

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM PISOS MISTOS DE AÇO E
CONCRETO INDUZIDAS POR ATIVIDADES RÍTMICAS**

Mateus Madureira de Almeida

São Carlos/SP
Agosto de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE VIBRAÇÕES EM PISOS MISTOS DE AÇO E
CONCRETO INDUZIDAS POR ATIVIDADES RÍTMICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Dr. Alex Sander Clemente de Souza

Discente: Mateus Madureira de Almeida

São Carlos/SP
Agosto de 2021

Madureira de Almeida, Mateus

Análise de vibrações em pisos mistos de aço e concreto induzidas por atividades rítmicas / Mateus Madureira de Almeida -- 2021.
164f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Alex Sander Clemente de Souza
Banca Examinadora: Fernando Menezes de Almeida Filho, Ricardo Carrazedo
Bibliografia

1. Estruturas mistas de aço e concreto. 2. Projeto. 3. Vibrações. I. Madureira de Almeida, Mateus. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Mateus Madureira de Almeida, realizada em 06/08/2021.

Comissão Julgadora:

Alex Sander C. de Souza

Prof. Dr. Alex Sander Clemente de Souza (UFSCar)

Alex Sander C. de Souza

Prof. Dr. Fernando Menezes de Almeida Filho (UFSCar)

Alex Sander C. de Souza

Prof. Dr. Ricardo Carrazedo (EESC/USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Dedicatória

Á Deus, Senhor dos exércitos, pelo dom da vida e amor eterno.

Aos meus pais, Anísio e Angela, por sempre sonharem meus sonhos e por terem me ensinado a nunca perder a oportunidade de fazer o que é certo.

Ao meu saudoso Mestre da arte de controlar tensões Prof. Dr. João Carlos Antunes de Oliveira e Souza (in memoriam), por sua sincera amizade e exemplo de profissional e homem que foi e continuará sendo para mim, que me inspirou mergulhar no magnífico universo da Engenharia de Estruturas.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida e pela família que Ele me deu. Meus pais, Anísio e Angela, que sempre me ensinaram amar, sonhar, conquistar, e acima de tudo, que o grande amor de meu Mestre é algo que jamais morrerá. Sou grato à minha irmã Débora, por quem tem o imenso prazer de siricutiar sua vida. Agradeço o amor e carinho de meus avós maternos, Aparecido Madureira e Joana, que nunca mediram esforços em me socorrer, avós paternos, Benedito e Maria, e meus tios, Andréia e André, meus anjos da guarda.

Aos e meus Mestres da música e companheiros de batalha, Adv. Rodrigo Dantas de Assis, Dr. Fábio Sampaio Rosas e Adv. Evandro Vieira Sobrinho, camaradas, mestres e amigos músicos que sempre estiveram comigo em todos os momentos. Chegados mais que irmãos que tenho a mais absoluta certeza que posso recorrer por ajuda sempre e em todos os momentos.

Agradeço à Profa. Regina Sueli Verri Catani e demais Professores do Colégio Objetivo de Dracena, pela base forte de conhecimento, riqueza que carrego sempre comigo. Todos esses, membros da família que compõe a excelente escola, casa onde construí alicerces sólidos de educação e princípios para edificar meus sonhos e alcançar todas minhas ambições.

Aos Engenheiros Mohamed Abu Ezzedin e Salua Hamdeh pelas primeiras oportunidades de conhecer o magnífico universo da Engenharia como Desenhista.

À Escola de Engenharia de Lins, que além de uma universidade, foi a casa onde tive abrigo e suporte para aprender tudo que necessito para realizar meus sonhos e ambições profissionais para colaborar com o progresso e desenvolvimento da nossa nação, Brasil.

Aos meus queridos Mestres e amigos Prof. Me. Plinio Norberto Zorman de Menezes, Prof. Me. Milton Léo, Prof. Dr. Marcello Gouvêa Duarte e Prof. Me. Emilio Fujikawa, pelos inúmeros conselhos e ensinamentos. À grande Profa. Ma. Simone Cristina Caldato da Silva pelo incrível apoio, aprendizado e broncas que me fizeram crescer.

Aos camaradas, companheiros de todas as horas e Mestres, Prof. Me. Douglas Miyazaki e Prof. Eng. Roberto Haddad, pela amizade, companheirismo, ensinamentos, carinho e por serem para mim grandes exemplos de homens e profissionais do cálculo estrutural que eu tenho o prazer de me espelhar e aprender continuamente cada vez mais, e acima de tudo, por saber que são parceiros com quem sempre posso contar a qualquer hora e em todos os momentos.

Ao meu saudoso Prof. Dr. João Carlos Antunes de Oliveira e Souza (*in memoriam*), o maior Mestre da arte de controlar tensões, pela honra de sua sincera amizade e ensinamentos,

amigo por quem sinto profunda saudade e é um exemplo para mim de homem e profissional de quem me recordo sempre, lembranças que carrego comigo continuamente. Minha inspiração pela docência e pelo maravilhoso mundo da Engenharia de Estruturas.

Ao Eng. Paulo Cesar Silva (*in memoriam*) e Pr. Valmir Martins (*in memoriam*), pela amizade e camaradagem que tive o prazer e honra de desfrutar durante todo o tempo que fui presenteado com a companhia desses grandes homens de Deus que deixaram muita saudade e lembranças incríveis durante toda a caminhada que percorreram pela vida.

Ao Pr. Me. Jonas Darq de Souza, sua esposa Regina Teixeira Barros de Souza, Pr. Me. Alcides Gomes Junior, sua esposa Prof. Andrea Calderero Pinhel Gomes e todos os amigos da Igreja Batista Ágape de Lins que me acolheram como família, me presenteando com grande amor e com toda ajuda que precisei durante o período que me graduava na cidade de Lins/SP.

Agradeço a todos os amigos, companheiros de guerra, que a graduação, pós-graduação, e que a vida me presenteou, pois com vocês minha caminhada foi mais serena e cheia de alegrias, Murilo, Eduardo Felipe, João Vitor, Samuel, Daniel, Fernando, Manuella, Gustavo, Matheus, Rose, Naielle, Nadson, Luiza, Maria Tereza, Monyk, Diego, Letícia, Douglas, Renan, Mônica, Cleber, Felipe, Maressa, Vitor, Sammer, Amanda, Marcelo, Suejane, Suzana, Thainy, Gabriel, Renato, João Pedro, entre muitos outros. Sou grato à Deus pela amizade, amor, compreensão e companheirismo de todos vocês.

À Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) pela oportunidade e ensinamentos no curso de pós-graduação em Engenharia Civil, onde aprendi os fundamentos da investigação científica, e ao meu querido orientador Prof. Dr. Alex Sander Clemente de Souza, por quem tenho grande admiração como profissional e pessoa. Agradeço a sua grande capacidade de orientação, compreensão e ensinamentos no decorrer de todo o desenvolvimento dessa dissertação, possível graças a sua disposição e confiança em mim. Grande Mestre da Engenharia Estrutural que colabora continuamente com o crescimento científico desse campo do conhecimento, que inspira e inspirará outros Engenheiros em contribuir com o desenvolvimento desse universo fascinante das estruturas.

Por fim, sou grato a todos que de alguma forma me apoiaram ou contribuíram para o desenvolvimento desse trabalho. *A vida é muito difícil, conviver não é fácil. Levemos a vida pelo lado amável. Façamos como Chapolin Colorado. **Sigam-me os bons!** É preciso ser bom!* (Florinda Meza).

“Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento. Porque o lucro que a sabedoria dá é melhor do que o lucro da prata, e a sua renda é melhor do que o ouro mais fino.”

Provérbios 3:13-14

Resumo

De Almeida, M. M. **Análise de vibrações em pisos mistos de aço e concreto induzidas por atividades rítmicas**. 2021. 164f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2021.

O crescente uso dos pisos mistos de aço e concreto em projetos de planta livre que visam ampliar a flexibilidade de utilização dos imóveis com grandes espaços abertos, estimula a concepção de pavimentos mistos em formatos que os deixam mais sensíveis aos efeitos vibratórios, fazendo com que a garantia do conforto dos usuários frente às vibrações induzidas por atividades humanas se torne cada vez mais relevante ainda nas etapas iniciais do dimensionamento estrutural. Os critérios de aceitação das vibrações das normativas nacionais, baseados somente no controle da frequência fundamental das estruturas, levam à verificações insuficientes, já que a real influência dos efeitos vibratórios no conforto dos indivíduos é sentida em termos de aceleração. Dentro desse contexto, esse trabalho traz conhecimentos sobre o comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto para o esclarecimento do efeito das vibrações no conforto dos usuários, juntamente com o agrupamento de processos analíticos para o cálculo da frequência fundamental e aceleração de pisos mistos, procedimentos de modelagem numérica, critérios de aceitações das vibrações induzidas por atividades humanas para garantia do conforto dos usuários, além de, exemplos detalhados da aplicação dos processos analíticos e critérios de aceitação das vibrações em projetos de pisos mistos. Fazendo uso de processos analíticos e modelagem numérica para determinar as propriedades modais de 36 pisos mistos de aço e concreto, após avalia-los diante dos critérios de aceitação das vibrações presentes nas normativas nacionais e de renomados manuais internacionais de projeto, concluiu-se que as normativas nacionais, no que são relativas aos estados limites das vibrações, necessitam ser atualizadas, já que as verificações realizadas mostraram que muitos pavimentos que não atenderiam os critérios de aceitação das vibrações induzidas por atividades humanas que visam a garantia do conforto dos usuários de renomados manuais internacionais de projeto, quando verificados diante das normativas nacionais, passariam nas verificações das normativas.

Palavras-chave: dinâmica nas estruturas; estruturas mistas de aço e concreto; análise estrutural; projeto; vibrações.

Abstract

The growing use of composite systems floors of steel and concrete in open spans design that aim to increase use flexibility of buildings using large open spaces, has stimulates the conception of composite systems floors in formats leave them more sensitive to vibratory effects and this way, meet human's comfort criteria become increasingly important already in the early stages of structures design. The acceptance criteria of the national standards, based only control of fundamental frequency, lead to insufficient verifications, due the fact that real influence of vibrations induced by human's activities in human comfort are related with peak accelerations. Within this context, this work present knowledge about dynamic behaviour of composite systems floors of steel and concrete for understanding of vibrations effects in the human comfort, together with of clustering of analytical procedures to calculate the fundamental frequency and acceleration of composite floors, procedures for numerical modelling, humans comfort criteria of vibrations induced by human's activities, besides of, detailed examples using analytical procedures and application of human comfort criteria in composite floors design. Using analytical processes and numerical models for determine modal properties of 36 composite floors, after evaluating them based human comfort criteria of national standards and reputed international guides, was possible conclude that national standards need updated, as the results showed divers floors that not fit in criteria of reputed international guides design, when verified against in national standards, they would pass in the criteria of national codes.

Keywords: *dynamic of structures; composite systems floors of steel and concrete; structural analysis; design; vibrations.*

Sumário

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Justificativa.....	4
1.3 Síntese da Metodologia	5
1.4 Estrutura do trabalho	7
Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica	8
2.1 Conceitos fundamentais de vibrações	8
2.2 Importância do estudo das vibrações para a Engenharia Civil.....	12
2.3 Formulação da dinâmica para as vibrações.....	13
2.3.1 Vibrações livres não amortecidas	14
2.3.2 Vibrações livres amortecidas	15
2.4 Vibrações em pisos mistos de aço e concreto	18
Capítulo 3 - Processos analíticos para o cálculo da frequência	27
3.1 Procedimento do Design of Floors for Vibration – SCI P354/2009.....	29
3.2 Procedimento do American Institute of Steel Construction (AISC) (2013/2016).....	33
3.3 Frequência fundamental de pisos com espaçamentos irregulares entre as vigas.....	36
3.4 Exemplo - aplicação do processo analítico do Design of Floors for Vibration – SCI P354/2009 para determinar a frequência fundamental de um piso misto	37
3.5 Exemplo - aplicação do processo analítico do American Institute of Steel Construction (AISC) (2013/2016) para determinar a frequência fundamental de um piso misto	43
Capítulo 4 - Critérios de aceitação das vibrações e processos analíticos para cálculo da aceleração	50
4.1 Normativas Nacionais	51
4.2 Critérios de aceitação para caminhada do Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009.....	52
4.2.1 Massa modal – Design of Floors for Vibration - SCI P354 (2009)	57
4.2.2 Aceleração do piso (caminhada) – Design of Floors for Vibration – SCI P354 (2009)	59
4.2.3 Exemplo - aplicação dos critérios de aceitação do Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009 no piso do item 3.4	60

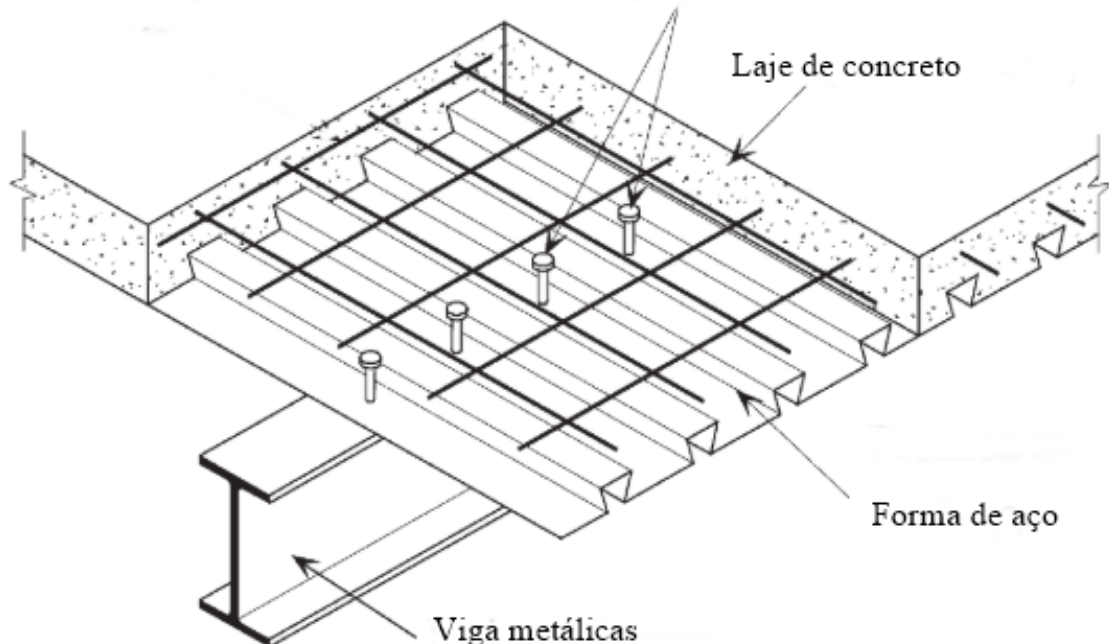
4.3 Critérios de aceitação do American Institute of Steel Construction (AISC) (2003/2016)	63
4.3.1 Massa modal - American Institute of Steel Construction (AISC) (2003/2016).....	64
4.3.2 Aceleração do piso (caminhada) - American Institute of Steel Construction (AISC) (2003)	66
4.3.3 Aceleração do piso (caminhada) - American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)	67
4.3.4 Aceleração do piso (atividades rítmicas) - American Institute of Steel Construction (AISC) (2016).....	68
4.3.5 Exemplo - aplicação dos critérios de aceitação para atividade rítmica do tipo aeróbica do “American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)” no piso do item 3.5.....	70
Capítulo 5 - Metodologia para análise de vibrações em pavimentos mistos de aço e concreto....	75
5.1 Modelagem numérica.....	83
5.2 Modelagem do carregamento dinâmico induzido por atividade humana.....	90
5.3 Comentários finais sobre a metodologia	95
Capítulo 6 - Análise dos Pisos Mistos de Aço e Concreto	97
6.1 Análise da frequência fundamental dos pavimentos mistos de aço e concreto	97
6.2 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto	108
6.2.1 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto excitados por caminhada humana.....	108
6.2.2 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto excitados por atividades rítmicas	113
Conclusões.....	118
Sugestões para trabalhos futuros.....	121
Referências Bibliográficas	122
Anexo 1 - Resultados dos Modelos	126
Anexo 2 - Propriedades dos perfis e das lajes	134
Anexo 3 - Aplicação das formulações para vibrações livres não amortecidas	137
Anexo 4 - Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso crítico	141
Anexo 5 - Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso supercrítico	144
Anexo 6 - Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso subcrítico	148

Capítulo 1

Introdução

Um elemento misto é formado a partir da junção de dois elementos constituídos de materiais diferentes, que ao trabalharem solidariamente, formem um elemento estrutural capaz de resistir aos esforços solicitantes. Exemplos comuns de elementos mistos são as lajes mistas com forma de aço incorporada, onde as formas trabalham como armadura de tração e a solidariedade entre os materiais é realizada pelo atrito entre o concreto e as moedas das formas e pelo confinamento do concreto, e as vigas mistas de aço e concreto, obtidas da associação de um perfil metálico com as lajes de concreto em que o comportamento conjunto entre os perfis e as mesas colaborantes de concreto (lajes mistas ou maciças) é promovido pelos conectores de cisalhamento. A Figura 1 mostra a composição típica de um piso misto, formado por vigas mistas de aço e concreto e lajes mistas com forma de aço incorporada.

Figura 1 – Composição típica de um piso misto de aço e concreto



Fonte: adaptada de Bailey (2003)

As estruturas mistas são sistemas estruturais constituídos por elementos mistos, como um edifício de múltiplos pavimentos formados por lajes e vigas mistas. Essa tipologia construtiva vem ganhando destaque continuamente por serem capazes de vencer grandes vãos sem a necessidade elementos estruturais de dimensões elevadas, resultando na redução da

espessura dos pavimentos e do peso próprio das edificações, e por essas e outras razões, as estruturas mistas estão sendo amplamente utilizadas nas edificações modernas.

Nota-se cada vez mais nas construções correntes de múltiplos pisos a necessidade de promover a flexibilidade arquitetônica com projetos de planta livre, que muitas vezes não são destinadas somente à usos comuns, como de escritórios e residências, mas também, para espaços onde os usuários desenvolvem atividades rítmicas e aeróbicas.

Para atender as tendências atuais de projeto pautadas na flexibilidade arquitetônica que necessita de grandes espaços abertos com quantidade reduzida de pilares, as estruturas mistas em conjunto com os avanços da engenharia de materiais e estruturas, que aumentam a resistência do concreto e do aço, encorajam o uso de elementos esbeltos com seções de dimensões reduzidas para vencer vãos cada vez maiores. Dessa forma, por mais que tais exigências auxiliem na consolidação dos pisos mistos de aço e concreto como uma alternativa de tipologia construtiva eficiente e viável para atender as necessidades atuais de projeto, faz com que as estruturas fiquem mais sensíveis aos efeitos vibratórios.

Estruturas mais sensíveis aos efeitos vibratórios denotam níveis de frequência natural mais baixos e próximos das faixas de excitações dinâmicas relativas as atividades humanas, e conseqüentemente, dificultam o atendimento das exigências dos estados limites de serviço de vibrações que visam a garantia do conforto humano e integridade estrutural.

As prescrições encontradas nas normativas nacionais sobre a temática apresentam recomendações que garantem somente a integridade estrutural, uma vez que são pautadas somente no controle da frequência fundamental dos pavimentos, e por não fornecerem procedimento quanto ao conforto humano, levam os engenheiros de estruturas recorrerem a referências internacionais acerca do assunto durante o processo de dimensionamento estrutural.

As dificuldades em assegurar o conforto humano faz com que as vibrações induzidas por atividades humanas (e demais fontes de excitações) em pisos mistos de aço e concreto cada vez mais se solidifiquem como itens de grande relevância e preocupação já nas fases iniciais de projeto, necessitando de maior investigação científica por causa da carência de referências nacionais sobre o assunto. Dessa forma, faz-se necessário que os pesquisadores da área busquem desenvolver critérios de aceitação para garantia do conforto humano e integridade estrutural, além de metodologias de análise dinâmica das estruturas para as mais diversas categorias de ocupação e tipologias construtivas, a fim de que, as ações que geram vibrações excessivas tenham um tratamento dinâmico adequado garantindo o conforto dos usuários e não limitem a diversidade de tipos de ocupação que as edificações possam vir a ser destinadas.

Com um maior desenvolvimento científico acerca do comportamento dinâmico dos pisos mistos, será possível definir rotinas de dimensionamento mais precisas para que os engenheiros estruturais consigam dimensionar pisos mistos de aço e concreto sem a necessidade de recorrerem a referências estrangeiras e minimizem ao máximo comentários adversos quanto ao conforto humano.

Diante de todo o exposto quanto a sensibilidade dos pisos mistos de aço e concreto frente as vibrações induzidas por atividades humanas, esse trabalho além de investigar o comportamento dinâmico dessa tipologia construtiva, realizou o agrupamento de informações sobre o problema, expondo de forma organizada métodos analíticos e procedimentos de modelagem numérica para determinação da frequência fundamental a aceleração dos pavimentos, apresenta critérios de aceitação das vibrações para garantia do conforto humano com aplicabilidade em projetos de pisos mistos de aço e concreto, juntamente com exemplos analíticos e numéricos que servem de modelo para rotinas de dimensionamento estrutural.

1.1 Objetivos

O objetivo desse trabalho foi avaliar o comportamento dinâmico de pisos mistos de aço e concreto para garantia do conforto dos usuários em virtude das vibrações induzidas por atividades humanas diante dos critérios de aceitação das vibrações presentes nas normativas nacionais (ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 6118:2014) e frente à manuais internacionais de projeto. Como objetivos específicos são definidos:

- Apresentar informações consistentes sobre o comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto para o esclarecimento da importância dos efeitos das vibrações induzidas por atividades humanas no conforto dos usuários;
- Apresentar processos analíticos e procedimentos de modelagem numérica para determinação da frequência fundamental e aceleração de pisos mistos de aço e concreto;
- Apresentar e comparar diferentes critérios de aceitação que qualificam o conforto dos usuários perante as vibrações induzidas por atividades humanas em pisos mistos de aço e concreto;

- Investigar o comportamento dinâmico de pavimentos mistos, com variações de vigamento e tipologias de lajes, utilizando modelos analíticos e numéricos;
- Avaliar a eficiência dos critérios de aceitação das vibrações presentes nas normativas nacionais baseados unicamente na frequência fundamental dos pavimentos com critérios de aceitação internacionais que verificam o conforto dos usuários com base nas acelerações de pico.

1.2 Justificativa

Atualmente, a viabilidade de empreendimentos imobiliários é fortemente influenciada pela flexibilidade de utilização dos imóveis e tempo de retorno do capital. Os projetos de planta livre deixam as edificações aptas para uma maior variedade de ocupações, além de oferecem flexibilidade para as empresas expandirem e retraírem dentro de um mesmo espaço.

Os projetos de planta livre por apresentarem grandes espaços abertos, necessitam utilizar elementos estruturais munidos da capacidade de vencer grandes vãos com seções de dimensões reduzidas, dentro desse contexto, as estruturais mistas vêm tornando-se cada vez mais comuns nas construções modernas.

Os avanços da engenharia de estruturas e materiais continuamente estimulam a concepção de pisos mistos de aço e concreto utilizando elementos esbeltos com seções cada vez menores, que apesar de se enquadrarem nas exigências dos projetos de planta livre com grandes vãos, ficam mais sensíveis aos efeitos vibratórios. Essa sensibilidade torna-se mais significativa à medida que as construções modernas se destinam à uma maior gama de ocupações, que muitas vezes são munidas da capacidade de gerarem vibrações ao nível de prejudicar o conforto dos usuários, e até mesmo, comprometerem a integridade estrutural.

Nos dias atuais, vêm tornando-se cada vez mais comum a destinação de pisos para academias e demais ocupações onde se praticam atividades aeróbicas, tanto em edifícios comerciais como em residenciais. Essas tendências, em conjunto com o crescente uso de pisos mistos em configurações mais sensíveis às vibrações, fazem com que além da garantia da integridade estrutural, assegurar o conforto dos usuários diante das excitações dinâmicas seja um item relevante já nas fases iniciais de projeto. Fazendo com que os efeitos vibratórios nos pisos mistos de aço e concreto passem a ser um obstáculo no atendimento dos estados limites de serviço, de tal forma, que possam vir a governar o dimensionamento estrutural.

Apesar de algumas normas brasileiras oferecem procedimentos para o dimensionamento de elementos mistos, a consolidação dessa tipologia construtiva pode vir a ser prejudicada no Brasil, devido à falta de procedimentos normalizados e à carência de referências nacionais acerca do conforto dos usuários diante das vibrações induzidas por atividades humanas, fazendo com que os engenheiros estruturais necessitem recorrer à critérios de aceitação internacionais. Dessa forma, é muito importante que as normativas nacionais apresentem recomendações que garantam o conforto dos usuários frente aos efeitos vibratórios para os mais diversos tipos de ocupações.

Para que os pisos mistos não tenham a utilização comprometida no Brasil, são necessárias pesquisas acerca dos efeitos das vibrações e conforto humano em pisos mistos de aço e concreto, para suprir a carência de referências nacionais sobre o assunto e diminuir a necessidade dos engenheiros estruturais de recorrerem às referências internacionais.

Diante do exposto acima, quanto a importância da consolidação dos pisos mistos de aço e concreto no Brasil para sejam empregados de forma com que não deixem as construções sensíveis aos efeitos vibratórios e causem incômodo aos usuários, esse trabalho estuda o comportamento dinâmico dessa tipologia de piso com o objetivo de aumentar as referências acerca da temática, apresentando procedimentos para determinação das propriedades modais dos pisos mistos e critérios de aceitação das vibrações induzidas por atividade humana, a fim de diminuir a necessidade dos projetistas estruturais brasileiros de recorrerem à referências internacionais.

1.3 Síntese da Metodologia

Para alcançar os objetivos dessa pesquisa, a metodologia desse trabalho foi dividida em três etapas. A primeira etapa consistiu no desenvolvimento da Revisão Bibliográfica, com a abordagem de aspectos pertinentes à análise das vibrações em pisos mistos de aço e concreto e com a apresentação e detalhamento de critérios de aceitação das vibrações, bem como, processos analíticos para determinação da frequência fundamental e aceleração dessa tipologia construtiva de pavimento.

Na segunda etapa da metodologia foi realizada a concepção e análise de 36 pisos mistos de aço e concreto compatíveis com a arquitetura de um pavimento tipo. Foram investigados pavimentos com três tipologias distintas de lajes (12 com lajes maciças, 12 com lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 e outras 12 com forma de aço MF75), onde também, os perfis metálicos das vigas mistas e dos pilares possuem variações.

Também na segunda etapa da metodologia foram definidos dois tipos de modelos; os modelos numéricos e os modelos analíticos. Os modelos numéricos consistem em estruturas modeladas numericamente no *software* SAP2000 V21 e os modelos analíticos em processo cujos resultados das propriedades modais (frequência fundamental e aceleração) seguem os procedimentos analíticos dos manuais SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) apresentados e discutidos na Revisão Bibliográfica.

Ao todo, foram analisadas as propriedades modais de 132 pavimentos modelados numericamente no *software* SAP2000 V21, utilizando elementos “*straight frame*” para as vigas e pilares e elementos “*shell*” para as lajes, e de outros 36 pisos cujas propriedades modais foram determinadas via processos analíticos. Para análise da aceleração nos modelos numéricos, tanto para atividade de caminhada como para atividade rítmica, foi utilizada a função “*define time history functions*” para modelagem dos carregamentos dinâmicos. Definiu-se um padrão de carga específica para cada um dos dois tipos de carregamentos dinâmicos induzidos por atividade humana em “*load patterns*”, e por fim, casos de carga específicos em “*define load cases*” do tipo “*time history*” com amortecimento constante.

Por fim, na terceira etapa da metodologia foram traçadas e aplicadas estratégias para a avaliação das propriedades modais dos pavimentos mistos de aço e concreto concebidos na segunda etapa. Inicialmente foram investigadas a influência das dimensões dos perfis metálicos das vigas, comprimento e seção dos pilares, majoração do módulo de elasticidade do concreto, da tipologia e altura das lajes na frequência fundamental dos modelos numéricos, e em seguida, as frequências fundamentais dos pavimentos determinadas via modelagem numérica (modelos numéricos) foram comparadas com os valores obtidos seguindo os procedimentos analíticos (modelos analíticos) do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016).

Por último, finalizando a terceira etapa da metodologia, foram analisadas as acelerações dos pavimentos para caminhada humana e atividade rítmica, cujos modelos analíticos para os dois tipos de excitações seguiram, respectivamente, os procedimentos do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), em que semelhantemente à frequência fundamental, os resultados dos modelos analíticos foram comparados com os resultados dos modelos numéricos.

1.4 Estrutura do trabalho

O Capítulo 1 é iniciado com a introdução, explanando sobre a temática do trabalho e a problemática que será investigada. Posteriormente, foram apresentados os objetivos e justificativas da pesquisa.

No Capítulo 2 é realizada a Revisão Bibliográfica. Inicialmente foram trabalhados os conceitos gerais sobre vibrações e foi relatada a importância do assunto para a engenharia civil. Posteriormente, foram apresentadas as formulações básicas para problemas de vibrações livres amortecidas e não amortecidas com um grau de liberdade, e termina dissertando sobre pisos mistos de aço e concreto.

No Capítulo 3 e no Capítulo 4, respectivamente, são apresentados processos analíticos para determinação da frequência fundamental e verificação da aceitabilidade dos pisos mistos de aço e concreto, frente às ações dinâmicas induzidas por atividade humana.

O Capítulo 5 descreve a metodologia utilizada no trabalho, modelos que foram investigados e as estratégias utilizadas na modelagem numérica, bem como a formulação matemática que representa os carregamentos dinâmicos induzidos por atividade humana.

No Capítulo 6 é realizada a análise das vibrações dos pisos mistos de aço e concreto. Nesse capítulo são discutidos aspectos quanto a frequência fundamental e a aceleração dos pavimentos excitados por caminhada humana e atividades rítmicas do tipo aeróbica e são aplicados critérios de aceitação das vibrações. Por fim, são apresentadas as Conclusões do trabalho, Sugestões para trabalhos futuros, as Referências Bibliográficas e os Anexos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica inicia-se com conceitos gerais de vibrações e as trata do ponto de vista da construção civil. Posteriormente, mostra as formulações básicas para problemas de vibrações livres não amortecidas e amortecidas com um grau de liberdade, e por fim, explana a respeito dos pisos mistos de aço e concreto quanto ao seu comportamento dinâmico.

2.1 Conceitos fundamentais de vibrações

Dinâmica é o campo do conhecimento que estuda o comportamento e os efeitos do movimento dos corpos. O estudo das vibrações é um item da dinâmica, que por sua vez, investiga os movimentos repetitivos (cíclicos) (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009).

A definição de vibração entendida como o movimento essencialmente repetitivo realizado por um, ou conjunto de corpos, ao redor de um ponto de equilíbrio classificado de acordo com a origem da sua fonte de excitação. De forma geral, existem dois tipos de vibrações: as livres e as forçadas. As vibrações livres (também conhecidas como naturais) ocorrem devido à uma perturbação no sistema e o movimento do corpo (ou conjunto de corpos) é mantido pela ação da gravidade ou forças elásticas. Já as vibrações forçadas, em decorrência de perturbações contínuas no sistema.

As vibrações livres e forçadas podem ser amortecidas ou não. As vibrações não amortecidas continuam por tempo indefinido por desprezarem o atrito, e assim, constitui-se em um modelo teórico. Já as vibrações amortecidas consideram as forças de atrito internas e externas, fazendo com que o movimento do corpo (ou dos corpos) seja gradativamente dissipado, promovendo o decaimento da vibração. O Gráfico 1 mostra o movimento contínuo da extremidade de uma viga caracterizando uma vibração livre não amortecida e o Gráfico 2, o decaimento do movimento da extremidade de uma viga em decorrência do amortecimento da vibração livre.

Gráfico 1 - Deslocamento dinâmico da extremidade de uma viga para vibração livre não amortecida

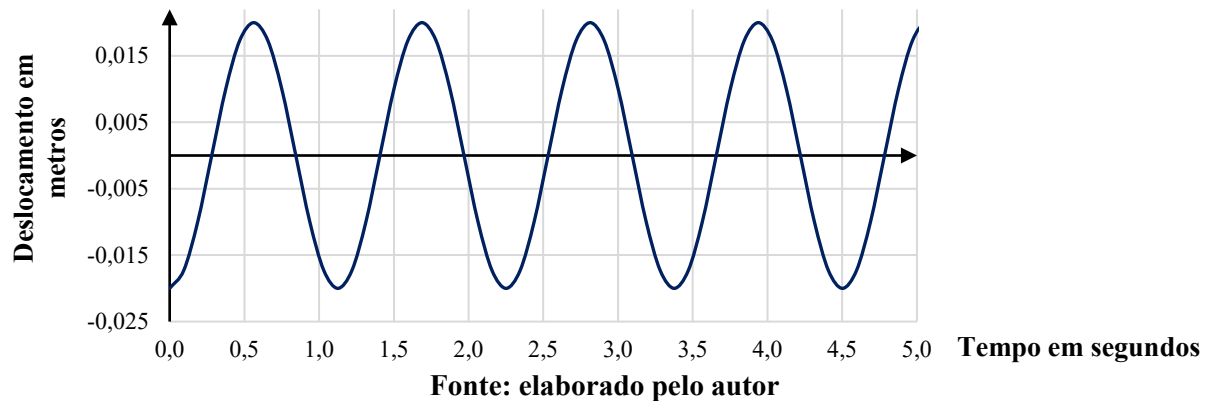
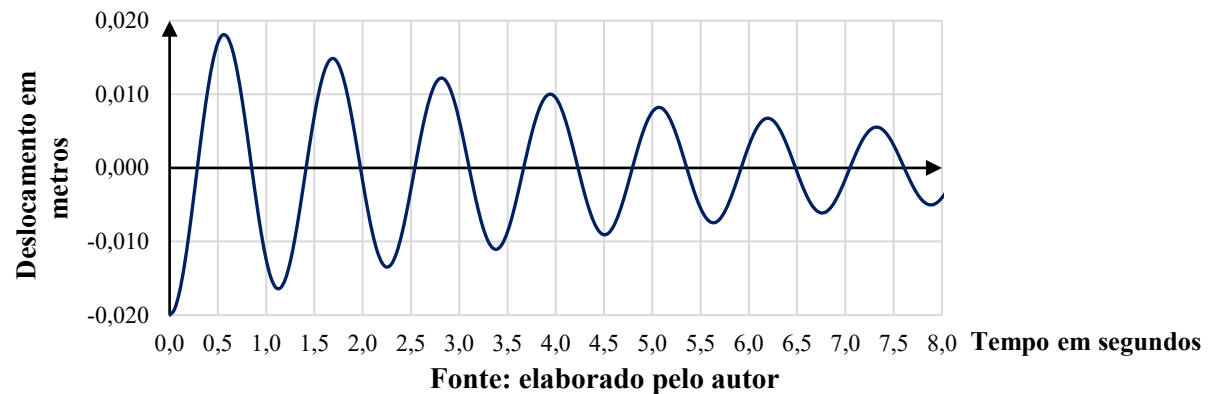
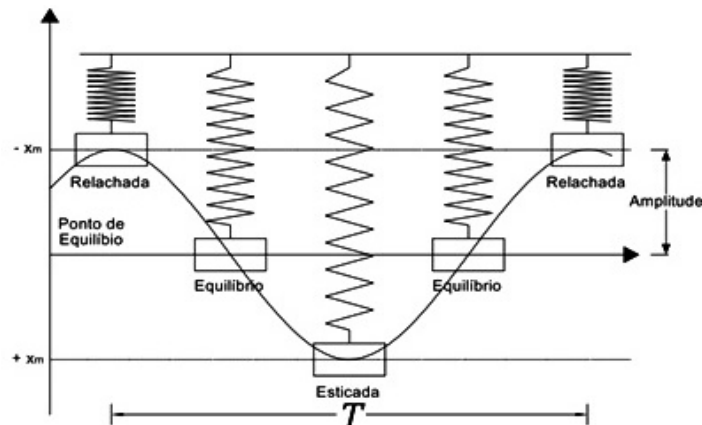


Gráfico 2 - Deslocamento dinâmico da extremidade de uma viga para vibração livre amortecida



Utilizando o comportamento da mola da Figura 2, a distância máxima que ela assume em relação ao ponto de equilíbrio é a amplitude de seu movimento, o tempo decorrido para a mola desenvolver dois comprimentos máximos de onda é o período (T) medido em segundos, e a quantidade de períodos dentro de um segundo é a frequência (f) medida em hertz (Hz). Quando se diz que a frequência de uma vibração é de $10Hz$, deve-se entender que o movimento se repete dez vezes em um segundo.

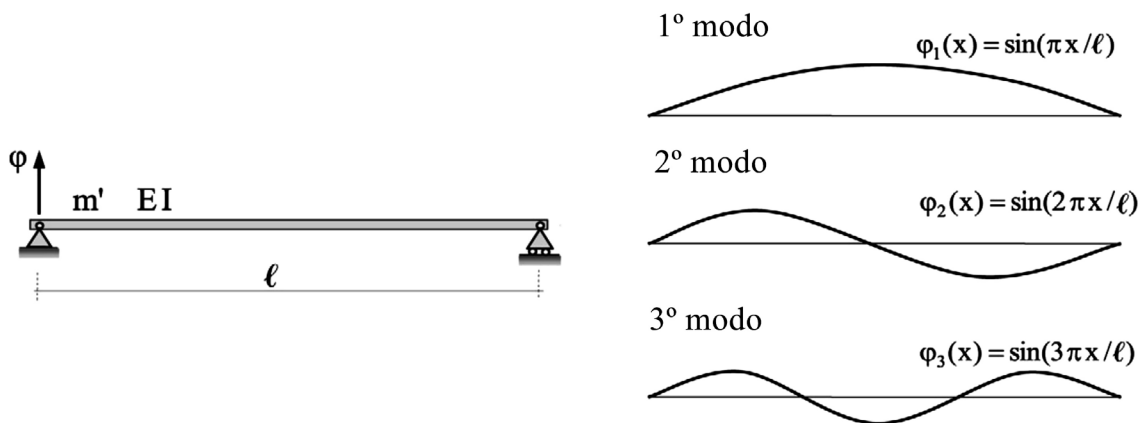
Figura 2 - Movimento de uma mola em torno de um ponto de equilíbrio



Fonte: adaptada de Beer e Johnston (2006) apud Küster e Sartorti (2011)

A frequência natural de uma estrutura refere-se ao movimento descrito pela mesma quando ela é deslocada e solta rapidamente, logo, a frequência natural de uma estrutura é referente à vibração livre ou natural da mesma. Todas as estruturas possuem uma grande variabilidade de possíveis formas de deslocamento que são denominados modos de vibração (com valores distintos de frequência). A Figura 3 mostra os três primeiros modos de vibração livre não amortecida de uma viga bi-rotulada. A frequência natural mais baixa, chamada de frequência fundamental, é a mais relevante para a análise dinâmica das estruturas, uma vez que representa o limite que o sistema estabelece para as ações dinâmicas (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003).

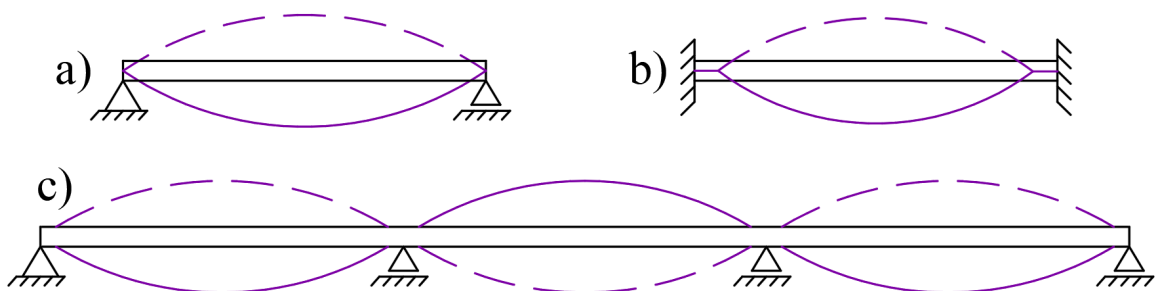
Figura 3 - Três primeiros modos naturais de vibração de uma viga bi-rotulada



Fonte: adaptada de Soriano (2014)

A frequência natural de elementos contínuos (como vigas e lajes) pode ser obtida a partir de um sistema com um grau de liberdade. A continuidade entre os vãos de elementos contínuos não exerce influência significativa na frequência natural da estrutura, uma vez que o primeiro modo de vibração das vigas contínuas é muito semelhante aos das vigas bi-rotuladas (AALAMI, 2014). A Figura 4 mostra a semelhança do primeiro modo de vibração das vigas bi-rotuladas, engastadas e contínuas.

Figura 4 - Primeiro modo de vibração de vigas: (a) simplesmente apoiadas, (b) engastadas e (c) contínuas.



Fonte: adaptada de Aalami (2014)

Todas as ações em um sistema estrutural geram movimento (e conseqüentemente vibrações), porém, o movimento que elas causam podem não ser significativos, como é o caso das ações estáticas. Enquanto as ações que geram vibrações ao nível de necessitarem de análise são denominadas ações dinâmicas.

As ações dinâmicas podem apresentar variações de intensidade, direção e posição com o decorrer do tempo (de forma combinada ou não). Na realidade praticamente todas as ações são dinâmicas, contudo, podem ser admitidas como estáticas quando a intensidade e direção possuem pouca variação com o decorrer do tempo. Exemplos de ações dinâmicas comuns são: a ação do vento, o caminhar, dançar e correr de pessoas sobre um piso. E exemplos de ações estáticas são: carga da mobília sobre um pavimento e o peso próprio da edificação.

Um dos efeitos mais conhecidos das vibrações nas estruturas é a ressonância, fenômeno que ocorre quando a frequência de uma vibração forçada coincide com alguma frequência natural da estrutura. Essa equiparação de frequências potencializa a intensidade das ações dinâmicas ao nível de causarem danos e até a ruína das estruturas.

Quando a frequência de uma excitação externa coincide com alguma frequência natural da estrutura, faz com que um carregamento dinâmico inicialmente pequeno provoque vibrações de grande amplitude por recair em um sistema de ciclos acumulativos, resultando no aumento da amplitude das vibrações ao longo do tempo. Portanto, mesmo que de forma genérica e superficial, vários critérios de aceitação das vibrações admitem que a frequência natural de uma estrutura pode ser entendida como o limite que o sistema impõe para as solicitações dinâmicas externas. Todavia, esse é um processo de verificação que vêm sendo substituído por limites de acelerações de pico. Atualmente outro efeito que vêm sendo muito estudado é o potencial incômodo nos usuários em decorrência das vibrações induzidas por atividades humanas em pisos de aço e concreto.

O processo de dissipação da energia causadora de uma vibração, denominado amortecimento, pode ocorrer tanto com as vibrações livres como com as vibrações forçadas. Porém, quando a energia de uma fonte da excitação externa não é dissipada completamente a estrutura pode ser comprometido. Dessa forma, quando as vibrações forçadas não são amortecidas de forma apropriada, elas assumem caráter destrutivo, a não ser que a estrutura tenha sido projetada para absorver tais esforços (KÜSTER; SARTORTI, 2011). As vibrações forçadas podem ser divididas em quatro grupos: harmônicas (ex. vibrações de máquinas), periódicas (ex. atividades humanas comuns como dançar e correr), transientes (ex. impacto de veículos) e aleatórias (ex. ondas do mar e ação do vento) (BACHMANN *et al.*, 1995).

2.2 Importância do estudo das vibrações para a Engenharia Civil

De forma geral na engenharia civil existem duas categorias de ações que solicitam as estruturas, as ações dinâmicas e as ações estáticas. As ações estáticas consistem em carregamentos que durante o tempo que solicitam um elemento estrutural, ou estrutura, possuem variações de intensidade muito pequenas, enquanto as ações dinâmicas são carregamentos em que a intensidade, direção e posição variam de forma significativa com o decorrer do tempo, e dessa forma, a resposta da estrutura também não é constante em termos de velocidade, aceleração e deslocamento.

No campo da engenharia estrutural, tradicionalmente, admite-se que os estados limites das edificações estão atendidos ao garantir que a estrutura é capaz de resistir aos esforços solicitantes. Tais processos eram executados, e ainda são na maioria das vezes, baseados em um modelo estático onde os carregamentos agem constantemente durante todo o tempo.

A preocupação com o conforto dos usuários é um item cuja verificação, na maioria das vezes, é realizada controlando a deflexão dos elementos estruturais, que indiretamente consiste em um processo que proporciona algum respaldo aos problemas vibratórios. Porém, essa metodologia de verificação pode vir a ser insuficiente à medida que as estruturas ficam mais sensíveis às vibrações e seus efeitos necessitem ser controlados com maior afinco.

Diversas são as fontes de excitações capazes de gerarem vibrações excessivas em pisos de grandes extensões e com baixo nível de amortecimento, como o tráfego de veículos pesados em estradas próximas, maquinários de grandes dimensões operando em construções vizinhas, equipamentos instalados na própria edificação e atividades comuns dos usuários, como caminhar, correr e saltar, são típicos exemplos de fontes de vibrações, porém, as induzidas pelos humanos são as mais frequentes (VARELA; BATTISTA, 2011).

O caminhar, por mais que seja uma ação que se repete em um intervalo de tempo muito pequeno, chegando próxima de ser constante, é uma ação dinâmica que desenvolve esforços na vertical e nas direções longitudinal e transversal, porém, os efeitos na direção vertical são exaustivamente mais estudadas por possuírem grandeza muito superior em relação as outras direções (ROCHA, 2012).

As vibrações, por serem capazes de afetar negativamente a qualidade de vida dos usuários de uma edificação, podem comprometer a funcionalidade de imóveis, já que além do desconforto dos indivíduos, outro fator muito importante são os efeitos vibratórios em

atividades especiais, como em salas de cirurgia e na precisão de máquinas e equipamentos (GLUHOVIĆ *et al.*, 2016).

Problemas relacionados aos efeitos das vibrações tornam-se mais expressivos, necessitando de maior controle, à medida que se reduz a rigidez e os níveis de amortecimento das estruturas (SILVA JUNIOR, 2015). Porém, com a evolução dos *softwares* de modelagem numérica diversas pesquisas utilizando o método dos elementos finitos vêm sendo realizadas, contribuindo com o desenvolvimento de processos analíticos de dimensionamento mais eficientes e de projetos com maior otimização econômica, devido ao fato de melhor avaliarem os carregamentos dinâmicos e estáticos para o dimensionamento das estruturas atuais que apresentam frequências fundamentais cada vez menores. (RIBEIRO *et al.*, 2018).

Embora seja possível amenizar a intensidade dos efeitos das vibrações geradas por atividade humana com uso de carpetes sobre os pisos ou materiais semelhantes a borracha, soluções eficientes e duradouras apenas são obtidas elevando os níveis de amortecimento das edificações, com a utilização de dispositivos de controle dinâmicos e, quando viável economicamente, enrijecendo a estrutura (VARELA; BATTISTA, 2011). Porém, nem sempre é possível contornar tais problemáticas em virtude de limitações arquitetônicas e econômicas, assim, diversos pesquisadores propõem o uso de dispositivos de controle das vibrações associados a estrutura, que podem possuir custo elevado e inviabilizar sua utilização (CHEN; ZHANG; ZHANG, 2018).

Ainda que existam procedimentos que possibilitem a manutenção das estruturas aos efeitos vibratórios, é difícil amenizar a suscetibilidade de uma edificação pronta com eficácia, senão com grandes mudanças em seu sistema de massa e rigidez para o aumento de seu amortecimento natural, medidas essa que geram grandes custos. Dessa forma, é de grande importância definir o mais cedo possível (nas fases de projeto) as exigências dos clientes e todas as finalidades que a construção possa vir a ser designada, e assim, definir com clareza os critérios de aceitação aos efeitos vibratórios (GLUHOVIĆ *et al.*, 2016).

2.3 Formulação da dinâmica para as vibrações

Como dito anteriormente, as vibrações de forma geral se preocupam em estudar o movimento de um corpo ou conjunto de corpos ao redor de um ponto de equilíbrio. Os problemas de vibrações podem ser solucionados através de dois tipos de sistemas, sistemas contínuos e sistemas discretos.

Sistemas contínuos são aqueles em que as massas estão ligadas diretamente, como o caso de uma viga fletida, e são formulados na maioria das vezes com a integração de funções contínuas. Já os sistemas discretos são aqueles onde as massas não estão ligadas diretamente, como a vibração horizontal de um edifício de vários pavimentos, tomando as colunas como molas e os pisos como massas, e podem ser resolvidos com o uso de matrizes. Pelo fato de que o método de solução dos sistemas discretos ser mais simples, técnicas que discretizam os sistemas contínuos transformando-os em sistemas discretos são muito utilizadas, e a mais conhecida dessas técnicas é o método dos elementos finitos (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009).

Os sistemas discretos na maioria das vezes são modelados utilizando três componentes: massas individuais, amortecedores e molas. Nesses sistemas, as forças são aplicadas nas massas através de outros componentes, e assim, ao se determinar e resolver as equações matriciais que ligam o deslocamento, velocidade e a aceleração às forças externas, os problemas são solucionados (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009).

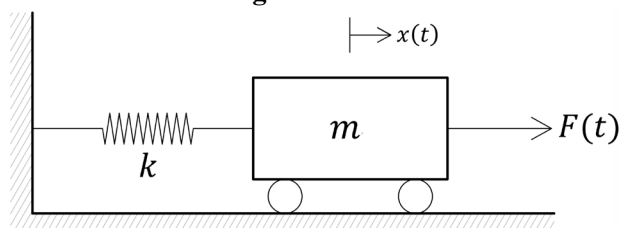
Existem também duas subdivisões para os sistemas discretos, sistemas com múltiplos graus de liberdade e sistemas com um único grau de liberdade. As massas (corpos) nos sistemas com vários graus de liberdade estão ligadas de diversas formas e sua solução é complexa. Já os sistemas com apenas um grau de liberdade são mais simples por apresentarem somente uma massa, e assim, sua solução possui menor grau de complexidade.

As vibrações livres em sistemas discretos com um grau de liberdade, podem ser amortecidas ou não. Inicialmente será apresentada a equação do movimento para vibrações livres não amortecidas e posteriormente para vibrações livres amortecidas. Todas as equações gerais da dinâmica e do movimento para os sistemas foram extraídas e adaptadas de Bachmann e Ammann (1987) e Bachmann *et al.* (1995).

2.3.1 Vibrações livres não amortecidas

A Figura 5 mostra um sistema com apenas um grau de liberdade sem amortecimento, com as propriedades físicas massa (m) e rigidez (k).

Figura 5 – Sistema com um grau de liberdade sem amortecimento



Fonte: elaborada pelo autor

A equação do movimento da Figura 5, da 2ª Lei de Newton, é apresentada pela Equação 1. Para vibrações livres não amortecidas $F(t) = 0$, logo, a equação do movimento para o sistema apresentada na Figura 5 passa a ser escrita conforme apresentado na Equação 2.

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad \text{Equação 1}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{Equação 2}$$

Com as condições impostas na Equação 2 e utilizando a rigidez k em N/m , pode-se definir as equações para cálculo da frequência natural circular não-amortecida ω_n em rad/s (Equação 3), frequência natural cíclica não amortecida f_n em H_z (Equação 4) e do período da vibração em segundos (Equação 5).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Equação 3}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad \text{Equação 4}$$

$$T = \frac{1}{f_n} \quad \text{Equação 5}$$

A equação do deslocamento $x(t)$ (com t em segundos) presente na Figura 5 é escrita na Equação 6, onde C_1 e C_2 são constantes que são definidas com a imposições de condições de contorno particulares.

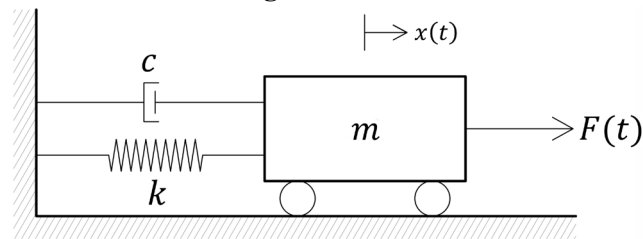
$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) \quad \text{Equação 6}$$

No Anexo 3 é apresentada a solução de um problema de vibração livre não amortecida com um grau de liberdade, onde são determinadas as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ e são traçados os gráficos de *tempo × deslocamento*, *deslocamento × velocidade* e *velocidade × aceleração*

2.3.2 Vibrações livres amortecidas

A diferença dos modelos com um grau de liberdade sem amortecimento apresentado na Figura 5 para o modelo com amortecimento mostrado na Figura 6, é a presença do amortecimento viscoso representado por “ c ”. O amortecimento viscoso é linear e proporcional à velocidade do corpo. Nas estruturas reais o amortecimento não é substancialmente linear, todavia, admitir um amortecimento viscoso nas formulações conduz à resultados satisfatórios.

Figura 6 – Sistema com um grau de liberdade com amortecimento



Fonte: elaborada pelo autor

A equação do movimento para vibrações livres amortecidas é apresentada pela Equação 7, que passa a considerar o amortecimento "c" presente na Figura 6.

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad \text{Equação 7}$$

Da mesma forma que $F(t) = 0$ para as vibrações livres não amortecidas, ao se considerar o amortecimento em vibrações livres essa condição também é adotada, logo, a equação do movimento para vibrações livres com amortecimento viscoso passa a ser expressa como mostra a Equação 8.

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad \text{Equação 8}$$

Quando se tem um movimento vibratório com amortecimento viscoso, a vibração pode sofrer amortecimento supercrítico, crítico ou ser subamortecida (amortecimento subcrítico). Todavia, o amortecimento nas obras civis é baixo, em torno de 5%. O valor de "c" para o amortecimento crítico pode ser escrito como " c_c ", e é determinado em relação à massa (m) e rigidez (k) do elemento, enquanto o valor de "c" para vibrações superamortecidas e subamortecidas é definido somente com medições. Com a Equação 9 é possível determinar o valor de c_c em Ns/m com k e m , respectivamente, em N/m e kg .

$$c_c = \sqrt{4 k m} \quad \text{Equação 9}$$

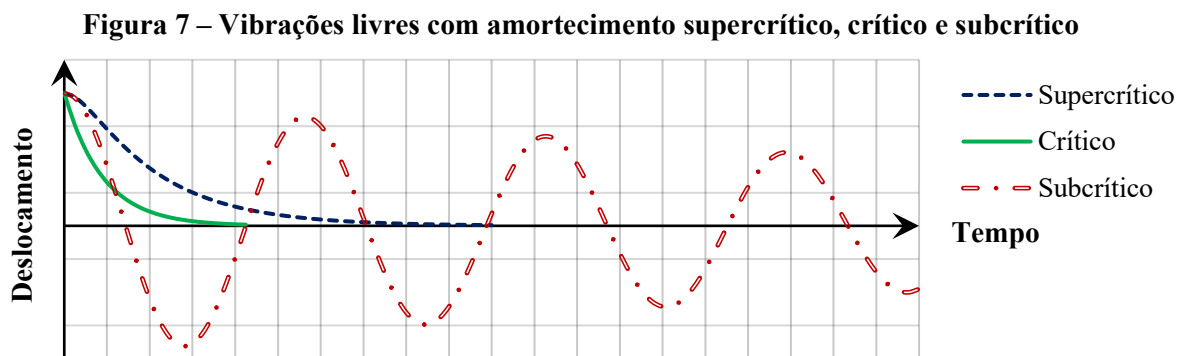
Quando o amortecimento é maior que zero, $c > 0$, como acontece em estruturas reais, se tem uma grandeza adimensional chamada taxa de amortecimento representada por ξ , calculado conforme a Equação 10.

$$\xi = \frac{c}{2 m \omega_n} = \frac{c}{c_c} \quad \text{Equação 10}$$

Com a presença do amortecimento, passa a existir a frequência natural circular amortecida (ω_D) calculada como mostra a Equação 11 em *rad/s*. É importante ter em mente que em obras civis, que denotam níveis de amortecimento bastante baixos, que dificilmente atingem valores na ordem de 8%, logo, a frequência natural circular não-amortecida assume valores bastante próximos à da frequência natural circular amortecida.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Equação 11}$$

Excitações em estruturas com amortecimento crítico e supercrítico fazem com que não ocorram movimentos vibratórios, enquanto que nas estruturas com amortecimento subcrítico se tem o decaimento da amplitude da vibração com o passar do tempo, sendo essa a situação mais preocupantes nas obras civis. Todos os tipos de amortecimento tendem a zero, porém nenhum deles atinge valores nulos. A Figura 7 mostra o decaimento das vibrações para os três tipos de amortecimento citados.



Fonte: elaborada pelo autor

A Tabela 1 mostra as equações do deslocamento para vibrações com amortecimento supercrítico, crítico e subcrítico e também, as relações de c com c_c para seus respectivos tipos de amortecimento.

Tabela 1 – Equações do deslocamento para vibrações com amortecimento viscoso supercrítico, crítico e subcrítico

Amortecimento supercrítico $c > c_c$	$x(t) = A_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}$
Amortecimento crítico	$x(t) = A e^{-\frac{c_c}{2m}t}$
Amortecimento subcrítico $c < c_c$	$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$ O valor de ζ deve estar em decimal

Fonte: elaborada pelo autor

Nos anexos são apresentadas soluções de problemas de vibrações livres amortecidas com um grau de liberdade, onde são determinadas as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ e são traçados os gráficos de *tempo* \times *deslocamento*, *deslocamento* \times *velocidade* e *velocidade* \times *aceleração*. No Anexo 4 é considerado amortecimento viscoso crítico, no Anexo 5 amortecimento viscoso supercrítico e o no Anexo 6 amortecimento viscoso subcrítico.

2.4 Vibrações em pisos mistos de aço e concreto

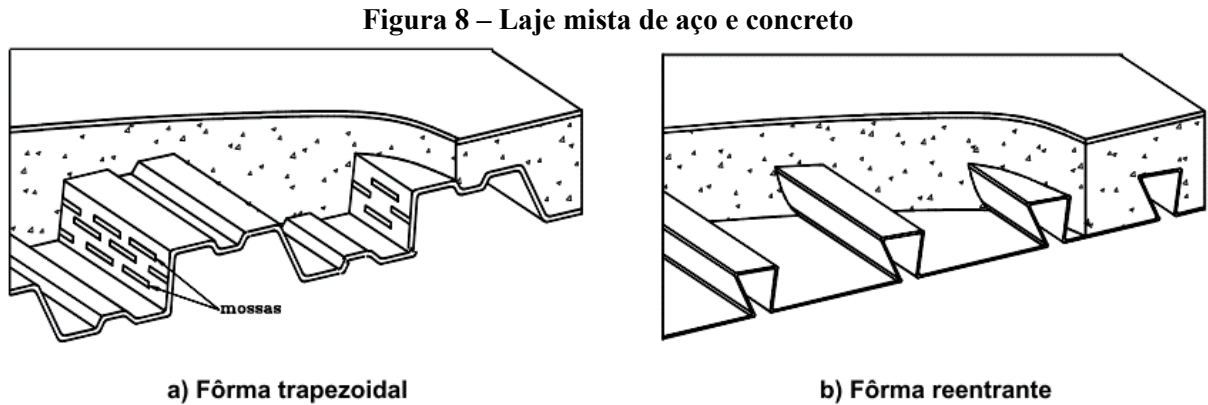
Um elemento misto é obtido da união de pelo menos dois elementos de materiais diferentes, que ao se promover o comportamento conjunto entre eles, formam um elemento estrutural capaz de resistir à esforços externos (DE NARDIN; SOUZA, 2008). Logo, as estruturas mistas são obtidas do arranjo de vários elementos mistos em uma mesma estrutura. Exemplos de elementos mistos são vigas mistas de aço e concreto e lajes mistas de concreto com forma de aço incorporada, e de estruturas mistas, edifícios de múltiplos pisos mistos de aço e concreto.

O Brasil possui grande potencial para estimular o uso de elementos mistos em suas edificações, uma vez que é um dos grandes produtores mundiais de aço. Para alguns as estruturas mistas é uma tipologia construtiva recente, porém, é uma técnica que já veem sendo empregada desde o século passado. Apesar das vantagens oferecidas pelas estruturas mistas, possivelmente sua utilização no Brasil ainda não é maior pela falta da difusão dos processos de dimensionamento, conhecimento esse, que na maioria das vezes não é abordado nos cursos de graduação em Engenharia Civil (RIBEIRO, 2017a).

A utilização de elementos mistos oferecem vantagens como: vencer grandes vãos com dimensões reduzidas em relação aos elementos estruturais metálicos e de concreto armado, facilitar a execução das instalações elétricas e hidráulicas, possibilidade de dispensar escoras ou reduzir a quantidade das mesmas, gerar quantidade menor de resíduos, e por proporcionar maior velocidade de execução é capaz de minimizar os custos financeiros, reduzindo o tempo de retorno do capital e contribuindo com a viabilidade de empreendimentos imobiliários.

São designadas lajes mistas com forma de aço incorporada elementos estruturais obtidos do depósito de concreto sobre formas de aço. As formas de aço das lajes mistas possuem grande variedade de formatos pelo mundo, cujas variações, possuem o objetivo de promover o comportamento conjunto entre o aço e concreto com a melhor eficiência possível (FAKURY;

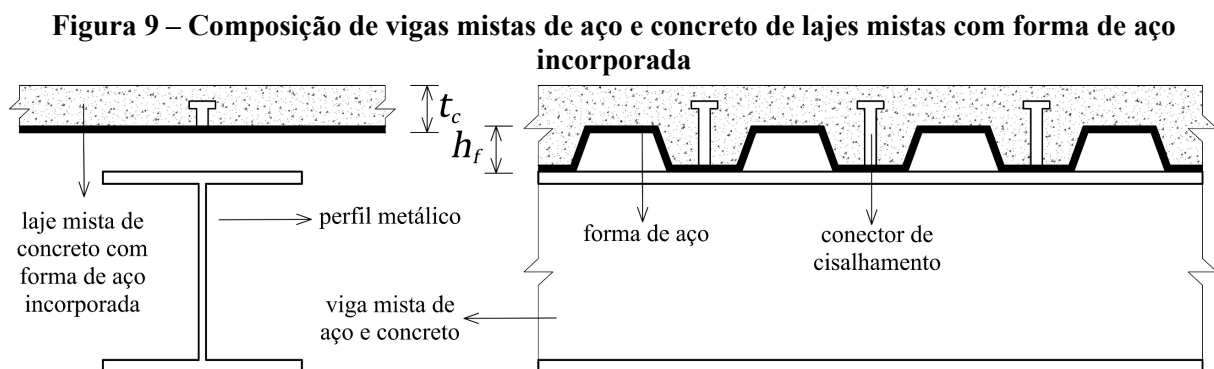
SILVA; CALDAS, 2016). No Brasil, dois formatos comuns de formas são as trapezoidais e as reentrantes, como mostra a Figura 8.



Fonte: ABNT NBR 8800:2008

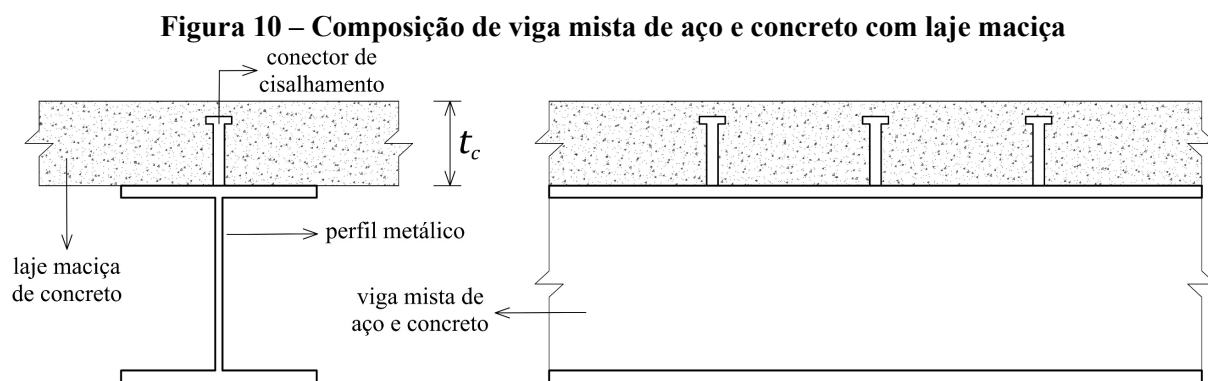
No Anexo Q da ABNT NBR 8800:2008, que apresenta os procedimentos para o dimensionamento de lajes mistas, é considerada insuficiente a aderência natural entre o aço e o concreto para estabelecer o comportamento conjunto nas lajes mistas, e normaliza que a solidariedade entre os materiais deve ser garantida pelo atrito entre o concreto e as mossas das fôrmas trapezoidais ou pelo confinamento do concreto nas fôrmas reentrantes.

No dimensionamento à flexão das lajes mistas o concreto tracionado é desprezado e o aço das formas trabalham como armadura positiva parcial ou total, e quando presentes nas regiões de compressão, podem trabalhar solidariamente ao concreto como armadura negativa. O concreto comprimido que participa do mecanismo resistente à flexão “ t_c ” nas lajes mistas é somente a parcela localizado acima da altura total da forma “ h_f ”, como mostra a Figura 9.



As vigas mistas são obtidas a partir da associação de um perfil de aço simétrico em relação ao plano de flexão trabalhando em conjunto com uma laje de concreto. A laje de concreto acima do perfil metálico pode ser maciça moldada no local, pré-fabrica ou mista.

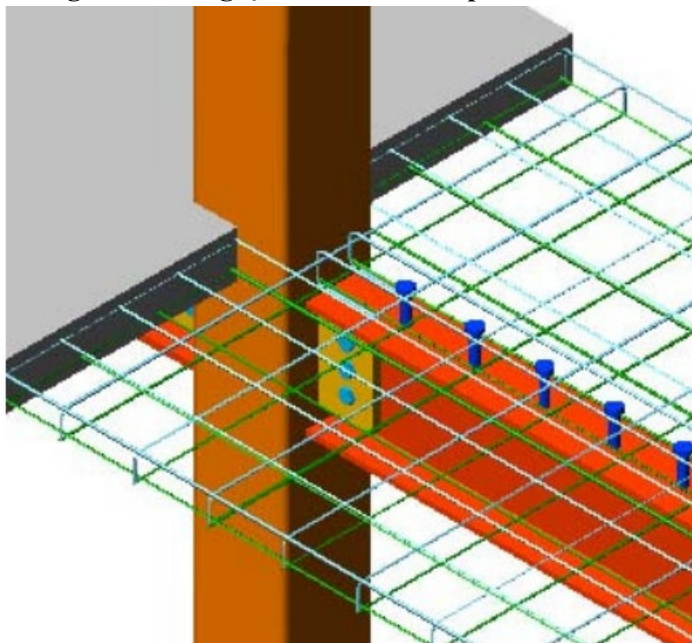
O elemento misto conhecido como viga mista de aço e concreto capaz de resistir à esforços de flexão, é obtido do comportamento conjunto entre um perfil metálico e uma laje de concreto através de conectores de cisalhamento, responsáveis por realizar a ligação mecânica entre os materiais. A Figura 9 e a Figura 10 mostram, respectivamente, a composição de vigas mistas de aço e concreto com laje mista e laje maciça.



Fonte: elaborada pelo autor

No Anexo O da ABNT NBR 8800:2008 encontram-se procedimentos para o dimensionamento e classificação das vigas mistas de aço e concreto, que podem ser biapoiadas, contínuas e semicontínuas. As vigas mistas biapoiadas são capazes de resistir somente ao momento fletor positivo e suas extremidades possuem ligações que podem ser consideradas rótulas, incapazes de transmitir flexão. Já as vigas mistas contínuas e semicontínuas diferenciam-se das biapoiadas por admitirem que a laje de concreto, juntamente com outros componentes (armadura das lajes, ligações metálicas e conectores de cisalhamento), promovam a continuidade dessas vigas, tornando-as capazes de transferir flexão entre segmentos adjacentes e de resistirem ao momento fletor negativo. O conjunto de componentes que promovem tal continuidade é denominada “ligações mistas”, ilustrada na Figura 11.

Figura 11 – Ligação mista em um pavimento misto



Fonte: adaptada de De Nardin, Souza e El Debs (2007)

Nas regiões de momento fletor positivo, de todas as vigas mistas de aço e concreto, a capacidade resistente à flexão é promovida pelo concreto comprimido da laje em conjunto com o perfil metálico. Nas regiões de momento negativo das vigas contínuas e semicontínuas, onde as fibras superiores são tracionadas (região da laje), a resistência a tração do concreto é desprezada e somente a armadura em seu interior juntamente com o perfil metálico participam do mecanismo resistente. A diferença entre as vigas mistas contínuas e semicontínuas está na capacidade resistente da ligação mista das suas extremidades. Quando a ligação possui a mesma capacidade dos elementos que ligam, caracterizam as vigas como contínuas, e quando essa capacidade é inferior, as denominam semicontínuas.

Uma ligação pode ser denominada mistas quando a laje de concreto auxilia na transmissão de momento fletor em trechos contínuos de vigas mistas ou de uma viga mista para um pilar, de acordo com o Anexo R da ABNT NBR 8800:2008 que prescreve recomendações para ligações de vigas mistas semicontínuas.

O termo “piso misto de aço e concreto” pode retratar um piso constituído de vigas mistas e lajes maciças, vigas mistas e lajes mistas, dentre outras combinações. Os pisos mistos de aço e concreto atualmente vêm sendo muito utilizados à medida que se aumentam as tendências de edifícios com pavimentos de planta livre, juntamente com a necessidade de encurtar os prazos de construção, colaborando com a flexibilidade de utilização das construções modernas e reduzindo os custos financeiros dos empreendimentos imobiliários.

Nos pisos mistos de aço e concreto, é comum as nervuras das lajes mistas serem dispostas perpendicularmente às vigas secundárias, e devido a presença de nervuras em apenas uma direção, nesses casos, as lajes mistas são concebidas como elementos unidirecionais. A Figura 12 mostra a disposição típica das lajes mistas em um pavimento, composto de lajes mistas de concreto com forma de aço incorporada apoiadas nas vigas secundárias, que por sua vez, são sustentadas pelas vigas primárias.

Figura 12 - Tipologia básica de um sistema de piso misto de aço e concreto



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo fato dos pisos mistos de aço e concreto ser uma tipologia construtiva que ganhou força após a segunda metade do século XX, em parte graças aos avanços da informática que vêm viabilizando cada vez mais o uso do método dos elementos finitos nas pesquisas e nas rotinas de dimensionamento estrutural, os estudos quanto ao comportamento dinâmico desses elementos, além de não serem muitos, também são muito recentes. Dessa forma, é evidente a necessidade de pesquisas quanto aos efeitos das vibrações nos pisos mistos, que podem ser subdivididas quanto ao tipo de estrutura (pontes e edifícios de múltiplos pavimentos), tipos de elementos estruturais (lajes de concreto armado e lajes mistas de aço e concreto) e uso da edificação (escritórios, escolas, indústrias e muitas outras).

Diversas análises concluíram que lajes de concreto com alto índice de esbeltez e caráter unidirecional colaboram para que os elementos, com essas duas características combinadas ou não, fiquem mais sensíveis aos efeitos das vibrações ao ponto de comprometerem o conforto dos usuários. Fazendo com que a análise dinâmica possa vir a ser um item que governe o processo de dimensionamento desses elementos. O trabalho de Santos

e Leite (2018) abordou os efeitos dinâmicos produzidos por atividades humanas em lajes nervuradas unidirecionais de concreto utilizando o *software* Dinâmico (Versão 1.1) variando a seção e o vão dos elementos além das metodologias de análise.

As conclusões de Santos e Leite (2018) reafirmam a ideia de que em lajes unidirecionais de concreto, principalmente com esbeltez próxima de 30 ou solicitadas por cargas dinâmicas de grande intensidade, o controle das vibrações possa vir a governar o dimensionamento, e que a análise individualizada das lajes é insuficiente para atender os estados limites de vibrações excessivas.

Em detrimento das tendências atuais, de construir com o menor tempo possível edifícios com projetos de planta livre, a utilização de pisos mistos de aço e concreto cresceu juntamente com a preocupação em atender os critérios de aceitação das vibrações, uma vez que essa tipologia construtiva apresenta baixos níveis de amortecimento (PAVIC; WIDJAJA; REYNOLDS, 2002). Contudo, aumentar a rigidez e/ou diminuir o peso próprio dos pavimentos para elevar os níveis de frequência fundamental, são medidas de forte influência no seu comportamento dinâmico (DEVIN *et al.*, 2013).

A complexidade acerca das vibrações induzidas pelas atividades humanas pode ser contornada ao tratar de três aspectos de forma individual, que são: carregamentos dinâmicos induzidos por atividade humana, resposta dinâmica dos diversos sistemas de pisos utilizados nas estruturas e os efeitos que as vibrações exercem nos indivíduos. Nas normas brasileiras apenas são encontradas recomendações relacionadas à garantia da integridade das estruturas, limitando o valor da frequência natural relacionada ao risco de ocorrer ressonância, e não aborda procedimentos que verifiquem os estados limites das vibrações ligados ao conforto humano, uma vez que a real influência dos carregamentos dinâmicos não é sentida pelos indivíduos em termos de frequência do piso, mas sim, de acordo com a sua aceleração (RIBEIRO *et al.*, 2018).

Em algumas literaturas acerca de pisos mistos é comum encontrar critérios de aceitação das vibrações baseados basicamente na limitação da frequência fundamental, de acordo com o tipo de ocupação e natureza da excitação dinâmica. Todavia, é improvável que o simples controle da frequência dos pisos conduzam à soluções estruturais racionais, uma vez que existem procedimentos simplificados para o cálculo das demais propriedades dinâmicas dos pavimentos mistos, de grande valia para o exercício da engenharia, tendo em vista que os critérios de aceitação devem ser atendidos ainda nas fases de projeto (GLUHOVIĆ *et al.*, 2016).

O trabalho de Silva Junior (2015) realizou ensaios experimentais de vibrações induzidas por atividades humanas em pisos mistos de aço e concreto de um edifício de múltiplos pavimentos para avaliar o desempenho da estrutura frente aos critérios de aceitação do conforto humano. Utilizando os resultados dos ensaios para determinar as frequências fundamentais e as acelerações induzidas pelo caminhar humano, além do amortecimento experimental, revelaram que devido ao fato dos pisos mistos tradicionalmente apresentarem grandes vãos, menor rigidez, baixo amortecimento, e das acelerações induzidas pelo caminhar humano nessas estruturas possuírem amplitudes altas que podem facilmente comprometer o conforto dos usuários, dessa forma, o controle das vibrações é de grande importância atualmente.

As normativas nacionais trazem critérios de aceitação das vibrações baseados somente no controle das frequências, que são insuficientes para atender os estados limites das vibrações que garantem o conforto dos usuários. Em diversos manuais internacionais de projetos, os processos de verificações relativos ao conforto humano são realizados com base nas acelerações de pico, onde também são prescritas equações simplificadas para realização dos cálculos das acelerações e frequências fundamentais dos pavimentos com caráter bastante prático. Exemplos de manuais de projetos com esse formato são: “*Steel Design Guide Series 11: Floor Vibrations Due to Human Activity – AISC (2003)*” (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003), “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o “*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity - AISC (2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016).

O trabalho de Pinto (2015) ao realizar modelagens numéricas e gerar resultados a partir de métodos analíticos simplificados e compara-los com os resultados das análises experimentais de Silva Junior (2015), revelou que os modelos numéricos são capazes de representar corretamente o comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto, e que os resultados oriundos dos métodos analíticos também foram coerentes com os de Silva Junior (2015). Mostrando o potencial desses métodos em prever as propriedades modais dos pisos mistos de aço e concreto, e de serem empregados ainda nas fases iniciais de projeto para a garantia do conforto dos usuários frente as vibrações induzidas por atividade humana, logicamente, se utilizados corretamente.

As investigações realizadas por Ferreira *et al.*, (2021) com foco no conforto humano dos usuários, realizou avaliações do comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto com forma de aço incorpora MF75 submetido ao caminhar humano de uma edificação, ainda na fase de construção, localizada na cidade Belo Horizonte/MG de doze pavimentos

destinada ao funcionamento de um hospital escola de uma faculdade de medicina. Cada pavimento do edifício possui área total de aproximadamente 1300m² com distância entre os pisos de 3,40m. As avaliações do comportamento dinâmico da estrutura investigada foram feitas experimentalmente e numericamente, cujos modelos foram desenvolvidos no *software* ANSYS, calibrado com os resultados da análise experimental *in loco*, e que apresentaram concordância satisfatória com os resultados experimentais.

Foram realizados na estrutura testes de vibração forçada excitando os pavimentos com o caminhar humano em diferentes direções com três frequências diferentes de passos (1,7 Hz, 2,0 Hz e 2,3 Hz). Dos painéis de laje investigados, nenhum deles ultrapassou os limites recomendados pelas normativas nacionais (ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 6118:2014), e os resultados baseados nos valores de pico de aceleração também ficaram dentro dos limites das normativas internacionais. No entanto, os autores evidenciaram que tais critérios são um tanto quanto simplistas, e assim, concluíram que tais processos de verificação sejam empregados apenas nas avaliações iniciais do projeto. Recomendaram que pavimentos submetidos à atividade de pessoas devem ser avaliados por meio de uma análise dinâmica considerando as características e natureza das excitações, limites para o conforto dos usuários em função do uso e ocupação, frequências naturais da estrutura e relações modais de amortecimento.

O trabalho de Ferreira *et al.*, (2021) também investigou a situação de várias pessoas caminhando sobre o piso, submetendo um dos painéis de laje à caminhada livre de quatro indivíduos com velocidades distintas de passo, encontrando nessa situação, um aumento significativo na aceleração do pavimento que ultrapassaram os limites de conforto humano estabelecidos pelo AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016). Portanto, enfatizaram que o comportamento dinâmico de piso misto de aço e concreto apresentaram forte relação com a quantidade de pessoas que caminham sobre estrutura, evidenciando assim, a necessidade de mais estudos sobre esse cenário em específico. Todavia, enfatizam que o sistema estrutural estudado se encontrava ainda em fase de construção, e que a contribuição dos elementos não estruturais no amortecimento da estrutura pode melhorar o desempenho dinâmico do pavimento. Porém, também afirmaram que a análise do conforto humano baseada nos picos de aceleração do pavimento pode levar considerações um tanto quanto conservadoras, uma vez que o pico de aceleração isolado pode comprometer um piso, que na realidade durante toda a excitação, dificilmente estará sujeito ao pico de vibração.

Por fim, é evidente a importância de estudos relativos à análise das vibrações em pisos mistos de aço e concreto para minimizar ao máximo incertezas que possam comprometer a utilização dessa tipologia construtiva, uma vez que as excitações dinâmicas oriundas de atividades humanas nesses sistemas estruturais podem vir a governar o dimensionamento.

Capítulo 3

Processos analíticos para o cálculo da frequência

Avaliar a resposta dinâmica de um piso inicia-se com o cálculo da sua frequência fundamental para posteriormente determinar outras demais propriedades modais. Existem procedimentos analíticos presentes em manuais de projeto para se obter a frequência fundamental que fazem uso do Método de *Dunkerley*. Dentre várias bibliografias para calcular a frequência fundamental, exemplos de manuais de projeto são: “*Design Guide 11 - Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity Second Edition*” do “*American Institute of Steel Construction (AISC)*” (MURRAY *et al.*, 2016) e o “*Design of Floors for Vibration: A New Approach*” do “*The Steel Construction Institute (SCI)*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009).

O Método de *Dunkerley* permite determinar a frequência natural (ou fundamental) de uma estrutura (f_0) com base nas frequências individuais de cada elemento. Por exemplo, a frequência fundamental de um pavimento pode ser calculada a partir das frequências individuais das vigas e lajes que constituem o piso.

A frequência fundamental de um elemento pode ser determinada com base na sua deflexão, e dessa forma, a frequência fundamental de um piso misto, na deflexão do pavimento (deflexão essa relativa à somatória da deflexão do conjunto formado por vigas e lajes). A seguir, é apresentado o processo de cálculo da frequência natural de um elemento baseado na sua deflexão.

Para vibração elástica livre de uma viga de seção uniforme, a frequência natural no n ésimo (n) modo de vibração f_n (H_z) é calculada com a Equação 12.

$$f_n = \frac{k_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad \text{Equação 12}$$

Onde E é o módulo de elasticidade (N/m^2), I o momento de inércia da seção plena (m^4), L é o vão (m), m o peso próprio (kg/m) e k_n uma constante relativa às vinculações e grau do modo de vibração (Tabela 2).

Tabela 2 – Coeficiente k_n para vigas uniformes

Condições de apoio	k_n para o modo n		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
Bi-rotulada	π^2	$4\pi^2$	$9\pi^2$
Bi-engastada	22,4	61,7	121
Engastamento-livre	3,52	22	61,7

Fonte: adaptada de Hicks e Peltonen (2015)

Para apresentar o processo de cálculo da frequência natural de uma elemento no primeiro modo de vibração utilizando sua deflexão, será utilizada uma viga bi-rotulada com peso próprio linearmente distribuído, cuja deflexão máxima δ é determinada com a Equação 13, e para todos os processos seguinte, a aceleração da gravidade adotada será $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

$$\delta = \frac{5 m g L^4}{384 E I} \quad \text{Equação 13}$$

Ao se adotar $k_n = 1$ na Equação 12 e posteriormente isolando o valor de m , se tem a Equação 14.

$$m = \frac{\pi^2 EI}{4 f_1^2 L^4} \quad \text{Equação 14}$$

Substituindo $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e m da Equação 14 na Equação 13, pode-se determinar frequência natural no primeiro modo de vibração de uma viga biapoada f_1 (Hz) com a Equação 15, onde δ deve estar em milímetros (mm).

$$f_1 = \frac{17,8}{\sqrt{\delta}} \cong \frac{18}{\sqrt{\delta}} \quad \text{Equação 15}$$

A Equação 15 também pode ser utilizada para diferentes valores de k_n , ou seja, para outras condições de suporte. Dessa forma, em projetos a Equação 15 pode ser admitida como geral (com pequenas variações entre manuais de projeto) para o cálculo da frequência natural de elementos individuais, mesmo que eles não sejam bi-rotulados.

É comum nos manuais de projeto, o valor de δ (Equação 15) retratar a deflexão causada pelas cargas permanentes que solicitam o elemento acrescidos de 10% da carga de utilização (carga acidental). Dessa forma, em um piso misto de aço e concreto, a carga permanente das lajes corresponde à somatória do seu peso próprio com a carga de revestimento do piso e 10% da carga de utilização (carga acidental).

A aplicação do Método de *Dunkerley* para o cálculo da frequência fundamental de um piso misto de aço e concreto é realizada admitindo que o valor de δ (da Equação 15) é a somatória das deflexões individuais de cada elemento que compõe o piso (lajes e vigas). Dessa forma, com a Equação 16 é possível calcular a frequência natural no primeiro modo de vibração (frequência fundamental) de um piso misto, onde f_L , f_s e f_p são, respectivamente, as frequências naturais das lajes, vigas secundárias e vigas principais.

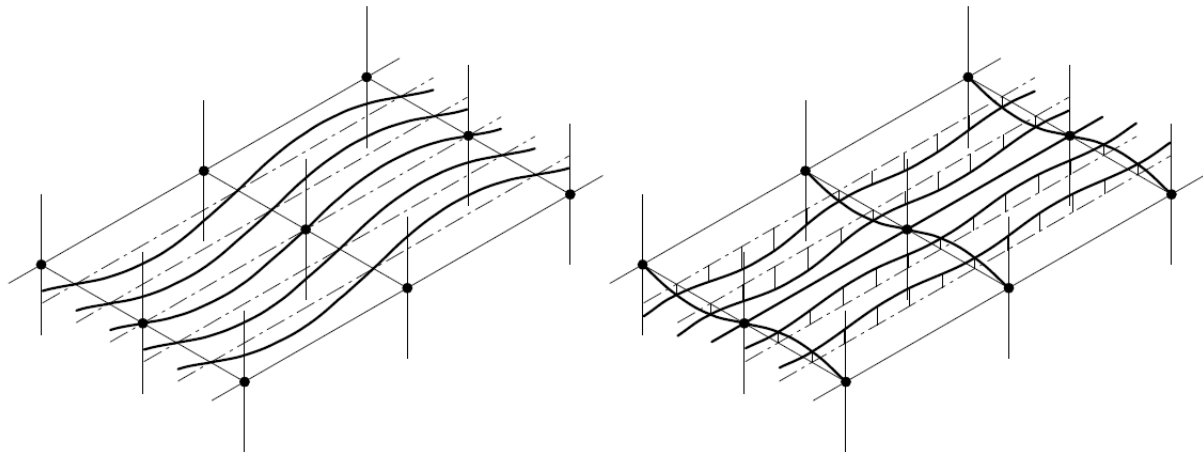
$$\frac{1}{f_1^2} = \frac{1}{f_L^2} + \frac{1}{f_s^2} + \frac{1}{f_p^2} \quad \text{Equação 16}$$

Deve-se ter em mente que ao se calcular a frequência natural do primeiro modo de vibração de um elemento ou estrutura (como um piso misto de aço e concreto), é relativo à determinação da frequência fundamental do mesmo, já que em manuais de projeto os dois termos retratam a mesma propriedade. Nos itens a seguir são apresentados em detalhes os procedimentos analíticos dos manuais citados anteriormente, SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), para determinar a frequência fundamental de pavimentos mistos de aço e concreto.

3.1 Procedimento do *Design of Floors for Vibration* – SCI P354/2009

O método proposto pelo “*Design of Floors for Vibration: A New Approach*” do “*The Steel Construction Institute (SCI)*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), estima a frequência fundamental de pisos convencionais de aço-concreto com base na provável forma fletida dos elementos (modos de vibração). O processo leva em consideração como os apoios e as condições de contorno influenciam no comportamento dos elementos individuais, admitindo as lajes como elementos contínuos apoiadas nas vigas secundárias, que por sua vez são suportadas pelas vigas primárias, prevendo dois modos de vibrações, cujas considerações estão descritas na Tabela 3 e ilustradas na Figura 13. O “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) recomenda que o módulo de elasticidade dinâmico do concreto seja $E_{cd} = 38GPa$ e a massa específica do concreto de peso normal e leve, respectivamente, $2.350 kg/m^3$ e $1.800 kg/m^3$.

Figura 13 – Modos de vibrações previstos



a) Governada pelas vigas secundárias

b) Governada pelas vigas primárias

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Tabela 3 – Modos de vibração previstos pelo - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Modo de vibração das vigas secundárias	As vigas secundárias bi-rotulados vibram sobre as vigas primárias que formam linhas nodais com deflexão nula e as lajes são elementos contínuos bi-engastados que vibram sobre as vigas secundárias como mostra a Figura 13a
Modo de vibração das vigas primárias	As lajes contínuas bi-engastadas estão apoiadas nas vigas secundárias contínuas (bi-engastadas) que são suportadas pelas vigas primárias bi-rotuladas que vibram sobre os pilares que oferecem condições de suporte com deflexão nula como mostra a Figura 13b

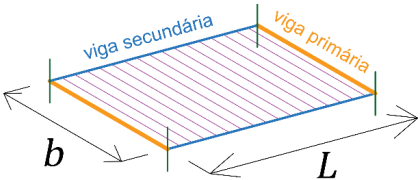
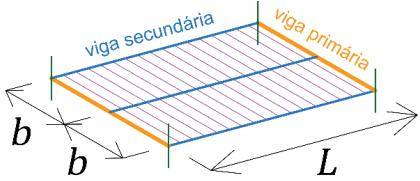
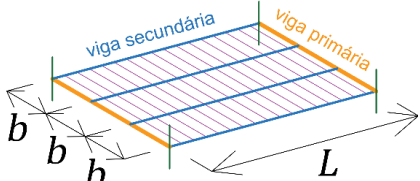
Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

A frequência fundamental do piso, f_0 , é a menor frequência natural dos dois modos de vibrações descritos na Tabela 3, que são determinadas calculando as deflexões totais do piso para os dois modos previstos. Logo, f_0 em H_z pode ser definida com a Equação 17, utilizando δ_t em milímetros. Quando se tem um piso com espaçamentos constantes entre as vigas primárias e secundárias, é possível obter o valor de δ_t diretamente com o uso da Tabela 4.

$$f_0 = \frac{18}{\sqrt{\delta_t}}$$

Equação 17

Tabela 4 – Cálculo de δ_t para diferentes arranjos *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Arranjo da estrutura de acordo com a quantidade de baias	Modo de vibração das vigas secundárias	Modo de vibração das vigas primárias
<p>Arranjo sem baias</p> 	$\delta_t = \frac{m_f g b}{384 E_s} \left(\frac{5L^4}{I_s} + \frac{b^3}{I_L} \right)$	-
<p>Arranjo com duas baias</p> 	Mesmo que o acima	$\delta_t = \frac{m_f g b}{384 E_s} \left(\frac{64b^3 L}{I_p} + \frac{L^4}{I_s} + \frac{b^3}{I_L} \right)$
<p>Arranjo com três baias</p> 	Mesmo que o acima	$\delta_t = \frac{m_f g b}{384 E_s} \left(\frac{368b^3 L}{I_p} + \frac{L^4}{I_s} + \frac{b^3}{I_L} \right)$

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Para obter δ_t em metros (m) fazendo uso da Tabela 4, é necessário seguir as seguintes recomendações:

g : aceleração da gravidade $g = 9,81m/s^2$;

E_s : módulo de elasticidade do aço (N/m^2);

E_{cd} : módulo de elasticidade dinâmico do concreto (N/m^2);

α : razão modular E_s/E_{cd} ;

I_L : momento de inércia das lajes em unidades de aço (m^4/m), que deve ser calculada dividindo sua largura unitária pela razão modular " α " e tomando como altura a espessura da camada de concreto acima das formas das lajes mistas ou a espessura total das lajes maciças;

I_s : momento de inércia das vigas secundárias (m^4/m), utilizando a largura efetiva da mesa colaborante (b_{ef}) o menor valor entre $L/4$ de seu vão e o espaçamento das vigas secundárias b , dividida posteriormente pela razão modular " α ", e a altura da mesa deve ser a espessura da camada de concreto acima das formas das lajes mistas ou a altura total das lajes maciças;

I_p : momento de inércia das vigas primárias (m^4/m), utilizando a largura efetiva da mesa colaborante (b_{ef}) o menor valor entre $L/4$ de seu vão e o espaçamento das vigas

primárias, dividida posteriormente pela razão modular " α ", e a altura da mesa colaborante deve ser a espessura da camada de concreto acima das formas das lajes mistas ou a altura total das lajes maciças;

m_f : carregamento permanente distribuído no piso em kg/m^2 calculado com a Equação 18.

$$m_f = p_L + \frac{m_s}{b} + \frac{m_p}{L} \quad \text{Equação 18}$$

Para uso da Equação 18, p_L é a carga distribuída permanente da laje em kg/m^2 (peso próprio da laje somado com a carga do revestimento e 10% da carga acidental), m_s e m_p , respectivamente, a carga devido ao peso próprio dos perfis metálicos das vigas secundárias e primárias em kg/m , b e L , respectivamente, são os espaçamentos das vigas secundárias e primárias em metros (m), como mostra a Tabela 4.

Outra forma de escrever a Equação 17 é calculando a deflexão imediata de cada elemento individualmente (lajes, vigas primárias e secundárias) para os dois modos de vibrações descritos na Tabela 3. Assim, a frequência fundamental do piso para os modos de vibrações governados pelas vigas secundárias e primárias podem ser calculados, respectivamente, com a Equação 19 e Equação 20, onde δ_L (mm) é a deflexão imediata das lajes, δ_p (mm) a deflexão imediata das vigas primárias e δ_s (mm) a deflexão imediata das vigas secundárias, que assumem valores diferentes em decorrência das condições de suporte e geometria do piso.

$$f_0 = \frac{18}{\sqrt{\delta_L + \delta_s}} \quad \text{Equação 19}$$

$$f_0 = \frac{18}{\sqrt{\delta_L + \delta_s + \delta_p}} \quad \text{Equação 20}$$

O Guia de projetos "*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*" (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) recomenda que nenhum elemento estrutural deve ter frequência fundamental inferior à 3Hz, para garantir que as atividades de caminhada fiquem fora das faixas de excitações capazes gerarem ressonância.

3.2 Procedimento do *American Institute of Steel Construction (AISC) (2013/2016)*

O manual de projeto “*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016) é uma atualização do “*Steel Design Guide Series 11 - Floor Vibrations Due to Human Activity (2003)*” (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003), ambos do “*American Institute of Steel Construction (AISC)*”. Quanto a determinação da frequência fundamental de pavimentos mistos não há diferenças entre as duas versões. Algumas divergências entre elas, relativas aos critérios de aceitação, serão discutidas no item 4.3.

Os manuais citados anteriormente prescrevem recomendações semelhantes às do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) (item 3.1) quanto ao cálculo da frequência fundamental de pisos mistos, uma vez que ambos fazem uso do Método de *Dunkerley*. O processo descrito a seguir possui aplicabilidade direta para pavimentos onde os vãos das vigas secundárias são maiores ou iguais a metade dos vãos das vigas primárias e o espaçamento entre as vigas secundárias e primárias é constante.

Inicialmente, deve-se determinar os momentos de inércia das vigas mistas secundárias (I_j) e primárias (I_g). Para o cálculo do centro de gravidade e momento de inércia dessas vigas mistas há diferenças entre as secundárias e as primárias. A espessura da mesa colaborante de concreto das vigas secundárias é somente a espessura da capa de concreto t_c acima das formas, já para as vigas primárias, é a espessura da camada de concreto t_c acima das formas de aço de altura h_f somada com metade de h_f (podendo ser utilizada a Equação 26). Logo, quando se tem lajes maciças, a espessura das mesas colaborantes é a altura total das lajes para ambos os casos.

Para o cálculo do momento de inércia das lajes por unidade de comprimento D_s (Equação 29), deve-se tomar a espessura efetiva das lajes mistas d_e , definida diretamente utilizando a Equação 26 seguindo as indicações apresentadas na Tabela 5, todavia, quando se tratar de lajes maciças, $d_e = h_t$, admitindo assim, que h_t é a altura total das lajes maciças.

Quanto à largura da mesa colaborante das vigas mistas, deve ser tomado o menor valor entre: 40% do vão do elemento e o espaçamento entre as vigas, e posteriormente, dividida pela razão modular dinâmica “ n ” determinada com a Equação 21, onde E_s é o módulo de elasticidade do aço e E_c o módulo de elasticidade do concreto. De forma prática, a largura das mesas colaborantes das vigas secundárias $b_{ef,j}$ (mm) pode ser calculada diretamente com a Equação 22 e a largura da mesa colaborante das vigas primárias $b_{ef,g}$ (mm) utilizando a Equação 23,

cujas definições das variáveis presentes nas Equações são apresentadas na Tabela 5, onde também são apresentadas e definidas demais propriedades geométricas necessárias para o cálculo da frequência fundamental dos pisos mistos (f_0).

Tabela 5 – Propriedades do piso misto - *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2016 (MURRAY et al., 2016)*

d_e	espessura efetiva das laje de concreto (mm) - Equação 26
S	espaçamento entre as vigas secundárias **para utilização na Equação 24 deve ser espesso metros (m) e demais aplicações em milímetros (mm)
L_j	vão das vigas secundárias (mm)
L_g	vão das vigas primárias (mm)
p_g	carga permanente sobre as lajes (kN/m^2)
m_j	peso próprio das vigas secundárias (kN/m)
m_g	peso próprio das vigas primárias (kN/m)
w_j	carga permanente sobre as vigas secundárias (kN/m) - Equação 24
w_g	carga permanente sobre as vigas primárias (kN/m) - Equação 25
D_s	momento de inércia das lajes transformada por unidade de comprimento (mm^3) - Equação 29
D_j	momento de inércia das vigas secundárias transformado por unidade de comprimento (mm^3) - Equação 30

Fonte: adaptada de Murray et al., (2016)

$$n = \frac{E_s}{1,35E_c} \quad \text{Equação 21}$$

$$b_{ef,j} \leq \begin{cases} S/n \\ 0,4 \left(\frac{L_j}{n} \right) \end{cases} \quad \text{Equação 22}$$

$$b_{ef,g} \leq \begin{cases} L_j/n \\ 0,4 \left(\frac{L_g}{n} \right) \end{cases} \quad \text{Equação 23}$$

Para o cálculo das deflexões das vigas secundárias e primárias, é necessário determinar a carga permanente distribuída sobre elas, utilizando a Equação 24 (vigas secundárias) e Equação 25 (vigas primárias).

$$w_j = Sp_g + m_j \quad \text{Equação 24}$$

$$w_g = \frac{L_j}{S} w_j + m_g \quad \text{Equação 25}$$

$$d_e = t_c + \frac{h_f}{2} \quad \text{Equação 26}$$

A deflexão das vigas secundárias são representadas por Δ_j e das vigas principais por Δ_g , determinadas, respectivamente, com a Equação 27 e Equação 28.

$$\Delta_j = \frac{5w_j L_j^4}{384E_s I_j} \quad \text{Equação 27}$$

$$\Delta_g = \frac{5w_g L_g^4}{384E_s I_g} \quad \text{Equação 28}$$

Posteriormente, é necessário determinar outras propriedades geométricas dos elementos do piso, como o D_s e D_j , cujas definições estão na Tabela 5, calculadas respectivamente com a Equação 29 e Equação 30.

$$D_s = (d_e)^3 / (12n) \quad \text{Equação 29}$$

$$D_j = I_j / S \quad \text{Equação 30}$$

Também é necessário definir a largura efetiva da parcela das vigas secundárias dos painéis que participam do movimento vibratório B_j , expressa em milímetros (*mm*), utilizando a Equação 31, em que $C_j = 2,0$ para vigas secundárias que fazem parte dos painéis internos do piso e $C_j = 1,0$ para vigas secundárias contidas nos painéis da extremidade. O valor de B_j deve ser inferior ou igual à 2/3 do comprimento total do piso na direção das vigas principais.

$$B_j = C_j \left(\frac{D_s}{D_j} \right)^{\frac{1}{4}} L_j \quad \text{Equação 31}$$

Se o vão das vigas principais L_g for menor que B_j ($L_g < B_j$), o modo combinado de vibração é restringido e o painel efetivamente enrijecido. Esse enrijecimento pode ser contabilizado reduzindo a deflexão das vigas primárias, Δ_g , utilizando a Equação 32, onde a relação L_g/B_j deve ser superior à 0,50 e inferior à 1,00, logo: $0,50 \leq L_g/B_j \leq 1,00$.

$$\Delta'_g = \frac{L_g}{B_j} \Delta_g \quad \text{Equação 32}$$

Por fim, a frequência fundamental do piso seguindo as recomendações do “*Design Guide 11 (AISC/2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016), é calculada com a Equação 33 se $L_g \geq B_j$ e com a Equação 34 se $L_g < B_j$.

$$f_o = 0,18 \sqrt{\frac{9.806}{\Delta_j + \Delta_g}} \quad \text{Equação 33}$$

$$f_o = 0,18 \sqrt{\frac{9.806}{\Delta_j + \Delta'_g}} \quad \text{Equação 34}$$

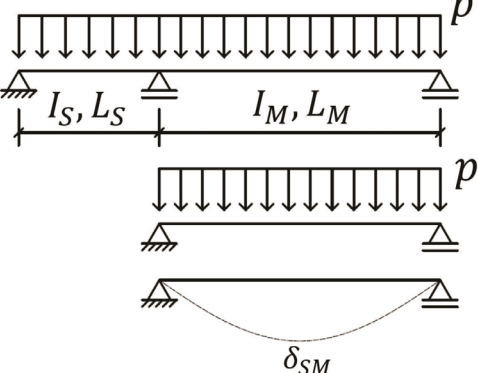
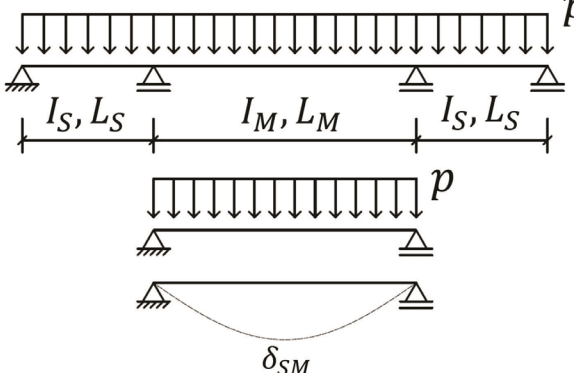
3.3 Frequência fundamental de pisos com espaçamentos irregulares entre as vigas

A frequência fundamental de um piso pode assumir valores dispersos em situações onde o espaçamento das vigas não é constante, sejam contínuas sobre os apoios ou possuam momentos de inércia significativamente diferentes em cada trecho. Nessas situações, o cálculo da frequência fundamental dos pisos ainda pode ser realizado utilizando o Método de *Dunkerley*, desde que as deflexões das vigas sejam substituídas por $\overline{\delta}_v$ (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003).

A Tabela 6 apresenta os procedimentos e recomendações para o cálculo de $\overline{\delta}_v$ para dois e três arranjos de vãos contínuos, onde todos os momentos de inércia devem ser calculados seguindo as recomendações de cada manual.

Os processos da Tabela 6 estão presentes tanto no “*Design of Floors for Vibration - SCI/P354 (2009)*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) como no “*Steel Design Guide Series 11 - Floor Vibrations Due to Human Activity – AISC (2003)*” (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003), porém, não aparecem na última versão do “*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (2016)*”.

Tabela 6 – Deflexão para dois e três vãos contínuos do *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2003* (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e o *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Dois vãos contínuos	Três vãos contínuos
	
$\bar{\delta}_v = \left(\frac{0,4 + \frac{I_M L_S}{I_S L_M} + \left(1 + 0,6 \frac{L_S^2}{L_M^2} \right)}{1 + \frac{I_M L_S}{I_S L_M}} \right) \delta_M$	$\bar{\delta}_v = \left(\frac{0,6 + 2 \frac{I_M L_S}{I_S L_M} + \left(1 + 1,2 \frac{L_S^2}{L_M^2} \right)}{3 + 2 \frac{I_M L_S}{I_S L_M}} \right) \delta_M$
<p>δ_M: deflexão devido ao peso próprio e outras cargas permanentes no maior vão L_M I_M: momento de inércia do maior vão L_M I_S: momento de inércia do(s) menor(es) vão(s) L_S</p>	

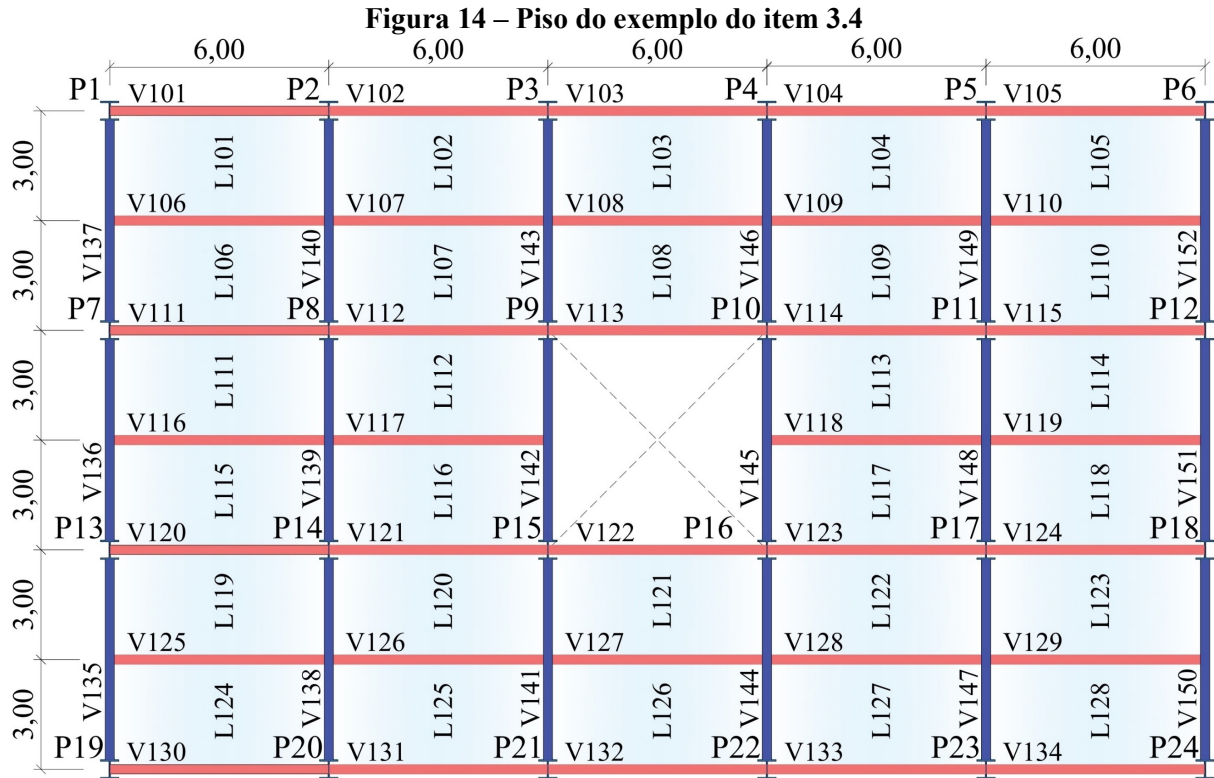
Fonte: adaptada de Murray Allen e Ungar (2003) e Smith, Hicks e Devine (2009)

3.4 Exemplo - aplicação do processo analítico do *Design of Floors for Vibration – SCI P354/2009* para determinar a frequência fundamental de um piso misto

Nesse item será apresentado um exemplo da aplicação do processo analítico presente no “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) descrito no item 3.1 para determinar a frequência fundamental do pavimento da Figura 14 composto por vigas mistas de aço e concreto e lajes maciças de concreto armado. Na Tabela 7 são apresentadas as propriedades do piso em questão, em que as vigas numeradas de V101 a V134 são as secundárias e as vigas V135 a V152 são as primárias (Figura 14).

Com o propósito de seguir as prescrições das normativas nacionais, será adotado massa específica do concreto $\rho_c = 2.548 \text{ kg/m}^3$ e módulo de elasticidade do aço $E_a = 200.000 \text{ MPa}$, diferentemente do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH;

HICKS; DEVINE, 2009), que considera a massa específica do concreto de 2.350 kg/m^3 e módulo de elasticidade do aço de 205.000 MPa .



Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 7 – Informações sobre o piso do exemplo 3.4 (material, elementos estruturais e carregamento)

Concreto C20	$E_{ci} = 22.540 \text{ MPa}$	$E_{cd} = 30.429 \text{ MPa}$	$\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$
Aço MR250	$E_a = 200.000 \text{ MPa}$	$f_y = 250 \text{ MPa}$	$f_u = 400 \text{ MPa}$
Vigas secundárias		Perfil: VS 250X21	$L = 6,0 \text{ m}$
$A_a = 26,40 \text{ cm}^2$	$I_{xa} = 2.775 \text{ cm}^4$	$d = 25,00 \text{ cm}$	$m = 20,70 \text{ kg/m}$
Vigas primárias		Perfil: VS 250X29	$b = 3,0 \text{ m}$ (duas baias)
$A_a = 36,70 \text{ cm}^2$	$I_{xa} = 4.257 \text{ cm}^4$	$d = 25,00 \text{ cm}$	$m = 28,80 \text{ kg/m}$
Ação permanente na laje		piso + revestimento: $1,50 \text{ kN/m}^2$	
Ação acidental da laje		sobrecarga de utilização: $5,00 \text{ kN/m}^2$	

Fonte: elaborada pelo autor

Na Tabela 7 o módulo de elasticidade dinâmico do concreto $E_{cd} = 30.429 \text{ MPa}$ é oriundo da majoração do $E_{ci} = 22.540 \text{ MPa}$ em 35%, uma vez que o módulo de elasticidade inicial do concreto armado $E_{ci} = 22.540 \text{ MPa}$ corresponde às prescrições da ABNT NBR 6118:2014 para concreto com $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$.

Para determinar a frequência fundamental do piso (f_0) utilizando a Equação 17, em que o valor de δ_t corresponde a deflexão total do pavimento (em milímetros) do modo de

vibração dominante (maior valor de δ_t), cujo valor pode ser obtido utilizando a Tabela 4, é necessário calcular os momentos de inércia das lajes (I_L), vigas secundárias (I_S) e vigas primárias (I_p), além do carregamento permanente distribuído do piso m_f , diretamente obtido com a Equação 18.

Para o cálculo dos momentos de inércia citados no parágrafo anterior em unidade de aço, é necessário determinar o valor de α , relativo à razão do módulo de elasticidade do aço dos perfis metálicos E_a e do módulo de elasticidade dinâmico do concreto E_{cd} . A Equação 35 mostra o cálculo de $\alpha = 6,57$.

$$\alpha = \frac{E_a}{E_{cd}} \therefore \alpha = \frac{200.000}{30.429} \therefore \alpha = 6,57 \quad \text{Equação 35}$$

Os procedimentos para determinar o momento de inércia das lajes por comprimento e unidades de aço (I_L) estão detalhados na Tabela 8, e dos momentos de inércia das vigas secundárias (I_S) e vigas primárias (I_p) são apresentados cuidadosamente na Tabela 9 e Tabela 10. Na Tabela 7 são encontradas as propriedades geométricas dos perfis metálicos e demais informações necessárias para os cálculos citados anteriormente.

Tabela 8 – Cálculo do momento de inércia das lajes do piso referentes a exemplo do item 3.4

Laje de concreto maciça		
$h_{laje} = 10cm$	$b_{laje} = 100cm$	$b_{ef} = \frac{b_{laje}}{\alpha} = \frac{100}{6,57} \therefore b_{ef} = 15,22cm$
$I_L = \frac{b_{ef} h_{laje}^3}{12} \therefore I_L = \frac{15,22 \times 10^3}{12} \times 10^{-8} \therefore I_L = 1,268 \times 10^{-5} m^4/m$		

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 9 – Momento de inércia das vigas secundárias do piso referente ao exemplo do item 3.4

Vigas mistas secundárias		
Mesa colaborante de concreto das vigas mistas secundárias		
$b \leq \begin{cases} L/4 \\ b \end{cases} \therefore b \leq \begin{cases} 6/4 = 1,5m \\ 3m \end{cases} \therefore b = 1,5m (150cm) \rightarrow \text{Logo: } b_{ef} = 150/6,57 \therefore b_{ef} = 22,83cm$		
Momento de inércia das mesas colaborantes de concreto das vigas mistas secundárias		
$I_{xc,a} = \frac{b_{ef} h^3}{12} \therefore I_{xc,a} = \frac{22,83 \times 10^3}{12} \therefore I_{xc,a} = 1.903cm^4$		
Área das mesas colaborantes de concreto/centro de gravidade		
$A_{xc,a} = b_{ef} h \therefore A_{xc,a} = 22,83 \times 10 \therefore A_{xc,a} = 228,30cm^2$ $y_{cg,ca} = h/2 \therefore y_{cg,ca} = 10/2 \therefore y_{cg,ca} = 5,00cm$		
Momento de inércia/área dos perfis metálicos	$I_{x,a} = 2.775cm^4$	$A_a = 26,4cm^2$
Centro de gravidade dos perfis metálicos		
$y_{cg,a} = h_{laje} + \frac{d}{2} \therefore y_{cg,a} = 10 + \frac{25}{2} \therefore y_{cg,a} = 22,50cm$		
Centro de gravidade das vigas mistas secundárias		
$y_{cg} = \frac{A_a y_{cg,a} + A_{xc,a} y_{cg,ca}}{A_a + A_{xc,a}} \therefore y_{cg} = \frac{26,40 \times 22,50 + 228,30 \times 5,00}{26,40 + 228,30} \therefore y_{cg} = 6,81cm$		
Momento de inércia das vigas mistas secundárias		
$I_S = I_{x,a} + A_a (y_{cg} - y_{cg,a})^2 + I_{xc,a} + A_{xc,a} (y_{cg} - y_{cg,ca})^2$ $\therefore I_S = 2.775 + 26,40 \times (6,81 - 22,50)^2 + 1.903 + 228,30 \times (6,81 - 5,00)^2$ $\therefore I_S = 11.925 cm^4/m \therefore I_S = 1,193 \times 10^{-4} m^4/m$		

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 10 – Momento de inércia das vigas primárias do piso referente ao exemplo do item 3.4

Vigas mistas primárias		
Mesa colaborante de concreto das vigas mistas primárias		
$b \leq \begin{cases} \text{vão}/4 \\ L \end{cases} \therefore b \leq \begin{cases} 6/4 = 1,5m \\ 6m \end{cases} \therefore b = 1,5m(150cm) \rightarrow \text{Logo: } b_{ef} = 150/6,57$ $\therefore b_{ef} = 22,83cm$		
Momento de inércia das mesas colaborantes de concreto das vigas mistas primárias		
$I_{xc,a} = \frac{b_{ef} h^3}{12} \therefore I_{xc,a} = \frac{22,83 \times 10^3}{12} \therefore I_{xc,a} = 1.903cm^4$		
Área da mesas colaborantes de concreto/centro de gravidade		
$A_{xc,a} = b_{ef} h \therefore A_{xc,a} = 22,83 \times 10 \therefore A_{xc,a} = 228,30cm^2$ $y_{cg,ca} = h/2 \therefore y_{cg,ca} = 10/2 \therefore y_{cg,ca} = 5,00cm$		
Momento de inércia/área do perfil metálico	$I_{x,a} = 4.257cm^4$	$A_a = 36,70cm^2$
Centro de gravidade do perfis metálicos		
$y_{cg,a} = h_{laje} + \frac{d}{2} \therefore y_{cg,a} = 10 + \frac{25}{2} \therefore y_{cg,a} = 22,50cm$		
Centro de gravidade das vigas mistas primárias		
$y_{cg} = \frac{A_a y_{cg,a} + A_{xc,a} y_{cg,ca}}{A_a + A_{xc,a}} \therefore y_{cg} = \frac{36,70 \times 22,50 + 228,30 \times 5,00}{36,70 + 228,30} \therefore y_{cg} = 7,42cm$		
Momento de inércia da vigas mistas primárias		
$I_p = I_{x,a} + A_a (y_{cg} - y_{cg,a})^2 + I_{xc,a} + A_{xc,a} (y_{cg} - y_{cg,ca})^2$ $\therefore I_p = 4.257 + 36,70 \times (7,42 - 22,50)^2 + 1.903 + 228,30 \times (7,42 - 5,00)^2$ $\therefore I_p = 15.843 cm^4/m \therefore I_p = 1,584 \times 10^{-4} m^4/m$		

Fonte: elaborada pelo autor

Determinadas as propriedades geométricas dos elementos estruturais do pavimento da Figura 14, é necessário calcular o carregamento permanente distribuído do piso m_f , utilizando a Equação 18. Porém, antes é preciso quantificar a carga permanente das lajes p_L , cujo procedimento é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 – Cálculo do carregamento permanente das lajes do exemplo em 3.4

Peso próprio	$g_{pp,laje} = h_{laje} \gamma_c \therefore g_{pp,laje} = 0,10 \times 25 \therefore g_{pp,laje} = 2,50 kN/m^2$
Revestimento	$g_{rev} = 1,50kN/m^2$
10% da carga acidental	$0,10 \times 5,00 = 0,50kN/m^2$
Carga permanente total das lajes	$p_L = 2,50 + 1,50 + 0,50 \therefore p_L = 4,50kN/m^2$ Transformando em $kg/m^2 \rightarrow p_L = \frac{4,50 \times 1.000}{g=9,81m/s^2} \therefore p_L = 458,72 kg/m^2$

Fonte: elaborada pelo autor

Sendo o peso próprio dos perfis das vigas secundárias (m_s) e primárias (m_p), respectivamente, $20,70 \text{ kg/m}$ e $28,80 \text{ kg/m}$, e de acordo com a Figura 14 que $b = 3,0\text{m}$ e $L = 6,0$, além do valor de $p_L = 458,72 \text{ kg/m}$ (calculado na Tabela 11), a carga permanente distribuída do piso é $m_f = 470,42 \text{ kg/m}^2$ (Equação 36).

$$m_f = 458,72 + \frac{20,70}{3} + \frac{28,80}{6} \therefore m_f = 470,42 \text{ kg/m}^2 \quad \text{Equação 36}$$

Por fim, sendo o módulo de elasticidade do aço $E_a = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, o carregamento distribuído do piso $m_f = 470,42 \text{ kg/m}^2$, os momentos de inércia das lajes, vigas secundárias e vigas primárias em unidades de aço, respectivamente, $I_L = 1,268 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$, $I_s = 1,193 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{m}$ e $I_p = 1,584 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{m}$, e retiradas da Figura 14, $b = 3,00\text{m}$ e $L = 6,00\text{m}$, pode-se calcular a deflexão total do piso δ_t (utilizando a Tabela 4) para os dois modos de vibrações descritos na Tabela 3. O cálculo do δ_t para os dois modos de vibração é apresentado na Tabela 12.

Tabela 12 – Cálculo da deflexão total δ_t para os modos de vibração do exemplo 3.4

Modo de vibração das vigas secundárias
$\delta_t = \frac{m_f g b}{384 E} \left(\frac{5L^4}{I_s} + \frac{b^3}{I_L} \right)$ $\delta_t = \frac{470,42 \times 9,81 \times 3}{384 \times 2 \times 10^{11}} \left(\frac{5 \times 6^4}{1,193 \times 10^{-4}} + \frac{3^3}{1,268 \times 10^{-5}} \right)$ $\therefore \delta_t = 0,0102\text{m} \therefore \delta_t = 10,20\text{mm}$
Modo de vibração das vigas primárias
$\delta_t = \frac{m_f g b}{384 E} \left(\frac{64b^3 L}{I_p} + \frac{L^4}{I_s} + \frac{b^3}{I_L} \right)$ $\delta_t = \frac{470,42 \times 9,81 \times 3}{384 \times 2 \times 10^{11}} \times \left(\frac{64 \times 3^3 \times 6}{1,584 \times 10^{-4}} + \frac{6^4}{1,193 \times 10^{-4}} + \frac{3^3}{1,268 \times 10^{-5}} \right)$ $\therefore \delta_t = 0,0141\text{m} \therefore \delta_t = 14,10\text{mm}$

Fonte: elaborada pelo autor

Como a máxima deflexão do piso entre os dois modos de vibração é $\delta_t = 14,10\text{mm}$ (Tabela 12), logo, a frequência fundamental do pavimento é $f_0 = 4,79\text{Hz}$ (Equação 37).

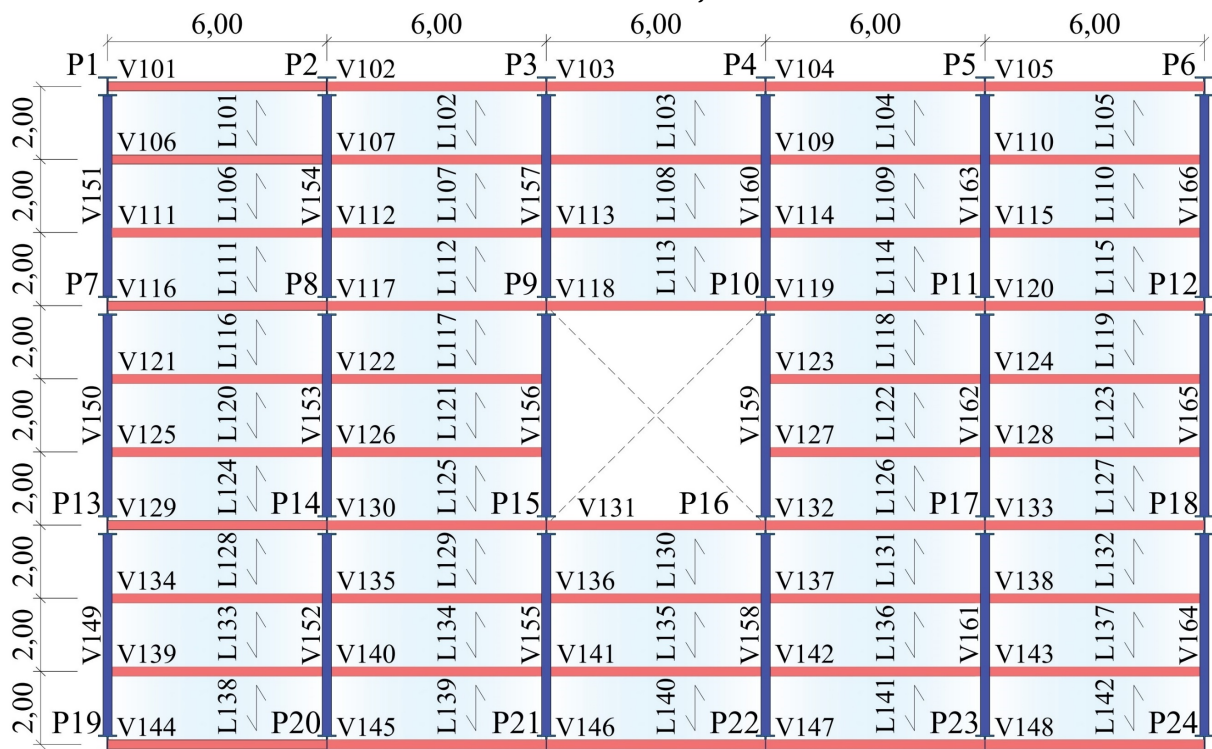
$$f_0 = \frac{18}{\sqrt{\delta_t}} \therefore f_0 = \frac{18}{\sqrt{14,10}} \therefore f_0 = 4,79\text{Hz} \quad \text{Equação 37}$$

No item 4.2.3 do Capítulo 4, a aceleração do piso desse exemplo é calculada e ele também é verificado frente aos critérios de aceitação das vibrações para atividade de caminhada do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009).

3.5 Exemplo - aplicação do processo analítico do *American Institute of Steel Construction (AISC) (2013/2016)* para determinar a frequência fundamental de um piso misto

Nesse item será apresentado um exemplo da aplicação do processo analítico presente no “*American Institute of Steel Construction (AISC) (2013/2016)*” descrito no item 3.2 para determinar a frequência fundamental do pavimento da Figura 15, composto por vigas mistas de aço e concreto e lajes mistas com forma de aço incorporada com altura total $h_t = 17,00\text{cm}$ (formas MF50 de altura $h_f = 5,00\text{cm}$ e capa de concreto com espessura $t_c = 12\text{cm}$). Na Tabela 13 são apresentadas as propriedades do piso em questão, em que as vigas numeradas de V101 a V148 são as secundárias e as vigas V149 a V166 são as primárias (Figura 15).

Figura 15 – Piso do exemplo do item 3.5 com cotas em metros (m) e lajes mistas com forma de aço MF50 com altura total de 17,0cm ($h_f = 5,0\text{cm}$ e $t_c = 12,0\text{cm}$)



Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 13 – Informações sobre o piso do exemplo 3.5 (material, elementos estruturais e carregamento)

Concreto C20			
$f_{ck} = 20MPa$	$E_{ci} = 22.540MPa$	$\gamma_c = 25 kN/m^3$	
Aço MR250 (Perfis Metálicos)			
$E_s = 200.000MPa$	$f_y = 250MPa$	$f_u = 400MPa$	
Estrutura do Pavimento (três baias)			
Vigas Secundárias			
Perfil: W360X32,9			
$A_a = 42,10 cm^2$	$I_{xa} = 8.358 cm^4$	$d = 34,90 cm$	$m_j = 33,00 kg/m$
Dimensões:			
$L_j = 6,00m = 6.000mm$	$S = 2,00m = 2.000mm$	(três baias)	
Vigas Primárias			
Perfil: W460X82			
$A_a = 104,70 cm^2$	$I_{xa} = 37.157 cm^4$	$d = 46,00 cm$	$m_g = 82,20kg/m$
Dimensões:		$L_g = 6,00m = 6.000mm$	
Esforços sobre as Lajes do Pavimento			
Ação permanente na laje		piso + revestimento: $1,50kN/m^2$	
Ação acidental da laje		sobrecarga de utilização: $5,00kN/m^2$	

Fonte: elaborada pelo autor

Para determinar a frequência fundamental do piso (f_0), inicialmente é necessário calcular os momentos das vigas secundárias (I_j) e vigas primárias (I_g). Para o cálculo dos momentos de inércia das vigas mistas em unidade de aço, é necessário determinar o valor de n , relativo à razão do módulo de elasticidade do aço dos perfis metálicos E_s e do módulo de elasticidade do concreto E_c . A Equação 38 mostra o cálculo de $n = 6,57$ (referente ao uso da Equação 21).

$$n = \frac{E_s}{1,35E_c} \therefore n = \frac{200.000}{1,35 \times 22.540} \therefore n = 6,57 \quad \text{Equação 38}$$

Os procedimentos para determinar os momentos de inércia das vigas secundárias (I_j) e vigas primárias (I_g) são apresentados, respectivamente, na Tabela 14 e Tabela 15. Na Tabela 13 são encontradas as propriedades geométricas dos perfis metálicos e demais informações necessárias para os cálculos citados anteriormente.

Tabela 14 – Momento de inércia das vigas secundárias do piso referente ao exemplo do item 3.5

Vigas mistas secundárias		
Mesa colaborante de concreto das vigas mistas secundárias		
$b_{ef,j} \leq \begin{cases} S/n \\ 0,4 \left(\frac{L_j}{n} \right) \end{cases} \therefore b_{ef,j} \leq \begin{cases} 2.000/6,57 = 304,41mm \\ 0,4 \times \left(\frac{6.000}{6,57} \right) = 365,30mm \end{cases} \therefore b_{ef,j} = 304,41mm$		
Momento de inércia das mesas colaborantes de concreto das vigas mistas secundárias		
$I_{xc,a} = \frac{b_{ef,j} (t_c)^3}{12} \therefore I_{xc,a} = \frac{304,41 \times 120^3}{12} \therefore I_{xc,a} = 43.835.040mm^4$		
Área das mesas colaborantes de concreto/centro de gravidade		
$A_{xc,a} = b_{ef} h \therefore A_{xc,a} = 304,41 \times 120 \therefore A_{xc,a} = 36.529mm^2$ $y_{cg,ca} = t_c/2 \therefore y_{cg,ca} = 120/2 \therefore y_{cg,ca} = 60mm$		
Momento de inércia/área dos perfis metálicos	$I_{x,a} = 8.358cm^4$	$A_a = 42,10cm^2$
Centro de gravidade dos perfis metálicos		
$y_{cg,a} = t_c + h_f + \frac{d}{2} \therefore y_{cg,a} = 120 + 50 + \frac{349}{2} \therefore y_{cg,a} = 345mm$		
Centro de gravidade das vigas mistas secundárias		
$y_{cg} = \frac{A_a y_{cg,a} + A_{xc,a} y_{cg,ca}}{A_a + A_{xc,a}} \therefore y_{cg} = \frac{4.210 \times 345 + 36.529 \times 60}{4.210 + 36.529} \therefore y_{cg} = 89,45mm$		
Momento de inércia das vigas mistas secundárias		
$I_j = I_{x,a} + A_a (y_{cg} - y_{cg,a})^2 + I_{xc,a} + A_{xc,a} (y_{cg} - y_{cg,ca})^2$ $\therefore I_j = 83.580.000 + 4.210 \times (89,45 - 345)^2 + 43.835.040 + 36.529 \times (89,45 - 60)^2$ $\therefore I_j = 434.034.162mm^4$		

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 15 – Momento de inércia das vigas primárias do piso referente ao exemplo do item 3.5

Vigas mistas primárias		
Mesa colaborante de concreto das vigas mistas primárias		
$b_{ef,g} \leq \begin{cases} L_j/n \\ 0,4 \left(\frac{L_g}{n} \right) \end{cases} \therefore b_{ef,g} \leq \begin{cases} 6.000/6,57 = 913,24mm \\ 0,4 \times \frac{6.000}{6,57} = 365,30mm \end{cases} \therefore b_{ef,g} = 365,30mm$		
Momento de inércia das mesas colaborantes de concreto das vigas mistas primárias		
$I_{xc,a} = \frac{b_{ef,g} \left(\frac{h_f}{2} + t_c \right)^3}{12} \therefore I_{xc,a} = \frac{365,30 \times \left(\frac{50}{2} + 120 \right)^3}{12} \therefore I_{xc,a} = 92.805.226mm^4$		
Área da mesas colaborantes de concreto/centro de gravidade		
$A_{xc,a} = b_{ef,g} \left(\frac{h_f}{2} + t_c \right) \therefore A_{xc,a} = 365,30 \times \left(\frac{50}{2} + 120 \right) \therefore A_{xc,a} = 52.969mm^2$ $y_{cg,ca} = \frac{h_f}{2} + t_c = \frac{50}{2} + 120 \therefore y_{cg,ca} = 72,50mm$		
Momento de inércia/área do perfil metálico	$I_{x,a} = 37.157cm^4$	$A_a = 104,70cm^2$
Centro de gravidade do perfis metálicos		
$y_{cg,a} = t_c + h_f + \frac{d}{2} \therefore y_{cg,a} = 120 + 50 + \frac{460}{2} \therefore y_{cg,a} = 400mm$		
Centro de gravidade das vigas mistas primárias		
$y_{cg} = \frac{A_a y_{cg,a} + A_{xc,a} y_{cg,ca}}{A_a + A_{xc,a}} \therefore y_{cg} = \frac{10470 \times 400 + 52969 \times 72,50}{10470 + 52969} \therefore y_{cg} = 126,55mm$		
Momento de inércia da vigas mistas primárias		
$I_g = I_{x,a} + A_a (y_{cg} - y_{cg,a})^2 + I_{xc,a} + A_{xc,a} (y_{cg} - y_{cg,ca})^2$ $\therefore I_g = 371.570.000 + 10.470 \times (126,55 - 400)^2 + 92.805.226 + 52.969 \times (126,55 - 72,50)^2$ $\therefore I_g = 1.402.012.224mm^4$		

Fonte: elaborada pelo autor

Determinados os momentos de inércia das vigas mistas do pavimento da Figura 15, é necessário calcular o carregamento permanente distribuído sobre as lajes piso (p_g), cujos procedimentos e demais dados são apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 – Cálculo do carregamento permanente das lajes do exemplo do item 3.5

Peso próprio	$g_{pp,laje} = 3,49 kN/m^2$ (Tabela 71)
Revestimento	$g_{rev} = 1,50kN/m^2$
10% da carga acidental	$0,10 \times 5,00 = 0,50kN/m^2$
Carga permanente total das lajes	$p_g = 3,49 + 1,50 + 0,50 \therefore p_g = 5,49kN/m^2$

Fonte: elaborada pelo autor

Após determinar a carga permanente sobre as lajes do pavimento $p_g = 5,49 \text{ kN/m}^2$ (Tabela 16), é necessário quantificar a carga permanente que solicitam as vigas secundárias (w_j) e as vigas primárias (w_g), cujos procedimentos e resultados estão apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 – Cálculo da carga permanente sobre as vigas secundárias (w_j) e primárias (w_g) do exemplo do item 3.5

Peso próprio dos perfis das vigas secundárias (m_j)	$m_j = 33,00 \text{ kg/m}$ $m_j = \frac{33,00 \times 9,81}{1.000} \therefore m_j = 0,324 \text{ kN/m}$
Carga permanente sobre as vigas secundárias (w_j) (Equação 24)	$w_j = S p_G + m_j$ $S = 2,00\text{m (Tabela 13)}$ $p_g = 5,49 \text{ kN/m (Tabela 16)}$ $\therefore w_j = 2,00 \times 5,49 + 0,324 \therefore w_j = 11,304 \text{ kN/m}$
Peso próprio dos perfis das vigas primárias (m_g)	$m_g = 82,20 \text{ kg/m}$ $m_g = \frac{82,20 \times 9,81}{1.000} \therefore m_g = 0,806 \text{ kN/m}$
Carga permanente sobre as vigas primárias (w_g) (Equação 25)	$w_g = \frac{L_j}{S} w_j + m_g$ $L_j = 6,00\text{m (Tabela 13); } S = 2,00\text{m (Tabela 13)}$ $p_g = 5,49 \text{ kN/m (Tabela 16)}$ $\therefore w_g = \frac{6,00}{2,00} \times 11,304 + 0,806 \therefore w_g = 34,718 \text{ kN/m}$

Fonte: elaborada pelo autor

Com as solicitações permanente das vigas mistas calculadas, as deflexões das vigas secundárias (Δ_j) e primárias (Δ_g) devem ser determinadas, cujos procedimentos estão na Tabela 18.

Tabela 18 – Cálculo das deflexões das vigas secundárias (Δ_j) e primárias (Δ_g) do exemplo do item 3.5

Deflexão das vigas secundárias (Δ_j)	$\Delta_j = \frac{5 w_j L_j^4}{384 E_S I_j} \text{ (Equação 27)}$ $\therefore \Delta_j = \frac{5 \times 11,304 \times 6.000^4}{384 \times 200.000 \times 434.034.162} \therefore \Delta_j = 2,197\text{mm}$
Deflexão das vigas primárias (Δ_g)	$\Delta_g = \frac{5 w_g L_g^4}{384 E_S I_g} \text{ (Equação 28)}$ $\therefore \Delta_g = \frac{5 \times 34,718 \times 6.000^4}{384 \times 200.000 \times 1.402.012.224} \therefore \Delta_g = 2,089\text{mm}$

Fonte: elaborada pelo autor

Antecedendo o cálculo da frequência fundamental do piso, é necessário verificar se a largura efetiva da parcela das vigas secundárias participante do movimento (B_j) restringe ou não o painel. Na Tabela 19 é exemplificado o procedimento para o cálculo de B_j .

Tabela 19 – Cálculo de B_j do exemplo do item 3.5

Espessura efetiva das lajes de concreto (d_e)	$d_e = t_c + \frac{h_f}{2} \text{ (Equação 26)}$ $\therefore d_e = 120 + \frac{50}{2} \therefore d_e = 145\text{mm}$
Momento de inércia das lajes por unidade de comprimento (D_s)	$D_s = \frac{(d_e)^3}{12n} \text{ (Equação 29)}$ $\therefore D_s = \frac{145^3}{12 \times 6,57} \therefore D_s = 38.669\text{mm}^3$
Momento de inércia das vigas secundárias por unidade de comprimento (D_j)	$D_j = \frac{I_j}{S} \text{ (Equação 30)}$ $\therefore D_j = \frac{434.034.162}{2.000} \therefore D_j = 217.017\text{mm}^3$
Largura efetiva da parcela das vigas secundárias que participam no movimento (B_j)	$C_j = 2,0 \text{ (item 3.2)}$ $B_j = C_j \left(\frac{D_s}{D_j} \right)^{\frac{1}{4}} L_j \text{ (Equação 31)}$ $\therefore B_j = 2,0 \times \left(\frac{38.669}{217.017} \right)^{\frac{1}{4}} \times 6,00 \therefore B_j = 7,796\text{m}$

Fonte: elaborada pelo autor

Como $L_g = 6,00\text{m} < B_j = 7,796\text{m}$ (Tabela 19), o modo combinado de vibração é restringido, e assim, deve-se reduzir o valor de Δ_g , cujos procedimentos e condições são apresentadas na Tabela 20.

Tabela 20 – Consideração do enrijecimento do painel do exemplo do item 3.5

Verificação da relação L_g/B_j	$\frac{L_g}{B_j} = \frac{6,00}{7,796} = 0,770$ $0,50 < \frac{L_g}{B_j} = 0,770 < 1,00 \text{ (ok!)}$
Cálculo da deflexão das vigas primárias reduzida (Δ'_g)	$\Delta'_g = \frac{L_g}{B_j} \Delta_g \text{ (Equação 32)}$ $\therefore \Delta'_g = \frac{6,00}{7,796} \times 2,089 \therefore \Delta'_g = 1,608\text{mm}$

Fonte: elaborada pelo autor

Como $L_g = 6,00m < B_j = 7,796m$, a frequência fundamental do piso (f_0) deve ser calculada com a Equação 34, cujo resultado é $f_0 = 9,138Hz$ (Equação 39).

$$f_0 = 0,18 \sqrt{\frac{9.806}{\Delta_j + \Delta'_g}} \therefore f_0 = 0,18 \times \sqrt{\frac{9.806}{2,197 + 1,608}} \therefore f_0 = \mathbf{9,138Hz} \quad \text{Equação 39}$$

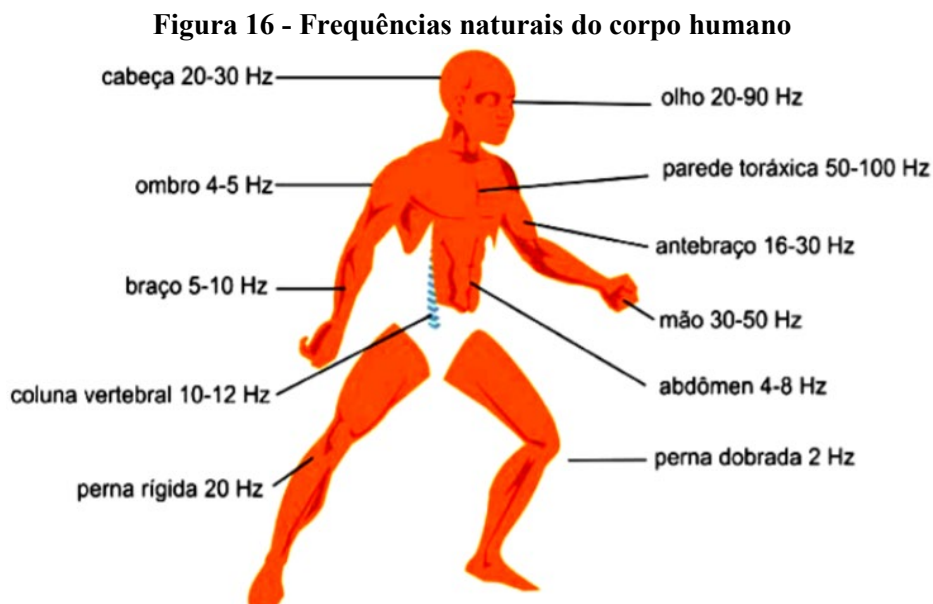
No item 4.3.5 do Capítulo 4, o piso desse exemplo é verificado frente aos critérios de aceitação das vibrações para atividade rítmica do tipo aeróbica do “*American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016), onde a aceleração do pavimento é calculada.

Capítulo 4

Critérios de aceitação das vibrações e processos analíticos para cálculo da aceleração

Determinar níveis de vibração para garantia do conforto humano é uma tarefa no mínimo complexa, uma vez que seus efeitos podem ser detectados de diversas formas. Os indivíduos podem sentir as vibrações, ouvi-las e até ter seus órgãos de equilíbrio afetados Griffin (1990) apud Silva Junior (2015). Além das diversas formas de sentir as vibrações, a sensibilidade quanto aos seus efeitos difere de um indivíduo para outro, e os principais fatores que influenciam na percepção são: posição (em pé, deitado, sentado), atividade desenvolvida pelo indivíduo, idade, humor, sexo, frequência da vibração, tempo de exposição, amplitude dos deslocamentos e amortecimento (JUNGES, 2010).

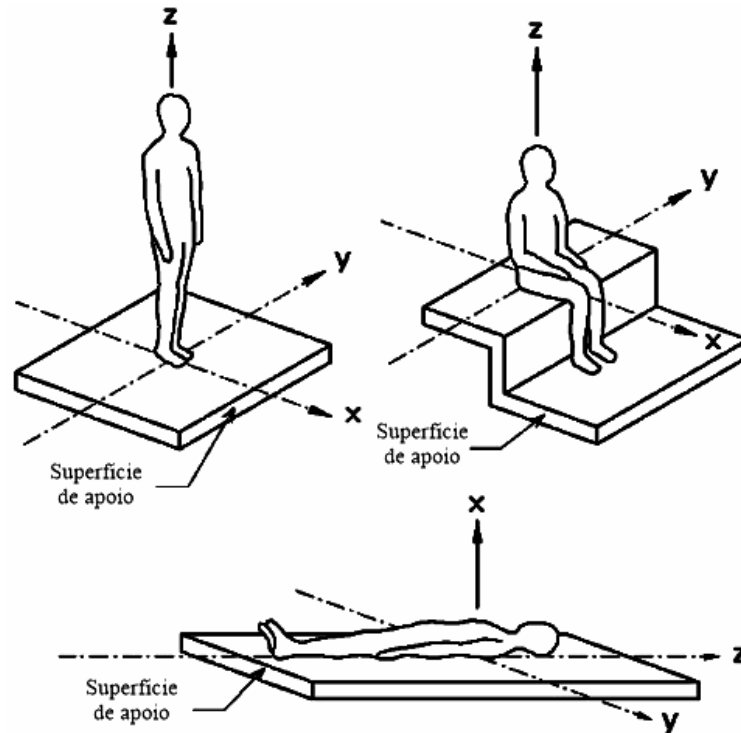
Alguns estudos apontam que o nível de amortecimento da estrutura também exerce forte influência, especialmente nos casos de vibrações transitórias, já que com o aumento do decaimento das vibrações transitórias os níveis de aceitação também são elevados. Por outro lado, entre o intervalo de 1Hz a 10Hz o desconforto gerado pelas vibrações é proporcional à aceleração do piso, pelo fato de que as partes do corpo humano possuem frequências naturais individuais, e dessa forma, apresentam níveis de sensibilidades distintos (SILVA JUNIOR, 2015). A Figura 16 mostra as frequências naturais nas diferentes partes do corpo humano.



Fonte: ISO 5349 (1986) apud Almeida (2008)

De forma semelhante a decomposição de uma força em um sistema cartesiano, as acelerações causadas pelas vibrações podem ser divididas em a_z , a_x e a_y , que respectivamente, representam as acelerações verticais (relativas ao eixo formado pelos pés e a cabeça) e por um plano formado pelos eixos a_x e a_y , as acelerações na direção das costas e peito e na direção dos braços (PINTO, 2015). A Figura 17 ilustra os eixos descritos anteriormente.

Figura 17 - Direções do sistema de coordenadas para vibrações mecânicas em seres humanos



Fonte: adaptada de Hicks e Peltonen (2015)

Para as vibrações verticais (a_z), o intervalo que os indivíduos ficam mais sensíveis aos efeitos vibratórios é entre 4Hz e 8Hz, e para as outras direções (a_x e a_y) é abaixo de 2Hz, sendo que a tolerância aos efeitos das vibrações diminui à medida que os indivíduos ficam expostos aos seus efeitos (ISO-2631/1, 1997).

4.1 Normativas Nacionais

A ABNT NBR 8800:2008 apresenta recomendações simplificadas para garantia do conforto dos usuários em pavimentos destinados a atividades rítmicas (desenvolvidas em academias de ginástica, salões de dança, ginásios e estádios de esportes), recomendando que a frequência fundamental das edificações, de forma geral, seja superior à 6Hz e maior que 8Hz quando a atividade for muito repetitiva.

Além das frequências fundamentais mínimas, a ABNT NBR 8800:2008 determina que o deslocamento vertical total do pavimento, sem considerar ações relativas ao tempo, causada pelas cargas permanentes ou carregamento relativo às combinações frequentes de serviço e admitindo vigas biapoiadas, não supere 0,90cm (quando a frequência mínima requerida é de $6H_z$) ou 0,50cm (quando a frequência fundamental exigida for de $8H_z$).

Para os pisos de escritórios, residências e similares, onde as pessoas caminham regularmente, a frequência fundamental mínima requerida é de $4H_z$, e fazendo uso das mesmas recomendações para as atividades rítmicas (citadas no parágrafo anterior), o limite do deslocamento vertical é de 2,00cm.

Já a ABNT NBR 6118:2014, prescreve que a verificação das vibrações pode ser feita em regime linear para estruturas usuais, e segue a ideia de que ao afastar a frequência fundamental (f) da frequência crítica (f_{crit}), de forma que $f \geq 1,2 f_{crit}$, a estrutura terá um comportamento satisfatório. Na ausência de valores experimentais das frequências críticas f_{crit} , podem ser adotados os valores da Tabela 21.

Tabela 21 - Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas

Caso	$f_{crit} (H_z)$
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Passarela de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5

Fonte: adaptada da ABNT NBR 6118:2014

4.2 Critérios de aceitação para caminhada do *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*

O guia “*Design of Floors for Vibration: A New Approach*” do “*The Steel Construction Institute (SCI)*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) foi publicado pela primeira vez em 1989 trazendo recomendações semente para pisos comuns, como de residências e funcionamento de escritórios. Sua última atualização foi publicada em 2009, com o objetivo de oferecer respaldo para os projetistas quantificarem os efeitos das vibrações nos pisos mistos de forma mais precisa, e avaliá-los diante da ISO 10137 (2007) e BS 6472 (1992), uma vez que seus critérios de aceitação são baseados nos fatores de multiplicação das curvas dessas normas.

Vale ressaltar que ao contrário das normas brasileiras, que verificam a aceitabilidade do pavimento somente na frequência fundamental, esse manual baseia a verificação na aceleração do pavimento, dessa forma, demais propriedades modais como a frequência fundamental são utilizadas para determinar a aceleração. Nos itens a seguir são apresentadas as etapas para verificação da aceitabilidade de um piso misto utilizando o manual mencionado.

Em praticamente todos os manuais de projeto, o processo de verificação da aceitabilidade das vibrações inicia-se calculado a frequência fundamental do pavimento, cujo procedimento analítico do manual em questão foi apresentado no item 3. Posterior ao cálculo da frequência fundamental, é necessário determinar a massa modal (item 4.2.1) e a aceleração do pavimento (item 4.2.2), para então, verificar a aceitabilidade do piso.

Para verificar a aceitabilidade do piso seguindo as prescrições do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), é necessário calcular o fator de ponderação "R" utilizando a Equação 40 (em que a aceleração $a_{w,rms}$ deve estar em m/s^2) e comparar seu resultado os valores limites da Tabela 22.

$$R = \frac{a_{w,rms}}{0,005} \quad \text{Equação 40}$$

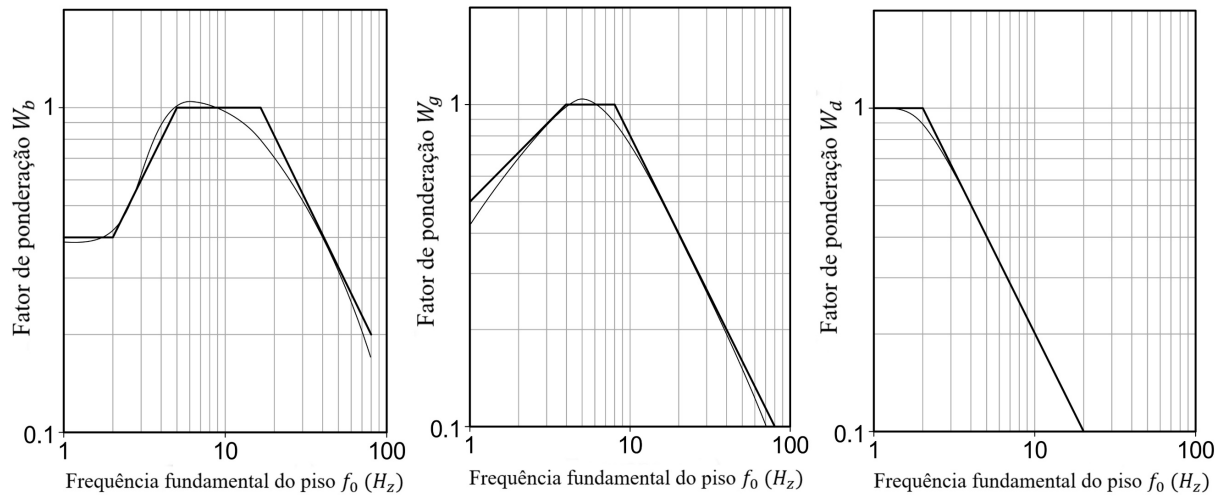
Tabela 22 - Valores do fator multiplicador R para excitação de uma única pessoa - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Local	Fator multiplicador (R)
Escritórios	8
Shoppings	4
Edifícios comerciais	4
Escadas de uso leve (ex. escritórios)	32
Escadas de uso pesado (ex. prédios públicos e estádios)	24

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Na maioria dos casos, a análise dinâmica de um piso busca reduzir ao máximo qualquer desconforto que as vibrações possam causar nos indivíduos. Para o cálculo das acelerações dos pisos utilizando as prescrições do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), são adotados os fatores de ponderação da BS 6841:1987. Inicialmente, é necessário definir a categoria do piso utilizando a Tabela 23, e posteriormente, identificar em qual curva de ponderação deverá ser determinando o fator de ponderação W (W_b , W_g ou W_d) através das curvas da Figura 18 ou analiticamente com as Equações da Tabela 24.

Figura 18 – Curva de ponderação para W_b , W_g e W_d - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)



Fonte: adaptada da BS 6841:1987

Tabela 23 – Curva de ponderação a ser utilizada para cada tipo de ocupação do piso da BS 6841:1981 - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Tipo de ocupação	Eixo de vibração	Categoria	Curva de ponderação BS 6841:1981
Áreas críticas de trabalho (como salas de cirurgia e laboratórios de precisão)	eixo z	Visão e controle das mãos	W_g
	eixos x e y	Percepção	W_d
Residências, escritórios, enfermarias, laboratórios e salas de consultoria	eixo-z	Desconforto	W_b
	eixos x e y	Desconforto	W_d
Oficinas e áreas de circulação	eixo-z	Desconforto	W_b
	eixos x e y	Desconforto	W_d

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Tabela 24 – Equações para o cálculo dos fatores de ponderação W_g , W_b e W_d - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

W_g (eixo z)	
$W_g = 0,50\sqrt{f_0}$	$1H_z < f_0 < 4H_z$
$W_g = 1,0$	$4H_z \leq f_0 \leq 8H_z$
$W_g = \frac{8}{f_0}$	$f_0 > 8H_z$
W_b (eixo z)	
$W_b = 0,40$	$1H_z < f_0 < 2H_z$
$W_b = \frac{f_0}{5}$	$2H_z \leq f_0 < 5H_z$
$W_b = 1,0$	$5H_z \leq f_0 \leq 16H_z$
$W_b = \frac{16}{f_0}$	$f_0 > 16H_z$
W_d eixos x e y	
$W_d = 1,0$	$1H_z < f_0 < 2H_z$
$W_d = \frac{1}{f_0}$	$f_0 \geq 2H_z$

Fonte: adaptada da BS 6841:1987

Um estado estacionário pode não ser alcançado se o caminhar dos indivíduos não possuir passos suficientemente curtos. Dessa forma, quando o *layout* do pavimento é conhecido e se sabe o comprimento dos corredores, tal efeito pode ser considerado na aceleração do piso " $a_{w,rms}$ ", de tal forma que o fator de ressonância acumulada " ρ " deve ser calculado com a Equação 41.

$$\rho = 1 - e^{\left(\frac{-2 \pi \zeta L_p f_p}{v}\right)} \quad \text{Equação 41}$$

Dos quais, " f_p " é a frequência do caminhar (H_z), " ζ " é o amortecimento que deve estar em decimal (Tabela 25), " L_p " é o comprimento do corredor (m) e " v " velocidade da caminhada (m/s) que pode ser calculado com a Equação 42. Quando não se conhece a frequência do caminhar, segundo o "*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*" (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), é razoável considerar $f_p = 2H_z$, relativo à um comprimento de passo de 0,75m. O comprimento do corredor " L_p " pode ser admitido como o menor lado do retângulo do piso em análise. O valor de " ρ " também pode ser encontrado utilizando a Figura 19, uma vez que suas curvas são representações da Equação 41.

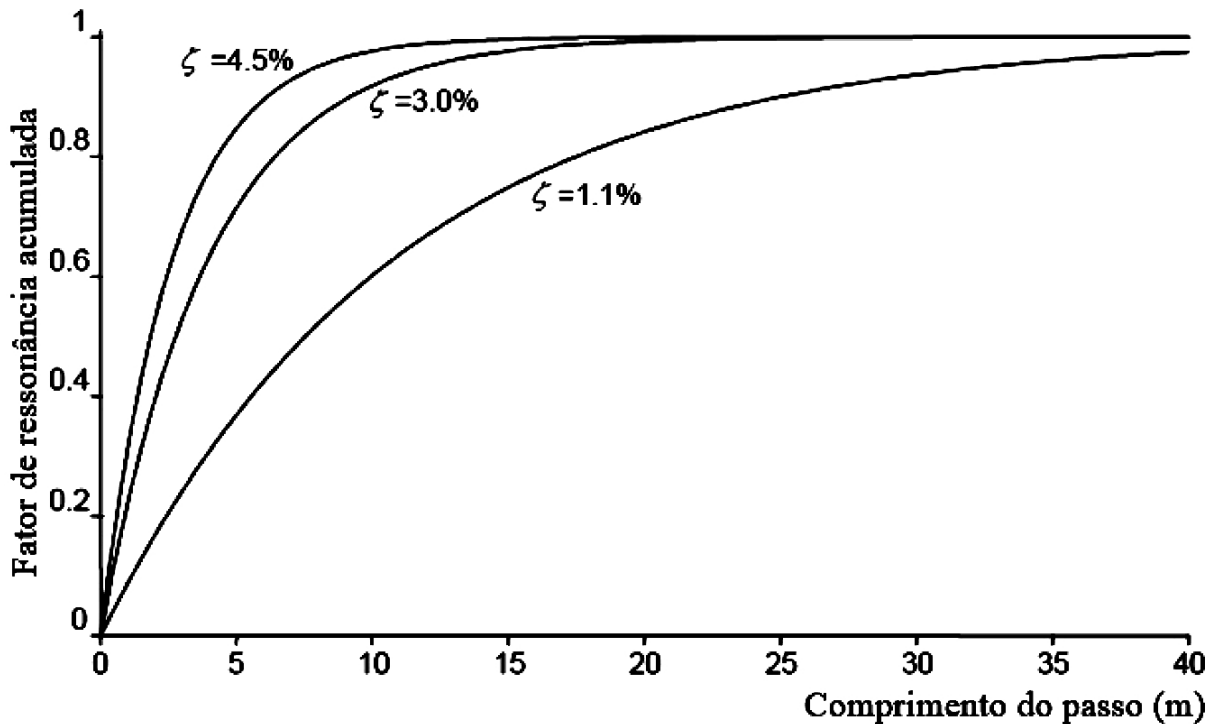
$$v = 1,67(f_p)^2 - 4,83f_p + 4,50 \quad 1,7H_z \leq f_p \leq 2,4H_z \quad \text{Equação 42}$$

Tabela 25 – Taxa de amortecimento ξ para cada tipo de piso - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

ξ	Acabamento do piso
0,50%	Estruturas de aço totalmente soldadas
1,10%	Pisos nus ou com pequena quantidade de móveis
3,00%	Pisos equipados ou com mobília em uso normal
4,50%	Pisos que se tem garantia que estejam instaladas partições devidamente localizadas a fim de interromper modos de vibração relevantes

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Figura 19 – Fator de ressonância acumulada em função do comprimento do passo e taxa de amortecimento ξ - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)



Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

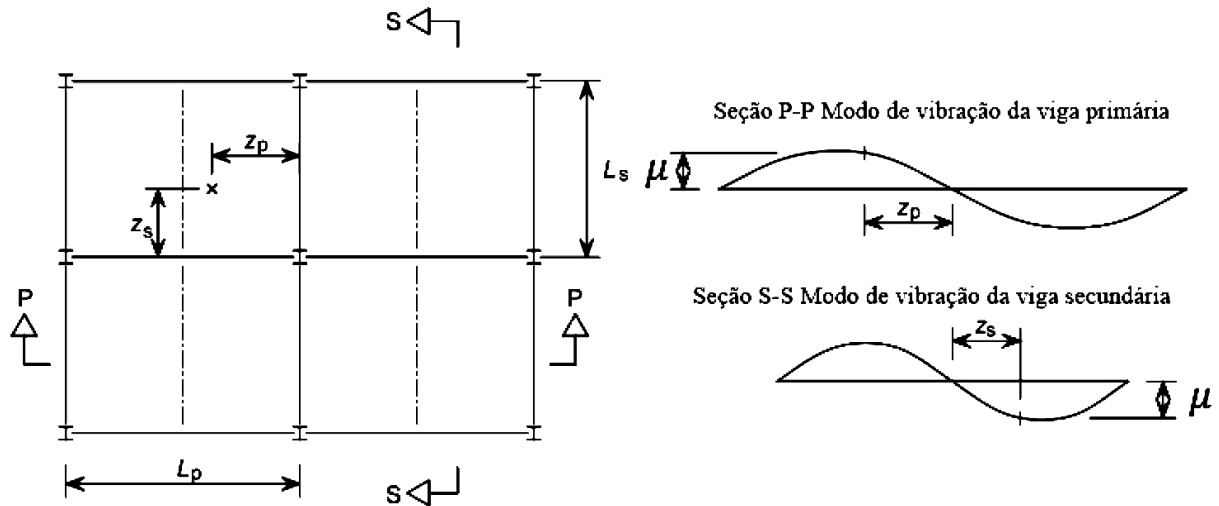
Também é necessário definir fatores de modos de vibrações, que assumem valores sinusoidais ao longo das vigas e lajes, e que podem ser calculados com a Equação 43.

$$\mu_e \text{ ou } \mu_r = \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) \quad \text{Equação 43}$$

Dos quais " μ_e " e " μ_r " são, respectivamente, fatores de modos nos pontos de excitação e nos pontos de resposta, " z " é a distância do ponto de excitação mais próximo da viga na direção " y " para o modo da viga secundária e na direção " x " para o modo das vigas primárias

(m), " L " é " L_y " para o modo das vigas secundárias (m) e " L_x " para o modo da viga primária (m), apresentados na Figura 20. Se os pontos de excitação e respostas forem desconhecidos ou se deseja obter uma resposta para todo o piso, pode-se admitir de forma conservadora que " $\mu_e = \mu_r = 1$ ".

Figura 20 – Fatores de modo de vibração - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)



Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

4.2.1 Massa modal – *Design of Floors for Vibration - SCI P354 (2009)*

A massa modal " M " (kg), em linhas gerais, é a massa do piso que participa da vibração e pode ser calculada com a Equação 44, onde o comprimento efetivo do piso " L_{eff} " (m) e a largura efetiva do piso " S " (m) são determinados com as Equações e recomendações da Tabela 26. Na Equação 44, " m_f " é referente ao carregamento permanente distribuído no piso citado no item 3.1 (cujo cálculo é realizado utilizando a Equação 18) e deve ser expresso em " kg/m^2 ".

$$M = m_f L_{eff} S$$

Equação 44

Tabela 26 – Procedimental para o cálculo de L_{eff} e S - *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)*

$L_{eff} = 1,09(1,10)^{n_y-1} \left(\frac{EI_S}{m_f b f_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq n_y L_y$	$n_y \leq 4$ é a quantidade de espaçamentos na direção das vigas secundárias; b (m) é o espaçamento entre as vigas secundárias; L_y (m) o vão das vigas secundárias;
$S = \eta(1,15)^{n_x-1} \left(\frac{EI_L}{m_f f_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq n_x L_x$	$n_x \leq 4$ é a quantidade de espaçamentos na direção das vigas primárias; L_x (m) é o vão das vigas primárias; η é um fator que considera a frequência fundamental do piso f_0 (Tabela 27);
<p>I_S: momento de inércia das vigas mistas secundárias em unidades de aço expresso em "m^4/m" (como definido no item 3.1 para o cálculo da frequência fundamental "f_0");</p> <p>I_L: momento de inércia das lajes em unidades de aço expresso em "m^4/m" (como definido no item 3.1 para o cálculo da frequência fundamental "f_0");</p> <p>E: módulo de elasticidade do aço expresso em "N/m^2" ($E = 2 \times 10^{11} N/m^2$);</p> <p>$m_f$: carregamento permanente distribuído no piso citado no item 3.1 (cujo cálculo é realizado utilizando a Equação 18) e deve ser expresso em "kg/m^2";</p> <p>f_0: frequência fundamental do piso em "H_z" (calculado utilizando a Equação 17 conforme definido no item 3.1).</p>	

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

Tabela 27 – Fator de frequência η Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Frequência fundamental do piso (f_0)	η
$f_0 < 5\text{Hz}$	0,50
$5\text{Hz} \leq f_0 \leq 6\text{Hz}$	$0,21 f_0 - 0,55$
$f_0 > 6\text{Hz}$	0,71

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

4.2.2 Aceleração do piso (caminhada) – Design of Floors for Vibration – SCI P354 (2009)

O cálculo para aceleração do piso " $a_{w,rms}$ " (m/s^2) é realizado de acordo com a frequência fundamental do piso (f_0). São classificados como pisos de baixa frequência aqueles que possuem frequências fundamentais entre $3H_z$ e $10H_z$, e de alta frequência aqueles que possuem frequências fundamentais superior à $10H_z$. A Tabela 28 mostra as Equações para o cálculo da aceleração do piso " $a_{w,rms}$ " para ambas as categorias.

Tabela 28 – Cálculo da aceleração para pisos de baixa e alta frequência - Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)

Pisos com baixa frequência fundamental		Pisos com alta frequência fundamental	
$3H_z \leq f_0 \leq 10H_z$		$f_0 > 10H_z$	
$a_{w,rms} = \mu_e \mu_r \frac{0,1Q}{2\sqrt{2}M\zeta} W\rho$		$a_{w,rms} = 2\pi\mu_e \mu_r \frac{185}{Mf_0^{0,3}} \frac{Q}{700\sqrt{2}} W$	
Q é o peso de uma pessoa, normalmente considerado 746N ($76\text{ kg} \times 9,81\text{m/s}^2$)			
M (Tabela 26 em kg)	ζ (Tabela 25 em decimal)	ρ (Equação 41)	
μ_e e μ_r definido em 4.2 ($\mu_e = \mu_r = 1$)		W definido em 4.2.1	

Fonte: adaptada de Smith, Hicks e Devine (2009)

4.2.3 Exemplo - aplicação dos critérios de aceitação do *Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009* no piso do item 3.4

Será utilizado o mesmo pavimento do exemplo do item 3.4 para exemplificar a aplicação dos critérios de aceitabilidade do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), cuja frequência fundamental determinada analiticamente é $f_0 = 4,79\text{Hz}$ (Equação 37).

Para calcular a massa modal do piso (M) utilizando a Equação 44, previamente é necessário determinar o fator de frequência, que de acordo com a Tabela 27, $\eta = 0,50$. Além do fator de frequência, necessita-se determinar L_{eff} e S com uso da Tabela 26 em que $n_x = 3$ e $n_y = 4$ (piso da Figura 14). Na Tabela 29 é apresentado o cálculo de $L_{eff} = 7,56\text{m}$ e $S = 2,59\text{m}$, utilizando as propriedades do piso encontradas no exemplo do item 3.4.

Tabela 29 – Cálculo de L_{eff} e S para determinar a massa modal M do exemplo em 3.4 e 4.2.3

$L_{eff} = 1,09(1,10)^{n_y-1} \left(\frac{EI_S}{m_f b f_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq n_y L_y$ $L_{eff} = 1,09(1,10)^{4-1} \left(\frac{2 \times 10^{11} \times 1,193 \times 10^{-4}}{470,42 \times 3 \times 4,79^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq 4 \times 6 \therefore 7,56 < 24 \therefore L_{eff} = 7,56\text{m}$
$S = \eta(1,15)^{n_x-1} \left(\frac{EI_L}{m_f f_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq n_x L_x$ $S = 0,50 \times (1,15)^{3-1} \left(\frac{2 \times 10^{11} \times 1,268 \times 10^{-5}}{470,42 \times 4,79^2} \right)^{\frac{1}{4}} \leq 3 \times 6 \therefore 2,59 < 18 \therefore S = 2,59\text{m}$

Fonte: elaborada pelo autor

Fazendo uso da Equação 44, é possível determinar a massa modal $M = 9.211\text{kg}$ (Equação 45).

$$M = m_f L_{eff} S \therefore M = 470,42 \times 7,56 \times 2,59 \therefore M = 9.211\text{kg} \quad \text{Equação 45}$$

Antes de determinar a aceleração do piso, necessita-se calcular o fator de ressonância acumulada ρ apresentado em 4.2, em que todo o processo é apresentado na Tabela 30, onde é adotado como frequência do passo $f_p = 2\text{Hz}$, comprimento do corredor $L_p = 18\text{m}$ (Figura 14) e a taxa de amortecimento ξ será admitida como sendo de 4,50% (Tabela 25).

Tabela 30 – Cálculo do fator de frequência acumulada (ρ) do exemplo em 3.4 e 4.2.3

$f_p = 2H_z$	$v = 1,67f_p^2 - 4,83f_p + 4,50$	(Equação 42)	$L_p = 18m$	$\xi = 4,50\% = 0,045$
	$v = 1,67 \times 2^2 - 4,83 \times 2 + 4,50 \therefore v = 1,52 \text{ m/s}$			
$\rho = 1 - e^{\left(\frac{-2 \pi \zeta L_p f_p}{v}\right)}$				(Equação 41)
$\rho = 1 - e^{\left(\frac{-2 \times \pi \times 0,045 \times 18 \times 2}{1,52}\right)} \therefore \rho \cong 1,00$				

Fonte: elaborada pelo autor

Para o cálculo da aceleração do piso é necessário verificar quais fatores de ponderação devem ser analisados. No caso de escritório, a Tabela 23 determina que devem ser determinados os valores de W_b e W_d , respectivamente, referentes ao desconforto no eixo z e desconforto em relação aos eixos x e y. Esses valores podem ser calculados com uso da Tabela 24, onde seguindo as suas orientações para $f_0 = 4,79H_z$, $W_b = 0,96$ e $W_d = 0,21$. Por fim, antes do cálculo das acelerações do piso propriamente dito, os fatores de modo de vibração são admitidos como $\mu_e = \mu_r = 1,0$ (item 4.2).

A aceleração do piso para a direção z é $a_{w,rms(z)} = 61,09 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ (Equação 46) e para as direções x e y é $a_{w,rms(x,y)} = 13,36 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ (Equação 47) utilizando a Equação para pisos com baixas frequências da Tabela 28 e considerando $Q = 746N$, $M = 9.211kg$, $\zeta = 0,045$, $\mu_e = \mu_r = 1,0$ e $W = 0,96$ para aceleração no eixo z e $W = 0,21$ para acelerações para os eixos x e y.

$$a_{w,rms(z)} = 1 \times 1 \times \frac{0,1 \times 746}{2 \times \sqrt{2} \times 9.211 \times 0,045} \times 0,96 \times 1,00 \quad \text{Equação 46}$$

$$\therefore a_{w,rms(z)} = 61,09 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

$$a_{w,rms(x,y)} = 1 \times 1 \times \frac{0,1 \times 746}{2 \times \sqrt{2} \times 9.211 \times 0,045} \times 0,21 \times 1,00 \quad \text{Equação 47}$$

$$\therefore a_{w,rms(x,y)} = 13,36 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Por fim, para verificar a aceitabilidade do piso seguindo as prescrições do “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), é necessário calcular o fator de ponderação R utilizando a Equação 40 e comparando seu resultado o valor limite da Tabela 22. Para o piso desse exemplo o fator de ponderação é $R = 12,218$ (Equação 48) superior ao limite de $R = 9$ referente à pisos de escritórios como mostra a Tabela 22. Dessa forma, o piso não passa nos critérios de aceitação.

$$R = \frac{61,09 \times 10^{-3}}{0,005} \therefore R = 12,218 \quad \text{Equação 48}$$

Verificando a aceitabilidade do piso perante as normativas nacionais apresentadas no item 0 de acordo com a ABNT NBR 8800:2008, o pavimento é aceitável, já que a norma estipula frequência fundamental mínima de $4H_z$ e deflexão máxima de $2,0cm$ para pisos destinados à escritório, e perante a ABNT NBR 6118:2014 o piso também estaria aceitável, posto que nessa norma é recomendável que a frequência fundamental do pavimento seja $1,2 f_{crit}$, uma vez que para escritório $f_{crit} = 4H_z$ (Tabela 21), a frequência fundamental mínima do pavimento deve ser $f_0 = 4,80H_z$, valor muito próximo ao de $f_0 = 4,79H_z$ (Equação 37).

A Tabela 31 apresenta de forma sucinta os critérios de aceitação e valores de referência para avaliação da aceitabilidade do pavimento, diante dos critérios do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 6118:2014.

Tabela 31 – Aceitabilidade do pavimento do item 4.2.3

SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)	ABNT NBR 8800:2008	ABNT NBR 6118:2014
$R_{limite} = 9,0$ $R = 12,22$ $R > R_{limite}(\text{não ok})$	$\delta_{m\acute{a}x} = 2,0cm$ $\delta = 1,41cm$ $f_{0,min} = 4,0H_z$ $f_0 = 4,79H_z$ $\delta < \delta_{m\acute{a}x} (ok)$ $f_0 > f_{0,min} (ok)$	$f_{crit} = 4H_z$ $1,2 f_{crit} = 4,80H_z$ $f_0 = 4,79H_z$ $f_0 \cong 1,2 f_{crit} (ok)$
Não aceitável	Aceitável	Aceitável

Fonte: elaborada pelo autor

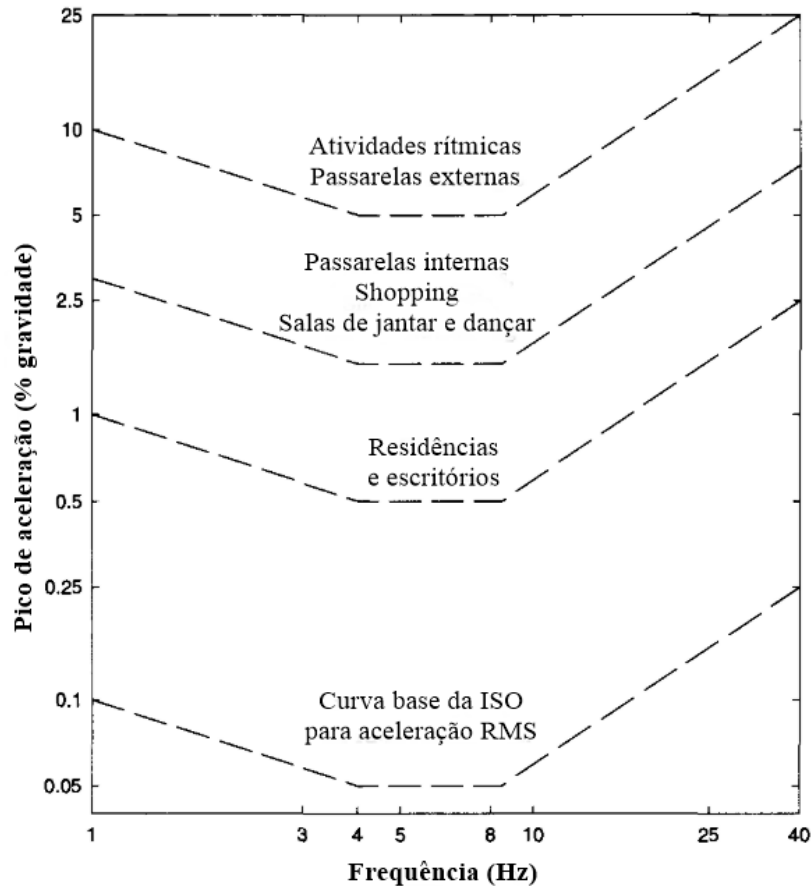
4.3 Critérios de aceitação do *American Institute of Steel Construction (AISC) (2003/2016)*

Os Guias de Projetos “*Steel Design Guide Series*” fazem parte de uma série manuais do “*American Institute of Steel Construction (AISC)*” acerca de projetos de estruturas em aço. A primeira publicação do “*Steel Design Guide Series 11*” foi realizada em 1997, segunda reimpressão em 2003 (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e última atualização em 2016 (MURRAY *et al.*, 2016). Os manuais com numeração 11 trazem os princípios básico e apresentam ferramentas analíticas simples para a verificação da aceitabilidade das vibrações causadas por atividades humanas em passarelas, escadas e pisos.

Os manuais oferecem uma análise modal baseada nas amplitudes máximas das acelerações induzidas por atividades humanas comparadas com os limites das curvas da ISO 2631/2 (1989) (Figura 21), que indicam a eminência da percepção humana ajustadas com os tipos de ocupações. Uma das principais diferenças entre o manual publicado em 1997 e 2003, são que os critérios de aceitação das vibrações induzidas por atividades humanas de caminhada possuem maior grau de complexidade em comparação com a versão anterior, a fim de oferecer uma maior gama de aplicabilidade e resultar na concepção de pisos mais econômicos. Quanto as diferenças da publicação de 2003 (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e 2016 (MURRAY *et al.*, 2016), uma delas é que a última versão oferece prescrições quanto ao uso do método dos elementos finitos (MEF) para situações em que não se tem aplicabilidade dos processos analíticos, entre demais atualizações.

Semelhante ao manual “*Design of Floors for Vibration - SCI P354/2009*” (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) apresentado no item 4.2, o processo de verificação do “*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016) e do “*Steel Design Guide Series 11 - Floor Vibrations Due to Human Activity (2003)*” (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003), iniciam-se calculado a frequência fundamental do pavimento, cujo procedimento analítico dos manuais em questão foi apresentado no item 3.2. Posteriormente, a determinação da massa modal e a aceleração do pavimento, para então, verificar a aceitabilidade do piso. Vale ressaltar que não existem diferenças para o cálculo da massa modal (4.3.1), porém, há divergências para o cálculo da aceleração dos pisos entre as duas últimas versões do “*Steel Design Guide Series 11 - AISC*”, referentes as publicações de 2003 (item 4.3.2) (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e 2016 (item 4.3.3) (MURRAY *et al.*, 2016).

Figura 21 - Amplitude máxima das acelerações recomendadas para o conforto humano de vibrações oriundas do caminhar humano



Fonte: adaptada de Murray, Allen e Ungar (2003)

4.3.1 Massa modal - American Institute of Steel Construction (AISC) (2003/2016)

Ressaltando que não há diferenças entre os manuais de 2003 (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e 2016 (MURRAY *et al.*, 2016). De acordo com o “*Design Guide 11 (AISC)*”, para pisos mistos de aço e concreto com espaçamento constante entre as vigas, antecedendo o cálculo da massa modal (W), é necessário determinar outros parâmetros. Sendo o primeiro deles, o momento de inércia transformado por unidade de comprimento das vigas principais internas “ D_g ” (mm^3), calculado com a Equação 49, e para as vigas principais de borda com a Equação 50 (para aplicação direta das Equações citadas anteriormente para obtenção de “ D_g ” em “ mm^3 ” e “ I_g ” deve estar em “ mm^4 ” e “ L_j ” em “ mm ”).

$$D_g = \frac{I_g}{L_j}$$

Equação 49

$$D_g = \frac{2I_g}{L_j} \quad \text{Equação 50}$$

A largura efetiva da parcela das vigas secundárias dos painéis que participam do movimento, B_j , é determinada utilizando a Equação 31, cujas observações estão no item 3.2.

Quanto ao cálculo da largura da efetiva da parcela das vigas principais dos painéis que participam do movimento, B_g expressa em metros (m), é realizado com a Equação 51 (situação que " L_g " deve estar em metros (m) para obter " B_g " na mesma unidade), em que $C_g = 1,6$ para vigas principais que suportam vigas secundárias conectadas pelas mesas do perfil (vigas secundárias contínuas sobre as principais) e $C_g = 1,8$ quando a ligação é realizada pela alma (vigas secundárias rotuladas). O valor de B_g deve ser inferior ou igual à 2/3 do comprimento total do piso na direção das vigas secundárias. Costumeiramente em projetos $C_g = 1,8$.

$$B_g = C_g \left(\frac{D_j}{D_g} \right)^{\frac{1}{4}} L_g \quad \text{Equação 51}$$

Posteriormente, é necessário determinar o valor do peso efetivo dos painéis das vigas secundárias W_j (Equação 52) e das vigas principais W_g (Equação 53), ambos em "kN". Quando as vigas secundárias ou principais são contínuas sobre os apoios e um vão possui mais de 70% do comprimento do trecho adjacente, o peso efetivo dos painéis, W_j ou W_g , podem ser majorados em 50%. Essa majoração também se aplica às ligações rotuladas entre as vigas secundárias e principais (ligação pela alma), mas não às vigas conectadas somente pela mesa superior e as às vigas principais ligadas diretamente aos pilares. Usualmente, somente " W_j " é majorado em 50%.

Para que " W_j " (Equação 52) e " W_g " (Equação 53) possua resultado direto na unidade desejada (kN), deve-se adotar as seguintes unidades para as demais variáveis:

- " w_j " (Equação 24) e " w_g " (Equação 25) em "kN/m";
- " S ", " B_j ", " B_g ", " L_j " e " L_g " em metros (m), cujas definições não citadas nesse item são apresentadas na Tabela 5.

$$W_j = \frac{w_j}{S} B_j L_j \quad \text{Equação 52}$$

$$W_g = \frac{w_g}{L_j} B_g L_g \quad \text{Equação 53}$$

Por fim, a massa modal W (kN), de acordo com o manual “*Design Guide 11 (AISC)*” das versões de 2003 (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003) e 2016 (MURRAY *et al.*, 2016), é calculada utilizando a Equação 54 (para a situação em que $L_g \geq B_j$) e com a Equação 55 (para situação onde $L_g < B_j$).

$$W = \frac{\Delta_j}{\Delta_j + \Delta_g} W_j + \frac{\Delta_g}{\Delta_j + \Delta_g} W_g \quad \text{Equação 54}$$

$$W = \frac{\Delta_j}{\Delta_j + \Delta'_g} W_j + \frac{\Delta'_g}{\Delta_j + \Delta'_g} W_g \quad \text{Equação 55}$$

4.3.2 Aceleração do piso (caminhada) - American Institute of Steel Construction (AISC) (2003)

A seguir é apresentado o procedimento para o cálculo da aceleração dos pisos de acordo com o “*Steel Design Guide Series 11 - Floor Vibrations Due to Human Activity (2003)*” (MURRAY; ALLEN; UNGAR, 2003). Utilizando a Equação 56 é possível determinar o valor da aceleração de piso para a caminhada humana.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_o \exp(-0,35f_n)}{\beta W} \leq \frac{a_o}{g} \quad \text{Equação 56}$$

Dos quais, a_p/g é a razão entre a aceleração do piso e a aceleração da gravidade, “ a_o/g ” é o percentual da aceleração da gravidade limite recomendada pelas curvas (Figura 21) ou Tabela 32, “ f_n ” a frequência fundamental do piso ou passarela (H_z), “ P_o ” a carga concentrada (Tabela 32), “ β ” o coeficiente de amortecimento modal (Tabela 32) e “ W ” a massa modal do piso ou passarela (kN) (Equação 54 ou Equação 55).

Tabela 32 – Valores recomendados dos parâmetros da Equação 56

Local	Força constante P_o (kN)	Taxa de amortecimento (β)	Aceleração limite $a_o/g \times 100$ (%)
Escritórios, residências e igrejas	0,29	0,02-0,05*	0,50%
Shopping	0,29	0,02	1,50%
Passarelas internas	0,41	0,01	1,50%
Passarelas externas	0,41	0,01	5,00%
*0,02 pisos com poucos componentes não estruturais (tetos, dutos, divisórias etc.) que podem ocorrer em áreas de trabalho abertas e igrejas; 0,03 pisos com componentes e móveis não estruturais, mas apenas com pequenas divisórias desmontáveis, típicas de muitas áreas modulares de escritório; 0,05 para divisórias de altura total entre os pisos			

Fonte: adaptada de Murray, Allen e Ungar (2003)

4.3.3 Aceleração do piso (caminhada) - *American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)*

A seguir são apresentados os procedimentos para o cálculo da aceleração dos pisos de acordo com o “*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (2016)*” (MURRAY *et al.*, 2016). Utilizando a Equação 57 é possível determinar o valor da aceleração dos pisos para a caminhada humana em pisos de baixa frequência ($f_n \leq 9,0H_z$).

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_o \exp(-0,35f_n)}{\beta W} \leq \frac{a_o}{g} \quad \text{Equação 57}$$

Dos quais, " a_p/g " é a razão entre a aceleração do piso e a aceleração da gravidade, " a_o/g " é o percentual da aceleração da gravidade limite recomendada pelas curvas (Figura 21) ou valores da Tabela 33, " f_n " a frequência fundamental do piso (H_z), " P_o " a carga concentrada que pode ser admitida como $0,2891kN$, " β " o coeficiente de amortecimento modal (Tabela 34) e " W " é a massa modal do piso (kN) (Equação 54 ou Equação 55). Na Tabela 34, as recomendações quando aos componentes de escritórios modernos e convencionais foram extraídos de Ribeiro (2017b).

Tabela 33 – Valores limites das acelerações oriundas da caminhada humana para aceitação das vibrações em pisos de edifícios para a Equação 57 - *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2016* (MURRAY *et al.*, 2016)

Tipo de ocupação	Aceleração limite $\left[a_o/g \times 100(\%) \right]$
Escritórios, residências, igrejas, escolas e áreas calmas	0,50%
Shopping	1,50%

Fonte: adaptada de Murray *et al.*, (2016)

Tabela 34 – Valores recomendados para o amortecimento (β) para a Equação 57 - *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2016* (MURRAY *et al.*, 2016)

Componente	Taxa de amortecimento (β)
Sistema estrutural	0,01
Forros e dutos	0,01
Componentes de escritórios modernos*	0,005
Componentes de escritórios convencionais**	0,01
Igrejas, escolas e shoppings	0
Divisórias de <i>dry wall</i> com altura de total do pavimento	0,02 – 0,05***
<p>* Escritório onde os papéis e livros são substituídos por equipamentos eletrônicos, estações de trabalho amplamente espaçadas e com poucas mesas e partições desmontáveis; ** Escritórios com mobílias grandes, armários com livros e com partições desmontáveis; *** de acordo com a quantidade de partições por quatro de piso, quando próximas ao centro maior amortecimento</p> <p>Obs: quando o piso apresenta mais de um dos componentes, o amortecimento β deve ser o valor da somatória do amortecimento relativo a cada componente.</p>	

Fonte: adaptada de Murray *et al.*, (2016)

4.3.4 Aceleração do piso (atividades rítmicas) - *American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)*

O manual "*Steel Design Guide Series 11: Vibrations of Steel-Framed Structural Systems Due to Human Activity (2016)*" (MURRAY *et al.*, 2016) oferece procedimentos para o cálculo da aceleração de pisos mistos que suportam multidão, atividades aeróbicas e dança. As recomendações presentes no manual afirmam que o pavimento é aceito se a taxa de aceleração de pico do piso " a_p/g " não exceder as taxas de acelerações de pico limites " a_o/g " da Tabela 36 para cada tipo de atividade rítmica descrita.

Para determinar a taxa de aceleração de pico máxima do pavimento " a_p/g " (Equação 58) deve-se combinar as taxas de acelerações de pico do piso para cada harmônico " $a_{p,i}/g$ " (Equação 59), onde " g " é a aceleração da gravidade ($9,81 m/s^2$). Na Tabela 35 são apresentados os parâmetros presentes nas Equações citadas anteriormente.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{[\sum (a_{p,i})^{1,5}]^{\frac{1}{1,5}}}{g} \leq \frac{a_o}{g} \quad \text{Equação 58}$$

$$\frac{a_{p,i}}{g} = \frac{1,3 \alpha_i (w_p/w_t)}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_0}{if_{step}}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2\beta f_0}{if_{step}}\right)^2}} \quad \text{Equação 59}$$

$$w_t = p_g + \frac{m_g}{L_j} + \frac{m_j}{S} + w_p \quad \text{Equação 60}$$

Tabela 35 – Parâmetros da Equação 58 e Equação 59

Parâmetros	Definição
i	Número do harmônico
α_i	Coefficiente dinâmico para cada harmônico (Tabela 37)
$if_{step} (Hz)$	Frequência da vibração forçada da atividade rítmica relativa ao harmônico i (Tabela 37)
$f_0 (Hz)$	Frequência fundamental (Equação 33 ou Equação 34)
β	Coefficiente de amortecimento (geralmente considera-se $\beta = 0,06$ para atividades rítmicas)
$w_p (kN/m^2)$	Peso próprio dos participantes da atividade por unidade de área (Tabela 37)
$w_t (kN/m^2)$ (Equação 60)	Carga distribuída do piso (peso próprio, sobrecarga) somada com a carga distribuída dos participantes (w_p)
Observação: Os parâmetros da Equação 60 estão descritos na Tabela 5	

Fonte: adaptada de Murray *et al.*, (2016)

Tabela 36 – Limites de aceleração para atividades rítmicas em edifícios - *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2016* (MURRAY *et al.*, 2016)

Ocupação afetada	Aceleração limite $\left[\frac{a_o}{g} \times 100\right](\%)$
Escritórios e residências	0,5 (0,049 m/s ²)
Jantar	1,5 - 2,5 (0,147 m/s ² - 0,245 m/s ²)
Academia	1,5 - 2,5 (0,147 m/s ² - 0,245 m/s ²)
Somente atividades rítmicas	4 - 7 (0,392 m/s ² - 0,686 m/s ²)

Fonte: adaptada de Murray *et al.*, (2016)

Tabela 37 – Parâmetros de carregamento dinâmico para atividades rítmicas - *Steel Design Guide Series 11 - AISC/2016 (MURRAY et al., 2016)*

Atividade	Frequência do harmônico $if_{step} (H_z)$	Peso próprio dos participantes $w_p (kN/m^2)$	Coefficiente dinâmico α_i
Dança			
Primeiro harmônico	1,50 – 2,70	0,60	0,50
Segundo harmônico	3,00 – 5,40		0,05
Apresentação (acentos fixos)			
Primeiro harmônico	1,50 – 2,70	1,50	0,25
Segundo harmônico	3,00 – 5,40		0,05
Aeróbica			
Primeiro harmônico	2,00 – 2,75	0,20	1,50
Segundo harmônico	4,00 – 5,50		0,60
Terceiro harmônico	6,00 – 8,25		0,10

Fonte: adaptada de Murray et al., (2016)

4.3.5 Exemplo - aplicação dos critérios de aceitação para atividade rítmica do tipo aeróbica do “*American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)*” no piso do item 3.5

Será utilizado o mesmo pavimento do exemplo do item 3.5 para exemplificar a aplicação dos critérios de aceitabilidade do “*American Institute of Steel Construction (AISC) (2016)*” (MURRAY et al., 2016) para determinar a taxa de aceleração de pico de atividade rítmica aeróbica, cujo valor da frequência fundamental determinada analiticamente do piso em questão é $f_0 = 9,138H_z$ (Equação 39).

Para calcular a taxa de aceleração de pico (a_p/g) de um piso misto de aço e concreto seguindo o procedimento do manual de projetos da AISC/2016 (MURRAY et al., 2016) para atividade rítmica do tipo aeróbica, inicialmente é necessário determinar a frequência fundamental do pavimento e posteriormente, a solicitação por unidade de área dos participantes da atividade em questão (aeróbica), assim sendo, $w_p = 0,20 kN/m^2$ (Tabela 37). Em seguida, é necessário calcular a carga distribuída do piso w_t utilizando a Equação 60, que nesse caso será $w_t = 5,99 kN/m^2$ (Equação 61), sendo o valor de $p_g = 5,49 kN/m^2$ (Tabela 16), $m_g = 0,806 kN/m$; $m_j = 0,324 kN/m$ (Tabela 17) e $L_j = 6,00m$; $S = 2,00m$ (Tabela 13).

$$w_t = 5,49 + \frac{0,806}{6,00} + \frac{0,324}{2,00} + 0,20 \therefore w_t = 5,99 kN/m^2$$

Equação 61

Dando sequência ao processo, é necessário determinar a taxa de aceleração de pico para cada harmônico ($a_{p,i}/g$) utilizando a Equação 59, e em seguida, a taxa de aceleração de pico do piso (a_p/g) combinando as taxas encontradas para cada harmônico fazendo uso da Equação 58, em que para atividade aeróbica deve-se considerar três harmônicos (Tabela 37).

Como a frequência da vibração forçada para cada um dos harmônicos (if_{step}) não consiste em apenas um valor (segundo o manual em questão) mas sim, em uma faixa de frequência (Tabela 37), deve-se combinar tais frequências de vibração forçada dentro de seus respectivos intervalos.

Com o intuito de exemplificar o processo de aplicação das Equações para calcular a aceleração máxima do pavimento, é apresentada na Tabela 38 os cálculos das taxas de aceleração de pico ($a_{p,i}/g$) para cada um dos três harmônicos referentes à uma combinação de valores de frequência (if_{step}), seguido do processo final para determinar a taxa de aceleração de pico do pavimento (a_p/g).

Tabela 38 – Taxas das acelerações de pico para cada harmônico do exemplo do item 4.3.5

Harmônico	Frequência do harmônico $if_{step} (H_z)$	Coefficiente didâmico α_i	Taxa de aceleração de pico $a_{p,i}/g$
1° Harmônico ($i = 1$)	2,75	1,50	$\frac{a_{p,1}}{g} = \frac{1,3 \times 1,50 \times \left(\frac{0,20}{5,99}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{9,138}{2,75}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2 \times 0,06 \times 9,138}{2,75}\right)^2}}$ $\therefore \frac{a_{p,1}}{g} = 0,00648$
2° Harmônico ($i = 2$)	5,50	0,60	$\frac{a_{p,2}}{g} = \frac{1,3 \times 0,60 \times \left(\frac{0,20}{5,99}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{9,138}{5,50}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2 \times 0,06 \times 9,138}{5,50}\right)^2}}$ $\therefore \frac{a_{p,2}}{g} = 0,01470$
3° Harmônico ($i = 3$)	8,25	0,10	$\frac{a_{p,3}}{g} = \frac{1,3 \times 0,10 \times \left(\frac{0,20}{5,99}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{9,138}{8,25}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2 \times 0,06 \times 9,138}{8,25}\right)^2}}$ $\therefore \frac{a_{p,3}}{g} = 0,01651$
Taxa de aceleração de pico do pavimento (a_p/g)			
$\frac{a_p}{g} = (0,00648^{1,5} + 0,01470^{1,5} + 0,01651^{1,5})^{\frac{1}{1,5}} \therefore \frac{a_p}{g} = 0,02695$			

Fonte: elaborada pelo autor

Na Tabela 39 é demonstrado o processo de combinação dos valores de frequências individuais dentro do intervalo de seus respectivos harmônicos, como foi detalhado na Tabela 38. A combinação de if_{step} que resultou na maior taxa de aceleração de pico são os mesmos utilizados na Tabela 38. Assim, $a_p/g = 0,02695$, portanto, 2,70% da aceleração da gravidade. Transformando a taxa de aceleração de pico do pavimento em unidade de aceleração (m/s^2), adotando a aceleração da gravidade $g = 9,81 m/s^2$, obtém-se a aceleração máxima do pavimento $a_{p,máx} = 0,2644 m/s^2$.

Tabela 39 – Pico de aceleração do pavimento do item 4.3.5

Dados de entrada						
$w_p = 0,20 \text{ kN/m}^2$		$w_t = 5,99 \text{ kN/m}^2$		$f_0 = 9,138H_z$		$\beta = 0,06$
Combinações investigadas						
1° Harmônico		2° Harmônico		3° Harmônico		$\frac{a_p}{g}$
α_1	1,50	α_2	0,60	α_3	0,10	
$1f_{step}$ (Hz)	$\frac{a_{p,1}}{g}$	$2f_{step}$ (Hz)	$\frac{a_{p,2}}{g}$	$3f_{step}$ (Hz)	$\frac{a_{p,3}}{g}$	
2,00	0,00327	4,00	0,00616	6,00	0,00326	0,00902
2,05	0,00345	4,10	0,00655	6,15	0,00356	0,00963
2,10	0,00363	4,20	0,00696	6,30	0,00388	0,01027
2,15	0,00381	4,30	0,00739	6,45	0,00425	0,01096
2,20	0,00400	4,40	0,00784	6,60	0,00466	0,01170
2,25	0,00420	4,50	0,00831	6,75	0,00512	0,01249
2,30	0,00440	4,60	0,00881	6,90	0,00563	0,01335
2,35	0,00461	4,70	0,00933	7,05	0,00622	0,01427
2,40	0,00482	4,80	0,00989	7,20	0,00690	0,01529
2,45	0,00504	4,90	0,01047	7,35	0,00767	0,01640
2,50	0,00526	5,00	0,01108	7,50	0,00858	0,01764
2,55	0,00549	5,10	0,01173	7,65	0,00964	0,01902
2,60	0,00573	5,20	0,01241	7,80	0,01090	0,02059
2,65	0,00597	5,30	0,01313	7,95	0,01242	0,02239
2,70	0,00622	5,40	0,01389	8,10	0,01426	0,02448
2,75	0,00648	5,50	0,01470	8,25	0,01651	0,02695
Máxima taxa de aceleração de pico do pavimento						
$a_{p,m\acute{a}x}/g = 0,02695$		$a_{p,m\acute{a}x} (\% g) = 2,70$		$a_{p,m\acute{a}x} = 0,2644 \text{ m/s}^2$		

Fonte: elaborada pelo autor

Sendo frequência fundamental $f_0 = 9,138H_z$, diante da ABNT NBR 6118:2014 e admitindo que o pavimento é destinado à salas de dança o piso verificado está apto, já que a $f_{crit} = 7H_z$ (Tabela 21) e dessa forma: $f_0 = 9,138 > 1,2f_{crit} = 8,40H_z$ (item 4.).

Admitindo como deflexão total do pavimento $4,286mm = 0,43cm$, valor relativo à somatória das deflexões das vigas primárias ($\Delta_g = 2,089mm$) e secundárias ($\Delta_j = 2,197mm$), cujo cálculo e resultados encontram-se na Tabela 18 e sendo a frequência fundamental $f_0 = 9,138H_z$, diante da ABNT NBR 8800:2008, o pavimento é aceitável, já que a referida norma estipula como frequência fundamental mínima $f_{0,min} = 8H_z$ e o deslocamento vertical total do pavimento (consideradas vigas birotuladas) de 0,50cm.

Analisando o pavimento diante dos critérios de aceitação do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) descrito no item 4.3.4, sendo aceleração máxima do pavimento $a_{p,máx} = 0,2644m/s^2$, o pavimento não é aceitável para o funcionamento de academias, mas é apto para pisos destinados exclusivamente para o desenvolvimento de atividades rítmicas, cujas acelerações limites para tais atividades são, respectivamente, $0,245m/s^2$ e $0,686m/s^2$ (Tabela 36). Na Tabela 40 é apresentada de forma detalhada a aceitabilidade ou não do pavimento diante do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 6118:2014.

Tabela 40 – Aceitabilidade do pavimento do item 4.3.5

AISC/2016 (MURRAY <i>et al.</i> , 2016)	ABNT NBR 8800:2008	ABNT NBR 6118:2014
Funcionamento de academias $a_o = 0,245 m/s^2$ $a_p = 0,264 m/s^2$ $a_o < a_p$ (não ok)	$\delta_{máx} = 0,50cm$ $\delta = 0,43cm$ $f_{0,min} = 8,0H_z$ $f_0 = 9,14H_z$ $\delta < \delta_{máx}$ (ok) $f_0 > f_{0,min}$ (ok)	$f_{crit} = 7H_z$ $1,2 f_{crit} = 8,40H_z$ $f_0 = 9,14H_z$ $f_0 > 1,2 f_{crit}$ (ok!)
Não aceitável		
Pisos destinados somente ao desenvolvimento de atividades rítmicas $a_o = 0,686 m/s^2$ $a_p = 0,264 m/s^2$ $a_o > a_p$ (ok)		
Aceitável	Aceitável	Aceitável

Fonte: elaborada pelo autor

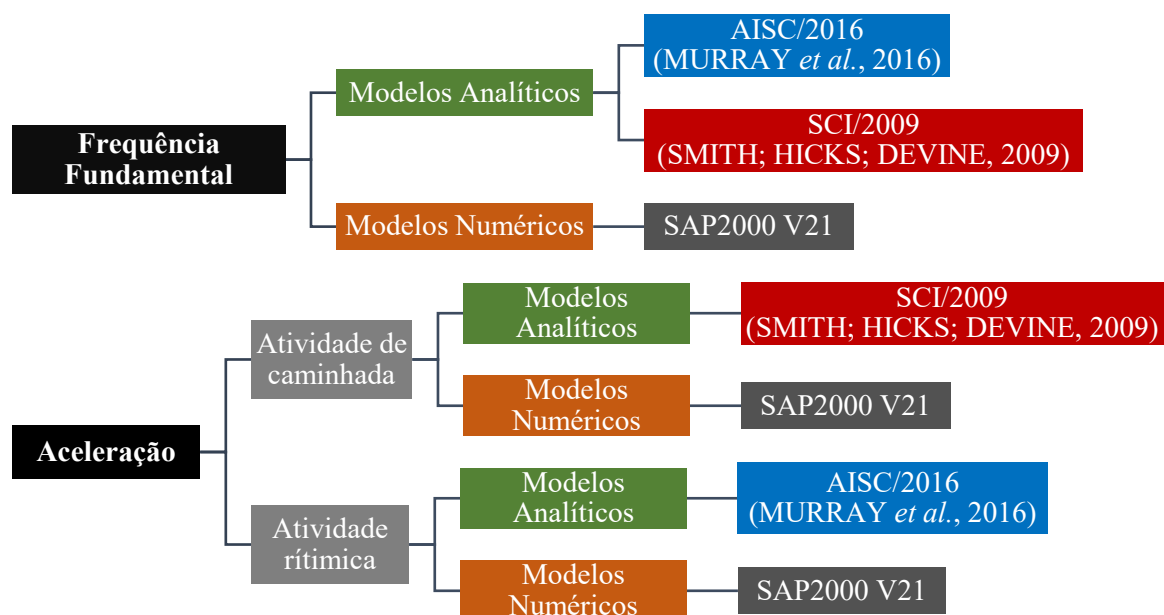
Capítulo 5

Metodologia para análise de vibrações em pavimentos mistos de aço e concreto

Para avaliar as vibrações nos pisos mistos de aço e concreto, a metodologia utilizada nesse trabalho analisa inicialmente a frequência fundamental dos pavimentos, e posteriormente, a aceleração dos pisos induzidas por vibrações forçadas devido ao caminhar humano e oriundas de atividades rítmicas.

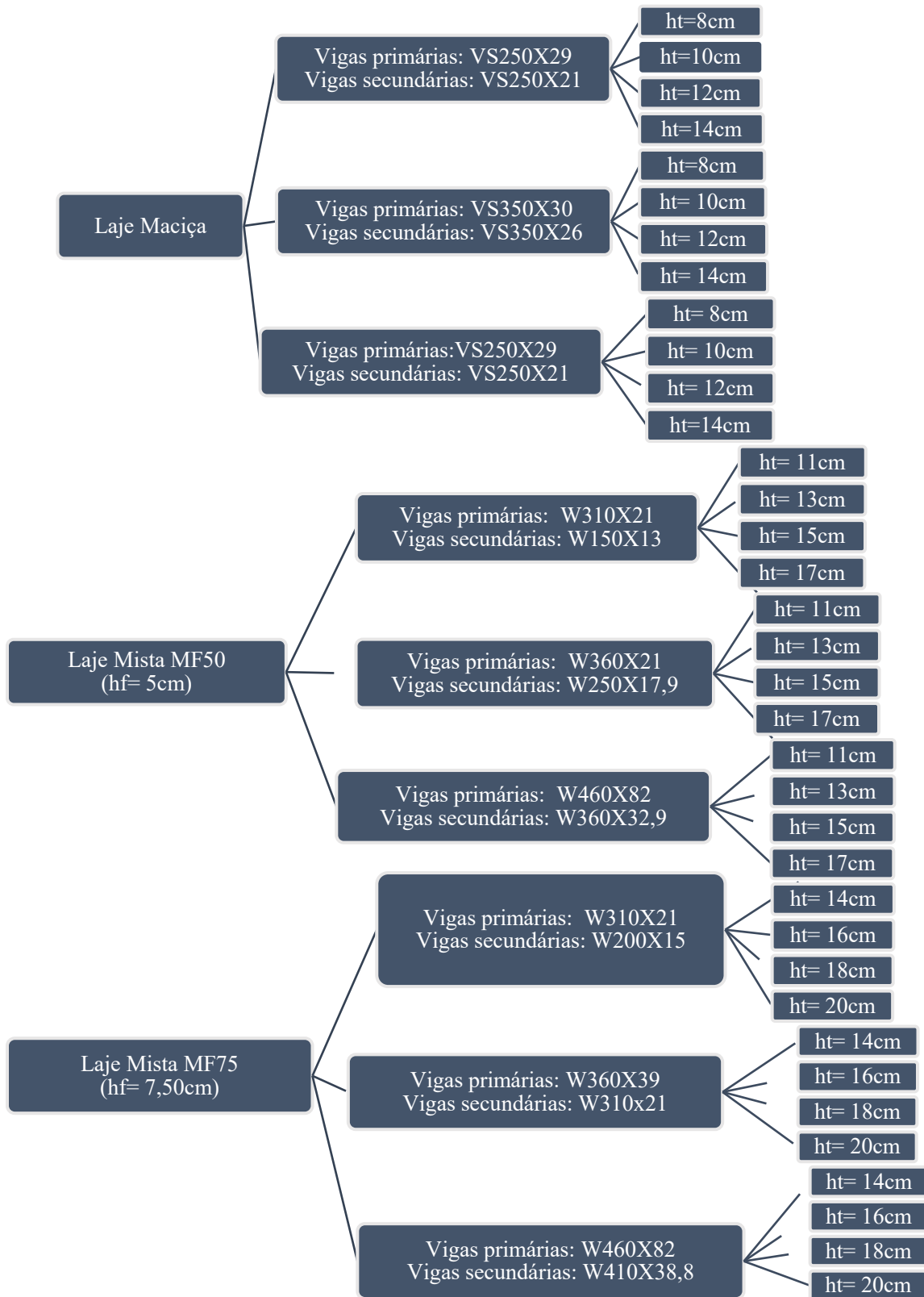
De forma geral, a análise dinâmica dos modelos é realizada comparando os resultados (frequência fundamental e aceleração) obtidos utilizando processos analíticos (modelos analíticos) com as modeladas no *software* SAP2000 V21 (modelos numéricos). Como objetos de análise, foram concebidos 36 pavimentos mistos compatíveis com a arquitetura de um pavimento tipo com três variações de lajes (12 com lajes maciças, 12 com lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 e 12 com forma de aço MF75). O fluxograma da Figura 22 apresenta o processo de análise das propriedades modais dos pavimentos (frequência fundamental e aceleração) e o fluxograma da Figura 23 descreve de forma clara os pavimentos que compõe os modelos numéricos e analíticos (que são os mesmos pavimentos) empregados nessa pesquisa.

Figura 22 – Fluxograma da análise dos pavimentos mistos de aço e concreto



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 23 – Fluxograma dos modelos analíticos e numéricos



Fonte: elaborada pelo autor

A princípio, foram investigadas a influência das dimensões dos perfis metálicos das vigas, comprimento e seção dos pilares, majoração do módulo de elasticidade do concreto e a tipologia e altura das lajes na frequência fundamental de pavimentos modelados numericamente, e posteriormente, compara as frequências fundamentais dos modelos numéricos com os valores obtidos seguindo os processos analíticos dos manuais do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), ambos procedimentos apresentados e detalhados no Capítulo 3. Para determinar as frequências fundamentais analiticamente utilizou-se de planilhas eletrônicas desenvolvidas pelo autor do trabalho a fim de otimizar o processo de obtenção de resultados.

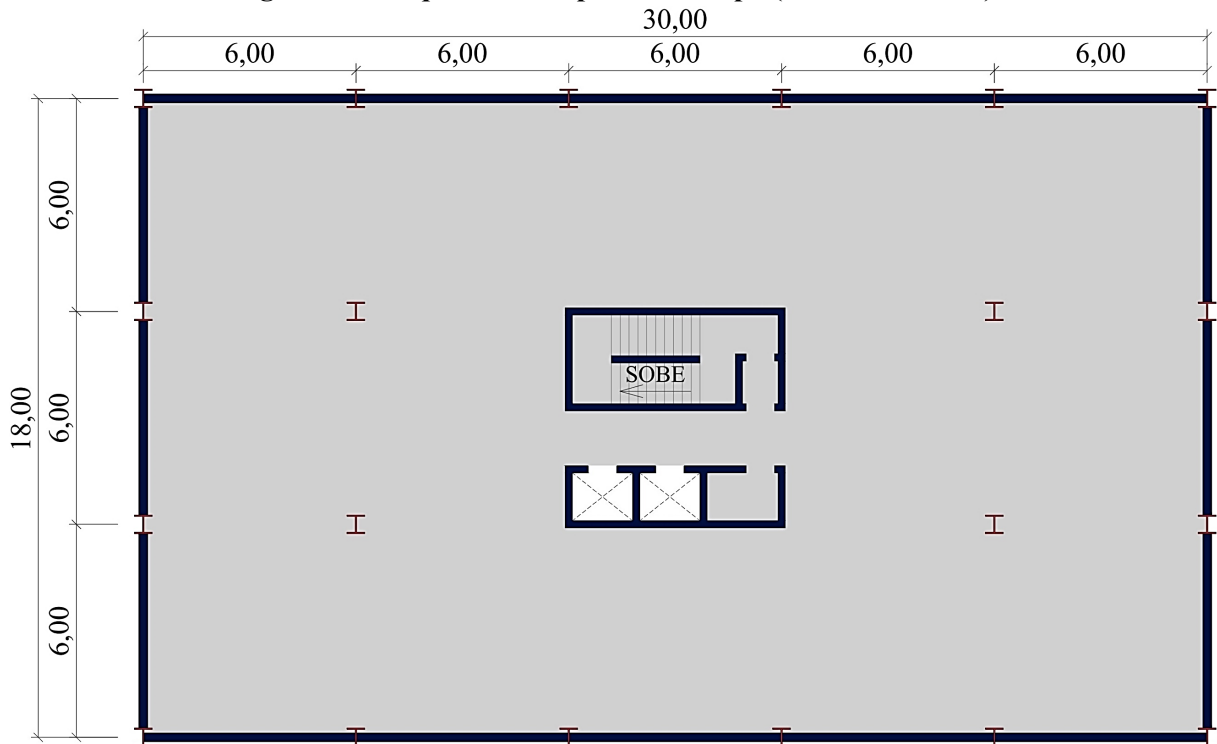
Após as investigações das propriedades relativas à frequência fundamental ditas no parágrafo anterior, essa pesquisa empenhou-se em avaliar a aceleração dos pavimentos induzidas por atividade de caminhada e por atividade aeróbica. Quanto a análise da aceleração dos pavimentos seguindo processos analíticos, para atividade de caminhada utilizou-se exclusivamente o manual SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), e para atividades rítmicas os procedimentos encontrados no AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016).

Semelhantemente à frequência fundamental, para determinar a aceleração via processos analíticos, fez-se uso de planilhas eletrônicas seguindo os processos apresentados no Capítulo 4 para comparar os resultados analíticos com as acelerações determinadas com a modelagem numérica. Os vigamentos dos modelos desse trabalho seguem à arquitetura do pavimento tipo da Figura 24 (com distância de nível a nível de 3,00m) e que também foi utilizada por Lima (2009) adaptada de Bellei, Pinho e Pinho (2008).

O trabalho de Lima (2009), de forma geral, teve por objetivo avaliar o desempenho e custos de diferentes tipos de lajes em pavimentos de estruturas metálicas onde foram realizadas as verificações dos estados limites últimos e de serviço diante da ABNT NBR 8800:2008 e da ABNT NBR 6118:2003 considerando as ações mostradas na Tabela 41.

Com pequenas divergências, os modelos 2MH10VS250 (Tabela 43), 13MF50H6W150 (Tabela 44) e o 25MF75H65W200 (Tabela 45) possuem os mesmos perfis das vigas, pilares e alturas de lajes utilizadas por Lima (2009). Dessa forma, é possível admitir que todos os pavimentos investigados nessa pesquisa (com exceção dos modelos 1MH8VS250, 5MH8VS350 e 9MH8VS450 indicados na Tabela 43 que possuem lajes maciças com alturas inferiores as de Lima (2009)) atendem de forma geral aos estados limites últimos e de serviço, com a ressalva que não foram realizadas verificações de incêndio e que as verificações relativas à ABNT NBR 6118:2014 foram feitas com base na ABNT NBR 6118:2003.

Figura 24 - Arquitetura do pavimento tipo (cotas em metros)



Fonte: adaptada de Lima (2009)

As ações nas lajes (Tabela 41) e as propriedades dos materiais (Tabela 42) dos modelos desse trabalho também são as mesmas utilizadas por Lima (2009), divergindo somente a resistência característica do concreto (f_{ck}), que foi alterada para 20MPa (no trabalho de Lima (2009) foi considerado concreto com $f_{ck} = 25\text{MPa}$). O valor do módulo de elasticidade inicial do concreto $E_{ci} = 22.540\text{MPa}$ da Tabela 42 é referente à utilização calcário, dessa forma, o parâmetro em função da natureza do agregado que influencia no módulo de elasticidade, $\alpha_E = 0,9$. O cálculo do módulo de elasticidade inicial do concreto (E_{ci}) é mostrado na Equação 62 (de acordo com a ABNT NBR 6118:2014), com $f_{ck} = 20\text{MPa}$ e $\alpha_E = 0,9$ (calcário).

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \therefore E_{ci} = 0,9 \times 5600 \times \sqrt{20} = 22.540\text{MPa} \quad \text{Equação 62}$$

Tabela 41 - Ações a serem consideradas no projeto

Ações permanentes	peso próprio → indicado em cada tipo de laje
	piso + revestimento = 1,50kN/m ²
	não serão consideradas paredes sobre as lajes
Ações variáveis (carga de utilização)	Sobrecarga de utilização: 5,00kN/m ²

Fonte: adaptada de Lima (2009)

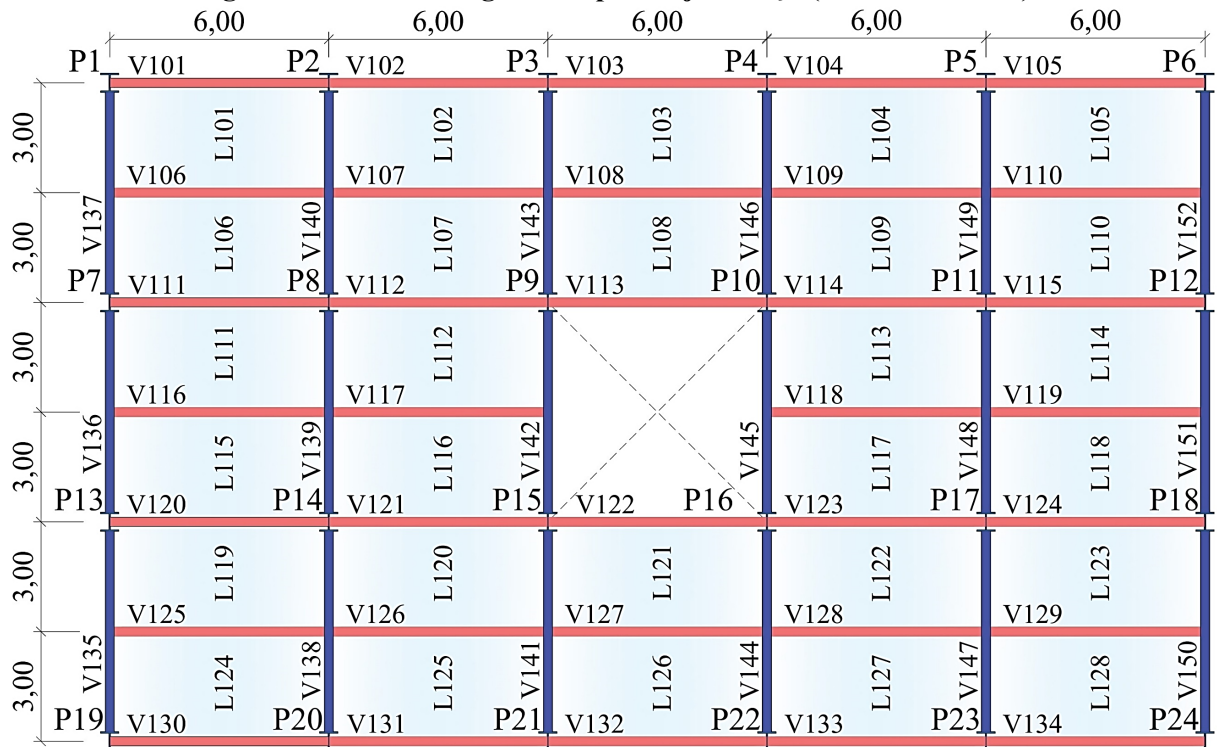
Tabela 42 - Propriedades dos materiais consideradas nos modelos

Aço ASTM A36	f_y	f_u	E_a	γ_a
	250MPa	400MPa	20.000kN/cm ²	7.850kg/m ³
Concreto C20	f_{ck}	E_{ci}	E_{cd}	γ_c
	20MPa	22.540MPa	30.428MPa	25kN/m ³

Fonte: elaborada pelo autor

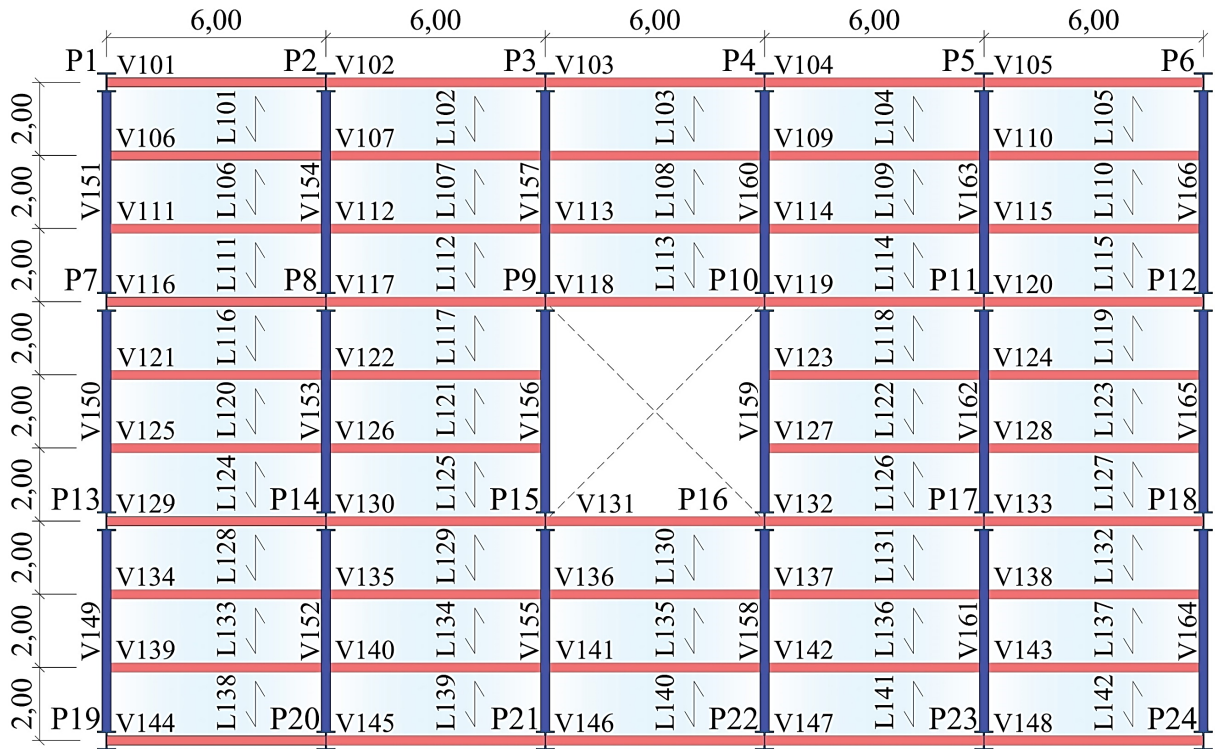
Quanto a tipologia das lajes, pavimentos mistos de lajes maciças e de lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 e MF75 da METFORM (ambas com espessuras nominais de 0,80mm) vale notar que as posições e numerações dos pilares são as mesmas em todos os vigamentos, como mostra a Figura 25 (vigamento para modelos com laje maciça), Figura 26 (vigamento para lajes mistas com forma de aço incorporada MF50) e a Figura 27 (vigamento para lajes mistas com forma de aço incorporada MF75). Nos modelos com laje maciça e mista com forma de aço incorporada MF75, as vigas secundárias são as numeradas de V101 a V134 e as vigas primárias de V135 à V152 (Figura 25 e Figura 27). Nos modelos de laje mista com forma de aço incorporada MF50, as vigas secundárias são as vigas de V101 a V148 e as vigas primárias de V149 à V166 (Figura 26).

Figura 25 - Plano de vigamento para laje maciça (cotas em metros)



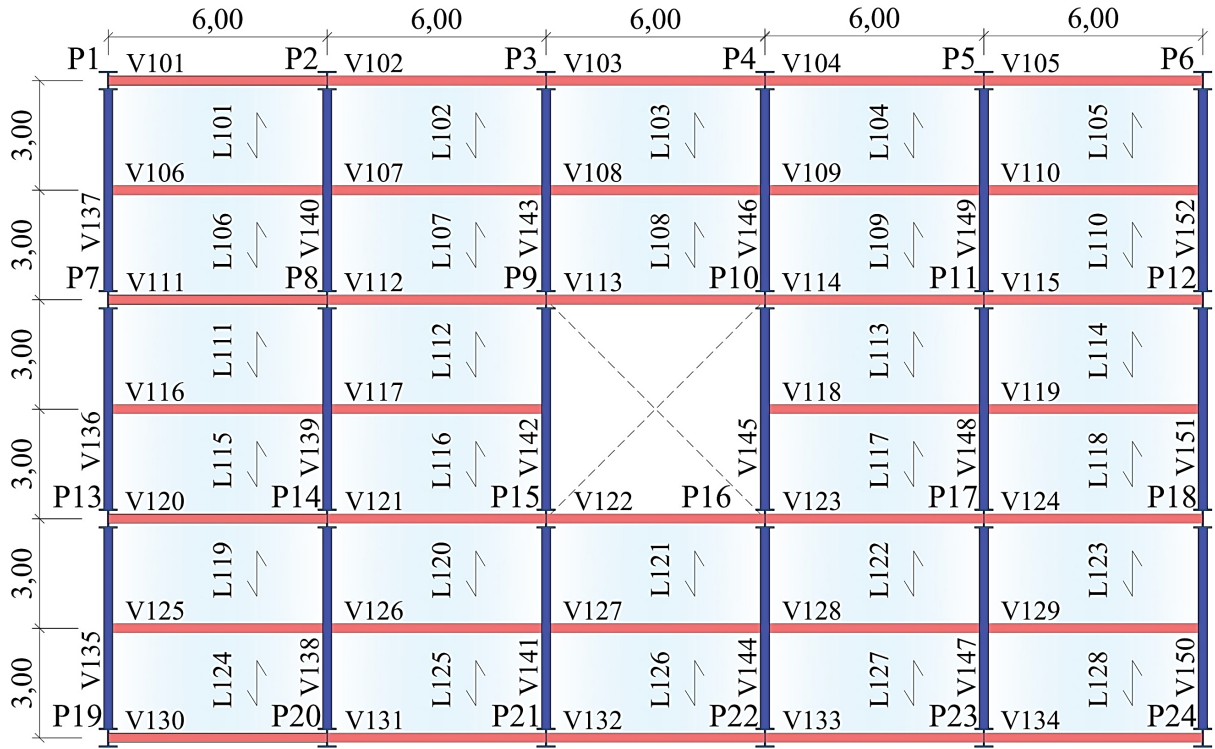
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 26 - Plano de vigamento para laje mista com forma MF50 (cotas em metros)



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 27 - Plano de vigamento para laje mista com forma MF75 (cotas em metros)



Fonte: elaborada pelo autor

Para melhor compreender os modelos, a altura total das lajes é h_t , altura das formas de aço h_f (para forma MF50 $h_f = 5,00\text{cm}$ e para forma MF75 $h_f = 7,50\text{cm}$), e espessura da capa de concreto acima das formas t_c . Portanto, para as lajes mistas com forma de aço incorporada: $h_t = t_c + h_f$ e para os pavimentos com laje maciça, a altura total das lajes é a espessura da capa de concreto, dessa forma, $h_t = t_c$, uma vez que nesses casos $h_f = 0$.

A fim de avaliar a influência dos perfis metálicos das vigas mistas, altura e tipologia das lajes na frequência fundamental dos pisos mistos, para cada uma das três tipologias de lajes investigadas (maciça e mistas com forma MF50 e MF75), há 12 combinações, que consistem em 3 vigamentos \times 4 alturas de lajes. A Tabela 43 apresenta detalhadamente os modelos com laje maciça, e a Tabela 44 e Tabela 45, respectivamente, os modelos de lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 e MF75. Quanto aos perfis indicados nas Tabelas citadas anteriormente, no Anexo 2 estão as propriedades geométricas dos perfis metálicos (Tabela 69) e dos pilares (Tabela 70).

Tabela 43 – Modelos dos pisos com laje maciça

Vigamentos para laje maciça	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Perfis do pilares
			Vigas secundárias	Vigas primárias	
$h_f = 0$	(cm)				
1MH8VS250	8,00	8,00	VS250X21	VS250X29	CS250X43
2MH10VS250	10,00	10,00			
3MH12VS250	12,00	12,00			
4MH14VS250	14,00	14,00			
5MH8VS350	8,00	8,00	VS350X26	VS350X30	CS250X52
6MH10VS350	10,00	10,00			
7MH12VS350	12,00	12,00			CS250X63
8MH14VS350	14,00	14,00			
9MH8VS450	8,00	8,00	VS450X51	VS450X60	CS350X112
10MH10VS450	10,00	10,00			
11MH12VS450	12,00	12,00			
12MH14VS450	14,00	14,00			

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 44 – Modelos dos pisos de laje mista com forma de aço incorporada MF50

Vigamentos para laje mista (MF50)	t_c	h_t	Perfis dos planos de vigamento		Perfis do pilares
			$h_f = 5,00\text{cm}$	(cm)	
13MF50H6W150	6,00	11,00	W150X13	W310X21	CS250X43
14MF50H8W150	8,00	13,00			
15MF50H10W150	10,00	15,00			
16MF50H12W150	12,00	17,00			
17MF50H6W250	6,00	11,00	W250X17,9	W360X51	CS250X52
18MF50H8W250	8,00	13,00			
19MF50H10W250	10,00	15,00			
20MF50H12W250	12,00	17,00			CS250X63
21MF50H6W360	6,00	11,00	W360X32,9	W460X82	CS350X112
22MF50H8W360	8,00	13,00			
23MF50H10W360	10,00	15,00			
24MF50H12W360	12,00	17,00			

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 45 – Modelos dos pisos de laje mista com forma de aço incorporada MF75

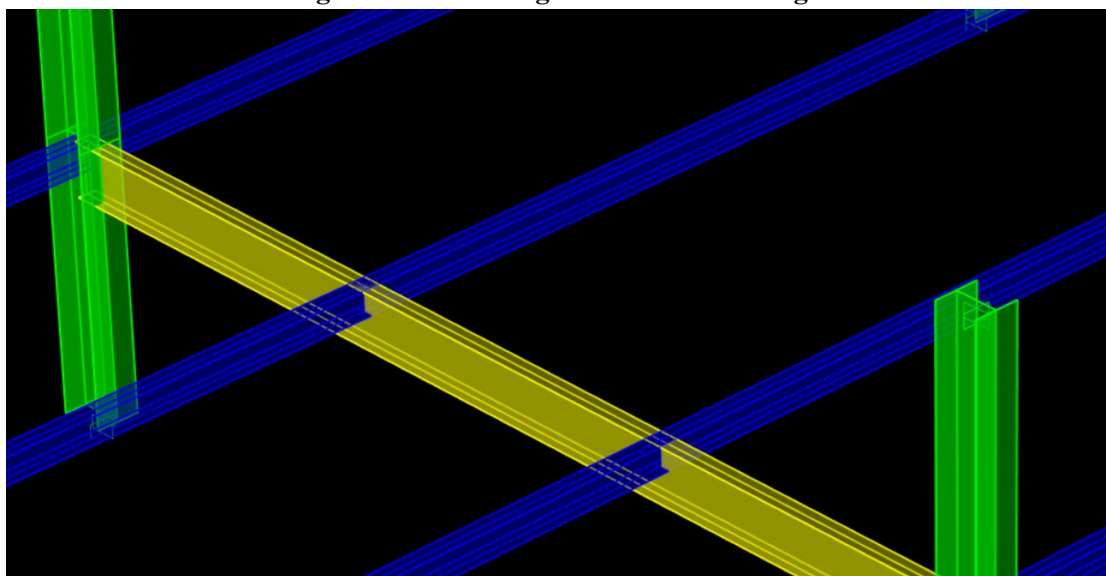
Vigamentos para laje mista (MF75)	t_c	h_t	Perfis dos planos de vigamento		Perfis do pilares
			$h_f = 7,50\text{cm}$	(cm)	
25MF75H65W200	6,50	14,00	W200X15	W310X21	CS250X43
26MF75H85W200	8,50	16,00			
27MF75H105W200	10,50	18,00			
28MF75H125W200	12,50	20,00			
29MF75H65W310	6,50	14,00	W310X21	W360X39	CS250X52
30MF75H85W310	8,50	16,00			
31MF75H105W310	10,50	18,00			
32MF75H125W310	12,50	20,00			CS250X63
33MF75H65W410	6,50	14,00	W410X38,8	W460X82	CS350X112
34MF75H85W410	8,50	16,00			
35MF75H105W410	10,50	18,00			
36MF75H125W410	12,50	20,00			

Fonte: elaborada pelo autor

5.1 Modelagem numérica

Na modelagem dos modelos numéricos no SAP2000, para representar as vigas e pilares foram utilizados elementos “*straight frame*” e suas malhas foram atribuídas automaticamente, utilizando o comando “*assign automatic frame mesh*” com a função “*auto mesh frame objects*”, adotando os parâmetros “*mesh at intermediate joints*” e “*mesh at intersections with other frames, area edges and solid edges*”. Todos os elementos “*straight frame*” relativos as vigas tiveram suas extremidades rotuladas e foram inseridas a partir do centro das mesas superiores dos perfis metálicos, como mostra a Figura 28. Vale ressaltar que as ligações metálicas ou mistas das vigas com os pilares não foram modeladas, assim, esse trabalho não investigou a influência de tais vinculações no comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto modelados nesse trabalho.

Figura 28 – Modelagem numérica das vigas



Fonte: elaborada pelo autor

Em diversos manuais de projetos, como discutido no Capítulo 3, para determinar as propriedades modais dos pavimentos, é recomendada a majoração de 35% do módulo de elasticidade do concreto. Dessa forma, para avaliar a influência de tal recomendação, todos os modelos descritos na Tabela 43, Tabela 44 e Tabela 45 foram processados com módulo de elasticidade do concreto $E_{ci} = 22.540\text{MPa}$ e $E_{cd} = 30.428\text{MPa}$ com pilares de meia altura (1,50m acima e 1,50m abaixo do piso engastados em suas extremidade), que são identificados, respectivamente, como modelos “E22H2” e “E30H2”.

À medida que os vigamentos dos modelos foram enrijecidos, ocorreu a necessidade de enrijecer os pilares alterando seus perfis. Tal medida, além de representar pavimentos mais

condizentes com os processos de dimensionamento, possui a finalidade de fazer com que o primeiro modo de vibração dos modelos ocorresse em torno das lajes, e não em torno dos pilares. Essa situação pode acontecer à medida que se alteram as seções dos elementos constituintes do piso (lajes e vigas) e dessa forma, elevando a rigidez dos pavimentos. Não necessariamente o primeiro modo de vibração de um edifício de múltiplos pavimento recai em torno das lajes (que é o modo de interesse desse trabalho), todavia, com a modelagem numérica de apenas um pavimento e não do edifício todo, é razoável buscar tal comportamento.

Na modelagem numérica das lajes, foram utilizados elementos de área do tipo “*shell*” atribuindo somente a espessura e o material do elemento. A dimensão dos elementos da malha das lajes de todos os modelos foi de 25cm × 25cm. Tal dimensão foi definida após avaliar as frequências fundamentais de vários modelos com o refinamento da malha.

Quanto ao peso próprio das lajes mistas com forma de aço incorporada, foram adotados os valores fornecidos pelo fabricante, cujas informações estão na Tabela 71 do Anexo 2 (informações adotadas para os modelos analíticos e numéricos).

Nos modelos com lajes maciças, a espessura atribuída aos elementos “*shell*” foi a altura total das lajes. Já para as lajes mistas com forma de aço incorporada, a espessura atribuída foi a da capa de concreto acima das formas (t_c). Por exemplo, para o modelo “13MF50H6W150” com forma de aço MF50 de altura $h_f = 5,00\text{cm}$ (Tabela 44), a altura total das lajes é $h_t = 11,00\text{cm}$ e a espessura da capa de concreto acima das formas é $t_c = 6,00\text{cm}$, logo, a espessura atribuída aos elementos “*shell*” desse modelo foi de 6,00cm.

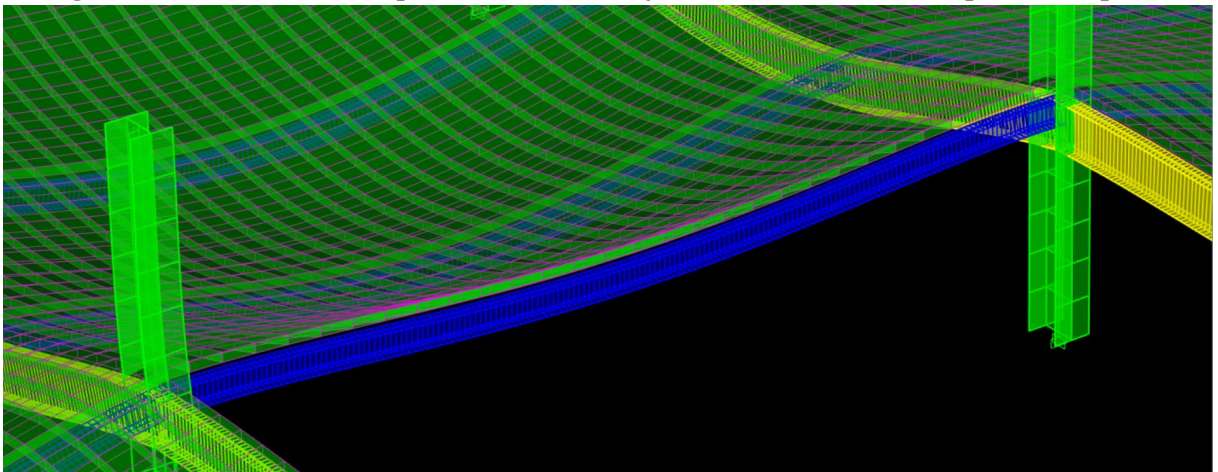
Com o intuito de seguir a recomendação dos SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), de incorporar as cargas permanentes (como o revestimento das lajes) e 10% das cargas acidentais das lajes ao seu peso próprio, o peso específico do concreto foi ajustado para considerar tais parcelas nos modelos numéricos, cujos valores e procedimentos estão na Tabela 72 do Anexo 2.

A fim de que os elementos “*shell*” que representam as lajes dos modelos ficassem na posição da concepção do projeto, com a camada de concreto acima das mesas superiores dos perfis das vigas, foi atribuída a esses elementos de área a função “*assign area thickness and joint offset overwrites*” utilizando a opção “*user defined joint offsets specified by points*”, para que as lajes ficassem locadas na posição adequada.

O procedimento descrito no parágrafo anterior desloca os elementos de área do plano das linhas de grade sem que percam ligação com as vigas. A Figura 29 mostra a forma fletida das lajes deslocadas das mesas dos perfis metálicos seguindo o contorno da forma fletida do

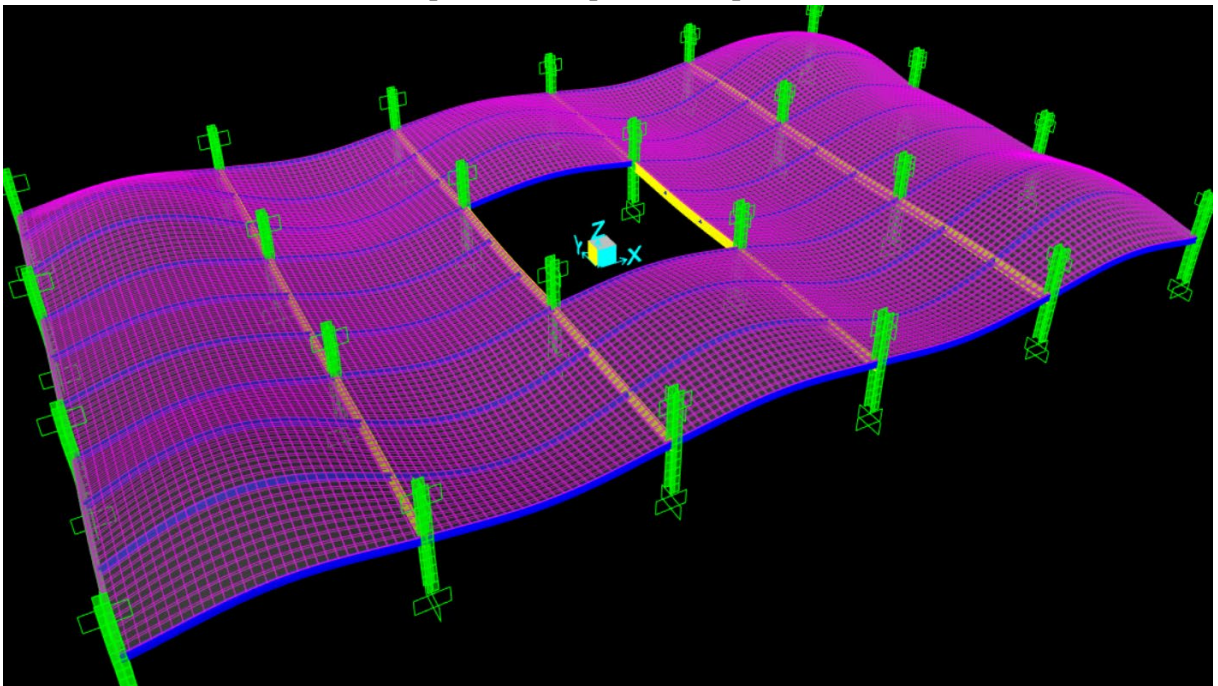
pavimento, evidenciando a ligação entre os elementos. Tal medida influencia muito nos resultados, uma vez que representa com maior precisão o comportamento estrutural do pavimento. Em um mesmo modelo, com o centro de gravidade das lajes no mesmo nível das mesas superiores do perfil das vigas, o primeiro modo de vibração em torno das lajes resultou em uma frequência de $3,37H_z$ (Figura 30), e deslocando-as $8cm$ acima da mesa superior, a frequência foi para $4,69H_z$ (Figura 31).

Figura 29 – Deflexão de um piso misto com as lajes deslocadas da mesa superior dos perfis



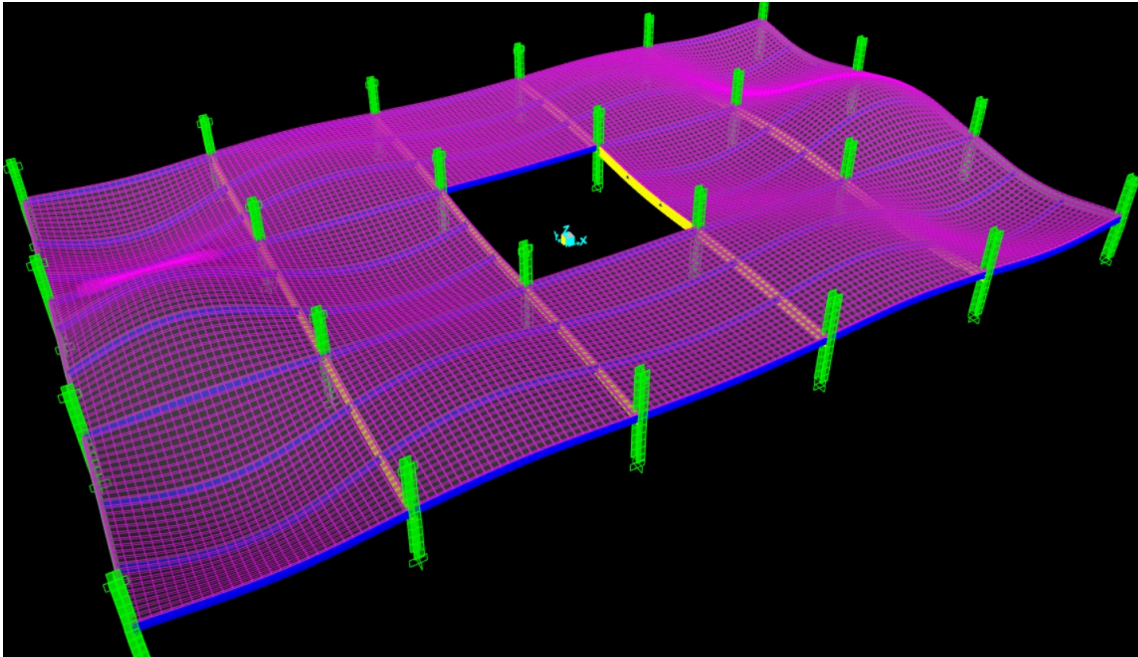
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 30 - Primeiro modo de vibração do modelo 13MF50H6W150 (E22H2) com as lajes mistas no nível das mesas superiores dos perfis e frequência natural de $3,37H_z$



Fonte: elaborada pelo autor

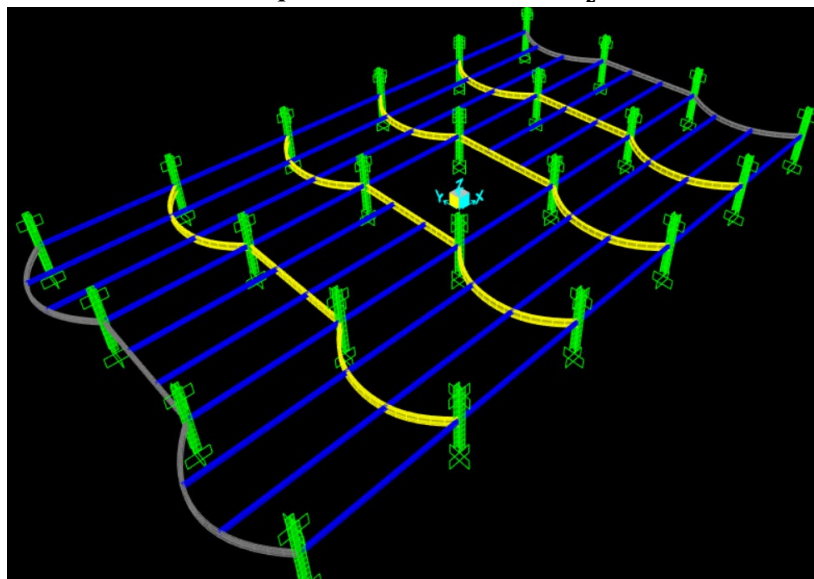
Figura 31 - Primeiro modo de vibração do modelo 13MF50H6W150 (E22H2) com as lajes mistas deslocadas 8cm das mesas superiores dos perfis e frequência natural de $4,69H_z$



Fonte: elaborada pelo autor

A Figura 32, relativa ao modelo 13MF50H6W150 (E22H2) sem as lajes, mostra seu primeiro modo de vibração em torno do eixo de menor rigidez das vigas primárias com frequência de $2,16H_z$. Dessa forma, uma maneira de verificar o comportamento conjunto entre as lajes e as vigas, para que representem um piso misto, é comparando a frequência do primeiro modo de vibração com o resultado do modelo com as lajes, que foi de $4,69H_z$ (Figura 31) com primeiro modo de vibração em torno do eixo de maior rigidez das vigas mistas.

Figura 32 – Primeiro modo de vibração do modelo 13MF50H6W150 sem a laje mista e frequência natural de $2,16H_z$



Fonte: elaborada pelo autor

Para avaliar a influência do comprimento dos pilares nos modelos numéricos, todos os modelos descritos na Tabela 43, além de processados com módulo de elasticidade do concreto $E_{ci} = 22.540\text{MPa}$ e $E_{cd} = 30.428\text{MPa}$ com pilares de meia altura, também foram modeladas com pilares de um quarto de altura (75cm acima e 75cm abaixo do piso engastados em suas extremidade), totalizando em mais 24 modelos, 12 modelos E22H4 e 12 modelos E30H4.

O Gráfico 5 do Capítulo 6 mostrou a pequena influência na frequência fundamental dos pisos mistos ao modelar os pavimentos com um quarto ou meia altura. Com os resultados apresentados no Gráfico 6 do Capítulo 6, também ficou evidente que grandes incrementos de rigidez nos pilares pouco influencia a frequência fundamental dos pavimentos. Dessa forma, todos os demais modelos desse trabalho foram processados com pilares de meia altura (1,50m acima e 1,50m abaixo do piso engastados em suas extremidades). Tal adoção na modelagem numérica foi realizada por preferência do autor.

Com o objetivo de verificar a influência do perfil dos pilares na frequência fundamental do piso, foram modelados 6 pavimentos (2 pavimentos com laje maciça, 2 pavimentos de laje mista com forma MF50 e 2 pavimentos de laje mista com forma MF75) com 6 variações de perfis dos pilares de meia altura e módulo de elasticidade do concreto $E_{ci} = 22.540\text{MPa}$, totalizando em mais 36 modelos E22H2 indicados na Tabela 46.

Tabela 46 – Modelos com variação das seções dos pilares com meia altura e concreto com módulo de elasticidade $E_{ci} = 22.540\text{MPa}$ (modelos E22H2)

Vigamento	Indicação do vigamento/laje	Perfis do pilares
1MH8VS250	Vigamentos para laje maciça (Tabela 43)	CS250X63
2MH10VS250		CS250X84
13MF50H6W150	Vigamentos para laje mista (MF50) (Tabela 44)	CS300X95
14MF50H8W150		CS300X102
25MF75H65W200	Vigamentos para laje mista (MF75) (Tabela 45)	CS300X115
26MF75H85W200		CS300X131

Fonte: elaborada pelo autor

Para reproduzir os efeitos de caminhada humana e atividades rítmicas para determinar a aceleração dos pavimentos numericamente, tanto para atividade de caminhada como para atividade rítmica, foi utilizada a função “*define time history functions*”. Para modelagem do carregamento dinâmico, definiu-se um padrão de carga específica para as atividades aeróbicas em “*load patterns*”, e por fim, um caso de carga em “*define load cases*” do tipo “*time history*” com amortecimento constante de 0,045 quando o piso é solicitado por caminhada e de 0,06 quando a atividade é aeróbica. Tais valores de amortecimento foram adotados dos manuais

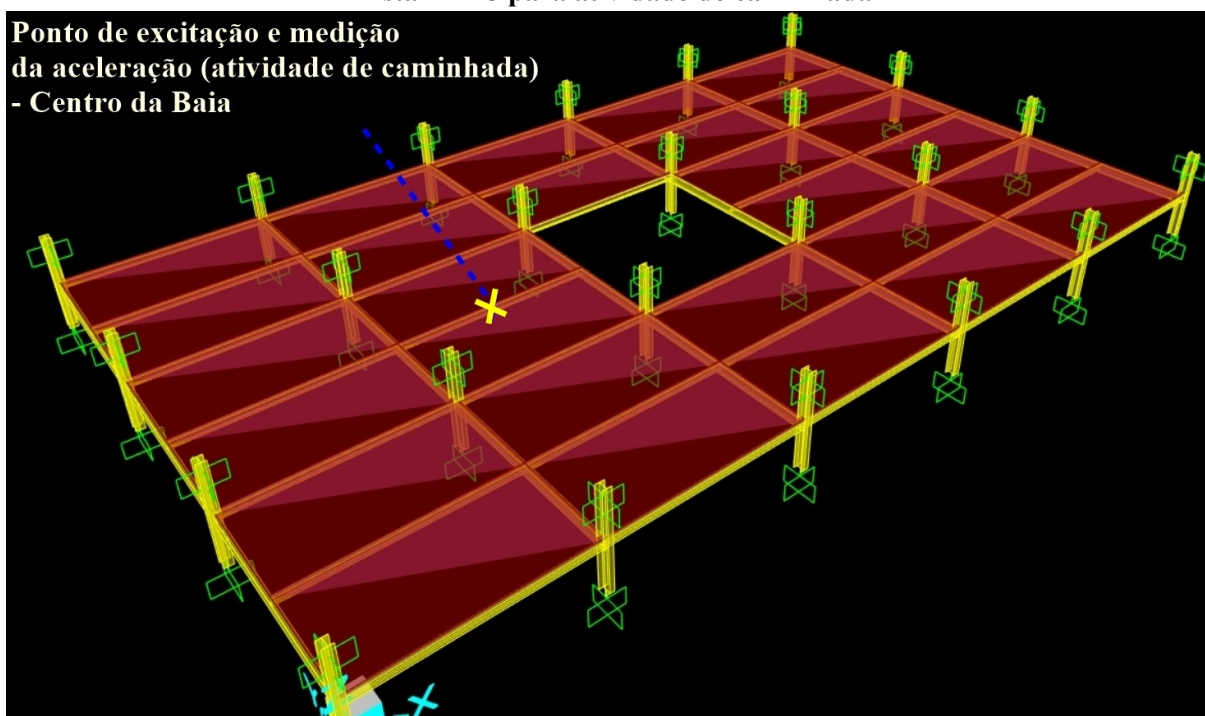
SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) respectivamente.

No item 5.2 são apresentados os procedimentos para modelagem do carregamento dinâmico induzido por atividade humana, carregamento esse que possui variação de intensidade. Por hora, é necessário ter ciência de que nos modelos numéricos a excitação do pavimento para atividade de caminhada foi feita no centro de uma baia dos pavimentos com variação da intensidade de uma carga concentrada, e para atividade rítmica, uma carga distribuída ao longo de uma baia do piso com variação de intensidade também.

A Figura 33 mostra o ponto de excitação e medição da aceleração dos modelos com laje maciça e mista com forma de aço incorporada MF75 para atividade de caminhada, correspondente ao centro da baia, que nesses casos é o ponto central de uma viga secundária. A Figura 34 também mostra o ponto de excitação e mediação da aceleração para atividade de caminhada dos pavimentos com laje mista com forma de aço incorporada MF75, onde nesses casos o ponto central da baia é o ponto médio de uma laje central.

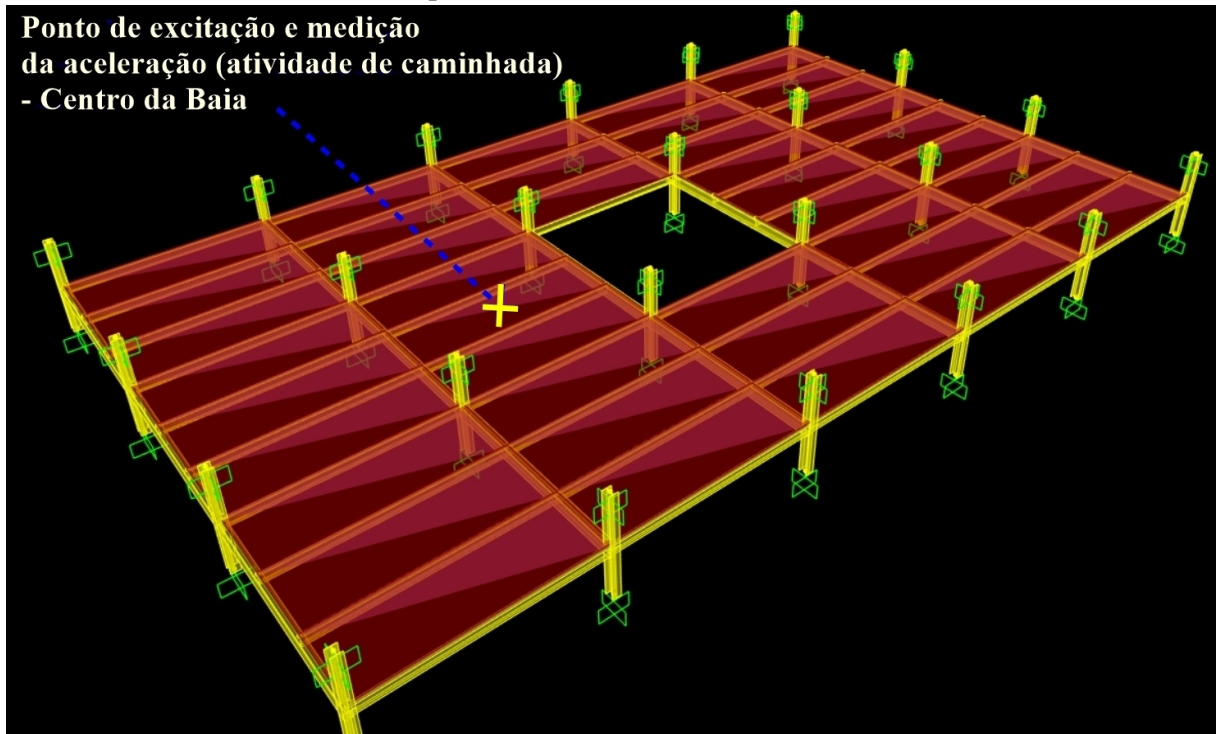
A Figura 35 indica a área de excitação dos pavimentos com laje maciça e mista com forma de aço MF75 para atividade rítmica e a Figura 36, as mesmas indicações citadas anteriormente, porém, dos modelos com laje mista com forma de aço incorporada MF50.

Figura 33 – Ponto de excitação e mediação da aceleração dos pavimentos com laje maciça e mista MF75 para atividade de caminhada



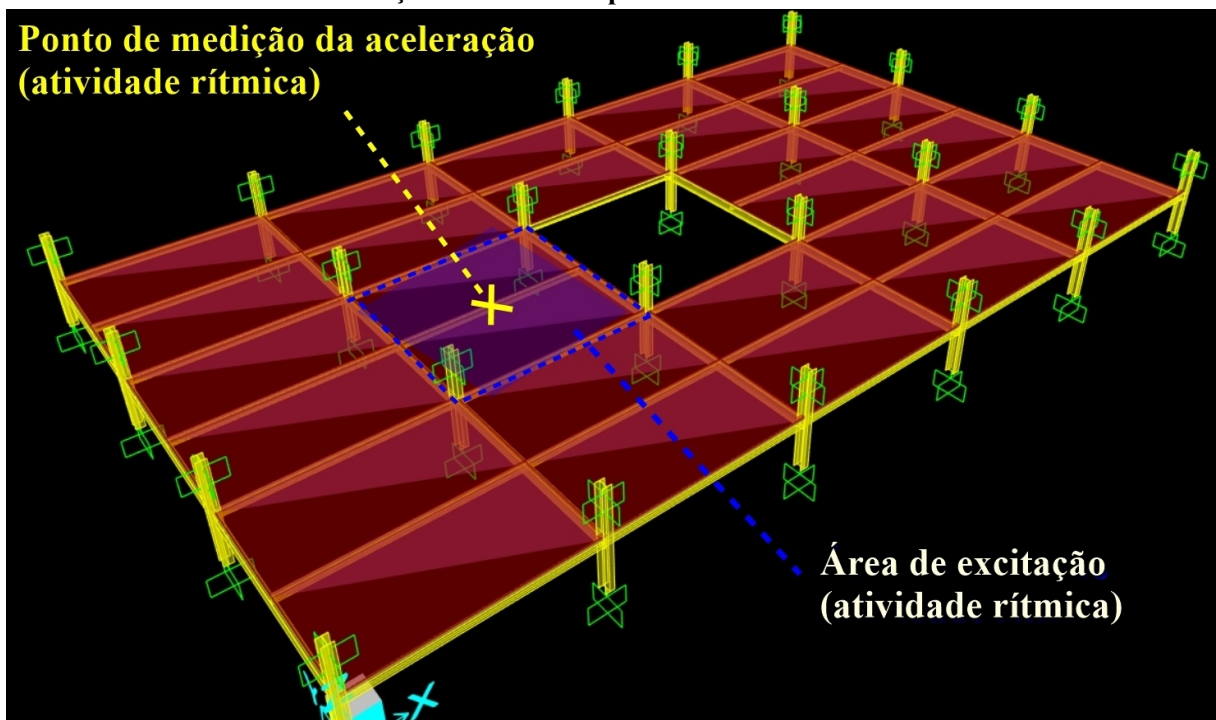
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 34 - Ponto de excitação e mediação da aceleração dos pavimentos com laje mista MF50 para atividade de caminhada



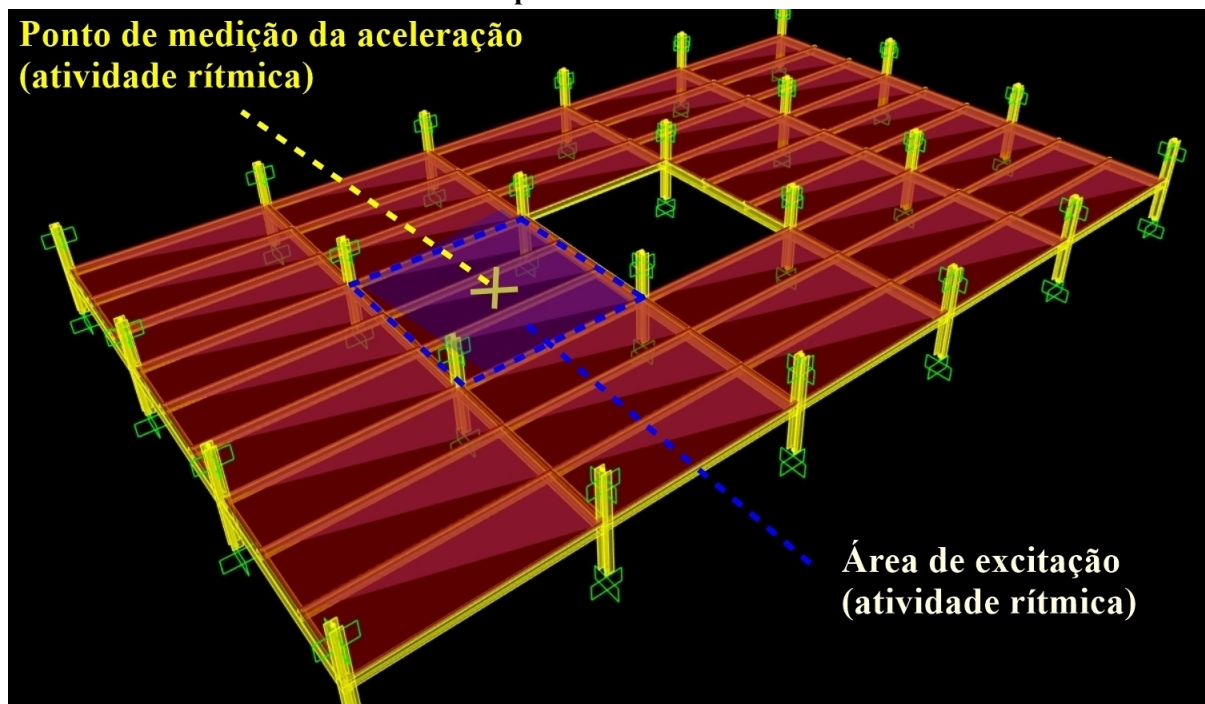
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 35 – Área de excitação e ponto de medição da aceleração dos pavimentos com laje maciça e mista MF75 para atividade rítmica



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 36 - Área de excitação e ponto de mediação da aceleração dos pavimentos com laje mista MF50 para atividade rítmica



Fonte: elaborada pelo autor

5.2 Modelagem do carregamento dinâmico induzido por atividade humana

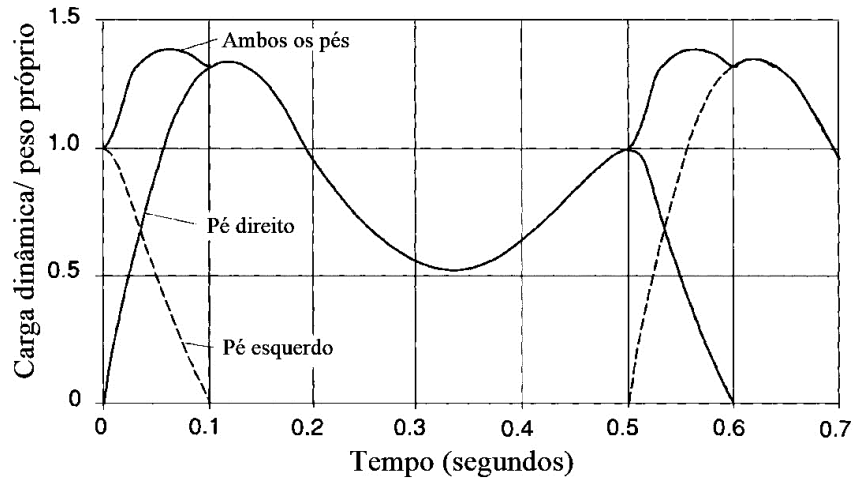
As vibrações em edifícios comerciais e residenciais muitas vezes são decorrentes de perturbações oriundas de movimentações desenvolvidas pelo corpo humano, como: andar, correr, pular e dançar que são designadas como carregamentos dinâmicos. De forma geral, as ações dinâmicas causadas por atividade humana podem ser divididas em duas categorias conforme a interação (contato) com a estrutura. Carregamentos dinâmicos que não perdem contato com a estrutura, como o caminhar, e carregamentos que perdem contato com a estrutura, como: correr, dançar e pular. As excitações humanas que perdem o contato com a estrutura, em sua grande maioria, podem ser individualizadas por rítmicas.

Ao longo do tempo diversos pesquisadores buscaram desenvolver modelos matemáticos capazes de representar as excitações dinâmicas induzidas por atividade humana, e concluíram que a série de *Fourier* descreve eficientemente tal tipo de solicitação devido à natureza periódica de tais excitações. A seguir será apresentado o modelo matemático apresentado por Bachmann *et al.*, (1995).

No que é relativo as atividades que mantem contato com a estrutura durante todo o tempo que as solicitam, a Figura 37 apresenta a variação da carga de dinâmica em função do

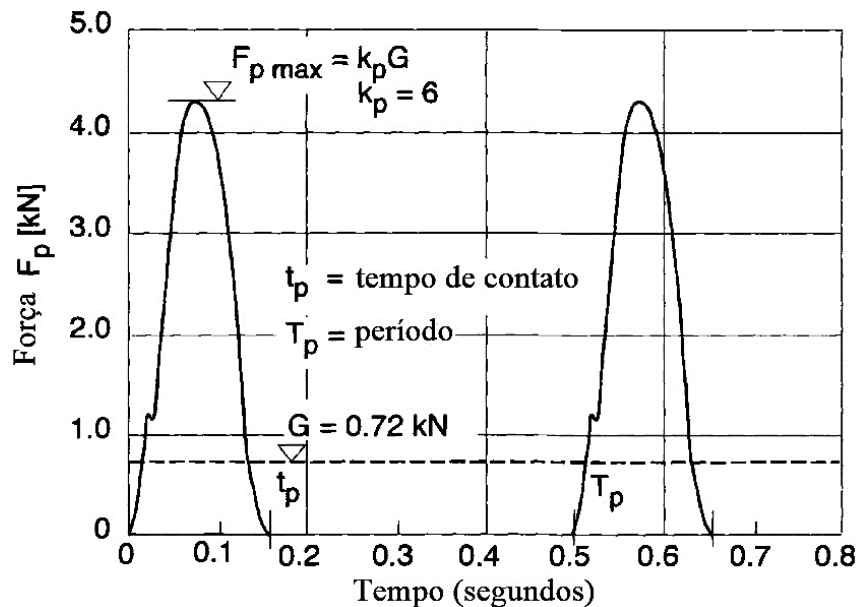
tempo de uma pessoa caminhando sobre um piso, onde o Gráfico deixa claro a interação da ação com a estrutura durante todo o tempo. Já a Figura 38 ilustra a ação dinâmica humana rítmica devido ao saltar (pular), em que os períodos de ação dinâmica nula representam a perda de contato do indivíduo com a estrutura.

Figura 37 – Variação da carga dinâmica de uma pessoa caminhando em função do tempo



Fonte: adaptada de Bachmann *et al.*, (1995)

Figura 38 – Variação da carga dinâmica devido ao saltar de uma pessoa em função do tempo



Fonte: adaptada de Bachmann *et al.*, (1995)

A Figura 37 e a Figura 38 são exemplos que mostram que não apenas a frequência do primeiro harmônico da série de *Fourier* da função de força, relativa à frequência da vibração forçada, mas também, que as frequências de harmônicos superiores podem ser relevantes, de forte influência na análise dinâmica para prever seus efeitos.

Em muitos casos, a análise dinâmica de pisos mistos pode ser realizada com a excitação de apenas um ponto (uma carga concentrada com variação de intensidade), uma vez que a maioria das reclamações acontecem em virtude da ação dinâmica de apenas uma pessoa. Todavia, pode haver situações em que grupos de pessoas podem causar excitações cuja representatividade de seus efeitos deve ser investigada, principalmente em casos de caminhada coordenada (BACHMANN *et al.*, 1995). A Equação 63 é uma série de *Fourier* que representa o carregamento dinâmico. A definição das variáveis da Equação 63 são apresentadas na Tabela 47. Na Tabela 48 são apresentadas as variáveis presentes na Equação 63 para cada tipo de atividade humana (ação dinâmica) desenvolvida pelos ocupantes da edificação.

$$F_p(t) = G + \sum_{i=1}^n G \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \phi_i) \quad \text{Equação 63}$$

Tabela 47 – Variáveis da Equação 63

Variável	Definição
t	Instante do tempo (s)
G	Peso de uma pessoa (normalmente $G = 800N$)
i	Número do i -ésimo harmônico
α_i	Coefficiente de Fourier relativo ao i -ésimo harmônico
f_p	Frequência da atividade (Hz)
ϕ_i	Diferença de fase entre o i -ésimo harmônico e o primeiro harmônico
n	Número de harmônicos considerados

Fonte: adaptada de Bachmann *et al.*, (1995)

Para avaliar a aceleração dos pavimentos investigados nessa pesquisa, foram selecionados dois tipos de excitações dinâmicas, caminhada humana e atividade aeróbica. Para modelagem numérica da atividade de caminhada utilizou-se à risca a série de *Fourier* (Equação 63) com os coeficientes apresentados na Tabela 48 e $G = 800N$.

Tabela 48 – Valores normalizados para os coeficientes de força dinâmica de acordo com o tipo de atividade

Atividade	Frequência (H_z)		Coeficientes de Fourier e atrasos de fase					Densidade de projeto
			α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3	(pessoas/m ²)
Andar	Vertical	2,0	0,4	0,1	$\frac{\pi}{2}$	0,1	$\frac{\pi}{2}$	~1
		2,4	0,5					
	Para frente	2,0	0,2	0,1				
			$\alpha_{1/2} = 0,1$					
Lateral	2,0	$\alpha_{1/2} = 0,1$	$\alpha_{3/2} = 0,1$					
Correr	-	2,0 à 3,0	1,6	0,7		0,2		-
Pular	Normal	2,0	1,8	1,3	*	0,7	*	Em treinos de condicionamento ~0,25 (em casos extremos até 0,5) * $\phi_2 = \phi_3 = \pi(1 - f_p t_p)$
		3,0	1,7	1,1		0,5		
	Alto	2,0	1,9	1,6		1,1		
		3,0	1,8	1,3		0,8		
Dançar	-	2,0 à 3,0	0,5	0,15		0,1		~4 (em casos extremos até 6)
Bater palmas em pé	-	1,6	0,17	0,10		0,04		Em acentos não fixo ~4 (em casos extremos até ~6) Com acentos fixos ~2 à 3
		2,4	0,38	0,12		0,02		
Bater palmas sentado	Normal	1,6	0,024	0,010		0,009		~2 à 3
		2,4	0,047	0,024		0,015		
	Intensamente	2,0	0,170	0,047		0,037		
Balanço lateral do corpo	Sentado	0,6	$\alpha_{1/2} = 0,4$					~3 à 4
	Em pé	0,6	$\alpha_{1/2} = 0,5$					

Fonte: adaptada de Bachmann *et al.*, (1995)

Na modelagem do carregamento dinâmico das atividades aeróbicas também se fez uso da série de *Fourier* (Equação 63) com os valores de α_i e ϕ_i presentes na Tabela 48 para atividade de corrida, com a diferença que ao invés de excitar apenas um ponto, aplicou-se a amplitude do carregamento à uma carga distribuída de 0,20kN/m² para três valores distintos de frequência da atividade (f_p), correspondentes ao primeiro, segundo e terceiro harmônico fornecidos pelo AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) para atividade aeróbica da Tabela 37. Na Tabela 49 são apresentados todos os coeficientes utilizados para cada tipo de atividade na modelagem do carregamento dinâmico dos modelos numéricos, bem como o amortecimento β ,

onde adotou-se o valor de 4,50% quando o piso foi submetido à atividade de caminhada e 6% para atividade rítmica, valores oriundos das recomendações presentes no SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016).

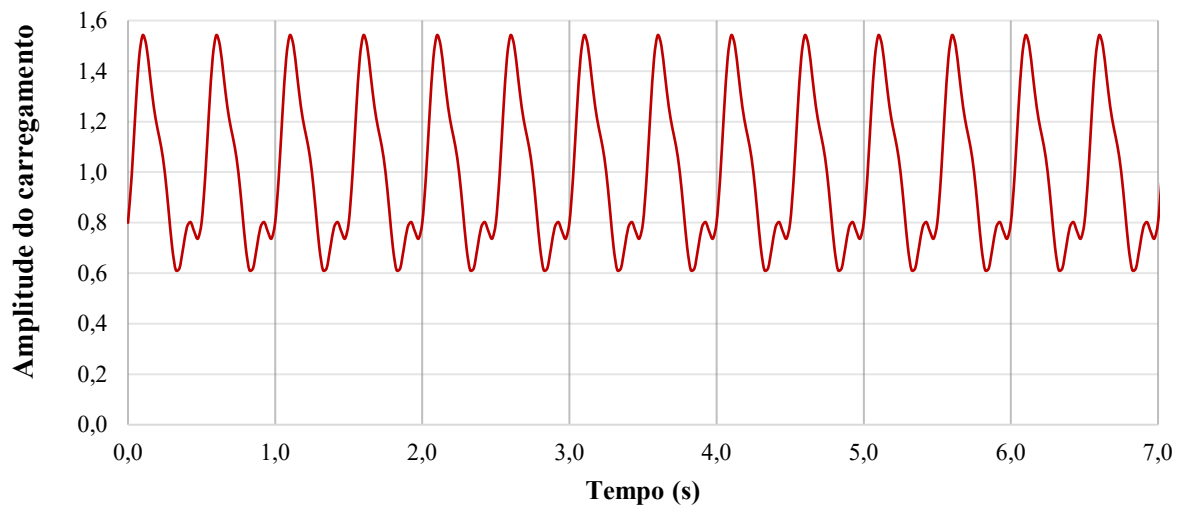
Tabela 49 – Coeficientes adotados para modelagem dos carregamentos dinâmicos utilizados na série de *Fourier*

Atividade	Carga dinâmica	Amortecimento	f_p (Hz)	Coeficientes de Fourier e atrasos de fase				
		β		α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3
Caminhada	800N	0,045 (4,50%)	2,00	0,40	0,10	$\pi/2$	0,10	$\pi/2$
Aeróbica	0,20 kN/m ²	0,060 (6,00%)	2,75	1,60	0,70	-	0,20	-
			5,50					
			8,25					

Fonte: elaborada pelo autor

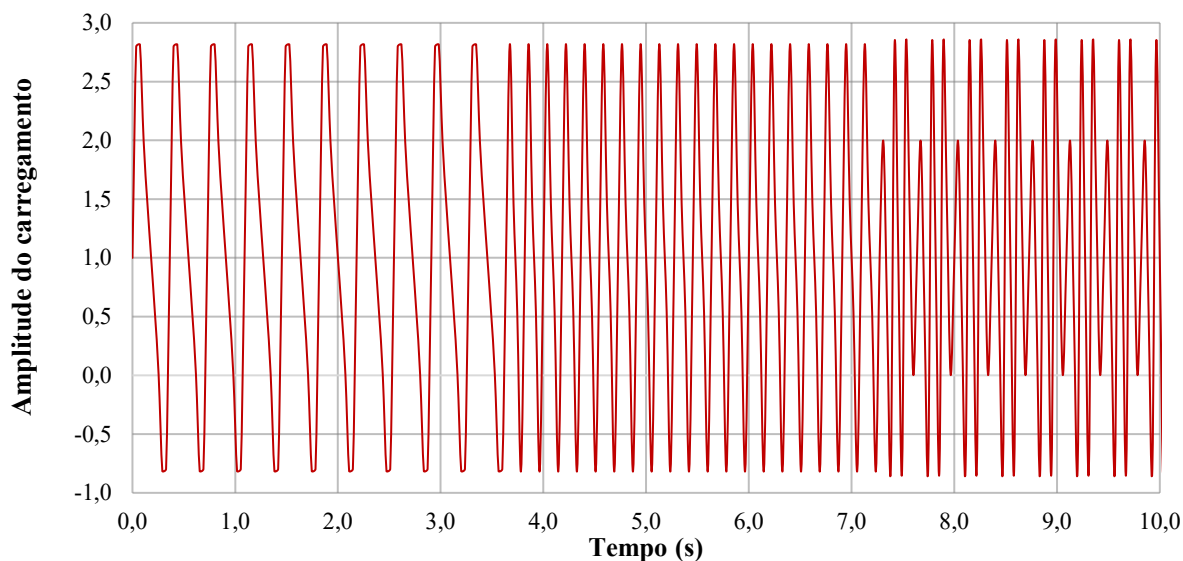
Para melhor visualizar a modelagem do carregamento dinâmico das atividades de caminhada e aeróbica utilizando os parâmetros e coeficientes indicados na Tabela 49, são apresentados, respectivamente, no Gráfico 3 e Gráfico 4 as funções tempo x amplitude do carregamento da atividade de caminhada e atividade aeróbica.

Gráfico 3 – Amplitude do carregamento dinâmico para atividade de caminhada



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 4 – Amplitude do carregamento dinâmico para atividade aeróbica



Fonte: elaborada pelo autor

Na modelagem numérica do *software* SAP2000 V21, para atividades de caminhada aplicou-se uma carga concentrada de 800N no centro de uma baía dos pisos, cuja variação de sua intensidade ao longo do tempo seguiu como mostra o Gráfico 3, e na modelagem da carga dinâmica para atividade aeróbica aplicou-se uma carga distribuída de 0,20kN/m² em que a variação de sua intensidade foi a do Gráfico 4.

5.3 Comentários finais sobre a metodologia

Quanto aos modelos analíticos, foram investigados os pisos descritos na Tabela 43 (12 modelos com laje maciça), Tabela 44 (12 modelos com laje mista e forma MF50) e Tabela 45 (12 modelos com laje mista e forma MF70), todos eles com módulo de elasticidade do concreto $E_{cd} = 30.428\text{MPa}$, totalizando em 36 modelos analíticos E30.

Contabilizando todos os modelos, foram gerados 132 modelos numéricos e 36 modelos analíticos descritos, respectivamente, com a Tabela 50 e com a Tabela 51.

Tabela 50 – Quantidade de modelos numéricos

Comprimento dos pilares	Perfil dos pilares	Módulo de Elasticidade do Concreto	Tipologia das lajes		
			Maciça	Mista com forma de aço incorporada	
H4 (0,75m)	Tabelados (Tabela 43, Tabela 44 e Tabela 45)	E22	12		
		E30	12	MF50	MF75
H2 (1,50m)		E22	12	12	12
		E30	12	12	12
	Com aumento da rigidez (Tabela 46)	E22	12	12	12
Total de modelos numéricos			132		

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 51 – Quantidade de modelos analíticos

Módulo de Elasticidade do Concreto (30.428MPa)	Tipologia da laje		
	Maciça	Mista com forma de aço incorporada	
		MF50	MF75
E30	12 (Tabela 43)	12 (Tabela 44)	12 (Tabela 45)
Total de modelos analíticos	36		

Fonte: elaborada pelo autor

Por fim, os resultados de todos os modelos e demais parâmetros pertinentes à análise das estruturas são discutidos e analisados no Capítulo 6 – Análise dos Pisos Mistos de Aço e Concreto.

Capítulo 6

Análise dos Pisos Mistos de Aço e Concreto

Nesse Capítulo são apresentados os resultados da pesquisa juntamente com suas análises. Para melhor fluidez do texto a maioria das Tabelas com os resultados apresentados nos Gráficos e Tabelas presentes nesse Capítulo foram transferidas para o Anexo 1.

Esse Capítulo é dividido em duas etapas. A primeira etapa trata da análise das frequências fundamentais dos pavimentos mistos juntamente como a comparação e avaliação da aceitabilidade dos pisos para garantia do conforto humano frente as vibrações de acordo com as normativas nacionais (ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 8800:2008), que verificam a aceitabilidade dos pavimentos com base somente em suas frequências fundamentais.

Posterior as análises da primeira etapa, é realizada a avaliação das acelerações de pico dos pavimentos submetidos por caminhada humana e por atividades rítmicas (aeróbicas), determinadas numericamente e analiticamente. Por fim, é avaliada a aceitabilidade dos pisos para garantia do conforto humano para os dois tipos de ações dinâmicas.

A análise da aceitabilidade dos pisos excitados por caminhada humana é feita com base nos critérios do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), cujos procedimentos de análise foram trabalhados no item 4.2, onde também foi desenvolvido um exemplo do procedimento analítico no item 4.2.3. As verificações da aceitabilidade dos modelos solicitados por carregamento dinâmico relativos à ocorrência de atividades rítmicas (aeróbicas) seguem os critérios do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), abordado no item 4.3.4. e com desenvolvimento de um exemplo analítico presente no item 4.3.5.

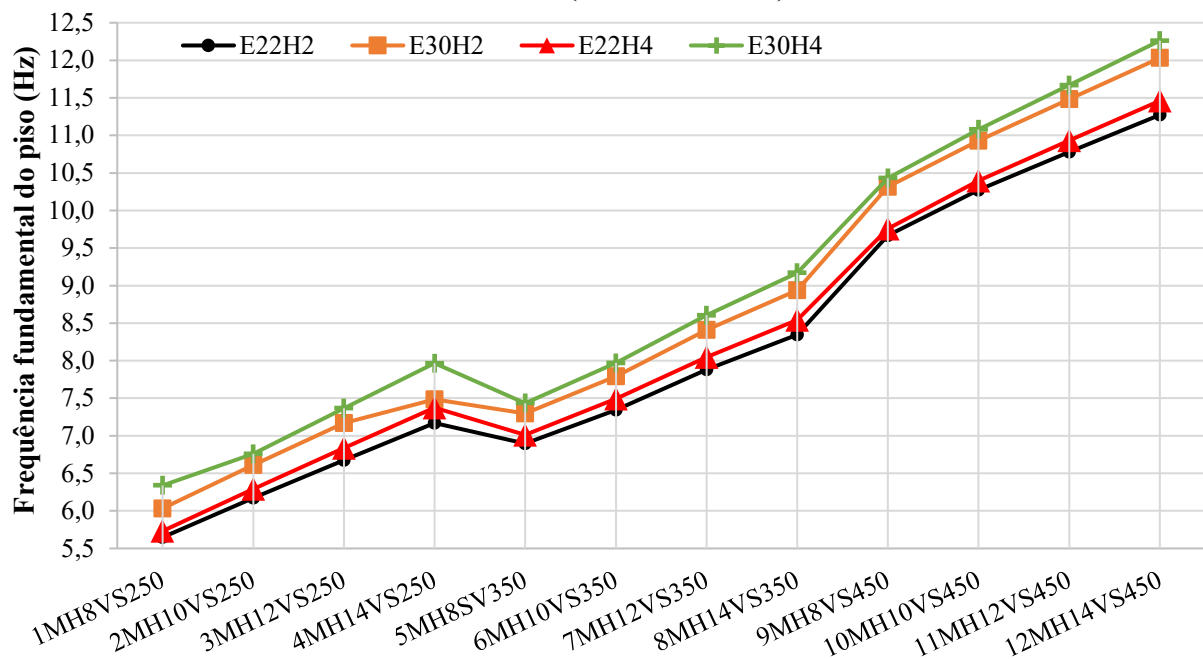
6.1 Análise da frequência fundamental dos pavimentos mistos de aço e concreto

Inicialmente, relativo a análise da influência das propriedades geométricas dos elementos constituintes do piso na frequência fundamental dos pavimentos mistos para avaliar a influência da majoração do módulo de elasticidade do concreto, na Tabela 55 estão os resultados dos modelos com laje maciça descritos na Tabela 43, variando o módulo de elasticidade do concreto e o comprimento dos pilares engastados em suas extremidades.

Os resultados da Tabela 55 são apresentados no Gráfico 5 que retrata a variação da frequência fundamental em relação ao módulo de elasticidade do concreto (22.540MPa e 30.428MPa) dos modelos com pilar de meia e um quarto de altura, identificados como, respectivamente modelos E22H2, E22H4, E30H2 e E30H4.

Os resultados do Gráfico 5 mostram que o módulo de elasticidade do concreto exerce pouca influência na frequência fundamental dos pavimentos modelados numericamente. A majoração de 35% do módulo de elasticidade do concreto acarretou um aumento médio de 6,49% na frequência fundamental dos pisos com pilares de meia altura e 7,30% nos pavimentos com pilares de um quarto de altura. A redução dos pilares de meia altura para um quarto de altura, resultou em um aumento médio de 2,63% e 1,85% da frequência fundamental dos pavimentos, respectivamente, dos pisos com módulo de elasticidade do concreto de 30.428MPa e 22.540MPa, podendo concluir assim que um acréscimo de 100% na rigidez dos pilares resultou em um aumento médio de 2,63% no melhor dos cenários.

Gráfico 5 – Frequência fundamental dos modelos com pilares de meia altura e um quarto de altura de laje maciça com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2 e E22H4) e 30.428MPa (E30H2 e E30H4)



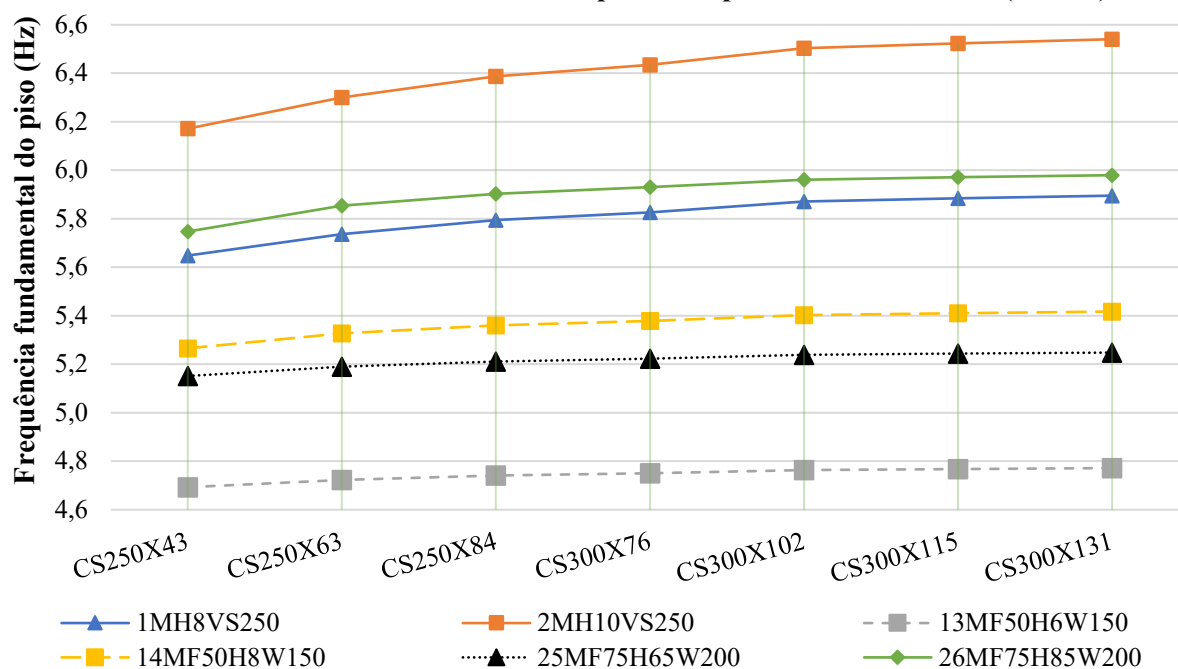
Indicação dos modelos com laje maciça de concreto

Fonte: elaborada pelo autor

Realizando incrementos menores de rigidez nos pilares de meia altura em 6 diferentes pisos com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (modelos E22H2), foram gerados os 36 modelos previstos na Tabela 46, e seus resultados são apresentados na Tabela 56. O Gráfico 6 mostra a variação da frequência fundamental dos pisos mistos à medida que se

aumentou a rigidez dos pilares como os dados da Tabela 56. Com um incremento total de rigidez em torno do eixo "x" de 325% e em torno do eixo "y" de 384%, máximo aumento na frequência fundamental foi de 5,98% e a média das máximas variações dos 6 modelos foi de 3,47% relativo aos incrementos de rigidez citados anteriormente.

Gráfico 6 – Variação da frequência fundamental dos modelos com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa de acordo com o perfil dos pilares de meia altura (E22H2)



Fonte: elaborada pelo autor

Observando o Gráfico 6, percebe-se que a frequência fundamental dos pisos tende a ser constante mesmo com grandes incrementos de rigidez nos pilares. Dessa forma, ficou claro que incrementos de rigidez nesses elementos exerce pouca influência na frequência fundamental dos pavimentos.

A Tabela 57 apresenta as frequências fundamentais dos pisos de laje maciça e pilares com meia altura indicados na Tabela 43, modelados no *software* SAP2000 V21. O Gráfico 7 mostra a variação da frequência fundamental dos pavimentos de acordo com perfil das vigas secundárias e altura total da laje (h_t) com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2) e o Gráfico 8 com concreto de módulo de elasticidade igual a 30.428MPa (E30H2). Nos modelos gerados, a cada centímetro que se adicionou a altura das lajes maciças, a frequência fundamental dos pisos aumentou em média 3,35% nos modelos E22H2 e 3,29% nos modelos E30H2.

Gráfico 7 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje maciça por vigaento (resultado do processo numérico E22H2)

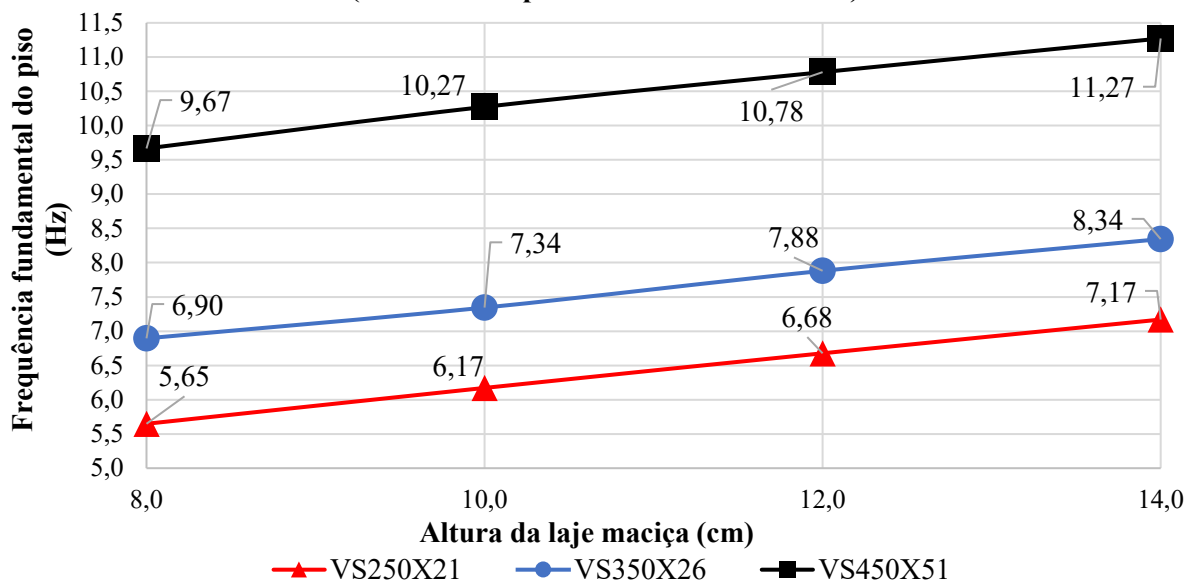
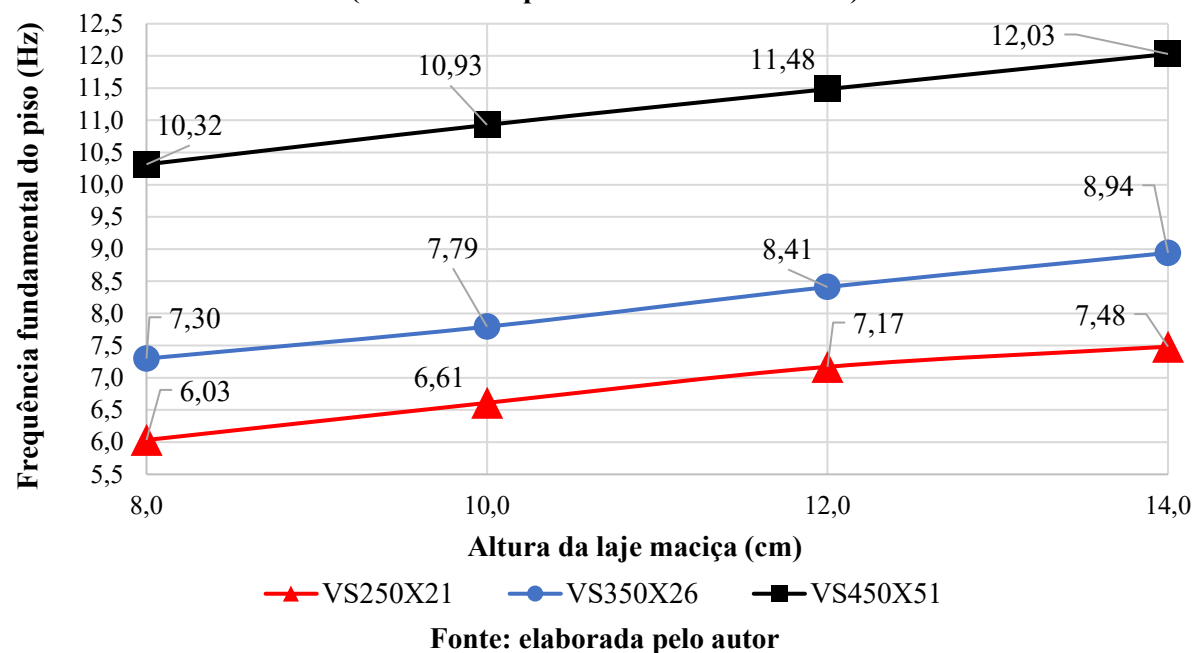


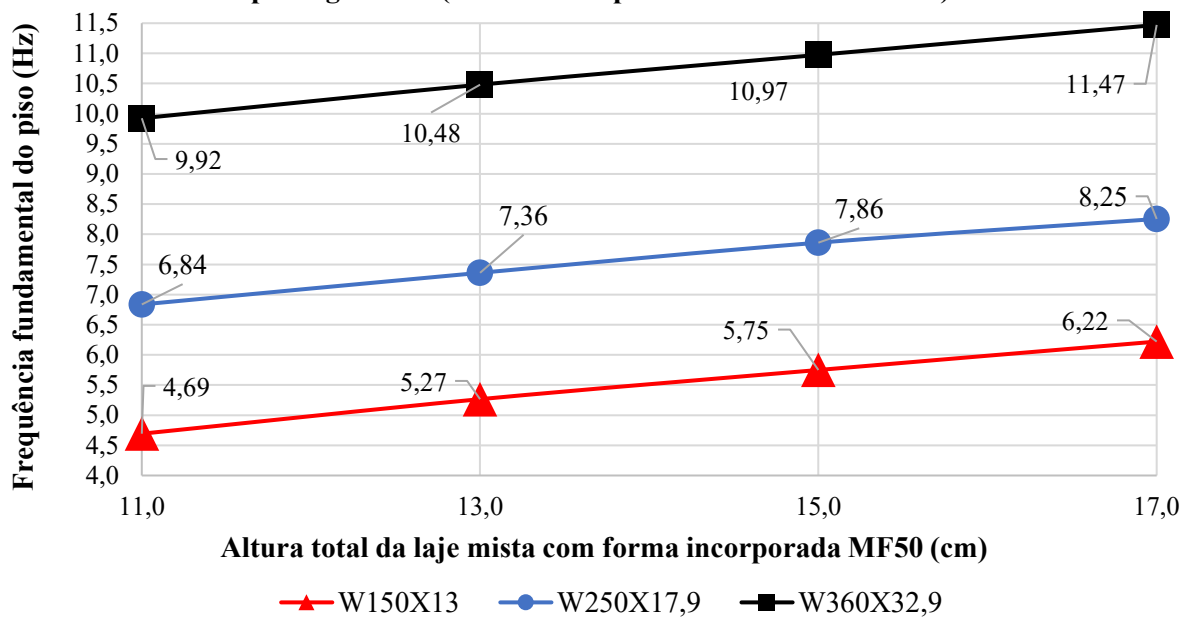
Gráfico 8 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje maciça por vigaento (resultado do processo numérico E30H2)



A Tabela 58 mostra os valores das frequências fundamentais dos pisos com laje mista de concreto com de forma de aço incorporada MF50 e pilares de meia altura, indicados na Tabela 44 e modelados no *software* SAP2000 V21. O Gráfico 9 mostra a variação das frequências fundamentais dos pavimentos de acordo com perfil das vigas secundárias e altura total das lajes (h_t) com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2) e o Gráfico 10 com módulo de elasticidade do concreto de 30.428MPa (E30H2). Nos modelos gerados,

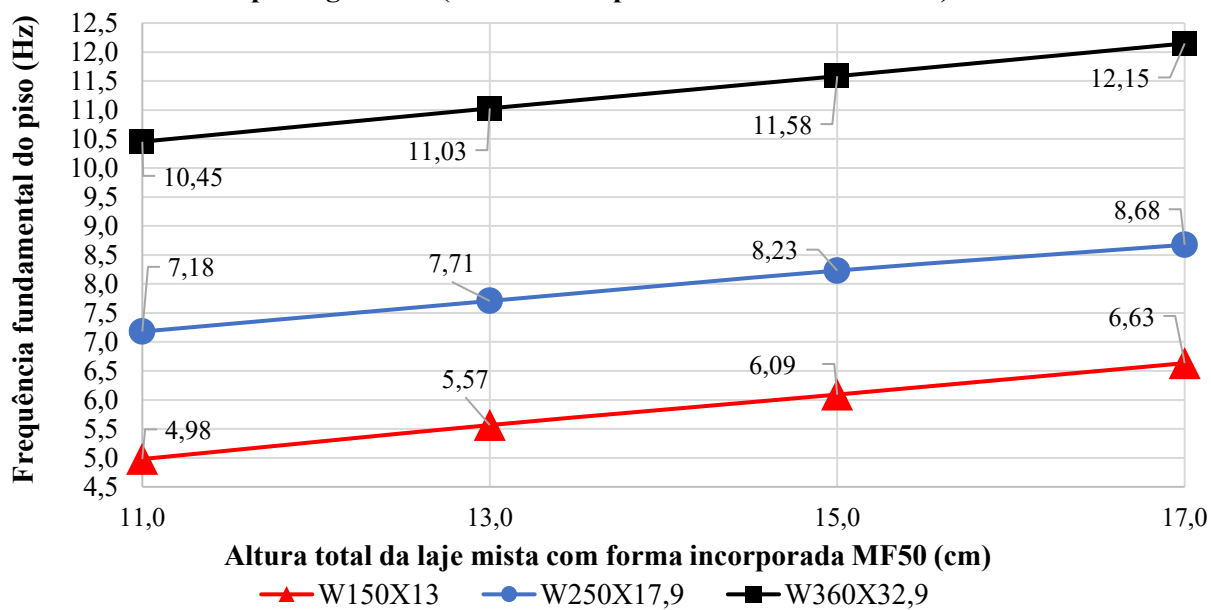
cada centímetro acrescentado à espessura da capa de concreto (t_c) acima das formas MF50 das lajes mistas, a frequência fundamental dos pisos aumentou em média 3,55% nos modelos E22H2 e 3,62% nos modelos E30H2.

Gráfico 9 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF50 por vigamento (resultado do processo numérico E22H2)



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 10 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF50 por vigamento (resultado do processo numérico E30H2)

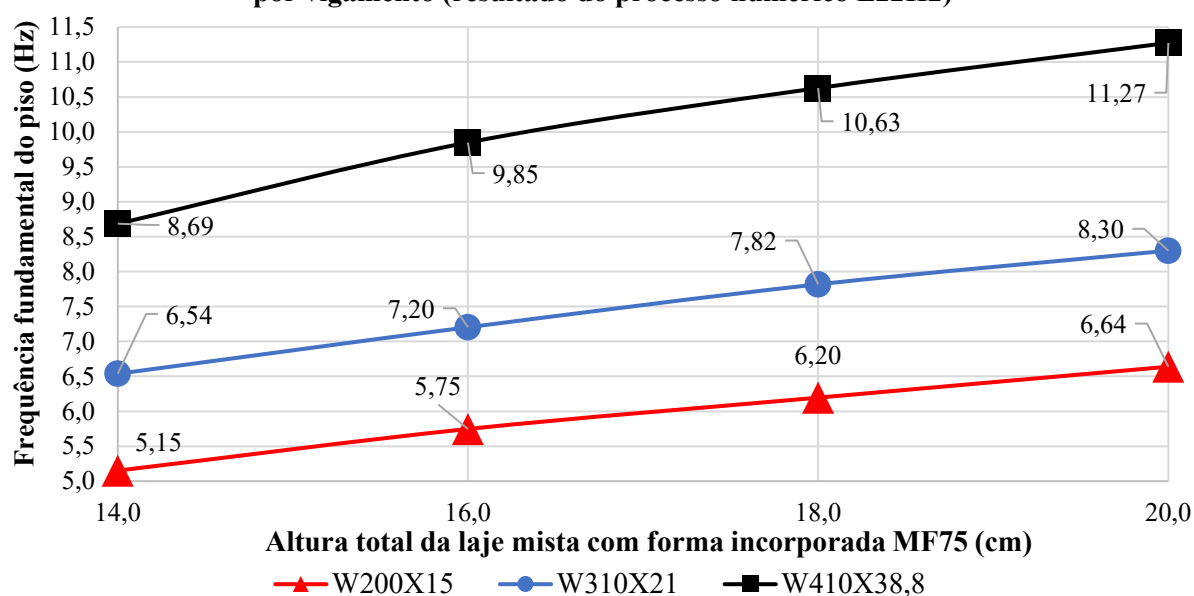


Fonte: elaborada pelo autor

A Tabela 59 apresenta os valores das frequências fundamentais dos pisos com laje mista de concreto com de forma de aço incorporada MF75 e pilares de meia altura, indicados

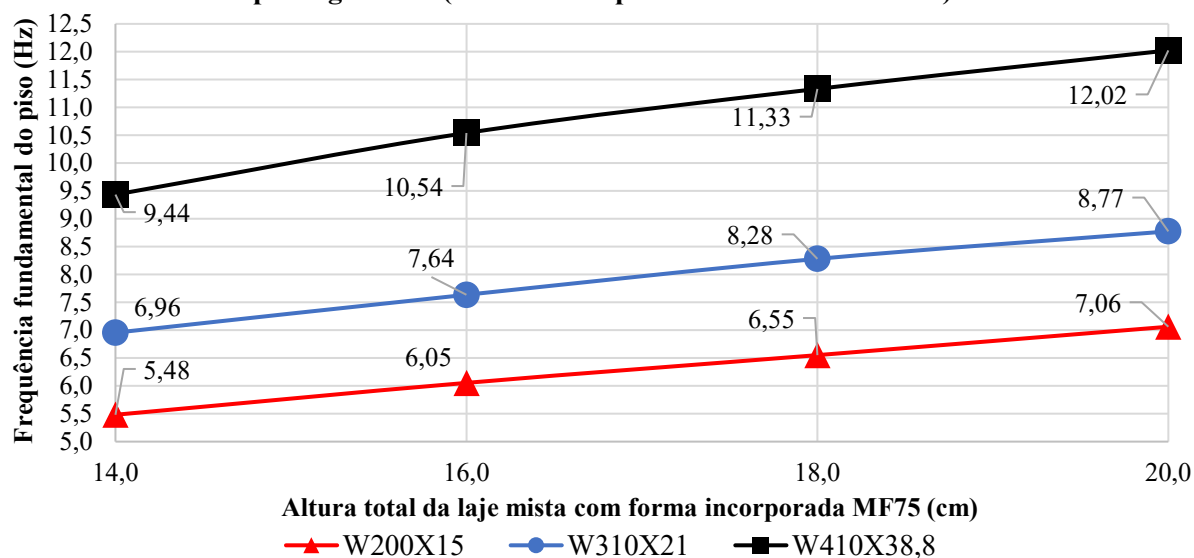
na Tabela 45 e modelados no *software* SAP2000 V21. O Gráfico 11 mostra a variação das frequências fundamentais dos pavimentos de acordo com perfil das vigas secundárias e altura total das lajes (h_t) com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2) e o Gráfico 12 com concreto de módulo de elasticidade igual a 30.428MPa (E30H2). Nos modelos gerados, cada centímetro acrescido à espessura da capa de concreto (t_c) acima das formas MF75 das lajes mistas, a frequência fundamental dos pisos aumentou em média 4,38% nos modelos E22H2 e 4,22% nos modelos E30H2.

Gráfico 11 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF75 por vigamento (resultado do processo numérico E22H2)



Fonte: elaborada pelo autor

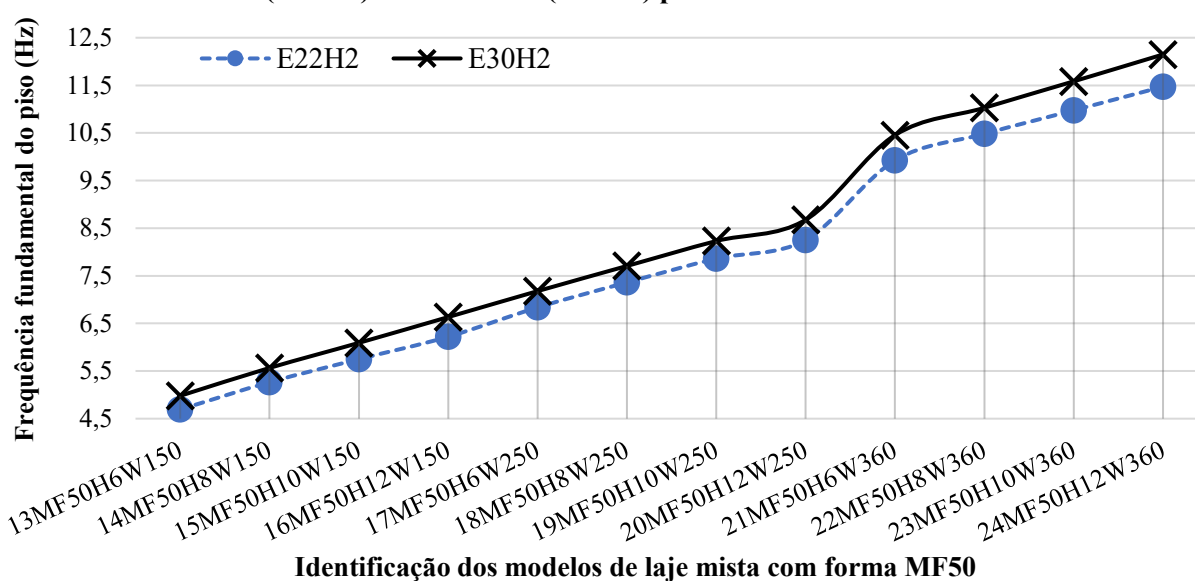
Gráfico 12 - Altura da laje × frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF75 por vigamento (resultado do processo numérico E30H2)



Fonte: elaborada pelo autor

Utilizando os dados da Tabela 58 e Tabela 59, foi possível verificar que a majoração de 35% no módulo de elasticidade do concreto nos modelos numéricos exerceu influência na frequência fundamental dos pavimentos de lajes mistas com forma de aço incorporada, como nos pavimentos com lajes maciças, acarretando um aumento médio de 5,49% e 6,41%, respectivamente, na frequência fundamental dos pisos de lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 (Gráfico 13) e MF75 (Gráfico 14).

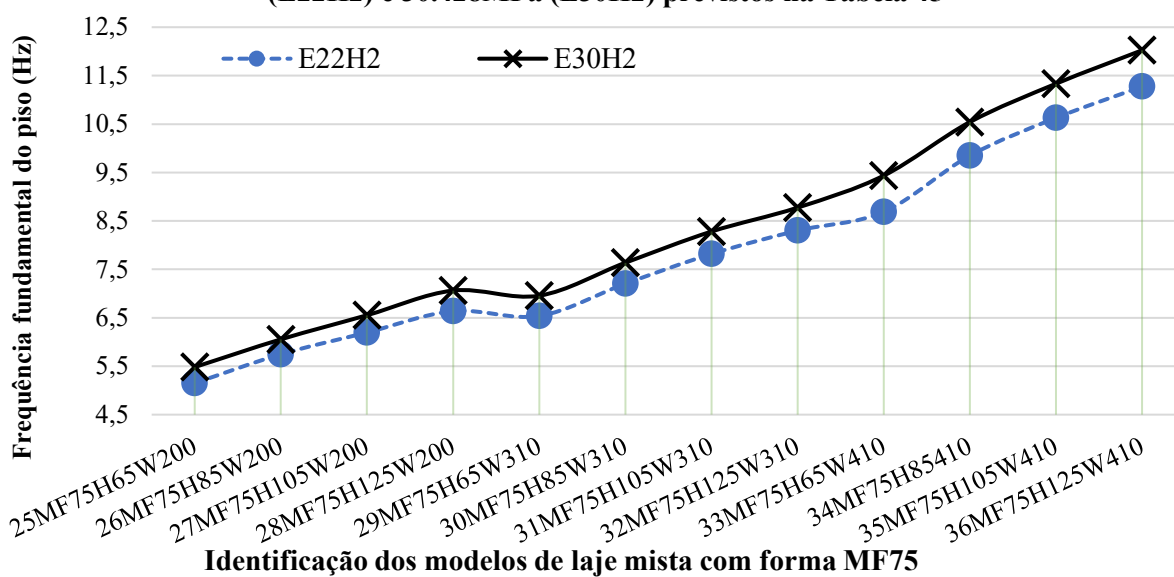
Gráfico 13 – Frequências fundamentais dos modelos com pilares de meia altura e lajes mistas com formas de aço incorporadas MF50 com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2) e 30.428MPa (E30H2) previstos na Tabela 44



Identificação dos modelos de laje mista com forma MF50

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 14 – Frequências fundamentais dos modelos com pilares de meia altura e lajes mistas com formas de aço incorporadas MF75 com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa (E22H2) e 30.428MPa (E30H2) previstos na Tabela 45



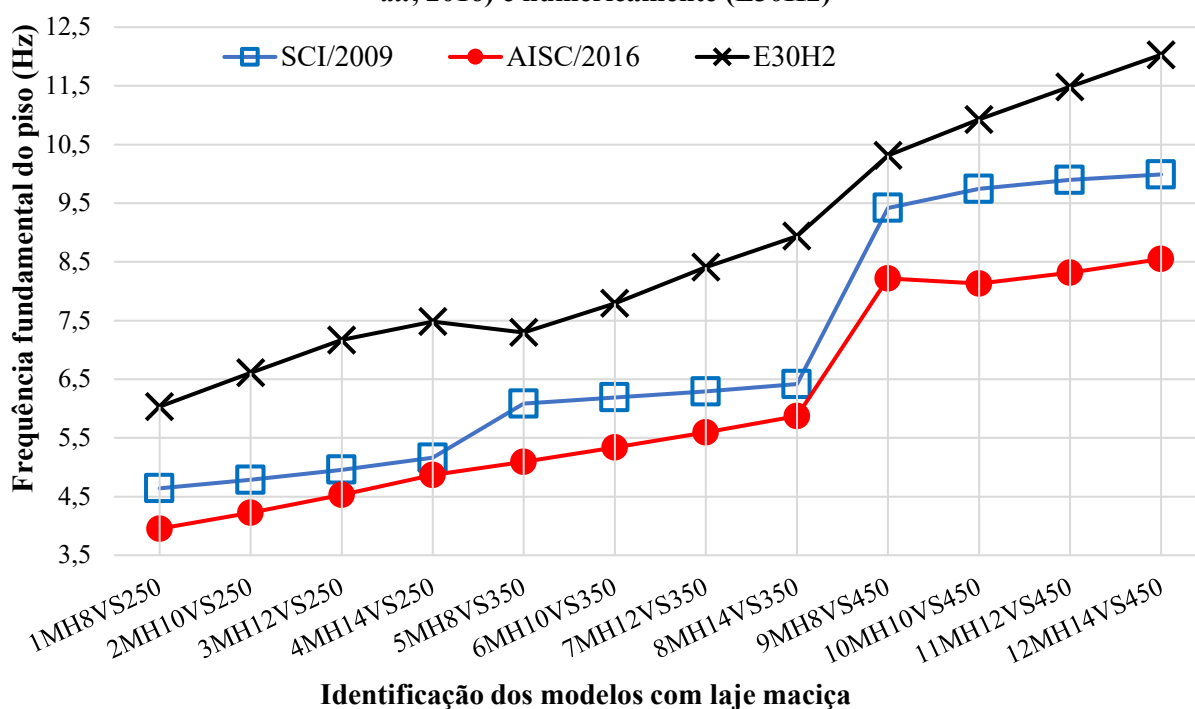
Identificação dos modelos de laje mista com forma MF75

Fonte: elaborada pelo autor

Foram determinadas as frequências fundamentais dos 36 pisos mistos analiticamente com uso da planilha eletrônica desenvolvida pelo autor. Desses 36 modelos, 12 são de pisos mistos com lajes maciças, cujos resultados na Tabela 60, 12 modelos de pavimentos de lajes mistas com forma de aço incorporada MF50 (resultados na Tabela 61) e outros 12 modelos com forma de aço MF75 (resultados na Tabela 62). Todos esses modelos analíticos majoraram em 35% o módulo de elasticidade do concreto, utilizando assim o valor de 30.428MPa.

Quanto ao resultado dos modelos analíticos, a cada centímetro acrescido à capa de concreto (t_c) acima das formas MF50 e MF75, a frequência fundamental dos pisos aumentou em média, respectivamente, 1,27% e 1,39% seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), já seguindo o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), o aumento médio foi de 2,38% e 1,96%. Nos pavimentos com laje maciça, cada centímetro acrescido às lajes aumentou em média a frequência fundamental 1,23% seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e 2,23% seguindo o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016). Os valores das frequências fundamentais dos pisos maciços determinadas analiticamente seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) foram em média 21,12% inferiores aos resultados dos modelos numéricos E30H2 e em média 31,19% inferiores seguindo o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) (o Gráfico 15 mostra esses resultados).

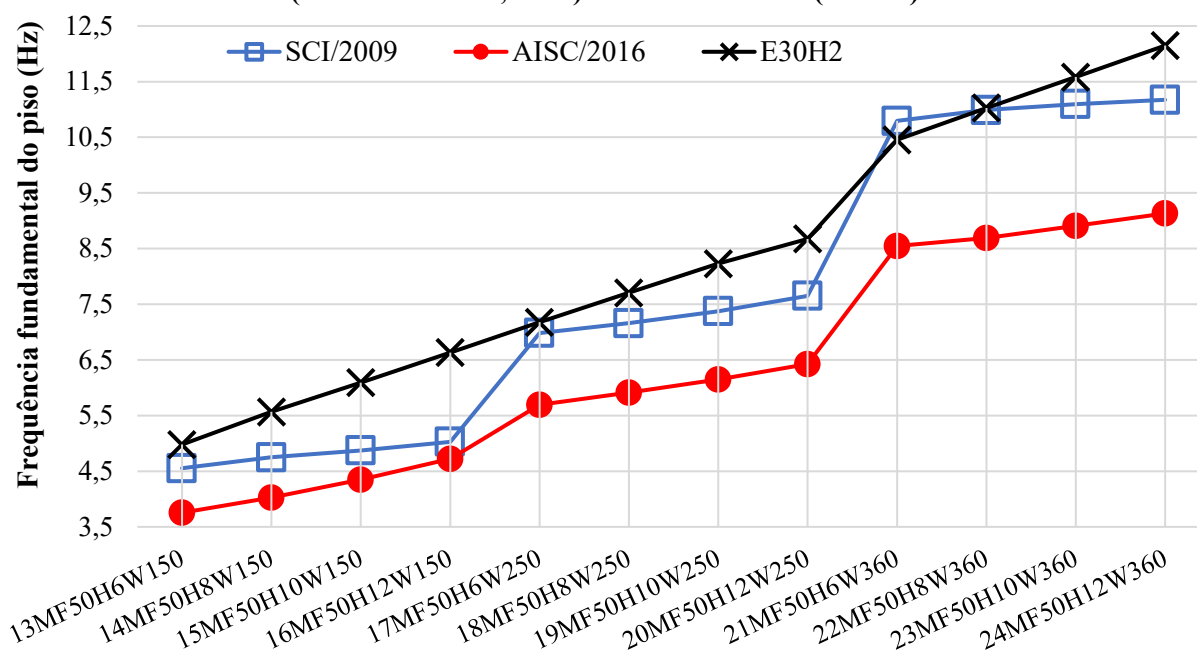
Gráfico 15 - Comparação da frequência fundamental dos pisos de laje maciça determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2)



Fonte: elaborada pelo autor

Quanto os modelos com forma de aço MF50, as frequências fundamentais dos pisos com lajes mistas calculadas analiticamente seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) foram em média 9,06% inferiores aos resultados dos modelos numéricos E30H2 e 24,35% inferiores seguindo o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016). Já os modelos com forma MF75, em média as frequências fundamentais seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) foram 7,56% inferiores aos modelos numéricos E30H2 e 21,79% inferiores utilizando o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016). O Gráfico 16 e o Gráfico 17 mostram, respectivamente, tais resultados dos pavimentos com laje mista com forma MF50 e MF75.

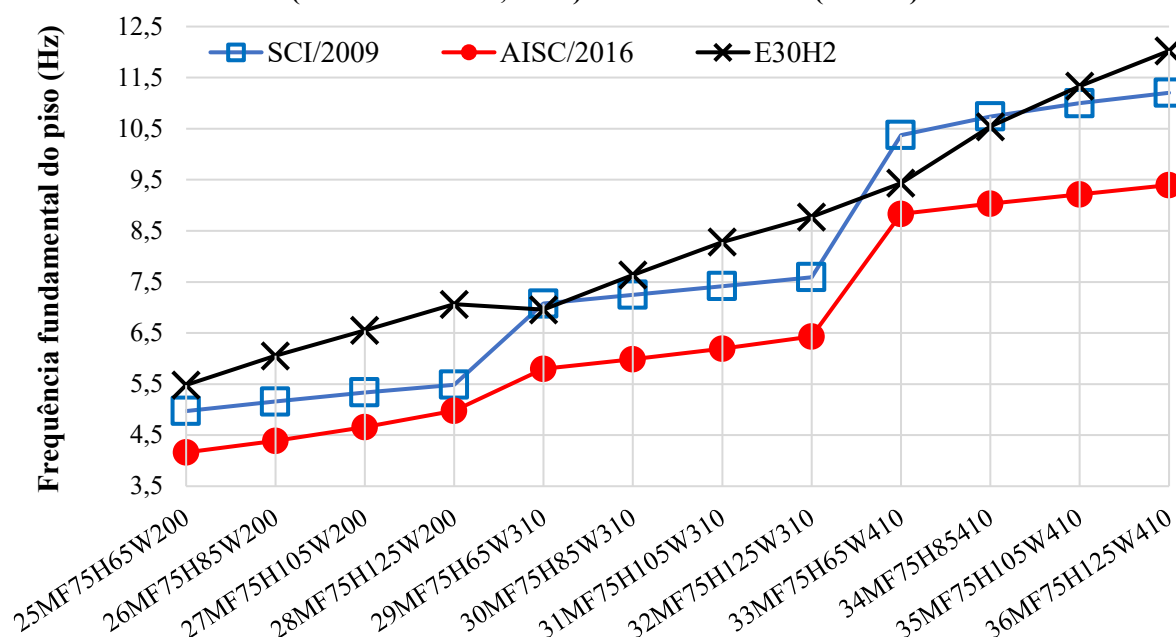
Gráfico 16 - Comparação da frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF50 determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2)



Identificação dos modelos de laje mista com forma MF50

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 17 - Comparação da frequência fundamental dos pisos de laje mista com forma MF75 determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2)

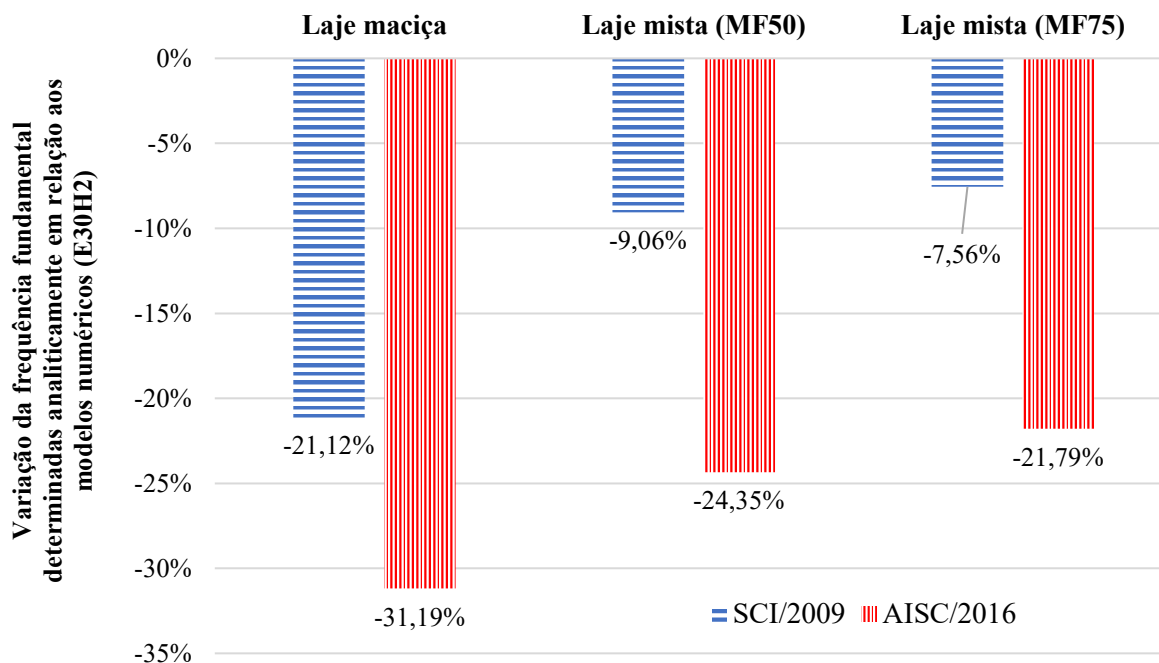


Identificação dos modelos de laje mista com forma MF75

Fonte: elaborada pelo autor

O Gráfico 18 mostra resumidamente as variações médias das frequências fundamentais dos pisos para cada tipologia de laje (maciça, mista com fôrma de aço MF50 e fôrma de aço MF75) determinadas analiticamente, utilizando o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), em relação aos valores encontrados numericamente, relativos aos modelos numéricos E30H2 (com módulo de elasticidade dinâmico do concreto $E_{cd} = 30.428\text{MPa}$ e pilares de meia altura, 1,50m acima e 1,50m abaixo do piso).

Gráfico 18 – Variação da frequência fundamental dos pisos mistos determinadas analiticamente utilizando o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e o AISC/20016 (MURRAY *et al.*, 2016) em relação aos valores determinados via modelagem numérica dos modelos E30H2 para cada tipologia de laje



Fonte: elaborada pelo autor

Avaliando a aceitação dos pisos mistos estudados diante das normativas nacionais (ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 8800:2008) que consideram somente a frequência fundamental dos pavimentos, para atividade de escritório todos os pisos seriam aceitáveis diante das normativas nacionais citadas.

Já para salas de dança, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014 que determina frequência fundamental mínima de $8,4H_z$, dos 36 pisos analisados, 16 pavimentos seriam aceitáveis e 20 não estariam aptos. Para atividades rítmicas repetitivas com base na ABNT NBR 8800:2008 que determina frequência fundamental mínima de $8H_z$, dos 36 pavimentos avaliados, 18 pisos estariam aptos para atividades rítmicas repetitivas e 18 pavimentos não seriam aceitáveis. Tais valores de referência foram abordados no item 4. que trata das normativas nacionais para aceitação das vibrações.

Na Tabela 52 são apresentados os números citados nos parágrafos anteriores de forma detalhada para cada tipologia de pavimento investigada (pisos com laje maciça, mista com forma MF50 e MF75). A análise foi realizada com base na frequência fundamental dos pavimentos determinadas numericamente, com valores que podem ser verificados separadamente na Tabela 57, Tabela 58 e Tabela 59, respectivamente, dos pavimentos com laje

maciça e mista com forma MF50 e MF75. Os valores das frequências fundamentais adotadas foram a dos modelos E30H2.

Tabela 52 – Avaliação da aceitação dos pavimentos diante das normativas nacionais (ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 8800:2008)

Tipo de ocupação	Escritório				Sala de dança		Atividade rítmica repetitiva	
	ABNT NBR 6118:2014		ABNT NBR 8800:2008		ABNT NBR 6118:2014		ABNT NBR 8800:2008	
Tipologia do pavimento	Aceito	Não Aceito	Aceito	Não Aceito	Aceito	Não Aceito	Aceito	Não Aceito
Laje maciça	12	0	12	0	6	6	6	6
Laje mista (MF50)	12	0	12	0	5	7	6	6
Laje mista (MF75)	12	0	12	0	5	7	6	6
Total	36	0	36	0	16	20	18	18

Fonte: elaborada pelo autor

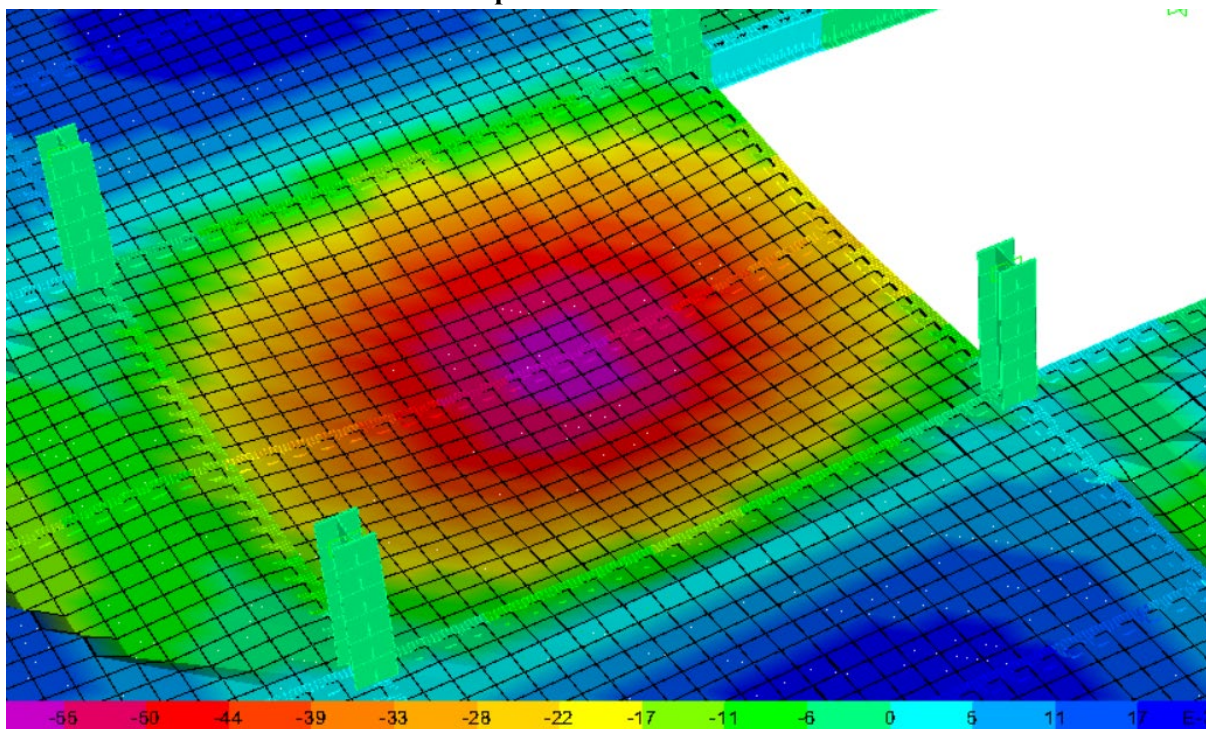
6.2 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto

Nos itens 6.2.1 e 6.2.2 são apresentados os resultados das acelerações dos pisos investigados cujos ponto e área de excitação, bem como, ponto de medição foram definidos no item 5. , que tratou da modelagem numérica dos pavimentos. A análise das acelerações dos pavimentos investigadas foi separada de acordo com o tipo de excitação dinâmica. O item 6.2.1 trata dos pavimentos excitados por caminhada humana e o item 6.2.2 dos pisos solicitados por atividades rítmicas.

6.2.1 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto excitados por caminhada humana

A Figura 39 mostra a aceleração do modelo 12MH14VS450E30H2 excitado por caminhada humana no centro de uma baia cuja intensidade variação do carregamento dinâmico admitida foi a apresentada no Gráfico 3 do item 5.2. A aceleração máxima medida no nó do centro da baia (centro da viga secundária) foi de $0,041\text{m/s}^2$ enquanto que no centro das lajes da baia excitada foi de $0,027\text{m/s}^2$, valores esses que são um pouco dispersos dos mostrados na Figura 39 devido ao fato das acelerações apresentadas serem referentes aos elementos de área.

Figura 39 – Aceleração máxima absoluta na direção z (perpendicular ao piso) do modelo 12MH14VS450E30H2 excitado por caminhada humana no centro da baía em m/s^2



Fonte: elaborada pelo autor

Nos pavimentos excitados por caminhada humana, o ponto de medição da aceleração se mostrou bastante pertinente. Nos pisos com laje maciça ao se medir a aceleração no centro da baía, com base nos resultados dos modelos numéricos, 4 pavimentos estariam aceitáveis ao funcionamento de escritórios de acordo com os critérios do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), e medindo a aceleração no ponto central das lajes 9 pavimentos estariam aptos para esse tipo de utilização. O Gráfico 19 apresenta as acelerações dos pisos com laje maciça submetidos à caminhada humana com valores medidos no centro da baía (viga) e aferidas no centro das lajes da baía excitada (laje). Em média, as acelerações medidas no centro da baía foram 40,98% superiores às aferidas no centro das lajes.

Nos pavimentos com laje mista MF50 excitados por caminhada humana, ao se medir a aceleração no centro da baía (centro da laje central), com base nos resultados dos modelos numéricos, nenhum piso estaria apto para o funcionamento de escritórios de acordo com os critérios do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), e medindo a aceleração no ponto central das vigas secundárias, um pavimento estaria aceitável a esse tipo de atividade. O Gráfico 20 apresenta as acelerações dos pavimentos de laje mista com forma MF50 submetidos à caminhada humana com valores medidos no centro da baía (laje) e aferidas no meio das vigas secundárias (viga). Em média, as acelerações medidas no centro da baía foram 36,14% superiores às aferidas no ponto central das vigas secundárias.

Nos pavimentos de laje mista com forma MF75 excitados por caminhada humana, de acordo com os resultados dos modelos numéricos medindo a aceleração no centro da baia (centro da viga secundária) 2 pavimentos seriam aceitáveis ao funcionamento de escritórios de acordo com os critérios do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), e medindo a aceleração no ponto central das lajes 6 pavimentos estariam aptos a esse tipo de atividade. O Gráfico 21 apresenta as acelerações dos pisos solicitados por caminhada humana com valores medidos no centro da baia (viga) e aferidas no centro das lajes da baia excitada (laje). Em média, as acelerações medidas no centro da baia foram 26,39% superiores às aferidas no centro das lajes.

Diante das considerações feitas anteriormente quanto ao ponto de medição da aceleração dos pavimentos solicitados por caminhada humana, a seguir serão discutidas as acelerações e aceitação dos pavimentos em detrimento dos valores encontrados analiticamente, comparando-os com as acelerações aferidas no centro das baias.

Quanto a análise da aceleração dos pavimentos submetidos à atividade de caminhada, o Gráfico 19 apresenta a comparação da aceleração dos pavimentos com laje maciça determinadas analiticamente seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) com as determinadas numericamente, cujos valores estão na Tabela 63. Dos valores encontrados, seguindo os critérios de aceitação do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), a aceleração limite para escritórios é de $0,04\text{m/s}^2$. Assim, somente um pavimento seria aceitável seguindo processos analíticos e nenhum pavimento estaria aceitável de acordo com os resultados dos modelos numéricos. O valor de referência da aceleração para pavimentos destinados à escritório citado foi abordado e detalhado no item 4.2.

O Gráfico 20 e o Gráfico 21 apresentam as mesmas comparações descritas no parágrafo anterior, respectivamente, dos pavimentos com laje mista com forma de aço MF50 e MF75 (resultados presentes na Tabela 64 e Tabela 65). Seguindo os processos analíticos e critérios de aceitação do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), apenas um pavimento com forma de aço MF50 estaria aceitável e quatro pavimentos com forma MF75 estariam satisfatórios, e com base nos resultados dos modelos numéricos, nenhum pavimento com forma MF50 seria aceitável e apenas dois pisos com forma MF75 estariam aptos.

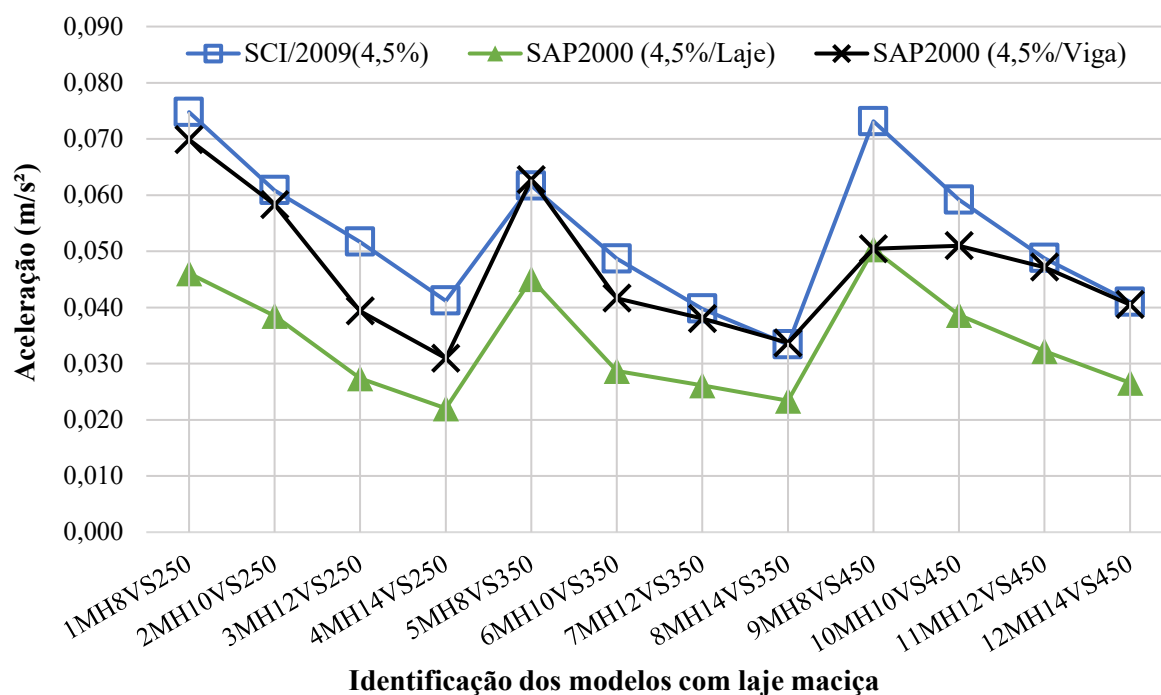
Na Tabela 53 são apresentados os números citados nos parágrafos anteriores de forma detalhada para cada tipologia de pavimento investigada (pisos com laje maciça, mista com forma de aço MF50 e MF75) para atividade de caminhada humana. A análise foi feita com base na aceleração dos pavimentos determinadas numericamente e via processos analíticos.

Tabela 53 – Avaliação da aceitação dos pavimentos com base na aceleração diante do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) dos modelos numéricos E30H2 e dos modelos analíticos para atividade de caminhada

Tipo de ocupação	Escritório			
	Numéricos E30H2		Analíticos (SCI/2009) (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009)	
Modelos				
Tipologia do pavimento	Aceito	Não Aceito	Aceito	Não Aceito
Laje maciça	4	8	2	10
Laje mista (MF50)	0	12	1	11
Laje mista (MF75)	2	10	4	8
Total	6	30	7	29

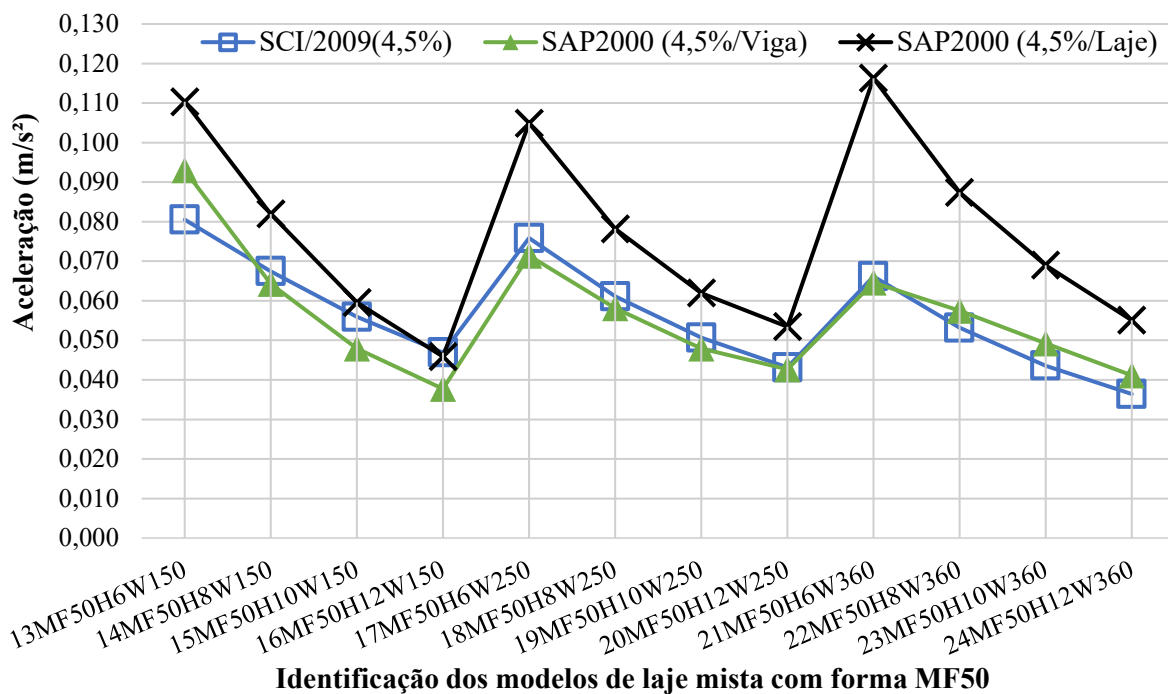
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 19 - Comparação da aceleração dos pisos de laje maciça submetidos à atividade de caminhada determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e numericamente (E30H2) medidas no centro da baía e no centro das lajes



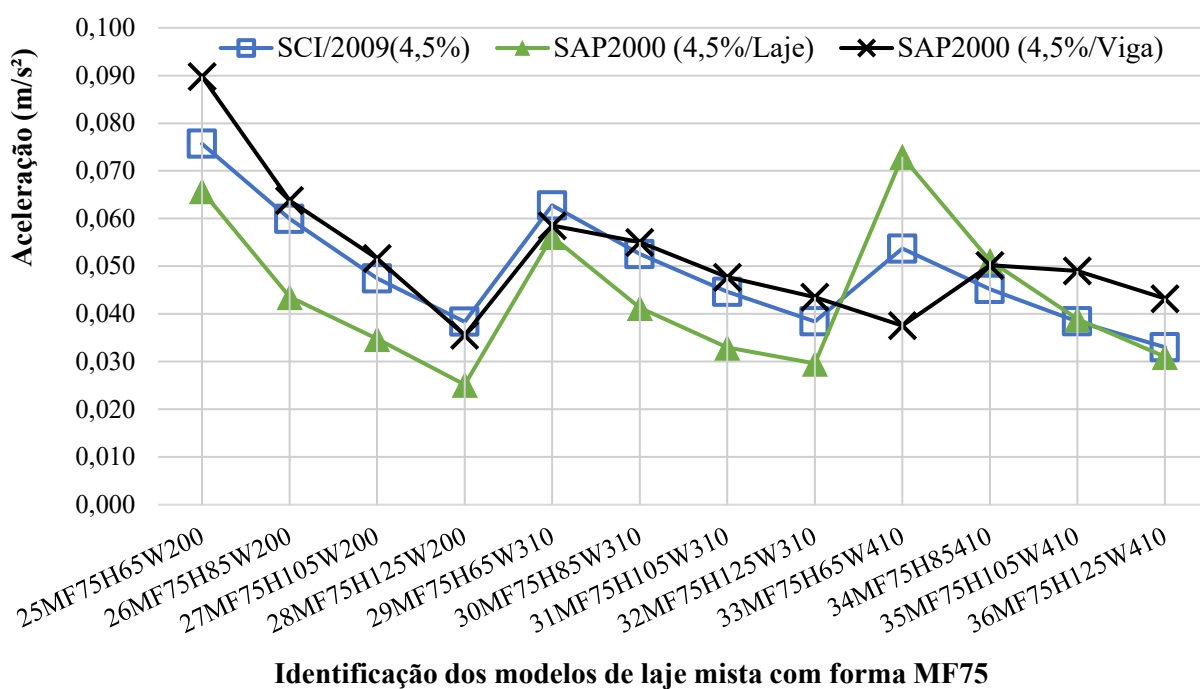
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 20 - Comparação da aceleração dos pisos de laje mista com forma MF50 submetidos à atividade de caminhada determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e numericamente (E30H2) medidas no centro da baía e no centro das vigas secundárias



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 21 - Comparação da aceleração dos pisos de laje mista com forma MF75 submetidos à atividade de caminhada determinadas analiticamente com o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) e numericamente (E30H2) medidas no centro da baía e no centro das lajes



Fonte: elaborada pelo autor

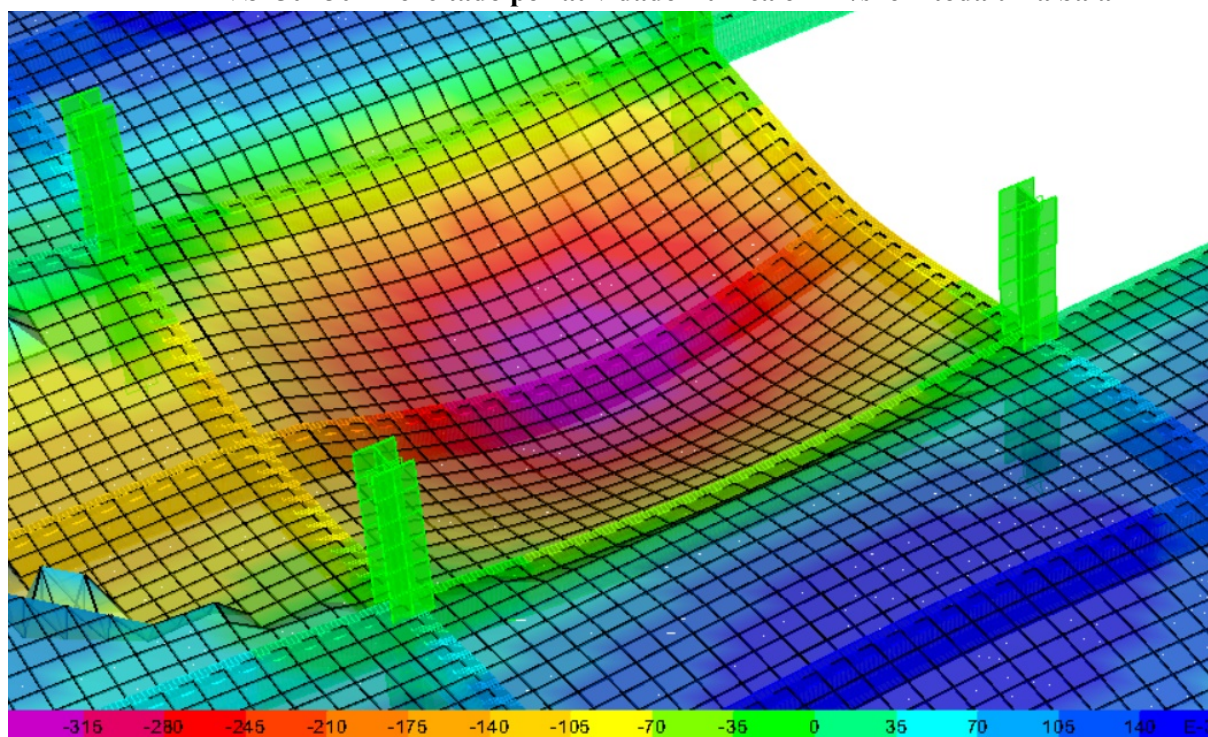
6.2.2 Análise da aceleração dos pavimentos mistos de aço e concreto excitados por atividades rítmicas

A Figura 40 mostra as acelerações absolutas perpendiculares ao piso relativas ao modelo 12MH14VS450E30H2 excitado por atividade rítmica (aeróbica) ao longo de toda uma baia, em que a aceleração máxima no centro da baia foi de $0,297\text{m/s}^2$ (valor referente ao nó do centro da viga em contato com a laje). A Figura 41 mostra as acelerações absolutas perpendiculares ao pavimento também solicitado por atividades rítmicas, porém, em apenas metade da baia (ao longo de apenas uma laje), onde a aceleração máxima do piso, também medida no centro da baia foi de $0,148\text{m/s}^2$ (valor referente ao nó do centro da viga em contato com a laje). Os valores mencionados são um pouco dispersos dos mostrados na Figura 40 e Figura 41 devido ao fato das acelerações apresentadas serem referentes aos elementos de área e os mencionados aferidos em seus respectivos nós.

Dessa forma, é possível concluir que a área de excitação solicitada por atividades rítmicas é relevante. Comparando as acelerações medidas no centro das baias, ao solicitar totalmente uma das baias dos modelos com laje maciça, as acelerações foram em média 97,98% superiores às encontradas excitando apenas metade de uma das baias (apenas uma laje), a comparação dos valores das acelerações pode ser observada no Gráfico 22. Realizando a mesma análise para os pisos de laje mista com forma MF75, os valores aferidos foram 100% superiores, como é possível notar no Gráfico 24.

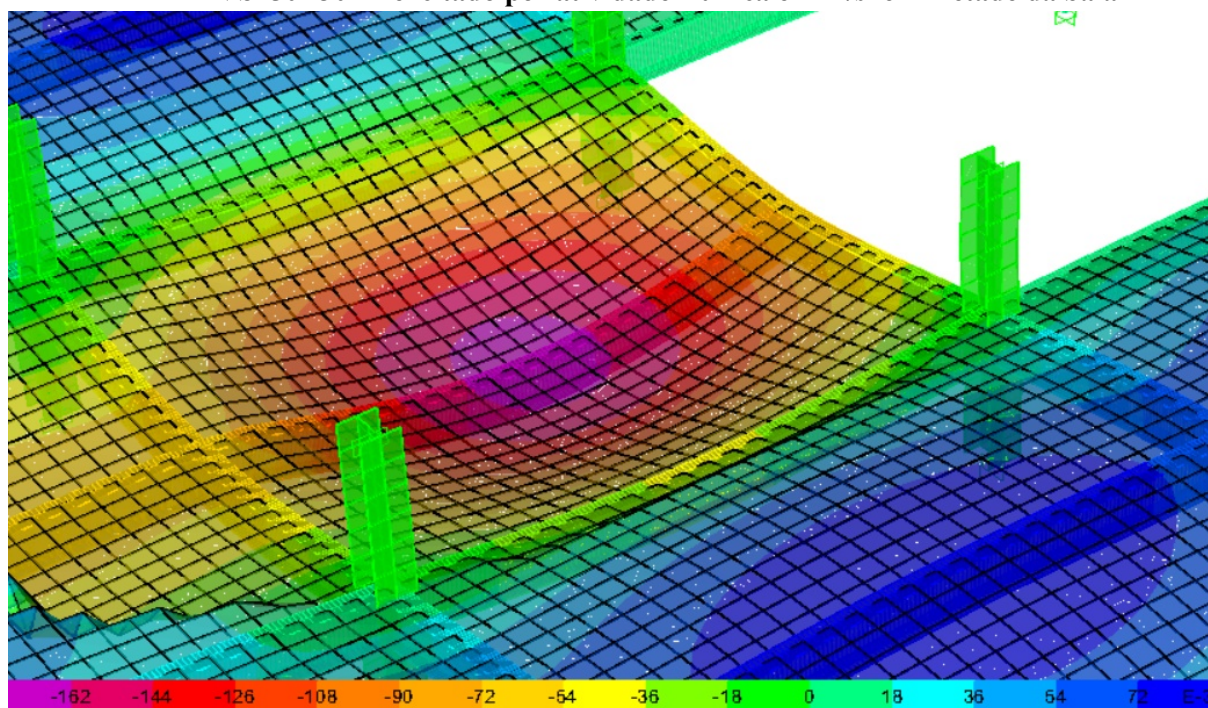
Em relação os pisos de laje mista com forma MF50, as acelerações medidas no centro da baia ao excitá-la totalmente foram em média 36,03% superiores os valores encontrados solicitando somente 2/3 de uma baia (66,67%), tal comparação de valores pode ser observada no Gráfico 23. Tendo em vista que ao se excitar totalmente uma das baias dos pavimentos mistos, as considerações seguintes, para avaliar as acelerações dos pisos em detrimento dos processos analíticos presentes no AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), tomam como base os valores relacionados à total excitação de uma das baias dos modelos numéricos.

Figura 40 - Aceleração máxima absoluta na direção z (perpendicular ao piso) do modelo 12MH14VS450E30H2 excitado por atividade rítmica em m/s² em toda uma baía



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 41 - Aceleração máxima absoluta na direção z (perpendicular ao piso) do modelo 12MH14VS450E30H2 excitado por atividade rítmica em m/s² em metade da baía



Fonte: elaborada pelo autor

Quanto a aceleração dos pisos submetidos a atividades rítmicas, o Gráfico 22 apresenta a comparação da aceleração dos pavimentos com laje maciça determinadas analiticamente

segundo o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) com as determinadas numericamente, cujos valores estão na Tabela 66. Dos valores encontrados, seguindo os critérios de aceitação do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), a aceleração limite para pavimentos destinados somente à ocorrência de atividades rítmicas é de $0,686\text{m/s}^2$. Dessa forma, quatro pavimentos seriam aceitáveis seguindo os processos analíticos e apenas dois pisos estariam aptos de acordo com os resultados dos modelos numéricos.

O Gráfico 23 e o Gráfico 24 apresentam as mesmas comparações descritas no parágrafo anterior para atividades rítmicas, respectivamente, dos pisos com laje mista com forma MF50 e MF75 (resultados presentes na Tabela 67 e Tabela 68). Seguindo os processos analíticos e critérios de aceitação do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), quatro pavimento com forma de aço MF50 e quatro pavimentos com forma MF75 estariam aptos, e com base nos resultados dos modelos numéricos, apenas um piso com forma MF50 e um piso com forma MF75 seriam aceitáveis.

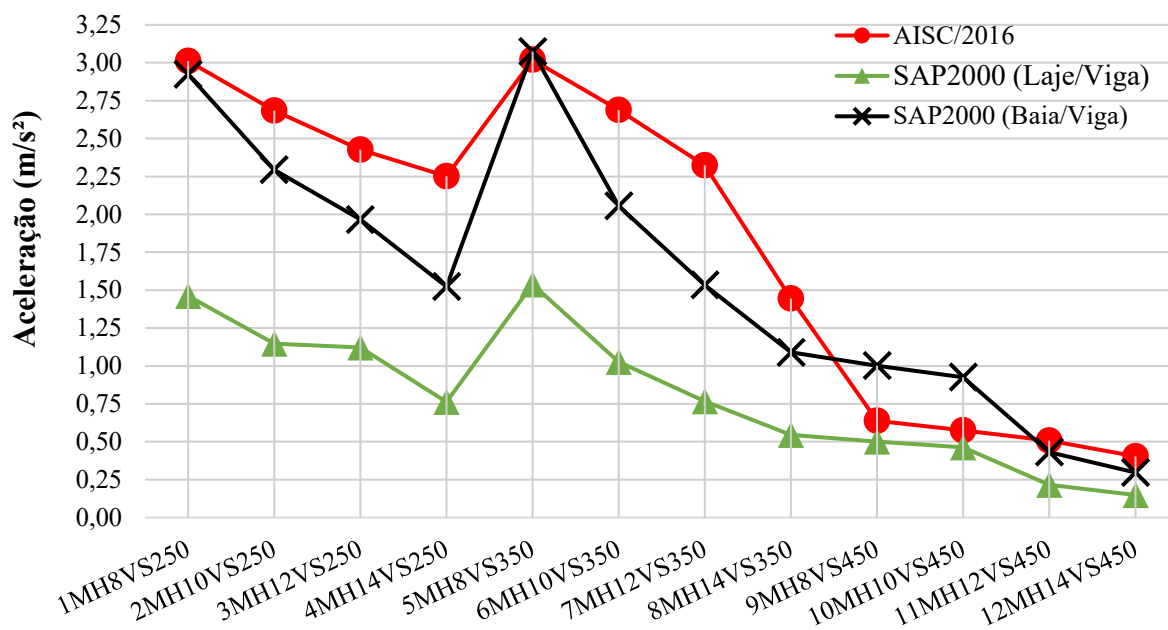
Na Tabela 54 são apresentados os números citados nos parágrafos anteriores de forma detalhada para cada tipologia de pavimento investigada (pisos com laje maciça, mista com forma MF50 e MF75) destinados à ocorrência de apenas atividades rítmicas. A análise foi feita com base na aceleração dos modelos numéricos e via processos analíticos.

Tabela 54 – Aceitação dos pavimentos com base na aceleração diante do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) dos modelos numéricos E30H2 e dos modelos analíticos para pisos destinados somente à atividades rítmicas

Tipo de ocupação	Destinado somente à atividades rítmicas			
	Numéricos E30H2		Analíticos (MURRAY <i>et al.</i> , 2016)	
Modelos				
Tipologia do pavimento	Aceito	Não Aceito	Aceito	Não Aceito
Laje maciça	2	10	4	8
Laje mista (MF50)	1	11	4	8
Laje mista (MF75)	1	11	4	8
Total	4	32	12	24

Fonte: elaborada pelo autor

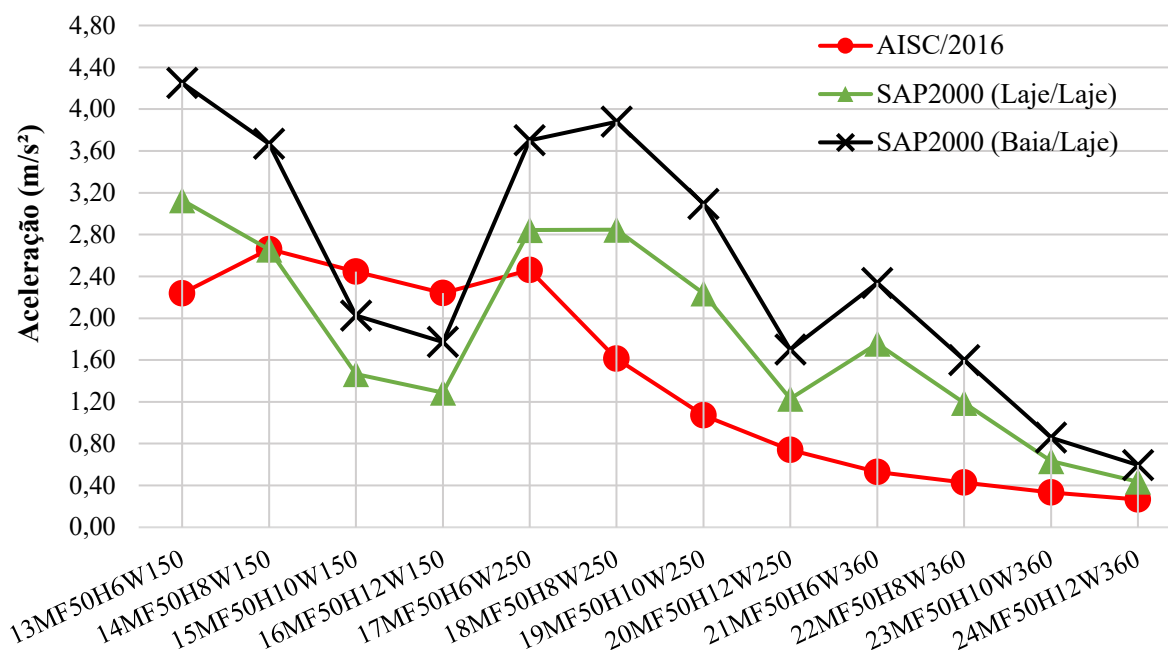
Gráfico 22 - Comparação da aceleração dos pisos de laje maciça submetidos à atividades rítmicas determinadas analiticamente com o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2) solicitados ao longo de toda uma baia e em apenas metade de uma das baias dos modelos



Identificação dos modelos com laje maciça

Fonte: elaborada pelo autor

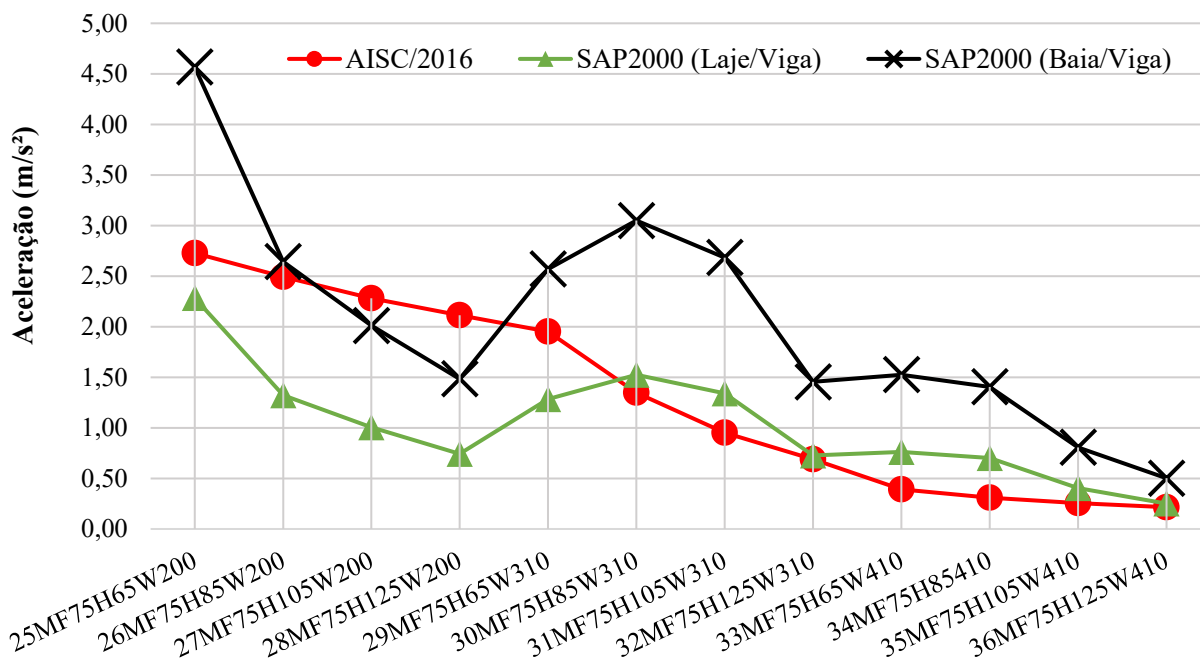
Gráfico 23 - Comparação da aceleração dos pisos de laje mista com forma MF50 submetidos a atividades rítmicas determinadas analiticamente com o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2) solicitados ao longo de toda uma baia e em apenas 2/3 de uma das baias dos modelos



Identificação dos modelos de laje mista com forma MF50

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 24 - Comparação da aceleração dos pisos de laje mista com forma MF75 submetidos a atividades rítmicas determinadas analiticamente com o AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) e numericamente (E30H2) solicitados ao longo de toda uma baía e em apenas metade de uma das baias dos modelos



Identificação dos modelos de laje mista com forma MF75

Fonte: elaborada pelo autor

Quanto a avaliação da aceitação dos pavimentos destinados ao funcionamento de escritórios excitados pela caminhada humana, ocorreu boa concordância entre a avaliação dos pisos via processos analíticos e numéricos, como pode ser observado na Tabela 53. Já em relação à análise dos pavimentos destinados unicamente a ocorrência de atividades rítmicas, a análise via processos analíticos quantificou o triplo de pavimentos aptos (12 pisos) a atividade contra 4 pisos aptos via a análise dos pavimentos por modelagem numérica, como foi apresentado na Tabela 54.

Conclusões

Esse trabalho tinha o objetivo investigar o comportamento dinâmico de pisos mistos de aço e concreto e verificar o conforto dos usuários frente às vibrações induzidas pelos usuários. Para avaliar o conforto humano foram apresentados critérios de aceitação e processos analíticos para determinar as propriedades modais dos pavimentos (frequência fundamental e aceleração).

Quanto algumas particularidades e contribuições desse trabalho, vale ressaltar a apresentação direcionada de conhecimentos consistentes sobre o comportamento dinâmico dos pisos mistos de aço e concreto para o esclarecimento dos efeitos das vibrações induzidas por atividades humanas no conforto dos usuários. Também, o agrupamento organizado de processos de verificação dos efeitos vibratórios induzidos por atividades humanas com aplicabilidade direta para projetos de pavimentos mistos de aço e concreto, com exemplos analíticos detalhados e procedimentos de modelagem numérica para determinação da frequência fundamental e aceleração de pisos mistos, juntamente com sua verificação para diferentes tipos de ocupação.

Como objetos de análise, foram concebidos 36 pisos mistos compatíveis com a arquitetura de um pavimento tipo, com variações de vigamento e tipologia das lajes. As propriedades modais das estruturas investigadas foram determinadas via processos analíticos e por modelagem numérica, e com os resultados obtidos, foram aplicados os critérios de aceitação que qualificam a aceitabilidade dos pavimentos frente à diferentes carregamentos dinâmicos provenientes de excitações induzidas por atividade humana.

Com base nas hipóteses admitidas na modelagem numérica, foi possível concluir a pequena influência da majoração do módulo de elasticidade do concreto na frequência fundamental, bem como, que a atribuição de perfis condizentes aos pilares com a geometria e demais elementos constituintes do piso, incrementos de rigidez aos perfis dos pilares e representá-los com um quarto ou meia altura, são parâmetros praticamente insignificantes na frequência fundamental dos pavimentos.

Com a modelagem numérica foi possível analisar o comportamento dinâmico em diferentes arranjos de pisos mistos de aço e concreto. Os resultados permitiram concluir que a posição e espessura das lajes são itens que afetam diretamente a frequência fundamental, e que

as seções dos perfis metálicos das vigas são itens de grande influência. Por serem elementos que oferecem grandes incrementos de rigidez com acréscimos quase insignificantes ao peso próprio da estrutura.

Com relação aos processos analíticos estudados, observou-se boa correlação de resultados em comparação aos modelos numéricos. Os processos analíticos utilizados para determinar as frequências fundamentais apresentaram valores próximos com os obtidos numericamente. Utilizando o mesmo módulo de elasticidade do concreto, as frequências fundamentais determinadas analiticamente seguindo o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) foram em média 12,57% inferiores às determinadas via modelagem numérica, e seguindo os critérios do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016) foram em média 25,78% inferiores aos valores obtidos numericamente.

Quanto a análise dos critérios de aceitação das normativas nacionais que verificam os pisos com base somente na frequência fundamental, dos 36 pavimentos investigados, todos os pisos estariam aptos ao funcionamento de escritórios, conclusões essas baseadas exclusivamente nas frequências fundamentais dos modelos numéricos E30H2. Em contrapartida, considerando a aceleração dos pisos submetendo-os à atividade de caminhada humana e baseando a verificação no SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009), somente 6 pavimentos estariam aptos ao funcionamento de escritórios, prevendo caminhada humana de acordo com as acelerações de pico dos modelos numéricos, e 7 pisos seriam satisfatórios seguindo os processos analíticos do SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009). As discrepâncias de resultados relativas à aceitação dos pavimentos são decorrentes dos parâmetros admitidos em cada critério de aceitação, já que as normativas nacionais são baseadas nas frequências fundamentais e o SCI/2009 (SMITH; HICKS; DEVINE, 2009) em limites de acelerações de pico.

De acordo com a análise dos pavimentos submetendo-os à ocorrência de atividades rítmicas, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, dos 36 pisos investigados, 16 estariam aptos se destinados ao funcionamento de salas de dança e com base na ABNT NBR 8800:2008, considerando os pavimentos solicitados por atividades humanas muito repetitivas, 18 pavimentos seriam satisfatórios para esse tipo de atividade, tendo em vista que tais conclusões são baseadas somente na frequência fundamental dos modelos numéricos E30H2. Porém, ao se aplicar os critérios de aceitação das vibrações presentes no manual AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), que prescreve avaliação com base nas acelerações de pico, verificando-os seguindo os processos analíticos do AISC/2016 (MURRAY *et al.*, 2016), 12 pisos seriam aceitáveis a

solicitação de apenas atividades rítmicas, e apenas 4 pavimentos estariam aptos a esse tipo de utilização de acordo com as acelerações de pico dos modelos numéricos E30H2.

De forma geral, os critérios de aceitação das vibrações das normativas nacionais baseados somente na frequência fundamental do piso faz avaliações generalistas e um tanto quanto insuficientes. Por outro lado, tomar como base as acelerações de pico dos pavimentos é um procedimento que oferece maior garantia ao conforto dos usuários, porém pode levar a considerações conservadoras, uma vez que o pico de aceleração dos pavimentos ocorre de forma pontual, o que é não é tão razoável, uma vez que esse extremo estado de perturbação isolado pode não representar o comportamento dinâmico do pavimento como um todo, por ser um pico de excitação que dificilmente perturbará a estrutura de forma geral.

Com base nos resultados encontrados, é possível concluir que as normativas nacionais que tratam do dimensionamento de estruturas de concreto (ABNT NBR 6118:20014) e de estruturas metálicas e mistas de aço e concreto (ABNT NBR 8800:2008), no que é relativo aos estados limites das vibrações induzidas por atividades humanas necessitam ser atualizadas. Já que as verificações realizadas nesse trabalho mostraram que para diferentes tipos de ocupações, muitos pavimentos que não atenderiam os limites de aceitação das vibrações ligados ao conforto humano presentes em manuais de projeto internacionais renomados, quando verificados diante das normativas nacionais citadas, passariam nas verificações.

Sugestões para trabalhos futuros

Diante da relevância dos efeitos das vibrações induzidas por atividades humanas no conforto dos usuários em projetos de pisos mistos de aço e concreto, com a realização desse trabalho, revelou-se os seguintes assuntos que podem ser abordados em futuros trabalhos. Pode-se mencionar:

- A influência no comportamento dinâmico de pisos mistos de aço e concreto causadas pelas ligações metálicas e mistas de aço e concreto;
- Impacto nos custos de projetos de pisos mistos de aço e concreto destinados e verificados para o funcionamento de diferentes atividades humanas rítmicas;
- Análise das vibrações em pisos mistos com lajes pré-fabricadas com trilhos protendidos, com lajes nervuradas e com lajes alveolares presentes no trabalho de Lima (2009);

Referências Bibliográficas

AALAMI, B. O. *Vibration design of concrete floors*. Redwood City: ADAPT Corporation, 2014.

ALMEIDA, R. R. de. Análise de vibração em sistemas estruturais para pisos mistos com joists submetidos a atividades humanas rítmicas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

BACHMANN, H. *et al. Vibration problems in structures: practical guidelines*. Basel: Birkhauser, 1995.

BACHMANN, H.; AMMANN, W. *Vibrations in Structures Induced by Man and Machines*. Zurich: International Association for Bridges and Structural Engineering, 1987.

BAILEY, C. G. *Efficient arrangement of reinforcement for membrane behaviour of composite floor slabs in fire conditions*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, n. 7, p. 931–949, 2003.

BELLEI, I. H.; PINHO, F. O.; PINHO, M. O. Edifícios de múltiplos andares em aço. 2. ed. São Paulo: Pini, 2008. 556 p.

BRITISH STANDARDS INSTITUTE. BS 6841:1987: *Guide to measurement and evaluation of human exposure to whole-body mechanical vibration and repeated shock*. 1987.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. BS 6472: *Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings (1Hz to 80 Hz)*, United Kingdom, 1992.

CHEN, S.; ZHANG, R.; ZHANG, J. *Human-induced vibration of steel–concrete composite floors*. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings*, v. 171, n. 1, p. 50–63, 2018.

DE NARDIN, S.; SOUZA, A. S. C. de.; EL DEBS, A. L. H. C. Detalhes de ligação entre pilares mistos preenchidos e vigas de aço. *Construção Metálica*, v. 79, p. 23–26, 2007.

DE NARDIN, S.; SOUZA, A. S. C. de. Sistemas de vigas mistas contínuas e semicontínuas para edifícios. XXXIII Jornadas sudamericanas de ingeniería estructural, Santiago/Chile, maio 2008.

DEVIN, A. *et al.* *Structural Dynamic Parameter Identification and the Effect of Test Techniques. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, v. 39, n. 4, 2013.

FAKURY, R. H.; SILVA, A. L. R. de C. e; CALDAS, R. B. Dimensionamento de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. 496 p.

FERREIRA, B. E.; CARVALHO, H.; DA SILVA, J. G. S.; CALDAS, R. B.; AGUIAR, J. V. *Experimental evaluation of induced human walking vibrations on steel-concrete composite floors*. Revista IBRACON Estruturas e Materiais, v. 14, n. 4, e14406, 2021.

GLUHOVIĆ, N. *et al.* *Vibrations of composite steel-concrete floors induced by human activities. Building materials and structures*, v. 59, p. 17–29, 2016.

HICKS, S.; PELTONEN, S. *Design of slim-floor construction for human-induced vibrations. Steel Construction*, v. 8, n. 2, p. 110–117, 2015.

INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 10137: *Bases for design of structures – Serviceability of buildings against vibration*. 2007.

INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 2631-1: *Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements*. 1997.

INTERNATIONAL STANDARD ORGANIZATION. ISO 2631-2: *Evaluation of human exposure to whole-body vibration, Part 2: Human exposure to continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 to 80 Hz)*. 1989.

JUNGES, P. Análise de vibrações de uma laje mista de concreto e perfis de PRFV induzidas por atividades humanas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

KÜSTER, L. D.; SARTORTI, A. L. Análise dinâmica de estruturas de concreto: Avaliação de três sistemas construtivos de lajes. *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, v. 11, n. 18, p. 13–22, 2011.

LIMA, Y. D. da C. Alternativa de sistemas de lajes para edifício em aço: um estudo comparativo. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) - Programa de Pós-Graduação em Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

METFORM. Catálogo de Telha-Forma (steel deck). Disponível em: <<http://www.metform.com.br/wordpress/wpcontent/uploads/2019/07/Cat%C3%A1logo-Steel-Deck.pdf>>. Acesso em: 27 set. 2019.

MURRAY, T. M.; ALLEN, D. E., UNGAR, E. E., DAVIS, D. B. *Steel Design Guide Series 11: vibrations of steel- framed structural systems due to human activity - second edition. American Institute of Steel Construction (AISC), USA, 2016.*

MURRAY, T. M.; ALLEN, D. E.; UNGAR, E. E. *Steel Design Guide Series 11: floor vibration due to human activity. American Institute of Steel Construction (AISC), Chicago, USA, 2003.*

PAVIC, A.; WIDJAJA, T.; REYNOLDS, P. *The use of modal testing and FE model updating to investigate vibration transmission between two nominally identical building floors. International Conference on Structural Dynamic Modelling: Test, Analysis, Correlation and Validation*, p. 347–355, 2002.

PINTO, J. F. A. Análise numérica de vibrações em sistemas de piso misto de aço e concreto e avaliação de desempenho considerando o conforto humano. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.

RIBEIRO, M. C dos R. Análise da relação vão x altura de vigas metálicas mistas já executadas. *Revista Especialize On-line IPOG*, v. 1, p. 1–18, 2017a.

RIBEIRO, P. I. dos S. Estudo do comportamento dinâmico de um sistema de piso em aço com lajes secas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017b.

RIBEIRO, P. I. dos S. *et al.* Uma revisão sobre vibrações em sistemas de piso em aço induzidas por carregamentos oriundos de atividades humanas. *Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural*, v. 15, n. 1, p. 21–38, janeiro/abril, Passo Fundo, 2018.

ROCHA, J. R. dos S. P. da R. Estudo dinâmico da ponte pedonal da rabada em Santo Tirso. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2012.

SANTOS, M. E. dos; LEITE, E. C. C. Análise dos efeitos dinâmicos introduzidos por atividades humanas em lajes nervuradas unidirecionais de concreto. *Revista Tecnologia*, v. 39, n. 1, p. 23, 2018.

SILVA JUNIOR, L. A. da. Análise experimental de vibrações em sistemas de piso misto de aço e concreto e avaliação de desempenho considerando o conforto humano. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.

SMITH A. L.; HICKS, S. J.; DEVINE, P. J. *Design of Floors for Vibration: a new approach, SCI P354, The Steel Construction Institute (SCI)*, Ascot, England, UK, 2009.

SORIANO, H. L. Introdução à dinâmica das estruturas. 1a ed. Rio de Janeiro/RJ: Elsevier, 2014. 464p.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Tabela de Perfis. Disponível em: <[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/116828/mod_resource/content/1/Tabela de perfis.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/116828/mod_resource/content/1/Tabela_de_perfis.pdf)>.

VARELA, W. D.; BATTISTA, R. C. *Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks. Engineering Structures*, v. 33, n. 9, p. 2485–2494, Abril, 2011.

Anexo 1

Resultados dos Modelos

Nesse anexo estão as Tabelas citadas no Capítulo 6.

Tabela 55 – Frequência fundamental dos modelos com lajes maciças indicados na Tabela 43 variando o comprimento dos pilares e módulo de elasticidade do concreto

Legenda dos modelos		E22H2	E30H2	E22H4	E30H4
Módulo de elasticidade do concreto (MPa)		22.540	30.428	22.540	30.428
Comprimento dos pilares acima/abaixo do piso		1,50 m		0,75 m	
Vigamento/altura da laje referente à Tabela 43	Perfis do pilares	Frequência fundamental do piso (H_z)			
1MH8VS250	CS250X43	5,648	6,033	5,732	6,339
2MH10VS250	CS250X43	6,171	6,610	6,293	6,759
3MH12VS250	CS250X43	6,677	7,170	6,838	7,367
4MH14VS250	CS250X43	7,169	7,483	7,373	7,965
5MH8SV350	CS250X52	6,895	7,298	7,012	7,436
6MH10VS350	CS250X52	7,344	7,794	7,493	7,970
7MH12VS350	CS250X63	7,881	8,410	8,048	8,604
8MH14VS350	CS250X63	8,344	8,940	8,544	9,170
9MH8VS450	CS350X112	9,667	10,315	9,757	10,430
10MH10VS450	CS350X112	10,274	10,928	10,397	11,079
11MH12VS450	CS350X112	10,781	11,485	10,934	11,669
12MH14VS450	CS350X112	11,272	12,031	11,460	12,261

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 56 – Frequência fundamental dos modelos indicados na Tabela 46 com módulo de elasticidade do concreto de 22.540MPa e pilares de meia altura (E22H2) variando o perfil dos pilares

Perfil dos pilares/ Momento de inércia	CS250X43	CS250X63	CS250X84	CS300X76	CS300X102	CS300X115	CS300X131	Varição total
$I_x (cm^4)$	6.531	9.581	12.047	16.894	21.383	24.412	27.774	21.243
Incremento	-	47%	26%	40%	27%	14%	14%	325%
$I_y (cm^4)$	2.084	3.256	4.170	5.626	7.204	8.554	10.084	8.000
Incremento	-	56%	28%	35%	28%	19%	18%	384%
Vigamento***	Frequência fundamental do piso (H_z)							-
1MH8VS250	5,648	5,736	5,795	5,826	5,871	5,884	5,895	4,37%
2MH10VS250	6,171	6,300	6,387	6,435	6,503	6,523	6,540	5,98%
13MF50H6W150	4,693	4,723	4,741	4,750	4,764	4,768	4,772	1,68%
14MF50H8W150	5,265	5,327	5,360	5,379	5,403	5,411	5,417	2,88%
25MF75H65W200	5,151	5,190	5,211	5,224	5,239	5,244	5,248	1,88%
26MF75H85W200	5,747	5,854	5,903	5,930	5,961	5,971	5,980	4,05%
***Vigamentos e altura das lajes referentes à Tabela 43, Tabela 44 e Tabela 45								

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 57 – Frequências fundamentais dos modelos com pilares de meia altura e lajes maciças de concreto com módulo de elasticidade de 22.540 MPa (E22H2) e 30.428 MPa (E30H2) previstos na Tabela 43

Vigamentos para laje maciça	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Perfis do pilares de meia altura	Frequência fundamental do piso (H_z)	
						Módulo de elasticidade do concreto (MPa)	
						22.540	30.428
$h_f = 0$	(cm)		Vigas secundárias	Vigas primárias		E22H2	E30H2
1MH8VS250	8,0	8,0	VS250X21	VS250X29	CS250X43	5,648	6,033
2MH10VS250	10,0	10,0				6,171	6,610
3MH12VS250	12,0	12,0				6,677	7,170
4MH14VS250	14,0	14,0				7,169	7,483
5MH8VS350	8,0	8,0	VS350X26	VS350X30	CS250X52	6,895	7,298
6MH10VS350	10,0	1,00				7,344	7,794
7MH12VS350	12,0	12,0			CS250X63	7,881	8,410
8MH14VS350	14,0	14,0				8,344	8,940
9MH8VS450	8,0	8,0	VS450X51	VS450X60	CS350X112	9,667	10,315
10MH10VS450	10,0	10,0				10,274	10,928
11MH12VS450	12,0	12,0				10,781	11,485
12MH14VS450	14,0	14,0				11,272	12,031

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 58 – Frequências fundamentais dos modelos com pilares de meia altura e lajes mistas com formas de aço incorporadas MF50 com módulo de elasticidade do concreto de 22.540 MPa (E22H2) e 30.428 MPa (E30H2) previstos na Tabela 44

Vigamentos para laje mista (MF50)	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Perfis do pilares de meia altura	Frequência fundamental so piso (H_z)	
						Módulo de elasticidade do concreto (MPa)	
						22.540 E22H2	30.428 E30H2
$h_f = 5,00\text{cm}$	(cm)		Vigas secundárias	Vigas primárias			
13MF50H6W150	6,0	11,0	W150X13	W310X21	CS250X43	4,693	4,980
14MF50H8W150	8,0	13,0				5,265	5,565
15MF50H10W150	10,0	15,0				5,750	6,092
16MF50H12W150	12,0	17,0				6,221	6,634
17MF50H6W250	6,0	11,0	W250X17,9	W360X51	CS250X52	6,836	7,178
18MF50H8W250	8,0	13,0				7,361	7,706
19MF50H10W250	10,0	15,0			CS250X63	7,861	8,230
20MF50H12W250	12,0	17,0				8,254	8,675
21MF50H6W360	6,0	11,0	W360X32,9	W460X82	CS350X112	9,924	10,454
22MF50H8W360	8,0	13,0				10,481	11,028
23MF50H10W360	10,0	15,0				10,975	11,584
24MF50H12W360	12,0	17,0				11,472	12,148

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 59 – Frequências fundamentais dos modelos com pilares de meia altura e lajes mistas com formas de aço incorporadas MF75 com módulo de elasticidade do concreto de 22.540 MPa (E22H2) e 30.428 MPa (E30H2) previstos na Tabela 45

Vigamentos para laje mista (MF75)	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Perfis do pilares de meia altura	Frequência fundamental do piso (H_z)	
						Módulo de elasticidade do concreto (MPa)	
						22.540 E22H2	30.428 E30H2
$h_f = 7,50\text{cm}$	(cm)		Vigas secundárias	Vigas primárias			
25MF75H65W200	6,5	14,0	W200X15	W310X21	CS250X43	5,151	5,482
26MF75H85W200	8,5	16,0				5,747	6,055
27MF75H105W200	10,5	18,0				6,196	6,553
28MF75H125W200	12,5	20,0				6,638	7,063
29MF75H65W310	6,5	14,0	W310X21	W360X39	CS250X52	6,538	6,956
30MF75H85W310	8,5	16,0				7,203	7,636
31MF75H105W310	10,5	18,0			CS250X63	7,818	8,281
32MF75H125W310	12,5	20,0				8,300	8,775
33MF75H65W410	6,5	14,0	W410X38,8	W460X82	CS350X112	8,686	9,435
34MF75H85410	8,5	16,0				9,848	10,541
35MF75H105W410	10,5	18,0				10,627	11,333
36MF50H125W410	12,5	20,0				11,274	12,024

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 60 – Frequências fundamentais dos modelos com lajes maciças de concreto com módulo de elasticidade de 30.428 MPa determinadas analiticamente previstos na Tabela 43

Vigamentos para laje maciça	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Frequência fundamental do piso (H_z)	
					SCI/2009	AISC/2016
$h_f = 0$	(cm)		Vigas secundárias	Vigas primárias		
1MH8VS250	8,0	8,0	VS250X21	VS250X29	4,641	3,953
2MH10VS250	10,0	10,0			4,787	4,226
3MH12VS250	12,0	12,0			4,958	4,531
4MH14VS250	14,0	14,0			5,163	4,870
5MH8VS350	8,0	8,0	VS350X26	VS350X30	6,083	5,091
6MH10VS350	10,0	1,00			6,190	5,338
7MH12VS350	12,0	12,0			6,292	5,593
8MH14VS350	14,0	14,0			6,417	5,870
9MH8VS450	8,0	8,0	VS450X51	VS450X60	9,419	8,221
10MH10VS450	10,0	10,0			9,744	8,132
11MH12VS450	12,0	12,0			9,896	8,314
12MH14VS450	14,0	14,0			9,991	8,550

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 61 – Frequências fundamentais dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF50 com módulo de elasticidade do concreto de 30.428 MPa determinadas analiticamente previstos na Tabela 44

Vigamentos para laje mista (MF50)	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Frequência fundamental do piso (H_z)	
			Vigas secundárias	Vigas primárias	SCI/2009	AISC/2016
$h_f = 5,00\text{cm}$	(cm)					
13MF50H6W150	6,0	11,0	W150X13	W310X21	4,554	3,755
14MF50H8W150	8,0	13,0			4,749	4,027
15MF50H10W150	10,0	15,0			4,875	4,350
16MF50H12W150	12,0	17,0			5,030	4,721
17MF50H6W250	6,0	11,0	W250X17,9	W360X51	6,983	5,696
18MF50H8W250	8,0	13,0			7,159	5,911
19MF50H10W250	10,0	15,0			7,376	6,150
20MF50H12W250	12,0	17,0			7,652	6,427
21MF50H6W360	6,0	11,0	W360X32,9	W460X82	10,793	8,547
22MF50H8W360	8,0	13,0			10,990	8,689
23MF50H10W360	10,0	15,0			11,097	8,911
24MF50H12W360	12,0	17,0			11,174	9,132

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 62 – Frequências fundamentais dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF75 com módulo de elasticidade do concreto de 30.428 MPa determinadas analiticamente previstos na Tabela 45

Vigamentos para laje mista (MF75)	t_c	h_t	Perfis dos vigamentos		Frequência fundamental do piso (H_z)	
			Vigas secundárias	Vigas primárias	SCI/2009	AISC/2016
$h_f = 7,50\text{cm}$	(cm)					
25MF75H65W200	6,5	14,0	W200X15	W310X21	4,971	4,162
26MF75H85W200	8,5	16,0			5,158	4,389
27MF75H105W200	10,5	18,0			5,336	4,660
28MF75H125W200	12,5	20,0			5,487	4,977
29MF75H65W310	6,5	14,0	W310X21	W360X39	7,077	5,796
30MF75H85W310	8,5	16,0			7,247	5,984
31MF75H105W310	10,5	18,0			7,417	6,192
32MF75H125W310	12,5	20,0			7,593	6,432
33MF75H65W410	6,5	14,0	W410X38,8	W460X82	10,374	8,835
34MF75H85410	8,5	16,0			10,740	9,034
35MF75H105W410	10,5	18,0			10,998	9,213
36MF50H125W410	12,5	20,0			11,203	9,396

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 63 – Aceleração atividade de caminhada dos modelos com laje maciça

Atividade	Aceleração - Caminhada (m/s^2) ($f_p = 2H_z$)					
	3%			4,5%		
Amortecimento	3%			4,5%		
Tipo de Modelo	Analítico	Numérico (E30H2)		Analítico	Numérico (E30H2)	
Modelo	SCI/2009	Viga	Laje	SCI/2009	Viga	Laje
1MH8VS250	0,111	0,077	0,050	0,075	0,070	0,046
2MH10VS250	0,090	0,060	0,039	0,061	0,058	0,038
3MH12VS250	0,077	0,040	0,028	0,052	0,039	0,027
4MH14VS250	0,061	0,032	0,023	0,041	0,031	0,022
5MH8VS350	0,092	0,064	0,046	0,062	0,063	0,045
6MH10VS350	0,072	0,043	0,030	0,049	0,042	0,029
7MH12VS350	0,059	0,039	0,027	0,040	0,038	0,026
8MH14VS350	0,050	0,034	0,024	0,033	0,034	0,023
9MH8VS450	0,109	0,052	0,052	0,073	0,050	0,050
10MH10VS450	0,088	0,052	0,040	0,059	0,051	0,039
11MH12VS450	0,072	0,048	0,033	0,049	0,047	0,032
12MH14VS450	0,061	0,042	0,027	0,041	0,041	0,027

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 64 – Aceleração atividade de caminhada dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF50

Atividade	Aceleração - Caminhada (m/s^2) ($f_p = 2H_z$)					
	3%			4,5%		
Amortecimento	3%			4,5%		
Tipo de Modelo	Analítico	Numérico (E30H2)		Analítico	Numérico (E30H2)	
Modelo	SCI/2009	Viga	Laje	SCI/2009	Viga	Laje
13MF50H6W150	0,120	0,095	0,118	0,081	0,093	0,110
14MF50H8W150	0,100	0,069	0,087	0,067	0,064	0,082
15MF50H10W150	0,083	0,049	0,061	0,056	0,048	0,060
16MF50H12W150	0,070	0,039	0,047	0,047	0,038	0,046
17MF50H6W250	0,113	0,073	0,108	0,076	0,071	0,105
18MF50H8W250	0,091	0,060	0,080	0,061	0,058	0,078
19MF50H10W250	0,075	0,049	0,063	0,051	0,048	0,062
20MF50H12W250	0,064	0,043	0,054	0,043	0,043	0,053
21MF50H6W360	0,066	0,066	0,119	0,066	0,065	0,116
22MF50H8W360	0,053	0,059	0,090	0,053	0,058	0,087
23MF50H10W360	0,044	0,051	0,071	0,044	0,049	0,069
24MF50H12W360	0,036	0,044	0,058	0,036	0,041	0,055

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 65 – Aceleração atividade de caminhada dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF75

Atividade	Aceleração - Caminhada (m/s^2) ($f_p = 2H_z$)					
	3%			4,5%		
Amortecimento	3%			4,5%		
Tipo de Modelo	Analítico	Numérico (E30H2)		Analítico	Numérico (E30H2)	
Modelo	SCI/2009	Viga	Laje	SCI/2009	Viga	Laje
25MF75H65W200	0,112	0,110	0,080	0,076	0,090	0,066
26MF75H85W200	0,089	0,076	0,053	0,060	0,064	0,044
27MF75H105W200	0,070	0,053	0,036	0,047	0,052	0,035
28MF75H125W200	0,057	0,037	0,026	0,038	0,036	0,025
29MF75H65W310	0,093	0,060	0,058	0,063	0,059	0,056
30MF75H85W310	0,078	0,057	0,042	0,053	0,055	0,041
31MF75H105W310	0,066	0,048	0,033	0,045	0,048	0,033
32MF75H125W310	0,057	0,044	0,030	0,038	0,044	0,030
33MF75H65W410	0,054	0,038	0,075	0,054	0,038	0,073
34MF75H85410	0,045	0,052	0,052	0,045	0,050	0,051
35MF75H105W410	0,038	0,050	0,040	0,038	0,049	0,039
36MF75H125W410	0,033	0,046	0,033	0,033	0,043	0,031

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 66 – Aceleração atividade rítmica dos modelos com laje maciça

Atividade	Aceleração – Atividade Rítmica (m/s^2) ($f_p = 2,75H_z; \beta = 0,06$)				
Modelos	Modelos Numéricos (E30H2)				Modelos Analítico (AISC/2016)
Carregamento	Em uma laje		Em toda a baia		
Ponto de Medição	Viga	Laje	Viga	Laje	
1MH8VS250	1,462	1,190	2,923	2,356	3,011
2MH10VS250	1,147	0,944	2,294	1,843	2,683
3MH12VS250	1,121	0,958	1,966	1,611	2,427
4MH14VS250	0,762	0,660	1,524	1,264	2,251
5MH8VS350	1,538	1,324	3,075	2,626	3,019
6MH10VS350	1,027	0,846	2,055	1,671	2,688
7MH12VS350	0,767	0,615	1,534	1,215	2,322
8MH14VS350	0,545	0,454	1,089	0,882	1,445
9MH8VS450	0,501	0,501	1,002	0,984	0,637
10MH10VS450	0,463	0,400	0,926	0,795	0,575
11MH12VS450	0,216	0,176	0,432	0,351	0,508
12MH14VS450	0,148	0,121	0,297	0,240	0,404

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 67 – Aceleração atividade rítmica dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF50

Atividade	Aceleração – Atividade Rítmica (m/s^2) ($f_p = 2,75H_z; \beta = 0,06$)				
Modelos	Modelos Numéricos (E30H2)				Modelos Analítico (AISC/2016)
Carregamento	Em duas lajes		Em toda a baía		
Ponto de Medição	Viga	Laje	Viga	Laje	
13MF50H6W150	2,680	3,130	3,636	4,251	2,238
14MF50H8W150	2,372	2,658	3,258	3,668	2,661
15MF50H10W150	1,328	1,466	1,830	2,026	2,445
16MF50H12W150	1,168	1,289	1,594	1,773	2,242
17MF50H6W250	2,250	2,843	3,034	3,701	2,461
18MF50H8W250	2,451	2,846	3,333	3,879	1,613
19MF50H10W250	1,993	2,238	2,741	3,094	1,070
20MF50H12W250	1,106	1,230	1,516	1,699	0,739
21MF50H6W360	1,296	1,757	1,722	2,337	0,528
22MF50H8W360	0,964	1,189	1,298	1,601	0,429
23MF50H10W360	0,535	0,632	0,725	0,858	0,333
24MF50H12W360	0,378	0,436	0,515	0,595	0,266

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 68 – Aceleração atividade rítmica dos modelos de lajes mistas com formas de aço incorporadas MF75

Atividade	Aceleração – Atividade Rítmica (m/s^2) ($f_p = 2,75H_z; \beta = 0,06$)				
Modelos	Modelos Numéricos (E30H2)				Modelos Analítico (AISC/2016)
Carregamento	Em uma laje		Em toda a baía		
Ponto de Medição	Viga	Laje	Viga	Laje	
25MF75H65W200	2,284	1,963	4,567	3,908	2,728
26MF75H85W200	1,321	1,103	2,643	2,175	2,492
27MF75H105W200	1,006	0,832	2,011	1,619	2,282
28MF75H125W200	0,742	0,626	1,485	1,196	2,114
29MF75H65W310	1,285	1,263	2,571	2,493	1,952
30MF75H85W310	1,525	1,326	3,050	2,627	1,347
31MF75H105W310	1,342	1,132	2,684	2,231	0,951
32MF75H125W310	0,727	0,609	1,455	1,191	0,691
33MF75H65W410	0,763	1,080	1,525	2,033	0,391
34MF75H85410	0,702	0,709	1,405	1,404	0,311
35MF75H105W410	0,404	0,360	0,807	0,717	0,257
36MF75H125W410	0,251	0,214	0,502	0,425	0,215

Fonte: elaborada pelo autor

Anexo 2

Propriedades dos perfis e das lajes

Nesse anexo estão as Tabelas com as informações geométricas de todos os perfis utilizados nesse trabalho, bem como demais Tabelas necessárias.

Tabela 69 – Propriedades geométricas dos perfis das vigas utilizados nos modelos

Perfil	m (kg/m)	A_a (cm ²)	$I_{x,a}$ (cm ⁴)	d (cm)
VS250X21	20,70	26,40	2.775	25,00
VS250X29	28,80	36,70	4.257	25,00
VS350X26	26,40	33,60	6.884	35,00
VS350X30	30,10	38,30	8.026	35,00
VS450X51	51,10	65,20	22.640	45,00
VS450X60	60,30	76,80	27.962	45,00
W150X13	13,00	16,60	635	14,80
W200X15	15,20	19,40	1.305	20,00
W250X17,9	18,10	23,10	2.291	25,10
W310X21	21,40	27,20	3.776	30,30
W360X32,9	33,00	42,10	8.358	34,90
W360X39	39,40	50,20	10.331	35,30
W360X51	50,90	64,80	14.222	35,50
W410X38,8	39,50	50,30	12.777	39,90
W460X82	82,20	104,70	37.157	46,00

Fonte: adaptada da Universidade de São Paulo {20--?}

Tabela 70 - Propriedades geométricas dos perfis dos pilares utilizados nos modelos

Perfil	m	A	d	t_w	h	t_f	b_f	I_x	I_y	I_t	C_w
	kg/m	cm ²	mm				cm ⁴			cm ⁶	
CS250X43	42,90	54,70	250	6,30	234	8,00	250	6.531	2.084	11	305.021
CS250X52	51,80	66,00	250	8,00	231	9,50	250	7.694	2.475	18	357.736
CS250X63	63,20	80,50	250	8,00	225	12,50	250	9.581	3.256	37	459.035
CS350X112	111,60	142,20	350	9,50	318	16,00	350	33.805	11.436	105	3.188.642

Fonte: adaptada da Universidade de São Paulo {20--?}

Tabela 71 – Propriedades geométricas das formas de aço MF50 e MF75

MF50		MF75	
Informações para espessura nominal de 0,80mm			
h_f (cm)	5,00	h_f (cm)	7,50
y_{cg} (cm)	2,50 ^(*)	y_{cg} (cm)	3,75 ^(*)
I_f (mm ⁴ /m)	449.419	I_f (mm ⁴ /m)	1.017.138
A_f (mm ² /m)	997	A_f (mm ² /m)	1.112
Altura total da laje (cm) ($h_t = h_f + t_c$)	Peso próprio g_{pp} (kN/m²)	Altura total da laje (cm) ($h_t = h_f + t_c$)	Peso próprio g_{pp} (kN/m²)
11,00	2,08	14,00	2,50
12,00	2,32	15,00	2,74
13,00	2,55	16,00	2,97
14,00	2,79	17,00	3,21
15,00	3,02	18,00	3,44
16,00	3,26	19,00	3,68
17,00	3,49	20,00	3,91
(*) valor adaptado pelo autor			

Fonte: adaptada da METFORM (2019)

Tabela 72 – Ajuste do peso específico do concreto

h_f	t_c	h_t	g_{pp}	g_{rev}	10% q	p_L	γ_c'
cm			kN/m^2				kN/m^3
0,00	8,00	8,00	2,00	1,50	0,50	4,00	50,00
	10,00	10,00	2,50	1,50	0,50	4,50	45,00
	12,00	12,00	3,00	1,50	0,50	5,00	41,67
	14,00	14,00	3,50	1,50	0,50	5,50	39,29
5,00	6,00	11,00	2,08	1,50	0,50	4,08	68,00
	8,00	13,00	2,55	1,50	0,50	4,55	56,88
	10,00	15,00	3,02	1,50	0,50	5,02	50,20
	12,00	17,00	3,49	1,50	0,50	5,49	45,75
7,50	6,50	14,00	2,50	1,50	0,50	4,50	69,23
	8,50	16,00	2,97	1,50	0,50	4,97	58,47
	10,50	18,00	3,44	1,50	0,50	5,44	51,81
	12,50	20,00	3,91	1,50	0,50	5,91	47,28
h_f : altura da forma de aço (laje maciça $h_f = 0$)							
Para forma MF50 e MF75, respectivamente, $h_f = 5,00cm$ e $h_f = 7,50cm$							
t_c : para laje maciça é a altura total e para lajes mistas é a espessura da capa de concreto acima da forma							
h_t : altura total da laje				$h_t = h_f + t_c$			
g_{pp} : peso próprio do da laje							
Laje maciça ($h_f = 0$)				$g_{pp}(kN/m^2) = t_c(m) \times \gamma_c(25 kN/m^3)$			
Lajes mistas com forma de aço incorporada ($h_f = 5,00cm$ e $h_f = 7,50cm$)				Valores de g_{pp} retirados da Tabela 71			
g_{rev} : carga permanente do revestimento do piso de $1,50 kN/m^2$ (Tabela 41)							
10% q : 10% da carga acidental $q = 5,00 kN/m^2$ (Tabela 41)							
p_L : carregamento total sobre a laje ($p_L = g_{pp} + g_{rev} + 10\% q$)							
γ_c' : peso específico ajudado do concreto				$\gamma_c'(kN/m^3) = \frac{p_L(kN/m^2)}{t_c(m)}$			

Fonte: elaborada pelo autor

Anexo 3

Aplicação das formulações para vibrações livres não amortecidas

A fim de exemplificar a aplicação das equações apresentadas anteriormente item 2.3.1 sobre vibrações livres não amortecidas, serão apresentados os procedimentos de cálculo para traçar os gráficos de *tempo × deslocamento*, *velocidade × deslocamento* e *velocidade × aceleração* do problema da Figura 42 para vibrações livres não amortecidas, admitindo módulo de elasticidade $E = 40 \text{ GPa}$ e que o sistema é abandonado no tempo zero na coordenada $x = -2,00 \text{ cm}$ com velocidade inicial é nula, portanto, $x(0) = -0,02 \text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0$.

Figura 42 – Vibrações em uma caixa d'água

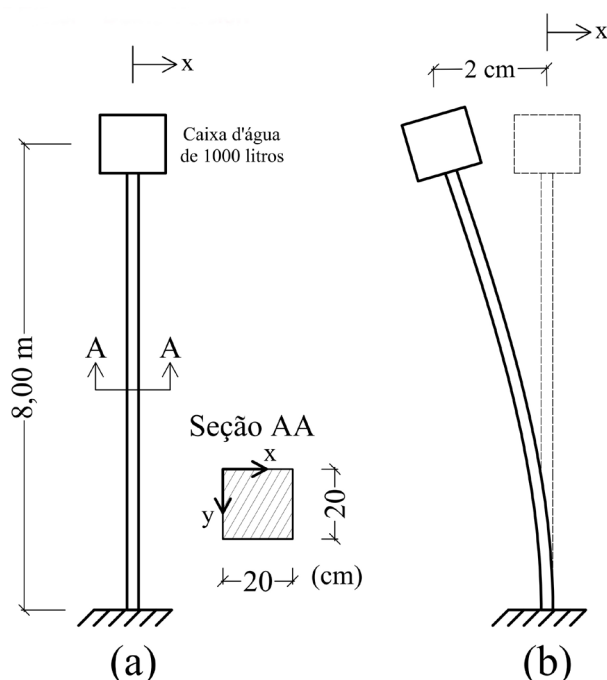
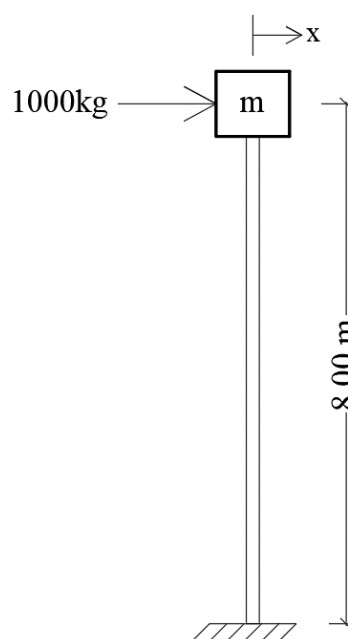


Figura 43 – Modelo discreto com um grau de liberdade não amortecido



Fonte: elaborada pelo autor

A solução de qualquer problema dinâmico inicia-se determinando a frequência natural da estrutura em análise. Para o problema proposto da Figura 42, deve-se determinar a vibração livre circular não amortecida, e para o cálculo da rigidez k , será calculada a deflexão de uma viga com engastamento livre onde toda a massa do sistema estará localizada na sua extremidade livre, constituindo assim, um sistema discreto com um grau de liberdade como mostra a Figura

43, admitindo que a massa m da caixa d'água de 1000 l é de 1000 kg. A Tabela 73 mostra as etapas para a determinação da frequência natural circular não amortecida.

Tabela 73 – Procedimentos para determinação de ω_n

Etapa	Procedimento	Cálculo
1	Determinação do momento de inércia: Como o movimento se dá em torno do eixo y , deverá ser considerado nos cálculos I_y .	$I_y = \frac{l^4}{12} = \frac{0,20^4}{12}$ $I_y = 1,33 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
2	Cálculo da deflexão: para se determinar o rigidez k , pode-se calcular separadamente a deflexão causada pela massa do sistema conforme mostrado na Figura 43. Admitindo: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e $E = 40 \text{ GPa} = 40 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	$\delta_x = \frac{mgl^3}{3EI}$ $\therefore \delta_x = \frac{1.000 \times 9,81 \times 8^3}{3 \times 40 \times 10^9 \times 1,33 \times 10^{-4}}$ $\therefore \delta_x = 0,315 \text{ m}$
3	Cálculo da rigidez k	$k = \frac{F}{\delta} = \frac{1.000 \times 9,81}{0,315}$ $\therefore k = 31.143 \text{ N/m}$
4	Cálculo da frequência natural circular não amortecida (ω_n)	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{31.143}{1.000}}$ $\therefore \omega_n = 5,58 \text{ rad/s}$

Fonte: elaborada pelo autor

Com o valor de ω_n determinado na Tabela 73, é possível utilizar a Equação 6 que define o deslocamento para vibrações livres não amortecidas, todavia, ela possui duas constantes (C_1 e C_2) não definidas. Assim, é necessário impor uma condição de contorno para defini-las, que no caso será $x(0) = -0,02 \text{ m}$. A Tabela 74 mostra as etapas para determinação das constantes da equação do deslocamento, bem como das equações da velocidade e aceleração.

Tabela 74 – Procedimentos para determinação da equação do movimento

Etapa	Procedimento	Cálculo
1	Substituindo $\omega_n = 5,58 \text{ rad/s}$ na Equação 6 e impondo a condição de contorno $x(0) = -0,02 \text{ m}$ para determinar C_1 .	$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$ $\therefore x(t) = C_1 \cos(5,58 t) + C_2 \sin(5,58 t)$ $\therefore x(0) = C_1 \cos(5,58 \times 0) + C_2 \sin(5,58 \times 0) = -0,02$ $\therefore C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = -0,02 \therefore C_1 = -0,02$
2	Derivando a equação do deslocamento para determinar a equação da velocidade $\dot{x}(t)$ com C_1 conhecido e impondo a condição de contorno $\dot{x}(0) = 0$ para determinar C_2	$x(t) = -0,02 \cos(5,58 t) + C_2 \sin(5,58 t)$ $\therefore \dot{x}(t) = 0,1116 \sin(5,58 t) + C_2 \cos(5,58 t)$ $\therefore \dot{x}(0) = 0,1116 \sin(5,58 \times 0) + C_2 \cos(5,58 \times 0) = 0$ $\therefore 0,1116 \times 0 + C_2 \times 1 = 0 \therefore C_2 = 0$ $\therefore x(t) = -0,02 \cos(5,58 t)$ $\therefore \dot{x}(t) = 0,1116 \sin(5,58 t)$
3	Determinando a equação da aceleração $\ddot{x}(t)$ derivando a equação da velocidade $\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t) = 0,6227 \cos(5,58 t)$

Fonte: elaborada pelo autor

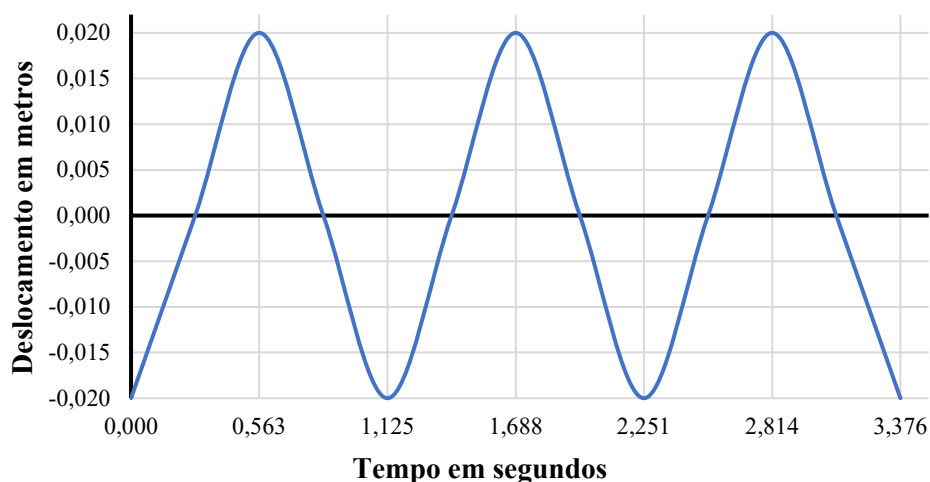
Com as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ do problema proposto da Figura 42 determinadas na Tabela 74, foram gerados os dados da Tabela 75 e traçados os gráficos de *tempo \times deslocamento* (Gráfico 25), *deslocamento \times velocidade* (Gráfico 26) e *velocidade \times aceleração* (Gráfico 27).

Tabela 75 – Valores do deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo

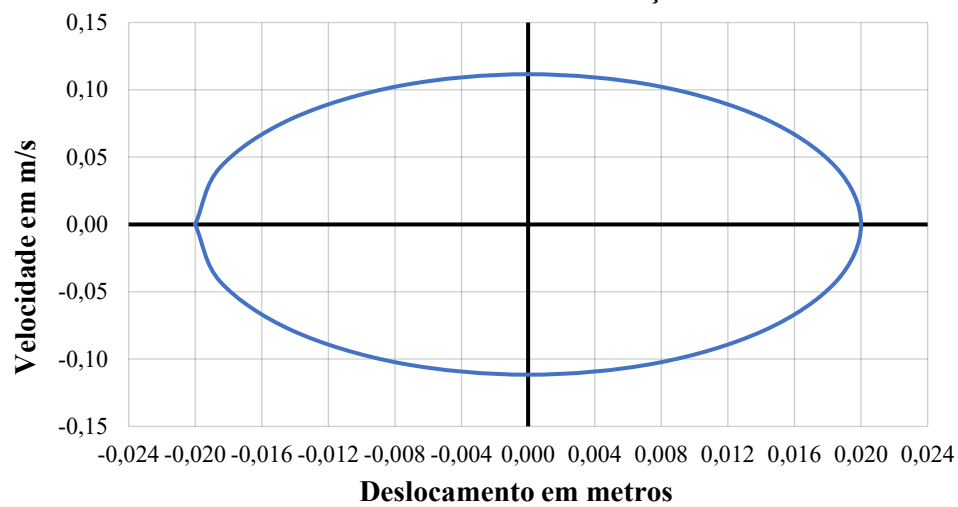
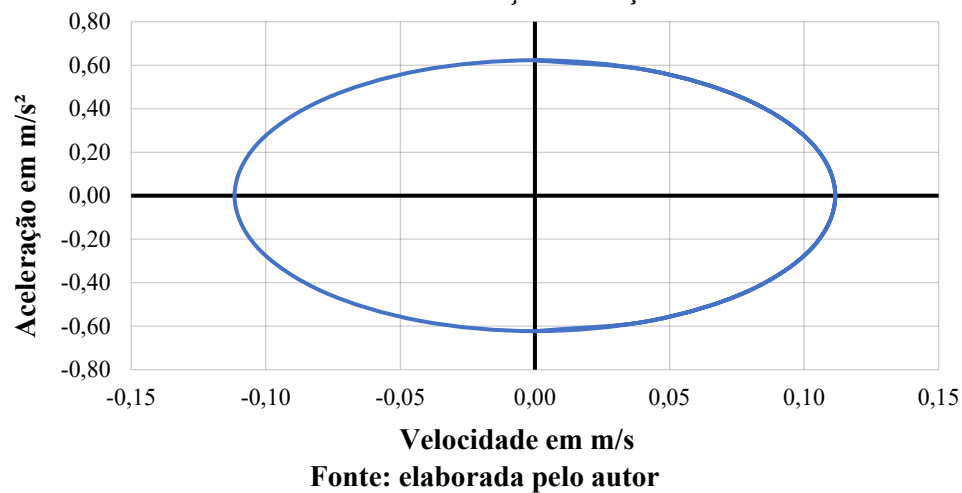
$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
	m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2
0,000	-0,020	0,000	0,623	1,969	0,000	-0,112	0,000
0,281	0,000	0,112	0,000	2,251	-0,020	0,000	0,623
0,563	0,020	0,000	-0,623	2,532	0,000	0,112	0,000
0,844	0,000	-0,112	0,000	2,813	0,020	0,000	-0,623
1,125	-0,020	0,000	0,623	3,095	0,000	-0,112	0,000
1,407	0,000	0,112	0,000	3,376	-0,020	0,000	0,623
1,688	0,020	0,000	-0,623				

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 25 – Tempo \times deslocamento de vibração livre não amortecida



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 26 - Deslocamento \times velocidade vibração livre não amortecida**Gráfico 27 - Velocidade \times aceleração vibração livre não amortecida**

Anexo 4

Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso crítico

Com o propósito de exemplificar a aplicação das Equações apresentadas na Tabela 1 para vibrações livres com amortecimento viscoso crítico, serão apresentados os procedimentos de cálculo para determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ a fim de traçar os gráficos de *tempo × deslocamento*, *deslocamento × velocidade* e *velocidade × aceleração* do problema apresentado na Figura 42 e Figura 43 do Anexo 3, porém, considerando amortecimento viscoso crítico.

Serão admitidas as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibrações livres não amortecidas do Anexo 3 e que o sistema é abandonado no tempo zero na coordenada $x = -2,00\text{cm}$ com velocidade inicial é nula, portanto, $x(0) = -0,02\text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0$. O resumo de todos os dados de entrada estão na Tabela 76. O amortecimento crítico c_c é um parâmetro que também estará presente quando for considerado amortecimento supercrítico (Anexo 5) e subcrítico (Anexo 6), utilizando a Equação 9, $c_c = 11.166\text{ Ns/m}$ (Equação 64).

$$c_c = \sqrt{4 k m} \therefore c_c = \sqrt{4 \times 31.143 \times 1.000} \therefore c_c = 11.161\text{ Ns/m} \quad \text{Equação 64}$$

Tabela 76 – Propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibração livre com amortecimento viscoso crítico semelhantes ao do exemplo de vibração livre não amortecida

Rigidez	$k = 31.143\text{ N/m}$
Massa	$m = 1.000\text{ kg}$
Amortecimento crítico calculado	$c_c = 11.161\text{ Ns/m}$
Condições iniciais	$x(0) = -0,02\text{ m}$
	$\dot{x}(0) = 0$
Equação do movimento para vibração livre com amortecimento viscoso crítico	$x(t) = Ae^{-\frac{c_c}{2m}t}$

Fonte: elaborada pelo autor

Na Tabela 77 são apresentados os procedimentos a fim de determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ para vibração livre com amortecimento crítico viscoso.

Tabela 77 – Procedimentos para determinação da equação do movimento, velocidade e aceleração para vibração livre com amortecimento crítico viscoso

Etapa	Procedimento	Cálculo
1	Substituindo $c_c = 11.166 \text{ Ns/m}$ e $m = 1000 \text{ kg}$ na equação do movimento da Tabela 1 para amortecimento crítico e impondo a condição de contorno $x(0) = -0,02 \text{ m}$ para determinar A .	$x(t) = Ae^{-\frac{c_c}{2m}t}$ $\therefore x(t) = Ae^{-\frac{11.166}{2 \times 1000}t} \therefore x(t) = Ae^{-5,58t}$ $\therefore x(0) = Ae^{-5,58 \times 0} = -0,02 \therefore A = -0,02$ $\therefore x(t) = -0,02 e^{-5,58t}$
2	Derivando a equação do deslocamento para determinar a equação da velocidade $\dot{x}(t)$	$x(t) = -0,02 e^{-5,58t}$ $\therefore \dot{x}(t) = -0,02 \times -5,58 \times e^{-5,58t}$ $\therefore \dot{x}(t) = 0,1116 e^{-5,58t}$
3	Determinando a equação da aceleração $\ddot{x}(t)$ derivando a equação da velocidade $\dot{x}(t)$	$\dot{x}(t) = 0,1116 e^{-5,58t}$ $\ddot{x}(t) = 0,1116 \times -5,58 \times e^{-5,58t}$ $\ddot{x}(t) = -0,6227 e^{-5,58t}$

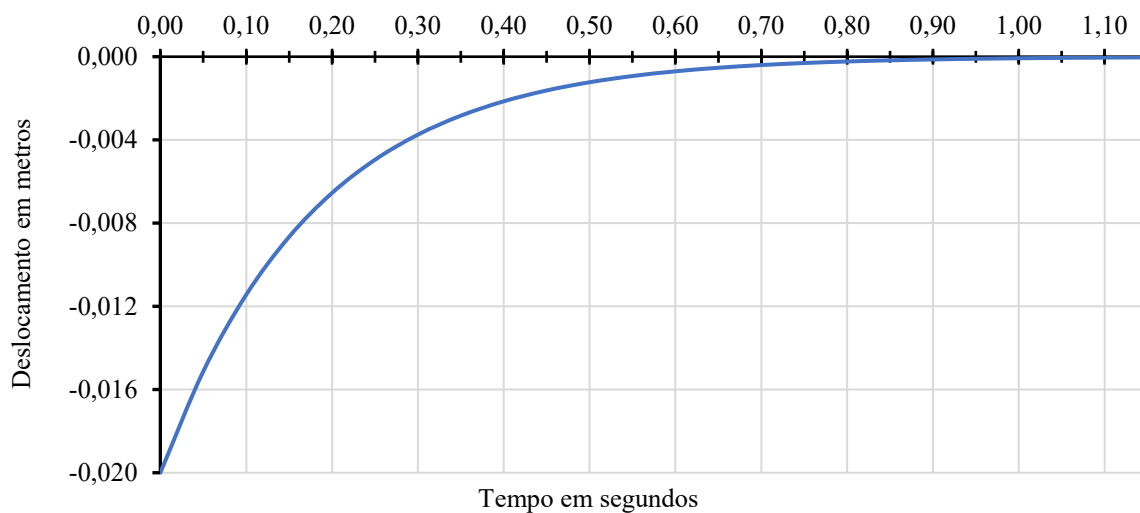
Fonte: elaborada pelo autor

Com as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ desenvolvidas na Tabela 77, foram gerados os dados da Tabela 78 e traçados os gráficos de *tempo × deslocamento* (Gráfico 28), *deslocamento × velocidade* (Gráfico 29) e *velocidade × aceleração* (Gráfico 30).

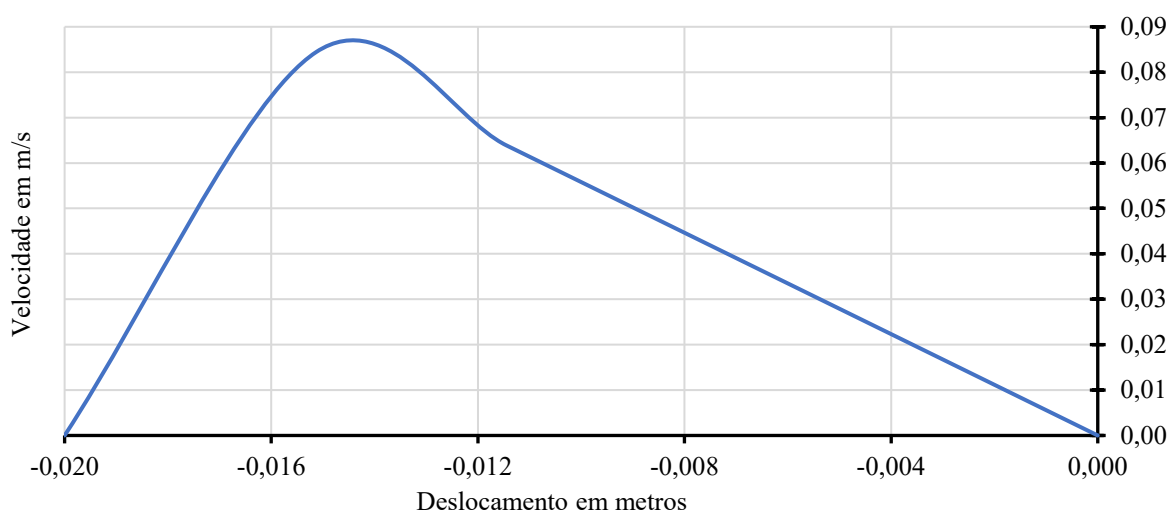
Tabela 78 – Deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo para vibração livre com amortecimento crítico viscoso

$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
	m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2
0,00	-0,020	0,000	0,000	0,40	-0,002	0,012	-0,067	0,80	0,000	0,001	-0,007
0,05	-0,015	0,084	-0,472	0,45	-0,002	0,009	-0,051	0,85	0,000	0,001	-0,005
0,10	-0,011	0,064	-0,357	0,50	-0,001	0,007	-0,038	0,90	0,000	0,001	-0,004
0,15	-0,009	0,048	-0,270	0,55	-0,001	0,005	-0,029	0,95	0,000	0,001	-0,003
0,20	-0,007	0,037	-0,204	0,60	-0,001	0,004	-0,022	1,00	0,000	0,000	-0,002
0,25	-0,005	0,028	-0,154	0,65	-0,001	0,003	-0,017	1,05	0,000	0,000	-0,002
0,30	-0,004	0,021	-0,117	0,70	0,000	0,002	-0,013	1,10	0,000	0,000	-0,001
0,35	-0,003	0,016	-0,088	0,75	0,000	0,002	-0,009	1,15	0,000	0,000	-0,001

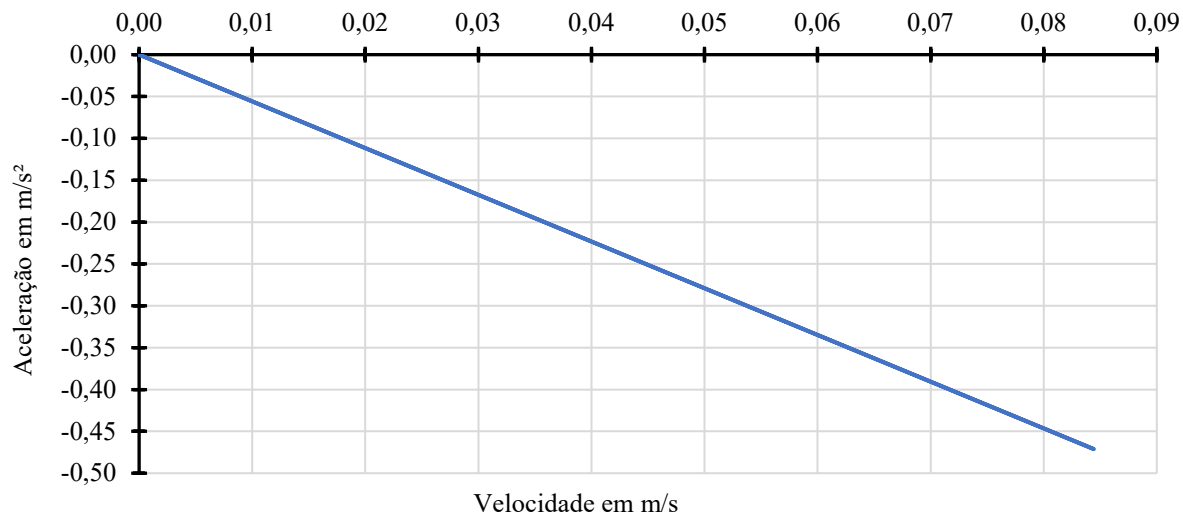
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 28 - Tempo x deslocamento de vibração livre com amortecimento crítico viscoso

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 29 - Deslocamento x velocidade de vibração livre com amortecimento crítico viscoso

Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 30 - Velocidade x aceleração de vibração livre com amortecimento crítico viscoso

Fonte: elaborada pelo autor

Anexo 5

Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso supercrítico

Com o propósito de exemplificar a aplicação das Equações apresentadas na Tabela 1 para vibrações livres com amortecimento viscoso supercrítico, serão apresentados os procedimentos de cálculo para determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ a fim de traçar os gráficos de *tempo × deslocamento*, *deslocamento × velocidade* e *velocidade × aceleração* do problema apresentado na Figura 42 e Figura 43 do Anexo 3 considerando amortecimento viscoso supercrítico.

Serão admitidas as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibrações livres não amortecidas do Anexo 3 e que o sistema é abandonado no tempo zero na coordenada $x = -2,00\text{cm}$ com velocidade inicial é nula, portanto, $x(0) = -0,02\text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0$. Como agora o problema considera amortecimento supercrítico é necessário que $c > c_c$, portanto, será adotado $c = 14.000\text{ Ns/m}$ visto que $c_c = 11.166\text{ Ns/m}$ (Equação 64). O resumo de todos os dados de entrada estão Tabela 79.

Tabela 79 – Propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico semelhantes ao do exemplo de vibração livre não amortecida

Rigidez	$k = 31.143\text{ N/m}$
Massa	$m = 1.000\text{ kg}$
Amortecimento supercrítico adotado	$c = 14.000\text{ Ns/m}$
Condições iniciais	$x(0) = -0,02\text{m}$
	$\dot{x}(0) = 0$
Equação do movimento para vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico	$x(t) = A_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}$

Fonte: elaborada pelo autor

Na Tabela 80 são apresentados os procedimentos a fim de determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ para vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico.

Tabela 80 - Procedimentos para determinação da equação do movimento, velocidade e aceleração para vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico

Etapa	Procedimento/Cálculo
1	<p>Substituindo $c = 14.000 \text{ Ns/m}$, $k = 31.143 \text{ N/m}$ e $m = 1.000 \text{ kg}$ na equação do movimento da Tabela 79 e impondo a condição de contorno $x(0) = -0,02 \text{ m}$.</p> $x(t) = A_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}$ $\therefore x(t) = A_1 e^{\left(-\frac{14.000}{2 \times 1.000} + \sqrt{\left(\frac{14.000}{2 \times 1.000}\right)^2 - \frac{31.143}{1.000}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{14.000}{2 \times 1.000} - \sqrt{\left(\frac{14.000}{2 \times 1.000}\right)^2 - \frac{31.143}{1.000}}\right)t}$ $\therefore x(t) = A_1 e^{-2,774t} + A_2 e^{-11,226t}$ $\therefore x(0) = A_1 e^{-2,774t} + A_2 e^{-11,226t} = -0,02$
2	<p>Determinando a equação da velocidade derivando a equação do movimento determinada na etapa 1 e impondo a condição de contorno $\dot{x}(0) = 0$.</p> $\dot{x}(t) = -2,774 A_1 e^{-2,774t} - 11,226 A_2 e^{-11,226t}$ $\therefore \dot{x}(0) = -2,774 A_1 e^{-2,774t} - 11,226 A_2 e^{-11,226t} = 0$
3	<p>Resolvendo sistema formado pela equação do deslocamento e equação da velocidade com as condições de contorno $x(0) = -0,02 \text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0$ impostas (etapa 1 e 2) para determinar as constantes A_1 e A_2.</p> $\begin{cases} A_1 e^{-2,774t} + A_2 e^{-11,226t} = -0,02 \\ -2,774 A_1 e^{-2,774t} - 11,226 A_2 e^{-11,226t} = 0 \end{cases}$ $\therefore A_1 = -0,02658; A_2 = 0,00658$
4	<p>Reescrevendo as equações do deslocamento e da velocidade com as constantes A_1 e A_2 determinadas na etapa 3.</p> $x(t) = -0,02658 e^{-2,774t} + 0,00658 e^{-11,226t}$ $\dot{x}(t) = 0,0737 e^{-2,774t} - 0,0739 e^{-11,226t}$
5	<p>Derivando a equação da velocidade para determinar a equação da aceleração</p> $\ddot{x}(t) = -2,774 \times 0,0737 e^{-2,774t} + 11,226 \times 0,0739 e^{-11,226t}$ $\ddot{x}(t) = -0,2044 e^{-2,774t} + 0,8296 e^{-11,226t}$

Fonte: elaborada pelo autor

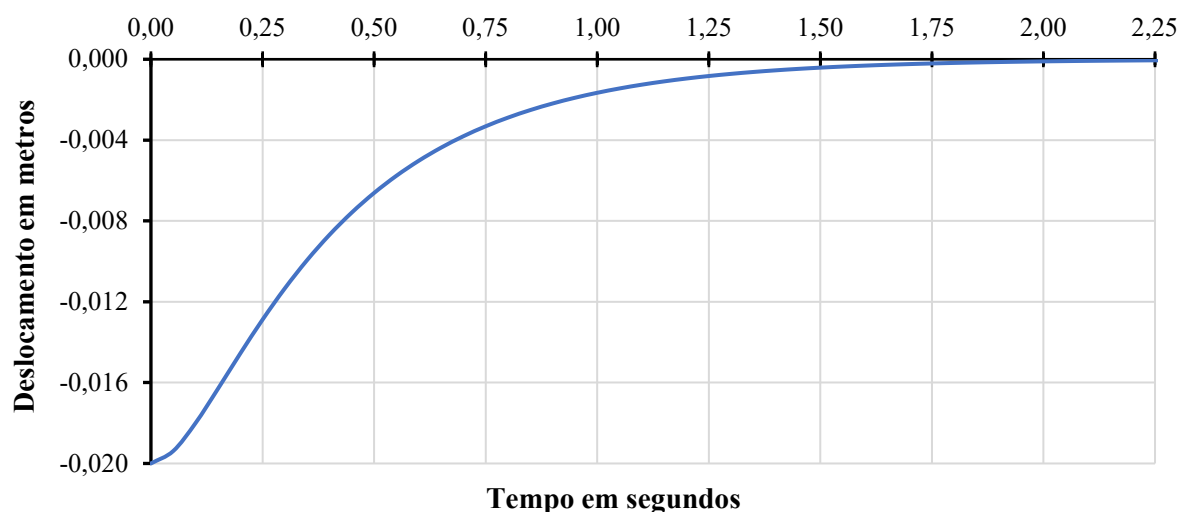
Com as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ desenvolvidas na Tabela 80, foram gerados os dados da Tabela 81 e traçados os gráficos de *tempo* \times *deslocamento* (Gráfico 31), *deslocamento* \times *velocidade* (Gráfico 32) e *velocidade* \times *aceleração* (Gráfico 33).

Tabela 81 - Deslocamento, velocidade e aceleração em fundação do tempo para vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico

$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
	m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2
0,00	-0,020	0,000	0,000	0,80	-0,003	0,008	-0,022	1,60	0,000	0,001	-0,002
0,05	-0,019	0,022	0,294	0,85	-0,003	0,007	-0,019	1,65	0,000	0,001	-0,002
0,10	-0,018	0,032	0,114	0,90	-0,002	0,006	-0,017	1,70	0,000	0,001	-0,002
0,15	-0,016	0,035	0,019	0,95	-0,002	0,005	-0,015	1,75	0,000	0,001	-0,002
0,20	-0,015	0,035	-0,030	1,00	-0,002	0,005	-0,013	1,80	0,000	0,000	-0,001
0,25	-0,013	0,032	-0,052	1,05	-0,001	0,004	-0,011	1,85	0,000	0,000	-0,001
0,30	-0,011	0,030	-0,061	1,10	-0,001	0,003	-0,010	1,90	0,000	0,000	-0,001
0,35	-0,010	0,026	-0,061	1,15	-0,001	0,003	-0,008	1,95	0,000	0,000	-0,001
0,40	-0,009	0,023	-0,058	1,20	-0,001	0,003	-0,007	2,00	0,000	0,000	-0,001
0,45	-0,008	0,021	-0,053	1,25	-0,001	0,002	-0,006	2,05	0,000	0,000	-0,001
0,50	-0,007	0,018	-0,048	1,30	-0,001	0,002	-0,006	2,10	0,000	0,000	-0,001
0,55	-0,006	0,016	-0,043	1,35	-0,001	0,002	-0,005	2,15	0,000	0,000	-0,001
0,60	-0,005	0,014	-0,038	1,40	-0,001	0,002	-0,004	2,20	0,000	0,000	0,000
0,65	-0,004	0,012	-0,033	1,45	0,000	0,001	-0,004	2,25	0,000	0,000	0,000
0,70	-0,004	0,011	-0,029	1,50	0,000	0,001	-0,003	2,30	0,000	0,000	0,000
0,75	-0,003	0,009	-0,025	1,55	0,000	0,001	-0,003	2,35	0,000	0,000	0,000

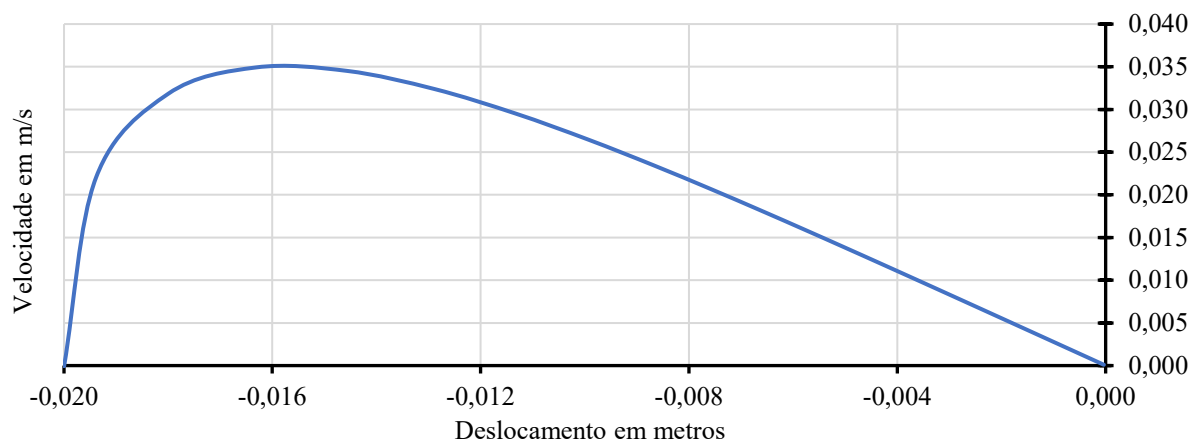
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 31 - Tempo x deslocamento de vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico



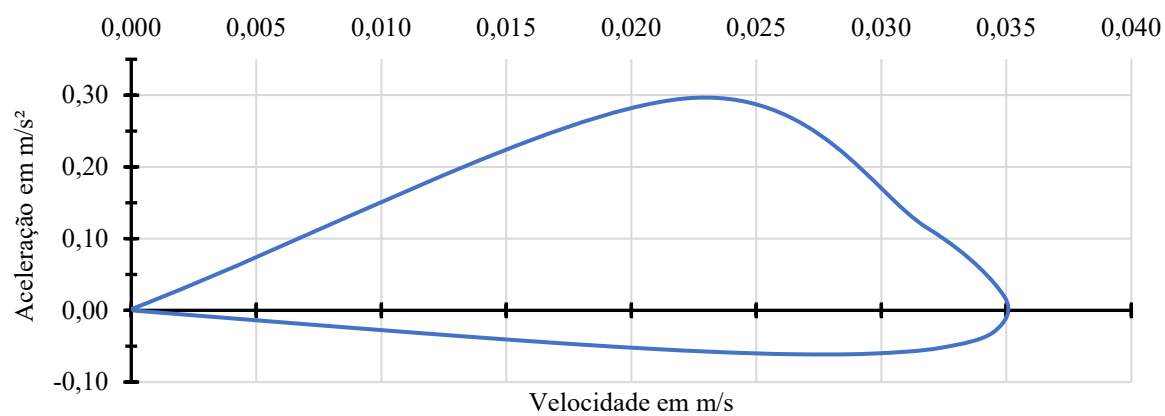
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 32 - Deslocamento x velocidade de vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 33 - Velocidade x aceleração de vibração livre com amortecimento viscoso supercrítico



Fonte: elaborada pelo autor

Anexo 6

Aplicação das formulações para vibrações livres com amortecimento viscoso subcrítico

Com o propósito de exemplificar a aplicação das Equações apresentadas na Tabela 1 para vibrações livres com amortecimento viscoso subcrítico, serão apresentados os procedimentos de cálculo para determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ a fim de traçar os gráficos de *tempo × deslocamento*, *deslocamento × velocidade* e *velocidade × aceleração* do problema apresentado na Figura 42 e Figura 43 do Anexo 3 considerando amortecimento viscoso subcrítico.

Serão admitidas as mesmas propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibrações livres não amortecidas do Anexo 3 e que o sistema é abandonado no tempo zero na coordenada $x = -2,00\text{cm}$ com velocidade inicial é nula, portanto, $x(0) = -0,02\text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0$. Como agora o problema considera amortecimento subcrítico é necessário que $c < c_c$, portanto, será adotado $c = 350\text{ Ns/m}$ visto que $c_c = 11.166\text{ Ns/m}$ (Equação 64). O resumo de todos os dados de entrada estão Tabela 82.

Ao se admitir amortecimento subcrítico, como dito no item 2.3.2, surgem duas novas variáveis, a taxa de amortecimento ξ e a frequência natural circular amortecida ω_d , calculadas, respectivamente, com a Equação 10 e a Equação 11. Para esse exemplo, $\xi = 0,0314$ (Equação 65) e $\omega_d = 5,577\text{ rad/s}$ (Equação 66).

$$\xi = \frac{c}{2 m \omega_n} = \frac{350}{2 \times 1.000 \times 5,58} \therefore \xi = \mathbf{0,0314} \quad \text{Equação 65}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \therefore \omega_d = 5,58 \times \sqrt{1 - 0,0314^2} \therefore \omega_d = \mathbf{5,577\text{ rad/s}} \quad \text{Equação 66}$$

Tabela 82 – Propriedades físicas e geométricas do exemplo de vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico

Frequência natural circular da vibração livre não amortecida	$\omega_n = 5,58 \text{ rad/s}$
Rigidez	$k = 31.143 \text{ N/m}$
Massa	$m = 1.000 \text{ kg}$
Amortecimento subcrítico adotado	$c = 350 \text{ Ns/m}$
Amortecimento crítico	$c_c = 11.161 \text{ Ns/m}$
Taxa de amortecimento	$\xi = 0,0314$
Frequência natural circular da vibração livre amortecida	$\omega_d = 5,577 \text{ rad/s}$
Condições iniciais	$x(0) = -0,02 \text{ m}$
	$\dot{x}(0) = 0$
Equação do movimento para vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico	$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$ ζ em decimal

Fonte: elaborada pelo autor

Na Tabela 83 são apresentados os procedimentos a fim de determinar as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ para vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico.

Tabela 83 - Procedimentos para determinação da equação do movimento, velocidade e aceleração para vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico

Etapa	Procedimento/Cálculo
1	Substituindo $\xi = 0,0314, \omega_n = 5,58 \text{ rad/s}$ e $\omega_d = 5,577 \text{ rad/s}$ na equação do movimento da Tabela 82 e determinando a equação do movimento com as constantes C_1 e C_2 desconhecidas.
	$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$ $\therefore x(t) = e^{-0,0314 \times 5,58 t} [C_1 \cos(5,577 \times t) + C_2 \sin(5,577 \times t)]$ $\therefore x(t) = e^{-0,1752 t} [C_1 \cos(5,577 t) + C_2 \sin(5,577 t)]$
2	Impondo a condição de contorno $x(0) = -0,02 \text{ m}$ na equação do deslocamento encontrada na etapa 1 para determinar as constantes C_1 e C_2 .
	$x(t) = e^{-0,1752 t} [C_1 \cos(5,577 t) + C_2 \sin(5,577 t)]$ $\therefore x(0) = e^{-0,1752 \times 0} [C_1 \times \cos(5,577 \times 0) + C_2 \times \sin(5,577 \times 0)] = -0,02$ $\therefore 1 \times [C_1 \times 1 + C_2 \times 0] = -0,02 \therefore C_1 = -0,02$
3	Substituindo a constante $C_1 = -0,02$ determinada na etapa 2 na equação do movimento, determinada na etapa 1, e derivando-a para obter a equação da velocidade com C_2 desconhecido.
	$x(t) = e^{-0,1752 t} [-0,02 \cos(5,577 t) + C_2 \sin(5,577 t)]$ $\dot{x}(t) = -0,1752 e^{-0,1752 t} [-0,02 \cos(5,577 t) + C_2 \sin(5,577 t)]$ $+ e^{-0,1752 t} [0,1115 \sin(5,577 t) + 5,577 C_2 \cos(5,577 t)]$
4	Com a equação da velocidade determinada na etapa 3 com C_2 desconhecido, impondo a condição de contorno $\dot{x}(0) = 0$ para determinar C_2
	$\therefore \dot{x}(0) = -0,1752 \times e^{-0,1752 \times 0} \times [-0,02 \times \cos(5,577 \times 0) + C_2 \times \sin(5,577 \times 0)]$ $+ e^{-0,1752 \times 0} \times [0,1115 \times \sin(5,577 \times 0) + 5,577 \times C_2 \times \cos(5,577 \times 0)] = 0$ $\therefore \dot{x}(0) = -0,1752 \times 1 \times [-0,02 \times 1 + C_2 \times 0] + 1 \times [0,1115 \times 0 + 5,577 \times C_2 \times 1] = 0$ $\therefore 0,0035 + 5,577 \times C_2 = 0 \therefore C_2 = -0,0006$
5	Reescrevendo as equações do deslocamento e da velocidade com as constantes C_1 e C_2 determinadas na etapa 3 e 4.
	$x(t) = e^{-0,1752 t} [-0,02 \cos(5,577 t) - 0,0006 \sin(5,577 t)]$ $\dot{x}(t) = e^{-0,1752 t} [0,1116 \sin(5,577 t) + 0,0002 \cos(5,577 t)]$
6	Derivando a equação da velocidade para determinar a equação da aceleração
	$\ddot{x}(t) = -0,1752 \times e^{-0,1752 t} \times [0,1116 \times \sin(5,577 t) + 0,0002 \times \cos(5,577 t)]$ $+ e^{-0,1752 t} \times [0,1116 \times 5,577 \times \cos(5,577 t) - 0,0002 \times 5,577 \times \sin(5,577 t)]$ $\ddot{x}(t) = e^{-0,1752 t} [-0,0207 \sin(5,577 t) + 0,6224 \cos(5,577 t)]$

Fonte: elaborada pelo autor

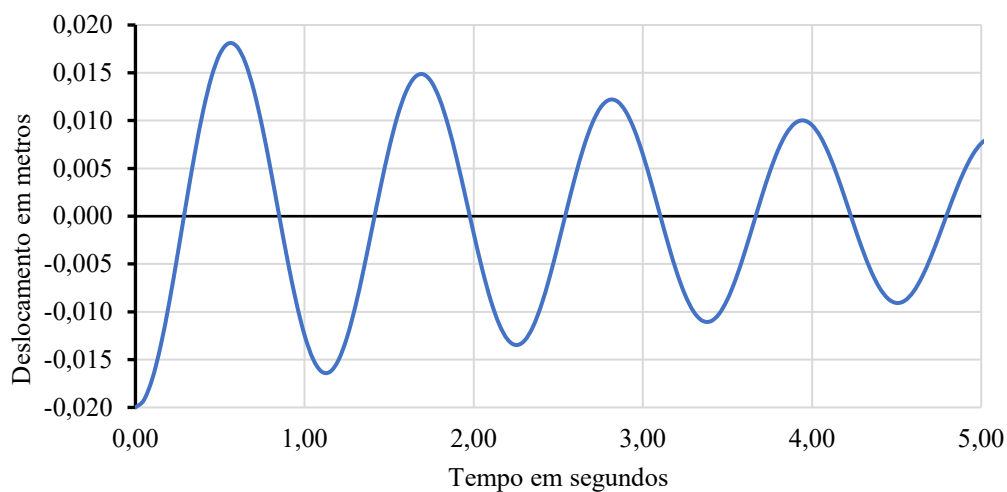
Com as Equações do deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$ desenvolvidas na Tabela 83, foram gerados os dados da Tabela 84 e traçados os gráficos de *tempo* \times *deslocamento* (Gráfico 34), *deslocamento* \times *velocidade* (Gráfico 35) e *velocidade* \times *aceleração* (Gráfico 36).

Tabela 84 - Deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo para vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico

$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$	$t(s)$	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	$\ddot{x}(t)$
	m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2		m	m/s	m/s^2
0,00	-0,020	0,000	0,000	1,70	0,015	-0,008	-0,459	3,40	-0,011	0,010	0,338
0,05	-0,019	0,034	0,582	1,75	0,014	-0,030	-0,422	3,45	-0,010	0,026	0,305
0,10	-0,017	0,061	0,498	1,80	0,012	-0,049	-0,353	3,50	-0,008	0,040	0,249
0,15	-0,013	0,083	0,378	1,85	0,009	-0,065	-0,258	3,55	-0,006	0,050	0,174
0,20	-0,008	0,098	0,230	1,90	0,005	-0,075	-0,145	3,60	-0,003	0,057	0,088
0,25	-0,003	0,106	0,067	1,95	0,002	-0,079	-0,023	3,65	-0,001	0,059	-0,004
0,30	0,002	0,105	-0,098	2,00	-0,002	-0,077	0,099	3,70	0,002	0,057	-0,093
0,35	0,007	0,096	-0,252	2,05	-0,006	-0,069	0,211	3,75	0,005	0,050	-0,174
0,40	0,011	0,080	-0,385	2,10	-0,009	-0,056	0,305	3,80	0,007	0,039	-0,240
0,45	0,015	0,058	-0,486	2,15	-0,012	-0,039	0,374	3,85	0,009	0,026	-0,287
0,50	0,017	0,032	-0,548	2,20	-0,013	-0,019	0,413	3,90	0,010	0,011	-0,311
0,55	0,018	0,004	-0,566	2,25	-0,013	0,002	0,420	3,95	0,010	-0,005	-0,310
0,60	0,018	-0,024	-0,541	2,30	-0,013	0,022	0,394	4,00	0,009	-0,020	-0,286
0,65	0,016	-0,049	-0,475	2,35	-0,011	0,040	0,339	4,05	0,008	-0,033	-0,240
0,70	0,013	-0,071	-0,373	2,40	-0,009	0,055	0,258	4,10	0,006	-0,043	-0,177
0,75	0,009	-0,086	-0,245	2,45	-0,006	0,066	0,159	4,15	0,004	-0,050	-0,101
0,80	0,004	-0,095	-0,100	2,50	-0,002	0,071	0,050	4,20	0,001	-0,053	-0,018
0,85	-0,001	-0,096	0,050	2,55	0,001	0,071	-0,062	4,25	-0,001	-0,052	0,064
0,90	-0,005	-0,090	0,194	2,60	0,005	0,065	-0,166	4,30	-0,004	-0,047	0,140
0,95	-0,009	-0,077	0,320	2,65	0,008	0,055	-0,257	4,35	-0,006	-0,038	0,204
1,00	-0,013	-0,058	0,420	2,70	0,010	0,040	-0,325	4,40	-0,008	-0,027	0,251
1,05	-0,015	-0,036	0,485	2,75	0,012	0,022	-0,368	4,45	-0,009	-0,014	0,278
1,10	-0,016	-0,010	0,513	2,80	0,012	0,004	-0,382	4,50	-0,009	0,001	0,283
1,15	-0,016	0,015	0,500	2,85	0,012	-0,015	-0,366	4,55	-0,009	0,014	0,267
1,20	-0,015	0,039	0,449	2,90	0,011	-0,033	-0,322	4,60	-0,008	0,027	0,230
1,25	-0,012	0,059	0,365	2,95	0,009	-0,047	-0,255	4,65	-0,006	0,037	0,176
1,30	-0,009	0,075	0,254	3,00	0,006	-0,058	-0,169	4,70	-0,004	0,044	0,110
1,35	-0,005	0,085	0,126	3,05	0,003	-0,064	-0,071	4,75	-0,002	0,048	0,036
1,40	-0,001	0,087	-0,010	3,10	0,000	-0,065	0,030	4,80	0,001	0,048	-0,039
1,45	0,004	0,084	-0,143	3,15	-0,003	-0,061	0,127	4,85	0,003	0,044	-0,110
1,50	0,008	0,073	-0,262	3,20	-0,006	-0,052	0,213	4,90	0,005	0,037	-0,171
1,55	0,011	0,058	-0,360	3,25	-0,009	-0,040	0,281	4,95	0,007	0,027	-0,218
1,60	0,013	0,038	-0,428	3,30	-0,010	-0,025	0,326	5,00	0,008	0,016	-0,248
1,65	0,015	0,015	-0,462	3,35	-0,011	-0,008	0,345	5,05	0,008	0,003	-0,257

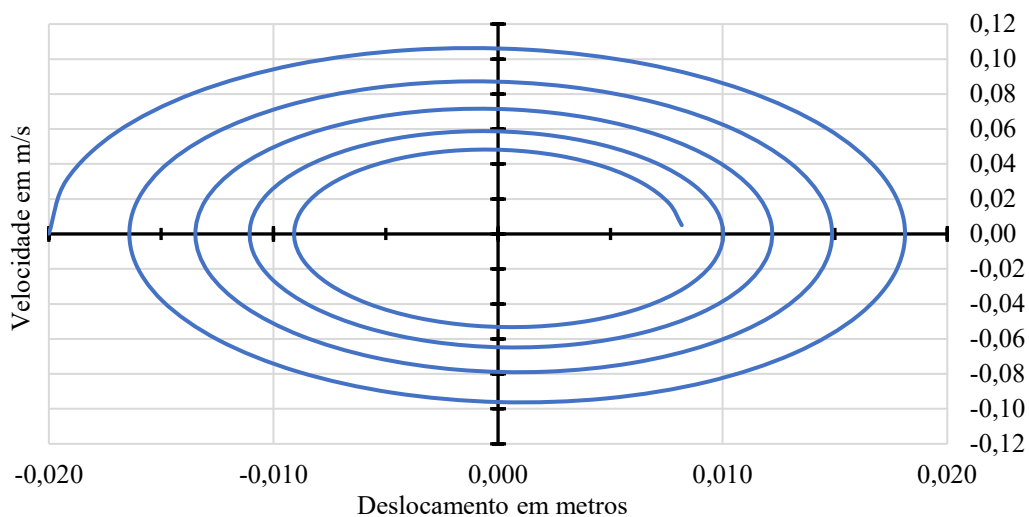
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 34 - Tempo × deslocamento de vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico



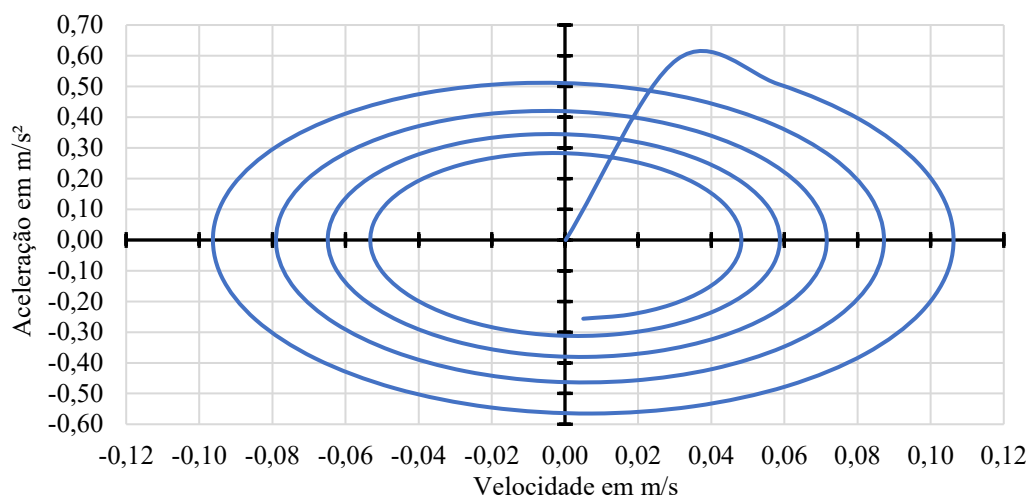
Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 35- Deslocamento × velocidade de vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico



Fonte: elaborada pelo autor

Gráfico 36 - Velocidade × aceleração de vibração livre com amortecimento viscoso subcrítico



Fonte: elaborada pelo autor