões para o concreto simples (a) e com adição de fibras (b).



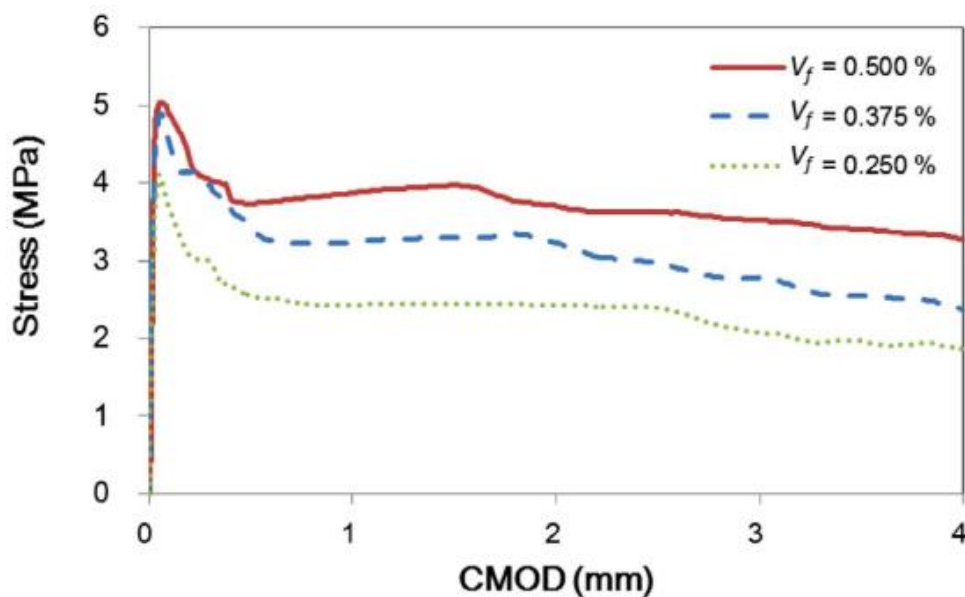
Fonte: Figueiredo (2005)

Uma das vantagens da utilização das fibras ao ser comparadas com as armaduras longitudinais é a sua distribuição aleatória na matriz, reforçando toda a peça, o que se torna interessante na utilização de elementos contínuo, como é o caso dos pavimentos. Porém, isto não exclui a utilização das barras convencionais em situações que a peça tem tensões de tração localizadas, conseqüentemente, havendo a necessidade do reforço em uma posição específica, como por exemplo, para resistir tensões de tração na parte inferior de elementos lineares sob flexão (FIGUEIREDO, 2005; LOPES, 2005; RODRIGUES JÚNIOR, 2009), por outro lado, em alguns tipos de elementos (revestimento de túneis, por exemplo), as barras podem ser facilmente substituídas pelas fibras. Vale salientar que apesar das fibras, geralmente, não substituírem totalmente as armaduras em elementos lineares, como vigas, elas podem trabalhar em conjunto com as barras e algumas vezes reduzir a área de aço necessária, como será visto nos capítulos seguintes.

O comportamento do concreto reforçado com fibras é função da interação fibra-matriz. Essa interação depende de vários fatores geométricos e de volume das fibras, ancoragem, módulo de elasticidade e resistência do aço e do concreto, orientação das fibras, composição das matérias-primas do concreto, etc.

O volume de fibras é um dos principais parâmetros para a utilização do reforço por fibras. Quando maior for o teor das fibras utilizadas na mistura, maior será a capacidade de reforço apresentada, pois, com um aumento na quantidade de elementos, maior será o número de fibras atuando como ponte de transferência de tensões e assim, aumentando a capacidade resistente pós-fissuração (DHAKAL; WANG; MANDER, 2005; LEE, 2017). De acordo com a Figura 2, o aumento do teor de fibras não ocasiona alterações significativas no trecho ascendente da curva de ensaio de tração na flexão, por outro lado, o comportamento pós-pico de tensão depende diretamente da quantidade de fibras utilizadas, isto é, quando maior o teor de fibras, maior será a resistência residual advinda das fibras.

Figura 2 - Curvas Tensão-CMOD obtidas para CRFA de $f_{ck} = 35\text{MPa}$ e com diferentes consumos de fibra de aço.

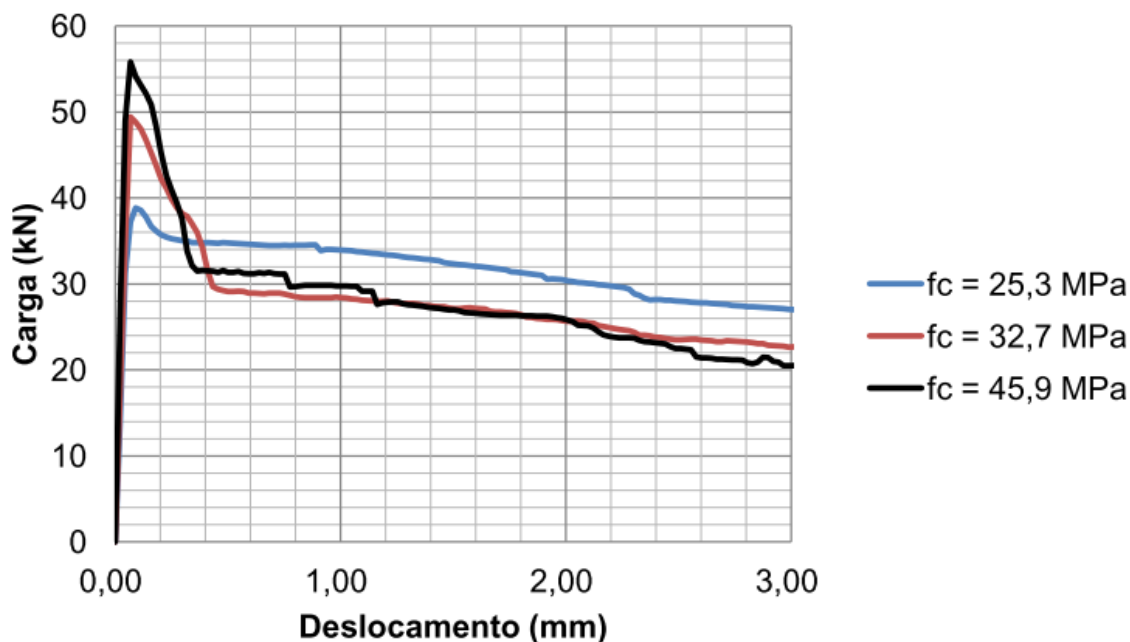


Fonte: LEE (2017)

No momento da fissuração, parte da tensão resistida pela matriz passa para as fibras que começam a atuar no processo de controle da abertura e propagação de fissuras. Como consequência, com um alto teor de fibras ocorrerá uma menor probabilidade de ruptura, isto é, analisando a quantidade de carga por cada fibra, em um mesmo nível de tensão, quanto mais fibras atuam na fissura, menor é a tensão resistida por cada uma. Além disso, quanto maior a resistência à tração das fibras, maior será a capacidade resistente pós-fissuração, apresentando maior resistência residual. (FIGUEIREDO, 2005; LEE, 2017).

A Figura 3 apresenta uma comparação do comportamento da matriz de concreto de diferentes resistências e com o mesmo tipo e volume de fibras. Observa-se que com o aumento da resistência do concreto, tem-se uma diminuição do desempenho das fibras, demonstrando que para um mesmo deslocamento, a medida que a resistência do concreto aumenta, é menor a carga resistida na pós-fissuração. Isso significa que para um mesmo teor de fibras, conforme a resistência da matriz aumenta, o valor da tensão transferida para as fibras na pós-fissuração também é incrementado, ocasionando uma maior propensão de ruptura, e conseqüentemente, uma capacidade resistente menor (FIGUEIREDO, 2005; FIGUEIREDO; NUNES; TANESI, 2000).

Figura 3 - Curvas de carga por deslocamento de concretos com diferentes níveis de resistência da matriz reforçados com 50 kg/m^3 de fibra de aço do tipo AII.

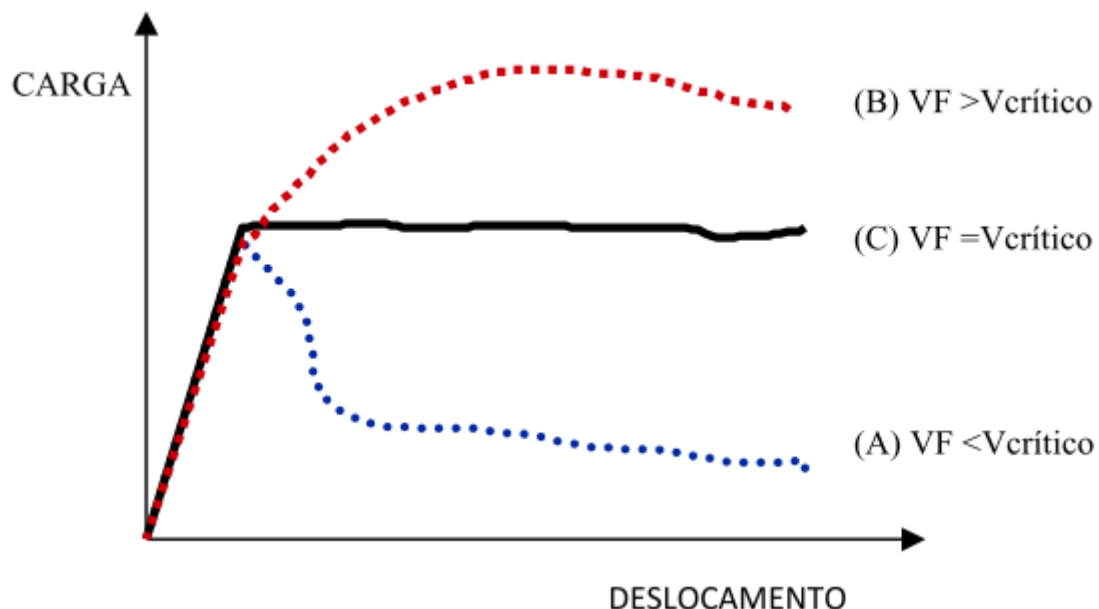


Fonte: FIGUEIREDO, NUNES E TANESI (2000)

Destaca-se, portanto, que as respostas obtidas na pós-fissuração depende do volume e tipo de fibras e da resistência da matriz, ou seja, com a utilização de fibras com maior valor de resistência à tração, é possível obter um melhoramento na capacidade resistente dos prismas ensaiados aumentando da resistência da matriz, sendo possível aplicar maiores solicitações aos concreto, pois é necessário um maior valor de tensão para atingir o valor da tensão de escoamento ou de ruptura das fibras. E quanto maior o volume das fibras, menor é a tensão resistida por cada uma, fornecendo um maior ganho de resistência residual.

Considerando as influências que o teor de fibras exerce na interação fibra-matriz, tem-se então o conceito do volume crítico que corresponde a quantidade de fibras que mantém a mesma capacidade resistente da matriz, em outras palavras, o CRF apresenta um comportamento similar ao elastoplástico perfeito. Ou seja, tendo um teor de fibras abaixo do volume crítico, caracteriza-se um comportamento de amolecimento (*softening*), do mesmo modo, tendo um teor de fibras maior que o volume crítico, caracteriza-se um comportamento de endurecimento (*hardening*). A Figura 4 apresenta um esquema ilustrando as curvas características de um ensaio de tração na flexão.

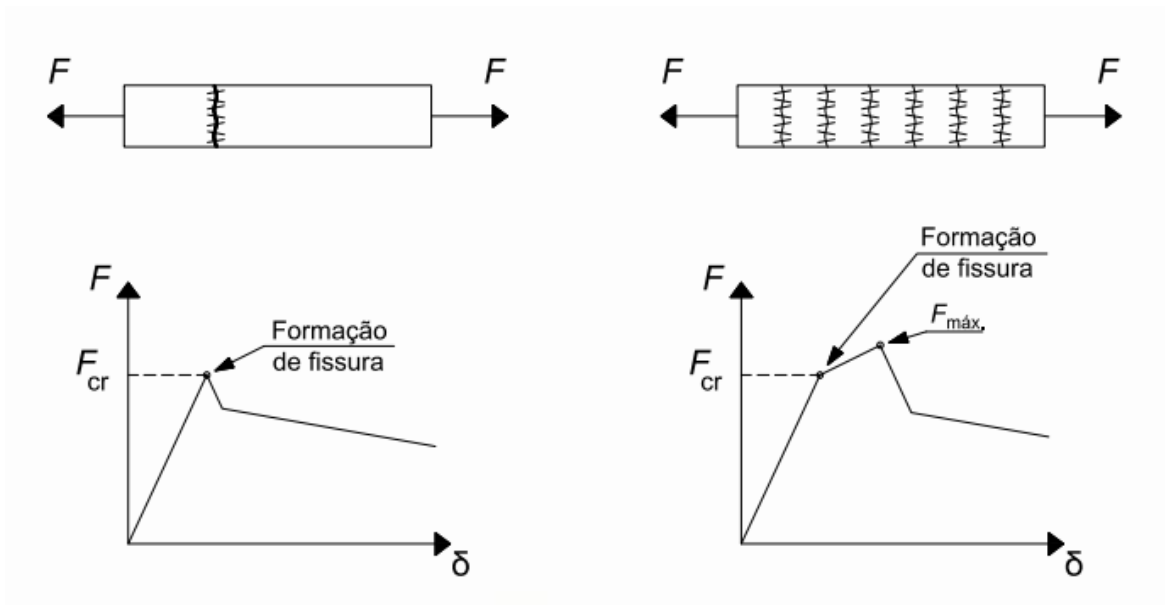
Figura 4 - Ilustração do comportamento do CRF com volume de fibras abaixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico em um ensaio de tração na flexão.



Fonte: Figueiredo (2000)

O comportamento de amolecimento ou *softening* pós-fissuração é dado com a diminuição da resistência após o aparecimento da primeira fissura, ou seja, a resistência pós-fissuração do material é inferior à resistência da matriz, apresentando uma evolução da abertura da fissura existente (Figura 5a). Em contra partida, o comportamento de endurecimento ou *hardening*, apresenta uma resistência residual superior à da matriz, ocasionado um processo de múltipla fissuração no material (Figura 5b).

Figura 5 – Comportamento de *Softening* (a) e *Hardening* (b) do CRF em tensão axial.



Fonte: ABNT NBR 16935 (2021)

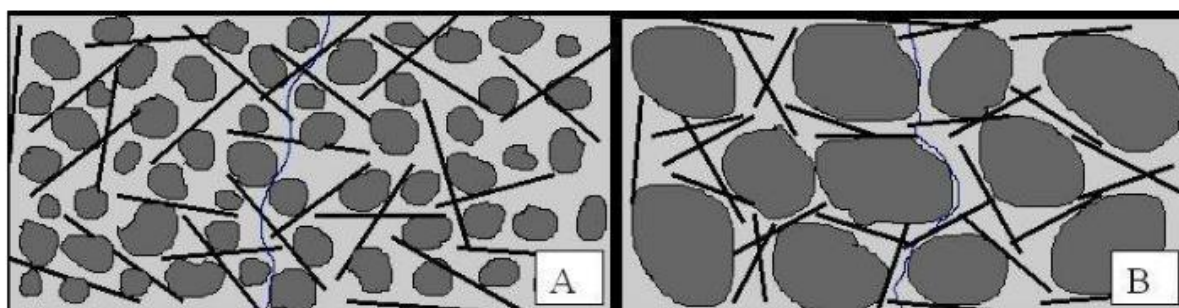
Além do teor de fibras, uma característica importante no desempenho do compósito é o fator de forma (ou razão de aspecto – λ_f). Esse parâmetro utiliza características geométricas das fibras e é obtido pela razão entre o comprimento das fibras (ℓ_f) e seu diâmetro (d_f), apresentado na Equação (1). Geralmente, quanto maior λ_f , maior será a capacidade resistente pós-fissuração.

$$\lambda_f = \frac{\ell_f}{d_f} \quad (1)$$

É importante notar que pela Equação (1), aumentando o comprimento da fibra ou reduzindo seu diâmetro, tem-se o aumento do fator de forma que ocasionaria um aumento na resistência pós-pico do CRF. Nesta etapa, é introduzido o conceito do comprimento crítico da fibra (ℓ_c), definição baseada no modelo que prevê um aumento linear da tensão entre a matriz e a fibra. Esta tensão se inicia nas extremidades da fibra e tem seu valor de pico no centro. Portanto, o ℓ_c é apresentado como aquele que apresenta a tensão no seu centro igual a tensão de ruptura. Ou seja, quando o comprimento das fibras é menor que o comprimento crítico, a carga de arrancamento proporcionada pelo embutimento na matriz não é suficiente para promover a ruptura das fibras, aumentando a deformação apresentada por ela e assim, atuando como ponte de transferência de tensões. De tal modo, quanto maior a resistência à tração da fibra, maior será a resistência residual que ela pode proporcionar ao CRF.

Como visto, o comprimento da fibra é uma característica que precisa de atenção na hora da escolha de qual fibra utilizar. Recomenda-se que a fibra possua duas vezes ou mais a dimensão máxima do agregado (FIGUEIREDO, 2005). A compatibilidade de dimensões possibilita que as fibras atuem como ponte de transferência de tensão, conforme apresenta a Figura 6. Outro aspecto importante, é a utilização de fibras que possuem capacidade de deformações plásticas, de modo a se alinhem na direção dos esforços principais e não acabe rompendo por cisalhamento.

Figura 6 – Concreto com reforço de fibras com compatibilidade de dimensões (a) e sem compatibilidade de dimensões (b).



Fonte: Figueiredo (2005)

Sabendo dos benefícios trazidos pela adição das fibras de aço na matriz cimentícia do concreto, tem-se a necessidade do aprofundamento dos estudos sobre como as fibras interferem no comportamento mecânico de elementos estruturais. Diversos estudos foram realizados para a caracterização do comportamento do concreto reforçado com fibras e a eficiência da utilização das fibras, tais como: Aslani e Nejadi (2013), Figueiredo (2005), Lopes (2005), Mansur, Chin e Wee (1999), Oh (1992).

Alguns trabalhos reportados na literatura tinham como objetivo a análise da eficiência das fibras de acordo com sua geometria, resistência e volume. Realizando padrões de análise distintas, como: mesmo tipo e geometria de fibras e diferentes volumes, fibras com fator de forma semelhante e com resistências diferentes e fibras diferentes com características distintas. Os resultados apontam para uma conclusão em comum de que a resistência e o volume de fibras influenciam diretamente na capacidade da resistente residual do CRF. (FIGUEIREDO, 1997; ARAKAKI; FIGUEIREDO, 2000; CHAMA NETO; FIGUEIREDO, 2003)

Bentur e Mindess (1983) investigaram os efeitos da combinação das fibras de aço com o reforço de barras convencionais quando solicitados a ensaios de flexão de 3 pontos sob carregamento estático. Observou-se que a utilização de apenas 1 tipo de reforço (convencional ou fibras de aço) leva a comportamentos semelhantes ao outro, sendo que, em um volume equivalente, a eficiência das barras de armadura convencional é maior do que a eficiência das fibras. Contudo, os resultados dos testes realizados com a adição dos dois tipos de reforço, mostraram um ganho de até 55% na resistência e um aumento na rigidez do elemento.

Oh (1992) realizou ensaios para explorar o comportamento de vigas reforçadas com fibras de aço. Os resultados demonstram melhoria devido à adição das fibras na matriz cimentícia do concreto observando-se que aumentando o volume de fibras, tem-se um aumento da resistência a compressão, resistência à flexão, ductilidade e absorção de energia.

Ambos os estudos analisaram, também, o processo de fissuração do material. A configuração das aberturas de fissuras comporta-se de maneira distinta quando comparados à elementos convencionais, concluindo que as fibras controlam a propagação de formação de fissuras, tendo uma melhor distribuição de tensões na matriz, caracterizando o processo de ductilidade no material.

2.2 Aplicação do CRF em elementos estruturais

O CRF já vem sendo empregado em elementos como pisos e pavimentos industriais, entretanto, conforme apontado por Figueiredo (2014), observa-se a crescente potencialização do uso do CRF e a aplicação deste material em elementos estruturais, independentemente do tipo de fibras. A busca do consenso e de embasamento técnico científico está direcionada ao Modelo Código da *fib* (2012) para a aplicação do CRF como um material estrutural com a utilização de diferentes tipos de fibras. Assim, tem-se a possibilidade de aplicação do compósito no meio técnico com maior grau de conhecimento. Da mesma forma, no Brasil, é possível encontrar práticas recomendadas para projeto de estruturas de CRF publicada pelo IBRACON (2016) e, recentemente publicada, a ABNT NBR 16935 (2021).

Dessa maneira, ressalta-se a importância, primeiramente, de um controle de qualidade rígido e eficaz que garanta as condições mínimas de projetos atendidas. Ainda de acordo com Figueiredo (2014), os programas de controle de qualidade tornam-se a base de

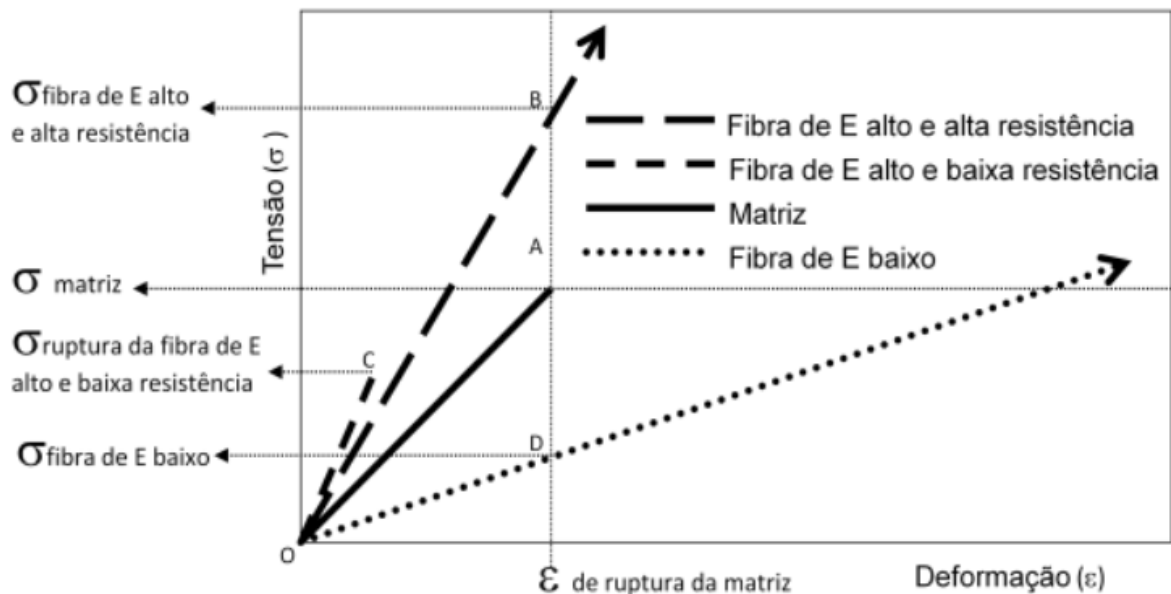
todo o processo de utilização do material. Porém, no Brasil, ainda há um caminho a ser percorrido neste quesito, visto que há a necessidade da disseminação dos conhecimentos técnicos que possam ser adotados ao utilizar o CRF, além da capacitação técnica para a execução de serviços de qualidade que empregam o compósito.

Portanto, a disseminação de procedimentos normativos é um ponto chave quando se prioriza o uso do compósito de maneira adequada. Com a divulgação das normas que tratam do CRF com o material constituinte de um elemento estrutural e as demais que fornecem ensaios de caracterização e classificação, é possível obter um cenário próspero na construção civil e no uso de materiais modernos e com comportamentos melhorados.

O desempenho na capacidade de reforço que a fibra proporciona ao concreto depende, principalmente, do módulo de elasticidade e resistência mecânica da fibra (FIGUEIREDO, 2005). As fibras podem ser denominadas de acordo com seu diâmetro: microfibras para diâmetros menores que 0,30 mm e macrofibras para diâmetros maiores que 0,30 mm. Usualmente, as microfibras são utilizadas principalmente para o controle de fissuração desde as primeiras idades do concreto e para o combate ao incêndio, em que as fibras atuam contra o efeito do lascamento. As macrofibras, por sua vez, são aplicadas como reforço para fornecerem desempenho estrutural, ou seja, aumentando capacidade de absorção de energia e deformação.

A Figura 7 exemplifica uma matriz hipotética reforçada com três tipos de fibras: uma de baixo módulo de elasticidade e duas de alto módulo, sendo uma de baixa e outra de alta resistência mecânica. No momento em que o compósito é submetido a tensões de tração, a deformabilidade dos diferentes materiais ocorre de maneira distinta.

Figura 7 – Exemplificação do comportamento da matriz e das fibras de alto e baixo módulo de elasticidade.



Fonte: Figueiredo (2005)

Como pode ser observado na Figura 7, quando a matriz atinge sua tensão de ruptura, a fibra de baixo módulo apresenta uma tensão menor para o mesmo nível de deformação, podendo ocasionar uma ruptura da fibra, conseqüentemente, não podendo colaborar na resistência do compósito. Em caso de atingirem altas tensões podem apresentar uma elevada deformação, refletindo na abertura da fissura, tendo, também, uma baixa capacidade de reforço. Para contornar as duas situações anteriores, é recomendado a utilização de teores de fibras elevados, gerando conseqüências quanto aos custos e trabalhabilidade (FIGUEIREDO, 2005).

Fibras com elevado módulo de elasticidades e baixa resistência, por sua vez, apresentam capacidade de reforço também reduzidas, pois não apresentam capacidade de deformação, resultando em um comportamento frágil. A melhor utilização, portanto, se mostra com fibras de alto módulo e alta resistência, visto que, mesmo utilizadas em baixos volumes, o material apresentará resistências residuais após a fissuração.

A ABNT NBR 15530 (2019) fornece especificações e requisitos para fibras de aço utilizadas como reforço do concreto. Esses elementos devem estar de acordo com pelo menos uma dessas classificações: fabricação, forma, revestimento, teor de carbono e dentro das tolerâncias de comprimento e diâmetro.

A classificação quanto a sua fabricação relaciona o tipo da fibra com suas características geométricas; o grupo das fibras de acordo com o tipo de aço que deu origem e traz formulações para o cálculo do diâmetro equivalente (diâmetro do círculo de área igual à área da seção transversal média de uma fibra). Atenta-se ao fato da classificação trazida pela norma associa o tipo de fibra em função do perfil longitudinal da fibra, desconsiderando o formato da seção transversal, que neste caso, irá depender se a fibra é trefilada ou laminada ((FIGUEIREDO, 2011). Assim, a Tabela 1 apresenta os grupos, tipos e equações para o cálculo do diâmetro equivalente das fibras.

Tabela 1 – Equações para determinação do diâmetro equivalente das fibras de acordo com o Grupo e o Tipo.

Grupo	Tipo	Diâmetro
I	A	$d_e = \frac{d_1 + d_2}{2}$
	C	
	R	
II	A	$d_e = \frac{\sqrt{4 \cdot t \cdot w}}{\pi}$
	C	
	R	
II	C	$d_e = \frac{\sqrt{2 \cdot (3t^3 + 4w^2)}}{3 \cdot w \cdot \pi}$

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 15530 (2019)

Sendo:

d_e = diâmetro equivalente [mm];

d_1 e d_2 = medidas tomadas na região central da fibra em duas direções ortogonais entre si [mm];

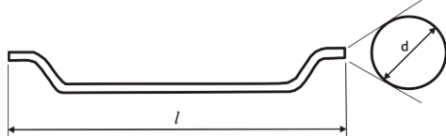
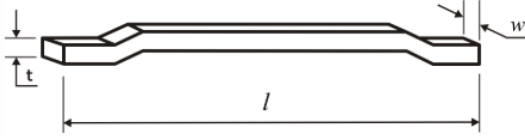
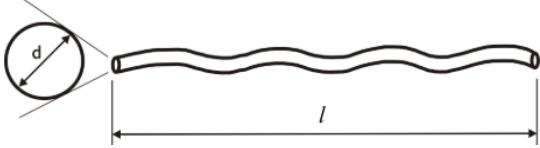
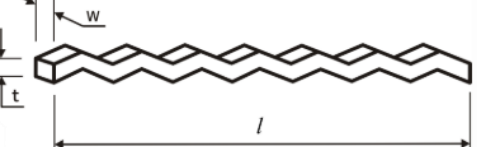
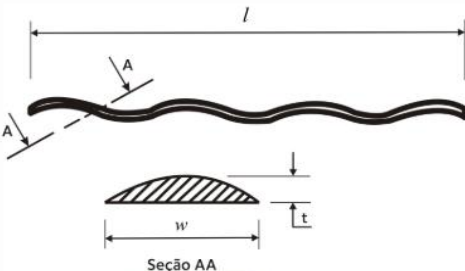
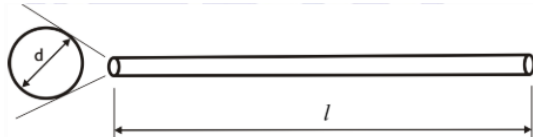
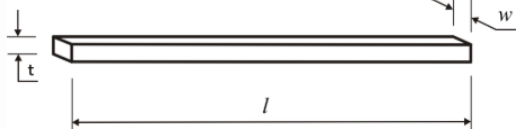
t = espessura da fibra [mm];

w = largura da fibra retangular [mm].

O grupo da fibra é relacionado com o material de base usado para a produção das fibras: Grupo I - arames trefilados a frio; Grupo II - chapas cortadas e Grupo III - arames trefilados a frio e escarificados (shaved). São previstos na norma três tipos básicos de fibras em função de sua conformação geométrica: Tipo A - fibra com ancoragem nas extremidades; Tipo C - fibra com ondulações no corpo (corrugada) e Tipo R - fibra reta sem ancoragens.

Embora não apresentados na Tabela 1, é exposto outros dois grupos (IV e V) para a classificação das fibras, sendo o Grupo IV de fibras produzidas por fusão e o Grupo V usinadas a partir de blocos de aço. A Tabela 2 relaciona a geometria das fibras com sua classificação.

Tabela 2 - Geometria das fibras de acordo com sua classificação.

Tipo	Grupo	Geometria
A	I	
	II	
B	I	
	II	
	III	
C	I	
	II	

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 15530 (2019)

3 MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

Como visto anteriormente, a contribuição das fibras nos elementos estruturais de concreto pode ser levada em consideração, pois a adição de fibras permite que a resistência à tração seja considerada nos procedimentos de dimensionamento.

No dimensionamento de elementos estruturais de concreto armado, há a convenção de que as barras de aços são as únicas responsáveis por resistir às tensões de tração, negligenciando-se a resistência à tração da matriz cimentícia. No entanto, diferentemente do concreto simples, as fibras de aço podem servir de reforço na região tracionada controlando a abertura e propagação de fissuras. Essa contribuição pode ser levada em consideração no dimensionamento dos elementos estruturais de concreto reforçado com fibras em conjunto com armadura ou sem nenhum tipo de armadura.

Quando estudados os efeitos ocasionados pela adição das fibras, tem-se que eles são mais atuantes quando os elementos são solicitados a flexão. Esse fenômeno ocorre, pois com o aumento da deformação de tração devido à presença das fibras, há o deslocamento da linha neutra em direção a seção comprimida e assim, incrementando o momento resistente. (LOPES, 2005). De acordo com Oh (1992), o cálculo da resistência à flexão de materiais compósitos com a adição de fibras pode ser descrita como a soma da resistência da matriz e da resistência da fibra, como apresentados na Equação (2).

$$\sigma_{ct} = \sigma_{mt}\rho_m + \sigma_f\rho_f \quad (2)$$

Sendo:

σ_{ct} = resistência a flexão do concreto reforçado com fibras;

σ_{mt} = resistência a flexão da matriz do concreto;

σ_f = resistência das fibras;

ρ_m = razão de volume da matriz do concreto (= 1 - ρ_f);

ρ_f = razão de volume das fibras.

Com a consideração de uma parcela da resistência proveniente das fibras de aço, tem-se a importância de parâmetros que podem influenciar na resistência final do material, sendo elas: orientação e comprimentos das fibras, espaçamento entre elas, a capacidade de fixação da fibra à matriz (aderência fibra-matriz) e a resistência da fibra. Nota-se que a Equação (2) apresenta-se como um modo empírico da introdução da capacidade resistente das fibras.

De acordo com Jansson e Gylltoft (2008), o desenvolvimento de métodos técnicos e modelos que preveem o comportamento de elementos estruturais com reforço de fibras pode ser divididos em duas abordagens: a obtenção das propriedades do material pela realização de testes laboratoriais ou a estimativa das propriedades do material por uma base teórica. Essas abordagens podem considerar as características físicas da fibra, conceitos de não linearidade, entre outros. Ainda neste contexto, os autores indicam que os ensaios de flexão são os mais comumente utilizados para a obtenção das informações necessárias para auxiliar na elaboração dos procedimentos de cálculo. Porém, deve-se ter em mente que os modelos normalmente utilizam a resistência à tração do CRF, portanto, há a necessidade de traduzir os resultados de flexão obtidos dos ensaios.

Jansson e Gylltoft (2008) fizeram uma revisão de alguns métodos de cálculos para elementos estruturais constituídos de concreto reforçado com fibras. Neste estudo, os principais assuntos expostos e analisados foram o controle de fissuração e a resistência residual do CRF. Basicamente, dentre os procedimentos analisados pelos autores, há duas alternativas a serem aplicadas para obtenção das propriedades dos materiais para o dimensionamento de elementos de CRF: modelos que utilizam a curva tensão-deformação (σ - ϵ) ou a utilização da curva tensão-abertura de fissuras (σ - w). Em que no primeiro, os ensaios convergem na obtenção da relação tensão-deflexão ou tensão-CMOD (medida linear da abertura do entalhe na face inferior do corpo de prova) para encontrar as resistências residuais à tração na flexão e, posteriormente, traduzidas para resistência de tração direta; enquanto no segundo, são utilizados os valores de abertura de fissuras obtidos de ensaios de flexão e aplicado diretamente em abordagens desenvolvidas utilizando como base a mecânica da fratura.

Tendo isso em mente, conclui-se que alguns métodos demonstram ter similaridades entre si, incluindo a dificuldade em converter os parâmetros dos ensaios de flexão em parâmetros de tração. Entretanto, um dos procedimentos se apresenta mais avançado com a introdução de um parâmetro “comprimento característico” que considera o padrão de fissuração pelo espaçamento médio entre fissuras, como descrito em Di Prisco, Comlobo e Dozio (2013).

Buttignol *et al.* (2018) realizaram a verificação de vigas de concreto reforçado com fibras submetidas à flexão. Neste trabalho, os autores empregaram concretos com teores de fibra de aço na ordem de 20 e 60 kg/m³. Realizaram ensaios de flexão de 3 pontos com entalhe de acordo com as recomendações do Modelo Código da *fib* (2012) para a classificação

e caracterização do material e a verificação da capacidade resistente à flexão de vigas no ELU utilizando os procedimentos de cálculo do Modelo Código da *fib* (2012). Os resultados obtidos se mostraram dentro dos parâmetros recomendado e, portanto, a favor da segurança.

Lee (2017) analisou a resistência à tração na flexão e a influência que diferentes volumes de fibras ocasionam na resistência do material. Foram avaliadas três resistências de concreto (25, 35 e 45 MPa) e três volumes de fibras (0,25, 0,375 e 0,50%). Observou-se que o valor de resistência à tração na flexão do CRF (limite de proporcionalidade) é maior à medida que o volume de fibras aumenta, podendo haver um incremento no valor do pico de fissuração, retardando o processo de formação de fissuras, ou seja, quanto maior o volume de fibras, maior a tensão residual.

3.1 Modelo código da *fib* (2012)

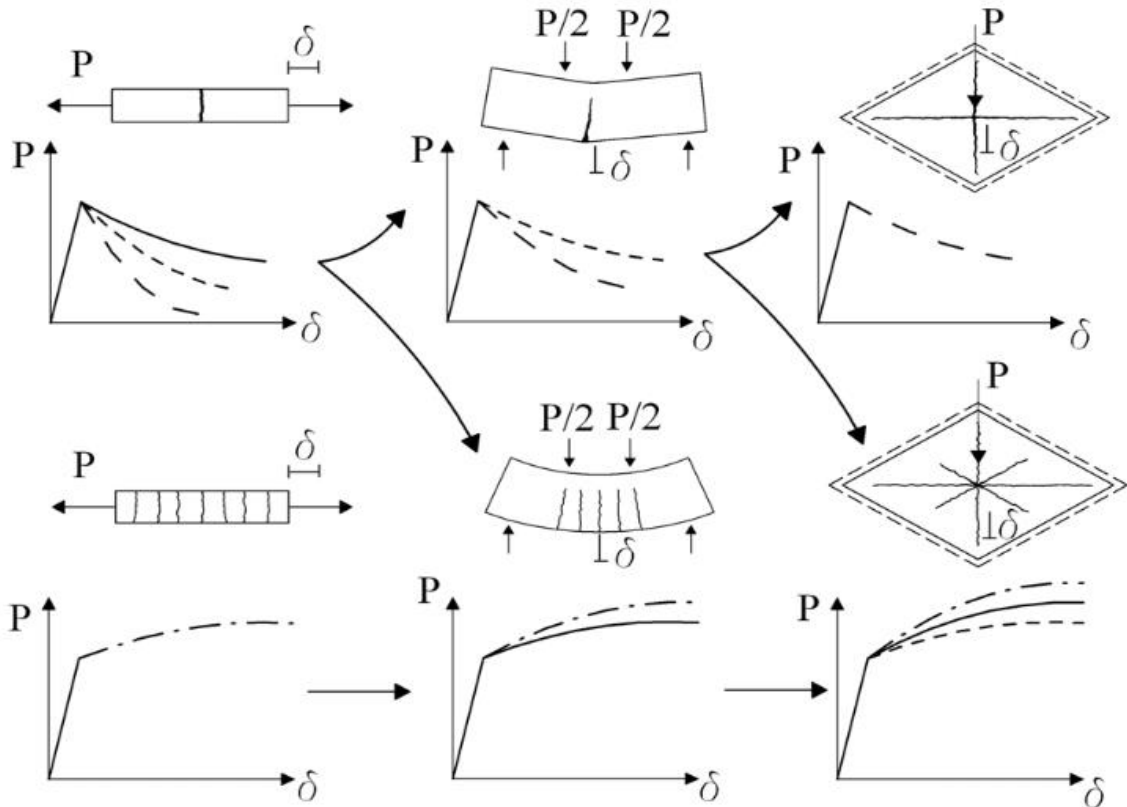
Como visto nos tópicos anteriores, a primeira dificuldade na utilização do CRF em termos estruturais no Brasil é a falta de disseminação dos procedimentos de dimensionamento da norma brasileira publicada recentemente. Em âmbito internacional tem-se o Modelo Código da *fib* (2012) que traz contribuições sobre o conhecimento acerca do CRF e práticas recomendadas para a utilização do compósito estruturalmente, independentemente do tipo de fibra que é utilizado.

A concepção do Modelo Código da *fib* (2012) gira em torno de dois modelos de comportamentos apresentados em função da capacidade de reforço pós-fissuração (*hardening* e *softening*). Ressalta-se que os ensaios de tração direta do CRF estariam a favor da segurança e mais próximos a valores reais, porém esses ensaios apresentam uma alta complexidade de execução que pode comprometer todo o processo. Logo, o Modelo Código da *fib* (2012) adota os ensaios de flexão em prismas como método de caracterizar o comportamento do CRF, sabendo que as respostas de ensaios a flexão podem apresentar diferentes respostas dos ensaios de tensão axial (DI PRISCO; COLOMBO; DOZIO, 2013).

Essas diferenças nas respostas são apresentadas na Figura 8, no qual é esquematizado o comportamento pós-fissuração que podem ser obtidos nos ensaios de tração axial e de flexão. Observa-se que, mesmo o material apresentando um comportamento de amolecimento nos ensaios uniaxiais, o mesmo material pode apresentar um comportamento de endurecimento nos ensaios de flexão, pois, em ensaios de flexão, as fissuras podem surgir

antes do pico de tensão, ocasionando um processo de propagação de fissuras com o aumento da carga (*hardening*).

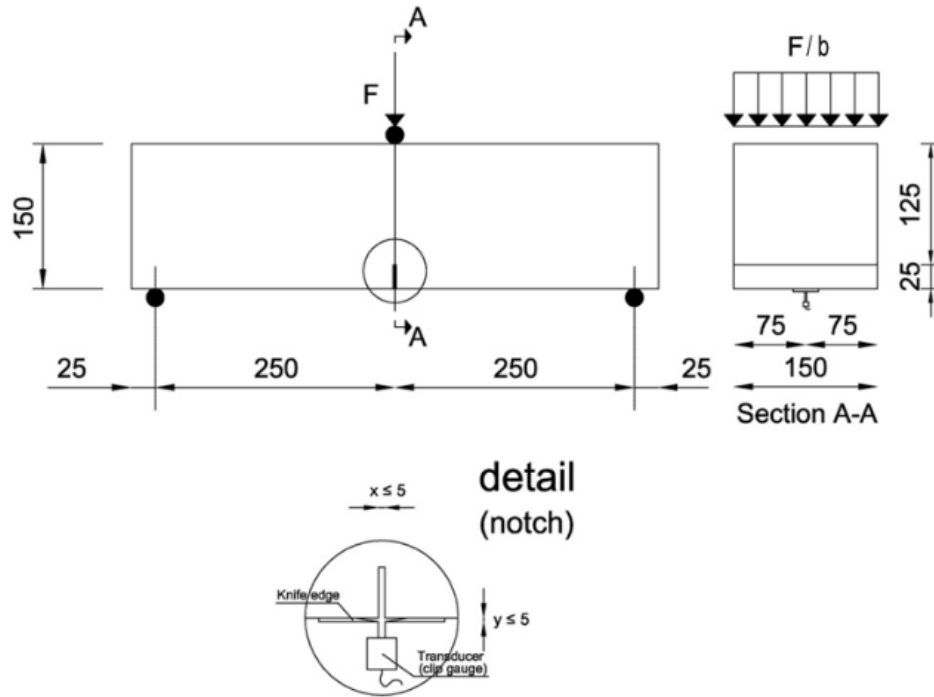
Figura 8 - Respostas do CRF para ensaios de tensão axial e de flexão.



Fonte: Modelo Código da *fib* (2012)

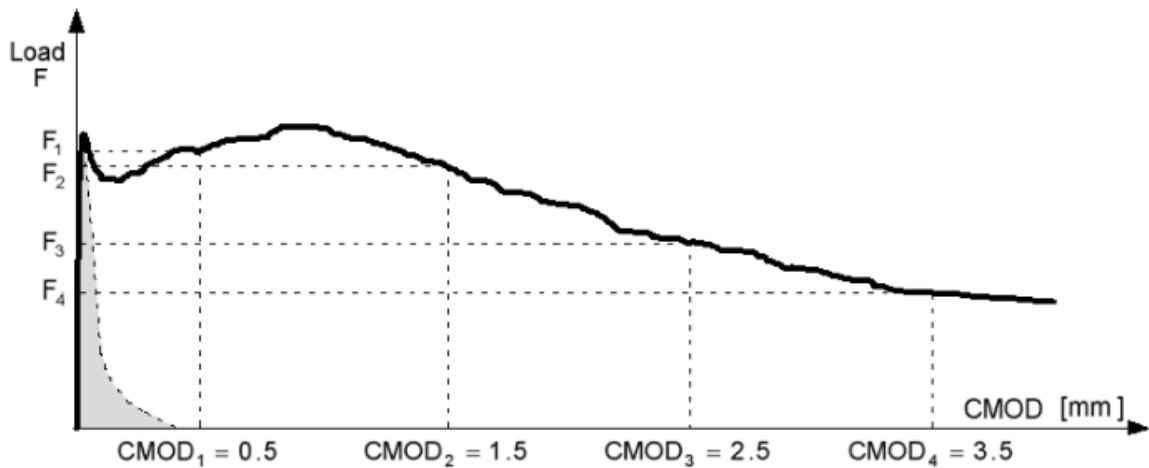
Dentre os diferentes ensaios de flexão, o Modelo Código da *fib* (2012) optou pelo método europeu EN14651 (2007) que apresenta grandes vantagens e possibilita a avaliação da resistência residual para diferentes níveis de fissuração (FIGUEIREDO, 2014). Nesse método é realizado ensaios de flexão de 3 pontos utilizando prismas com entalhe inferior (Figura 9). Esse ensaio fornece uma curva de força por deformação que é geralmente expressa pela abertura do entalhe (*Crack Mouth Opening Displacement = CMOD*), como apresentado na Figura 10 e com isso, é possível a obtenção da resistência residual para altos e baixos níveis de abertura de fissuras.

Figura 9 - Esquema do ensaio de flexão pela norma EN14651 (2007).



Fonte: Modelo Código da *fib* (2012)

Figura 10 - Exemplo de curva obtida em um ensaio de flexão.



Fonte: Modelo Código da *fib* (2012)

A partir dos resultados obtidos nos ensaios de flexão, as resistências de tração residual na flexão são definidas de acordo com a Equação (3). Também, é importante realizar a classificação do comportamento pós-fissuração do CRF para a determinação das propriedades mecânicas de modo a garantir maior confiabilidade nas respostas estruturais (BUTTIGNOL *et al.*, 2018). Dessa forma, o Modelo Código da *fib* (2012) assume um

comportamento linear elástico considerando valores que estão associados ao Estado Limite de Serviço (ELS; $CMOD_1 = 0,5 \text{ mm}$; f_{R1k}) e ao Estado Limite Último (ELU; $CMOD_2 = 2,5 \text{ mm}$; f_{R3k}).

Outrossim, a caracterização apresenta-se com a utilização dois parâmetros: a classe de resistência à tração do concreto definida por um valor numérico entre 1 e 8 MPa, obtido a partir do valor característico de f_{R1k} e seguida de uma letra que é obtida a partir da razão f_{R3k}/f_{R1k} apresentada a seguir:

- a se $0.5 \leq f_{R3k}/f_{R1k} \leq 0.7$
- b se $0.7 \leq f_{R3k}/f_{R1k} \leq 0.9$
- c se $0.9 \leq f_{R3k}/f_{R1k} \leq 1.1$
- d se $1.1 \leq f_{R3k}/f_{R1k} \leq 1.3$
- e se $1.3 \leq f_{R3k}/f_{R1k}$

$$f_{R,j} = \frac{3F_j l}{2bh_{sp}^2} \quad (3)$$

Sendo:

$f_{R,j}$ = resistência residual à tração correspondente ao $CMOD_j$ [MPa];

F_j = carregamento correspondente ao $CMOD_j$ [N];

l = vão de ensaio do corpo de prova [mm];

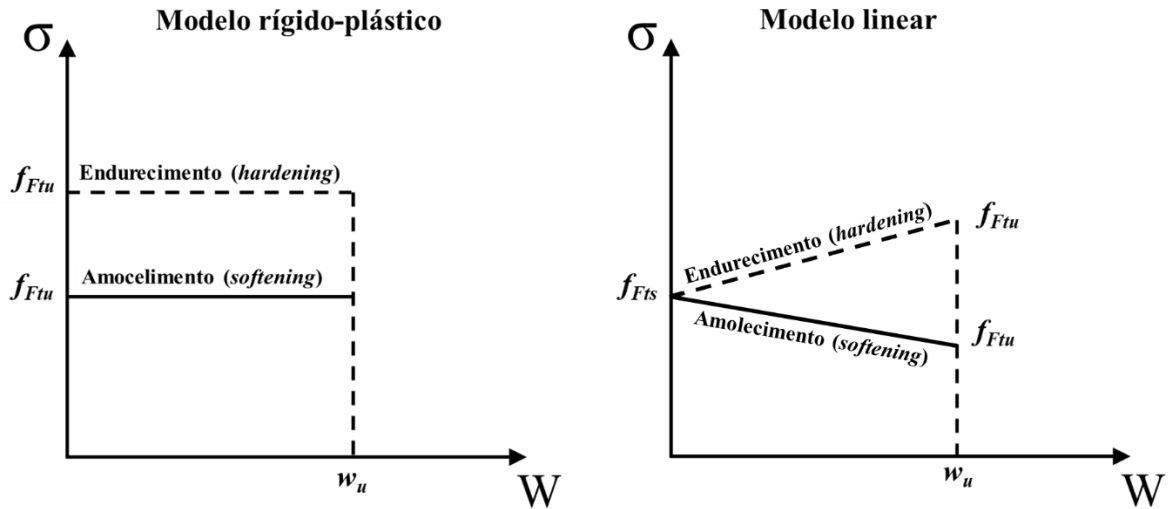
b = largura do corpo de prova [mm];

h_{sp} = distância entre a ponta do entalhe e a face superior do corpo de prova [mm].

Além disso, é estabelecida a relação mínima $f_{R1k}/f_{Rk} \geq 0,4$ que garante uma parcela de ductilidade ao material. Já a substituição, mesmo que parcial, das armaduras no Estado Limite Último só é possível se $f_{R3k}/f_{R1k} \geq 0,5$.

Uma referência utilizada para a caracterização do comportamento de tensão uniaxial pós-fissuração do CRF é a relação tensão-CMOD. O Modelo Código da *fib* (2012) utiliza duas teorias para essa classificação: o modelo rígido plástico (Figura 11a) e o modelo linear (Figura 11b). Esses modelos são utilizados para encontrar a resistência residual de serviço (f_{Fts}), definida como a resistência pós-fissuração de uma abertura de fissura significativa para o ELS e o valor de resistência última (f_{Ftu}), sendo ambos calculados usando os valores de f_{R1} e f_{R3} . w_u é o valor da abertura da fissura no ELU.

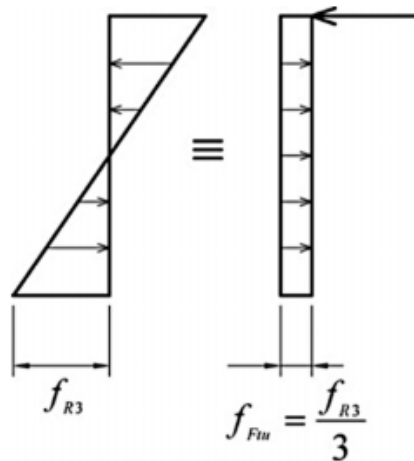
Figura 11 – Modelo construtivo para o comportamento pós-fissuração.



Fonte: Adaptado do Modelo Código da *fib* (2012)

Como pode ser visto na Figura 11a, o modelo rígido plástico considera apenas o valor de f_{Ftu} , utilizando o comportamento de ELU. Deste modo, utiliza-se uma equivalência estática assumindo que há uma força de compressão concentrada no topo da seção (Figura 12), obtendo o equilíbrio de momento fletor, em termos de momento resistente (M_u), da seção como apresentado na Equação (4).

Figura 12 – Esquema utilizado no modelo plástico rígido para obtenção do f_{Ftu} em termos de f_{R3} .

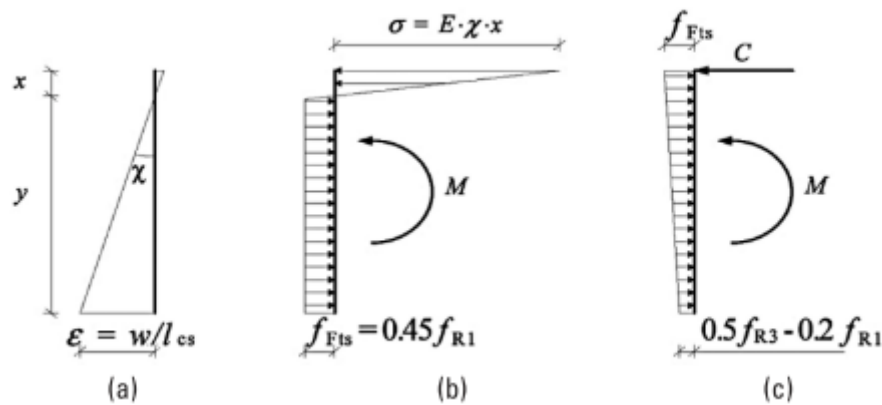


Fonte: Modelo Código da *fib* (2012)

$$M_u = \frac{f_{R3} \cdot b \cdot h_{sp}^2}{6} = \frac{f_{Ftu} \cdot b \cdot h_{sp}^2}{2} \quad (4)$$

Por sua vez, no modelo linear, tem-se a utilização de equações para obtenção dos valores f_{Ftu} e f_{Fts} os quais são definidos pelos valores residuais à tração na flexão e de w_u que é o valor máximo da abertura de fissura definida em projeto que depende da ductilidade assumida. O valor correspondente ao ELS (f_{Fts} ; CDMO₁) é obtido considerando uma distribuição linear elástica de compressão e um comportamento elastoplástico para tração (Figura 14b).

Figura 13 – Esquema do modelo linear para determinação de f_{Fts} (a) e f_{Ftu} (b).



Fonte: Modelo Código da *fib* (2012)

$$f_{Fts} = 0,45f_{R1} \quad (5)$$

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} (f_{Fts} - 0,5f_{R3} + 0,2f_{R1}) \geq 0 \quad (6)$$

Para materiais cujo comportamento é de amolecimento, tem-se então a introdução do parâmetro de comprimento característico (ℓ_{cs}). O Modelo Código da *fib* (2012) introduz esse parâmetro como sendo igual ao espaçamento médio entre as fissuras (s_{rm}) no estado de multifissuração ou considerado igual a altura da viga utilizando a análise de seções planas. (DI PRISCO; COLOMBO; DOZIO, 2013). E assim, pela Equação (7), pode-se observar que esse parâmetro correlaciona o valor de abertura de fissuras (w) com a deformação (ϵ).

$$\ell_{cs} = \frac{w}{\epsilon} \quad (7)$$

Sendo que, para elementos com a armadura longitudinal, considera-se o menor valor entre a abertura média de fissuras (s_{rm}) e a distância entre a linha neutra até a

extremidade da borda tracionada de seção transversal medido por meio de análise elástica da seção fissurada, respeitando-se os limites de abertura e espaçamento de fissuras e desprezando a resistência residual do concreto com fibras

O valor f_{Fu} depende da ductilidade necessária relacionada a abertura de fissura permitida. A largura final permitida pode ser calculada como $w_u = \ell_{cs} \cdot \epsilon_{Fu}$, assumindo a deformação última ϵ_{Fu} igual a 2% para uma distribuição de deformações não linear ao longo da seção e 1% para uma distribuição de tensão de tração constante ao longo da seção transversal para situações de amolecimento e endurecimento. Porém, w_u não pode ser maior que 2,5 mm (aplicável só para amolecimento). O Modelo Código da *fib* (2012) também fornece uma ressalva para seções de concreto com fibras que não utilizando a armadura convencional de tração que assume $y = h$.

Como em materiais endurecidos ocorrem multifissuração, a identificação da abertura de fissuras não é necessária, porque uma lei de tensão-deformação pode ser diretamente determinada por um teste de tração uniaxial, ou seja, não é necessário a utilização de ℓ_{cs} . Um material é considerado endurecedor quando mostra um endurecimento comportamento em tensão de até $\epsilon_{Fu} = 1\%$.

3.2 ABNT NBR 16935 (2021)

A recente publicação da norma ABNT NBR 16935 (2021) traz um grande avanço de utilização do CRF no país. Esta norma estabelece requisitos de desempenho mecânico do CRF atuando isoladamente ou em conjunto com as armaduras convencionais (ativas ou passivas), sejam elementos lineares ou de placas. Porém, a norma não engloba aplicações de projetos para revestimento de túneis e nem prevê verificações dos estados limites para ações do tipo: terremotos, impactos, explosões e incêndio.

No documento em questão, pode-se observar diversas semelhanças com os procedimentos do Modelo Código da *fib* (2012). Nas disposições gerais acerca das propriedades do CRF é apresentando a introdução sobre o comportamento do CRF submetido à tração direta, da mesma forma como é apresentado na Figura 5.

Como já discutido, uma das características importantes do CRF é sua resistência às tensões de tração após a fissuração, embasando a importância de obtenção dos valores de tensão de tração residual relacionada ao material. Dessa forma, sabendo das dificuldades de ensaio de tração direta, a ABNT NBR 16935 (2021) adota em seus

procedimentos, o ensaio de flexão de 3 pontos em corpos de prova com entalhe, conforme a ABNT NBR 16940 (2021) de modo a obter valores de resistências de tração indireta (resistência à tração na flexão). Este método de ensaio de flexão estabelecido pela ABNT NBR 16940 (2021) se assemelha com a EN14651 (2007) adotada pelo Modelo Código da *fib* (2012). Ambos os ensaios prescrevem moldes de corpos de provas de 150 mm x 150 mm x 550 mm (largura x altura x comprimento), podendo haver variação no comprimento. Neste ensaio, portanto, obtêm-se os valores experimentais das resistências residuais à tração na flexão: f_{R1} , f_{R2} , f_{R3} e f_{R4} .

Para aplicação das equações em projeto, é necessário, portanto, obter parâmetros experimentais, tais como as resistências residuais à tração na flexão. Desse modo, a partir do ensaio de flexão de 3 pontos com entalhe obtêm-se os valores médios das resistências residuais à tração na flexão que devem ser transformados em valores característicos de projeto o que pode ser feito simplifadamente como indicado na Equação (8). Além disso, as condições mínimas para a consideração da influência das fibras sobre a diminuição da armadura deve seguir os mesmos requisitos do Modelo Código da *fib* (2012): $f_{R1k}/f_{Lk} \geq 0,4$ e $f_{R3k}/f_{R1k} \geq 0,5$.

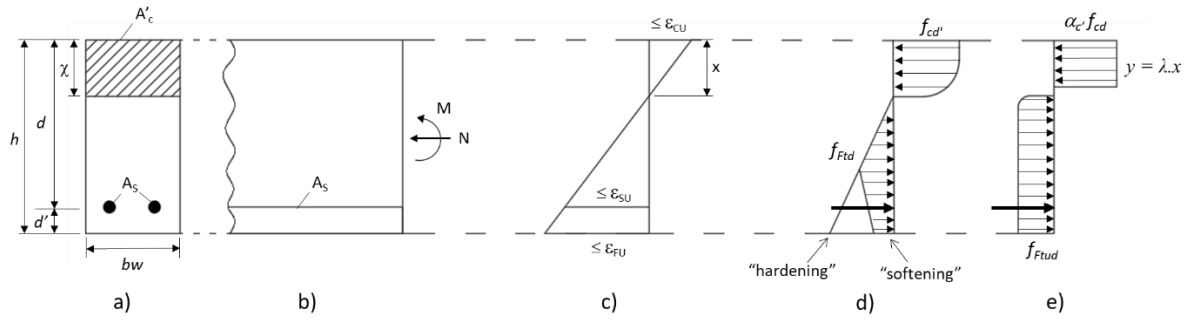
$$f_{R,k} = 0,7 \cdot f_R \quad (8)$$

Pode-se perceber que a norma brasileira se enquadra em vários parâmetros quando comparados a norma internacional acerca da caracterização do Concreto Reforçado com Fibras e métodos de ensaios para a obtenção de valores experimentais. Contudo, vale ressaltar a importância do correto entendimento dos procedimentos brasileiros. Desse modo, os procedimentos de dimensionamento no Estado-Limite Último (ELU) pela ABNT NBR 16935 (2021) encontram-se a seguir.

3.2.1 Elementos Lineares sujeitos a flexão simples no ELU

As hipóteses de cálculos do concreto armado (CA) permanecem as mesmas para aplicação do CRF, diferenciando que para o CA, as tensões de tração são desprezadas, enquanto que para o CRF, é assumido um material homogêneo com resistência na pós fissuração. Desse modo, o diagrama de tensões e deformações do CRF na sua seção transversal é apresentado na Figura 14.

Figura 14 – Diagrama de tensão e deformação no ELU para momento fletor e força normal.



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 16935 (2021)

Observa-se que na Figura 14e, a distribuição de tensões no concreto é bastante semelhante ao convencionado para o CA, apresentado pela ABNT NBR 6118 (2014), diferenciando na parcela resistência à tração que o CRF apresenta. Portanto, convencionou-se que as tensões de compressão do concreto, para seções em que não há diminuição da seção transversal, é dado por um retângulo de base $\alpha_c \cdot f_{cd}$ e altura $y = \lambda \cdot x$.

Em que:

para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa,

$$\begin{cases} \alpha_c = 0,85 \\ \lambda = 0,8 \end{cases} \quad (9)$$

1. para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} < 90 \text{ MPa}$,

$$\begin{cases} \alpha_c = 0,85 \left[1 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \right] \\ \lambda = 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \end{cases} \quad (10)$$

De acordo com ABNT NBR 16935 (2021), tem-se três condições para atingir o ELU:

- 1) máxima deformação de compressão no CRF, ϵ_{cu} ;
 - a) o valor máximo de ϵ_{cu} é assumido igual a 3,5%.
- 2) máxima deformação de tração no aço (se existir), ϵ_{su} ;
 - a) o valor máximo de ϵ_{su} é assumido igual a 10%.
- 3) deformação última do CRF, ϵ_{Fu} ;

- a) neste caso, nos elementos estruturais contendo apenas o CRF e comportamento *hardening*, considerar o mesmo ϵ_{Fu} , assumindo-se que: para distribuições de tensões variáveis ao longo da seção transversal, $\epsilon_{Fu} = 20\%$; para distribuição de tensões de tração constantes ao longo da seção transversal, $\epsilon_{Fu} = 10\%$.

Nos procedimentos normativos é importante adotar coeficientes de ponderação aos parâmetros de resistência pós-fissuração no ELU. Esses coeficientes estão expostos no Item 5.6 da ABNT NBR 16935 (2021) e apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Coeficientes de ponderação para o CFR.

ESTADO-LIMITE ÚLTIMO (ELU)	
Resistências	Coefficientes
Resistência à compressão do CRF	$\gamma_c = 1,4$
Resistência à tração do CRF	$\gamma_c = 1,5$
Resistência residuais do CRF	$\gamma_c = 1,5$
ESTADO-LIMITE DE SERVIÇO (ELS)	
Coeficientes de ponderação dos materiais podem ser admitidos iguais a 1,0	

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 16935 (2021)

Do mesmo modo que o Modelo Código da *fib* (2012), a ABNT NBR 16935 (2021) utiliza duas leis constitutivas, o Modelo rígido-plástico e o Modelo linear, para aplicação em seções solicitadas à tração como forma de obter as resistências à tração direta de serviço, f_{Fts} , e última, f_{Ftu} , conforme já apresentado na Figura 11.

Ainda como no Modelo Código da *fib* (2012), para o modelo rígido-plástico que tem como convenção uma equivalência estática partindo do pressuposto que toda a resistência de compressão é concentrada na parte superior da seção (Figura 12), no qual o momento resistente de cálculo proveniente das resistências residuais do CRF (M_{ud}) é somado ao momento resistente de cálculo na armadura (M_{ad}) calculado pelo equilíbrio da seção transversal do concreto armado sem fibras. Portanto, o valor do momento resistente de cálculo para este modelo é dado conforme a Equação (11).

$$M_{Rd} = M_{Ad} + M_{ud} \quad (11)$$

Nesta abordagem, o equacionamento para encontrar a posição da linha neutra do elemento estrutural segue os mesmos passos para o concreto armado de acordo com a ABNT NBR 6118 (2014). Logo, é necessário encontrar o valor do momento resistente na armadura e realizar o cálculo de acordo com a Equação (12). Caso a armadura do elemento for conhecida, é possível a utilização da Equação (13).

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left(\frac{M_{Ad}}{\alpha_c \cdot b_w \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \quad (12)$$

$$x = \frac{A_s \cdot f_{sd}}{\alpha_c \cdot \lambda \cdot f_{cd} \cdot b_w} \quad (13)$$

A segunda alternativa é a utilização do modelo linear. Nessa abordagem, realiza-se o equilíbrio da seção transversal com base no diagrama apresentado na Figura 14e. Com isso, é possível a obtenção da resultante do concreto comprimido, R_{cc} , resultante do concreto tracionado, R_{ct} , e a resultante na armadura tracionada, R_{st} , apresentados nas Equações (14), (15) e (16), respectivamente. O cálculo do momento no centro de gravidade (CG) da armadura longitudinal é apresentado na Equação (17).

$$R_{cc} = \sigma_c \cdot A_c = (\alpha_c \cdot f_{cd}) \cdot b_w \cdot y \quad (14)$$

$$R_{ct} = f_{tud} \cdot (h - x) \cdot b_w \quad (15)$$

$$R_{st} = A_s \cdot f_{sd} \quad (16)$$

$$M_{CG,armadura} = M_{Rd} = R_{cc} \left[d - \frac{y}{2} \right] - R_{ct} \left[\left(\frac{h-x}{2} \right) - d' \right] \quad (17)$$

A partir da Equação (17) é possível a obtenção da linha neutra do elemento estrutural reduzindo para uma equação quadrática, como apresentada na Equação (18), na qual seus coeficientes são expostas a seguir. Com isso, acham-se as raízes do polinômio (linha neutra – x) e a atribui-se uma resposta válida.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (18)$$

Sendo:

$$a = \frac{b_w}{2} \cdot (\lambda^2 \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} + f_{Ftud})$$

$$b = f_{Ftud} \cdot b_w \cdot (d' - h) - \lambda \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot d$$

$$c = M_{Rd} + f_{Ftud} \cdot b_w \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - d'\right)$$

De forma alternativa, realizando o equilíbrio das forças normais atuantes (R_{cc} , R_{ct} e R_{st}), e nos casos em que a armadura longitudinal é conhecida, é possível a obtenção da linha neutra, conforme apresentado na Equação (19).

$$x = \frac{A_s \cdot f_{sd} + f_{Ftud} \cdot h \cdot b_w}{f_{Ftud} \cdot b_w + 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w} \quad (19)$$

3.2.1.1 Elementos lineares sujeitos à força cortante

Os procedimentos para o cálculo da força cortante se dividem em 3 situações: elementos lineares de CRF sem armadura longitudinal e transversal; elementos lineares de CRF com armadura longitudinal e sem a armadura transversal e elementos lineares com armadura longitudinal e transversal.

No caso do elemento sem as armaduras convencionais, a tensão resistente de tração de cálculo (σ_l) não pode ultrapassar o valor da resistência à tração indireta experimental obtida por meio do ensaio de flexão, Equação (20).

$$\sigma_1 \leq \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c} \quad (20)$$

Em que,

f_{Ftuk} é a resistência característica à tração direta do CRF, considerando $w_u = 1,5 \text{ mm}$.

Na situação em que o CRF é utilizado juntamente com armaduras longitudinais, contendo ou não armaduras transversais, tem-se que no cálculo da resistência à cortante do elemento estrutural, Equação (21), é considerada a soma da parcela resistida pelo material armado longitudinalmente ($V_{Rd,F}$), apresentada na Equação (22), e da parcela resistida pelas armaduras transversais (V_{sw}), calculada conforme ABNT NBR 6118 (2014). Caso o elemento não tenha armaduras transversais, $V_{sw} = 0$.

$$V_{Rd} = V_{Rd,F} + V_{sw} \quad (21)$$

$$V_{Rd,F} = \left\{ \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot k \left[100 \cdot \rho_1 \cdot \left(1 + 7,5 \frac{f_{Ftuk}}{f_{ctk}} \right) \cdot f_{ck} \right]^{\frac{1}{3}} + 0,15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \quad (22)$$

Observa-se que a Equação (22) conta com alguns parâmetros para obtenção do valor, as formulações são apresentadas nas Equações (23), (24), (25) e (26).

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 ; \quad (23)$$

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} ; \quad (24)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{ed}}{A_c} < 0,2 \cdot f_{cd} ; \quad (25)$$

$$f_{ctk} = 0,7 \cdot f_{ctm} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (26)$$

Sendo,

γ_c = coeficiente de ponderação do CRF;

d = altura útil da seção transversal [mm];

A_{sl} = área de seção transversal da armadura que se estende além da seção considerada ($\geq l_{bd} + d$) [mm²];

ρ_1 = taxa de armadura longitudinal;

f_{Ftuk} = resistência característica à tração direta do CFR, valor último, considerando $w_u = 1,5$ mm, obtido através da Eq. (6) [MPa];

f_{ctk} = resistência característica do concreto simples à tração direta [MPa];

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto [MPa];

σ_{cp} = tensão média na seção transversal de concreto (A_c) por ação de força axial (N_{ed}) devida ao carregamento ou a ações de pré-tensão ($N_{Fd} > 0$ para compressão);

b_w = menor largura da seção transversal na zona de tração [mm].

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos ao longo da elaboração deste trabalho e que estão de acordo com os objetivos traçados. Com isso, houve a subdivisão em 3 itens distintos, sendo no primeiro item a construção da base de dados contendo as informações pertinentes sobre as características do CRF e da configuração dos elementos lineares ensaiados; no segundo, a aplicação dos procedimentos normativos e a obtenção dos valores máximos de momento fletor e força cortante no calculadas no ELU e comparadas aos resultados experimentais para análise da capacidade resistente obtida pela ABNT NBR 16935 (2021). Já no terceiro item, encontram-se os resultados obtidos para a aplicação de projeto de vigas fictícias constituídas por CRF em conjunto com armaduras para análise da influência do teor de fibras na área de aço necessária.

4.1 Base de dados

Como citado na metodologia, inicialmente buscou-se na literatura artigos que continham a caracterização do CRF e que apresentavam também ensaios de vigas de CRF em conjunto com armaduras. Dessa forma, escolheu-se dois artigos distintos, Amin e Foster (2016) e Cardoso et al. (2019).

Na base de dados era imprescindível a apresentação dos valores de resistências residuais, especialmente f_{RI} e f_{R3} , obtidos atrás de ensaios de flexão de 3 pontos com entalhe, seja pela EN 14651 (2007) ou pela ABNT NBR 16940 (2021), conforme a Figura 9, e ensaios de vigas até sua ruptura. Deste modo, a Tabela 4 fornece resumidamente os autores selecionados e os exemplares ensaiados. Os dados geométricos, característica dos materiais utilizados e modo de ruptura estão apresentados juntamente.

Tabela 4 – Dados extraídos da literatura

Autor	Exemplares	Geometria [m]				f_{cm} [MPa]	V_f [%]	E_c [GPa]	Modo de Ruptura
		b_w	h	d	d'				
Amin e Foster (2016)	B0-450-10-450	0,30	0,70	0,622	0,078	34	0	28	Cisalhamento
	B25-0-0-0	0,30	0,70	0,622	0,078	34	0,30	28	
	B25-550-6-450	0,30	0,70	0,622	0,078	34	0,30	28	
	B25-450-10-450	0,30	0,70	0,622	0,078	34	0,30	28	
	B25-400-6-300	0,30	0,70	0,622	0,078	46	0,30	37	
	B25-300-10-300	0,30	0,70	0,622	0,078	46	0,30	37	
	B0-550-6-450	0,30	0,70	0,622	0,078	36	0	43	
	B50-0-0-0	0,30	0,70	0,622	0,078	36	0,63	43	
	B50-550-6-450	0,30	0,70	0,622	0,078	36	0,63	43	
	B50-450-10-450	0,30	0,70	0,622	0,078	36	0,63	43	
Cardoso et al. (2019)	B1-0-6	0,15	0,15	0,132	0,018	76,3	0	40,7	Flexão
	B2-0-8	0,15	0,15	0,131	0,019	76,3	0	40,7	
	B3-0-10	0,15	0,15	0,130	0,020	73,6	0	40,7	
	B4-0.5/45-10	0,15	0,15	0,130	0,020	95,2	0,50	31	
	B5-1/45-10	0,15	0,15	0,130	0,020	80,2	1,00	32	
	B6-2/45-6	0,15	0,15	0,132	0,018	81,3	2,00	34,8	
	B7-2/45-8	0,15	0,15	0,131	0,019	81,3	2,00	34,8	
	B8-2/45-10	0,15	0,15	0,130	0,020	81,3	2,00	34,8	
	B9-2/80-10	0,15	0,15	0,130	0,020	84,9	2,00	34,3	

Fonte: Autoria Própria (2021)

Observando a Tabela 4, ressalta-se que Amim e Foster (2016) trabalharam com concretos de resistência à compressão entre 35 a 45 MPa, enquanto Cardoso *et al.* (2019) utilizaram matrizes com resistência de 75 a 95 MPa. Nesta etapa, evidencia-se que tem-se duas classes de concreto estudadas: concretos convencionais (C20 a C50) e concretos de alto desempenho (C50 a C90).

A Tabela 5 apresenta as características das vigas ensaiadas e a área de armaduras longitudinais e transversais. Neste ponto, é importante ressaltar que as vigas foram fabricadas de acordo com os objetivos de cada pesquisa. Ou seja, Amin e Foster (2016) dimensionaram as vigas para que a ruptura dessas vigas ocorresse devido à força cortante, enquanto para Cardoso *et al.* (2019) a ruptura ocorreu devido à flexão e por isso, as armaduras transversais foram dispostas apenas em seus vãos de cisalhamento, não tendo nenhuma armadura na seção crítica analisada (meio do vão).

Tabela 5 – Detalhes das armaduras utilizadas em nos ensaios.

Autor	Exemplares	Armadura Longitudinal			Armadura Transversal			
		Barras	f_{ys} [MPa]	A_s [cm ²]	Barras	f_{yw} [MPa]	A_{sw} [cm ²]	s [cm]
Amin e Foster (2016)	B0-450-10-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 10 c/ 45cm	447	0,785	45
	B25-0-0-0	6 ϕ 28	540	36,95	-	-	-	-
	B25-550-6-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 6 c/ 45cm	553	0,283	45
	B25-450-10-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 10 c/ 45cm	447	0,785	45
	B25-400-6-300	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 6 c/ 30cm	402	0,283	30
	B25-300-10-300	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 10 c/ 30cm	277	0,785	30
	B0-550-6-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 6 c/ 45cm	553	0,283	45
	B50-0-0-0	6 ϕ 28	540	36,95	-	-	-	-
	B50-550-6-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 6 c/ 45cm	553	0,283	45
	B50-450-10-450	6 ϕ 28	540	36,95	ϕ 10 c/ 45cm	447	0,785	45
Cardoso et al. (2019)	B1-0-6	2 ϕ 6,3	575	0,62	-	-	-	-
	B2-0-8	2 ϕ 8,0	574	1,01	-	-	-	-
	B3-0-10	2 ϕ 10	553	1,57	-	-	-	-
	B4-0.5/45-10	2 ϕ 10	553	1,57	-	-	-	-
	B5-1/45-10	2 ϕ 10	553	1,57	-	-	-	-
	B6-2/45-6	2 ϕ 6,3	575	0,62	-	-	-	-
	B7-2/45-8	2 ϕ 8,0	574	1,01	-	-	-	-
	B8-2/45-10	2 ϕ 10	553	1,57	-	-	-	-
	B9-2/80-10	2 ϕ 10	553	1,57	-	-	-	-

Fonte: Autoria Própria (2021)

Como dito anteriormente, há alguns aspectos importantes quando o CRF é utilizado em termos estruturais. As resistências residuais precisam ser conhecidas e obtidas para realizar as verificações de ductilidade e segurança, além de fazerem parte dos valores de resistência dos elementos. Com isso, a Tabela 6 apresenta o valor de resistência de tração direta (f_{ct}), tensão residual quando $CMOD_1 = 0,5\text{mm}$ (f_{R1}), tensão residual quando $CMOD_3 = 1,5\text{ mm}$ (f_{R3}), valor da força cortante obtida experimentalmente no momento da ruptura (V_{EXP}), valor do momento obtido na ruptura (M_{EXP}) e ângulo do plano de ruptura à força cortante (θ_{exp}).

Tabela 6 – Resultados experimentais obtidos na literatura.

Autor	Exemplares	Resultados Experimentais					
		f_{ctm} [MPa]	f_{R1} [MPa]	f_{R3} [MPa]	V_{EXP} [kN]	M_{EXP} [kN.m]	θ_{EXP}
Amin e Foster (2016)	B0-450-10-450	3,15	-	-	236	413,00	43
	B25-0-0-0	3,15	2,39	2,56	274	479,50	30
	B25-550-6-450	3,15	2,39	2,56	363	635,25	50
	B25-450-10-450	3,15	2,39	2,56	334	584,50	41
	B25-400-6-300	3,85	5,16	6,37	322	563,50	53
	B25-300-10-300	3,85	5,16	6,37	357	624,75	42
	B0-550-6-450	3,27	-	-	180	315,00	32
	B50-0-0-0	3,27	6,74	8,07	344	602,00	31
	B50-550-6-450	3,27	6,74	8,07	462	808,50	30
	B50-450-10-450	3,27	6,74	8,07	535	936,25	42
Cardoso et al. (2019)	B1-0-6	5,40	-	-	16,16	5,90	-
	B2-0-8	5,40	-	-	24,93	9,10	-
	B3-0-10	5,27	-	-	30,41	11,10	-
	B4-0.5/45-10	6,25	4,19 ^a	1,14 ^a	31,51	11,50	-
	B5-1/45-10	5,58	9,16 ^a	4,4 ^a	33,70	12,30	-
	B6-2/45-6	5,63	13,06 ^a	10,68 ^a	17,81	6,50	-
	B7-2/45-8	5,63	13,06 ^a	10,68 ^a	21,64	7,90	-
	B8-2/45-10	5,63	13,06 ^a	10,68 ^a	36,71	13,40	-
	B9-2/80-10	5,80	15,40 ^a	16,73 ^a	38,90	14,20	-

^a Valor retirado de Alencar Monteiro, Lima e Andrade Silva (2018)

Fonte: Autoria Própria (2021)

Observa-se na Tabela 6 os parâmetros de resistência residuais obtidos através dos ensaios de flexão de 3 pontos com entalhe e os valores máximos de força cortante e momento fletor, obtidos no ensaio experimental destes elementos. Cardoso *et al.* (2019) apresentam em seu artigo o valor de momento máximo, com o qual também foi possível a obtenção do valor de força cortante pela análise estrutural da viga de acordo com o esquema estrutural o ensaio. Para os dados expostos no trabalho de Amin e Foster (2016) os cálculos foram realizados de forma análoga. Além disso, como Amin e Foster (2016) avaliaram exemplares nos quais a ruptura ocorreu por cisalhamento, eles obtiveram o ângulo do plano da ruptura (θ_{EXP}) dos elementos lineares.

O próximo passo, portanto, consistiu na aplicação desses dados nos procedimentos normativos da ABNT NBR 16935 (2021). Uma vez que o objetivo deste estudo é a validação das equações normativas e avaliar se estes correspondem aos resultados experimentais, os cálculos foram realizados com os coeficientes de ponderação iguais à 1, a

fim de se encontrar uma correlação próxima entre os resultados obtidos pela ABNT NBR 16935 (2021) e os obtidos experimentalmente. Ademais, na Tabela 4 encontram-se exemplares que não foram moldados com fibras, logo, os procedimentos da ABNT NBR 16935 (2021) não se aplicam a essas vigas. Aplica-se, portanto, os procedimentos apresentados pela ABNT NBR 6118 (2014).

4.2 Comparação dos resultados experimentais com os procedimentos normativos

Conforme a metodologia exposta, os procedimentos normativos foram aplicados considerando as características geométricas das vigas ensaiadas e propriedades mecânicas dos materiais. Vale salientar que para representar o diagrama de distribuição de tensões na seção foi considerado o modelo rígido plástico e o modelo elástico linear para os cálculos do momento fletor resistente. O Apêndice A apresenta um exemplo de cálculo para cada uma das situações encontradas nesta pesquisa.

A Tabela 7 reúne os dados da força cortante extraídos da literatura e os obtidos de acordo com os procedimentos apresentados no Capítulo 3, conforme a configuração de cada exemplar. Da mesma forma, a Tabela 8 apresenta os valores de momento fletor experimental e os obtidos utilizando os dois modelos expostos na ABNT NBR 16935 (2021) para as vigas de CRF em conjunto com armaduras e os procedimentos da ABNT NBR 6118 (2014) para as vigas com concreto armado. Ressalta-se que os cálculos para a força cortante resistida pelo elemento estrutural não tem influência na escolha das leis constitutivas apresentadas.

Neste ponto, é importante notar que os valores normativos de capacidade resistente apresentados na Tabela 7 e na Tabela 8 para força cortante calculada pelo Modelo I ($V_{R,NBR,I}$), para força cortante calculada pelo Modelo II ($V_{R,NBR,II}$) e para o momento fletor resistido ($M_{R,NBR}$), levam em consideração a classe do concreto e a presença das fibras de aço em cada exemplar, pois estes fatores interferem diretamente em parâmetros como os apresentados nas Equações (9) e (10) e qual procedimento normativo é o mais adequado em cada situação. Nessa etapa, os coeficientes de ponderação para o CA, CRFA e para o aço foram todos iguais a 1.

Tabela 7 – Valores de força cortante experimentais e normativas com coeficiente de ponderação igual a 1.

Autor	Exemplares	V_{EXP}	$V_{R,NBR,I}$	$\frac{V_{EXP}}{V_{R,NBR,I}}$	$V_{R,NBR,II}$	$\frac{V_{EXP}}{V_{R,NBR,II}}$
Amin e Foster (2016)	B0-450-10-450	236,00	334,10	0,71	340,42	0,69
	B25-0-0-0	274,00	314,56	0,87	314,56	0,87
	B25-550-6-450	363,00	353,46	1,03	347,21	1,05
	B25-450-10-450	334,00	401,91	0,83	415,04	0,80
	B25-400-6-300	322,00	455,93	0,71	445,47	0,72
	B25-300-10-300	357,00	494,70	0,72	503,68	0,71
	B0-550-6-450	180,00	295,24	0,61	318,60	0,56
	B50-0-0-0	344,00	426,77	0,81	426,77	0,81
	B50-550-6-450	462,00	465,67	0,99	494,15	0,93
	B50-450-10-450	535,00	514,11	1,04	523,78	1,02
Cardoso et al. (2019)	B1-0-6	16,16	44,83	0,36	-	-
	B2-0-8	24,93	44,54	0,56	-	-
	B3-0-10	30,41	43,15	0,70	-	-
	B4-0.5/45-10	31,51	39,96	0,79	-	-
	B5-1/45-10	33,70	47,97	0,70	-	-
	B6-2/45-6	17,81	43,29	0,41	-	-
	B7-2/45-8	21,64	50,63	0,43	-	-
	B8-2/45-10	36,71	58,58	0,63	-	-
	B9-2/80-10	38,90	66,12	0,59	-	-

Fonte: Aatoria Própria (2021)

Tabela 8 – Valores de momento fletor experimentais e normativos com coeficiente de ponderação igual a 1 para o modelo rígido plástico e linear.

Autor	Exemplares	Experimental	Modelo Rígido Plástico	Modelo Linear		
		M_{EXP}	$M_{R,NBR}$	$\frac{M_{EXP}}{M_{R,NBR}}$	$M_{R,NBR}$	$\frac{M_{EXP}}{M_{R,NBR}}$
Amin e Foster (2016)	B0-450-10-450	413,00	1011,38	0,41	1011,38	0,41
	B25-0-0-0	479,50	1074,10	0,45	1038,48	0,46
	B25-550-6-450	635,25	1074,10	0,59	1038,48	0,61
	B25-450-10-450	584,50	1074,10	0,54	1038,48	0,56
	B25-400-6-300	563,50	1227,32	0,46	1157,21	0,49
	B25-300-10-300	624,75	1227,32	0,51	1157,21	0,54
	B0-550-6-450	315,00	1024,13	0,31	1024,13	0,31
	B50-0-0-0	602,00	1221,84	0,49	1110,98	0,54
	B50-550-6-450	808,50	1221,84	0,66	1110,98	0,73
	B50-450-10-450	936,25	1221,84	0,77	1110,98	0,84
Cardoso et al. (2019)	B1-0-6	5,90	4,65	1,27	4,65	1,27
	B2-0-8	9,10	7,36	1,24	7,36	1,24
	B3-0-10	11,10	10,84	1,02	10,84	1,02
	B4-0.5/45-10	11,50	11,53	1,00	10,45	1,10
	B5-1/45-10	12,30	13,33	0,92	12,31	1,00
	B6-2/45-6	6,50	10,66	0,61	9,31	0,70
	B7-2/45-8	7,90	13,38	0,59	12,58	0,63
	B8-2/45-10	13,40	16,87	0,79	17,09	0,78
	B9-2/80-10	14,20	20,28	0,70	20,34	0,70

Fonte: Autoria Própria (2021)

Para os resultados de Amim e Foster (2016), tem-se uma correlação mais próxima à 1 entre os valores normativos e os experimentais para a força cortante resistente, pois os ensaios foram realizados de forma a obter a ruptura nesta configuração. Como neste caso, os autores reportam o ângulo do plano de ruptura obtido experimentalmente (θ_{EXP}), foi possível a análise da força cortante pelos dois modelos propostos normativamente (modelo I e modelo II). A comparação entre os valores para cortante dado pelo Modelo I (que adota o valor de $\theta_{EXP} = 45^\circ$) ficou entre 61% e 104%, com média de 83% e mediana de 82%; e para o Modelo II, uma variação de 56% a 105%, com média de 76% e mediana de 81%.

Já, como esperado, os valores experimentais de momento fletor obtidos para Amin e Foster (2016) apresentam grande diferença com relação aos valores normativos, fato explicado pelo modo de ruptura dos exemplares ensaiados. Como a ruptura foi por cisalhamento, a viga não atingiu sua capacidade de momento fletor último, apresentando um

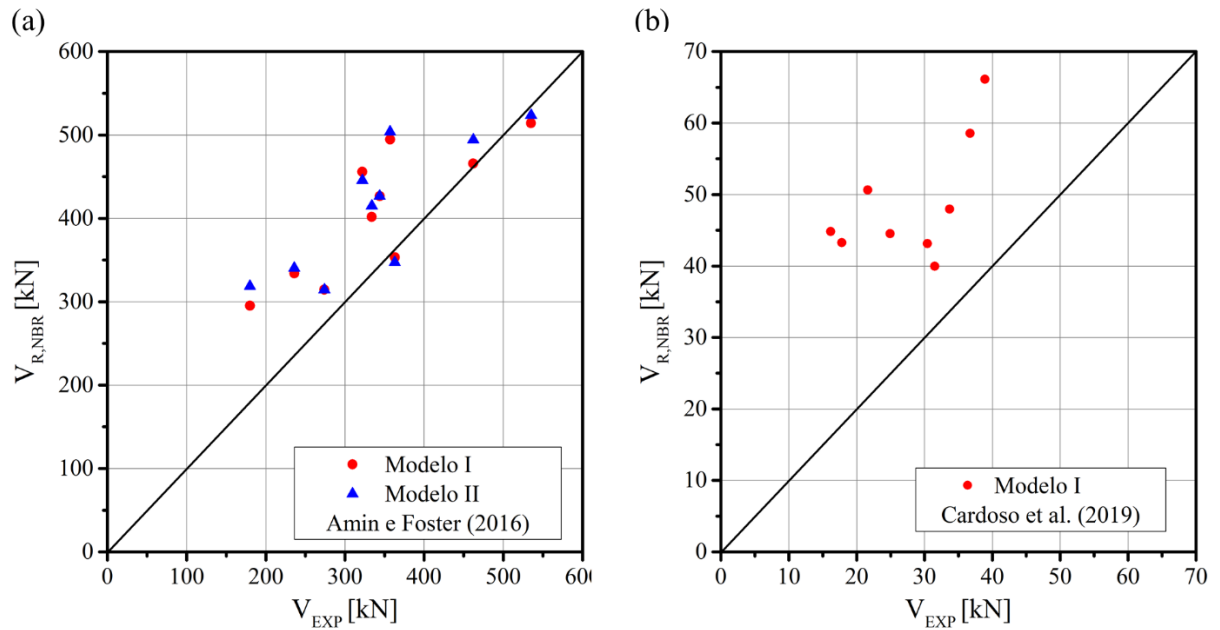
baixo valor experimental. Os resultados obtidos pelo modelo rígido plástico e o modelo linear apresentam pouca diferença entre si, com correlações entre 31% e 77%, com média 52% e mediana de 50% para o modelo rígido plástico e para o modelo linear os valores variam entre 31% e 84%, com média de 55% e mediana de 54%.

Já para os resultados de Cardoso *et al.* (2019), como a ruptura foi causada por flexão, os valores de momento fletor experimentais e normativos se apresentam bem mais próximos e com menor dispersão. Nesta etapa, a força cortante resistente é advinda apenas pelo CRFA, visto que não há armadura de cisalhamento na seção crítica. Por fim, as correlações entre os valores experimentais e normativos foram: valores entre 36% a 79%, com média de 57% e mediana de 59% para força cortante; 59% a 127%, com média de 90% e mediana de 92% para momento fletor pelo modelo rígido plástico e 63% a 127%, com média de 94% e mediana de 100% para o momento fletor pelo modelo linear.

A Figura 15 e a Figura 16 fornecem graficamente as correlações entre os valores experimentais e normativos presentes na Tabela 7 e na Tabela 8, respectivamente. Desse modo, é possível realizar uma análise da tendência dos valores de capacidade resistente das vigas obtidos para os procedimentos de dimensionamento. Esperou-se encontrar valores próximos ou abaixo da diagonal do gráfico, ou seja, a obtenção de valores normativos que se apresentam iguais ou inferiores aos valores experimentais, atuando a favor da segurança.

É possível observar na Figura 15 que os valores obtidos pelos procedimentos normativos para ambos os autores se apresentam contra a segurança, ou seja, o dimensionamento superestima a capacidade resistente da viga ensaiada com relação à força cortante. A Figura 15a representa os pontos obtidos para os dois modelos de cálculo para a força cortante. Nota-se que o modelo I utiliza o valor de $\theta = 45^\circ$, já para o modelo II o ângulo utilizado é o medido experimentalmente. Dessa forma, valores abaixo de 45° superestimam ainda mais os valores últimos do elemento estrutural, fornecendo um ganho na capacidade resistente. Uma divergência de valores obtidos fica mais evidente para Cardoso *et al.* (2019), apresentados na Figura 15b, o que de fato já era esperando, visto que os exemplares não tiveram os valores último de força cortante atingidos.

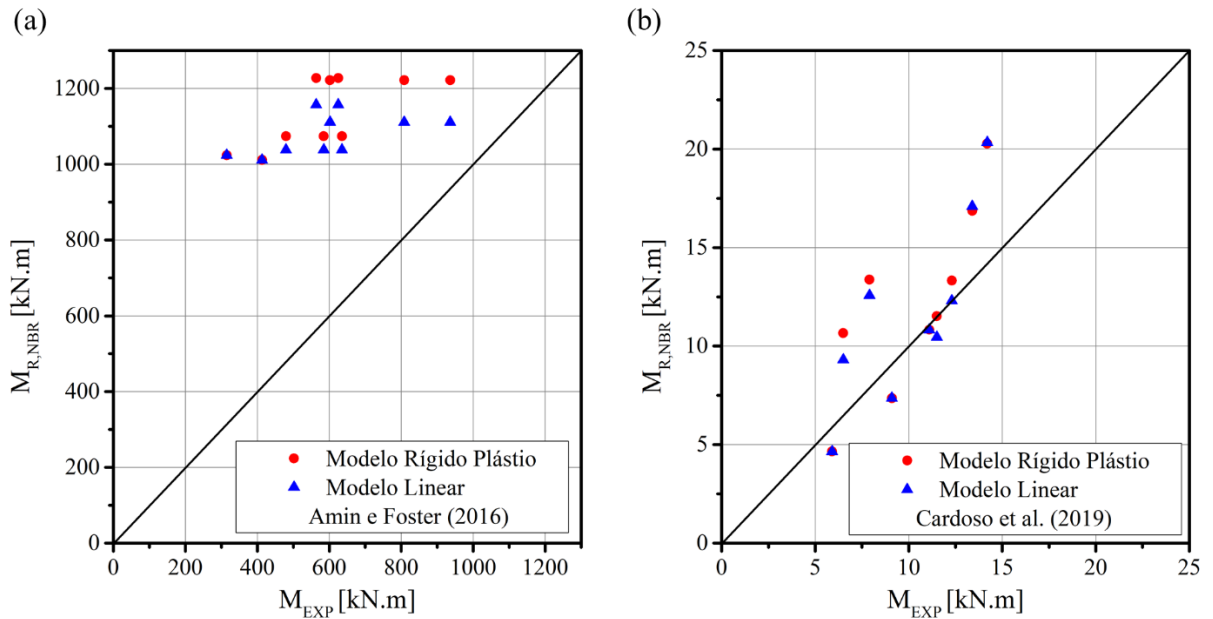
Figura 15 – Correlação entre valores experimentais e analíticos para força cortante.



Fonte: Autoria Própria (2021)

Já na Figura 17, esperava-se encontrar resultados opostos aos da Figura 16, ou seja, uma divergência de dados para Amin e Foster (2016) e dados mais próximos à diagonal para Cardoso *et al.* (2019), o que de fato é observado. A aplicação das diferentes leis constitutivas apresenta diferenças entre os valores obtidos, demonstrando que o modelo linear tende a estar mais próximo à segurança, porém estas diferenças não são significativas. Além disso, observa-se para os dois autores, o modelo linear apresentou valores menores ou iguais ao modelo rígido plástico.

Figura 16 - Correlação entre valores experimentais e analíticos para momento fletor.



Fonte: Autoria Própria (2021)

De forma geral, os resultados obtidos neste trabalho aplicando os procedimentos normativos da ABNT NBR 6118 (2014) e ABNT NBR 16935 (2021) demonstram que o dimensionamento atua contra a segurança e superestima a capacidade resistente dos exemplares analisados. Porém, deve-se levar em consideração que os valores obtidos neste trabalho se assemelham aos apresentados pelos próprios autores em seus artigos, tanto para Amin e Foster (2016), quanto para Cardoso *et al.* (2019), conforme apresentado na Figura 17. Salienta-se que nestes artigos os autores realizaram os ensaios das vigas e compararam aos obtidos pelos procedimentos de normas internacionais, como o Modelo Código da *fib* (2012) e abordagens propostas por outros estudos.

A Figura 17 apresenta as correlações entre os valores experimentais e normativos expostos neste trabalho, sendo:

V_{EXP} = força cortante experimental;

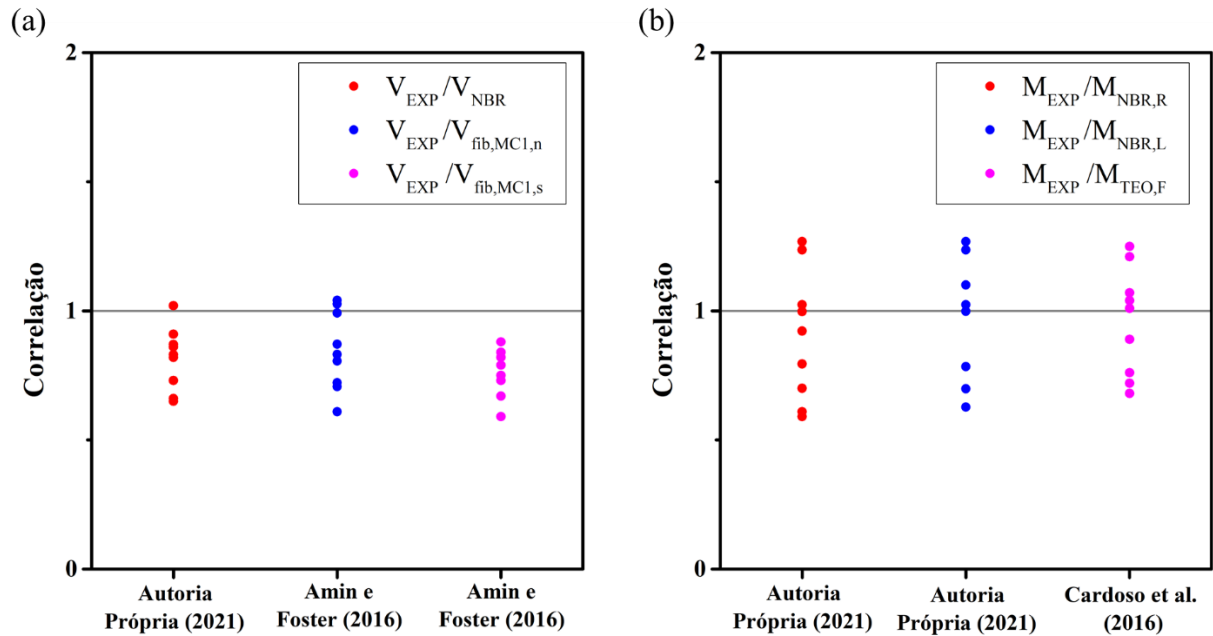
V_{NBR} = força cortante calculado pelo modelo I da ABNT NBR 16935 (2021);

$V_{fib,MCI,n}$ e $V_{fib,MCI,s}$ = valores normativos obtido por Amin e Foster (2016) utilizando os procedimentos do Modelo Código da *fib* (2012), diferenciando no modo de calcular o número de estribos nas fissuras;

$M_{NBR,R}$ e $M_{NBR,L}$ = valores normativos calculados pelo modelo rígido plástico e modelo linear, respectivamente, apresentados pela ABNT NBR 16935 (2021);

$M_{TEO,F}$ = valor teórico obtido pelo Modelo Código da fib (2012) obtido por Cardoso et al. (2019).

Figura 17 – Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os extraídos da literatura.



Fonte: Autoria Própria (2021)

A Figura 17a mostra as correlações apresentadas na Tabela 7 para o valor de força cortante calculada utilizando o modelo I com as extraídas do artigo de Amin e Foster (2016). Ressalta-se que nesse artigo, os autores realizaram diferentes análises com procedimentos distintos, contudo, para as comparações neste trabalho, escolheram-se apenas os valores obtidos pelos procedimentos do Modelo Código da *fib* (2012). Desse modo, observa-se que todos os valores se apresentam, em sua grande maioria, abaixo de 1, ou seja, os procedimentos tendem a superestimar a capacidade de cisalhamento das vigas.

Do mesmo modo, a Figura 17b reúne os resultados de momento fletor apresentadas Tabela 8 para as duas leis constitutivas presente na ABNT NBR 16935 (2021) e as correlações extraídas da pesquisa de Cardoso et al. (2019), que também realizou análises de diferentes métodos de cálculo, porém os valores escolhidos foram os obtidos pelos ensaios com vigas entalhadas conforme adota as normas supracitadas. Conclui-se que os procedimentos tem uma convergência maior para os valores esperados (próximos à 1), porém ainda há uma parcela superestimando a capacidade dos elementos estruturais.

4.3 Influência da adição de fibras na capacidade resistente das vigas

Esse item apresenta a segunda análise sobre os procedimentos normativos que tem como objetivo o estudo da influência da adição de fibras na capacidade resistente do elemento e, como isso se reflete na área de aço necessária. Como apresentado no Capítulo 3 para o dimensionamento de elementos linear segundo a ABNT NBR 19635 (2021) é necessário conhecer algumas propriedades mecânicas do concreto, como as resistências residuais do CRF, entretanto ainda não existe uma relação direta entre elas e o valor da resistência à compressão do concreto, sendo necessário utilizar valores obtidos em ensaios experimentais para o CRF. Neste trabalho foram utilizados os concretos caracterizados por Lee (2017). A Tabela 9 apresenta a geometria adotada para os exemplos de cálculo, o valor da resistência à compressão e volume de fibras que serão consideradas.

Tabela 9 – Dados iniciais das vigas para aplicação dos procedimentos de cálculo.

Exemplar	Geometria [m]				f_{ck} [MPa]	V_f [%]
	b_w	h	d	d'		
V1						-
V2	0,20	0,45	0,41	0,04	25,00	0,250
V3						0,375
V4						0,500
V5						-
V6	0,20	0,45	0,41	0,04	35,00	0,250
V7						0,375
V8						0,500
V9						-
V10	0,20	0,45	0,41	0,04	45,00	0,250
V11						0,375
V12						0,500

Fonte: Autoria Própria (2021)

Dessa forma, Lee (2017) apresenta o estudo da influência do aumento do teor de fibras no limite de proporcionalidade e resistências residuais. Esses valores foram extraídos do artigo e estão apresentados na Tabela 10. Para aplicação do CRF em projeto, foi necessário a análise entre a tensão residual para $CMOD = 0,5$ mm e o limite de proporcionalidade, esse valor sendo maior que 0,4, e entre as resistências residuais para $CMOD = 2,5$ mm e $CMOD = 0,5$ mm, este valor maior que 0,5.

Em seu trabalho, Lee (2017) apresenta o estudo da influência do aumento do teor de fibras na resistência à tração na flexão do CRF (limite de proporcionalidade) e

resistências residuais. Esses valores foram extraídos de Lee (2017) e estão apresentados na Tabela 10. A substituição total ou parcial da armadura convencional nas vigas com CRF pode ser feita desde que sejam atendidas as relações mínimas entre as resistências: razão entre a tensão residual para $CMOD = 0,5$ mm e o limite de proporcionalidade, esse valor sendo maior que 0,4, e razão entre as resistências residuais para $CMOD = 2,5$ mm e $CMOD = 0,5$ mm, este valor maior que 0,5 . Essa análise também pode ser vista na Tabela 10.

Tabela 10 – Valores do limite de proporcionalidade e das resistências residuais.

Exemplar	Resultados experimentais			f_{R1} / f_L	f_{R3} / f_{R1}
	[MPa]				
	f_L	f_{R1}	f_{R3}		
V1	-	-	-	-	-
V2	4,492	2,666	2,602	0,59	0,98
V3	4,340	3,139	3,191	0,72	1,02
V4	4,567	4,337	4,330	0,95	1,00
V5	-	-	-	-	-
V6	4,163	2,464	2,235	0,59	0,91
V7	5,078	3,710	3,463	0,73	0,93
V8	5,024	3,825	4,041	0,76	1,06
V9	-	-	-	-	-
V10	5,345	4,330	2,232	0,81	0,52
V11	5,646	4,647	2,686	0,82	0,58
V12	5,705	6,178	3,398	1,08	0,55

Fonte: Autoria Própria (2021)

Para a obtenção da área de aço no ELU para as vigas adotadas, foram realizados os procedimentos de cálculos da ABNT NBR 6118 (2014) para os elementos sem utilização de fibras e da ABNT NBR 16935 (2021) para os elementos com presença de fibras, diferenciando duas leis constitutivas presentes: modelo linear e rígido plástico. Além disso foi considerado um momento fletor solicitante característico de 100 kNm aplicado sobre a viga. Os resultados obtidos para o valor da linha neutra, área de aço e deformação do CRF estão apresentados na Tabela 11. Por fim, um roteiro de cálculo está apresentado no Apêndice B deste trabalho.

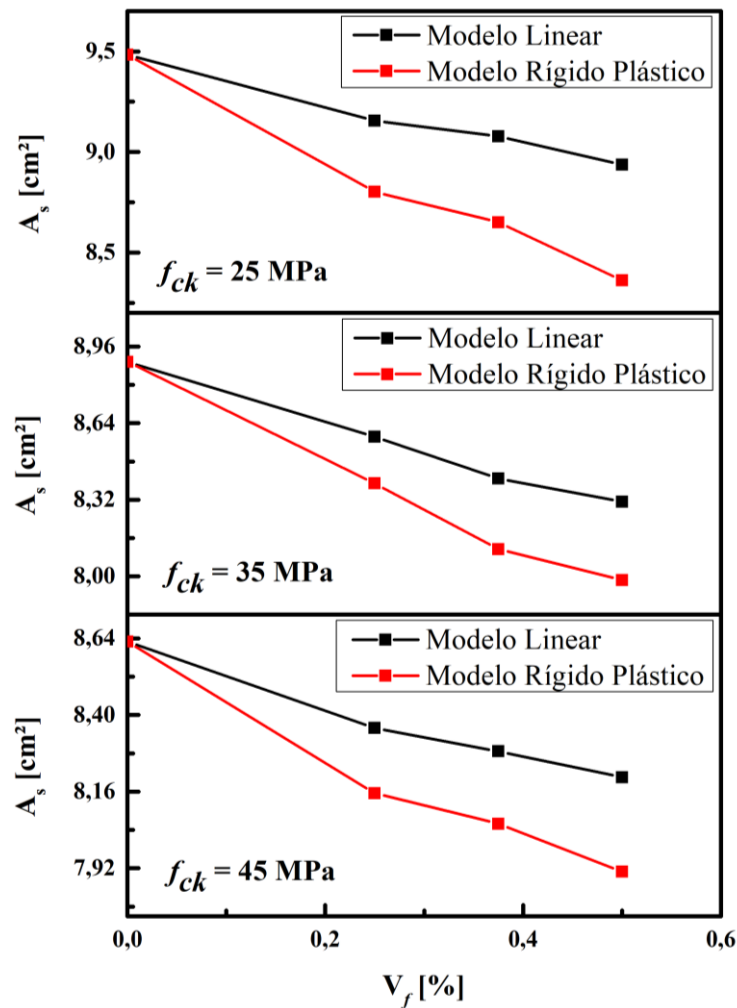
Tabela 11 – Valores da posição da linha neutra, área de aço e deformação do CRF.

Exemplar	Modelo Linear			Modelo Rígido plástico		
	x [m]	A _s [cm ²]	ε _{Fu} [%]	x [m]	A _s [cm ²]	ε _{Fu} [%]
V1	0,170	9,48	-	0,170	9,48	-
V2	0,173	9,16	0,56	0,158	8,80	0,65
V3	0,174	9,08	0,56	0,155	8,65	0,67
V4	0,175	8,94	0,55	0,150	8,36	0,70
V5	0,114	8,90	-	0,114	8,90	-
V6	0,116	8,58	1,00	0,107	8,39	1,12
V7	0,118	8,41	0,99	0,104	8,11	1,17
V8	0,119	8,31	0,98	0,102	7,98	1,19
V9	0,086	8,63	-	0,086	8,63	-
V10	0,088	8,36	1,45	0,081	8,16	1,59
V11	0,088	8,29	1,44	0,080	8,06	1,61
V12	0,089	8,21	1,42	0,079	7,91	1,65

Fonte: Autoria Própria (2021)

De acordo com a Tabela 11, pode-se observar um comportamento inverso da posição da linha neutra entre os dois modelos apresentados, ou seja, analisando as vigas com concreto de mesma resistência à compressão, enquanto que para o modelo linear a posição da linha neutra aumenta conforme o teor de fibras aumenta, o modelo rígido tem a tendência da diminuição deste valor. Esse fato é explicado pelo modo como a influência das fibras é considerada nas leis constitutivas. Contudo, os valores para a área de aço apresentam uma redução conforme há o aumento no teor de fibras para ambos os modelos, representando que a adição de fibras na matriz cimentícia ocasiona um aumento na capacidade resistente do elemento estrutural. Esse comportamento é representado na Figura 18.

Figura 18 – Comportamento do valor da área de aço conforme aumento do teor de fibras.



Fonte: Autoria Própria (2021)

A Figura 18 mostra a influência da adição de fibras na área de aço necessária de acordo com o dimensionamento da ABNT NBR 16935 (2021) utilizando os CRF caracterizados experimentalmente por Lee (2017). Observa-se que para quaisquer resistências de concreto e para ambos os modelos analisados há a redução na armadura necessária conforme o teor de fibras aumenta. Para todos os valores de resistência do concreto, é possível verificar que com a utilização do modelo linear, os valores da área de aço são sempre maiores, quando comparados aos valores obtidos pelo modelo rígido plástico. A maior diferença encontrada foi para a viga V4, na qual a diferença foi de 6,44%. Contudo, quanto maior a resistência do concreto existe uma tendência de diminuição na diferença dos valores encontrados para os modelos. A Tabela 11 traz os percentuais de redução da armadura em comparação às vigas de concreto armado sem reforço de fibras (V1, V5 e V9).

Tabela 12 – Valores de redução da área de aço.

Exemplar	f_{ck} [MPa]	V_f [%]	Modelo Linear		Modelo Rígido plástico	
			As [cm ²]	Redução	As [cm ²]	Redução
V1	25,00	-	9,48		9,48	-
V2		0,250	9,16	3,5%	8,80	7,2%
V3		0,375	9,08	4,3%	8,65	8,8%
V4		0,500	8,94	5,8%	8,36	11,8%
V5	35,00	-	8,90		8,90	-
V6		0,250	8,58	3,5%	8,39	5,7%
V7		0,375	8,41	5,5%	8,11	8,8%
V8		0,500	8,31	6,6%	7,98	10,2%
V9	45,00	-	8,63		8,63	-
V10		0,250	8,36	3,1%	8,16	5,5%
V11		0,375	8,29	4,0%	8,06	6,6%
V12		0,500	8,21	4,9%	7,91	8,3%

Fonte: Autoria Própria (2021)

Como pode ser visto na Tabela 12, a maior redução da área de aço (11,8% de redução) foi obtida para a viga produzida com concreto com resistência à compressão de 25 MPa com volume de fibras de 0,5% considerando-se o modelo rígido plástico para representar o diagrama de tensões na seção. Percebe-se que ao se considerar o modelo linear, tende-se a ter reduções menores do que com o modelo rígido plástico e quanto maior é a resistência do concreto, menor é a diferença na área de armadura para ambos os modelos.

5 CONCLUSÃO

Conforme a revisão bibliográfica exposta neste trabalho, foi possível constatar que a norma que trata sobre projetos de estruturas de concreto reforçado com fibras, ABNT NBR 16935 (2021), se assemelha com os procedimentos dispostos no Modelo Código da *fib* (2021). Desse modo, a disseminação do conhecimento técnico acerca da utilização de elementos estruturais que são constituídos pelo CRF se torna mais facilitada, visto que há diversos estudos que sustentam os procedimentos tratados na norma brasileira, além dos conhecimentos difundidos sobre o concreto armado convencional que também se aplicam ao CRF.

Para os dados experimentais avaliados verificou-se que os procedimentos normativos da ABNT NBR 16935 (2021) se mostraram contra a segurança quando comparados aos valores últimos obtidos por ensaios experimentais. Os valores analíticos demonstram que a norma tende a superestimar a capacidade resistente dos elementos lineares. Os modelos de cálculos para a força cortante demonstram que o modelo I tende a estar mais próximo aos valores experimentais, visto que o valor do plano de ruptura menor que 45° tende a superestimar ainda mais a capacidade resistente.

As leis constitutivas demonstraram comportamentos distintos. De modo geral, o modelo linear tende a ter uma representatividade melhor, visto que o modelo utiliza o equilíbrio da seção transversal, enquanto que para o modelo rígido é somada a parcela de resistência proveniente das fibras. Foi possível observar que o modelo linear apresentou valores mais próximos aos experimentais na primeira análise, enquanto que para o modelo rígido plástico, os valores tenderam a ser superiores. Para a segunda análise, a redução da taxa de armadura conforme o aumento do volume de fibras era bem mais atenuada para o modelo linear quando comparados ao modelo rígido plástico, que apresentou taxas de redução maiores. Entende-se, portanto, que o modelo rígido plástico, por ser uma lei constitutiva mais simplificada, pode maximizar a atuação das fibras.

Por fim, este trabalho demonstrou as vantagens de utilização do CRF e o ganho da capacidade resistente de tração que as fibras proporcionam ao elemento estrutural. O valor de redução da área de armadura (A_s), conforme há um aumento no volume de fibras, não se apresentou muito significativo, sendo o máximo obtido no valor de 11,8%, equivalente a 1,12 cm². Ademais, os procedimentos normativos demonstraram valores insatisfatórios quando comparados aos experimentais, deixando uma lacuna na questão de garantir a segurança das estruturas de CRF para os exemplares analisados.

Contudo, vale destacar que estas conclusões são baseadas apenas para os resultados obtidos nesta monografia. Como há a necessidade de utilização de parâmetros experimentais, ressalta-se que os trabalhos selecionados têm grande influência nos resultados finais, podendo fornecer valores que contradizem aos expostos na literatura, devendo ser melhor investigado.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como visto, o concreto reforçado com fibras é uma alternativa para redução das desvantagens apresentadas pelo concreto simples. Porém, a consideração da parcela resistida pelas fibras em elementos estruturais depende de variáveis experimentais aplicação nos procedimentos normativos. Dessa forma, para melhores análises sobre a representatividade dos procedimentos normativos expostos na ABNT NBR 16935 (2021), sugere-se:

- 1) Ampliação da base de dados englobando diferentes materiais, tipos e geometrias de fibras;
- 2) Análise sobre o grau de segurança comparando os valores normativos aos resultados experimentais e;
- 3) Comparação dos resultados obtidos com outros procedimentos normativos disponíveis na literatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, A. C. 544. Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete. **ACI Committee 544**, 1999.

AMIN, A.; FOSTER, S. J. Shear strength of steel fibre reinforced concrete beams with stirrups. **Engineering Structures**, v. 111, p. 323–332, 2016.

ASLANI, F.; NEJADI, S. Self-compacting concrete incorporating steel and polypropylene fibers: Compressive and tensile strengths, moduli of elasticity and rupture, compressive stress-strain curve, and energy dissipated under compression. **Composites Part B: Engineering**, v. 53, p. 121–133, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15305**: Produtos pré-fabricados de materiais cimentícios reforçados com fibra de vidro - Procedimentos para o controle da fabricação. Rio de Janeiro: ABNT, 2005.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento Design. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8953**: Concreto para fins estruturais — Classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro: ABNT, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15530**: fibras de aço para concreto: requisitos e métodos de ensaio. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16935**: Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras — Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16940**: Concreto reforçado com fibras — Determinação das resistências à tração na flexão (limite de proporcionalidade e resistências residuais) — Método de ensaio. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16938**: Concreto reforçado com fibras — Controle da qualidade. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

BELLETTI, B. et al. Design Aspects on Steel Fiber-Reinforced Concrete Pavements. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 20, n. 9, p. 599–607, 2008.

BENTUR, A.; MINDESS, S. Concrete beams reinforced with conventional steel bars and steel fibres: properties in static loading. **International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete**, v. 5, n. 3, p. 199–202, 1983.

BURATTI, N.; MAZZOTTI, C.; SAVOIA, M. Post-cracking behaviour of steel and macro-synthetic fibre-reinforced concretes. **Construction and Building Materials**, v. 25, n. 5, p. 2713–2722, 2011.

BUTTIGNOL, T. E. T. et al. Verificação de vigas de concreto armado reforçadas com fibras no estado limite último. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 5, p. 997–

1024, 2018.

CARDOSO, D. C. T. et al. Influence of steel fibers on the flexural behavior of RC beams with low reinforcing ratios: Analytical and experimental investigation. **Composite Structures**, v. 222, n. 110926, p. 1–13, 2019.

CARNIO, M. A. Aspectos gerais sobre o uso do concreto reforçado com fibras no Brasil: produção, projeto, tecnologia, normalização. In: **Rrevista IBRACON Concreto & Construções**. 87. ed. São Paulo: [s.n.]. p. 26–32.

DE ALENCAR MONTEIRO, V. M.; LIMA, L. R.; DE ANDRADE SILVA, F. On the mechanical behavior of polypropylene, steel and hybrid fiber reinforced self-consolidating concrete. **Construction and Building Materials**, v. 188, p. 280–291, 2018.

DHAKAL, R. P.; WANG, C.; MANDER, J. B. Behavior of steel fibre reinforced concrete in compression. **International Symposium on Innovation & Sustainability of Structures in Civil Engineering Computers & Structures**. Nanjing, Jiangu, 2005.

DI PRISCO, M.; COLOMBO, M.; DOZIO, D. Fibre-reinforced concrete in fib Model Code 2010: Principles, models and test validation. **Structural Concrete**, v. 14, n. 4, p. 342–361, 2013.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 14651**: Test method for metallic fiberreinforced concrete – Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual), CEN, London., 2007.

FIB BULLETIN 65. **Model Code 2010, Final draft - Volume 1**. Lausanne: Fédération internationale du béton (fib), 2012.

FIGUEIREDO, A. D. Antônio Domingues de Figueiredo. **Boletim Técnico**, p. 68, 2000.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com fibras. In: **Concreto: Ciência e Tecnologia**. São Paulo: Instituto Brasileiro do Concreto - IBRACON, 2005.

FIGUEIREDO, A. D. DE. **Concreto reforçado com fibras**. 2011: Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Construção Civil, São Paulo, 2011.

FIGUEIREDO, A. D. DE. Os desafios para o uso do concreto reforçado com fibras como material estrutural. **Congresso Brasileiro de Concreto**, p. 1–19, 2014.

FIGUEIREDO, A. D. DE; NUNES, N. L.; TANESI, J. **Mix design analysis on steel fiber reinforced concrete**. 5th International RILEM Symposium on Fibre-Reinforced Concrete (FRC). **Anais...**Lyon: 2000

HENAGER, C. H. .; DOHERTY, T. J. Analysis of reinforced fibrous concrete beams. **J. Struct. Engrg., ASCE**, n. 1, p. 178–188, 1976.

IBRACON/ABECE. **Projeto de estruturas de concreto reforçado com fibras**. 1. ed. São Paulo: [s.n.].

JANSSON, A.; GYLLTOFT, K. Design methods for fibre-reinforced concrete : a state-of-the-

art review. **Nordic Concrete Research**, p. 21–36, 2008.

LEE, J.-H. Influence of concrete strength combined with fiber content in the residual flexural strengths of fiber reinforced concrete. **Composite Structures**, v. 168, p. 216–225, maio 2017.

LEE, J. H. et al. Experimental study of the reinforcement effect of macro-type high strength polypropylene on the flexural capacity of concrete. **Construction and Building Materials**, v. 126, p. 967–975, 2016.

LOPES, M. M. **Substituição Parcial De Armadura De Flexão Por Fibras De Aço Em Vigas De Concreto**. 2005: Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

MANSUR, M. A.; CHIN, M. S.; WEE, T. H. Stress-Strain Relationship of High-Strength Fiber Concrete in Compression. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 11, n. 1, p. 21–29, 1999.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: Ibracon, 2014.

OH, B. H. Flexural analysis of reinforced concrete beams containing steel fibers. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 10, p. 2821–2835, 1992.

RODRIGUES JÚNIOR, A. **Comportamento de Vigas de Concreto com Fibras e Baixas Taxas de Armadura Longitudinal**. 2009: Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

SWAMY, R. N. .; MANGAT, P. S. .; RAO, C. V. S. K. The Mechanics of Fiber Reinforcement of Cement Matrices. **Fiber Reinforced Concrete, SP-44, American Concrete Institute**, v. 44, p. 1–28, 1974.

APÊNDICE A – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NORMATIVOS

Nessa seção encontra-se o roteiro de cálculo utilizado neste trabalho. Como exemplificação, escolheu-se um exemplar sem fibras, para exposição dos procedimentos da ABNT NBR 6118 (2014), e outro com fibras, para aplicação da ABNT NBR 16935 (2021).

EXEMPLAR B0-450-10-450

Para a viga sem fibras, o exemplar escolhido foi o B0-450-10-450 moldado por Amin e Foster (2016). Todas suas características geométricas e resultados obtidos nos ensaios que são importantes para os cálculos estão apresentados na Tabela 13. Nota-se que pelo artigo publicado, o valor exposto era o da cortante máxima e de acordo com a configuração do ensaio, obteve-se o valor do momento solicitante máximo aplicado.

Tabela 13 - Dados do Exemplar B0-450-10-450.

GEOMETRIA [m]		Armadura Transversal	
b_w	0,30	Barras	ϕ10 c/ 45cm
h	0,70	f_{yw} [MPa]	447
d	0,622	A_s [cm²]	0,785
d'	0,078	s [cm]	45
Dosagem		Armadura Longitudinal	
f_{cm} [MPa]	34	Barras	6ϕ28
V_f [%]	0	f_{ys} [MPa]	540
E_c [GPa]	28	A_s [cm²]	36,95
Resultados Experimentais			
V_{EXP} [kN]	M_{EXP} [kN.m]	θ_{EXP}	
236	413	43°	

Fonte: Autoria Própria (2021)

a) Momento fletor resistente

Realizando as verificações para o ELU na flexão simples, temos que os cálculos do momento fletor resistente para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa são:

- $\alpha_c = 0,85$ e $\lambda = 0,8$

Desse modo, como há o conhecimento da armadura utilizada no elemento, pode-se utilizar a seguinte equação para obtenção da profundidade da linha neutra, apresentado a seguir. Ressalta-se que os próximos passos serão realizados para os coeficientes de ponderação iguais a 1, isto é, $\gamma_c = \gamma_s = 1$.

$$x = \frac{A_s \cdot \left(\frac{f_{yk}}{\gamma_s}\right)}{\alpha_c \cdot \lambda \cdot b_w \cdot \left(\frac{f_{ck}}{\gamma_c}\right)} = \frac{36,95 \cdot 54}{0,85 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 34000} = 0,2876 \text{ m} = 28,76 \text{ cm}$$

O próximo passo, portanto, é a obtenção do momento resistente de cálculo. Para isso, temos que pelo equacionamento do equilíbrio da seção transversal, no centro de gravidade da armadura longitudinal, é dado pela força de compressão atuante (R_{cc}) e o braço de alavanca obtido pela geometria ($z = d - (\lambda \cdot x)/2$).

$$R_{cc} = \alpha_c \cdot \lambda \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot x = 0,68 \cdot 34000 \cdot 0,3 \cdot 0,2876 = 1994,79 \text{ kN}$$

$$M_{R,NBR} = R_{cc} \cdot \left(d - \frac{\lambda \cdot x}{2}\right) = 1994,79 \cdot (0,622 - 0,4 \cdot 0,2876) = 1011,38 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{EXP}}{M_{R,NBR}} = \frac{413}{1011,38} = 0,41$$

b) Cálculo da força cortante resistente pelo Modelo I

O cálculo da força cortante é subdividido em 2 etapas: o cálculo da força resistente das diagonais comprimidas do concreto (V_{Rd2}) e o cálculo da força resistente de tração diagonal ($V_{R,NBR}$). Desse modo, a primeira verificação é apresentada a seguir.

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = \left(1 - \frac{34}{250}\right) = 0,864$$

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot d = 0,27 \cdot 0,864 \cdot 34000 \cdot 0,3 \cdot 0,622 = 1480,02 \text{ kN}$$

$$V_s \leq V_{Rd2,I} \rightarrow 236 \leq 1480,02 \text{ kN}$$

Para o cálculo da força resistente de tração diagonal pelo modelo I, $V_{R,NBR,I}$, tem-se que esse valor é obtido pela soma da parcela resistente da armadura transversal e dos mecanismos complementares da treliça. Desse modo, como no Exemplar B0-450-10-450

encontra-se a presença de armadura transversal na seção estudada, temos que calcular este valor. Caso contrário, $A_{sw} = 0$.

$$V_{R,NBR,I} = V_{sw} + V_c$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot \frac{f_{ywk}}{\gamma_s} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = \left(\frac{2 \cdot 0,785}{45} \right) \cdot 0,9 \cdot 62,2 \cdot 44,7 = 87,30 \text{ kN}$$

$$f_{ctd} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 34^{\frac{2}{3}} = 2,20 \text{ MPa} = 2200 \text{ kN/m}^2$$

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 2200 \cdot 0,3 \cdot 0,622 = 246,76 \text{ kN}$$

$$V_{R,NBR,I} = 87,30 + 246,76 = 334,05 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{EXP}}{V_{R,NBR,I}} = \frac{236}{334,05} = 0,71$$

c) Cálculo da força cortante resistente pelo Modelo II

Para os cálculos do modelo II, usa-se o valor experimental do ângulo da diagonal de compressão. Para o modelo II a norma considera o ângulo variando de 30° à 45° , porém neste trabalho aplicou-se o valor medido experimentalmente. No caso do exemplar estudado, tem-se que $\theta = 43^\circ$. Logo, para verificação da compressão diagonal nas bielas de concreto, tem-se:

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) = \left(1 - \frac{34}{250} \right) = 0,864$$

$$\begin{aligned} V_{Rd2,II} &= 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot d \cdot \sin^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \\ &= 0,54 \cdot 0,864 \cdot 34000 \cdot 0,3 \cdot 0,622 \cdot \sin^2 43 \cdot \cot 43 = 1476,42 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$V_s \leq V_{Rd2,I} \rightarrow 236 \leq 1476,42 \text{ kN}$$

O cálculo da força resistente de tração diagonal pelo modelo II, $V_{R,NBR,II}$, é dado pelos seguintes passos:

$$V_{R,NBR,II} = V_{sw} + V_c$$

$$\begin{aligned}
 V_{sw} &= \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot \frac{f_{yw}}{\gamma_s} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \sin \alpha \\
 &= \left(\frac{2 \cdot 0,785}{45} \right) \cdot 0,9 \cdot 62,2 \cdot 44,7 \cdot \cot 43 \cdot \sin 43 = 93,63 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$f_{ctd} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{\gamma_c} \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 34^{\frac{2}{3}} = 2,20 \text{ MPa} = 2200 \text{ kN/m}^2$$

Para cálculo da parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça na flexão simples pelo modelo II, tem-se as considerações a serem observadas. Desse modo:

$$V_{c,m\acute{a}x} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 2200 \cdot 0,3 \cdot 0,622 = 246,76 \text{ kN}$$

Como $V_{EXP} \leq V_{c,m\acute{a}x}$, logo, $V_c = V_{c,m\acute{a}x}$

$$V_{R,NBR,I} = 93,63 + 246,76 = 340,61 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{EXP}}{V_{R,NBR,I}} = \frac{236}{340,61} = 0,69$$

EXEMPLAR B25-0-0-0

Para a viga com adição de fibras, o exemplar escolhido foi o B25-0-0-0 moldado por Amin e Foster (2016). Todas suas características geométricas e resultados obtidos nos ensaios que são importantes para os cálculos estão apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 - Dados do Exemplar B0-450-10-450.

GEOMETRIA [m]		Armadura Transversal	
b_w	0,30	Barras	-
h	0,70	f_{yw} [MPa]	-
d	0,622	A_s [cm ²]	-
d'	0,078	s [cm]	-
Dosagem		Armadura Longitudinal	
f_{cm} [MPa]	34	Barras	6 ϕ 28
V_f [%]	0,3	f_{ys} [MPa]	540
E_c [GPa]	28	A_s [cm ²]	36,95
Resultados Experimentais			
V_{EXP} [kN]	M_{EXP} [kN.m]	θ_{EXP}	
274	479,5	30°	
$f_{0,5}$ [MPa]	f_{R1} [MPa]	f_{R3} [MPa]	
0,56	2,39	2,56	

Fonte: Aatoria Própria (2021)

a) Momento fletor resistente

Da mesma forma como foi realizado dos cálculos para o elemento linear sem fibras, temos que para o CRF algumas considerações são parecidas. Portanto, para $f_{ck} \leq 50$ MPa, tem-se:

- $\alpha_c = 0,85$ e $\lambda = 0,8$

i. Modelo Rígido Plástico

Para obtenção da profundidade da linha neutra pelo modelo rígido plástico e conhecendo a armadura longitudinal, utiliza-se o equacionamento para o CA, apresentado a seguir. Ressalta-se que os próximos passos serão realizados para os coeficientes de ponderação iguais a 1, isto é, $\gamma_c = \gamma_s = 1$.

$$x = \frac{A_s \cdot (f_{yk}/\gamma_s)}{\alpha_c \cdot \lambda \cdot b_w \cdot (f_{ck}/\gamma_c)} = \frac{36,95 \cdot 54}{0,85 \cdot 0,8 \cdot 30 \cdot 3,4} = 28,77 \text{ cm}$$

O modelo rígido plástico, como descrito anteriormente, ele é a consideração de uma parcela adicional de momento resistente à tração provenientes do uso de fibras. Desse modo, o momento resistente da seção (M_R) é dado pela soma do momento resistente da armadura longitudinal (M_A) e das fibras (M_u). Desse modo:

$$M_u = \frac{f_{R3} \cdot b_w \cdot h^2}{6} = \frac{2560 \cdot 0,30 \cdot 0,7^2}{6} = 62,72 \text{ kNm}$$

$$R_{cc} = \alpha_c \cdot \lambda \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot x = 0,68 \cdot 34000 \cdot 0,3 \cdot 0,2877 = 1995,49 \text{ kN}$$

$$M_A = R_{cc} \cdot \left(d - \frac{\lambda \cdot x}{2} \right) = 1995,49 \cdot (0,622 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,2877) = 1011,55 \text{ kNm}$$

$$M_{R,NBR} = M_A + M_u = 1011,55 + 62,72 = 1074,27 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{EXP}}{M_{R,NBR}} = \frac{479,5}{1074,27} = 0,45$$

ii. Modelo Linear

Diferentemente do rígido plástico, o modelo linear utiliza o equilíbrio da seção transversal, considerando a parcela resistente à compressão acima da linha neutra e a parcela resistente à tração abaixo. Nessa abordagem, há a necessidade de encontrar o valor da tensão de tração residual de cálculo do CRFA (f_{tud}). Com isso, necessita-se calcular a LN do concreto armado sem a consideração das fibras (X_{CA}) e a posição da LN do CRF (X_{CRF}), portanto:

$$x_{CA} = \frac{A_s \cdot (f_{yk}/\gamma_s)}{\alpha_c \cdot \lambda \cdot b_w \cdot (f_{ck}/\gamma_c)} = \frac{36,95 \cdot 54}{0,85 \cdot 0,8 \cdot 30 \cdot 3,4} = 28,77 \text{ cm}$$

Para o cálculo da abertura média de fissuras (s_r), deve-se então calcular a taxa efetiva de armadura (ρ_{te}). Ressalta-se que s_r deverá ser mais ou igual ao comprimento da fibra utilizada no exemplar (ℓ_f). Assim:

$$\rho_{tc} = \frac{A_s}{\frac{1}{3} \cdot (h - 1,2 \cdot x_{CA}) \cdot b_w} = \frac{0,003695}{\frac{1}{3} \cdot (0,7 - 1,2 \cdot 0,2877) \cdot 0,3} = 0,104$$

$$f_{ct} = 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0,3 \cdot 34^{\frac{2}{3}} = 3,14 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = 2 \cdot f_{ct} = 2 \cdot 3,14 = 6,28 \text{ MPa}$$

$$s_r = \frac{(f_{ct} - f_{0,5}) \cdot \phi_l}{2 \cdot \tau_b \cdot \rho_{tc}} = \frac{(3,14 - 0,56) \cdot 28}{2 \cdot 6,28 \cdot 0,104} = 55,3 \text{ mm}$$

$$s_r \geq \ell_f = 60 \text{ mm} \rightarrow s_r = 60 \text{ mm}$$

O comprimento característico é dado pelo menor valor entre a abertura média de fissuras e a distância da linha neutra calculada desprezando a presença de fibras até a borda tracionada. Obtidos esse parâmetro, realiza-se a compatibilização entre a abertura máxima de fissuras última (w_u) para a deformação última do CRF (ε_{FU}) de 2%.

$$\ell_{cs} = \min(s_r; (h - x_{CA})) = \min(60; 700 - 287,7) = 60 \text{ mm}$$

$$w_u = \min(1,5 \text{ mm}; \ell_{cs} \cdot \varepsilon_{FU}) = \min(1,5; 60 \cdot 0,02) = 1,2 \text{ mm}$$

Os procedimentos anteriores convergem para a obtenção do f_{Ftuk} . Ao final, é possível a obtenção da posição da linha neutra na seção transversal do CRF (X_{CRF}):

$$\begin{aligned} f_{Ftuk} &= 0,45 \cdot f_{R1} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot (0,65 \cdot f_{R1} - 0,5 \cdot f_{R3}) \\ &= 0,45 \cdot 2,39 - \frac{1,2}{1,5} \cdot (0,65 \cdot 2,39 - 0,5 \cdot 2,56) = 0,8567 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{CRF} &= \frac{A_s \cdot \left(\frac{f_{yk}}{\gamma_s}\right) + \left(\frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c}\right) \cdot h \cdot b_w}{\alpha_c \cdot \lambda \cdot b_w \cdot \left(\frac{f_{ck}}{\gamma_c}\right) + \left(\frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c}\right) \cdot b_w} = \frac{36,95 \cdot 54 + 0,08567 \cdot 70 \cdot 30}{0,85 \cdot 0,8 \cdot 30 \cdot 3,4 + 0,08567 \cdot 30} \\ &= 30,24 \text{ cm} \end{aligned}$$

Para obtenção do momento resistente de cálculo, temos que pelo equacionamento do equilíbrio da seção transversal, no centro de gravidade da armadura

longitudinal, a força de compressão atuante (R_{cc}) e a força de tração do contrato (R_{ct}) e o braço de alavanca obtido pela geometria para cada componente.

$$R_{cc} = \alpha_c \cdot \lambda \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot x = 0,68 \cdot 34000 \cdot 0,3 \cdot 0,3024 = 2097,45 \text{ kN}$$

$$R_{ct} = \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot (h - x) = 856,7 \cdot 0,3 \cdot (0,7 - 0,3024) = 102,2 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{R,NBR} &= R_{cc} \cdot \left(d - \frac{\lambda \cdot x}{2} \right) - R_{ct} \cdot \left[\left(\frac{h \cdot x}{2} \right) - d' \right] \\ &= 2097,45 \cdot (0,622 - 0,4 \cdot 0,3024) - 102,2 \cdot \left[\left(\frac{0,7 - 0,3024}{2} \right) - 0,078 \right] \\ &= 1038,48 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\frac{M_{EXP}}{M_{R,NBR}} = \frac{479,5}{1038,48} = 0,46$$

b) Cálculo da força cortante resistente pelo Modelo I

Para o cálculo da cortante do CRF considera-se a configuração da viga. Neste caso, trata-se de um elemento com armadura longitudinal e sem armadura transversal, portanto:

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{622}} = 1,567 \leq 2,0$$

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} = \frac{36,945}{30 \cdot 62,2} = 0,0198$$

Como no exemplar não há forças de proteção, portanto, $N_{ed} = 0$.

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{ed}}{A_c} = 0$$

$$f_{Ftuk} = 0,7 \cdot (0,06 \cdot f_{R1} + 0,3 \cdot f_{R3}) = 0,7 \cdot (0,06 \cdot 2,39 + 0,3 \cdot 2,56) = 0,6380 \text{ MPa}$$

$$f_{ctk} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 34^{\frac{2}{3}} = 2,20 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned}
V_{Rd,F} &= \left\{ \frac{0,18}{\gamma_c} \cdot k \left[100 \cdot \rho_1 \cdot \left(1 + 7,5 \frac{f_{Ftuk}}{f_{ctk}} \right) \cdot f_{ck} \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \cdot b_w \cdot d = \\
&= \left\{ 0,18 \cdot 1,567 \cdot \left[100 \cdot 0,0198 \cdot \left(1 + 7,5 \cdot \frac{0,6380}{2,20} \right) \cdot 34 \right]^{\frac{1}{3}} \right\} \cdot 300 \cdot 622 \\
&= 314689,62 \text{ N} = 314,69 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Para o cálculo da força resistente a cortante, tem-se que ela é dada pela soma da parcela resistente da armadura transversal e do CRF. Desse modo, como no Exemplar B25-0-0-0 não há a presença de armadura transversal na seção estudada, $A_{sw} = 0$.

$$V_{R,NBR,I} = V_{sw} + V_{Rd,F}$$

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot \frac{f_{yw}}{\gamma_s} \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = 0 \text{ kN}$$

$$V_{R,NBR,I} = 0 + 333,82 = 314,69 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{EXP}}{V_{R,NBR,I}} = \frac{274}{314,69} = 0,87$$

c) Cálculo da força cortante resistente pelo Modelo II

Para os cálculos do modelo II, como não há armadura transversal na seção estudada, o valor permanece o mesmo do Modelo I, já que $V_{sw} = 0$ e a parcela $V_{R,F}$ não tem influencias sobre o ângulo do plano da ruptura.

APÊNDICE B – ÁREA DE AÇO PARA ELEMENTOS LINEARES SOB FLEXÃO SIMPLES

a) Modelo Rígido Plástico

Objetivando o dimensionamento de elementos lineares reforçados com fibras, primeiramente fez-se necessário a fixação da geometria dos elementos e adoção do modelo estativo para obtenção dos esforços. Portanto, escolheu-se uma carga linearmente distribuída de 50 kN/m e um vão de 4 m. O momento máximo solicitante característico (M_{sk}) obtido é de 100 kN.m. A Tabela 15 mostra a geometria da viga e os resultados dos ensaios de flexão de 3 pontos e de compressão que são necessários para o dimensionamento. Os dados de tração residual experimentais foram retirados de Lee (2017).

Tabela 15 – Dados da viga V1 adotada para dimensionamento.

GEOMETRIA [m]		DOSAGEM [MPa]	
b_w	0,2	f_{ck}	25
h	0,45	f_L	4,492
d	0,41	f_{R1}	2,666
d'	0,04	f_{R3}	2,602

Fonte: Autoria Própria (2021)

Para aplicação estrutural com objetivo a ter uma redução da armadura (substituição total ou parcial), a norma fornece duas relações para serem atendidas.

$$\frac{f_{R1k}}{f_{Lk}} = \frac{0,7 \cdot 2,666}{0,7 \cdot 4,492} = 0,59 \geq 0,40 \rightarrow OK$$

$$\frac{f_{R3k}}{f_{R1k}} = \frac{0,7 \cdot 2,602}{0,7 \cdot 2,666} = 0,97 \geq 0,50 \rightarrow OK$$

Como o modelo adotado para os procedimentos de dimensionamento é o rígido linear, há a necessidade de calcular o momento resistido pelas fibras (M_u), afim de encontrar o momento resistido pela armadura (M_A).

$$M_u = \frac{f_{R3d} \cdot b \cdot h^2}{6} = \frac{0,7 \cdot 2602}{1,5} \cdot 0,2 \cdot 0,45^2}{6} = 8,209 \text{ kNm}$$

$$M_A = M_{sd} - M_u = 100 \cdot 1,4 - 8,209 = 131,79 \text{ kNm}$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left(\frac{M_A}{\alpha \cdot b_w \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} = \frac{0,41 \pm \sqrt{0,41^2 - 2 \cdot \left(\frac{131,79}{0,85 \cdot 0,2 \cdot 25000 / 1,4} \right)}}{0,8}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,87 \text{ m} \\ x_2 = 0,158 \text{ m} \end{cases} \rightarrow x = 0,158 \text{ m}$$

Pelo valor da linha neutra, é possível a determinação das deformações e assim, saber em qual domínio que o elemento está atuando. Desse modo, é possível observar se a armadura já atingiu o valor de escoamento. O domínio 2 varia de $x = 0$ até $x_{23} = 0,259d = 0,11$ m. O domínio 3 varia de $x_{23} = 0,11$ m até $x_{34} = 0,45d = 0,18$ m. Desse modo, a viga está trabalhando no domínio 2 e $f_s = f_{yd}$. A armadura necessária é calculada a seguir.

$$A_s = \frac{M_A}{f_s \cdot (d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x)} = \frac{131,79}{50 / 1,15 \cdot (0,41 - 0,5 \cdot 0,80 \cdot 0,158)} = 8,802 \text{ cm}^2$$

A última verificação importante a ser feita é a deformação do CRF na tração (ϵ_{Fu}) que não pode ser superior a 2%. Desse modo:

$$\frac{\epsilon_{cu}}{x} = \frac{\epsilon_{Fu}}{(h - x)} \Rightarrow \epsilon_{Fu} = \frac{(0,45 - 0,158) \cdot 0,35}{0,158} = 0,65\%$$

b) Modelo Linear

Adota-se a mesma carga linearmente distribuída de 50 kN/m e um vão de 4 m conforme aplicado para o Modelo Rígido Plástico. Todos os demais dados estão presentes na Tabela 15.

Nesta etapa os procedimentos realizados são de acordo com o Modelo linear, assim, primeiramente, há a necessidade da obtenção do valor de f_{Ftud} . Desse modo, realiza-se a simplificação de que s_r é igual ao comprimento da fibra utilizada, pois e encontra-se a linha neutra considerando o concreto sem fibras (X_{CA}). Assim:

$$s_r = \ell_f = 60 \text{ mm}$$

$$x_{CA} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left(\frac{M_{sd}}{\alpha \cdot b_w \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} = \frac{0,41 \pm \sqrt{0,41^2 - 2 \cdot \left(\frac{140}{0,85 \cdot 0,2 \cdot 25000 / 1,4} \right)}}{0,8}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,849 \text{ m} \\ x_2 = 0,170 \text{ m} \end{cases} \rightarrow x_{CA} = 0,170 \text{ m}$$

$$\ell_{cs} = \min(s_r; (h - x_{CA})) = \min(60; 700 - 170) = 60 \text{ mm}$$

$$w_u = \min(1,5 \text{ mm}; \ell_{cs} \cdot \varepsilon_{Fu}) = \min(1,5; 60 \cdot 0,02) = 1,2 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} f_{Ftuk} &= 0,7 \cdot \left[0,45 \cdot f_{R1} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot (0,65 \cdot f_{R1} - 0,5 \cdot f_{R3}) \right] \\ &= 0,7 \cdot \left[0,45 \cdot 3,139 - \frac{1,2}{1,5} \cdot (0,65 \cdot 3,139 - 0,5 \cdot 3,191) \right] = 0,740 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Desse modo é possível a obtenção da posição da linha neutra da viga pela equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, cujos coeficientes são dados a seguir:

$$a = 0,5 \cdot b_w \cdot (\alpha \cdot \lambda^2 \cdot f_{cd} + f_{Ftud}) = 0,5 \cdot 0,2 \cdot \left(0,85 \cdot 0,8^2 \cdot \frac{25000}{1,4} + \frac{740}{1,5} \right) = 1020,76$$

$$\begin{aligned} b &= f_{Ftud} \cdot b_w \cdot (d' - h) - \alpha \cdot \lambda \cdot d \cdot f_{cd} \cdot b_w \\ &= \frac{740}{1,5} \cdot 0,2 \cdot (0,04 - 0,45) - 0,85 \cdot 0,8 \cdot 0,41 \cdot \frac{25000}{1,4} \cdot 0,2 = -1036,17 \end{aligned}$$

$$c = M_{sd} + f_{Ftud} \cdot b_w \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) = 140 + \frac{740}{1,5} \cdot 0,2 \cdot 0,45 \cdot \left(\frac{0,45}{2} - 0,04 \right) = 148,21$$

Encontra-se a posição da linha neutra pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{1036,17 \pm \sqrt{1036,17^2 - 4 \cdot 1020,76 \cdot 148,21}}{2 \cdot 1020,76}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,843 \text{ m} \\ x_2 = 0,173 \text{ m} \end{cases} \rightarrow x = 0,173 \text{ m}$$

Por fim, para encontrar a taxa de armadura, tem-se:

$$R_{cc} = \alpha_c \cdot \lambda \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot x = 0,68 \cdot \frac{25000}{1,4} \cdot 0,2 \cdot 0,173 = 420,14 \text{ kN}$$

$$R_{ct} = \frac{f_{Ftuk}}{\gamma_c} \cdot b_w \cdot (h - x) = \frac{740}{1,5} \cdot 0,2 \cdot (0,45 - 0,173) = 27,33 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{R_{cc} - R_{ct}}{f_s} = \frac{420,14 - 27,33}{50/1,15} = 9,156$$

A última verificação importante a ser feita é a deformação do CRF na tração (ϵ_{Fu}) que não pode ser superior a 2%. Desse modo:

$$\frac{\epsilon_{cu}}{x} = \frac{\epsilon_{Fu}}{(h - x)} \Rightarrow \epsilon_{Fu} = \frac{(0,45 - 0,173) \cdot 0,35}{0,173} = 0,56\%$$