

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

MÁRCIO RICARDO MORELLI DE MEIRA

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE DO  
DESVIO DO NOMINAL EM PEQUENOS LOTES  
DE PRODUÇÃO**

SÃO CARLOS

2021

MÁRCIO RICARDO MORELLI DE MEIRA

**ANÁLISE DO DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE DO  
DESVIO DO NOMINAL EM PEQUENOS LOTES  
DE PRODUÇÃO**

Dissertação apresentada ao Departamento de pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Dr. Pedro Carlos Oprime.


SÃO CARLOS

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

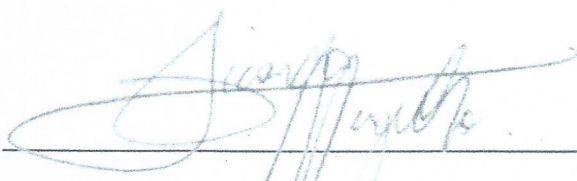
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**FOLHA DE APROVAÇÃO**



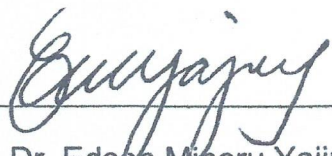
---

Orientador Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime  
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)



---

Prof. Dr. Ricardo Coser Mergulhão  
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)



---

Prof. Dr. Edson Minoru Yajima  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC PR)

*Quando os ventos da mudança sopram, alguns constroem muralhas,  
enquanto outros constroem moinhos de vento.*

*Provérbio chinês*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, acima de tudo, por ter permitido a realização deste sonho pessoal pelo qual tenho lutado.

Agradeço ao meu mentor e amigos espirituais, sem os quais eu definitivamente nada teria feito.

Agradeço à minha mãe de um modo especial, por todo amor incondicional, e ao meu irmão, Prof. Dr. Marcel Ronaldo Morelli de Meira.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Carlos Oprime, pela paciência, dedicação e pelos inestimáveis ensinamentos, imprescindíveis para a conclusão deste trabalho.

Agradeço à Profa. Dra. Fabiane Letícia Lizarelli, ao Prof. Dr. Ricardo Coser Mergulhão e ao Prof. Dr. Edson Minoru Yajima, pela valiosa contribuição durante a qualificação e defesa do trabalho.

Agradeço, por fim, à minha noiva, Poliana Maria Albrechet, que apareceu só no finzinho, mas fez uma enorme diferença.

## RESUMO

Desde que propostos originalmente por Shewhart, na década de 20, os gráficos de controle são amplamente utilizados pelas empresas de manufatura para o monitoramento e controle de processos produtivos. O objetivo dos gráficos é detectar causas especiais de modo que ações corretivas sejam tomadas, sempre que necessário, garantindo estabilidade e capacidade ao processo. Ao longo dos anos, os sistemas de produção sofreram mudanças. O conceito de produção enxuta ganhou espaço e o uso dos gráficos de controle de Shewhart nesses ambientes passou a ser questionado. Métodos específicos foram desenvolvidos, devido à possibilidade de violação de pressupostos fundamentais e a indisponibilidade de dados para estimativa precisa de parâmetros. Dentre os principais métodos específicos, encontra-se o gráfico de controle do desvio do nominal. No entanto, Montgomery (2014) destaca alguns aspectos importantes, como por exemplo, a influência da variação do processo no seu desempenho. Este trabalho estuda o efeito da estimativa de parâmetros e a influência da variação do processo no desempenho do gráfico de controle do desvio do nominal através do método do *Average Run Length* (ARL) e propõe ajustes nos limites de controle de modo que seu uso seja otimizado em pequenos lotes de produção. Para isso, o método de pesquisa utilizado foi a modelagem e simulação computacional. Os resultados encontrados validaram as proposições apresentadas pela literatura, constatando-se que gráficos de controle construídos com parâmetros estimados, ao invés de conhecidos, apresentam um desempenho inferior ao esperado. Também foi constatada uma influência significativa da variação do processo no desempenho do gráfico de controle. No entanto, ficou demonstrado também que pequenos ajustes nos limites de controle podem viabilizar seu uso em ambientes enxutos de produção.

**Palavras-chave:** Gráficos de controle; Pequenos lotes de produção; Desempenho de gráficos de controle.

## ABSTRACT

Since originally proposed by Shewhart in the 1920s, control charts are widely used by manufacturing companies to monitor and control production processes. The purpose of the control charts is to detect special causes so that corrective actions are taken, whenever necessary, ensuring stability and capacity to the process. Over the years, production systems have changed. The concept of lean manufacturing has gained more space and the use of Shewhart control charts in these environments has been questioned. Specific methods were developed from there, due to the possibility of fundamental assumptions violation and unavailability of data for an accurate parameters estimation. Among the main specific methods, there is the deviation from nominal control chart. However, Montgomery (2014) highlights some essential aspects, such as, for example, the influence of process variation on its performance. This work studies the effect of parameters estimation and the influence of process variation on the deviation from nominal control chart performance through the Average Run Length (ARL) method and proposes some adjustments on the control limits so that its use is optimized in small production batches. For this, the research method used was modeling and computer simulation. The results found validated the propositions presented by the literature, verifying that the control charts built with estimated parameters, instead of known ones, present a lower performance than expected. There was a significant influence of the process variation on the performance of the control chart. However, it has also been demonstrated that small adjustments on the control limits can make it enable on lean manufacturing environments.

**Keywords:** Control charts; Small batches; Performance of control charts.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Resumo do método de pesquisa.....	22
Figura 2: Vantagens com uso de gráficos de controle .....	23
Figura 3: Sistemas de produção em função do volume .....	34
Figura 4: Curva de distribuição normal.....	40
Figura 5: Procedimento construtivo dos gráficos de controle .....	42
Figura 6: Erro tipo I.....	44
Figura 7: Erro tipo II.....	45
Figura 8: Modelagem e simulação .....	49



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Fatores construtivos para os gráficos de média e amplitude.....	29
Tabela 2: Fatores construtivos para os gráficos de média e desvio padrão.....	32
Tabela 3: Exemplo de construção de um gráfico do desvio do nominal.....	37
Tabela 4: Comparativo ARL para $n = 5, 10$ e $15$ para $k = 3$ .....	58
Tabela 5: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 10$ .....	59
Tabela 6: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 15$ .....	59
Tabela 7: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 20$ .....	60
Tabela 8: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 25$ .....	60
Tabela 9: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 30$ .....	61
Tabela 10: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 35$ .....	61
Tabela 11: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 40$ .....	62
Tabela 12: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 200$ e $n = 5$ .....	62
Tabela 13: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 200$ e $n = 10$ .....	63
Tabela 14: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para $m = 200$ e $n = 15$ .....	63
Tabela 15: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e $k = 3$ .....	64
Tabela 16: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 0,5% no desvio padrão e $k = 3$ .....	64
Tabela 17: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 1% no desvio padrão e $k = 3$ .....	65
Tabela 18: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 3% no desvio padrão e $k = 3$ .....	65
Tabela 19: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 5% no desvio padrão e $k = 3$ .....	65
Tabela 20: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 10% no desvio padrão e $k = 3$ .....	66
Tabela 21: Comparativo ARL para $n = 5, 10$ e $15$ para $k = 3, 15$ .....	66
Tabela 22: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e $k = 3, 15$ .....	67

Tabela 23: ARL do gráfico com variação de 0,5% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,15$ .....	67
Tabela 24: ARL do gráfico com variação de 1% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,15$ .....	67
Tabela 25: ARL do gráfico com variação de 3% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,15$ .....	67
Tabela 26: ARL do gráfico com variação de 5% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,15$ .....	68
Tabela 27: ARL do gráfico com variação de 10% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,15$ .....	68
Tabela 28: Comparativo ARL para $n = 5, 10$ e $15$ para $k = 3,30$ .....	68
Tabela 29: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e $k = 3,30$ .....	68
Tabela 30: ARL do gráfico com variação de 0,5% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,30$ .....	69
Tabela 31: ARL do gráfico com variação de 1% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,30$ .....	69
Tabela 32: ARL do gráfico com variação de 3% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,30$ .....	69
Tabela 33: ARL do gráfico com variação de 5% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,30$ .....	69
Tabela 34: ARL do gráfico com variação de 10% no desvio padrão dos produtos e $k = 3,30$ .....	69
Tabela 35: Comparativo ARL sem alteração no desvio padrão .....	70
Tabela 36: Comparativo ARL com alteração de 0,5% no desvio padrão .....	70
Tabela 37: Comparativo ARL com alteração de 1% no desvio padrão .....	70
Tabela 38: Comparativo ARL com alteração de 3% no desvio padrão .....	70
Tabela 39: Comparativo ARL com alteração de 5% no desvio padrão .....	71
Tabela 40: Comparativo ARL com alteração de 10% no desvio padrão .....	71

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Gráfico da média desvio do nominal.....	38
Gráfico 2: Gráfico da amplitude desvio do nominal.....	38

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Fontes utilizadas para revisão da literatura .....	21
Quadro 2: Fórmulas para cálculo do ARL .....	56

## LISTA DE SIGLAS

ARL Average Run Length.

CCO Curva Característica de Operação.

CEP Controle Estatístico do Processo.

CS Comprimento de Sequência.

CMS Comprimento Médio de Sequência.

CQ Controle da Qualidade.

CUSUM Cumulative Sum.

DNOM Deviation from Nominal.

EWMA Exponentially Weighted Moving Average.

ICP Índice de Capacidade do Processo.

IIND Independente e Identicamente Normalmente Distribuído.

JIT Just In Time.

LC Linha Central.

LIC Limite Inferior de Controle.

LSC Limite Superior de Controle.

PD Poder de Detecção.

RL Run Length.

SFM Sistemas Flexíveis de Manufatura.

## LISTA DE SÍMBOLOS

R Amplitude.

$\bar{R}$  Amplitude média.

$\overline{MR}$  Amplitude média móvel.

$k$  Deslocamento da linha central.

$\delta$  Deslocamento da média.

$\lambda$  Deslocamento do desvio padrão.

$\sigma$  Desvio padrão.

$\hat{\sigma}$  Desvio padrão estimado.

S Desvio padrão amostral.

$\bar{S}$  Desvio padrão médio.

$p$  Fração não-conforme.

$f$  Função.

$\mu$  Média.

$\bar{X}$  Média.

$\bar{x}$  Média geral.

$\tilde{X}$  Mediana.

$\bar{\tilde{X}}$  Mediana média.

M Medida da característica da qualidade.

T Medida nominal da característica da qualidade.

$\notin$  Não pertence.

$m$  Número de amostras.

$c$  Número de não-conformidades por amostra.

$u$  Número de não-conformidades por unidade.

$D$  Número de unidades não-conformes na amostra.

$np$  Número de unidades não-conformes por amostra.

$\bar{u}$  Número médio de não-conformidades por unidade.

$n\bar{p}$  Número médio de unidades não-conformes por amostra.

$\in$  Pertence.

P Probabilidade.

$\alpha$  Probabilidade de erro tipo I.

$\beta$  Probabilidade de erro tipo II.

$n$  Tamanho da amostra.

$\mu_0$  Valor alvo.

$Z$  Variável de distribuição.

$\Phi$  Variável de distribuição acumulada.

$W$  Variável de distribuição.

$U$  Variável de distribuição.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	17
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA.....	17
1.2 OBJETIVO GERAL DO TRABALHO.....	19
1.3 JUSTIFICATIVA .....	20
1.4 MÉTODO DE PESQUISA .....	20
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	22
2 REVISÃO DA LITERATURA .....	23
2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE DE SHEWHART .....	24
2.1.1 Gráficos de controle para atributos .....	25
2.1.2 Gráficos de controle para variáveis .....	27
2.2 CONTROLE ESTATÍSTICO DE PEQUENOS LOTES .....	32
2.2.1 Definições e problemas característicos .....	33
2.2.2 Principais gráficos de controle e estudos recentes .....	35
2.2.3 Gráficos de controle do desvio do nominal.....	36
2.3 PRESSUPOSTOS FUNDAMENTAIS.....	40
2.4 PROCEDIMENTO CONSTRUTIVO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE .....	41
2.5 ANÁLISE DO DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE .....	43
2.5.1 Erro tipo I.....	43
2.5.2 Erro tipo II.....	45
2.5.3 Average run length .....	47
3 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	49
3.1 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 1 .....	50
3.2 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 2 .....	52
3.3 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 3.....	53
3.4 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 4 .....	55
4. ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	58
4.1 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO NO CASO 1 .....	58
4.2 CÁLCULO E COMPARAÇÃO DO ARL NOS DEMAIS CASOS.....	58
4.3 SIMULAÇÃO DO ARL DO GRÁFICO DE CONTROLE SEM ALTERAÇÃO NO DESVIO PADRÃO.....	63
4.4 SIMULAÇÃO DO ARL DO GRÁFICO DE CONTROLE COM ALTERAÇÃO GRADUAL NO DESVIO PADRÃO .....	64



4.5 PROPOSTA DE AJUSTE DOS LIMITES DE CONTROLE .....	66
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS .....	72
REFERÊNCIAS.....	74
APÊNDICE A MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 1.....	82
APÊNDICE B MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 2.....	83
APÊNDICE C MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 3 .....	84
APÊNDICE D MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 4 .....	85
APÊNDICE E MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL SEM VARIAÇÃO NO DESVIO PADRÃO .....	86
APÊNDICE F MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 0,5% NO DESVIO PADRÃO .....	88
APÊNDICE g MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 1% NO DESVIO PADRÃO.....	90
APÊNDICE H MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 3% NO DESVIO PADRÃO.....	92
APÊNDICE I MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 5% NO DESVIO PADRÃO.....	94
APÊNDICE J MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 10% NO DESVIO PADRÃO.....	96

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

O Controle Estatístico de Processo (CEP) é amplamente empregado pelas organizações industriais para análise e melhoria da qualidade, compreendendo um conjunto de ferramentas estatísticas utilizadas para monitorar e controlar processos produtivos (SMITH, 1947; WOODALL, 1985; BAKER e BROBST, 1996; GRAVES, MURPHY e RINGUEST, 1999; QIN, 2003; CHAKRABORTI, 2006; JENSEN *et al.*, 2006; ELG, OLSSON e DAHLGAARD, 2008; CASTAGLIOLA, CELANO e CHEN, 2009; SAMOHYL, 2009; YU e LIU, 2011; CASTAGLIOLA, CELANO e FICHERA, 2013).

Os gráficos de controle, propostos originalmente por Shewhart, consistem em uma das principais ferramentas do CEP e são usados sistematicamente com o propósito de monitorar a variação de processos, a fim de se detectar tão logo possível a ocorrência de causas especiais (BAKER e BROBST, 1996; GRAVES, MURPHY e RINGUEST, 1999; QIN, 2003; CHAKRABORTI, 2006; JENSEN *et al.*, 2006; ELG, OLSSON e DAHLGAARD, 2008; CASTAGLIOLA, CELANO e CHEN, 2009; YU e LIU, 2011; MONTGOMERY, 2014).

Nos métodos paramétricos, tais gráficos são construídos sobre pressupostos fundamentais de normalidade, independência e homocedasticidade, ou seja, as amostras coletadas para construção dos gráficos devem ser provenientes de uma população de dados Independentes e Identicamente Normalmente Distribuídos (IIND) (ALWAN, 2007; SAMOHYL, 2009; KORZENOWSKI e WERNER, 2012; MONTGOMERY, 2014; GU *et al.*, 2014).

Embora reconhecidamente eficientes em sistemas de produção de larga escala, o uso dos gráficos de controle de Shewhart em ambientes enxutos de produção pode não ser uma boa opção. Isso porque a falta de dados do processo pode violar seus pressupostos construtivos fundamentais, possibilitando a interpretação equivocada dos resultados (HILLIER, 1969; MOOD *et al.*, 1974; CULLEN e BOTHE, 1989; CROWDER, 1992; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; KIM e SCHNIEDERJANS, 2000; CHAKRABORTI, 2006; HO e TRINDADE, 2009;

CELANO *et al.*, 2010; CELANO *et al.*, 2013; GU, JIA e YOU, 2014; GU *et al.*, 2014; WIEDERHOLD *et al.*, 2016; AYKROYD, LEIVA e RUGGERI, 2019).

Castillo e Montgomery (1994) esclarecem que, além do aumento significativo na taxa de erros tipo II, limites de controle calculados a partir de um número pequeno de subgrupos podem ocasionar uma taxa expressiva de falsos alarmes, ou erros tipo I. Além de problemas conceituais, Cullen e Bothe (1989) destacam problemas práticos que também podem ser observados, como por exemplo:

- Inspeção de peças em excesso, gerando custos desnecessários;
- Procedimento confuso, devido ao alto número de gráficos utilizados;
- Dados insuficientes para detectar tendências no processo, tornando o controle ineficiente.

O gráfico de controle do desvio do nominal é uma das alternativas específicas encontradas na literatura para o monitoramento de processos produtivos de pequena escala. Contudo, dentre outras condições, Montgomery (2014) destaca que a variação do processo, medida através do desvio padrão, tem de ser a mesma, ou pelo menos a mais próxima, para se garantir o melhor desempenho possível ao gráfico de controle (CULLEN e BOTHE, 1989; CROWDER, 1992; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; HO e TRINDADE, 2009; CELANO, CASTAGLIOLA e TROVATO, 2012; CAPIZZI e MASSAROTTO, 2012; MONTGOMERY, 2014).

Diante do exposto, surgem algumas questões indispensavelmente importantes a serem analisadas:

- Como é o desempenho do gráfico de controle do desvio do nominal construído com parâmetros estimados, ao invés de conhecidos?
- Qual é a influência da variação do processo no desempenho do gráfico de controle?
- Quantas amostras são realmente necessárias para garantir um bom desempenho do gráfico?
- Como os limites de controle podem ser ajustados para compensar os efeitos de uma suposta falta de dados?

De acordo com Oprime *et al.* (2016), pesquisas recentes têm sido conduzidas com o propósito de analisar o desempenho de gráficos de controle com parâmetros estimados, a fim de se estabelecer novos procedimentos para minimizar o risco de interpretações equivocadas dos resultados durante a fase de monitoramento do processo. Segundo Costa, Epprescht e Carpinetti (2014), aumentando-se o deslocamento dos limites de controle com relação à linha central, diminui-se também a probabilidade de erro do tipo I, o que, por consequência, resulta em um melhor desempenho para o gráfico de controle.

## 1.2 OBJETIVO GERAL DO TRABALHO

O objetivo geral deste trabalho, portanto, é analisar o desempenho do gráfico de controle do desvio do nominal, através da comparação entre o *Average Run Length* (ARL) do gráfico, ou Comprimento Médio de Sequência (CMS), calculado através de modelos matemáticos precisos, com o ARL de um gráfico de controle construído sob condições ideais, ou seja, com média e desvio padrão conhecidos, verificar a influência da variação do processo no desempenho do gráfico e propor ajustes nos limites de controle do gráfico de modo que seu uso seja viável em sistemas de produção de pequena escala. Para isso, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Calcular o ARL de um gráfico de controle sob condições ideais e de gráficos com parâmetros estimados a fim de se demonstrar o efeito da estimativa de parâmetros no desempenho dos gráficos de controle;
- Simular o ARL do gráfico de controle do desvio do nominal com parâmetros estimados, sem alteração no desvio padrão inicialmente;
- Simular o ARL do mesmo gráfico com variação gradual de 0,5, 1, 3, 5 e 10% no desvio padrão dos produtos;
- Comparar o ARL obtido de cada gráfico com o ARL do gráfico de controle ideal;
- Identificar a influência da variação do processo no ARL do gráfico;
- Propor correções no valor de  $k$  para nova estimativa dos limites de controle do gráfico.

Para modelagem matemática, cálculo e simulação do ARL dos gráficos de controle foi utilizado o *software* Maple 2016.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

São inúmeras as vantagens de se monitorar e controlar estatisticamente um processo produtivo (SANTOS *et al.*, 2019). Contudo, a literatura reconhece que os métodos tradicionais podem não ser tão eficientes em sistemas de produção flexíveis e customizados. Verifica-se que esses ambientes são susceptíveis a violação de suposições fundamentais e também a estimativas imprecisas de parâmetros (HILLIER, 1969; CULLEN e BOTHE, 1989; CASTILLO *et al.*, 1996; CAPIZZI e MASSAROTTO, 2012; CELANO *et al.*, 2013; CASTAGLIOLA, CELANO e FICHERA, 2013; GU, KOH, CHIN e KAMARUDDIN, 2019).

Entretanto, desde que implementado corretamente, e sob condições de uso apropriadas, o gráfico de controle do desvio do nominal pode ser uma medida eficiente para o monitoramento e controle de pequenos lotes de produção. Definir então a variação máxima aceitável para escolha adequada do grupo de produtos e estabelecer limites de controle válidos para o gráfico são aspectos cruciais para otimizar o uso da ferramenta (HILLIER, 1969; CULLEN e BOTHE, 1989; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; CASTILLO *et al.*, 1996; CELANO *et al.*, 2013; CASTAGLIOLA, CELANO e FICHERA, 2013; MONTGOMERY, 2014; ALKHAF AJI e OBEIDY, 2018).

### 1.4 MÉTODO DE PESQUISA

Para alcançar o objetivo pretendido, este trabalho foi desenvolvido em duas etapas. Na primeira etapa foi realizada uma revisão da literatura sobre gráficos de controle, seus pressupostos fundamentais, procedimento construtivo e efeitos causados pela estimativa de parâmetros no desempenho dos gráficos. Também foram pesquisados os principais gráficos de controle para pequenos lotes de produção, estudos recentes e o desenvolvimento conceitual do gráfico de controle do desvio do nominal.

O Quadro 1 apresenta as fontes de pesquisa utilizadas na etapa de revisão da literatura.

Quadro 1: Fontes utilizadas para revisão da literatura

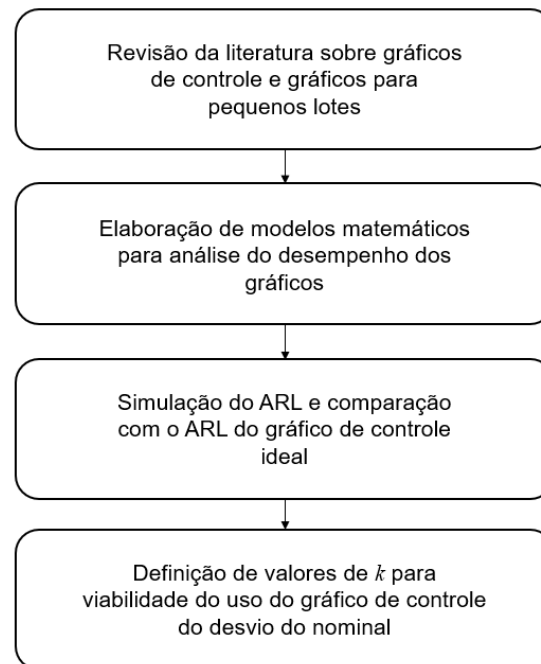
Fonte (endereço)	Descrição	Acesso
SciELO Scientific Electronic Library Online (www.scielo.br)	Biblioteca eletrônica que abrange uma coleção de periódicos científicos brasileiros	Livre
Web of Science (http://apps-webofknowledge.ez31.periodicos.capes.gov.br)	Base de dados multidisciplinar desenvolvida pelo Institute for Scientific Information (ISI)	Restrito
Scopus (www.scopus.com)	Base de dados multidisciplinar desenvolvida pela editora Elsevier	Restrito
Periódicos Capes (www.periodicos.capes.gov.br)	Seleção de bases de dados, páginas, portais e bibliotecas virtuais de acesso livre à produção científica de todas as áreas de conhecimento mantida pelo Portal Capes	Restrito

Fonte: Autor (2021)

Na segunda etapa do trabalho foi utilizado o método de modelagem matemática. Foram desenvolvidos modelos matemáticos para cada gráfico de controle e realizadas rodadas de cálculo para estudar o desempenho dos gráficos em cada condição. Para entender o efeito da estimativa de parâmetros e definir um número mínimo de amostras necessárias, neste caso, o ARL médio dos gráficos de controle construídos com parâmetros estimados foi comparado com o ARL de um gráfico de controle ideal.

Considerando-se as condições apresentadas pela literatura para uso adequado dos gráficos de controle do desvio do nominal, foi desenvolvido um modelo matemático a fim simular e comparar também seu desempenho com o desempenho do gráfico de controle ideal. Para simulação do ARL, inicialmente, foi considerado o mesmo desvio padrão de quatro produtos hipotéticos e, posteriormente, uma variação gradual de 0,5, 1, 3, 5 e 10% no desvio padrão dos produtos, considerando  $k = 3$ ,  $k = 3,15$  e  $k = 3,30$ , ou seja, um aumento de 5 e 10% no número de desvios padrão para cálculo dos limites de controle. A Figura 1 apresenta o resumo do método de pesquisa adotado em formato de fluxograma.

Figura 1: Resumo do método de pesquisa



Fonte: Autor (2021)

## 1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

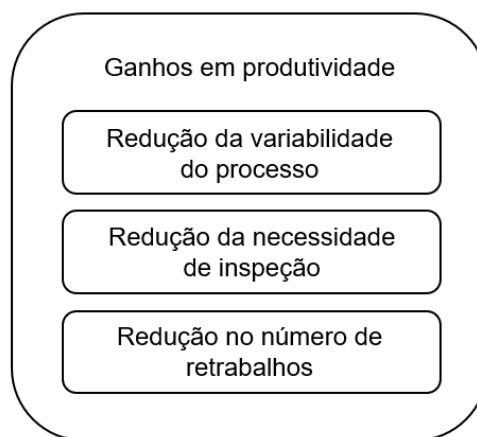
A presente dissertação organiza-se em cinco capítulos, além de um conjunto de apêndices. No primeiro capítulo são apresentados o tema, o objetivo geral, a justificativa e o método de pesquisa adotado. O segundo capítulo traz uma revisão conceitual sobre controle estatístico de processos, controle estatístico de pequenos lotes e critérios para análise do desempenho de gráficos de controle. O terceiro capítulo apresenta os modelos matemáticos construídos para cálculo do ARL dos gráficos de controle. O quarto capítulo contempla a análise dos resultados obtidos. No quinto capítulo, por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas futuras. Os modelos matemáticos utilizados são apresentados na seção de apêndices do trabalho.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Historicamente, o Controle da Qualidade (CQ) por meio de ferramentas estatísticas foi extensivamente difundido entre grandes organizações industriais apenas após a Segunda Guerra Mundial, devido ao aumento expressivo nas produções destinadas à indústria bélica e naval. Desde então, essas ferramentas vêm sendo constantemente estudadas e aprimoradas (JURAN, 1991; KUME, 1993; WOODALL e MONTGOMERY, 1999; MURPHY, 2001).

Segundo Toledo *et al.* (2014), o uso de ferramentas estatísticas está associado à possibilidade de ganhos em qualidade e produtividade através da identificação das causas reais de problemas cotidianamente encontrados no “chão de fábrica” e consequente redução de perdas. Das sete ferramentas básicas da qualidade, pode-se dizer que os gráficos de controle consistem na ferramenta tecnicamente mais sofisticada (RIBEIRO e CATEN, 1998; MURPHY, 2001; SAMOHYL, 2009; COLOSIMO e SENIN, 2011; RYAN, 2011; MONTGOMERY, 2014; LIZARELLI *et al.*, 2016; OPRIME *et al.*, 2016). A Figura 2 relaciona as principais vantagens obtidas com o uso de gráficos de controle.

Figura 2: Vantagens com uso de gráficos de controle



Fonte: Autor (2021)

Nas próximas seções do trabalho, são apresentados os principais gráficos de controle de Shewhart, gráficos de controle utilizados em pequenos lotes de produção, pressupostos fundamentais, procedimento construtivo e critérios para análise do desempenho de gráficos de controle.



## 2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE DE SHEWHART

A origem dos gráficos de controle remonta ao trabalho pioneiro de Walter Shewhart na década de 20. Por essa razão, os gráficos de controle tradicionais são popularmente conhecidos dessa forma. Segundo ele, todo processo de produção possui uma variação natural oriunda de pequenas causas, denominadas causas aleatórias, ou causas comuns. Processos onde apenas causas comuns estão presentes são considerados processos sob controle estatístico.

Entretanto, outras causas podem interferir na qualidade do produto que são denominadas causas atribuíveis, ou causas especiais, e estão relacionadas à máquina, ferramental, matéria-prima ou até mesmo erros do próprio colaborador responsável pela operação. Diz-se que um processo que opera também na presença dessas causas é um processo fora de controle (SMITH, 1947; SHEWHART, 1986; GRAVES, MURPHY e RINGUEST, 1999; WOODALL, 2000; QIN, 2003; CHAKRABORTI, 2006; JENSEN *et al.*, 2006; SAMOHYL, 2009; COLOSIMO e SENIN, 2011; CAPIZZI e MASSAROTTO, 2012; MONTGOMERY, 2014).

Por mais preciso que um processo de produção seja, ele sempre estará sujeito a essas variações. O objetivo de monitorá-lo por meio de gráficos de controle é detectar rapidamente a ocorrência de causas especiais de modo que medidas corretivas sejam tomadas sempre que necessário para garantir sua estabilidade e capacidade (LEHRMAN, 1991; GRAVES *et al.*, 1999; WOODALL, 2000; CHAKRABORTI, 2006; JENSEN *et al.*, 2006; CASTAGLIOLA, CELANO e CHEN, 2009; YU e LIU, 2011; MONTGOMERY, 2014; TOLETO *et al.* 2014).

Um processo produtivo é monitorado através das características do produto fabricado. Algumas características são representadas numericamente, chamadas de variáveis, ou simplesmente classificadas como conforme ou não-conforme em relação às suas especificações. Características do produto classificadas dessa forma são denominadas atributos (SMITH, 1947; SHEWHART, 1986; KUME, 1993; RIBEIRO e CATEN, 1998; MURPHY, 2001; EPPRECHET e COSTA, 2007; TOLETO *et al.* 2014; MONTGOMERY, 2014).

### 2.1.1 Gráficos de controle para atributos

Embora não tão informativos como os gráficos de controle para variáveis, os gráficos de controle para atributos também podem ser úteis, especialmente quando a característica da qualidade é melhor representada por um atributo ao invés de uma variável (EPPRECHET e COSTA, 2007; SAMOHYL, 2009; RYAN, 2011).

Se uma peça é ou não defeituosa, se a pintura aplicada em sua superfície atende ou não aos padrões de acabamento estabelecidos pela fábrica, se a soldagem ou montagem de um determinado conjunto mecânico foi realizada em conformidade com as especificações de engenharia, são apenas alguns exemplos de atributos do produto.

#### 2.1.1.1 Gráfico de controle para fração não-conforme

O gráfico de controle para fração não-conforme, também conhecido como gráfico  $p$ , segue uma distribuição Binomial e tem a vantagem de se ajustar a uma distribuição Normal quando  $p > 5$ . A fração não-conforme é determinada pela relação entre o número de produtos não-conformes  $D$  e o tamanho da amostra  $n$ . Vários atributos podem ser verificados simultaneamente pelo colaborador durante a inspeção para a contagem das não-conformidades.

Sendo  $p$  um valor conhecido, estabelecido pela gerência da produção ou mesmo estimado, a Linha Central (LC), o Limite Superior de Controle (LSC) e o Limite Inferior de Controle (LIC) são definidos segundo os mesmos princípios estatísticos nos quais se baseiam todos os gráficos de controle de Shewhart (SMITH, 1947; EPPRECHET e COSTA, 2007; TOLEDO *et al.* 2014; MONTGOMERY, 2014). São dados pelas Equações 1, 2 e 3, abaixo:

$$\text{LSC} = p + 3\sqrt{p(1-p)/n} \quad (1)$$

$$\text{LC} = p \quad (2)$$

$$\text{LIC} = p - 3\sqrt{p(1-p)/n} \quad (3)$$

O uso do gráfico para fração não-conforme consiste em se tomar amostras do processo e verificar o número de produtos não-conformes por amostra para cálculo de  $p$ . Enquanto  $p$  permanece dentro dos limites de controle, o processo é considerado sob controle estatístico.

#### 2.1.1.2 Gráfico de controle para unidades não-conformes por amostra

O gráfico de controle para unidades não-conformes por amostra  $np$  também segue uma distribuição Binomial e só pode ser construído quando  $n$  é igual para todos os produtos monitorados (TOLEDO *et al.* 2014). A mesma aproximação é válida quando  $np > 5$ .

Seu procedimento construtivo é o mesmo do gráfico  $p$ , no entanto, a variável controlada, nesse caso, é a frequência absoluta e não a fração de não-conformidades por amostra (EPPRECHET e COSTA, 2007; RYAN, 2011; MONTGOMERY, 2014; TOLEDO *et al.* 2014). Os limites de controle do gráfico  $np$  são calculados da mesma forma que no gráfico  $p$ , conforme Equações 4, 5 e 6 abaixo:

$$\text{LSC} = np + 3\sqrt{np(1-p)/n} \quad (4)$$

$$\text{LC} = np \quad (5)$$

$$\text{LIC} = np - 3\sqrt{np(1-p)/n} \quad (6)$$

#### 2.1.1.3 Gráfico de controle para não-conformidades

O gráfico de controle para não-conformidades é utilizado quando se deseja verificar o número total de não-conformidades por amostra. LC, LSC e LIC são definidos em função do parâmetro da distribuição de Poisson  $c > 0$ , que representa um caso-limite da distribuição Binomial (TOLEDO *et al.*, 2014). Quando  $c$  não é dado, pode ser estimado pelo número médio de não-conformidades observadas em uma amostra de referência. O gráfico de controle para não-conformidades também é conhecido como gráfico  $c$ . Semelhante aos dois gráficos anteriores, os limites de

controle são definidos segundo uma distribuição Normal quando  $c > 5$ , conforme Equações 7, 8 e 9:

$$\text{LSC} = c + 3\sqrt{c} \quad (7)$$

$$\text{LC} = c \quad (8)$$

$$\text{LIC} = c - 3\sqrt{c} \quad (9)$$

#### 2.1.1.4 Gráfico de controle para não-conformidades por unidade

O gráfico de controle para não-conformidades por unidade, ou gráfico  $u$ , é utilizado quando se deseja verificar o número total de não-conformidades independentes por unidade de inspeção, que, convenientemente, pode ser mais de uma unidade do produto (EPPRECHET e COSTA, 2007; RYAN, 2011; MONTGOMERY, 2014; TOLEDO *et al.* 2014). A variável  $u$  segue uma distribuição de Poisson e os limites de controle são calculados em função do número médio de não-conformidades por unidade  $\bar{u}$ , conforme Equações 10, 11 e 12:

$$\text{LSC} = \bar{u} + 3\sqrt{\bar{u}/n} \quad (10)$$

$$\text{LC} = \bar{u} \quad (11)$$

$$\text{LIC} = \bar{u} - 3\sqrt{\bar{u}/n} \quad (12)$$

#### 2.1.2 Gráficos de controle para variáveis

Os gráficos de controle para variáveis são classificados de acordo com o tipo da variável que se deseja monitorar. O monitoramento do valor médio é realizado através do gráfico da média  $\bar{X}$ , ou da mediana  $\tilde{X}$ , e a variação do processo pode ser monitorada através do gráfico da amplitude  $R$ , ou do desvio padrão  $S$  (SMITH, 1947; LEHRMAN, 1991; WOODALL, 2000; SAMOHYL, 2009; RYAN, 2011; COLOSIMO e SENIN, 2011; KOZERNOWSKI e WERNER, 2012; MONTGOMERY, 2014; OPRIME *et al.*, 2016). Por essa razão, os gráficos de controle para variáveis, geralmente, são usados em pares.

### 2.1.2.1 Gráficos de controle para média e amplitude

Devido à sua simplicidade, os gráficos  $\bar{X}$  e R são os mais utilizados pelas empresas de manufatura para o monitoramento de características variáveis da qualidade. Para o gráfico  $\bar{X}$ , LC, LSC e LIC são calculados a partir da média e desvio padrão do processo, conforme Equações 13, 14 e 15:

$$LSC_X = \mu + 3\sigma/\sqrt{n} \quad (13)$$

$$LC_X = \mu \quad (14)$$

$$LIC_X = \mu - 3\sigma/\sqrt{n} \quad (15)$$

Para o gráfico R, LC, LSC e LIC são calculados conforme Equações 16, 17 e 18 abaixo:

$$LSC_R = \bar{R} + 3\sigma \quad (16)$$

$$LC_R = \bar{R} \quad (17)$$

$$LIC_R = \bar{R} - 3\sigma \quad (18)$$

Geralmente  $\mu$  é estimado pela média geral do processo  $\bar{\bar{x}}$  e  $\sigma$  é estimado pela amplitude média  $\bar{R}$ . LC, LSC e LIC para os gráficos  $\bar{X}$  e R são calculados conforme Equações 19 a 24:

$$LSC_X = \bar{\bar{x}} + \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (19)$$

$$LC_X = \bar{\bar{x}} \quad (20)$$

$$LIC_X = \bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (21)$$

$$LSC_R = \bar{R} + \frac{3d_3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (22)$$

$$LC_R = \bar{R} \quad (23)$$

$$LIC_R = \bar{R} - \frac{3d_3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \quad (24)$$

Na prática, os estimadores são substituídos por fatores construtivos e os limites de controle são dados conforme as Equações 25 a 30:

$$LSC_X = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \quad (25)$$

$$LC_X = \bar{\bar{x}} \quad (26)$$

$$LIC_X = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \quad (27)$$

$$LSC_R = D_4 \bar{R} \quad (28)$$

$$LC_R = \bar{R} \quad (29)$$

$$LIC_R = D_3 \bar{R} \quad (30)$$

A Tabela 1 apresenta os valores correspondentes aos fatores construtivos  $A_2$ ,  $d_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  para construção dos gráficos  $\bar{X}$  e  $R$ .

Tabela 1: Fatores construtivos para os gráficos de média e amplitude

Tamanho da amostra	$A_2$	$d_2$	$D_3$	$D_4$
2	1,880	1,128	0,000	3,267
3	1,023	1,693	0,000	2,575
4	0,729	2,059	0,000	2,282
5	0,577	2,326	0,000	2,114
6	0,483	2,534	0,000	2,004
7	0,419	2,704	0,076	1,924
8	0,373	2,847	0,136	1,864
9	0,337	2,970	0,184	1,816
10	0,308	3,078	0,223	1,777

Fonte: Montgomery (2014)

Durante a operação, os dados do processo são agrupados em amostras denominadas subgrupos racionais, e os valores correspondentes a média e a amplitude de cada subgrupo são plotados em seus respectivos gráficos de controle. A partir da interpretação do comportamento dos gráficos, considera-se que o processo é estável e está sob controle estatístico quando não são indicados sinais de anormalidade ou verificada a presença de causas especiais (SMITH, 1947; GRANT, 1965; WOODALL, 2000; SOUZA *et al.*, 2008; EPPRECHET e COSTA, 2007; SAMOHYL, 2009; RYAN, 2011; COLOSIMO e SENIN, 2011; TOLEDO, 2014; MONTGOMERY, 2014).

Segundo Montgomery (2014), as principais vantagens práticas do uso dos gráficos  $\bar{X}$  e R para o monitoramento do processo são:

- As observações são registradas diretamente no próprio gráfico, não sendo necessário nenhum tratamento prévio dos dados, tornando o procedimento prático;
- Os cálculos necessários são simples, facilitando o registro dos dados no próprio chão de fábrica.

#### 2.1.2.2 Gráficos de controle para mediana e amplitude

O procedimento construtivo do gráfico  $\bar{X}$  é o mesmo do gráfico  $\bar{X}$ . No entanto, a mediana do subgrupo é calculada ao invés da média (COLOSIMO e SENIN, 2011; MONTGOMERY 2014). LC corresponde à média das medianas  $\bar{\bar{X}}$ , LSC e LIC também são calculados através do mesmo fator construtivo  $A_2$ , conforme Equações 31, 32 e 33 abaixo:

$$LSC_x = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \quad (31)$$

$$LC_x = \bar{\bar{X}} \quad (32)$$

$$LIC_x = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \quad (33)$$

Embora a mediana seja um estimador mais fraco que a média, o uso desses gráficos pode ser interessante, principalmente em processos contínuos e devido à sua facilidade de aplicação (SMITH, 1947; WOODALL, 2000; REBELATO *et al.*, 2006; EPPRECHET e COSTA, 2007; SAMOHYL, 2009; COLOSIMO e SENIN, 2011; MONTGOMERY, 2014; TOLEDO *et al.*, 2014).

#### 2.1.2.3 Gráficos de controle para medidas individuais

Na prática, algumas vezes o tamanho da amostra é igual a 1. Nesses casos, os gráficos de controle para medidas individuais podem ser utilizados para o monitoramento e controle do processo (SAMOHYL, 2009; TOLEDO *et al.*, 2014; MONTGOMERY, 2014). Conforme Toledo *et al.* (2014), existem vantagens e

desvantagens no uso desses gráficos. Enquanto não há necessidade de se realizar cálculos, como no gráfico  $\bar{X}$ , por exemplo, o registro das observações é mais oneroso, visto que todos os valores obtidos devem ser plotados nos gráficos. Para o gráfico  $X$ , LC é a média das observações, LSC e LIC também são calculados a partir da média, conforme Equações 34, 35 e 36:

$$LSC_X = \bar{X} + 3 \bar{R}/d_2 \quad (34)$$

$$LC_X = \bar{X} \quad (35)$$

$$LIC_X = \bar{X} - 3 \bar{R}/d_2 \quad (36)$$

Como não é possível verificar a variação através da amplitude ou desvio padrão de cada amostra para  $n = 1$ , os limites de controle para o gráfico R são calculados a partir da amplitude média móvel  $\overline{MR}$  e de fatores construtivos, conforme Equações 37, 38 e 39 abaixo:

$$LSC_R = D_4 \overline{MR} \quad (37)$$

$$LC_R = \overline{MR} \quad (38)$$

$$LIC_R = D_3 \overline{MR} \quad (39)$$

#### 2.1.2.4 Gráficos de controle para média e desvio padrão

Os gráficos  $\bar{X}$  e S, embora não tão usuais, também podem ser úteis para o monitoramento de características variáveis da qualidade, principalmente quando se deseja monitorar diretamente o desvio padrão do processo (SMITH, 1947; RIBEIRO e CATEN, 1998; WOODALL, 2000; SAMOBYL, 2009; RYAN, 2011; COLOSIMO e SENIN, 2011; MONTGOMERY, 2014).

Comparando-se as Curvas Características de Operação (CCO) de ambos os gráficos, pode-se perceber que os gráficos R são relativamente menos sensíveis a deslocamentos pequenos para tamanhos de amostra também pequenos. Além do mais, em muitas situações, pode ser necessário um controle mais robusto da variação do processo, de modo que o monitoramento indireto, neste caso através de R, não seja tão interessante. A construção do gráfico S segue praticamente a mesma



sequência de etapas dos gráficos anteriores (MURPHY, 2001; SOUZA *et al.*, 2008; MONTGOMERY, 2014). LC, LSC e LIC são definidos através da média de S, conforme Equações 40, 41 e 42:

$$LSC_S = B_4 \bar{S} \quad (40)$$

$$LC_S = \bar{S} \quad (41)$$

$$LIC_S = B_3 \bar{S} \quad (42)$$

Para o gráfico  $\bar{X}$ , LC, LSC e LIC também são definidos em função da média de S, conforme Equações 43, 44 e 45:

$$LSC_X = \bar{\bar{x}} + A_3 \bar{S} \quad (43)$$

$$LC_X = \bar{\bar{x}} \quad (44)$$

$$LIC_X = \bar{\bar{x}} - A_3 \bar{S} \quad (45)$$

A Tabela 2 apresenta os fatores construtivos  $A_3$ ,  $c_4$ ,  $B_3$  e  $B_4$  usados no gráfico do desvio padrão.

Tabela 2: Fatores construtivos para os gráficos de média e desvio padrão

Tamanho da amostra	$A_3$	$c_4$	$B_3$	$B_4$
2	2,659	0,7979	0,000	3,267
3	1,954	0,8862	0,000	2,568
4	1,628	0,9213	0,000	2,266
5	1,427	0,9400	0,000	2,089
6	1,287	0,9515	0,030	1,970
7	1,182	0,9594	0,118	1,882
8	1,099	0,9650	0,185	1,815
9	1,032	0,9693	0,239	1,761
10	0,975	0,9727	0,284	1,716

Fonte: Montgomery (2014)

## 2.2 CONTROLE ESTATÍSTICO DE PEQUENOS LOTES

Ao longo do tempo, os sistemas de produção sofreram mudanças significativas. A larga escala cedeu lugar à produção enxuta e customizada, trazendo planos de produção menores e diversificados. Segundo Castillo *et al.*, (1996), essa

tendência está fortemente relacionada ao uso de técnicas de manufatura *Just In Time* (JIT) para redução de custos relacionados a estoques intermediários na produção e de produto acabado.

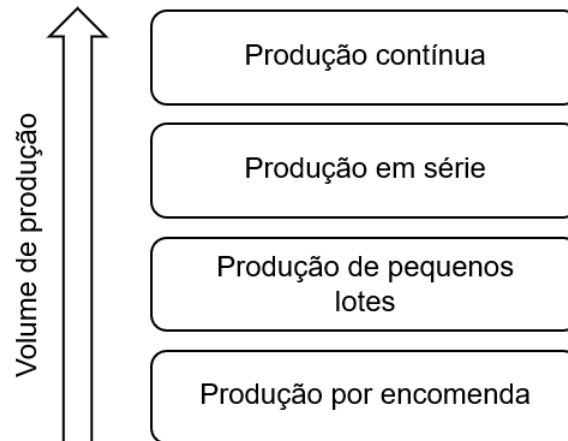
Algumas dúvidas sobre como avaliar estatisticamente esses processos através dos métodos tradicionais surgiram a partir daí. A rigor, os gráficos de controle de Shewhart foram propostos para o monitoramento de processos produtivos de grandes volumes. Nesses sistemas, a implementação dos gráficos não representa um grande problema, pois as informações do processo estão sempre disponíveis, diferentemente de sistemas de produção JIT ou do tipo *job shop*, por exemplo (HILLIER, 1969; CULLEN e BOTHE, 1989; CROWDER, 1992; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; CASTILLO *et al.*, 1996; CASTILLO e MONTGOMERY, 1996; KHOO *et al.*, 2005; CELANO *et al.*, 2010; GU, JIA e YOU, 2011; GU *et al.*, 2014; WIEDERHOLD *et al.*, 2016).

Neste sentido, percebe-se que monitorar e controlar estatisticamente esses processos é um problema estimulante e requer uma análise cuidadosa, visto que, na maioria dos casos, não se dispõe da quantidade necessária de amostras para a aplicação dos gráficos de controle tradicionais. Hillier (1969) destaca ainda a importância do uso de gráficos de controle durante a fase de *startup* de novos processos também.

### **2.2.1 Definições e problemas característicos**

Na literatura sobre CEP, o termo genérico “pequenos lotes” e seus sinônimos “corridas curtas” ou “pequena escala” são utilizados para denominar situações em que uma grande variedade de produtos é fabricada em pequenas quantidades, e, por consequência, demandam um alto número de *setups* (HILLIER, 1969; CULLEN e BOTHE, 1989; CROWDER, 1992; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; CASTILLO *et al.*, 1996; CASTILLO e MONTGOMERY, 1996; KHOO *et al.*, 2005; CELANO *et al.*, 2010; GU, JIA e YOU, 2011; CELANO *et al.*, 2013; GU *et al.*, 2014; WIEDERHOLD *et al.*, 2016). A Figura 3 relaciona os principais sistemas de produção em função do volume.

Figura 3: Sistemas de produção em função do volume



Fonte: Autor (2021)

Castillo *et al.* 1996 classificam ainda os sistemas de produção de pequenos lotes de duas formas:

- Sistema repetitivo, encontrado em empresas que adotam técnicas de manufatura JIT, como por exemplo, a indústria de roupas, sapatos e fabricantes de peças automotivas;
- Sistema não-repetitivo, encontrado em empresas que fabricam produtos customizados em ambientes do tipo *job shop*, como por exemplo, a indústria naval e a aeroespacial.

Sistemas operados por Comando Numérico Computadorizado (CNC) e sistemas de manufatura altamente automatizados, como Sistemas Flexíveis de Manufatura (SFM), também podem ser classificados como sistemas de produção de pequenos lotes (STECKE e KIM, 1988; CASTILLO e MONTGOMERY, 1996; LIN, LAI e CHANG, 1997; CELANO *et al.*, 2010; CELANO *et al.* 2013).

Em função da própria característica desses sistemas, em muitos casos, ocorre que o lote de fabricação do produto é tão pequeno que acaba antes mesmo de se obter um número suficientemente adequado de amostras para uma estimativa precisa de parâmetros e cálculo de limites de controle válidos. Ademais, as suposições fundamentais para construção dos gráficos geralmente não são asseguradas nesses ambientes (HILLIER, 1967; HILLIER, 1969; CULLEN e BOTHE, 1989; CASTILLO *et al.*, 1996; CASTILLO e MONTGOMERY, 1996; LIN, LAY e CHANG, 1997; FAN e YOU, 2009).

### 2.2.2 Principais gráficos de controle e estudos recentes

Os primeiros artigos com propostas para o monitoramento e controle de processos de produção através de um número pequeno de subgrupos foram de Hillier (1967) e (1969). O objetivo de seu trabalho era descrever um método para cálculo de limites de controle válidos, independentemente do tamanho adotado dos subgrupos. O método de Hillier (1969), posteriormente revisado por Pysdek (1993), era realizado dois estágios.

O primeiro consistia em se estabelecer limites de controle para testar retrospectivamente se o processo encontrava-se sob controle estatístico quando as amostras de referência haviam sido coletadas para construção dos gráficos durante a fase I. Para cada subgrupo inicial, as observações de  $\bar{X}$  e R deviam ser plotadas nos gráficos. Se os valores estivessem localizados fora dos limites de controle, então o subgrupo devia ser descartado e os limites de controle recalculados. No segundo estágio novos limites de controle deviam ser definidos para se verificar a permanência do processo nessa mesma condição de estabilidade. A probabilidade de erros tipo I também devia ser considerada nesse estágio.

Posteriormente, Quesenberry (1991) propôs o uso do gráfico Q para tratar os problemas observados. Contudo, o gráfico apresentava o mesmo problema dos gráficos de Hillier (1969). Enquanto a ocorrência de erros tipo I era baixa, a detecção de tendências não era tão satisfatória como desejado.

Shepardson, Runger e Sullo (1992), estudaram as ineficiências do gráfico Q e propuseram o uso de um gráfico de controle baseado no filtro de Kalman, especificamente quando o desvio padrão do processo era conhecido e a média não. Castillo e Montgomery (1994) propuseram adaptações que permitiam o uso do gráfico em situações inversas, ou seja, quando a média era conhecida e o desvio padrão do processo não.

Wasserman (1994) propôs o uso do gráfico *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) baseado em um modelo linear dinâmico de primeira ordem e variação constante. De acordo com Lucas e Saccucci (1990), a interpretação e implementação do gráfico EWMA era razoavelmente fácil.

O gráfico da Soma Cumulativa, ou *Cumulative Sum* (CUSUM), foi apresentado inicialmente por Page, na Inglaterra, com o propósito de detectar rapidamente pequenas mudanças no processo (PAGE, 1954; BARNARD, 1959; KEMP, 1961; BROOK e EVANS, 1972; CASTAGLIOLA e MARAVELAKIS, 2011; SINGH e PRAJAPATI, 2013; CELANO, CASTAGLIOLA e TROVATO, 2012; MONTGOMERY, 2014; ABBASI e HAQ, 2019).

Hawkins e Olwell (1998) propuseram o uso de um gráfico adaptado denominado *self-starting* CUSUM para um número pequeno de subgrupos. A ideia desse gráfico era usar medições regulares do processo para sua autoajustagem e manutenção. Cada observação sucessiva deveria ser padronizada usando a média e o desvio padrão, não de uma amostra de ajuste especial, mas de todas as observações acumuladas até o momento da inspeção. Conforme o processo prosseguia e produzia novas observações, as estimativas da média e do desvio padrão dinamicamente se aproximavam dos valores verdadeiros (HAWKINS e OLWELL, 1998).

Ao contrário dos gráficos de controle de Shewhart e do gráfico EWMA, o uso do gráfico CUSUM era considerado mais complexo, no entanto, sua implementação tornou-se mais fácil com a disponibilidade de inúmeras ferramentas e *softwares* estatísticos no mercado (KEMP, 1961; BROOK e EVANS, 1972; HAWKINS e OLWELL, 1998; CASTAGLIOLA e MARAVELAKIS, 2011; SINGH e PRAJAPATI, 2013).

Em estudos mais recentes, Nenes e Tagaras (2007) apresentaram gráficos baseados no teorema de Bayes para monitoramento de pequenos lotes de produção. Celano *et al.* (2013) propuseram o uso de gráficos de controle baseados na distribuição *t student* como alternativa tão eficiente quanto os gráficos tradicionais com parâmetros conhecidos.

### **2.2.3 Gráficos de controle do desvio do nominal**

Este trabalho estuda a proposta de Cullen e Bothe (1989). Os autores apresentaram um gráfico onde a diferença entre a medida encontrada da característica da qualidade com sua medida nominal, ou com um valor alvo, deveria

ser plotada em gráficos de controle tradicionais  $\bar{X}$  e R e o denominaram gráfico de controle do valor alvo. Outras denominações são encontradas na literatura, como gráfico de controle da diferença, de Grubbs (1989), gráfico da Diferença do Nominal (DNOM), de Farnum (1992), e gráfico do desvio do nominal, de Montgomery (2014), sendo esta última adotada no trabalho.

O gráfico de controle do desvio do nominal pode ser empregado no processo de fabricação de mais de um produto de modo sequencial. Ele representa uma mudança nas técnicas tradicionais de CEP, pois fornece meios para monitorar e controlar processos que, de outra forma, seriam considerados inadequados (CULLEN e BOTHE, 1989; CROWDER, 1992; FARNUM, 1992; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; MONTGOMERY, 2014). Montgomery (2014) apresenta três condições importantes para uso apropriado desse gráfico:

- A variação do processo tem de ser a mesma para todas as peças, ou a mais próxima possível;
- O procedimento é mais eficiente quando o tamanho das amostras coletadas é o mesmo para todos os produtos;
- Os gráficos possuem um apelo intuitivo quando a medida nominal da característica é seu próprio valor alvo.

Para ilustrar o procedimento de construção do gráfico de controle do desvio do nominal, são apresentados, na Tabela 3, medidas obtidas de amostras de  $n = 3$  de dois produtos diferentes, A e B.

Tabela 3: Exemplo de construção de um gráfico do desvio do nominal

Número da amostra	Produto	Medidas			Diferença nominal			Média e amplitude	
		M1	M2	M3	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}$	R
1	A	50	51	52	0	1	2	1,00	2,0
2	A	49	50	51	-1	0	1	0,00	2,0
3	A	48	49	52	-2	-1	2	-0,33	4,0
4	A	49	53	51	-1	3	1	1,00	4,0
5	B	24	27	26	-1	2	1	0,67	3,0
6	B	25	27	24	0	2	-1	0,33	3,0
7	B	27	26	23	2	1	-2	0,33	4,0
8	B	25	24	23	0	-1	-2	-1,00	2,0
9	B	24	25	25	-1	0	0	-0,33	1,0
10	B	26	24	25	1	-1	0	0,00	2,0

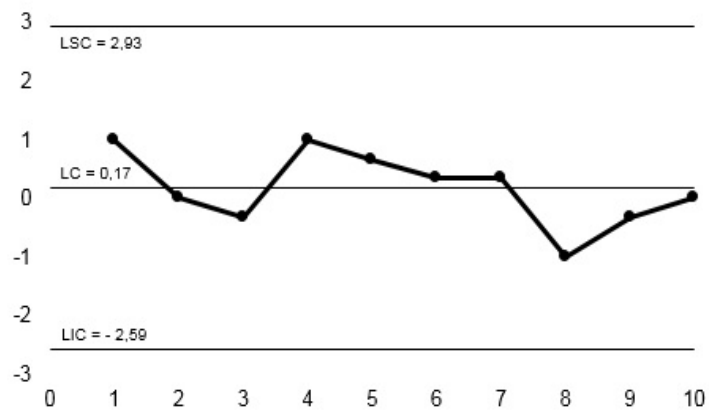
Fonte: Adaptado de Montgomery (2014)

Se  $M_i$  corresponde a  $i$ -ésima medida da característica da qualidade,  $x_i$  consiste na diferença entre a medida obtida e seu valor alvo, ou sua medida nominal, e é dado pela Equação 52:

$$x_i = M_i - T_i \quad (52)$$

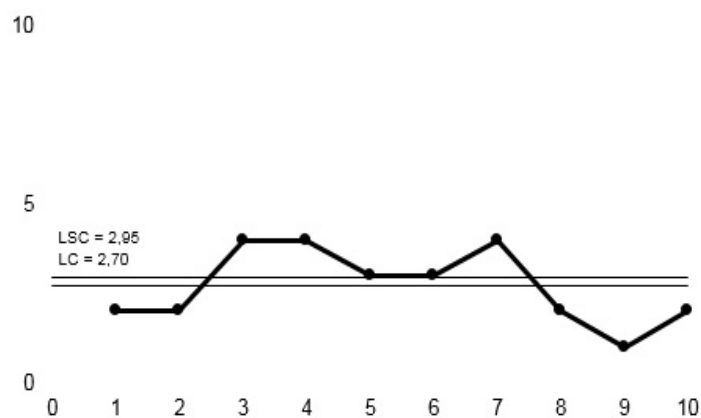
O gráfico de controle é construído a partir da diferença entre medida da característica e o seu valor nominal, e os limites de controle devem ser calculados utilizando-se dados de todas as amostras (CULLEN e BOTHE, 1989; SOWER, MOTWANI e SAVOIE, 1994; MONTGOMERY, 2014).

Gráfico 1: Gráfico da média desvio do nominal



Fonte: Adaptado de Montgomery (2014)

Gráfico 2: Gráfico da amplitude desvio do nominal



Fonte: Adaptado de Montgomery (2014)

LSC e LIC para o gráfico são calculados conforme as Equações 53 e 54 a seguir:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + 3\sigma/\sqrt{n} \quad (53)$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - 3\sigma/\sqrt{n} \quad (54)$$

Um mesmo gráfico de controle do desvio do nominal não deve ser utilizado em processos diferentes. Deve ser utilizado em produtos diferentes submetidos a um mesmo processo de fabricação. Farnum (1992), esclarece que a principal razão, neste caso, é que a variação do processo, medida através do desvio padrão dos produtos, tem maior chance de ser a mesma.

Na prática, sabe-se que isso nem sempre é possível. Nesses casos, Montgomery (2014) recomenda o uso de gráficos de controle  $\bar{X}$  e R padronizados. Considerando a  $j$ -ésima observação,  $\bar{R}_j$  e  $T_j$  a amplitude média e a medida nominal de  $x$ , deve-se plotar em gráficos  $\bar{X}$  e R padronizados os valores de  $R_i$  e  $\bar{x}_i$ , calculados conforme Equações 55 e 56:

$$R_i = R_i/\bar{R}_j \quad (55)$$

$$\bar{x}_i = \bar{M}_i - T_j/\bar{R}_j \quad (56)$$

Para os gráficos  $\bar{X}$  e R, respectivamente, LSC e LIC são dados pelos fatores construtivos, conforme Equações 57 a 60:

$$LSC_X = A_2 \quad (57)$$

$$LIC_X = -A_2 \quad (58)$$

$$LSC_R = D_4 \quad (59)$$

$$LIC_R = D_3 \quad (60)$$

A LC para os gráficos padronizados é zero, pois  $M_i$  é a média das medidas originais para subgrupos do  $j$ -ésimo número de observações. Os valores alvo  $\bar{R}_j$  e  $T_j$



podem ser determinados utilizando-se especificações para  $T_j$  e estimando  $\bar{R}_j$  através de dados históricos do processo.

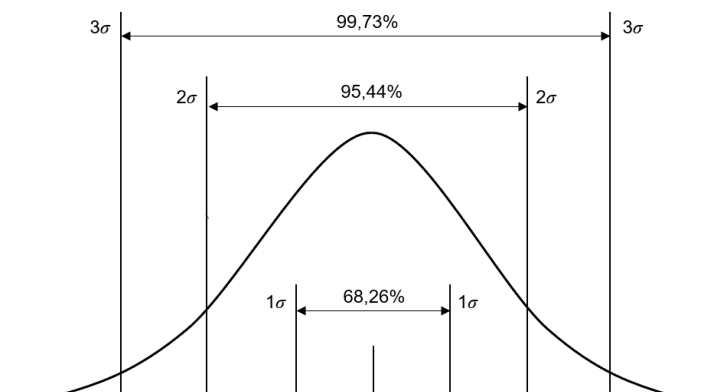
### 2.3 PRESSUPOSTOS FUNDAMENTAIS

Assim como os demais gráficos de controle, para implementar o gráfico do desvio do nominal em um determinado processo, primeiramente, é necessária a verificação de sua estabilidade. É imprescindível que as observações sigam um padrão de distribuição de probabilidade Normal (SMITH, 1947; ALWAN, 2007; SAMOHYL, 2009; KORZENOWSKI e WERNER, 2012; MONTGOMERY, 2014; GU *et al.*, 2014).

A distribuição Normal é uma distribuição contínua e, muito provavelmente, a distribuição mais importante tanto na teoria como na prática da estatística. Sua aparência é característica a de uma curva simétrica em formato de sino com caldas mais finas se distanciando da média. (SMITH, 1947; WOODALL, 2000; SAMOHYL, 2009; COLOSIMO e SENIN, 2011; RYAN, 2011; CAPIZZI e MASSAROTTO, 2012; KORZENOWSKI e WERNER, 2012; MONTGOMERY, 2014; AYKROYD, LEIVA e RUGGERI, 2019).

Conforme verifica-se na Figura 4, em uma distribuição Normal, espera-se que 68,26% das observações estejam localizadas entre limites definidos por  $\mu$ , mais ou menos  $1\sigma$ , 95,44% estejam localizados entre  $\mu$ , mais ou menos  $2\sigma$ , e 99,73% entre  $\mu$  e mais ou menos  $3\sigma$ .

Figura 4: Curva de distribuição normal



Fonte: Autor (2021)

Para construção dos gráficos de controle, o pressuposto de normalidade é de fundamental importância para validade das decisões tomadas com respeito à capacidade do processo (SAMOHYL, 2009; SCOLOSIMO e SENIN, 2011; KORZENOWSKI e WERNER, 2012; MONTGOMERY, 2014). No entanto, casos em que a distribuição dos dados não segue um padrão normal podem ser transformados através de métodos matemáticos apropriados, como por exemplo, o método de Box-Cox (1964).

Além da distribuição Normal, outras distribuições de probabilidade também são úteis em casos específicos, como as distribuições Binomial e de Poisson, vistas nos gráficos de controle para atributos, e a distribuição t de Gosset, ou t *student*, derivada da distribuição Normal e adequada para casos em que os subgrupos racionais são construídos com poucas observações.

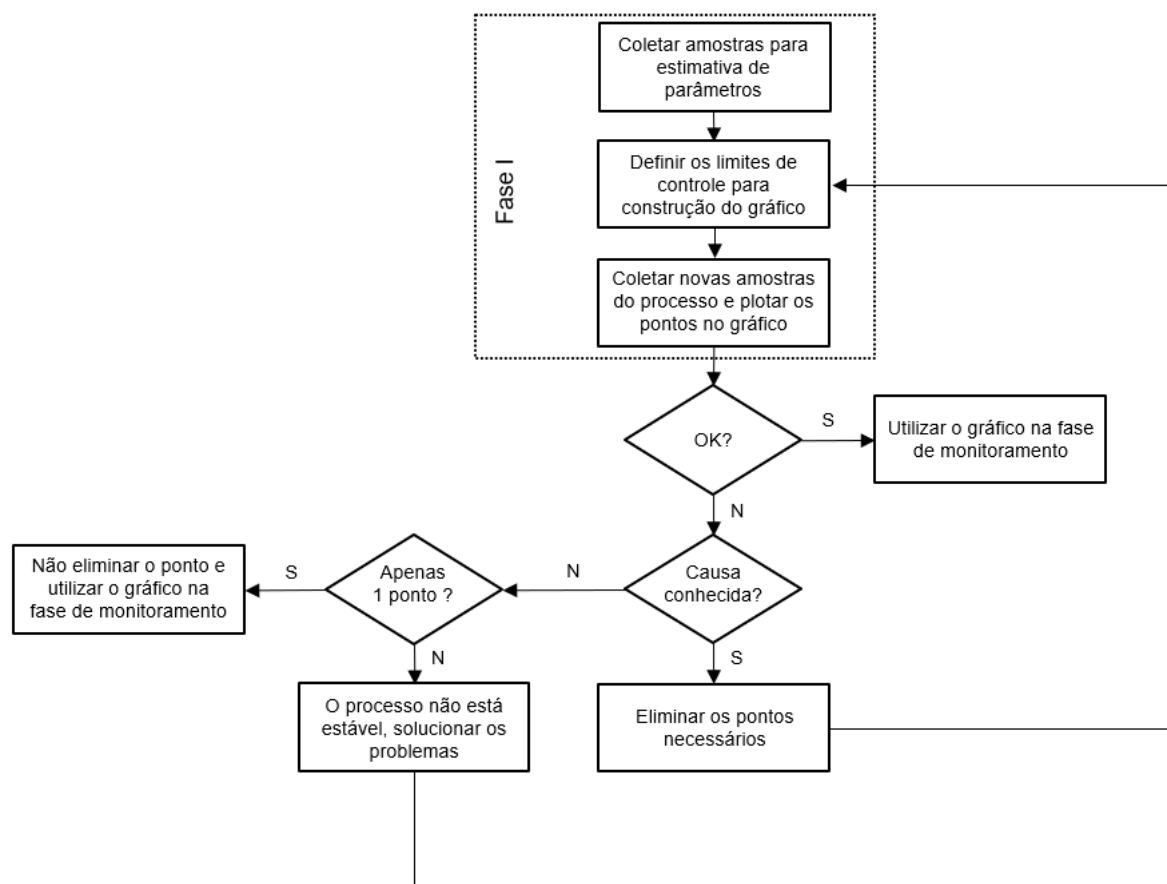
Outros pressupostos são fundamentais para uso dos gráficos de controle, como o pressuposto de independência, que assegura a inexistência de autocorrelação entre as observações e o pressuposto de homocedasticidade que consiste em se admitir que a média e a variação do processo apresentam-se estáveis (ALWAN, 2007; KORZENOWSKI e WERNER, 2012).

## 2.4 PROCEDIMENTO CONSTRUTIVO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Quando os parâmetros estatísticos do processo são desconhecidos, o procedimento construtivo do gráfico de controle do desvio do nominal também é realizado em duas fases. Na fase I, são usadas amostras do processo para estimativa dos parâmetros e cálculo dos limites de controle usados na fase seguinte. Na fase II, também denominada fase de monitoramento, novas amostras são extraídas e verificadas. Caso as observações não estejam localizadas dentro dos limites de controle, o processo é considerado fora de controle e uma provável causa especial deve ser identificada (CASTILLO e MONTGOMERY, 1996; CASTILLO *et al.* 1996; WOODALL e MONTGOMERY, 1999; CHAKRABORTI, 2000; WOODALL, 2000; JENSEN, 2006; CHAKRABORTI, 2006; SAMOHYL, 2009; RYAN, 2011; MONTGOMERY, 2014; JONES-FARMER, 2014).

Psarakis *et al.* (2014), esclarecem que o bom desempenho dos gráficos de controle depende de uma estimativa precisa de parâmetros realizada durante a fase I de implementação dos gráficos. Durante essa fase, é importante que causas especiais sejam eliminadas de modo que as amostras para definição dos limites de controle usados na fase de monitoramento sejam coletadas de um processo estável. A Figura 5 apresenta o procedimento construtivo dos gráficos de controle com parâmetros estimados.

Figura 5: Procedimento construtivo dos gráficos de controle



Fonte: Autor (2021)

Jensen (2006) destaca que o uso de gráficos de controle com parâmetros estimados é uma fraqueza potencial. A indisponibilidade de dados, por consequência, cálculo de limites de controle inválidos, pode ocasionar uma taxa significativa de falsos alarmes no processo, além de reduzir o Poder de Detecção (PD) do gráfico de controle.

Por essa razão, Chakraborti, Human e Graham. (2009) reforçam a importância de se definir um número e tamanho de amostra adequado durante a fase I para que o desempenho do gráfico de controle seja o mais próximo possível do ideal.

## 2.5 ANÁLISE DO DESEMPENHO DE GRÁFICOS DE CONTROLE

Sendo  $\mu$  o valor médio da característica da qualidade controlada e  $\mu_0$  o valor alvo da característica em estado sob controle, os gráficos de controle testam as seguintes hipóteses (KEMP, 1961; REYNOLDS, 1975; CHAKRABORTI, 2000; MONTGOMERY e RUNGER, 2002; MARTINS *et al.*, 2006; CHAKRABORTI, HUMAN e GRAHAM, 2009; CARPINETTI 2013):

- $H_0$ , que consiste em um processo sob controle, com  $\mu_0 = \mu$ ;
- $H_1$ , que consiste em um processo fora de controle, com  $\mu_0 \neq \mu$ .

Considerando  $H_0$  verdadeira, ou seja, o processo encontra-se sob controle estatístico, a decisão correta de aceitar a hipótese implica em uma probabilidade  $1 - \alpha$  e rejeitá-la em uma probabilidade  $\alpha$ . Se  $H_0$  é falsa, ou seja, o processo encontra-se fora de controle, aceitar a hipótese implica em uma probabilidade  $\beta$ , e a decisão correta de rejeitá-la em uma probabilidade  $1 - \beta$ . As Equações 61 e 62 apresentam como são calculadas as probabilidades  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\alpha = P\{\bar{X} > LSC \text{ ou } \bar{X} < LIC \mid \mu_0 = \mu\} \quad (61)$$

$$\beta = P\{LIC \leq \bar{X} \leq LSC \mid \mu_0 \neq \mu\} \quad (62)$$

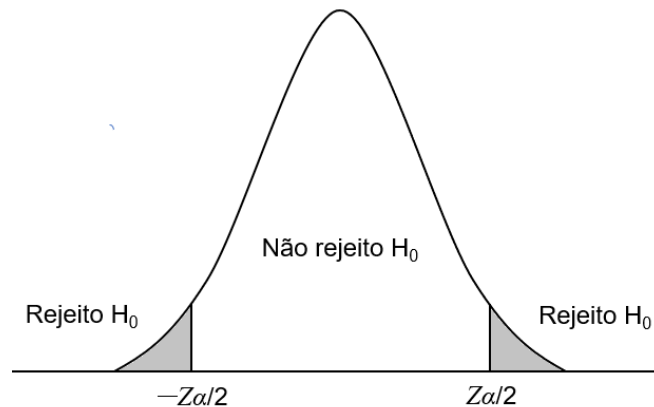
Em resumo, dois erros possíveis podem ser cometidos no teste de hipóteses feito pelos gráficos de controle, que são eles:

- Erro tipo I, que consiste em se rejeitar uma hipótese verdadeira;
- Erro tipo II, que consiste em se aceitar uma hipótese falsa.

### 2.5.1 Erro tipo I

Segundo Chakraborti (2000), o erro tipo I consiste na probabilidade de um ponto localizar-se fora dos limites de controle partindo-se do pressuposto de um processo estável. A Figura 6 ilustra o erro tipo I em um gráfico de distribuição de probabilidade normal.

Figura 6: Erro tipo I



Fonte: Autor (2021)

Para cálculo dos limites de controle, utiliza-se três desvios padrão de deslocamento em relação à média do processo. O que resulta em um erro tipo I de 0,0027, ou, por consequência, um ARL de 370,40. Costa, Epprescht e Carpinetti (2014) definem a relação matemática entre a probabilidade de erro tipo I e o uso de três desvios padrão, conforme Equações 63, 64 e 65:

$$\alpha = P\{\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Verdadeira}\} \quad (63)$$

$$\alpha = P(\bar{x} > \text{LSC}) + P(\bar{x} < \text{LIC}) \quad (64)$$

$$\alpha = P(Z > \frac{\text{LSC} - \mu_x}{\sigma_x}) + P(Z < \frac{\text{LIC} - \mu_x}{\sigma_x}) \quad (65)$$

Substituindo LSC por  $\mu_0 + 3\sigma_x$  e LIC por  $\mu_0 - 3\sigma_x$ , considerando o processo sob controle estatístico, tem-se:

$$\alpha = P(Z > \frac{\mu_0 + 3\sigma_x - \mu_0}{\sigma_x}) + P(Z < \frac{\mu_0 - 3\sigma_x - \mu_0}{\sigma_x}) \quad (66)$$

$$\alpha = P(|Z| > 3) \quad (67)$$

Transformando-se  $\bar{x}$  em  $Z$ , sendo  $Z$  uma variável aleatória com distribuição Normal, e substituindo-se os limites de controle por três desvios padrão, tanto para

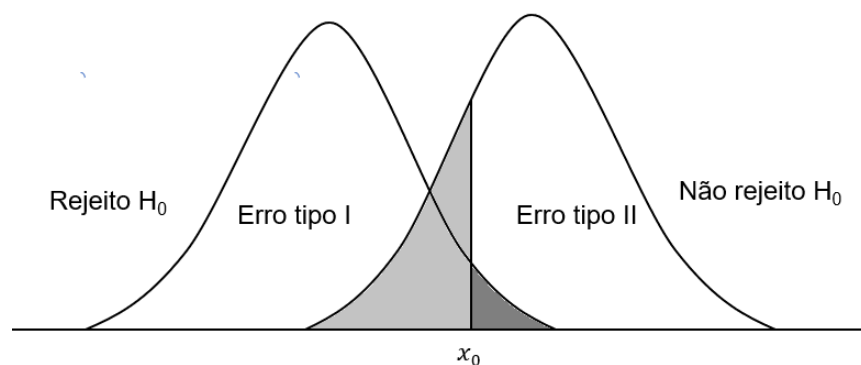
mais, como para menos, verifica-se que  $-Z \alpha/2$  e  $Z \alpha/2$ , ou  $Z > 3$  e  $Z < -3$ , como uma probabilidade de erro do tipo I de 0,27%, logo, conclui-se que aumentando o deslocamento, menor é essa probabilidade. Para  $k = 3,15$ , tem-se uma probabilidade de erro do tipo I de 0,16%, que corresponde a um ARL de 612,40, e, para  $k = 3,30$ , têm-se uma probabilidade de erro do tipo I de 0,09%, que corresponde a um ARL de 1034,00.

Nota-se no desenvolvimento das equações, que o termo  $k$  indica o número de desvios padrão em relação à média utilizado para cálculo dos limites de controle, ou, em outras palavras, o deslocamento dos limites de controle em relação à linha central do gráfico.

### 2.5.2 Erro tipo II

Graficamente, o erro tipo II pode ser representado por duas curvas de distribuição, sendo uma para hipótese nula, que indica um processo sob controle, e outra para hipótese alternativa, que indica um processo com parâmetro deslocado, conforme Figura 7.

Figura 7: Erro tipo II



Fonte: Autor (2021)

Matematicamente, Montgomery (2014) define o erro tipo II conforme Equações 68 e 69:

$$\beta = P\{\text{Não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ Falsa}\} \quad (68)$$

$$\beta = \phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma) - \phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma) \quad (69)$$

Deduz-se, portanto, a probabilidade de erro tipo II sendo a probabilidade do teste estatístico  $Z_0$  estar localizado no intervalo igual a  $\beta$ . O termo  $\phi$  indica que se trata de uma distribuição Normal acumulada. Costa, Epprescht e Carpinetti (2014) esclarecem que o PD de um gráfico de controle é obtido com base na probabilidade de erro tipo II e que o tamanho da amostra e o fator de deslocamento entre parâmetros  $\delta$  são os dois principais fatores que podem comprometê-lo. Quanto maior o número e o tamanho da amostra, maior será o PD do gráfico de controle. Os autores ainda destacam que o PD de um gráfico de controle é calculado em função da probabilidade  $1 - \beta$ , conforme Equações 70 e 79 abaixo:

$$P(\bar{x} > LSC) = P(Z > Z_{LSC}) \quad (70)$$

Sendo:

$$Z_{LSC} = \frac{LSC - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}} \quad (71)$$

Pode-se escrever a Equação 75:

$$Z_{LSC} = \frac{\mu_0 + k\sigma_x - (\mu_0 - \delta\sigma_0)}{\sigma_x} \quad (72)$$

Sendo  $\sigma_0/\sigma_x = \sqrt{n}$ , tem-se que:

$$Z_{LSC} = k - \delta\sqrt{n} \quad (73)$$

E, sabendo-se que:

$$P(\bar{x} > LSC) = P(\bar{x} < LIC) = P(Z < Z_{LIC}) \quad (74)$$

Sendo:

$$Z_{LIC} = \frac{LIC - \mu_x}{\sigma_x} \quad (75)$$

Do mesmo modo:

$$Z_{LIC} = \frac{\mu_0 - k \sigma_x - (\mu_0 - \delta \sigma_0)}{\sigma_x} \quad (76)$$

Logo:

$$Z_{LIC} = -k - \delta \sqrt{n} \quad (77)$$

Sendo:

$$PD = P(Z > Z_{LSC}) + P(Z < Z_{LIC}) \quad (78)$$

Obtém-se:

$$PD = P(Z > (k - \delta \sqrt{n})) + P(Z < (-k - \delta \sqrt{n})) \quad (79)$$

### 2.5.3 Average run length

Diferentes métodos podem ser encontrados na literatura para avaliação do desempenho de gráficos de controle. Além de conhecer melhor as características operacionais de cada gráfico, é possível comparar os resultados e escolher o gráfico de controle mais adequado ao processo (WOODALL, 2000; JENSEN *et al.*, 2006; SCHOONHOVEN e DOES, 2012).

Segundo Jensen (2006), quando o processo está sob controle estatístico, o número de amostras necessárias até a ocorrência de um erro tipo I é indicado pelo  $ARL_0$ , que é calculado conforme Equação 80:

$$ARL_0 = 1/\alpha \quad (80)$$



Nota-se que quanto maior o valor de  $\alpha$ , menor será o  $ARL_0$ , e, conseqüentemente, maior será a ocorrência de falsos alarmes no processo, visto que a probabilidade de erro tipo I é calculada conforme Equação 81:

$$\text{Erro tipo I} = 1/ARL_0 \quad (81)$$

Em um processo fora de controle, Montgomery (2014) esclarece que a habilidade do gráfico de controle em detectar deslocamentos nos parâmetros do processo é  $1 - \beta$  e o número de amostras necessárias é denominada pelo  $ARL_1$ , que é calculado conforme Equação 82:

$$ARL_1 = 1/1 - \beta \quad (82)$$

Sendo  $\beta$  a probabilidade de erro tipo II e o PD do gráfico de controle definido em função de  $1 - \beta$ , verifica-se que quanto maior o  $ARL_1$ , menor é a capacidade do gráfico de controle em detectar deslocamentos no processo. A probabilidade de erro tipo II é calculada conforme Equação 83:

$$\text{Erro tipo II} = 1/ARL_1 \quad (83)$$

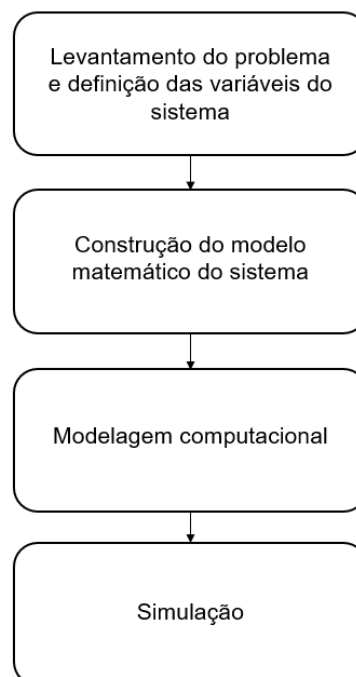
Conclui-se que o ARL é uma medida de desempenho de extrema importância, visto que o objetivo dos gráficos durante a fase de monitoramento é justamente detectar rapidamente deslocamentos na média  $\delta$  e desvio padrão  $\lambda$  que possam ocorrer ao longo do processo produtivo (KEMP, 1961; CHAKRABORTI, 2000; MONTGOMERY e RUNGER, 2002; MARTINS *et al.*, 2006; CARPINETTI 2013; LI *et al.*, 2014; KUHN, MANDJES e TAIMRE, 2019).

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Miguel *et al.* (2012), o método de modelagem matemática consiste no uso de técnicas analíticas e experimentais com a finalidade de descrever o comportamento de uma ou mais variáveis de um determinado sistema e suas interações. Dentre as suas principais vantagens, Santos (1999) destaca a possibilidade de se criar modelos matemáticos bem próximos da realidade ou mesmo sob condições improváveis para simulação.

A simulação consiste em uma experimentação computacional, onde são usados modelos de sistemas idealizados para estudo de problemas reais de natureza complexa com o objetivo de testar diferentes alternativas e propostas. Além do mais, justifica-se o uso da modelagem e simulação neste trabalho, devido à complexidade dos cálculos realizados (DEMO, 1985; SANTOS, 1999; MARCONI e LAKATOS, 2003; CHWIF e MEDINA, 2010; BERTO e NAKANO, 2014). O método adotado pode ser resumido, conforme Figura 8.

Figura 8: Modelagem e simulação



Fonte: Autor (2021)

Para simular o uso do gráfico de controle do desvio do nominal em um processo produtivo qualquer e analisar seu desempenho, foram desenvolvidos

modelos matemáticos no *software* Maple 2016. O primeiro modelo foi criado para cálculo do ARL do gráfico de controle construído com parâmetros conhecidos, denominado Caso 1, ou *Known and Known* (KK). O ARL do gráfico é calculado da mesma forma que no gráfico da média, pois ambos têm como base uma distribuição de probabilidade Normal.

Foram criados mais três modelos matemáticos de gráficos de controle com média desconhecida e desvio padrão conhecido, média conhecida e desvio padrão desconhecido e ambos os parâmetros desconhecidos, denominados Casos 2, 3 e 4, ou *Unknown and Known* (UK), *Known and Unknown* (KU) e *Unknown and Unknown* (UU), respectivamente. O objetivo dos modelos, inicialmente, é demonstrar o efeito da estimativa de parâmetros no desempenho dos gráficos e verificar a quantidade adequada de amostras necessárias para se alcançar um desempenho próximo ao considerado ideal.

Em seguida foi criado um modelo para cálculo do ARL de um gráfico de controle UU, considerando quatro produtos hipotéticos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , com medidas  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$ , valores alvo  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$  e mesmo desvio padrão DV. Para cálculo dos limites de controle foi considerado  $k = 3$ . Posteriormente, o desvio padrão dos produtos,  $DV_1, DV_2, DV_3$  e  $DV_4$ , foi alterado em 0,5, 1, 3, 5, e 10% e  $k$  foi ajustado em 5 e 10% para cálculo de novos limites de controle. Os modelos utilizados são apresentados na seção de apêndices do trabalho.

### 3.1 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 1

Sendo  $\bar{X}_i$  calculado de uma amostra de  $n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , a probabilidade de erro tipo I de  $\alpha = P(\bar{X} \notin (LIC, LSC))$  ou  $\alpha = 1 - P(\bar{X} \in (LIC, LSC))$ , considerando os parâmetros conhecidos, pode-se dizer que o processo está sob controle estatístico, conforme Equação 84:

$$\bar{X}_i \in \left( LIC = \mu_0 - \frac{3\sigma_0}{\sqrt{n}}; LSC = \mu_0 + \frac{3\sigma_0}{\sqrt{n}} \right) \quad (84)$$

Para um processo fora de controle,  $\mu + \delta\sigma_0$ , e sendo  $\delta \neq 0$ , se  $k = 3/\sqrt{n}$ , LSC e LIC são calculados conforme Equações 85 e 86:

$$\text{LSC} = \mu_0 + k\sigma_0 \quad (85)$$

$$\text{LIC} = \mu_0 - k\sigma_0 \quad (86)$$

Pode-se escrever  $P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC})$ , conforme Equação 87:

$$P\left(\frac{\text{LIC} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\text{LSC} + (\mu_0 - \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \quad (87)$$

Desenvolvendo a expressão, tem-se:

$$P\left((\text{LIC} - \mu_0 - \delta\sigma_0)\sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\text{LSC} - \mu_0 - \delta\sigma_0)\sqrt{n}/\sigma_0\right) \quad (88)$$

$$P\left((\mu_0 - k\sigma_0 - \mu_0 - \delta\sigma_0)\sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\mu_0 + k\sigma_0 - \mu_0 - \delta\sigma_0)\sqrt{n}/\sigma_0\right) \quad (89)$$

$$P\left((\mu_0 - \Delta\sigma_0 - (k + \delta)\sigma_0 - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\mu_0 + \Delta\sigma_0 + (k - \delta)\sigma_0 - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma_0\right) \quad (90)$$

$$P\left((-k - \delta)\sigma_0\sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (k - \delta)\sigma_0\sqrt{n}/\sigma_0\right) \quad (91)$$

Sendo  $k = 3/\sqrt{n}$  e  $P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC}) = P(-3 - \delta\sqrt{n} \leq Z \leq 3 - \delta\sqrt{n})$ , a probabilidade é dada:

$$P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC}) = \Phi(3 - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-3 - \delta\sqrt{n}) \quad (92)$$

Podendo ser escrita como:

$$P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC}) = \Phi((\Delta - \delta)\sqrt{n} + 3) - \Phi(-(\Delta - \delta)\sqrt{n} - 3) \quad (93)$$

Sendo que o processo está sob controle quando  $\delta = 0$ , portanto, o Run Length (RL), ou Comprimento de Sequência (CS) é geométrico com probabilidade  $P(\delta, n)$ , logo, o ARL do gráfico do Caso 1 é dado pela Equação 94:

$$\text{ARL} = \frac{1}{1 - P(\text{LIC} \leq \bar{X} \leq \text{LSC})} \quad (94)$$

### 3.2 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 2

Quando a média do processo é desconhecida e os limites de controle estimados, sendo:

$$\bar{x} \in \left( \bar{X} - 3\sigma_0/\sqrt{n}; \bar{X} + 3\sigma_0/\sqrt{n} \right) \quad (95)$$

Assumindo que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  é uma amostragem independente com variável aleatória,  $X_{ij} \sim \text{Normal}(\mu_0, \sigma_0)$ ,  $\mu_0$  pode ser estimada conforme Equação 96:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (96)$$

Durante a fase II, amostras são extraídas do processo e  $X_i$  é calculado de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , a probabilidade de erro tipo I é  $\alpha = P(\bar{X} \notin (\widehat{L\bar{I}C}, \widehat{L\bar{S}C}))$  ou  $\alpha = 1 - P(\bar{X} \in (\widehat{L\bar{I}C}, \widehat{L\bar{S}C}))$ . Para um processo fora de controle, com  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma_0$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$P \left( \frac{\widehat{L\bar{I}C} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\widehat{L\bar{S}C} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right) \quad (97)$$

Desenvolvendo a Equação 97, tem-se:

$$P \left( (\widehat{L\bar{I}C} - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\widehat{L\bar{S}C} - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \right) \quad (98)$$

$$P \left( (\bar{X} - k\sigma_0 - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\bar{X} + k\sigma_0 - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \right) \quad (99)$$

$$P \left( (\bar{X} - (k + \delta)\sigma_0 - \mu_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\bar{X} + (k - \delta)\sigma_0 - \mu_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \right) \quad (100)$$

Sendo um processo sob controle, durante a fase II,  $\bar{X} - \mu_0 = W\sigma_0/\sqrt{mn}$ , então, o mesmo pode ser escrito conforme Equação 101:

$$P \left( \left[ \frac{W\sigma_0}{\sqrt{mn}} - (k + \delta)\sigma_0 \right] \sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq \left[ \frac{W\sigma_0}{\sqrt{mn}} + (k - \delta)\sigma_0 \right] \sqrt{n}/\sigma_0 \right) \quad (101)$$

Desenvolvendo a expressão, a probabilidade para  $k = 3/\sqrt{n}$  é dada pela Equação 102:

$$P(\widehat{LIC} \leq \bar{X} \leq \widehat{LSC}) = \Phi \left( \left[ \frac{W\sigma_0}{\sqrt{m}} + 3 - \delta\sqrt{n} \right] \right) - \Phi \left( \left[ \frac{W\sigma_0}{\sqrt{m}} - 3 - \delta\sqrt{n} \right] \right) \quad (102)$$

Portanto, uma vez que a o RL é geométrico com probabilidade  $P(W, \delta, m, n)$ , pode-se afirmar que o ARL do gráfico de controle do Caso 2 é calculado conforme Equação 103:

$$ARL = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1 - P(W, \delta, m, n)]} \varphi(w) dw \quad (103)$$

### 3.3 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 3

Assumindo que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  é uma amostragem independente de variável aleatória  $X_{ij} \sim \text{Normal}(\mu_0, \sigma_0)$ , a estimativa para  $\sigma_0$  é dada pela Equação 104:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2} \quad (104)$$

Sendo:

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (105)$$

Considerando a média conhecida, o desvio padrão e os limites de controle estimados, sendo:

$$\bar{x} \in \left( \mu_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}; \mu_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \right) \quad (106)$$

A probabilidade de o processo estar sob controle estatístico é dada pela Equação 107:

$$P \left( \frac{\text{LIC} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}} \leq \frac{\text{LSC} - (\mu_0 + \delta\sigma_0)}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}} \right) \quad (107)$$

A expressão 106 pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$P \left( (\widehat{\text{LIC}} - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \leq Z \leq (\widehat{\text{LSC}} - \mu_0 - \delta\sigma_0) \sqrt{n}/\sigma_0 \right) \quad (108)$$

$$P \left( -k \frac{\hat{\sigma}_0 \sqrt{n}}{\sigma_0} - \delta \sqrt{n} \leq Z \leq k \frac{\hat{\sigma}_0 \sqrt{n}}{\sigma_0} - \delta \sqrt{n} \right) \quad (109)$$

Transformando as variáveis  $U = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$  e  $k = 3/\sqrt{n}$  a mesma expressão pode ser escrita:

$$P \left( -3U - \delta \sqrt{n} \leq Z \leq 3U - \delta \sqrt{n} \right) \quad (110)$$

Ou:

$$P(\widehat{\text{LIC}} \leq \bar{X} \leq \widehat{\text{LSC}}) = \Phi(3U - \delta \sqrt{n}) - \Phi(-3U - \delta \sqrt{n}) \quad (111)$$

Sendo a função de probabilidade de U como  $f(u) = m(n-1) f_{\chi^2}(m(n-1)u)$ , RL geométrico com probabilidade  $P(U, \delta, m, n)$ , é possível calcular o ARL do gráfico do Caso 3, neste caso, conforme Equação 112:

$$\text{ARL} = \int_0^{\infty} \frac{1}{[1 - P(U, \delta, m, n)]} f(u) du \quad (112)$$

Onde  $f_{x^2}$  a função de densidade de uma distribuição qui-quadrado com  $m(n - 1)$  graus de liberdade, conseqüentemente, o ARL de um processo sob controle é  $ARL(U, 0, m, n)$ .

### 3.4 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO DO CASO 4

Supondo  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  de distribuição normal extraídas durante a fase I, com ambos os parâmetros desconhecidos,  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  podem ser estimados, conforme Equação 113:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (113)$$

Sendo:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^2} \quad (114)$$

Onde:

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (115)$$

Em um processo sob controle com média, desvio padrão e limites de controle estimados:

$$\bar{x} \in \left( \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}; \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \right) \quad (116)$$

Analogamente aos Casos 2 e 3, pode-se dizer que o processo está sob controle quando:



$$P \left( \frac{\bar{X} - 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{\bar{X} + 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n} - \mu_0 - \delta\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right) \quad (117)$$

Desenvolvendo a expressão 116, considerando  $\bar{X} - \mu_0 = W\sigma_0/\sqrt{mn}$  e  $U = \hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2$ , tem-se:

$$P \left( W/\sqrt{m} - 3U - \delta\sqrt{n} \leq Z \leq W/\sqrt{m} + 3U - \delta\sqrt{n} \right) \quad (118)$$

Sendo:

$$W = \sqrt{mn}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma_0 \quad (119)$$

A função da probabilidade de U é  $f(u) = m(n-1) f_{x^2}(m(n-1)u)$  e sendo o RL geométrico com probabilidade P (W, U, Δ, δ, m, n), o ARL do gráfico do Caso 4 é dado pela Equação 120:

$$ARL = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{[1 - P(W, U, \delta, m, n)]} f(u) du \quad (120)$$

O Quadro 2 apresenta a fórmula utilizada para cálculo do ARL dos gráficos de controle do desvio do nominal em cada caso.

Quadro 2: Fórmulas para cálculo do ARL

Gráfico de controle	ARL
<b>Caso 1</b>	$ARL = \frac{1}{1 - P(LIC \leq \bar{X} \leq LSC)}$
<b>Caso 2</b>	$ARL = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1 - P(W, \delta, m, n)]} \varphi(w) dw$
<b>Caso 3</b>	$ARL = \int_0^{\infty} \frac{1}{[1 - P(U, \delta, m, n)]} f(u) du$
<b>Caso 4</b>	$ARL = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{[1 - P(W, U, \delta, m, n)]} f(u) du$

Fonte: Autor (2021)

Os valores encontrados nas simulações são apresentados no próximo capítulo do trabalho.

## 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1 CÁLCULO DO ARL DO GRÁFICO NO CASO 1

Para cálculo do ARL do gráfico de controle do Caso 1, foi considerado o deslocamento entre médias  $\delta$  variando de 0 até 2 e  $n$  variando em 5, 10 e 15 observações. O valor do ARL do gráfico é admitido como ideal, uma vez que é construído com parâmetros conhecidos ao invés de estimados. A Tabela 4 apresenta os valores encontrados. As colunas apresentam o ARL médio, calculado para cada tamanho de amostra considerado.

Tabela 4: Comparativo ARL para  $n = 5, 10$  e  $15$  para  $k = 3$

$\delta$	ARL		
	5	10	15
0,00	370,40	370,40	370,40
0,50	33,40	14,97	6,95
1,00	4,49	2,00	1,23
1,50	1,56	1,07	1,00
2,00	1,07	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

No Caso 1, quando não há deslocamento de parâmetros, ou seja,  $\delta = 0$ , o ARL do gráfico equivale a 370,40, confirmando-se o que diz a literatura sobre a baixa sensibilidade dos gráficos de controle a pequenos deslocamentos. Nota-se que, à medida que  $\delta$  se distancia de 0, o valor do ARL do gráfico diminui, ou seja, mais rápida é a detecção de um ponto fora de controle.

### 4.2 CÁLCULO E COMPARAÇÃO DO ARL NOS DEMAIS CASOS

Para a comparação entre o ARL dos gráficos de controle, foi considerado o número de amostras variando de 10 a 40 e o tamanho da amostra variando em 5, 10 e 15 observações. A Tabela 5 apresenta os valores do ARL obtido para o gráfico de cada caso para  $m = 10$ .

Tabela 5: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 10$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	277,90	15052853,00	70990,00
	0,50	33,40	45,40	567000,00	2674,00
	1,00	4,49	5,16	237,90	27,66
	1,50	1,56	1,64	2,72	2,54
	2,00	1,07	1,09	1,18	1,20
10	0,00	370,40	277,90	2603,00	1641,00
	0,50	14,97	19,20	53,81	33,94
	1,00	2,00	2,14	2,67	2,41
	1,50	1,07	1,08	1,12	1,10
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	277,90	1002,00	700,00
	0,50	6,95	8,31	8,99	11,31
	1,00	1,23	1,27	1,28	1,32
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

A Tabela 6 apresenta os valores do ARL encontrados para cada caso, sendo  $m = 15$ .

Tabela 6: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 15$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	298,30	16181,00	11170,00
	0,50	33,40	41,03	530,50	366,20
	1,00	4,49	4,91	9,15	10,63
	1,50	1,56	1,61	1,90	2,00
	2,00	1,07	1,08	1,13	1,14
10	0,00	370,40	298,30	955,30	691,24
	0,50	14,97	17,60	29,33	23,41
	1,00	2,00	2,09	2,36	2,24
	1,50	1,07	1,08	1,10	1,09
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	298,30	670,08	522,70
	0,50	6,95	7,80	8,15	9,33
	1,00	1,23	1,25	1,26	1,29
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

As Tabelas 7, 8, 9, 10 e 11 apresentam os valores do ARL para  $m = 20, 25, 30, 35$  e  $40$ .

Tabela 7: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 20$

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	311,00	3069,00	2322,00
	0,50	33,40	38,95	136,40	103,20
	1,00	4,49	4,80	7,59	6,82
	1,50	1,56	1,60	1,84	1,78
	2,00	1,07	1,08	1,12	1,11
10	0,00	370,40	311,00	686,90	551,00
	0,50	14,97	16,87	23,73	20,43
	1,00	2,00	2,06	2,25	2,16
	1,50	1,07	1,07	1,09	1,08
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	311,00	566,10	466,20
	0,50	6,95	7,57	7,80	8,59
	1,00	1,23	1,25	1,25	1,27
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

É possível notar uma aproximação do valor do ARL do Caso 2, com média estimada, com o ARL do gráfico de controle do Caso 1.

Tabela 8: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 25$

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	319,70	1265,00	1536,00
	0,50	33,40	37,75	72,59	88,09
	1,00	4,49	4,73	6,08	6,56
	1,50	1,56	1,59	1,72	1,76
	2,00	1,07	1,08	1,10	1,11
10	0,00	370,40	319,70	695,50	585,00
	0,50	14,97	16,46	19,00	21,27
	1,00	2,00	2,05	2,13	2,19
	1,50	1,07	1,07	1,08	1,09
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	319,70	515,10	439,20
	0,50	6,95	7,44	7,61	8,20
	1,00	1,23	1,25	1,25	1,26
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 9: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 30$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	326,10	913,90	1071,00
	0,50	33,40	36,98	60,75	70,19
	1,00	4,49	4,69	5,70	6,04
	1,50	1,56	1,59	1,69	1,72
	2,00	1,07	1,08	1,09	1,10
10	0,00	370,40	326,10	614,90	531,90
	0,50	14,97	16,20	18,17	19,89
	1,00	2,00	2,04	2,10	2,15
	1,50	1,07	1,07	1,08	1,08
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	326,10	485,30	423,60
	0,50	6,95	7,35	7,49	7,96
	1,00	1,23	1,24	1,25	1,26
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 10: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 35$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	331,10	902,10	865,10
	0,50	33,40	36,44	60,75	61,08
	1,00	4,49	4,66	5,70	5,73
	1,50	1,56	1,58	1,69	1,69
	2,00	1,07	1,08	1,09	1,10
10	0,00	370,40	331,10	614,90	499,50
	0,50	14,97	16,01	18,17	19,01
	1,00	2,00	2,03	2,10	2,13
	1,50	1,07	1,07	1,08	1,08
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	331,10	485,30	413,50
	0,50	6,95	7,29	7,49	7,79
	1,00	1,23	1,24	1,25	1,25
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 11: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 40$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	335,00	851,90	751,30
	0,50	33,40	36,04	50,46	55,57
	1,00	4,49	4,64	5,31	5,53
	1,50	1,56	1,58	1,65	1,67
	2,00	1,07	1,07	1,09	1,09
10	0,00	370,40	335,00	533,50	477,80
	0,50	14,97	15,87	17,23	18,39
	1,00	2,00	2,03	2,07	2,11
	1,50	1,07	1,07	1,07	1,08
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00
15	0,00	370,40	335,00	451,50	406,50
	0,50	6,95	7,25	7,35	7,68
	1,00	1,23	1,24	1,24	1,25
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Observando-se as tabelas, é possível verificar uma aproximação do ARL dos gráficos de cada caso com o ARL do gráfico de controle ideal a medida que o número de amostras aumenta. Nota-se também que o desempenho do gráfico de controle do Caso 2 é mais previsível que os demais, visto que um número de amostras maior melhora a estimativa da média. Na literatura sobre CEP, recomenda-se que pelo menos 25 amostras de tamanho igual a 5 sejam extraídas de um processo sob controle estatístico para estimativa de parâmetros. No entanto, esse valor é questionado por Jensen (2006). Castagliola *et al.* (2009) sugerem 200 amostras de  $n = 5$  para que o valor do  $ARL_0$  esperado seja igual a 370,40. As Tabelas 12, 13 e 14 apresentam os valores do ARL médio calculado para  $m = 200$ ,  $\delta$  variando de 0 a 2 e  $n = 5, 10$  e 15 observações, respectivamente.

Tabela 12: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 200$  e  $n = 5$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
5	0,00	370,40	361,80	424,20	414,60
	0,50	33,40	33,91	35,83	36,39
	1,00	4,49	4,52	4,63	4,66
	1,50	1,56	1,57	1,58	1,58
	2,00	1,07	1,07	1,07	1,07

Fonte: Autor (2021)

Tabela 13: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 200$  e  $n = 10$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
10	0,00	370,40	361,80	392,60	375,60
	0,50	14,97	12,97	13,11	12,95
	1,00	2,00	1,77	1,78	1,78
	1,50	1,07	1,04	1,04	1,05
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 14: ARL dos gráficos de controle nos Casos 1, 2, 3 e 4 para  $m = 200$  e  $n = 15$ 

$n$	$\delta$	ARL			
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
15	0,00	370,40	361,80	384,20	372,60
	0,50	6,95	7,01	7,03	7,02
	1,00	1,23	1,23	1,23	1,23
	1,50	1,00	1,00	1,00	1,00
	2,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Embora comprovado que quanto maior o número e o tamanho da amostra, mais o ARL dos gráficos de controle com parâmetros estimados se aproxima do ARL do gráfico de controle ideal, é necessário se verificar a viabilidade econômica e operacional da estratégia de amostragem escolhida. Em alguns casos, como em pequenos lotes de produção, por exemplo, nem sempre se dispõe dessa mesma quantidade de amostras no processo.

#### 4.3 SIMULAÇÃO DO ARL DO GRÁFICO DE CONTROLE SEM ALTERAÇÃO NO DESVIO PADRÃO

Em seguida, foi simulado o ARL gráfico de controle do desvio do nominal UU, sem variação no desvio padrão inicialmente. Foi considerado  $k = 3$ ,  $m$  variando de 10 a 40 e  $n$  variando de 5 a 15 observações. A Tabela 15 apresenta os valores do ARL médio calculado.



Tabela 15: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e  $k = 3$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	154,30	217,40	213,70	242,70	235,80	294,10	366,60
10	157,20	225,20	240,40	287,40	280,90	297,60	373,10
15	215,50	277,80	250,00	316,50	328,90	304,90	378,80

Fonte: Autor (2021)

Nota-se que o ARL do gráfico de controle é maior para um maior número de observações. Por exemplo, para  $m = 40$  e  $n = 5$ , o ARL do gráfico é de 366,60, próximo de 370,40. Logo, a probabilidade de erro tipo I é bem próxima de 0,27% também. Pequenos subgrupos com tamanhos de amostras menores apresentam um ARL menor, comparando-se com o ARL do gráfico ideal.

#### 4.4 SIMULAÇÃO DO ARL DO GRÁFICO DE CONTROLE COM ALTERAÇÃO GRADUAL NO DESVIO PADRÃO

Foram realizadas simulações do ARL do mesmo gráfico de controle com alterações no desvio padrão dos produtos. O objetivo das simulações é identificar a influência da variação do processo no desempenho do gráfico de controle, validando a proposição apontada por Montgomery (2014). Para os mesmos produtos, foram considerados os seguintes desvios padrão, 0,584, 0,586, 0,589 e 0,592, respectivamente, que corresponde a uma variação de 0,5%. A Tabela 16 apresenta os valores do ARL médio.

Tabela 16: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 0,5% no desvio padrão e  $k = 3$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	128,20	181,20	233,60	217,40	229,40	274,70	240,40
10	213,70	233,60	242,70	287,40	271,70	328,90	284,10
15	221,20	287,40	260,40	301,20	328,90	347,20	333,30

Fonte: Autor (2021)

Comparando-se as duas tabelas anteriores, percebe-se que os valores do ARL médio diminuem com uma variação de apenas 0,5% no desvio padrão dos produtos. Para a mesma condição,  $m = 40$  e  $n = 5$ , o ARL do gráfico que era 366,60, passa a ser 240,40.

Dando continuidade no estudo, os valores do desvio padrão dos produtos foram alterados para 0,584, 0,589, 0,595 e 0,601, que corresponde a uma variação de 1%, conforme Tabela 17.

Tabela 17: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 1% no desvio padrão e  $k = 3$

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	152,30	206,60	200,00	217,40	255,10	280,90	301,20
10	181,20	227,30	206,60	250,00	268,80	294,10	337,80
15	195,30	257,70	271,70	328,90	342,50	297,60	347,20

Fonte: Autor (2021)

Novas simulações foram realizadas com os valores do desvio padrão dos produtos de 0,584, 0,601, 0,619 e 0,638, que corresponde a uma alteração de 3% nos valores anteriores. O ARL médio, calculado para cada condição, apresentados na Tabela 18.

Tabela 18: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 3% no desvio padrão e  $k = 3$

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	176,10	192,30	198,40	242,70	242,70	208,30	245,10
10	179,90	204,90	263,20	301,20	268,80	268,80	308,60
15	189,40	238,10	287,40	328,90	308,60	280,90	316,50

Fonte: Autor (2021)

Novamente os valores do desvio padrão dos produtos foram alterados para 0,584, 0,613, 0,643 e 0,676, que corresponde agora a uma variação de 5%, conforme Tabela 19.

Tabela 19: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 5% no desvio padrão e  $k = 3$

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	164,50	182,50	181,20	274,70	240,40	255,10	233,60
10	168,90	206,60	274,70	287,40	257,70	304,90	233,60
15	186,60	242,70	274,70	324,70	294,10	317,20	328,90

Fonte: Autor (2021)

Finalmente, os valores do desvio padrão foram alterados agora para 0,584, 0,642, 0,706 e 0,777, que corresponde a uma variação de 10%, conforme demonstrado na Tabela 20.

Tabela 20: ARL do gráfico do desvio do nominal com variação de 10% no desvio padrão e  $k = 3$

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	138,90	157,20	163,40	166,70	172,40	217,40	250,00
10	167,80	160,30	227,30	219,30	220,10	227,30	266,00
15	179,90	185,20	235,80	245,50	255,80	245,10	274,70

Fonte: Autor (2021)

Observando-se as tabelas, nota-se que o ARL do gráfico se aproxima de 370,40 apenas quando  $m = 40$  e  $n = 5$ , considerando um processo sem variação no desvio padrão dos produtos. Nas condições posteriores, com alteração no desvio padrão, verifica-se que o ARL do gráfico é inferior a 300, ou seja, seriam necessários, pelo menos, dados de 200 peças para que o gráfico apresentasse um desempenho similar ao gráfico de controle ideal.

#### 4.5 PROPOSTA DE AJUSTE DOS LIMITES DE CONTROLE

Os mesmos modelos foram utilizados com ajuste no valor de  $k$  para cálculo de novos limites de controle. Aumentando-se o deslocamento dos limites de controle em relação à linha central, diminui-se também a probabilidade de falsos alarmes no processo. Por exemplo, alterando-se o valor de  $k$  para 3,15, ou seja, um ajuste de 5%, a probabilidade de erro tipo I passa a ser de 0,16%. A Tabela 21 apresenta o ARL médio calculado para um gráfico de controle KK.

Tabela 21: Comparativo ARL para  $n = 5, 10$  e  $15$  para  $k = 3,15$

$\delta$	ARL		
	5	10	15
0,00	612,40	612,40	612,40
0,50	47,42	17,14	8,88
1,00	5,54	1,98	1,30
1,50	1,72	1,05	1,00
2,00	1,10	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

Novas simulações foram realizadas, considerando o mesmo desvio padrão, inicialmente, e depois a mesma variação anterior entre os desvios padrão dos produtos. As Tabelas 22 a 27 apresentam os valores de ARL médio, obtido de uma rodada de 50 simulações, para  $k = 3,15$ .

Tabela 22: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e  $k = 3,15$

<i>n</i>	ARL						
	<i>m</i> = 10	<i>m</i> = 15	<i>m</i> = 20	<i>m</i> = 25	<i>m</i> = 30	<i>m</i> = 35	<i>m</i> = 40
5	206,60	294,10	301,20	362,30	301,20	362,30	384,60
10	221,20	328,90	352,00	367,60	337,80	403,20	490,20
15	238,10	352,10	378,80	416,70	396,80	609,80	697,60

Fonte: Autor (2021)

Tabela 23: ARL do gráfico com variação de 0,5% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,15$

<i>n</i>	ARL						
	<i>m</i> = 10	<i>m</i> = 15	<i>m</i> = 20	<i>m</i> = 25	<i>m</i> = 30	<i>m</i> = 35	<i>m</i> = 40
5	179,90	255,10	271,70	320,50	352,10	357,10	409,80
10	238,10	280,90	324,70	352,10	378,80	463,00	454,50
15	277,80	320,50	384,60	403,20	384,60	490,20	510,20

Fonte: Autor (2021)

Tabela 24: ARL do gráfico com variação de 1% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,15$

<i>n</i>	ARL						
	<i>m</i> = 10	<i>m</i> = 15	<i>m</i> = 20	<i>m</i> = 25	<i>m</i> = 30	<i>m</i> = 35	<i>m</i> = 40
5	189,00	280,90	287,40	304,90	320,50	333,30	333,30
10	217,40	297,60	297,60	337,80	337,80	342,50	378,80
15	287,40	396,80	316,50	380,80	373,10	438,60	471,70

Fonte: Autor (2021)

Tabela 25: ARL do gráfico com variação de 3% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,15$

<i>n</i>	ARL						
	<i>m</i> = 10	<i>m</i> = 15	<i>m</i> = 20	<i>m</i> = 25	<i>m</i> = 30	<i>m</i> = 35	<i>m</i> = 40
5	174,80	208,30	267,60	323,30	311,70	327,60	373,10
10	252,50	280,90	273,10	342,50	328,90	340,60	393,50
15	271,70	310,60	309,80	362,30	364,60	425,60	446,40

Fonte: Autor (2021)

Tabela 26: ARL do gráfico com variação de 5% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,15$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	162,30	260,40	271,70	316,50	333,30	260,40	297,60
10	257,70	263,20	396,80	342,50	367,60	297,60	368,20
15	362,30	378,80	423,70	357,10	367,60	308,60	396,80

Fonte: Autor (2021)

Tabela 27: ARL do gráfico com variação de 10% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,15$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	122,50	170,10	198,40	274,70	245,10	280,90	316,50
10	174,70	203,30	215,50	308,60	284,10	316,50	333,30
15	250,00	352,10	245,10	324,70	333,30	333,30	367,70

Fonte: Autor (2021)

Por fim, novas simulações foram realizadas ajustando-se o valor de  $k$  em 10%. A Tabela 28 apresenta o ARL médio calculado para o gráfico de controle KK, com  $k = 3,30$ .

Tabela 28: Comparativo ARL para  $n = 5, 10$  e  $15$  para  $k = 3,30$ 

$\delta$	ARL		
	5	10	15
0,00	1034,00	1034,00	1034,00
0,50	68,68	23,35	11,58
1,00	6,95	2,24	1,39
1,50	1,91	1,08	1,00
2,00	1,13	1,00	1,00

Fonte: Autor (2021)

As Tabelas 29 a 34 apresentam os valores do ARL médio, obtido de uma rodada de 50 simulações, considerando o mesmo desvio padrão, inicialmente, e a mesma variação.

Tabela 29: ARL do gráfico do desvio do nominal sem variação no desvio padrão e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	320,50	480,80	490,20	511,20	568,20	609,80	806,50
10	373,10	520,80	690,60	625,00	694,40	925,90	961,50
15	531,90	694,40	714,30	675,70	725,00	961,50	1136,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 30: ARL do gráfico com variação de 0,5% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	229,40	409,80	543,50	510,20	641,00	520,80	806,50
10	367,60	657,90	606,50	543,50	662,10	714,30	833,30
15	454,50	735,30	641,00	694,40	717,50	925,90	892,90

Fonte: Autor (2021)

Tabela 31: ARL do gráfico com variação de 1% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	268,80	409,80	409,80	446,40	555,60	625,00	694,40
10	362,30	609,80	594,40	557,60	606,50	735,30	714,10
15	411,40	641,00	641,00	675,70	675,70	806,50	806,50

Fonte: Autor (2021)

Tabela 32: ARL do gráfico com variação de 3% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	312,50	438,60	490,20	595,20	568,20	609,80	625,00
10	368,20	500,00	500,00	735,30	714,30	806,50	609,80
15	373,10	694,40	657,90	833,30	735,30	925,90	641,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 33: ARL do gráfico com variação de 5% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	225,20	409,80	500,00	595,20	625,00	520,80	490,20
10	438,60	531,90	625,00	625,00	694,40	694,40	641,00
15	446,40	609,80	641,00	681,00	714,30	806,50	806,50

Fonte: Autor (2021)

Tabela 34: ARL do gráfico com variação de 10% no desvio padrão dos produtos e  $k = 3,30$ 

$n$	ARL						
	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 25$	$m = 30$	$m = 35$	$m = 40$
5	294,10	362,20	390,60	581,40	384,60	417,70	463,00
10	373,10	373,10	480,80	617,90	446,40	490,20	625,00
15	384,60	490,20	520,80	675,70	735,30	595,20	694,40

Fonte: Autor (2021)

Considerando a estratégia de amostragem geralmente utilizada na prática, ou seja,  $m = 25$ , verifica-se nas Tabelas 35 a 40 o ARL médio simulado em cada caso

estudado, para  $n = 5, 10$  e  $15$ , sem e com alteração gradual de  $0,5, 1, 3, 5$  e  $10\%$  no desvio padrão dos produtos.

Tabela 35: Comparativo ARL sem alteração no desvio padrão

$n$	ARL		
	$k = 3$	$k = 3,15$	$k = 3,30$
5	242,70	362,30	511,20
10	287,40	367,60	625,00
15	316,50	416,70	675,70

Fonte: Autor (2021)

Tabela 36: Comparativo ARL com alteração de  $0,5\%$  no desvio padrão

$n$	ARL		
	$k = 3$	$k = 3,15$	$k = 3,30$
5	217,40	320,50	510,20
10	287,40	352,10	543,50
15	301,20	403,20	694,40

Fonte: Autor (2021)

Tabela 37: Comparativo ARL com alteração de  $1\%$  no desvio padrão

$n$	ARL		
	$k = 3$	$k = 3,15$	$k = 3,30$
5	217,40	304,90	446,40
10	250,00	337,80	557,60
15	328,90	380,80	675,70

Fonte: Autor (2021)

Tabela 38: Comparativo ARL com alteração de  $3\%$  no desvio padrão

$n$	ARL		
	$k = 3$	$k = 3,15$	$k = 3,30$
5	242,70	323,30	595,20
10	301,20	342,50	735,30
15	328,90	362,30	833,30

Fonte: Autor (2021)

Tabela 39: Comparativo ARL com alteração de 5% no desvio padrão

<i>n</i>	ARL		
	<i>k</i> = 3	<i>k</i> = 3,15	<i>k</i> = 3,30
5	274,70	316,50	595,20
10	287,40	342,50	625,00
15	324,70	357,10	681,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 40: Comparativo ARL com alteração de 10% no desvio padrão

<i>n</i>	ARL		
	<i>k</i> = 3	<i>k</i> = 3,15	<i>k</i> = 3,30
5	166,70	274,70	581,40
10	219,30	308,60	617,90
15	245,50	324,70	675,70

Fonte: Autor (2021)

Para  $m = 25$ , nota-se que o ARL não se aproxima do ideal, mesmo sem alteração no desvio padrão dos produtos. Verifica-se ARL próximos do ideal para situações com variação no processo de até 3% para  $k = 3,15$ . Para  $k = 3,30$  verifica-se ARL superiores a 370,4 mesmo com variações de 10% no desvio padrão dos produtos.



## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS

Os resultados das simulações apresentadas no presente trabalho comprovaram que o desempenho do gráfico de controle do desvio do nominal fica comprometido quando construído com parâmetros estimados, assim como qualquer outro gráfico de controle. No entanto, quanto maior o número de observações, mais o ARL do gráfico se aproxima ao ARL do gráfico de controle do Caso 1. Nos três casos estudados, Caso 2, 3 e 4, espera-se um ARL próximo ao valor ideal apenas quando  $m > 200$  e  $n > 5$ , conforme sugerido na literatura.

Diante disso, concluiu-se que a estratégia de amostragem escolhida para construção do gráfico durante a fase I tem de ser cuidadosamente analisada, pois o bom desempenho do gráfico de controle depende de uma estimativa precisa de parâmetros ou de um número relativamente alto de amostras.

Os resultados encontrados também validaram a proposição de Montgomery (2014) com respeito à influência da variação do processo no desempenho do gráfico de controle. Verificou-se um desempenho melhor do gráfico construído sem variação no desvio padrão em comparação com os demais. Quanto maior a variação, menor o desempenho do gráfico observado nas simulações. Variações maiores que 1% no desvio padrão dos produtos, para  $k = 3$ , inviabilizam o uso do gráfico para números menores de amostras.

No entanto, com ajustes no valor de  $k$ , é possível viabilizar o uso desse gráfico em ambientes enxutos, visto que ARL próximos do valor ideal são observados mesmo com variações no desvio padrão dos produtos. Por exemplo, considerando uma variação de 0,5%, para  $m = 25$ ,  $n = 5$  e para  $k = 3,15$ , espera-se um ARL médio de 362,30. Considerando uma variação de 10%, para  $m = 10$ ,  $n = 10$  e para  $k = 3,30$ , espera-se um ARL de 373,10.

Conclui-se que, de fato, o uso do gráfico pode ser viável mesmo em grupo de produtos diferentes submetidos a um mesmo processo de fabricação, pois, espera-se que o valor do desvio padrão de cada produto seja aproximado e não necessariamente o mesmo.

Sugere-se, como pesquisa futura, o desenvolvimento de um novo modelo matemático para simulação do ARL do gráfico de controle do desvio do nominal, também construído com parâmetros estimados, com alteração no número e tamanho dos subgrupos para verificação das demais proposições feitas por Montgomery (2014). Pode-se também analisar o desempenho do gráfico para  $\delta \neq 0$  e quando a característica da qualidade possui medida com variação unilateral, ou ainda estudar a aplicação dos gráficos em situações reais.

## REFERÊNCIAS

- ABBASI, S., HAQ, A. **Enhanced adaptive CUSUM charts for process mean.** International journal of statistical computation and simulation, v. 89, n. 13, p. 2562-2582, 2019.
- ALKHAFAJI, A., OBEIDY, N. Q. A. **Improving the statistical process control by applying a DNOM chart for multiprocessor products.** International journal of materials science and engineering, v. 1, p. 1-13, 2018.
- ALWAN, L. C. **Effects of autocorrelation on control chart performance.** International journal of communications in statistics, v. 21, n. 4, p. 1025-1049, 2007.
- AYKROYD, R. G., LEIVA, V., RUGGERI, F. **Recent developments of control charts, identification of big data sources and future trends of current research.** Technological forecasting and social change, v. 144, p. 221-232, 2019.
- BAKER, R. C., BROBST, R. W. **Conditional double sampling.** International journal of quality technology, v. 10, p. 150-154, 1996.
- BARNARD, G. A. **Control charts and stochastic processes.** International journal of the royal statistical society, v. 21, n. 2, p. 239-271, 1959.
- BERTO, R. M. V. S., NAKANO, D. **Revisitando a produção científica nos anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção.** Revista produção, v. 24, n. 1, p. 225-232, 214.
- BOX, G. E. P., COX, D. R. **An analysis of transformations.** International journal of the royal statistical society, v. 26, n. 2, p. 211-252, 1964.
- BROOK, D., EVANS, D. A. **An approach to the probability distribution of CUSUM run length.** Biometrika, v. 59, n. 3, p. 539-549, 1972.
- CASTAGLIOLA, P., CELANO, G., CHEN, G. **The exact run length distribution and design of the S2 chart when the in-control variance is estimated.** International journal of reliability, quality and safety engineering, v. 16, n. 1, p. 23-38, 2009.
- CASTAGLIOLA, P., CELANO, G., FICHERA, S. **Comparison of the X chart and the t chart when the parameters are estimated.** Quality technology and quantitative management, v. 10, n. 1, p. 1-16, 2013.
- CASTAGLIOLA, P., MARAVELAKIS, P. E. **A CUSUM control chart for monitoring the variance when parameters are estimated.** International journal of statistical planning and inference, v. 141, p. 1463-1478, 2011.
- CASTILLO, E. D., MONTGOMERY, D. **Short-run statistical process control: q-chart enhancements and alternative methods.** International journal of quality and reliability engineering, v. 10, p. 87-97, 1994.

CASTILLO, E. D., MONTGOMERY, D. **A general model for the optimal economic design of X charts used to control short or long run processes.** IIE transactions, v. 28, p. 193-201, 1996.

CASTILLO, E. D., GRAYSON, J. M., MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. **A review of statistical process control techniques for short run manufacturing systems.** Communications in statistics, v. 25, n. 11, p. 2723-2737, 1996.

CAPIZZI, G., MASAROTTO, G. **An enhance control charts for startup processes and short runs.** International journal of quality technology and quantitative management, v. 9, n. 2, p. 189-202, 2012.

CELANO, G., CASTAGLIOLA, P., TROVATO. **The economic performance of a CUSUM t control chart for monitoring short production runs.** International journal of quality technology and quantitative management, v. 9, n. 4, p. 329-354, 2012.

CELANO, G., CASTAGLIOLA, P., TROVATO, E., FICHERA, S. **Shewhart and EWMA t control charts for short production runs.** Quality and reliability engineering international, v. 27, n. 1, p. 313-326, 2010.

CELANO, G., CASTAGLIOLA, P., FICHERA, S., NENES, G. **Performance of t control charts in short runs with unknown shift sizes.** Computer and industrial engineering, v. 64, n. 1, p. 56-68, 2013.

CELANO, G., CASTAGLIOLA, P., CHAKRABORTI, S., NENES, G. **The performance of the Shewhart sign control chart for finite horizon processes.** International journal of advanced manufacturing technology, v. 84, p. 1497-1512, 2016.

CHAKRABORTI, S. **Run length, average run length and false alarm rate of Shewhart X chart: exact derivations by conditioning.** Communications in statistics, simulation and computation, v. 29, n. 1, p. 61-81, 2000.

CHAKRABORTI, S. **Parameter estimation and design considerations in prospective applications of the chart.** International journal of applied statistics, v. 33, n. 4, p. 439-459, 2006.

CHAKRABORTI, S.; HUMAN, S. W., GRAHAM, M. A. **Phase I, statistical process control charts: an overview and some results.** International journal of quality and engineering, v. 21, n. 1, p. 52-62, 2009.

CHENG, S. W. **Practical implementation of the process capability index.** International journal of quality engineering, v. 7, n. 1, p. 239-259, 1994.

CHWIF, L., MEDINA, A. C. **Modelagem e simulação de sistemas discretos.** 3. Ed. São Paulo: Edição do Autor, 2010.

COLOSIMO, B. M., SENIN, N. **Geometric tolerances: impact on product design, quality inspection and statistical process monitoring**. 1. Ed. New York: Springer, 2011.

COSTA, A. F. B., EPPRECHT, E. K., CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico da qualidade**. 1. Ed. São Paulo: Editora Atlas, 2014.

CROWDER, S. V., **An SPC model for short production runs: minimizing expected costs**. *Technometrics*, v. 34, n. 1, p. 64-73, 1992.

CULLEN, C. C., BOTHE, D. R. **SPC for short production runs**. *International quality institute*, v. 1, p. 1960-1963, 1989.

DEMO, P. **Introdução à metodologia da ciência**. 2. Ed. São Paulo: Atlas, 1985.

ELG, M., OLSSON, J., DAHLGAARD, J. J. **Implementing statistical process control: an organization perspective**. *International journal of quality and reliability management*, v. 25, n. 6, p. 545-560, 2008.

EPPRECHT, A. L. E. K., COSTA, A. F. B. **Planejamento do controle estatístico de processos com baixa fração não conforme restrito a amostras pequenas**. *Produção*, v. 17, n. 1, p. 139-150, 2007.

FARNUM, N. R. **Control charts for short run: nonconstant process and measurement error**. *Journal of quality technology*, p. 138-144, 1992.

GRANT, E. L. **Statistical quality control**. 3 Ed. New York: McGraw Hill, 1965.

GRAVES, S. B., MURPHY, D. C., RINGUEST, J. L. **Acceptance sampling versus redundancy as alternative means to achieving goals for system reliability**. *International journal of quality and reliability management*, v. 16, p. 362-370, 1999.

GRUBBS, F. E. **The difference control charts with an example of its use**. *International journal of quality engineering*, v. 1, n. 3, p. 411-438, 1989.

GU, K., JIA, X., YOU, H. **A study on t chart for short-run and mixed model productions**. *International journal of advanced materials research*, v. 314, n. 316, p. 2478-2481, 2011.

GU, K., JIA, X., YOU, H., ZHANG, S. **A t-chart for monitoring multi-variety and small batch production run**. *International journal of quality and reliability management*, v. 30, n. 10, p. 287-299, 2014.

HAWKINS, D. M., OLWELL, D. H. **Cumulative sum charts and charting improvements**. Ed. Springer: Nova Iorque, 1998.

HILLIER, F. S. **Chart control limits based on small number of subgroups**. *International journal of industrial and quality control*, v. 20, n. 8, p. 24-29, 1964.

- HILLIER, F. S. **X and R chart control limits based on small number of subgroups**. International journal of quality technology, v. 1, n. 1, p. 17-26, 1969.
- HILLIER, F. S. **Small sample probability limits for the range chart**. International journal of american statistical association, v. 62, p. 1488-1493, 1967.
- HO, L., TRINDADE, A. L. **Economic design of an X chart for short run production**. International journal of production economics, v. 120, p. 613-624, 2009.
- JENSEN, W. A., JONES-FARMER, L. A., CHAMP, C. W., WOODALL, W. H. **Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review**. International journal of quality technology, v. 38, n. 4, p. 349-364, 2006.
- JONES-FARMER, L. A. **An overview of phase I analysis for process improvement and monitoring**. International journal of quality technology, v. 46, n. 3, p. 265-280, 2014.
- JURAN, J. M. **Controle da qualidade: conceitos, políticas e filosofia da qualidade**. 4 Ed. São Paulo: Makron Books, 1991.
- JURAN, J. M., GRZYNA, F. M. **Métodos estatísticos clássicos aplicados à qualidade**. 1 Ed. São Paulo: Makron Books, 1993.
- KANE, V. E. **Process capability indices**. International journal of quality technology, v. 18, n. 1, p. 41-52, 1986.
- KEMP, K. W. **The average run length of the cumulative sum chart when a V mask is used**. International journal of the royal statistical society, v. 23, n. 1, p. 149-153, 1961.
- KIM, G. C., SCHNIEDERJANS, M. J. **Use of short run statistical process control techniques: a comparison of US and Japanese manufacturing**. American journal of business, v. 15, n. 1, p. 21-30, 2000.
- KHOO, M. B. C., QUAH, S. H., LOW, H. C., CH'NG, C. K. **Short runs multivariate control chart for process dispersion**. International journal of reliability, quality and safety engineering, v. 12, n. 2, p. 127-147, 2005.
- KOH, C. K., CHIN, J. F., KAMARUDDIN, S. **Modified short-run statistical process control for test and measurement process**. International journal of advanced manufacturing technology, v. 100, n. 5, p. 1531-1548, 2019.
- KORZENOWSKI, A. L., WERNER, L. **Probabilidade de erro do tipo I nas cartas de Shewhart sob não normalidade**. Produção. v. 22, n. 4, p. 807-816, 2012.
- KUHN, J., MANDJES, M., TAIMRE, T. **Practical aspects of false alarm control for change point detection: beyond average run length**. International journal of computation and simulation, v. 21, p. 25-42, 2019.

KUME, H. **Métodos estatísticos para melhoria da qualidade**. 1 Ed. São Paulo: Editora Gente, 1993.

LI, Z., ZOU, C., GONG, Z., WANG, A. **The computation of average run length and average time to signal: an overview**. International journal of statistical computation and simulation, v. 84, n. 8, p. 1779-1802, 2014.

LIN, S., LAI, Y., CHANG, S. I. **Short-run statistical process control: multicriteria part family formation**. International journal of quality and reliability, v. 13, p. 9-24, 1997.

LIZARELLI, F. L., BESSI, N. C., OPRIME, P. C., AMARAL, R. M., CHAKRABORTI, S. **A bibliometric analysis of 50 years of worldwide research on statistical process control**. Gestão da produção, v. 23, n. 4, p. 853-870, 2016.

LUCAS, J. M., SACCUCCI, M. S. **Exponentially Weighted Moving Average control schemes: properties and enhancements**. Technometrics, v. 32, n. 1, p. 1-12, 1990.

MARCONI, M. A., LAKATOS, E. M. **Fundamentos da metodologia científica**. 5. Ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MARTINS, F., RIBEIRO, J. C., ALMEIDA, S. S., RAMOS, E. M. L. S. **ARL para o gráfico de controle da mediana quando o estimador do desvio padrão é baseado nos quartis amostrais**. In: Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, 2006, Rio de Janeiro, Anais I.

MIGUEL, P. A. C., FLEURY, A., MELLO, C. H. P., NAKANO, D. N., LIMA, E. P., TURRIONI, J. B., HO, L. H., MORABITO, R., MARTINS, R. A., SOUSA, R., COSTA, S. E. G., PUREZA, V. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2. Ed. São Paulo: Editora Elsevier, 2012.

MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4. Ed. São Paulo: Editora LTC, 2014.

MURPHY, D. B. N. **Consumer and quality**. 1. Ed. New Delhi: New Age International, 2001.

NENES, G., TAGARAS, G. **The economically designed CUSUM charts for monitoring short runs**. International journal of production research, v. 44, n. 8, p. 1569-1587, 2006.

NENES, G., TAGARAS, G. **The economically designed two-sided Bayesian X control chart**. European journal of operational research, v. 183, p. 263-277, 2007.

OPRIME, P. C., TOLEDO, J. C., GONZÁLEZ, M. O. A., CHAKRABORTI, S. **Método de estimativa dos limites da carta de controle não paramétrica que monitora**

**simultaneamente a média e a variância.** Gestão da Produção, v. 23, n. 1, p. 146-164, 2016.

PAGE, E. S. **Continuous inspection schemes.** Biometrika trust, v. 41, p. 100-115, 1954.

PEARN, W. L., LIN, P. C. **Testing process performance based on capability index Cpk with critical values.** Computer and industrial engineering, v. 47, p. 351-369, 2004.

PORTER, L. J., OAKLAND, J. S. **Measuring process capability using indices: some new considerations.** International journal of quality and reliability, v. 6, p. 19-27, 1990.

PSARAKIS, S.; VYNIYOU, A. K.; CASTAGLIOLA, P. **Some recent development on the effect of parameter estimation on control chart.** International journal of quality and reliability engineering, v.30, p. 1113-1129, 2014.

QIN, S. J. **Statistical process monitoring: basics and beyond.** International journal of chemometrics, v. 17, p. 480-502, 2003.

QUESENBERRY, C. P. **SPC Q charts for start-up processes and short or long runs.** International journal of quality technology, v. 23, n. 3, p. 213-224, 1991.

REBELATO, M. G., SOUZA, G. A., RODRIGUES, A. M., RODRIGUES, I. C. **Estudo sobre a aplicação de gráficos de controle em processos de saturação de papel.** In: Simpósio de Engenharia de Produção, 2006, Bauru, Anais XIII.

REYNOLDS, M. R. J. **Approximations to the average run length in cumulative sum control charts.** Technometrics, v. 17, n. 1, 65-71, 1975.

RIBEIRO, J. L., CATEN, C. T. **Controle estatístico do processo.** 1. Ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 1998.

RYAN, T. P. **Statistical methods for quality improvement.** 3. Ed. New Jersey: Willey, 2011.

SAMOHYL, R. W. **Controle estatístico de qualidade.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

SCHOONHOVEN, M., DOES, R. J. M. M. **A robust X control chart.** International journal of quality and reliability engineering, v. 29, p. 951-970, 2012.

SHEPARDSON, K., RUNGER, G. C., SULLO, P. **SPC for short runs using a Kalman filter.** International technical report, 1992.

SHEWHART, W. A. **Economic control of quality of manufactured products.** São Paulo: ASQPR, 1986.



SINGH, S., PRAJAPATI, D. R. **Performance of CUSUM and EWMA charts for serial correlation**. International journal of total quality management, v. 25, n. 3, p. 309-324, 2013.

SMITH, E. S. **Control charts: introduction to statistical quality control**. 1. Ed. New York: McGraw Hill, 1947.

SANTOS, H. A., TOLEDO, J. C., SANTOS, A. B., LIZARELLI, F. L. **Análise do uso do pensamento estatístico e de técnicas estatísticas em empresas industriais do Estado de São Paulo**. Gestão da produção, operações e sistemas, v. 14, n. 4, p. 210-237, 2019.

SOUZA, L. M., RIBEIRO JÚNIOR, J. I., REIS, G. M., IDE, M. S. **Eficiência dos gráficos de controle Xbarra, EWMA e CUSUM**. Revista produção e engenharia, v. 1, n. 1, p. 81-94, 2008.

SOWER, V. E., MOTWANI, J. G., SAVOIE, M. J. **Delta charts for short run statistical process control**. International journal of quality and reliability management, v. 11, n. 6, p. 50-56, 1994.

STECKE, K. E., KIM, I. **A study of FMS part type selection approaches for short-term production planning**. International journal of flexible manufacturing systems, v. 1, n. 1, p. 7-29, 1988.

TOLEDO, J. C., BORRÁS, J. A. A., MERGULHÃO, R. C., MENDES, G. H. S. **Qualidade: gestão e métodos**. 1. Ed. São Paulo: Editora LTC, 2014.

WASSERMAN, G. S. **Short run SPC using dynamic control chart**. Computers and industrial engineering, v. 27, n. 1, p. 353-356, 1994.

WERKEMA, M. C. **Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos**. 2 Ed. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, 1995.

WIEDERHOLD, M., GREIPEL, J., OTTONE, R., SCHMITT, R. **Clustering of similar processes for the application of statistical process control in small batch and job production**. International journal of metrology and quality engineering, v. 7, p. 404-411, 2016.

WOODALL, W. H. **The statistical design of quality control charts**. International journal of royal statistical society, v. 34, n. 2, p. 155-160, 1985.

WOODALL, W. H., MONTGOMERY, D. C. **Research issues and ideas in statistical process control**. International journal of quality technology, v. 31, n. 4, p. 376-386, 1999.

WOODALL, W. H. **Controversies and contradictions in statistical process control**. International journal of quality technology, v. 32, n. 4, p. 341-350, 2000.

YANG, J., GANG, T., CHENG, Y., XIE, M. **Process capability indices based on highest density interval**. International journal of quality and reliability engineering, v. 31, p. 1327-1335, 2015.

## APÊNDICE A MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 1

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

>

>

>

>

>

```
RRcaso1 := proc(n,  $\delta$ ) local i, fu, v, pn1, Beta, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u; pn1
:= CDF(Normal(0, 1), 3 -  $\delta \cdot \sqrt{n}$ , numeric); pn2 := CDF(Normal(0, 1), -3 -  $\delta \cdot \sqrt{n}$ ,
numeric); pn := pn1 - pn2; fu := PDF(Normal(0, 1), u, numeric); Beta := 1
- evalf(int(pn * fu, u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 6)); ARL := evalf( $\left(\frac{1}{\text{Beta}}, 3\right)$ ); ARL2
:= evalf( $\left(\frac{1}{1 - pn}, 4\right)$ ); print(ARL2); end proc
```

```
RRcaso1 := proc(n,  $\delta$ )
```

```
  local i, fu, v, pn1, B, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u;
```

```
  pn1 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), 3 -  $\delta * \text{sqrt}(n)$ , numeric);
```

```
  pn2 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), -3 -  $\delta * \text{sqrt}(n)$ , numeric);
```

```
  pn := pn1 - pn2;
```

```
  fu := Statistics:-PDF(Normal(0, 1), u, numeric);
```

```
  B := 1 - evalf(int(pn * fu, u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 6));
```

```
  ARL := evalf(1/B, 3);
```

```
  ARL2 := evalf(1/(1 - pn), 4);
```

```
  print(ARL2)
```

```
end proc
```

## APÊNDICE B MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 2

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

>

```
RRC2 := proc(m, n,  $\delta$ ) local i, fu, v, pn1, Beta, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u; pn1
:= CDF(Normal(0, 1),  $\frac{u}{\sqrt{m}} + 3 - \delta \cdot \sqrt{n}$ , numeric); pn2 := CDF(Normal(0, 1),
 $\frac{u}{\sqrt{m}} - 3 - \delta \cdot \sqrt{n}$ , numeric); pn := pn1 - pn2; fu := PDF(Normal(0, 1), u, numeric);
Beta := 1 - evalf(int(pn * fu, u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 5)); ARL :=  $\frac{1}{\text{Beta}}$ ; ARL2
:= evalf(int( $\frac{1}{1 - \text{pn}}$  * fu, u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 4)); print(ARL2); end proc
```

```
RRC2 := proc(m, n,  $\delta$ )
```

```
  local i, fu, v, pn1, B, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u;
```

```
  pn1 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), u/sqrt(m) + 3 -  $\delta$ *sqrt(n), numeric);
```

```
  pn2 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), u/sqrt(m) - 3 -  $\delta$ *sqrt(n), numeric);
```

```
  pn := pn1 - pn2;
```

```
  fu := Statistics:-PDF(Normal(0, 1), u, numeric);
```

```
  B := 1 - evalf(int(pn * fu, u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 5));
```

```
  ARL := 1/B;
```

```
  ARL2 := evalf(int(fu/(1 - pn), u = -  $\infty$  ..  $\infty$ , numeric, digits = 4));
```

```
  print(ARL2)
```

```
end proc
```

## APÊNDICE C MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 3

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

>

```
RRcaso3 := proc(m, n,  $\delta$ ) local i, fu, v, pn1, Beta, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u; pn1
:= CDF(Normal(0, 1), 3·u -  $\delta$ · $\sqrt{n}$ , numeric); pn2 := CDF(Normal(0, 1), - 3·u -  $\delta$ 
· $\sqrt{n}$ , numeric); pn := pn1 - pn2; fu := m·(n - 1)·PDF(ChiSquare(m·(n - 1)), m·(n
- 1)·u, numeric); ARL2 := evalf(int( $\frac{1}{1 - pn}$ ·fu, u = 0 ..3, numeric, digits = 4)); ARL
:= evalf(1·ARL2, 4); print(ARL);end proc
```

```
RRcaso3 := proc(m, n,  $\delta$ )
```

```
  local i, fu, v, pn1, B, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u;
```

```
  pn1 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), 3*u -  $\delta$ *sqrt(n), numeric);
```

```
  pn2 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), - 3*u -  $\delta$ *sqrt(n), numeric);
```

```
  pn := pn1 - pn2;
```

```
  fu := m*(n - 1)*Statistics:-PDF(ChiSquare(m*(n - 1)), m*(n - 1)*u, numeric);
```

```
  ARL2 := evalf(int(fu/(1 - pn), u = 0 ..3, numeric, digits = 4));
```

```
  ARL := evalf(ARL2, 4);
```

```
  print(ARL)
```

```
end proc
```

## APÊNDICE D MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL DO CASO 4

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

>

```
RRC4 := proc(m, n,  $\delta$ ) local i, fu, v, pn1, Beta, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u; pn1
:= CDF(Normal(0, 1),  $\frac{v}{\sqrt{m}} + 3 \cdot u - \delta \cdot \sqrt{n}$ , numeric); pn2 := CDF(Normal(0, 1),
 $\frac{v}{\sqrt{m}} - 3 \cdot u - \delta \cdot \sqrt{n}$ , numeric); pn := pn1 - pn2; fu := m \cdot (n - 1) \cdot PDF(ChiSquare(m
\cdot (n - 1)), m \cdot (n - 1) \cdot u, numeric); fv := PDF(Normal(0, 1), v, numeric); Beta := 1
- evalf(int(pn \cdot fv, v = -\infty .. \infty, numeric, digits = 5)); ARL :=  $\frac{1}{\text{Beta}}$ ; ARL2
:= evalf(int( $\frac{1}{1 - pn} \cdot fu \cdot fv$ , u = 0 .. 0.2, v = -5 .. 5, numeric, digits = 4)); print(ARL2); end
proc
```

```
RRC4 := proc(m, n,  $\delta$ )
```

```
  local i, fu, v, pn1, B, F, L, S, fv, ARL, ARL2, pn2, pn, u;
```

```
  pn1 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), v/sqrt(m) + 3 * u -  $\delta$  * sqrt(n), numeric);
```

```
  pn2 := Statistics:-CDF(Normal(0, 1), v/sqrt(m) - 3 * u -  $\delta$  * sqrt(n), numeric);
```

```
  pn := pn1 - pn2;
```

```
  fu := m * (n - 1) * Statistics:-PDF(ChiSquare(m * (n - 1)), m * (n - 1) * u, numeric);
```

```
  fv := Statistics:-PDF(Normal(0, 1), v, numeric);
```

```
  B := 1 - evalf(int(pn * fv, v = -\infty .. \infty, numeric, digits = 5));
```

```
  ARL := 1 / B;
```

```
  ARL2 := evalf(int(Typesetting:-delayDotProduct(fu / (1 - pn), fv), u = 0 .. 0.2, v = -5 .. 5,
  numeric, digits = 4));
```

```
  print(ARL2)
```

```
end proc
```

## PÂNDICE E MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL SEM VARIAÇÃO NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.584 \\ 0.584 \\ 0.584 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); Xt
:= Mean(Sample(Normal(Mp - Tp, DVp), n)); VRt := Variance(Sample(Normal(Mp
- Tp, DVp), n)); SM := add(Xp, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VRp, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC := MM + 3 ·  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC := MM - 3 ·  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Yi := Mean(Sample(Normal(Lg, DVg), n)); if LIC ≤ Yi ≤ LSC then Ci := 0
else Ci := 1 end if end do; somas := add(Cp, i = 1..k); end do; STotal := add(somas, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t,  $\alpha$ , LSC, VR, r, MM, Prob,
  SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;
  z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);
  T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);
  M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);
  DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);
  for r to  $\omega$  do
    for s to j do
      for t to m do
        p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));
        X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),
        n));
        VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[
        t]), n));
        SM := add(X[t], t = 1..m);
        MM := SM/m;
        SVR := add(VR[t], t = 1..m);
        MVR := SVR/m;
        DP := MVR^(1/2)
      end do;
      LSC := MM + 3 * DP/n^0.5;
      LIC := MM - 3 * DP/n^0.5;
      for i to k do
        L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] +  $\gamma$ *DV[1] +  $\beta$ *s, M[2] - T[2] +  $\gamma$ *DV
        [2] +  $\beta$ *s, M[3] - T[3] +  $\gamma$ *DV[3] +  $\beta$ *s, M[4] - T[4] +  $\gamma$ *DV[4] +  $\beta$ 
        *s], subtype = Vector[column]);
        g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));
        Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));
        if LIC <= Y[i] and Y[i] <= LSC then C[i] := 0 else C[i] := 1 end if
      end do;
      soma[s] := add(C[i], i = 1..k)
    end do;
    STotal := add(soma[s], s = 1..j);
    Prob := evalf(STotal / (j*k), 3);
    ARL := evalf(1/Prob, 4);
    print(Prob);
    print(ARL)
  end do
end proc

```



## APÊNDICE F MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 0,5% NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.592 \\ 0.586 \\ 0.589 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); X_t
:= Mean(Sample(Normal(M_p - T_p, DV_p), n)); VR_t := Variance(Sample(Normal(M_p
- T_p, DV_p), n)); SM := add(X_p, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VR_p, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC :=  $MM + 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC :=  $MM - 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Y_i := Mean(Sample(Normal(L_g, DV_g), n)); if LIC <= Y_i <= LSC then C_i := 0
else C_i := 1 end if end do; soma_s := add(C_p, i = 1..k); end do; STotal := add(soma_s, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local  $X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t, \alpha, LSC, VR, r, MM, Prob,$ 
   $SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;$ 
   $z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);$ 
   $T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);$ 
  for  $r$  to  $\omega$  do
    for  $s$  to  $j$  do
      for  $t$  to  $m$  do
         $p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),$ 
         $n));$ 
         $VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[t]$ 
         $]), n));$ 
         $SM := add(X[t], t = 1..m);$ 
         $MM := SM/m;$ 
         $SVR := add(VR[t], t = 1..m);$ 
         $MVR := SVR/m;$ 
         $DP := MVR^(1/2)$ 
      end do;
       $LSC := MM + 3 * DP/n^{0.5};$ 
       $LIC := MM - 3 * DP/n^{0.5};$ 
      for  $i$  to  $k$  do
         $L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] + \gamma * DV[1] + \beta * s, M[2] - T[2] + \gamma * DV$ 
         $[2] + \beta * s, M[3] - T[3] + \gamma * DV[3] + \beta * s, M[4] - T[4] + \gamma * DV[4] + \beta$ 
         $* s], subtype = Vector[column]);$ 
         $g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));$ 
        if  $LIC \leq Y[i]$  and  $Y[i] \leq LSC$  then  $C[i] := 0$  else  $C[i] := 1$  end if
      end do;
       $soma[s] := add(C[i], i = 1..k)$ 
    end do;
     $STotal := add(soma[s], s = 1..j);$ 
     $Prob := evalf(STotal / (j * k), 3);$ 
     $ARL := evalf(1 / Prob, 4);$ 
     $print(Prob);$ 
     $print(ARL)$ 
  end do
end proc

```

## APÊNDICE G MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 1% NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.601 \\ 0.589 \\ 0.595 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); Xt
:= Mean(Sample(Normal(Mp - Tp, DVp), n)); VRt := Variance(Sample(Normal(Mp
- Tp, DVp), n)); SM := add(Xp, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VRp, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC := MM + 3 ·  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC := MM - 3 ·  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Yi := Mean(Sample(Normal(Lg, DVg), n)); if LIC ≤ Yi ≤ LSC then Ci := 0
else Ci := 1 end if end do; somas := add(Cp, i = 1..k); end do; STotal := add(somas, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local  $X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t, \alpha, LSC, VR, r, MM, Prob,$ 
   $SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;$ 
   $z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);$ 
   $T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);$ 
  for  $r$  to  $\omega$  do
    for  $s$  to  $j$  do
      for  $t$  to  $m$  do
         $p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),$ 
         $n));$ 
         $VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[t]$ 
         $]), n));$ 
         $SM := add(X[t], t = 1..m);$ 
         $MM := SM/m;$ 
         $SVR := add(VR[t], t = 1..m);$ 
         $MVR := SVR/m;$ 
         $DP := MVR^(1/2)$ 
      end do;
       $LSC := MM + 3 * DP/n^0.5;$ 
       $LIC := MM - 3 * DP/n^0.5;$ 
      for  $i$  to  $k$  do
         $L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] + \gamma * DV[1] + \beta * s, M[2] - T[2] + \gamma * DV$ 
         $[2] + \beta * s, M[3] - T[3] + \gamma * DV[3] + \beta * s, M[4] - T[4] + \gamma * DV[4] + \beta$ 
         $* s], subtype = Vector[column]);$ 
         $g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));$ 
        if  $LIC <= Y[i]$  and  $Y[i] <= LSC$  then  $C[i] := 0$  else  $C[i] := 1$  end if
      end do;
       $soma[s] := add(C[i], i = 1..k)$ 
    end do;
     $STotal := add(soma[s], s = 1..j);$ 
     $Prob := evalf(STotal / (j * k), 3);$ 
     $ARL := evalf(1 / Prob, 4);$ 
     $print(Prob);$ 
     $print(ARL)$ 
  end do
end proc

```

## APÊNDICE H MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 3% NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.638 \\ 0.601 \\ 0.619 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); X_t
:= Mean(Sample(Normal(M_p - T_p, DV_p), n)); VR_t := Variance(Sample(Normal(M_p
- T_p, DV_p), n)); SM := add(X_p, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VR_p, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC := MM + 3 *  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC := MM - 3 *  $\frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Y_i := Mean(Sample(Normal(L_g, DV_g), n)); if LIC <= Y_i <= LSC then C_i := 0
else C_i := 1 end if end do; soma_s := add(C_p, i = 1..k); end do; STotal := add(soma_s, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t,  $\alpha$ , LSC, VR, r, MM, Prob,
  SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;
  z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);
  T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);
  M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);
  DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);
  for r to  $\omega$  do
    for s to j do
      for t to m do
        p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));
        X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),
          n));
        VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[
          t]), n));
        SM := add(X[t], t = 1..m);
        MM := SM/m;
        SVR := add(VR[t], t = 1..m);
        MVR := SVR/m;
        DP := MVR^(1/2)
      end do;
      LSC := MM + 3 * DP/n^0.5;
      LIC := MM - 3 * DP/n^0.5;
      for i to k do
        L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] +  $\gamma$ *DV[1] +  $\beta$ *s, M[2] - T[2] +  $\gamma$ *DV
          [2] +  $\beta$ *s, M[3] - T[3] +  $\gamma$ *DV[3] +  $\beta$ *s, M[4] - T[4] +  $\gamma$ *DV[4] +  $\beta$ 
          *s], subtype = Vector[column]);
        g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));
        Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));
        if LIC <= Y[i] and Y[i] <= LSC then C[i] := 0 else C[i] := 1 end if
      end do;
      soma[s] := add(C[i], i = 1..k)
    end do;
    STotal := add(soma[s], s = 1..j);
    Prob := evalf(STotal / (j*k), 3);
    ARL := evalf(1/Prob, 4);
    print(Prob);
    print(ARL)
  end do
end proc

```

## APÊNDICE I MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 5% NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.676 \\ 0.613 \\ 0.643 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); X_t
:= Mean(Sample(Normal(M_p - T_p, DV_p), n)); VR_t := Variance(Sample(Normal(M_p
- T_p, DV_p), n)); SM := add(X_p, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VR_p, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC :=  $MM + 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC :=  $MM - 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Y_i := Mean(Sample(Normal(L_g, DV_g), n)); if LIC <= Y_i <= LSC then C_i := 0
else C_i := 1 end if end do; soma_s := add(C_p, i = 1..k); end do; STotal := add(soma_s, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local  $X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t, \alpha, LSC, VR, r, MM, Prob,$ 
   $SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;$ 
   $z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);$ 
   $T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);$ 
  for  $r$  to  $\omega$  do
    for  $s$  to  $j$  do
      for  $t$  to  $m$  do
         $p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),$ 
         $n));$ 
         $VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[t]$ 
         $]), n));$ 
         $SM := add(X[t], t = 1..m);$ 
         $MM := SM/m;$ 
         $SVR := add(VR[t], t = 1..m);$ 
         $MVR := SVR/m;$ 
         $DP := MVR^(1/2)$ 
      end do;
       $LSC := MM + 3 * DP/n^0.5;$ 
       $LIC := MM - 3 * DP/n^0.5;$ 
      for  $i$  to  $k$  do
         $L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] + \gamma * DV[1] + \beta * s, M[2] - T[2] + \gamma * DV$ 
         $[2] + \beta * s, M[3] - T[3] + \gamma * DV[3] + \beta * s, M[4] - T[4] + \gamma * DV[4] + \beta$ 
         $* s], subtype = Vector[column]);$ 
         $g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));$ 
        if  $LIC \leq Y[i]$  and  $Y[i] \leq LSC$  then  $C[i] := 0$  else  $C[i] := 1$  end if
      end do;
       $soma[s] := add(C[i], i = 1..k)$ 
    end do;
     $STotal := add(soma[s], s = 1..j);$ 
     $Prob := evalf(STotal / (j * k), 3);$ 
     $ARL := evalf(1 / Prob, 4);$ 
     $print(Prob);$ 
     $print(ARL)$ 
  end do
end proc

```



## APÊNDICE J MODELO PARA SIMULAÇÃO DO ARL COM VARIAÇÃO DE 10% NO DESVIO PADRÃO

Loading [LinearAlgebra](#)

>

Loading [Statistics](#)

>

Loading [Student:-Calculus1](#)

>

Loading [MathematicalFunctions](#)

> with(RandomTools) :

>

>

>

>

```

RR1 := proc(omega, j, k, m, n, gamma, beta, a, b) local X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC,
soma, t, alpha, LSC, VR, r, MM, Prob, SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM,
RT, Total, Kl; z :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; T :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; M :=  $\begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ ; DV :=  $\begin{bmatrix} 0.777 \\ 0.642 \\ 0.706 \\ 0.584 \end{bmatrix}$ ; for r from 1 to omega do
for s from 1 to j do; for t from 1 to m do p := Generate(integer(range = 1..4)); X_t
:= Mean(Sample(Normal(M_p - T_p, DV_p), n)); VR_t := Variance(Sample(Normal(M_p
- T_p, DV_p), n)); SM := add(X_p, t = 1..m); MM :=  $\frac{SM}{m}$ ; SVR := add(VR_p, t = 1..m);
MVR :=  $\frac{SVR}{m}$ ; DP :=  $MVR \cdot \frac{1}{2}$ ; end do; LSC :=  $MM + 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ; LIC :=  $MM - 3 \cdot \frac{DP}{n^{0.5}}$ ;
for i from 1 to k do L :=  $\begin{bmatrix} M_1 - T_1 + \gamma \cdot DV_1 + \beta \cdot s \\ M_2 - T_2 + \gamma \cdot DV_2 + \beta \cdot s \\ M_3 - T_3 + \gamma \cdot DV_3 + \beta \cdot s \\ M_4 - T_4 + \gamma \cdot DV_4 + \beta \cdot s \end{bmatrix}$ ; g := Generate(integer(range = 1
..4)); Y_i := Mean(Sample(Normal(L_g, DV_g), n)); if LIC <= Y_i <= LSC then C_i := 0
else C_i := 1 end if end do; soma_s := add(C_p, i = 1..k); end do; STotal := add(soma_s, s = 1
..j); Prob := evalf( $\frac{STotal}{j \cdot k}$ , 3); ARL := evalf( $\frac{1}{Prob}$ , 4); print(Prob); print(ARL) end
do end proc

```

```

RRI := proc( $\omega, j, k, m, n, \gamma, \beta, a, b$ )
  local  $X, ARL, M, DV, z, T, s, p, i, g, Y, C, MX, EP, LIC, soma, t, \alpha, LSC, VR, r, MM, Prob,$ 
   $SM, N, LDV, DP, SVR, MVR, STotal, MDV, L, AM, RT, Total, Kl;$ 
   $z := rtable(1..4, [50, 25, 50, 25], subtype = Vector[column]);$ 
   $T := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $M := rtable(1..4, [50, 25, 40, 20], subtype = Vector[column]);$ 
   $DV := rtable(1..4, [1.595, 1.595, 1.595, 1.595], subtype = Vector[column]);$ 
  for  $r$  to  $\omega$  do
    for  $s$  to  $j$  do
      for  $t$  to  $m$  do
         $p := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $X[t] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[p]),$ 
         $n));$ 
         $VR[t] := Statistics:-Variance(Statistics:-Sample(Normal(M[p] - T[p], DV[t]$ 
         $]), n));$ 
         $SM := add(X[t], t = 1..m);$ 
         $MM := SM/m;$ 
         $SVR := add(VR[t], t = 1..m);$ 
         $MVR := SVR/m;$ 
         $DP := MVR^(1/2)$ 
      end do;
       $LSC := MM + 3 * DP/n^0.5;$ 
       $LIC := MM - 3 * DP/n^0.5;$ 
      for  $i$  to  $k$  do
         $L := rtable(1..4, [M[1] - T[1] + \gamma * DV[1] + \beta * s, M[2] - T[2] + \gamma * DV$ 
         $[2] + \beta * s, M[3] - T[3] + \gamma * DV[3] + \beta * s, M[4] - T[4] + \gamma * DV[4] + \beta$ 
         $* s], subtype = Vector[column]);$ 
         $g := RandomTools:-Generate(integer(range = 1..4));$ 
         $Y[i] := Statistics:-Mean(Statistics:-Sample(Normal(L[g], DV[g]), n));$ 
        if  $LIC <= Y[i]$  and  $Y[i] <= LSC$  then  $C[i] := 0$  else  $C[i] := 1$  end if
      end do;
       $soma[s] := add(C[i], i = 1..k)$ 
    end do;
     $STotal := add(soma[s], s = 1..j);$ 
     $Prob := evalf(STotal / (j * k), 3);$ 
     $ARL := evalf(1 / Prob, 4);$ 
     $print(Prob);$ 
     $print(ARL)$ 
  end do
end proc

```