UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudos sobre A-identidades polinomiais

Fernando Augusto Naves

São Carlos-SP
21 de julho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estudos sobre A-identidades polinomiais

Fernando Augusto Naves

Orientador: Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
21 de julho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Fernando Augusto Naves, realizada em 21/07/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo (UFSCar)

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Profa. Dra. Ana Cristina Vieira (UFMG)

Prof. Dr. Ednei Aparececido Santulo Junior (UEM)

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello (UNIFESP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho a Deus que é a fonte de tudo.

À minha mãe Maria, meu pai José e minha irmã Luciana, responsáveis pela minha formação.

À minha esposa Priscilla e meus filhos Lucas e Clarice.

"Provamos através da lógica
mas descobrimos a partir da intuição."
J. Henri Poincaré

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ser tão misericordioso comigo. Tudo é graça d'Ele!

Agradeço à minha mãe Maria Lucia pelo árduo trabalho e por ser um exemplo máximo de alegria, superação e inteligência. À meu pai José Augusto por ter sido sempre tão carinhoso comigo, presente em minha vida e ter me ensinado os valores que possuo. À minha irmã Luciana por ter sido sempre uma incentivadora dos meus estudos desde a infância. O gosto que tomei por estudar tem grande influência sua. Obrigado. Eu amo vocês.

Agradeço à minha esposa Priscilla por ser a melhor coisa que me aconteceu na vida. O seu companheirismo, apoio e incentivo foram mais do que fundamentais para que eu pudesse acreditar em mim mesmo. Agradeço toda a sua dedicação com nossa família. Agradeço por você ter nos dado dois (por enquanto) filhos mais do que amados. A calmaria e o propósito que encontro ao olhar para você, faz tudo valer a pena. Eu amo vocês.

Agradeço ao meu orientador Humberto que sempre foi um cara nota 10. Nossa relação sempre foi muito amistosa, desde o mestrado. Além de ser um profissional que tenho grande admiração, foi um prazer gigante trabalhar com ele. É com muita felicidade que o considero como um grande amigo!

Agradeço aos demais professores do Departamento de Matemática (DM) da UFSCar que sempre foram gentis, cordiais e atenciosos. Em especial ao professor Dimas, que se tornou uma inspiração pessoal e profissional, e ao professor Luiz Hartmann pela amizade e seriedade com que trabalha.

A todos os colegas de doutorado pelas rodas de conversa, pela pelada semanal e apoio durante o curso. Correndo o risco de cometer injustiças, agradeço em especial ao Alisson, Evandro, Mateus e Carlos. Agradeço também ao Wilmar e Hilda, a quem sou muito grato.

A todos os funcionários do DM pela prestatividade com que sempre me ajudaram.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação desde a infância. Em especial aos professores da UFLA que contribuíram muito para minha formação matemática durante a graduação.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - *Campus* Bambuí que me liberou das atividades docentes para poder me dedicar ao doutorado.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar A-identidades em álgebras associativas. Mais especificamente, estudamos primeiramente as A-identidades do tensor quadrado da álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita E, e encontramos o grau mínimo de uma A-identidade satisfeita por $E \otimes E$. Devido ao Teorema do Produto Tensorial de Kemer, em característica zero as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ são PI-equivalentes. Assim, em diversos momentos trabalhamos com a álgebra $M_{1,1}(E)$. Numa segunda etapa, estudamos as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$. Nesse sentido, descrevemos o conjunto de tais identidades e calculamos suas respectivas A-codimensões graduadas.

Palavras-chave: PI-Álgebras, Álgebra Graduada, Identidade Polinomial, A-Identidade Polinomial, Álgebra de Grassmann, Tensor Quadrado da Álgebra de Grassmann.

Abstract

The aim of this work is to study A-identities in associative algebras. More specifically, we study the A-identities of the tensor square of the unitary and infinite dimensional Grassmann algebra E, and we find the minimum degree of an A-identity of $E \otimes E$. Due to Kemer's Tensor Product Theorem, in characteristic zero the algebras $M_{1,1}(E)$ and $E \otimes E$ are PI-equivalent. Thus, in several moments we deal with the algebra $M_{1,1}(E)$. In a second moment, we study the $\mathbb{Z}_2$-graded A-identities of $M_{1,1}(E)$. In this sense, we describe the set of such identities and calculate its respective graded A-codimensions.

Keywords: PI-Algebras, Graded Algebra, Polynomial Identity, Polynomial A-Identity, Grassmann Algebra, Tensor Square of the Grassmann Algebra .

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ em variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ é uma *identidade polinomial* para uma álgebra R (ou que R satisfaz a identidade f) se $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$ para quaisquer elementos $r_1, \ldots, r_n \in R$. Uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não nula é chamada de *PI-álgebra*. Por exemplo, se R é uma álgebra comutativa então o polinômio definido por $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial não nula para R. O polinômio $[x_1, x_2]$ é chamado *comutador* de x_1 e x_2. Definimos indutivamente o comutador de comprimento $n > 2$ por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] := [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$. Outros exemplos importantes de PI-álgebras são as álgebras nilpotentes e as de dimensão finita. Por outro lado, existem álgebras que não satisfazem nenhuma identidade não nula. Por exemplo, sejam F um corpo, $M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em F e considere a álgebra

$$\prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$$

formada pelas sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ com $a_n \in M_n(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e com operações definidas em cada "coordenada". Essa álgebra não é uma PI-álgebra.

Assim, o estudo de PI-álgebras engloba muitas classes de álgebras. Esta é uma área da Álgebra, mais especificamente da teoria de anéis, bastante ativa nos dias de hoje. Podemos considerar que o estudo de PI-álgebras começou com os trabalhos de Dehn [13] e Wagner [47] nas décadas de 20 e 30. Porém foi com os trabalhos de Kaplansky [34] em 1948 e de Amitsur e Levitzki [1] em 1950 que houve um maior desenvolvimento dessa área. Inclusive foi em [1] onde apareceu o famoso Teorema de Amitsur-Levitzki que afirma que o polinômio *standard*

$$st_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n)}$$

é uma identidade polinomial para $M_n(F)$. Em [19] há duas demonstrações distintas deste resultado.

Inúmeras perguntas surgem ao estudarmos PI-álgebras. Uma das mais famosas é o problema de Specht, proposto por W. Specht em [44]. Tal problema, indaga se o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra associativa R é finitamente gerado como T-ideal (que é um ideal invariante por endomorfismos da álgebra $F\langle X\rangle$). Para o caso de corpos de característica zero, a resposta é afirmativa e foi dada por Kemer em sua teoria de estrutura de variedades de álgebras associativas (veja [30]-[32]). Para o caso de corpos de característica positiva, Belov [7], Grishin [27] e Schigolev [43] responderam negativamente ao problema de Specht.

O problema de determinar uma base para o T-ideal das identidades de uma dada álgebra é, em geral, difícil. Em diversos casos, mostra-se muito útil considerar variações da noção de identidade polinomial, tal como a noção de identidade polinomial graduada. As identidades polinomiais graduadas têm um papel fundamental no estudo de PI-álgebras. Em alguns cenários importantes elas são mais fáceis de serem descritas e estão intimamente relacionadas com as identidades ordinárias. Por exemplo, se duas álgebras satisfazem as mesmas identidades graduadas, então elas satisfazem as mesmas identidades ordinárias. Convém ressaltar que na teoria de Kemer acima mencionada, fortemente usa-se a $\mathbb{Z}_2$-graduação da álgebra de Grassmann E de dimensão infinita e, consequentemente, o conceito de identidade polinomial graduada.

Com respeito a alguns resultados importantes envolvendo a álgebra de Grassmann E, em [35] Krakowski e Regev provaram que todas as identidades de E seguem do polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ quando o corpo base tem característica zero. Em [26] foi provado que o mesmo vale para corpos infinitos com $\operatorname{char}(F) = p > 2$. Já para corpos finitos com $\operatorname{char}(F) = p$ e $|F| = q$, o T-ideal das identidades de E é gerado pelos polinômios

- $[x, y, z]$ e $x^{pq} - x^p$, se $p > 2$;
- $[x, y]$ e $x^{2q} - x^2$, se $p = 2$.

Falando de identidades graduadas, considerando E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, o estudo das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de E pode ser encontrado em [17] quando o corpo base tem característica zero e em [12] para corpos de característica $p > 2$.

Em [39], Popov provou que para corpos de característica zero, os polinômios $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ e $[[x_1, x_2]^2, x_2]$ formam uma base para as identidades polinomiais de $E \otimes E$. Além disso, pelo Teorema do Produto Tensorial de Kemer (veja [41] e [32]), as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ são PI-equivalentes, isto é, satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Di Vincenzo em [15] descreveu as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ e deu uma nova demonstração da PI-equivalência entre $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$. Em [33], Koshlukov e Azevedo descreveram bases para os $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideais de $M_2(F)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ quando F é um corpo infinito de característica $p > 2$.

O escopo geral deste trabalho é o estudo das A-identidades. Sejam S_n o grupo simétrico de grau n e A_n o subgrupo alternado de S_n. Dizemos que f é um *A-polinômio de grau n* se

$$f = \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \qquad \alpha_\sigma \in F.$$

Se um A-polinômio é uma identidade polinomial para uma álgebra R, dizemos que f é uma *A-identidade para R*.

O estudo de A-identidades começou com Henke e Regev no artigo [28]. Eles calcularam as A-codimensões e A-cocaracteres da álgebra de Grassmann. Eles também apresentaram, como conjectura, um conjunto gerador para o espaço vetorial das A-identidades de E. Esta afirmação foi provada verdadeira por Gonçalves e Koshlukov em [22]. Também em [28], foi conjecturado que o grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra de matrizes $M_k(F)$ deveria ser $2k+2$. Em [23], Gonçalves e Koshlukov responderam negativamente a esta conjectura. Em [8], Brandão e Gonçalves descreveram os A-polinômios centrais de E. Mais recentemente, Gonçalves, Schützer e Talpo demonstraram em [24] que o grau mínimo para uma A-identidade de $M_2(F)$ é 6. Nesta tese, um dos nossos objetivos é provar que o grau mínimo para uma A-identidade de $E \otimes E$ é também 6 e exibir explicitamente uma tal A-identidade.

Em [9], Brandão, Gonçalves e Koshlukov introduziram o conceito de A-identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada. Eles descreveram as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(F)$ e calcularam suas respectivas A-codimensões graduadas. Inspirados por esse trabalho, exibiremos o conjunto de geradores de todas as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_{1,1}(E)$. Também calculamos as A-codimensões graduadas desta superálgebra.

A tese está estruturada da seguinte maneira: no primeiro capítulo apresentamos as noções básicas de PI-teoria e as definições dos objetos que serão estudados. Optamos por sermos concisos de modo a fazer apenas o necessário para o bom andamento do trabalho. Para uma visão mais completa sobre PI-álgebras, indicamos ao leitor [19]. Apresentamos também alguns resultados importantes sobre identidades envolvendo as álgebras E, $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$. Todas as demonstrações omitidas possuem a referência de onde podem ser encontradas.

No segundo capítulo lidamos com as A-identidades de $E \otimes E$. Apresentamos o básico de teoria de representações do grupo simétrico e alternado, ferramenta que utilizamos no processo de busca por identidades na álgebra mencionda. Provamos ainda a impossibilidade da existência de uma A-identidade de grau 5 para $E \otimes E$ e, em seguida, exibimos explicitamente uma de grau 6. É um polinômio "grande", composto por 144 monômios de grau seis. Os resultados deste capítulo foram publicados no artigo [38]. No terceiro capítulo, inspirados por [9], descrevemos todas as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra $M_{1,1}(E)$. Além disso, calculamos as A-codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas desta álgebra. Os resultados deste capítulo estão publicados online em [37].

Capítulo 1

Pré-requisitos e conceitos iniciais

Neste capítulo apresentaremos os conceitos mais básicos em PI-teoria. Serão apresentadas também notações que serão usadas no decorrer da tese. A menos que seja dito o contrário, F será um corpo arbitrário de característica zero. Em todo o trabalho, todas as álgebras mencionadas serão associativas e com unidade. Sempre que mencionado, todos os produtos tensoriais de álgebras serão sobre o corpo base F, isto é, usaremos o símbolo $\otimes$ no lugar de $\otimes_F$. Todos os módulos serão considerados como módulos à esquerda. Para mais detalhes sobre produto tensorial, indicamos [10]. Ao leitor interessado em uma exposição mais completa sobre PI-álgebras, indicamos [19] e [25].

1.1 Definições e exemplos básicos

Definição 1.1.1. *Denotaremos $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ como sendo um conjunto infinito enumerável de variáveis e $F\langle X\rangle$ como sendo a álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X, isto é, $F\langle X\rangle$ é o F-espaço vetorial com base formada por 1 e pelas palavras $x_{i_1}\cdots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in X$, $n \geq 1$ e com multiplicação definida pela concatenação de palavras. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de* ***polinômios****.*

Definição 1.1.2. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio e R uma álgebra. Dizemos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma* ***identidade polinomial para*** *R se $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$ para quaisquer $r_1, \ldots, r_n \in R$. Se $f \neq 0$, dizemos que R é uma* ***PI-álgebra****.*

Exemplo 1.1.3. *Considere o seguinte polinômio alternado*

$$st_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal da permutação σ. A álgebra das *matrizes $n \times n$ com entradas em F, denotada por $M_n(F)$, satisfaz o polinômio st_{2n}. Esse é o célebre Teorema de Amitsur-Levitzki. A demonstração original pode ser encontrada em [1]. Uma outra versão (dentre tantas outras provas) mais elementar da demonstração deve-se a Rosset [42].*

Exemplo 1.1.4. *Toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra. De fato, se dim $R = n$, então st_m é identidade polinomial para R para qualquer $m > n$.*

Uma forma de definirmos a álgebra de Grassmann de dimensão infinita E sobre F é a seguinte: seja $\mathrm{char}(F) \neq 2$. Considere a álgebra quociente $E := F\langle X\rangle / J$, onde J é o ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por $\{x_ix_j + x_jx_i \ : \ i, j \in \mathbb{N}\}$. Denotamos o elemento $\overline{x_i}$ no quociente $F\langle X\rangle / J$ por v_i, para $i = 1, 2, \ldots$. Os elementos v_i em E satisfazem as relações $v_iv_j = -v_jv_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Como $\mathrm{char}(F) \neq 2$, temos $v_i^2 = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Não é difícil ver que o conjunto

$$\{1,\ v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k} \ : \ k \geq 1,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

é uma base (como espaço vetorial) para E. Caso $\mathrm{char}(F) = 2$, fazemos a mesma construção apenas adicionando a relação x_i^2 no ideal J.

Exemplo 1.1.5. *Considere o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]$. Então f é uma identidade polinomial para E.*

Na verdade, em um corpo de característica zero, todas as identidades polinomiais de E seguem do comutador triplo do exemplo acima.

Definição 1.1.6. *1. Seja $U \subseteq F\langle X\rangle$ um ideal bilateral em $F\langle X\rangle$. Dizemos que U é um T-ideal de $F\langle X\rangle$ se U for invariante por endomorfismos da álgebra $F\langle X\rangle$, isto é, para quaisquer $f \in U$ e $\varphi : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle$ homomorfismo de álgebras, tem-se que $\varphi(f) \in U$.*

2. Seja R uma álgebra. Ao conjunto de todas as identidades polinomiais de R denotamos por $T(R)$. Não é difícil ver que ele é um T-ideal em $F\langle X\rangle$. Além disso, dado um T-ideal U em $F\langle X\rangle$, existe uma álgebra R tal que $U = T(R)$.

3. Dado um conjunto de polinômios $\{f_i \in F\langle X\rangle \ : \ i \in I\}$, o T-ideal gerado por este conjunto é o menor T-ideal em $F\langle X\rangle$ contendo $\{f_i \in F\langle X\rangle \ : \ i \in I\}$, isto é, é a interseção de todos os T-ideais em $F\langle X\rangle$ contendo $\{f_i \in F\langle X\rangle \ : \ i \in I\}$. Denotamos tal T-ideal por $\langle f_i \in F\langle X\rangle \ : \ i \in I\rangle^T$.

4. *Dizemos que duas álgebras A e B são PI-equivalentes se $T(A) = T(B)$.*

Não é difícil mostrar que o T-ideal gerado por um conjunto de polinômios $\{f_i \in F\langle X\rangle \ : \ i \in I\}$ consiste de todas as combinações lineares de

$$u_i f_i\left(g_{i1}, \ldots, g_{in_i}\right) v_i, \qquad g_{ij}, u_i, v_i \in F\langle X\rangle .$$

Para uma demonstração desse fato veja a Observação 2.2.6 no livro [19].

Teorema 1.1.7 ([35], Teorema 4.1)**.** *Seja F um corpo de característica zero. Então*

$$T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T .$$

O resultado acima já havia sido obtido 10 anos antes por Latyshev em [36].

Teorema 1.1.8 ([26], Teorema 6)**.** *Seja F um corpo infinito de característica $p \neq 2$. Então*

$$T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T .$$

Teorema 1.1.9 ([6], Teorema 3.1)**.** *Seja F um corpo finito com char$(F) = p$ e $|F| = q$. Se $p = 2$ então*

$$T(E) = \left\langle [x_1, x_2],\ x_1^2 - x_1^{2q}\right\rangle^T .$$

Se $p > 2$ então

$$T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3],\ x_1^{qp} - x_1^{p}\rangle^T .$$

Sejam a, b inteiros não negativos. Definimos a álgebra $M_{a,b}(E)$ como sendo o F-subespaço de $M_{a+b}(E)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid r \in M_a\left(E^{(0)}\right), s \in M_{a\times b}\left(E^{(1)}\right), t \in M_{b\times a}\left(E^{(1)}\right), u \in M_b\left(E^{(0)}\right) \right\}$$

com as operações usuais de produto de matrizes (isto é, $M_{a,b}(E)$ é uma subálgebra de $M_{a+b}(E)$).

A respeito da PI-equivalência de duas álgebras, temos o célebre Teorema do Produto Tensorial (TPT) de Kemer [32], em que ele desenvolveu a teoria de T-ideais:

Teorema 1.1.10. *Seja F um corpo de característica 0. Então*

1. $T\left(M_{a,b}(E) \otimes E\right) = T\left(M_{a+b}(E)\right)$;

2. $T\left(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)\right) = T\left(M_{ac+bd,ad+bc}(E)\right)$;

3. $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$.

Uma prova mais direta do TPT pode ser encontrada em [41]. Outras demonstrações de itens do TPT podem ser encontradas em [14], [15] e [16]. Em [4], [5] e [33] foram estudadas versões do TPT em característica positiva.

Uma questão fundamentalmente importante que surge é: dada uma álgebra R, ela admite uma base finita para suas identidades, isto é, existe $S \subseteq F\langle X \rangle$ finito tal que $T(R) = \langle S \rangle^T$? Se a característica do corpo base é 0, esse é o famoso problema de Specht [44], formulado em 1950. Kemer em [30] respondeu afirmativamente à essa questão. No caso de $\mathrm{char}(F) \neq 0$, Belov [7], Grishin [27], e Shchigolev [43] responderam negativamente à essa questão exibindo contra-exemplos.

O teorema abaixo nos dá uma base para o T-ideal das identidades de $E \otimes E$:

Teorema 1.1.11 ([39])**.** *Seja F um corpo de característica zero. Então*

$$T(E \otimes E) = \left\langle [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5],\ [[x_1, x_2]^2, x_1] \right\rangle^T.$$

1.2 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Nesta seção enunciamos alguns resultados que nos permitem, dependendo do corpo base em questão, trabalhar com certos tipos de polinômios no que concerne à busca por identidades polinomiais.

Definição 1.2.1. *Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é dito ser homogêneo de grau d_i na variável x_i se em cada monômio de f a variável x_i aparece d_i vezes. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogêneo de grau d_i em x_i para todo $i = 1, \ldots, n$, então dizemos que f* ***multi-homogêneo de multigrau $(d_1, \ldots, d_n)$****. Se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é multi-homogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$, então dizemos que f é* ***multilinear de grau n****. Ao conjunto dos polinômios multilineares de grau n, nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, denotamos P_n. Claramente, o conjunto $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base para P_n.*

Observe que todo elemento $f \in P_n$ pode ser escrito como

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \qquad \alpha_\sigma \in F,$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n.

Definição 1.2.2. *Dois conjuntos de polinômios são ditos* ***equivalentes*** *se eles geram o mesmo T-ideal.*

Proposição 1.2.3 ([19], Proposição 4.2.3)**.** *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in F\langle X \rangle$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

1. *Se F possui mais do que n elementos (por exemplo se F é infinito), então $\{f\}$ e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ são equivalentes.*

2. *Se F é um corpo de característica 0 (ou se char$(F) >$ deg(f)), então $\{f\}$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.*

Esta última proposição nos diz que se $\mathrm{char}(F) = 0$, então todo T-ideal é gerado pelas suas identidades multilineares. Tradicionalmente, muitos dos resultados em PI-álgebras são também enunciados na linguagem das identidades multilineares.

Um dos principais invariantes numéricos de uma PI-álgebra é a sua sequência de codimensões, introduzida por Amitai Regev em 1972 em [40]. Ela será muito útil no decorrer do texto e nos dará informações cruciais para a demonstração dos principais resultados aqui descritos. Dada uma álgebra R e sendo $T(R)$ o seu T-ideal das identidades, defina o seguinte quociente de espaços vetoriais

$$P_n(R) = \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}.$$

Definição 1.2.4. *Seja R uma PI-álgebra. Então, a* ***n-ésima codimensão*** *de R é definida por $c_n(R) = \dim P_n(R)$.*

Há inúmeros outros invariantes numéricos para uma PI-álgebra tais como as codimensões próprias, séries de codimensões, etc. Como nosso objetivo é ser conciso, indicamos o livro [19] para mais detalhes sobre esses invariantes (especialmente o capítulo 4).

Krakowski e Regev encontraram uma fórmula fechada para a sequência das codimensões de E:

Teorema 1.2.5 ([35], Teorema 3.1)**.** *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Então $c_n(E) = 2^{n-1}$.*

Analogamente, Drensky encontrou uma fórmula fechada para a sequência das codimensões de $E \otimes E$:

Teorema 1.2.6 ([18], Teorema 1). *Seja $n \geq 1$. Então*

$$c_n(E \otimes E) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} + n + 1 - 2^n.$$

1.3 A-identidades polinomiais

Recorde que um polinômio $f = f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \in F\langle X\rangle$ é multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ se

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \quad \alpha_\sigma \in F \tag{1.3.1}$$

e que P_n é o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Definição 1.3.1. *Seja f um polinômio multilinear como em* (1.3.1)*. Dizemos que f é um **A-polinômio de grau n nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$ se $\alpha_\sigma = 0$ para todo $\sigma \notin A_n$, onde $A_n \leq S_n$ é o subgrupo alternado do grupo simétrico S_n. Denotamos o conjunto de todos os A-polinômios de grau n por P_n^A. Se f é, ao mesmo tempo, uma identidade polinomial para uma álgebra R e também um A-polinômio, então dizemos que f é uma **A-identidade para R**.*

Toda PI-álgebra R satisfaz uma A-identidade. De fato, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade multilinear de grau n, então

$$g(x_1, \ldots, x_{2n-1}) = f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

é uma A-identidade de grau $2n-1$. Por exemplo, $E \otimes E$ satisfaz a A-identidade de grau 9

$$[[x_1x_2, x_3x_4], [x_5x_6, x_7x_8], x_9].$$

A pergunta que fica é: tal álgebra admite A-identidades de grau menor? Veremos que sim no próximo capítulo.

Um fato interessante estabelecido por Gonçalves ([21], Proposição 1.3.3) é que, em característica 0, duas álgebras possuem as mesmas identidades se, e somente se, elas possuem as mesmas A-identidades.

Com relação à álgebra de Grassmann E, é fácil mostrar que o grau mínimo para A-identidade admitida por ela é 4.

Teorema 1.3.2. *O grau mínimo para uma A-identidade para E é 4.*

Demonstração. Denote
$$P_n^A(E) = \frac{P_n^A}{P_n^A \cap T(E)}.$$
Henke e Regev mostraram em [28] que $\dim\left(P_n^A(E)\right) = 2^{n-1} - 1$. Assim, para $n = 3$, temos $\dim\left(P_3^A(E)\right) = 3$. Como $\dim\left(P_3^A\right) = 3$, temos $\dim\left(P_4^A \cap T(E)\right) = 0$, o que implica que não há A-identidades de grau 3. Para $n = 4$, temos $\dim\left(P_4^A(E)\right) = 7$. Como $\dim\left(P_4^A\right) = 12$, temos $\dim\left(P_4^A \cap T(E)\right) > 0$, o que implica que E satisfaz A-identidades de grau 4. □

Henke e Regev conjecturaram algo ainda mais forte: o polinômio

$$p(x_1, \ldots, x_4) = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2] \in T(E)$$

gera todas as A-identidades no seguinte sentido: seja $n \geq 4$. Dada $\sigma \in A_n$ e $0 \leq r \leq n-4$, denote por $f_{r,\sigma}$ o seguinte A-polinômio

$$f_{r,\sigma} = p_{r,\sigma}\left([x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+2)}x_{\sigma(r+3)}]x_{\sigma(r+4)} - x_{\sigma(r+4)}[x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+3)}x_{\sigma(r+2)}]\right) q_{r,\sigma},$$

onde $p_{r,\sigma} = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(r)}$ e $q_{r,\sigma} = x_{\sigma(r+5)} \cdots x_{\sigma(n)}$. Então toda A-identidade é combinação linear dos A-polinômios
$$\left\{f_{r,\sigma} \mid 0 \leq r \leq n-4,\ \sigma \in A_n\right\}.$$
Tal conjectura foi provada verdadeira em [22]. Também em [28] foi conjecturado que o grau mínimo para uma A-identidade da álgebra de matrizes $M_k(F)$ é $2k + 2$ para todo inteiro $k \geq 1$. Essa conjectura foi provada falsa em [23]. Mais precisamente, os autores provaram que dado um inteiro $k \geq 0$, então existe um natural n_0 tal que para qualquer $n \geq n_0$, o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(F)$ é maior do que $2n + k$, onde $U_n(F)$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores de tamanho $n \times n$ com entradas em F. Como $U_n(F)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$, a conjectura não pode ser verdadeira.

Em [24] foi provado que o grau mínimo para uma A-identidade para $M_2(F)$ é 6. Além disso, uma tal identidade foi exibida. Um dos nossos objetivos nesta tese é provar o mesmo resultado com respeito a álgebra $E \otimes E$.

1.4 Álgebras graduadas

Nesta seção apresentaremos apenas o básico que precisaremos sobre álgebras graduadas para desenvolver a Tese.

Definição 1.4.1. *Sejam R uma álgebra e G um grupo com elemento neutro e. Dizemos que R é uma álgebra G-graduada se pudermos escrever*

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

*onde cada $R_g \subseteq R$ é um subespaço vetorial e $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$. Um elemento $u \in R_g$ é dito ser **homogêneo de grau g** e escrevemos $deg_G(u) = g$ (se o grupo estiver claro no contexto escreveremos apenas $deg(u) = g$).*

Exemplo 1.4.2. *Seja G um grupo. Toda álgebra admite uma G-graduação, a saber a trivial, que é dada por $R_e = R$ e $R_g = 0$ para todo $g \neq e$.*

Exemplo 1.4.3. *A álgebra de Grassmann E admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por: E_0 é formado pelos elementos de E que são combinações lineares dos elementos do conjunto*

$$\{1, v_{i_1} \cdots v_{i_{2k}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k},\ k \geq 1\},$$

e E_1 é formado pelos elementos de E que são combinações lineares dos elementos do conjunto

$$\left\{v_{i_1} \cdots v_{i_{2k+1}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k+1},\ k \geq 0\right\}.$$

Exemplo 1.4.4. *Assumindo a graduação do item acima, $R = E \otimes E$ admite também uma $\mathbb{Z}_2$-graduação definindo*

$$\begin{aligned} R_0 &= (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \\ R_1 &= (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0). \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.5. *Em geral, se R é uma álgebra G-graduada e R' é uma álgebra H-graduada, então $R \otimes R'$ é uma álgebra $G \times H$-graduada, definindo*

$$(R \otimes R')_{(g,h)} = R_g \otimes R_h, \quad (g, h) \in G \times H.$$

Exemplo 1.4.6. *Sejam $R = M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas em F e e_{ij} as matrizes elementares, $1 \leq i, j \leq n$. Dada uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, podemos considerar a G-graduação definida por*

$$R_g = span\left\{e_{ij} \mid g_i g_j^{-1} = g\right\}.$$

Essa graduação é conhecida como graduação elementar.

Exemplo 1.4.7. *A álgebra $M_{a,b}(E)$ admite também uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, onde*

$$(M_{a,b}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \mid r \in M_a(E^{(0)}), u \in M_b(E^{(0)}) \right\}$$
$$(M_{a,b}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} \mid s \in M_{a\times b}(E^{(1)}), t \in M_{b\times a}(E^{(1)}) \right\}.$$

Considere agora um grupo G. Para cada $g \in G$, denote por $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis. Sendo $X_G = \cup_{g\in G} X_g$, a álgebra associativa livre $F\langle X_G\rangle$ (com 1), livremente gerada por X_G, é uma álgebra G-graduada definindo $\deg(x_{i_1}^{g_1} x_{i_2}^{g_2} \cdots x_{i_n}^{g_n}) = g_1 g_2 \cdots g_n$ para $n \geq 0$ (os elementos múltiplos escalares de 1 têm grau igual a e) e quaisquer $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$. Com isso temos a noção de **polinômios graduados**.

Definição 1.4.8. *Sejam G um grupo e $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $B = \oplus_{g\in G} B_g$ duas álgebras G-graduadas. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é dito ser um* ***homomorfismo graduado*** *se $\varphi(A_g) = B_g$ para todo $g \in G$. Se $B = A$ com $B_g = A_g$ para todo $g \in G$, diremos que φ é um* ***endomorfismo graduado****.*

Definição 1.4.9. *Sejam R uma álgebra G-graduada e $f = f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ um polinômio em $F\langle X_G\rangle$. Dizemos que f é uma* ***identidade polinomial graduada para R*** *se $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$ para quaisquer $r_1 \in R_{g_1}, \ldots, r_n \in R_{g_n}$. Ao conjunto de todas as identidades G-graduadas de R denotamos por $T_G(R)$. Ele é um T_G-ideal em $F\langle X_G\rangle$, isto é, um ideal em $F\langle X_G\rangle$ que é invariante por endomorfismos graduados da álgebra $F\langle X_G\rangle$. Dado um conjunto de polinômios graduados $S \subseteq F\langle X_G\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_G^T$ o menor T_G-ideal de $F\langle X_G\rangle$ que contém S.*

Observe que se $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n}), w_1, \ldots, w_n, p, q \in F\langle X_G\rangle$ são polinômios graduados com w_i homogêneo de grau $\deg(w_i) = g_i$, então o polinômio

$$pf(w_1, \ldots, w_n)q$$

pertence a $\langle f\rangle_G^T$. De fato seja $\varphi : F\langle X_G\rangle \to F\langle X_G\rangle$ o endomorfismo de álgebras definido por $\varphi(x_i^{g_i}) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $\varphi(x_j^g) = x_j^g$ nos demais casos. Então φ é um endomorfismo graduado, o que implica que $f(w_1, \ldots, w_n) = \varphi(f) \in \langle f\rangle_G^T$. Como $\langle f\rangle_G^T$ é um ideal, o resultado segue. Isso nos mostra que se f é um polinômio graduado, podemos substituir as variáveis de f por elementos homogêneos de mesmo grau de modo que o polinômio obtido pertença ao T_G-ideal gerado por f.

Uma questão interessante que surge é: dada uma álgebra G-graduada R, descrever uma base para as identidades graduadas de R, isto é, encontrar explicitamente $S \subseteq F\langle X_G\rangle$ tal que $\langle S\rangle_G^T = T_G(R)$. Abaixo elencamos alguns resultados nesse sentido:

- As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de E com respeito a uma determinada graduação na qual o espaço vetorial associado é homogêneo foram descritas em [17] para corpos de característica 0 e em [12] para corpos infinitos de característica $p > 2$.

- Se $\mathrm{char}(F) = 0$, em [15] obteve-se que $T_{\mathbb{Z}_2}(M_2(F)) = \langle [y_1, y_2],\ z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\rangle_{\mathbb{Z}_2}^T$ com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação natural de $M_2(F)$. Foi provado também que $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) = \langle [y_1, y_2],\ z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1\rangle_{\mathbb{Z}_2}^T$. Se F é infinito com $\mathrm{char}(F) = p > 2$ os $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideais são os mesmos ([33]).

- Se F é infinito com $\mathrm{char}(F) = p > 2$, então $M_{1,1}(E)$ e $M_2(F)$ possuem as mesmas identidades do caso $\mathrm{char}(F) = 0$. Porém, $E \otimes E$ satisfaz a identidade $[y_1^p, z_1]$, que por sua vez não é identidade graduada para $M_{1,1}(E)$.

- Bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e $\mathbb{Z}_n$-graduadas para $M_n(F)$ foram descritas em [45] e [46] no caso de corpos de característica 0. Para corpos infinitos, tais bases foram descritas em [3].

Teorema 1.4.10. *Sejam A e B duas álgebras G-graduadas. Se $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Em particular, $T_G(A) = T_G(B)$ implica que $T(A) = T(B)$.*

Demonstração. Por conta da notação, considere a álgebra associativa livre $F\langle Y\rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$. Seja $f = f(y_1, \ldots, y_n) \in T(A)$. Dados arbitrariamente $b_1, \ldots, b_n \in B$, escreva

$$b_i = b_{g_{i1}}^i + b_{g_{i2}}^i + \cdots + b_{g_{im_i}}^i,$$

onde $b_{g_{ij}}^i \in B_{g_{ij}}$, $j = 1, \ldots, m_i$. Considere agora o polinômio graduado

$$\begin{aligned}\widetilde{f} &= \widetilde{f}\left(x_1^{g_{11}}, x_1^{g_{12}}, \ldots, x_1^{g_{1m_1}}, x_2^{g_{21}}, x_2^{g_{22}}, \ldots, x_2^{g_{2m_2}}, \ldots, x_n^{g_{n1}}, x_n^{g_{n2}}, \ldots, x_n^{g_{nm_n}}\right)\\ &:= f\left(\sum_{j=1}^{m_1} x_1^{g_{1j}}, \ldots, \sum_{j=1}^{m_n} x_n^{g_{nj}}\right).\end{aligned}$$

Como $f \in T(A)$, note que $\widetilde{f} \in T_G(A)$, o que implica por hipótese que $\widetilde{f} \in T_G(B)$. Assim,

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f\left(\sum_{j=1}^{m_1} b_{g_{1j}}^1, \sum_{j=1}^{m_2} b_{g_{2j}}^2, \ldots, \sum_{j=1}^{m_n} b_{g_{nj}}^n\right) = \widetilde{f}(b_{g_{11}}^1, \ldots, b_{g_{nm_n}}^n) = 0,$$

isto é, $f \in T(B)$. $\square$

Logo, se duas álgebras satisfazem as mesmas identidades graduadas, então elas são PI-equivalentes. Observe que a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, sejam $G = \mathbb{Z}_2$, A a álgebra de Grassmann com a graduação trivial e B a álgebra de Grassmann com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural do exemplo 1.4.3. Temos que A e B satisfazem as mesmas identidades ordinárias mas não satisfazem as mesmas identidades graduadas ($x_1^1 x_2^1 + x_2^1 x_1^1$ é uma identidade graduada para B mas não é para A).

Capítulo 2

A-identidades de $E \otimes E$

Neste capítulo desenvolveremos alguns tópicos que nos ajudarão a responder a questão sobre o grau mínimo de uma A-identidade para $E \otimes E$. Apresentaremos decomposições das álgebras FS_n e FA_n assumindo que o corpo base seja de característica zero (no caso da decomposição de FA_n exigimos também que o corpo seja algebricamente fechado).

2.1 Decomposições das álgebras FS_n e FA_n

Apresentaremos aqui os conceitos básicos a respeito da representação dos grupos simétrico e alternado e sua aplicação em PI-teoria. Não entraremos em detalhes e demonstrações, que podem ser encontrados em [29]. Para uma exposição mais ampla sobre teoria de representações de grupo aplicadas a PI-álgebras, indicamos [19], capítulo 12.

Definição 2.1.1. *Seja G um grupo. Definimos a álgebra de grupo FG como sendo o conjunto de somas formais*

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \qquad \alpha_g \in F,$$

onde $\alpha_g \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $g \in G$. Esse conjunto tem a estrutura de álgebra com operações

$$\beta \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) = \sum_{g \in G} (\beta \alpha_g)\, g, \qquad \beta, \alpha_g \in F$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g)\, g, \qquad \alpha_g, \beta_g \in F$$

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\beta_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\left(\alpha_g\beta_h\right)(gh), \qquad \alpha_g, \beta_h \in F.$$

Estamos interessados especificamente nas álgebras de grupo FS_n e FA_n.

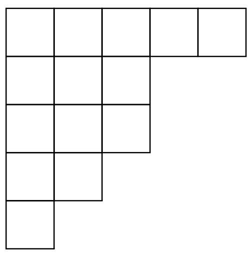
Definição 2.1.2. *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma sequência finita de inteiros positivos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$ é chamada de **partição** de n. Escrevemos $\lambda \vdash n$.*

Por exemplo, temos $(5,3,3,1,1) \vdash 13$. Além disso, algumas vezes indicamos as repetições de números nas partições com um expoente. Por exemplo, no lugar de $(3,2,2,1,1,1,1)$ escrevemos $(3,2^2,1^4)$. O conjunto das partições é totalmente ordenado pela ordem lexicográfica. Por exemplo, $(3,3,1) \lneqq (4,3)$ e $(3,3,1) \lneqq (4)$.

Definição 2.1.3. *Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, o diagrama de Young D_λ associado a λ é definido por*

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \ldots, k \text{ e } j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Visualmente representamos um diagrama D_λ através de quadrados. Por exemplo, o diagrama $D_{(5,3,3,2,1)}$ é representado por

$D_{(5,3,3,2,1)} =$ 

Convencionamos que a primeira coordenada i (índice das linhas) cresce de cima para baixo e a coordenada j (índice das colunas) cresce da esquerda para a direita. Além disso, os primeiros quadrados de cada linha estão situados uns sobre os outros. Note que a i-ésima linha de uma diagrama de Young possui λ_i quadrados.

Definição 2.1.4. *Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, denote por λ'_j o comprimento da j-ésima coluna de D_λ. A partição $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_r) \vdash n$ é chamada de partição **conjugada** de λ. Usaremos a notação λ' para representar a partição conjugada da partição λ. Uma partição $\lambda \vdash n$ é dita ser **autoconjugada** se $\lambda = \lambda'$.*

No nosso exemplo com a partição $\lambda = (5,3,3,2,1)$, temos $\lambda' = (5,4,3,1,1)$.

Definição 2.1.5. *Seja $\lambda \vdash n$ uma partição. Uma λ-tabela T_λ é um preenchimento do diagrama de Young D_λ com os inteiros $1, 2, \ldots, n$. Se os inteiros na tabela crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo, dizemos que a tabela é* ***standard****.*

Exemplo 2.1.6. *A tabela*

$$T_{(3,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 8 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é standard. Já a tabela

$$T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 6 & 1 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

não é standard.

Dados uma partição $\lambda \vdash n$, uma λ-tabela T_λ e uma permutação $\sigma \in S_n$, definimos a nova λ-tabela σT_λ como sendo a ação de σ no preenchimento da tabela T_λ. Por exemplo, considerando a tabela $T_{(4,2,1)}$ do exemplo acima e $\sigma = (1\ 3\ 2)(6\ 7) \in S_7$, temos

$$\sigma T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Definição 2.1.7. *Sejam $\lambda \vdash n$ e T_λ uma λ-tabela. Definimos dois subgrupos de S_n denotados por R_{T_λ} e C_{T_λ}. Eles são chamados de estabilizadores de linha e coluna, respectivamente, de T_λ e são definidos do seguinte modo: R_{T_λ} compreende todas as permutações $\sigma \in S_n$ tal que as linhas de T_λ e de σT_λ são formadas pelos mesmos números (isto é, a permutação σ não troca a linha a qual um número pertence). De igual maneira, C_{T_λ} é formado por todas as permutações $\sigma \in S_n$ tal que as colunas de T_λ e de σT_λ são formadas pelos mesmos números (isto é, a permutação σ não troca a coluna a qual um número pertence).*

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ uma partição de n, $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r) \vdash n$ a sua conjugada e T_λ uma λ-tabela. Não é difícil ver que R_{T_λ} e C_{T_λ} são isomorfos a um produto direto de grupos simétricos. Mais precisamente,

$$R_{T_\lambda} \cong S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_k}$$
$$C_{T_\lambda} \cong S_{\lambda'_1} \times \cdots \times S_{\lambda'_r}.$$

Aqui, S_{λ_l} representa o grupo simétrico que permuta os λ_l números na linha l de T_λ. O significado de $S_{\lambda'_l}$ é análogo.

Definição 2.1.8. *Sejam $\lambda \vdash n$ e T_λ uma λ-tabela. Definimos o seguinte elemento na álgebra de grupo FS_n:*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \sigma\tau.$$

Assim, dada uma λ-tabela T_λ, ela gera um FS_n-módulo $FS_n e_{T_\lambda}$. Um fato importante é que esse FS_n-módulo é irredutível, isto é, é um ideal à esquerda minimal em FS_n.

Proposição 2.1.9 ([29], Teorema 3.1)**.** *Sejam λ e μ duas partições de n, com $\lambda \neq \mu$. Então*

1. *Se $T_{1,\lambda}$ e $T_{2,\lambda}$ são duas λ-tabelas, então, como FS_n-módulos,*

$$FS_n e_{T_{1,\lambda}} \cong FS_n e_{T_{2,\lambda}}.$$

2. *Se T_λ é uma λ-tabela e T_μ é uma μ-tabela, então, como FS_n-módulos,*

$$FS_n e_{T_\lambda} \ncong FS_n e_{T_\mu}.$$

Assim sendo, note que quaisquer duas λ-tabelas geram FS_n-submódulos irredutíveis isomorfos. Logo, para cada $\lambda \vdash n$, podemos escolher um FS_n-módulo irredutível e denotá-lo por M_λ. Reforçamos que a última proposição nos garante que este M_λ (que é construído a partir de uma λ-tabela qualquer) é único, a menos de isomorfismo.

Para cada partição $\lambda \vdash n$, defina $I_\lambda = \sum_{T_\lambda} FS_n e_{T_\lambda}$, onde a soma se dá sobre todas as $n!$ λ-tabelas. Além disso, seja d_λ o número de λ-tabelas standard. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.10 ([29], Proposição 4.2, Teorema 5.9)**.** *Seja F um corpo de característica zero. Então:*

1. *I_λ é um ideal bilateral minimal em FS_n e coincide com $FS_n e_{T_\lambda} FS_n$, onde T_λ é qualquer λ-tabela.*

2. *O ideal bilateral I_λ se decompõe em*

$$I_\lambda = \bigoplus_{T_\lambda \text{standard}} FS_n e_{T_\lambda}.$$

3. *A álgebra de grupo FS_n se decompõe em*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda.$$

4. *O conjunto de FS_n-módulos irredutíveis $\{M_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ é um conjunto completo de irredutíveis, isto é, todo ideal à esquerda minimal de FS_n é isomorfo a M_λ, para algum λ apropriado. Juntamente com o Teorema de Maschke, todo FS_n-módulo de dimensão finita J pode ser escrito como*

$$J \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda(J) M_\lambda,$$

onde $m_\lambda(J)$ é um inteiro não negativo (dependendo de J) e $m_\lambda(J)M_\lambda$ significando

$$\underbrace{M_\lambda \oplus \cdots \oplus M_\lambda}_{m_\lambda(J) \text{ vezes}}$$

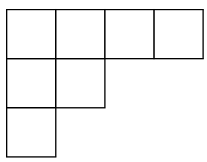
O inteiro $m_\lambda(J)$ é chamado de ***multiplicidade*** *de M_λ em J.*

5. *A dimensão do FS_n-módulo irredutível M_λ coincide com o número d_λ. Ademais, essa dimensão d_λ pode ser calculada pela fórmula do gancho:*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}},$$

onde $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$. Recorde que λ'_j é o comprimento da j-ésima coluna do diagrama D_λ associado. Além disso, $\dim I_\lambda = d_\lambda^2$.

Exemplo 2.1.11. *Para fins de ilustração da fórmula do gancho, considere a partição $\lambda = (4, 2, 1)$. O seu diagrama de Young associado é*

$D_{(4,2,1)} =$ 

Vamos calcular a dimensão do FS_n-módulo irredutível M_λ associado. Para calcular o gancho h_{ij}, o que se faz na prática é contar quantos quadrados há abaixo e à direita do quadrado da posição (i,j) no diagrama D_λ, incluindo o quadrado em questão. Comecemos com o gancho h_{11}. Temos

$$D_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \times & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},$$

isto é, $h_{11} = 6$*. Para o gancho* h_{12}*, temos*

$$D_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \times & \times & \times \\ \hline & \times & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array},$$

isto é, $h_{12} = 4$*. Prosseguindo, teremos* $h_{13} = 2$*,* $h_{14} = 1$*,* $h_{21} = 3$*,* $h_{22} = 1$ *e* $h_{31} = 1$*. Logo,*

$$\begin{aligned} d_{(4,2,1)} &= \frac{7!}{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} \\ &= 35. \end{aligned}$$

Há uma decomposição similar para a álgebra FA_n. Para tanto, além de o corpo ter característica zero, precisamos que ele seja algebricamente fechado. Considere o homomorfismo de FA_n-módulos $\eta : FS_n \to FA_n$ definido por F-linearidade por $\eta(\sigma) = \sigma + (-1)^\sigma \sigma$ para todo $\sigma \in S_n$.

Teorema 2.1.12 ([29], Proposição 8.1 e Teorema 8.2)**.** *Seja F um corpo de característica zero e algebricamente fechado. Considere também uma partição $\lambda \vdash n$ e sua conjugada λ'.*

1. *Se $\lambda \neq \lambda'$, então $\eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) = \overline{I}_\lambda$.*

2. *Se $\lambda = \lambda'$ então o ideal bilateral em FS_n se decompõe como*

$$I_\lambda = I_\lambda^+ \oplus I_\lambda^-,$$

onde I_λ^+ e I_λ^- são ideais à esquerda em FS_n.

3. *A álgebra de grupo FA_n se decompõe em*

$$FA_n = \left[\bigoplus_{\lambda \vdash n, \lambda' \gneqq \lambda} \overline{I}_\lambda \right] \oplus \left[\bigoplus_{\lambda \vdash n, \lambda = \lambda'} \left(\overline{I}_\lambda^+ \oplus \overline{I}_\lambda^- \right) \right], \tag{2.1.1}$$

onde os $\overline{I}_\lambda$'s e $\overline{I}_\lambda^\pm$'s são os ideais bilaterais minimais de FA_n, com $\overline{I}_\lambda^\pm = \eta\left(I_\lambda^\pm\right)$.

4. *Se $\lambda \neq \lambda'$, então $\overline{I}_\lambda \cong I_\lambda \cong I_{\lambda'}$ como FA_n-módulos. Se $\lambda = \lambda'$, então dim $\overline{I}_\lambda^+ =$ dim $\overline{I}_\lambda^- = \frac{1}{4}d_\lambda^2$.*

Observe agora que P_n é um S_n-módulo (à esquerda) através da ação

$$\tau\left(\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\tau\sigma(1)}\cdots x_{\tau\sigma(n)},\ \tau\in S_n.$$

Essa ação pode ser estendida naturalmente por linearidade de modo a tornar P_n um FS_n-módulo. Ademais, é fácil ver que a aplicação $\varphi : FS_n \to P_n$ definida por $\varphi(\sigma) = x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$ é um isomorfismo de FS_n-módulos. Assim temos uma correspondência entre a álgebra de grupo FS_n e P_n. Logo, se R é uma álgebra, pela decomposição do Teorema 2.1.10, pode-se ver que

$$\frac{P_n}{P_n\cap T(R)} \cong \bigoplus_{\lambda\vdash n}\frac{I_\lambda}{I_\lambda\cap T(R)}. \tag{2.1.2}$$

Definição 2.1.13. *Seja R uma álgebra. Para cada partição $\lambda\vdash n$ a **λ-codimensão local** de R é definida por*

$$c_\lambda(R) = \dim\left(\frac{I_\lambda}{I_\lambda\cap T(R)}\right).$$

Usando a igualdade (2.1.2), temos que

$$c_n(R) = \sum_{\lambda\vdash n} c_\lambda(R).$$

Além disso, note que o quociente $(I_\lambda)/(I_\lambda\cap T(R))$ é um FS_n-módulo de dimensão finita. Logo, ele pode ser escrito como uma soma dos módulos irredutíveis M_λ's do Teorema 2.1.10. Denotando $m_\lambda(R)$ a multiplicidade de M_λ neste quociente, teremos

$$c_\lambda(R) = m_\lambda(R)d_\lambda.$$

Como o valor de d_λ pode ser facilmente calculado usando a fórmula do gancho, para conhecer as λ-codimensões locais basta conhecer as multiplicidades associadas a cada partição. No caso da álgebra $E\otimes E$, as multiplicidades foram encontradas por Carini e Di Vincenzo em [11]:

Teorema 2.1.14. *As multiplicidades m_λ dos módulos irredutíveis M_λ na decomposição de $P_n(E\otimes E)$ são:*

(a) $m_{(p,q,2^k,1^l)} = 4(p-q+1)$, *se* $p \geq q \geq 2$ *e* $l \geq 1$, $k \geq 0$;

(b) $m_{(p,q,2^k)} = 3(p-q+1)$, *se* $p \geq q \geq 2$ *e* $k \geq 1$;

(c) $m_{(p,q)} = 2(p-q+1)$, *se* $p \geq q \geq 2$;

(d) $m_{(q,1^l)} = 2q-1$, *se* $l \geq 2$;

(e) $m_{(q,1)} = q$;

(f) $m_{(n)} = 1$;

(g) $m_\lambda = 0$ *para todas as demais partições* λ.

Em analogia ao caso S_n, podemos definir A-codimensões e A-codimensões locais de uma álgebra R:

Definição 2.1.15. *Sejam R uma álgebra e $n \geq 0$ um inteiro.*

1. *Denotamos*
$$P_n^A(R) = \frac{P_n^A}{P_n^A \cap T(R)}.$$
*A **n-ésima A-codimensão de R** é $c_n^A(R) = \dim P_n^A(R)$.*

2. *Recorde a decomposição da álgebra FA_n do Teorema 2.1.12. As **A-codimensões locais de R** são definidas abaixo:*

   (a) Se $\lambda \neq \lambda'$ (isto é, λ não é autoconjugada), então definimos
$$c_\lambda^A(R) = \dim \frac{\overline{I_\lambda}}{\overline{I_\lambda} \cap T(R)};$$

   (b) Se $\lambda = \lambda'$ (isto é, λ é autoconjugada), então definimos
$$c_\lambda^{A\pm}(R) = \dim \frac{\overline{I_\lambda}^{\pm}}{\overline{I_\lambda}^{\pm} \cap T(R)}.$$
   Neste caso definimos também $c_\lambda^A(R) = c_\lambda^{A+}(R) + c_\lambda^{A-}(R)$.

A próxima proposição estabelece uma conexão entre as λ-codimensões locais e as A-codimensões locais:

Proposição 2.1.16 ([28], Proposição 2.5)**.** *Seja R uma PI-álgebra e λ uma partição de um inteiro $n \geq 0$. Então:*

1. *Se λ não é autoconjugada, então $c_\lambda(R) \leq c^A_\lambda(R)$ e $c_{\lambda'}(R) \leq c^A_\lambda(R)$. Além disso, acontece uma das duas seguintes situações:*

   (a) $c^A_\lambda(R) = c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R)$;

   (b) $c^A_\lambda(R) \leq c_\lambda(R) + c_{\lambda'}(R) - d_\lambda$.

2. *Se λ é autoconjugada, então acontece uma das duas seguintes situações:*

   (a) $c^A_\lambda(R) = c_\lambda(R)$;

   (b) $c^A_\lambda(R) \leq c_\lambda(R) - \frac{1}{2}d_\lambda$.

Um dos nossos objetivos é provar que o grau mínimo para uma A-identidade de $E\otimes E$ é 6. Usando o que foi visto até aqui, podemos mostrar que $E \otimes E$ possui A-identidades de grau 7. De fato, considere a partição $(3,3,1) \vdash 7$. Vamos calcular

$$c_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right) = \dim\left(\frac{I_{(3,3,1)}}{I_{(3,3,1)}\cap T\left(E\otimes E\right)}\right).$$

Como $c_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right) = m_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right) d_{(3,3,1)}$, temos pelo Teorema 2.1.14 $m_{(3,3,1)} = 4\cdot(3-3+1) = 4$. Pela fórmula do gancho, temos

$$d_{(3,3,1)} = \frac{7!}{5\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 21.$$

Assim, $c_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right) = 4\cdot 21 = 84$. Com relação à partição conjugada $(3,3,1)' = (3,2,2)$, temos $m_{(3,2,2)} = 3\cdot(3-2+1) = 6$. Como $d_{(3,2,2)} = d_{(3,3,1)} = 21$, teremos $c_{(3,2,2)}\left(E\otimes E\right) = 6\cdot 21 = 126$. Agora usando a Proposição 2.1.16, temos

$$\begin{aligned}
\dim\left(\frac{\overline{I}_{(3,3,1)}}{\overline{I}_{(3,3,1)}\cap T\left(E\otimes E\right)}\right) &= c^A_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right)\\
&\leq c_{(3,3,1)}\left(E\otimes E\right) + c_{(3,2,2)}\left(E\otimes E\right)\\
&= 210\\
&< 441 = d^2_{(3,3,1)}.
\end{aligned}$$

Logo, como $\dim\left(\overline{I}_{(3,3,1)}\right) = 21^2$, devemos ter obrigatoriamente $\dim\left(\overline{I}_{(3,3,1)}\cap T\left(E\otimes E\right)\right) > 0$, o que implica que existe uma A-identidade em $\overline{I}_{(3,3,1)}$. Essa estratégia funciona também para as partições $(5,2)$, $(5,1^2)$, $(4,3)$ e $(4,2,1)$. Isso nos provoca uma intuição de que as A-identidades de grau 7 são, em certo sentido, abundantes (aqui usamos o termo "abundante"de maneira completamente intuitiva). Ao tentar realizar a mesma estratégia para garantir a existência de A-identidades de grau 6, não conseguimos as desigualdades desejadas (mas em certo sentido chegávamos "próximos"da desigualdade desejada). Porém, calculando as codimensões locais das partições $\lambda \vdash 6$ e usando a Proposição 2.1.16, é possível garantir que não há A-identidades em $\overline{I}_{(6)}$ nem em $\overline{I}_{(5,1)}$. Assim, partimos para uma busca computacional usando as decomposições das álgebras de grupo mencionadas nesta seção.

2.2 O grau mínimo de uma A-identidade de $E \otimes E$

Nesta seção nos dedicaremos a determinar o grau mínimo para uma A-identidade para a álgebra $E \otimes E$. Primeiramente iremos provar que $E \otimes E$ não admite A-identidades de grau 5. Depois encontraremos uma A-identidade de grau 6.

Devido ao Teorema do Produto Tensorial de Kemer 1.1.10, temos que $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais, isto é,

$$T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E). \tag{2.2.1}$$

Logo, elas satisfazem as mesmas A-identidades. Nossa abordagem para garantir que $E \otimes E$ admite A-identidades de grau 6 é inspirada em [2] e [24].

Considere os seguintes subespaços vetoriais de $M_{1,1}(E)$:

$$R_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u_{11} \in E^{(0)} \right\}, \quad R_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u_{12} \in E^{(1)} \right\},$$
$$R_{21} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21} & 0 \end{pmatrix} \mid u_{21} \in E^{(1)} \right\}, \quad R_{22} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \mid u_{22} \in E^{(0)} \right\}.$$

Note que $R_{11} \oplus R_{12} \oplus R_{21} \oplus R_{22} = M_{1,1}(E)$. Portanto, para verificar se um polinômio multilinear é uma identidade polinomial para $M_{1,1}(E)$, é suficiente tomar elementos nos subespaços R_{ij}. Em todo o texto, denotaremos as matrizes elementares por e_{ij}, isto é, a matriz cuja entrada de posição (i, j) é igual a 1 e todas as outras entradas são nulas em $M_2(E)$. Em diversos momentos do texto, substituiremos as variáveis x_k por elementos arbitrários de R_{ij}. Nós escreveremos $x_k = r_{ij}^{(k)}$, onde

$$r_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k)} e_{ij}, \tag{2.2.2}$$

com $u_{ij}^{(k)} \in E^{(0)}$ se $i = j$ ou $u_{ij}^{(k)} \in E^{(1)}$ se $i \neq j$. O sobrescrito dos u_{ij}'s indica apenas qual das variáveis x_k foi substituída (algumas vezes esse sobrescrito será omitido).

Usando a notação acima, pode-se verificar que o produto dos elementos $r_{ij}^{(k)}$ se comporta, de certa forma, da mesma maneira do que o produto das matrizes elementares de $M_2(F)$, isto é,

$$r_{ij}^{(k)} r_{st}^{(l)} = \delta_{js} u_{ij}^{(k)} u_{st}^{(l)} e_{it}, \tag{2.2.3}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Isso nos permite lidar com o produto dos $r_{ij}^{(k)}$ usando grafos.

Sejam $e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{i_q j_q}$ matrizes elementares de tamanho 2×2 e $\sigma \in S_q$. Dizemos que os pares (i_k, j_k) são **arestas**. Observe que o produto

$$e_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} e_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \cdots e_{i_{\sigma(r)} j_{\sigma(r)}}$$

é não nulo se, e somente se, vale que $j_{\sigma(k)} = i_{\sigma(k+1)}$ para $k = 1, 2, \ldots, q-1$. Neste caso, dizemos que as arestas formam um **caminho**. O termo “aresta”se justifica pelo seguinte: primeiro, fixamos dois pontos que serão os **vértices** 1 e 2. Em seguida representamos a matriz $e_{i_k j_k}$ como um “loop”se $i_k = j_k$ (no vértice em questão) e como uma “seta”com início no vértice i_k e fim no vértice j_k. Por exemplo, as matrizes e_{11}, e_{12}, e_{21} e e_{22} podem ser vistas como o grafo

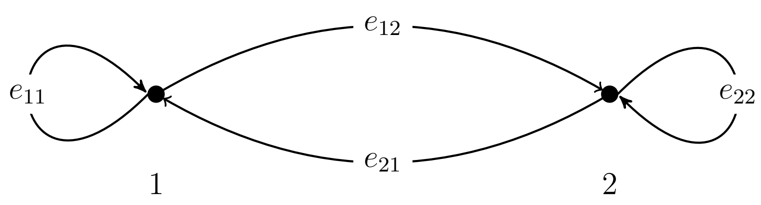


Figura 2.1: Grafo 1

Em um grafo (que é um conjunto de vértices e arestas), um caminho **Euleriano** é percorrer todas as arestas passando exatamente uma vez por cada uma delas. Por exemplo, no grafo acima, temos apenas 4 caminhos Eulerianos:

$$e_{11}e_{12}e_{22}e_{21}, \quad e_{12}e_{22}e_{21}e_{11}, \quad e_{22}e_{21}e_{11}e_{12} \quad \text{e} \quad e_{21}e_{11}e_{12}e_{22}.$$

Note que esses caminhos Eulerianos estão associados aos produtos não nulos das matrizes $e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{21}$ (em qualquer ordem). Ao considerar os elementos r_{ij} que definimos anteriormente, o comportamento é o mesmo. Dados certos $r_{i_1 j_1}, \ldots, r_{i_q j_q}$, os produtos não nulos destes elementos estão associados aos caminhos Eulerianos do grafo correspondente. Logo, para "fazer os cálculos" de uma substituição deste tipo, basta-nos considerar os caminhos Eulerianos.

Proposição 2.2.1. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear e elementos $r_{i_pj_p} = u_{i_pj_p}e_{i_pj_p} \in R_{i_pj_p}$ com $i_p, j_p \in \{1, 2\}$ para $p = 1, \ldots, n$. Considere também a transposição $\sigma = (1\ 2)$. Então $f(r_{i_1j_1}, \ldots, r_{i_nj_n}) = 0$ se, e somente se, $f(s_{i_1j_1}, \ldots, s_{i_nj_n}) = 0$, onde $s_{i_pj_p} = u_{i_pj_p}e_{\sigma(i_p)\sigma(j_p)}$.*

Demonstração. Seja $m(x_1, \ldots, x_n) = x_{k_1} \cdots x_{k_n}$ um monômio qualquer de f. Observe que se $m(r_{i_1j_1}, \ldots, r_{i_nj_n}) \neq 0$, então $m(r_{i_1j_1}, \ldots, r_{i_nj_n}) = ue_{i_{k_1}j_{k_n}}$ para algum $u \in E$. Com efeito, assumindo $m(r_{i_1j_1}, \ldots, r_{i_nj_n}) \neq 0$, temos que $j_{k_s} = i_{k_{s+1}}$ para $s = 1, \ldots, n-1$. Isso implica que $r_{i_{k_1}j_{k_1}} \cdots r_{i_{k_n}j_{k_n}}$ pode ser visto como um caminho Euleriano no grafo correspondente. Assim, $m(r_{i_1j_1}, \ldots, r_{i_nj_n}) = ue_{i_{k_1}j_{k_n}}$. Além disso, temos que $s_{i_{k_1}j_{k_1}} \cdots, s_{i_{k_n}j_{k_n}}$ será também um caminho Euleriano, o que implica que $m(s_{i_1j_1}, \ldots, s_{i_nj_n}) = ue_{\sigma\left(i_{k_1}\right)\sigma(j_{k_n})}$. Isso é suficiente para concluir a demonstração. $\square$

Mais à frente no texto, substituiremos as variáveis x_k's por elementos dos R_{ij}. Digamos que, por exemplo, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ seja um polinômio multilinear de forma que $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$ sempre que $a_1 \in R_{12}$, $a_2 \in R_{22}$, $a_3 \in R_{11}$ e $a_4 \in R_{21}$. Então usando a proposição anterior, $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$ sempre que $a_1 \in R_{21}$, $a_2 \in R_{11}$, $a_3 \in R_{22}$ e $a_4 \in R_{12}$. Isso nos poupará de boa parte do trabalho de verificação de A-identidades.

Proposição 2.2.2. *Seja F um corpo de qualquer característica. Não há A-identidades de grau $2(a+b)+1$ para $M_{a,b}(E)$.*

Demonstração. Seja $n = a + b$. Suponha que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}) = \sum_{\sigma \in A_{2n+1}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n+1)} \neq 0 \qquad (2.2.4)$$

seja uma A-identidade para $M_{a,b}(E)$. Por uma questão prática, vamos identificar uma permutação σ com sua imagem $(\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(2n+1))$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\alpha_{(12\cdots 2n+1)} \neq 0$ (caso contrário bastaria usar uma permutação par nas variáveis $x_1, \ldots, x_{2n+1}$). Recorde que os geradores da álgebra de Grassmann E são denotados por $\{v_1, v_2, \ldots\}$. Vamos definir os seguintes elementos, para $i = 1, \ldots, 2n$:

$$y_{i,i+1} = \begin{cases} e_{i,i+1} & \text{if } i \neq a \\ v_1 e_{a,a+1} & \text{if } i = a \end{cases}$$

,

$$y_{i+1,i}=\begin{cases} e_{i+1,i} & \text{if } i\neq a\\ v_2e_{a+1,a} & \text{if } i=a\end{cases}$$

e $y_{11}=e_{11}$, $y_{nn}=e_{22}$.

Considere a seguinte $(2n+1)-$upla:

$$(y_{11},\ y_{12},\ y_{23},\ \ldots,\ y_{n-1,n},\ y_{n,n},\ y_{n,n},\ y_{n,n-1},\ y_{n-1,n-2},\ \ldots,\ y_{32},\ y_{21}),$$

isto é, estamos considerando a substituição

$$\begin{array}{cccccc} x_1=y_{11} & x_2=y_{12} & x_3=y_{23} & \ldots & x_n=y_{n-1,n} & x_{n+1}=y_{n,n}\\ x_{n+2}=y_{n,n} & x_{n+3}=y_{n,n-1} & x_{n+4}=y_{n-1,n-2} & \ldots & x_{2n+1}=y_{21} & \end{array}$$

em (2.2.4). A essa substituição temos associado o seguinte grafo:

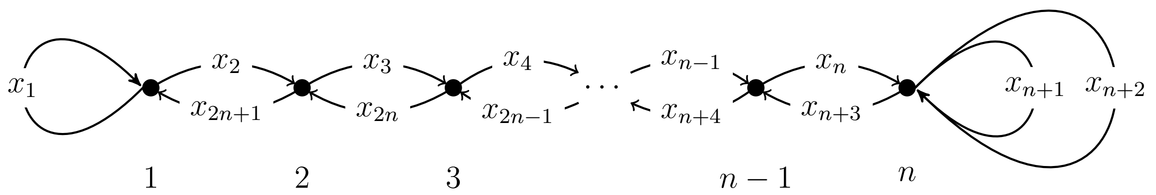


Figura 2.2: Grafo 2

Os monômios em f que não resultam em zero nessa substituição estão associados aos caminhos Eulerianos do grafo acima. Além disso, é imediato perceber que todos os monômios resultam em elementos do tipo $v_iv_je_{rs}$ com $\{i,j\}=\{1,2\}$ e $1\leq r,s\leq n$. Assim, estaremos interessados nos monômios de f que contribuem para $v_1v_2e_{11}$. Por conta de nossa escolha de substituição, tais caminhos devem começar e terminar no vértice 1. Temos exatamente 4 caminhos com tais características, a saber:

$$\begin{array}{ll} x_1x_2x_3\cdots x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}, & x_1x_2x_3\cdots x_nx_{n+2}x_{n+1}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}\\ x_2x_3\cdots x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}x_1, & x_2x_3\cdots x_nx_{n+2}x_{n+1}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}x_1. \end{array}$$

Mas somente os caminhos

$$x_1x_2x_3\cdots x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}\quad \text{e}\quad x_2x_3\cdots x_nx_{n+1}x_{n+2}x_{n+3}\cdots x_{2n+1}x_1$$

aparecem em (2.2.4). Assim, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{(123\cdots 2n+1)} y_{11} y_{12} y_{23} \cdots y_{n-1,n} y_{nn} y_{nn} y_{n,n-1} y_{n-1,n-2} \cdots y_{21} + \\ &+ \alpha_{(23\cdots 2n+1\ 1)} y_{12} y_{23} \cdots y_{n-1,n} y_{nn} y_{nn} y_{n,n-1} y_{n-1,n-2} \cdots y_{21} y_{11} \\ &= \left(\alpha_{(123\cdots 2n+1)} + \alpha_{(23\cdots 2n+1\ 1)} \right) v_1 v_2 e_{11}. \end{aligned}$$

Isso implica que $\alpha_{(123\cdots 2n+1)} = -\alpha_{(23\cdots 2n+1\ 1)}$. Agora, considere a $(2n+1)$-upla

$$(y_{21},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{23},\ \ldots,\ y_{n-1,n},\ y_{n,n},\ y_{n,n},\ y_{n,n-1},\ y_{n-1,n-2},\ \ldots,\ y_{32}),$$

isto é, estamos considerando a substituição

$$\begin{array}{cccccc} x_1 = y_{21} & x_2 = y_{11} & x_3 = y_{12} & \ldots & x_{n+1} = y_{n-1,n} & x_{n+2} = y_{n,n} \\ x_{n+3} = y_{n,n} & x_{n+4} = y_{n,n-1} & x_{n+5} = y_{n-1,n-2} & \ldots & x_{2n+1} = y_{32} & \end{array}$$

em (2.2.4). A essa substituição temos associado o seguinte grafo:

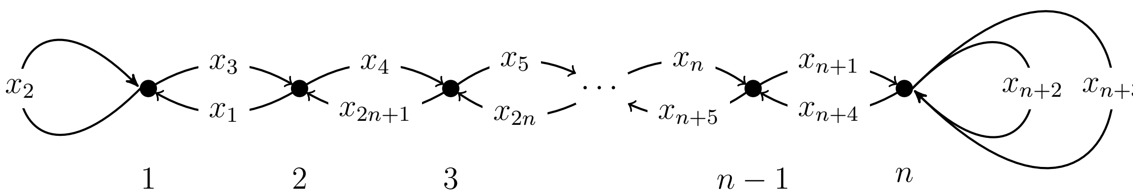


Figura 2.3: Grafo 3

Novamente, estamos interessados nos monômios que contribuem para $v_1 v_2 e_{11}$. Pelo mesmo argumento anterior, tais monômios estão associados aos caminhos Eulerianos do grafo acima que começam e terminam no vértice 1. São eles:

$$\begin{array}{ll} x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1, & x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+3} x_{n+2} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1 \\ x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1 x_2, & x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+3} x_{n+2} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1 x_2. \end{array}$$

Mas somente os caminhos

$$x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1 \quad \text{e} \quad x_3 x_4 \cdots x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} \cdots x_{2n+1} x_1 x_2$$

aparecem em (2.2.4). Assim, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_{(234\cdots 2n+1\ 1)} y_{11}y_{12}y_{23}\cdots y_{n-1,n}y_{nn}y_{nn}y_{n,n-1}y_{n-1,n-2}\cdots y_{21} + \\
&+ \alpha_{(34\cdots 2n+1\ 12)} y_{12}y_{23}\cdots y_{n-1,n}y_{nn}y_{nn}y_{n,n-1}y_{n-1,n-2}\cdots y_{21}y_{11} \\
&= \left(\alpha_{(234\cdots 2n+1\ 1)} + \alpha_{(34\cdots 2n+1\ 12)}\right) v_1v_2e_{11}.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\alpha_{(234\cdots 2n+1\ 1)} = -\alpha_{(34\cdots 2n+1\ 12)}$. Seguindo este processo de substituições, teremos:

$$f\left(y_{32}, y_{21}, y_{11}, y_{12}, y_{23}, \ldots, y_{43}\right) \implies \alpha_{(345\cdots 2n+1\ 12)} = -\alpha_{(45\cdots 2n+1\ 123)}$$

$$\vdots$$

$$f\left(y_{12}, y_{23}, \ldots, y_{n-1,n}, y_{nn}, y_{nn}, y_{n,n-1}, y_{n-1,n-2}, \ldots, y_{21}, y_{11}\right) \implies \alpha_{(2n+1\ 12\cdots 2n)} = -\alpha_{(123\cdots 2n+1)} \quad .$$

Assim, temos que

$$\alpha_{(123\cdots 2n+1)} = -\alpha_{(123\cdots 2n+1)}. \tag{2.2.5}$$

Caso 1: $\mathrm{char}(F) \neq 2$: pela equação (2.2.5) temos $\alpha_{(123\cdots 2n+1)} = 0$, uma contradição.

Caso 2: $\mathrm{char}(F) = 2$: num corpo de caracteristica 2, temos $\alpha = -\alpha$ para qualquer $\alpha \in F$. Assim, a demonstração acima implica que

$$\alpha_{(123\cdots 2n\ 2n+1)} = \alpha_{(23\cdots 2n\ 2n+1\ 1)} = \alpha_{(3\cdots 2n\ 2n+1\ 1\ 2)} = \cdots = \alpha_{(2n+1\ 12\cdots 2n)}. \tag{2.2.6}$$

Além disso, considerando a substituição dada pela $(2n+1)$-upla

$$(y_{11},\ y_{11},\ y_{12},\ y_{23},\ \ldots,\ y_{n-1,n},\ y_{n,n},\ y_{n,n-1},\ y_{n-1,n-2},\ \ldots,\ y_{32},\ y_{21}),$$

temos o seguinte grafo associado a essa substituição:

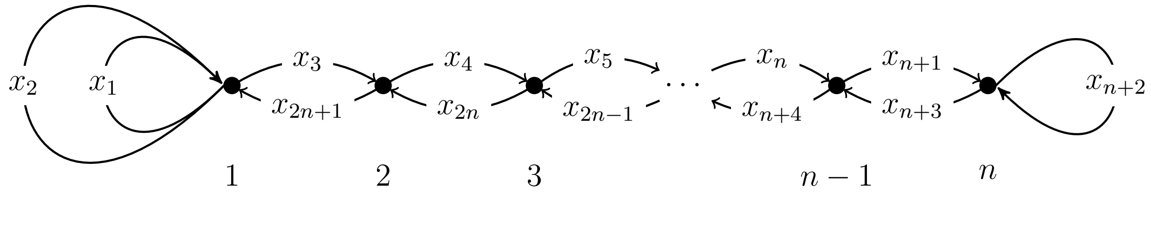


Figura 2.4: Grafo 4

Temos exatamente 6 caminhos Eulerianos no respectivo grafo que começam e terminam no vértice 1, a saber:

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3x_4\cdots x_{2n}x_{2n+1}, \quad x_1x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_2 \\ &x_2x_1x_3x_4\cdots x_{2n}x_{2n+1}, \quad x_2x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_1 \\ &x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_1x_2, \quad x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_2x_1. \end{aligned}$$

Mas em (2.2.4) só aparecem os caminhos

$$x_1x_2x_3x_4\cdots x_{2n}x_{2n+1}, \quad x_2x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_1 \quad \text{e} \quad x_3x_4x_5\cdots x_{2n}x_{2n+1}x_1x_2.$$

Usando os mesmos argumentos anteriores,

$$0 = \left(\alpha_{(1234\cdots 2n\ \ 2n+1)} + \alpha_{(234\cdots 2n\ \ 2n+1\ \ 1)} + \alpha_{(34\cdots 2n\ \ 2n+1\ \ 1\ \ 2)}\right) v_2v_1e_{11}.$$

Assim, usando (2.2.6) concluímos que $\alpha_{(1234\cdots 2n\ \ 2n+1)} = 0$, uma contradição. $\square$

Conforme vimos na seção anterior, existem A-identidades de grau 7 para $M_{1,1}(E)$, mas não existem de grau 5 segundo essa última proposição. Na seção seguinte, usaremos as decomposições explícitas das álgebras de grupo FS_n e FA_n para encontrar uma A-identidade de grau 6.

2.3 Uma forma de procurar A-identidades

Nesta seção explicitaremos uma A-identidade de grau 6 para $E \otimes E$. Nós utilizamos o software GAP [20] para encontrar tal identidade. Recorde que de acordo com o Teorema do Produto Tensorial de Kemer, encontrar uma identidade para $E \otimes E$ é equivalente a encontrar uma identidade para $M_{1,1}(E)$.

Lema 2.3.1. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear. Então f é uma identidade polinomial para $M_{1,1}(E)$ se, e somente se, f se anula no conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid i, j = 1, 2, \ldots, \right\}$$

onde $\{v_1, v_2, \ldots\}$ são os geradores da álgebra de Grassmann.

Demonstração. É necessário apenas provar a recíproca. Assuma que f se anula no conjunto acima. Para verificar se f é uma identidade para $M_{1,1}(E)$ basta substituir as variáveis por elementos dos R_{ij}'s, isto é, $x_i = w_i e_{ab}$, onde e_{ab} denota a matriz elementar e $w_i = v_{k_{i1}} v_{k_{i2}} \cdots v_{k_{im_i}}$ com $m_i \geq 0$ par se $a = b$ e ímpar caso contrário. Como f é multilinear podemos omitir elementos de comprimento 2 em w_i sem alterar o resultado da substituição, uma vez que $v_l v_m$ pertence ao centro de E. Isso termina o lema. $\square$

Lema 2.3.2 ([2], Lema 2.2). *Sejam $\lambda \vdash n$, $\{T_1, T_2, \ldots, T_{d_\lambda}\}$ todas as λ-tabelas standard e τ_{ij} a permutação em S_n que leva a tabela T_j na tabela T_i, isto é, $\tau_{ij} T_j = T_i$. Então:*

1. *Para cada $k \in \{1, \ldots, d_\lambda\}$, o conjunto $\{\tau_{ik} e_{T_k}\}_{i=1}^{d_\lambda}$ é uma F-base para $FS_n e_{T_k}$.*

2. *O conjunto $\left\{\tau_{ij} e_{T_j}\right\}_{i,j=1}^{d_\lambda}$ é uma F-base para I_λ.*

O procedimento para tentar encontrar A-identidades consiste no seguinte: considere o homomorfismo de FA_n-módulos $\eta : FS_n \to FA_n$ dado por $\eta(\sigma) = \sigma + (-1)^\sigma \sigma$, que foi definido antes do Teorema 2.1.12 e seja λ uma partição não autoconjugada. Considerando $\overline{I}_\lambda = \eta\left(I_\lambda\right)$, temos pelo lema anterior que o conjunto

$$\left\{\eta\left(\tau_{ij} e_{T_j}\right) \mid i, j = 1, \ldots, d_\lambda\right\}$$

é um conjunto gerador para o F-espaço $\overline{I}_\lambda$. Denotemos os A-polinômios desse conjunto gerador por $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Como escrevemos na página 21 $M_{1,1}(E) = R_{11} \oplus R_{12} \oplus R_{21} \oplus R_{22}$, podemos montar o sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(s_1) & p_1(s_2) & \cdots & p_1(s_{4^n}) \\ p_2(s_1) & p_2(s_2) & \cdots & p_2(s_{4^n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_r(s_1) & p_r(s_2) & \cdots & p_r(s_{4^n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{r \times 4^n}$$

onde $s_1, s_2, \ldots, s_{4^n}$ são todas as possíveis escolhas de substituições, tomando-se elementos nos R_{ij}. Se esse sistema possui uma solução não trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, então o polinômio $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_r p_r$ será uma A-identidade.

No nosso caso, consideramos $n = 6$ e a partição $\lambda = (4, 2)$. O polinômio que encontramos seguindo o procedimento acima está associado à λ-tabela standard

$$T_{(4,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

2.3.1 Encontrando explicitamente uma A-identidade de grau 6 para $E \otimes E$

Para cada par de inteiros (i, j) tais que $1 \leq i < j \leq 6$, defina os seguintes A-polinômios:

$$f_{ij} = f_{ij}(x_1, \ldots, x_6) := \sum_{\substack{\sigma \in A_6 \\ \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{4,6\}}} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}x_{\sigma(6)}.$$

Note que f_{ij} é a soma dos monômios pares nos quais as posições i e j são sempre ocupadas por x_4 ou x_6. Por exemplo,

$$\begin{aligned} f_{26} &= x_5x_6x_3x_1x_2x_4 + x_5x_6x_2x_3x_1x_4 + x_5x_6x_1x_2x_3x_4 + x_5x_4x_3x_2x_1x_6 \\ &+ x_5x_4x_2x_1x_3x_6 + x_5x_4x_1x_3x_2x_6 + x_3x_6x_5x_2x_1x_4 + x_3x_6x_2x_1x_5x_4 \\ &+ x_3x_6x_1x_5x_2x_4 + x_3x_4x_5x_1x_2x_6 + x_3x_4x_2x_5x_1x_6 + x_3x_4x_1x_2x_5x_6 \\ &+ x_2x_6x_5x_1x_3x_4 + x_2x_6x_3x_5x_1x_4 + x_2x_6x_1x_3x_5x_4 + x_2x_4x_5x_3x_1x_6 \\ &+ x_2x_4x_3x_1x_5x_6 + x_2x_4x_1x_5x_3x_6 + x_1x_6x_5x_3x_2x_4 + x_1x_6x_3x_2x_5x_4 \\ &+ x_1x_6x_2x_5x_3x_4 + x_1x_4x_5x_2x_3x_6 + x_1x_4x_3x_5x_2x_6 + x_1x_4x_2x_3x_5x_6. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.3. *Seja $f(x_1, \ldots, x_6) = f_{13} - f_{15} - f_{23} + f_{26} + f_{45} - f_{46}$. Então f é uma A-identidade para $E \otimes E$.*

Provaremos este teorema com a ajuda dos dois próximos lemas. Observe que podemos escrever

$$f = \frac{f + (46)f}{2} + \frac{f - (46)f}{2}.$$

Portanto, para provar o teorema acima é suficiente demonstrar que $f + (46)f$ e $f - (46)f$ são identidades para $E \otimes E$, já que f é, por construção, um A-polinômio.

Lema 2.3.4. *O polinômio $f + (46)f$ é uma identidade para $E \otimes E$.*

Demonstração. Defina $g_{ij} = f_{ij} + (46)f_{ij}$. Temos

$$f + (46)f = g_{13} - g_{15} - g_{23} + g_{26} + g_{45} - g_{46}.$$

Não é difícil ver que

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_6) = \sum_{\substack{\sigma \in S_6 \\ \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{4,6\}}} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}x_{\sigma(6)}$$

e então temos que $f+(46)f$ é, a menos de um múltiplo escalar, a linearização do seguinte polinômio em duas variáveis não comutativas:

$$l(x,y) = yxyx^3 - yx^3yx - xy^2x^3 + xyx^3y + x^3y^2x - x^3yxy.$$

Como F é um corpo de característica zero, $f+(46)f$ é uma identidade polinomial para $E\otimes E$ se, e somente se, $l(x,y)$ é uma identidade polinomial para $E\otimes E$ (veja [19, Proposição 4.2.3]). Relembre que Popov em [39] demonstrou que os polinômios

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = [[x_1,x_2],[x_3,x_4],x_5], \quad q(x_1,x_2) = [[x_1,x_2]^2,x_2],$$

formam uma base (como T-ideal) para $T(E\otimes E)$. Assim, afirmamos que

$$\begin{aligned} l(x,y) &= [[2xy+yx,x],[x,y],x] + 3x[[y,x]^2,x] \\ &= p(2xy+yx,x,x,y,x) + 3xq(y,x). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
[[2xy+yx,x],[x,y],x] = [[[2xy+yx,x],[x,y]],x]& \\
=&[[2xyx+yx^2-2x^2y-xyx, xy-yx],\ x] \\
=&[2xyx^2y-2xyxyx+yx^3y-yx^2yx-2x^2yxy+2x^2y^2x \\
&-xyx^2y+xyxyx-2xyxyx+2yx^2yx-xy^2x^2+yxyx^2 \\
&+2xyx^2y-2yx^3y+xyxyx-yx^2yx,\ x] \\
=&[3xyx^2y-2xyxyx-yx^3y-2x^2yxy+2x^2y^2x-xy^2x^2+yxyx^2,\ x] \\
=&3xyx^2yx-2xyxyx^2-yx^3yx-2x^2yxyx+2x^2y^2x^2 \\
&-xy^2x^3+yxyx^3-3x^2yx^2y+2x^2yxyx+xyx^3y \\
&+2x^3yxy-2x^3y^2x+x^2y^2x^2-xyxyx^2 \\
=&3xyx^2yx-3xyxyx^2+3x^2y^2x^2-yx^3yx-xy^2x^3 \\
&+yxyx^3-3x^2yx^2y+xyx^3y+2x^3yxy-2x^3y^2x.
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
3x[[y,x]^2,x] =&3x[(yx-xy)(yx-xy),x] \\
=&3x[yxyx-yx^2y-xy^2x+xyxy,x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=3x\,(\,yxyx^2 - yx^2yx - xy^2x^2 + xyxyx\\&\quad - xyxyx + xyx^2y + x^2y^2x - x^2yxy\,)\\&=3xyxyx^2 - 3xyx^2yx - 3x^2y^2x^2 + 3x^2yx^2y + 3x^3y^2x - 3x^3yxy.\end{aligned}$$

Assim, a igualdade (2.3.1) está provada e, portanto, $l(x, y)$ é uma identidade polinomial para $E \otimes E$. □

Lema 2.3.5. *O polinômio $f - (46)f$ é uma identidade polinomial para $E \otimes E$.*

A demonstração deste lema será um pouco mais trabalhosa. Precisaremos de outros resultados detalhados abaixo. Observe que este lema 2.3.5 juntamente com o lema 2.3.4 são suficientes para demonstrar o Teorema 2.3.3. Assim, nos dedicaremos no restante da seção à demonstração do lema 2.3.5.

Denotando $h = f - (46)f$ e $h_{ij} = f_{ij} - (46)f_{ij}$, temos que

$$h = h_{13} - h_{15} - h_{23} + h_{26} + h_{45} - h_{46}. \tag{2.3.2}$$

Além disso, note que

$$h_{ij}(x_1, \dots, x_6) = \sum_{\substack{\sigma \in S_6 \\ \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{4,6\}}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)} x_{\sigma(6)}.$$

Em cada monômio de h_{ij}, as posições i e j são sempre ocupadas por x_4 ou x_6 e as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_5 ocorrem nas outras posições de todas as formas possíveis. Assim, se (kl) é uma transposição no conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$ ou no conjunto $\{4, 6\}$, então $(kl)h = -h$. De maneira mais geral, se τ é uma permutação no conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$, é verdade que

$$\tau h_{ij} = (-1)^\tau h_{ij}. \tag{2.3.3}$$

Observação 2.3.6. *Suponha que $g(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio multilinear de grau n tal que $(kl)g = -g$, para alguma transposição $(kl) \in S_n$. Relembrando os subespaços R_{ij} definidos em* (2.2)*, ao escolhermos arbitrariamente uma substituição $x_i = a_i$, com $a_i \in M_{1,1}(E)$ para $i = 1, \dots, n$ de modo que $a_k, a_l \in R_{11}$ ou $a_k, a_l \in R_{22}$, então $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. De fato, se m é uma matriz qualquer em $M_{1,1}(E)$, então*

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} u'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u'_{22} \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix},$$

para quaisquer $u_{11}, u'_{11}, u_{22}, u'_{22} \in E^{(0)}$. *As propriedades acima nos dizem que os valores das substituições em* g *e* $(kl)g$ *são iguais. Em particular,* $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Observação 2.3.7. *Para os subespaços* R_{12} *e* R_{21} *temos uma propriedade análoga à acima. Se* m *é uma matriz qualquer em* $M_{1,1}(E)$*, então*

$$\begin{pmatrix} 0 & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & u'_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & u'_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & u_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21} & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u'_{21} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u'_{21} & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

para quaisquer $u_{12}, u'_{12}, u_{21}, u'_{21} \in E^{(1)}$.

Observação 2.3.8. *Suponha que* $g(x_1, \ldots, x_6)$ *é um polinômio multilinear de grau* 6 *e considere uma substituição arbitrária* $x_i = a_i$*, com* $a_i \in M_{1,1}(E)$ *para* $i = 1, \ldots, 6$*. Seja* d_{ij} *o número de elementos em* $\{a_1, \ldots, a_6\}$ *que pertencem a* R_{ij}*,* $1 \leq i, j \leq 2$*. Então, se* $d_{12} \geq 4$ *ou* $d_{21} \geq 4$*, então* $g(a_1, \ldots, a_6) = 0$*. De fato, se* $d_{12} \geq 4$ *então em cada monômio de* $g(a_1, \ldots, a_6)$ *teremos pelo menos dois elementos* $a, b \in R_{12}$ *que se multiplicam entre si. Isso mostra que todos os monômios de* g *são nulos. O mesmo argumento é válido para o caso* $d_{21} \geq 4$.

Recorde que nosso objetivo é demonstrar que $h = f - (46)f$ definido em (2.3.2) é uma identidade polinomial para $M_{1,1}(E)$.

Proposição 2.3.9. *Seja* h *o polinômio definido em* (2.3.2) *e considere uma substituição arbitrária* $x_i = a_i$*, onde* $a_i \in M_{1,1}(E)$*. Suponha que pelo menos dois elementos do conjunto* $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ *pertençam a uma mesma componente* R_{ij}*. Então* $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

Demonstração. Usando a equação (2.3.3), podemos supor sem perda de generalidade que a_1 e a_2 pertencem ao mesmo R_{ij}. Se $a_1, a_2 \in R_{11}$ ou $a_1, a_2 \in R_{22}$ nós podemos usar a Observação 2.3.6 para concluir que $h_{ij}(a_1, \ldots, a_6) = 0$ para quaisquer i, j. Resta-nos então lidar com os casos em que $a_1, a_2 \in R_{12}$ ou $a_1, a_2 \in R_{21}$. Dada a natureza extremamente técnica da prova, faremos a demonstração desta proposição no apêndice para não prejudicar a fluidez da leitura. □

Proposição 2.3.10. *Seja* h *o polinômio definido em* (2.3.2) *e considere uma substituição arbitrária* $x_i = a_i$*, onde* $a_i \in M_{1,1}(E)$*. Suponha que os elementos* a_4 *e* a_6 *pertençam a uma mesma componente* R_{ij}*. Então* $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

Demonstração. Em virtude da última proposição, podemos assumir que os elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ pertencem a componentes distintas. Além disso, sabemos que se τ é uma permutação no conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$, então $\tau\ h = -h$. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 = r_{11}^{(1)}$, $a_2 = r_{12}^{(2)}$, $a_3 = r_{22}^{(3)}$ e $a_4 = r_{21}^{(4)}$. Se ambos elementos a_4 e a_6 pertencem a R_{11} ou a R_{22} então basta usarmos a Observação 2.3.6. Assim, seja $a_4 = r_{12}^{(4)}$ e $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Temos o seguinte grafo associado:

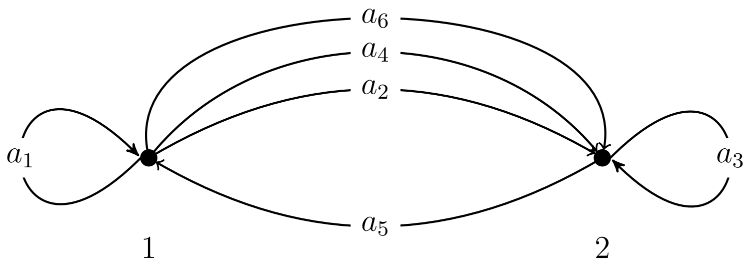


Figura 2.5: Grafo 5

Note que não há caminhos Eulerianos neste grafo. Assim, temos $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$. O caso em que $a_4 = r_{21}^{(4)}$ e $a_6 = r_{21}^{(6)}$ segue da Proposição 2.2.1. $\square$

Lembremos nosso objetivo que é mostrar que $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$ para quaisquer $a_i \in M_{1,1}(E)$, $i = 1, \ldots, 6$, onde h é o polinômio definido em (2.3.2). Pela Proposição 2.3.9, podemos assumir que os elementos a_1, a_2, a_3, a_5 estão em componentes distintas. Podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 = r_{11}^{(1)}$, $a_2 = r_{12}^{(2)}$, $a_3 = r_{22}^{(3)}$ e $a_5 = r_{21}^{(5)}$. Pela Proposição 2.3.10, podemos assumir que os elementos a_4 e a_6 também estão em componentes distintas. Isso nos dá 12 possibilidades de escolha de componentes para a_4 e a_6. Porém, podemos reduzir o número de cenários uma vez que h é alternado nas variáveis x_4 e x_6. Logo, temos que analisar as seguintes situações

a_4	R_{11}	R_{11}	R_{11}	R_{12}	R_{12}	R_{21}
a_6	R_{12}	R_{21}	R_{22}	R_{21}	R_{22}	R_{22}

Porém pela Proposição 2.2.1, os dois últimos casos se reduzem, respectivamente, aos casos $a_4 \in R_{11}$, $a_6 \in R_{21}$ e $a_4 \in R_{11}$, $a_6 \in R_{12}$. Assim, só precisamos analisar 4 situações que elencamos na tabela abaixo:

a_4	R_{11}	R_{11}	R_{11}	R_{12}
a_6	R_{12}	R_{21}	R_{22}	R_{21}

Proposição 2.3.11. *Sejam $a_1 = r_{11}^{(1)}$, $a_2 = r_{12}^{(2)}$, $a_3 = r_{22}^{(3)}$ e $a_5 = r_{21}^{(5)}$. Então $h(a_1, \ldots, a_6) =$ para quaisquer $a_4, a_6 \in M_{1,1}(E)$.*

Demonstração. **Caso 1:** $a_4 = r_{11}^{(4)}$ e $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Nesse caso, temos o seguinte grafo associado:

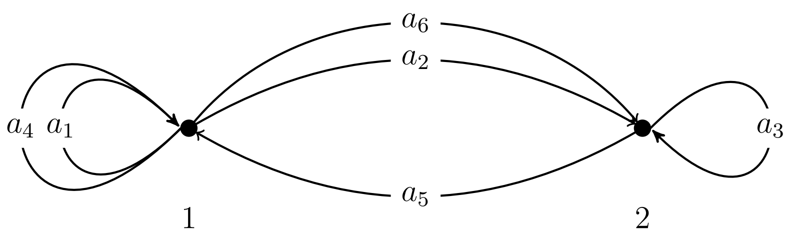


Figura 2.6: Grafo 6

Precisamos encontrar os caminhos Eulerianos neste grafo. Observe que não há tais caminhos que comecem no vértice 2. Além disso, como $h = h_{13} - h_{15} - h_{23} + h_{26} + h_{45} - h_{46}$ estamos interessados nos caminhos cujas arestas a_4 e a_6 ocupem as posições $(1,3)$, $(1,5)$, $(2,3)$, $(2,6)$, $(4,5)$ ou $(4,6)$ (caso contrário o monômio associado não apareceria em h). Abaixo temos a lista de tais caminhos. O coeficiente que aparece está relacionado ao sinal da permutação ao qual eles estão associados:

$$+a_1a_4a_2a_3a_5a_6, -a_1a_4a_6a_3a_5a_2, -a_1a_4a_6a_5a_2a_3, +a_1a_2a_5a_4a_6a_3,$$
$$-a_4a_1a_2a_5a_6a_3, +a_4a_1a_6a_3a_5a_2, +a_4a_1a_6a_5a_2a_3, -a_4a_2a_5a_1a_6a_3,$$
$$-a_2a_3a_5a_4a_1a_6, +a_2a_5a_1a_4a_6a_3, -a_6a_3a_5a_1a_4a_2, +a_6a_5a_4a_1a_2a_3.$$

Observe que os sinais dos monômios acima coincidem com os sinais dos h_{ij} que aparecem na escrita de h. Assim, teremos

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) =& a_1a_4a_2a_3a_5a_6 + a_1a_4a_6a_3a_5a_2 + a_1a_4a_6a_5a_2a_3 + a_4a_1a_2a_5a_6a_3 \\ & a_4a_1a_6a_3a_5a_2 + a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_4a_1a_6a_5a_2a_3 + a_1a_2a_5a_4a_6a_3 \\ & a_2a_3a_5a_4a_1a_6 + a_6a_3a_5a_1a_4a_2 + a_2a_5a_1a_4a_6a_3 + a_6a_5a_4a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

É uma verificação direta que em cada linha acima, o primeiro e segundo monômios se cancelem. O mesmo ocorre com o terceiro e quarto monômios. Isso termina o caso 1. Nos demais casos indicaremos os grafos associados e as expressões resultantes de h.

Caso 2: $a_4 = r_{11}^{(4)}$, $a_6 = r_{21}^{(6)}$.

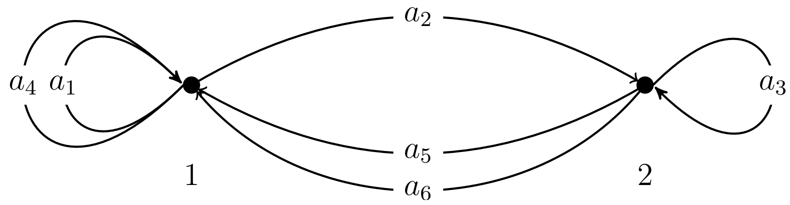


Figura 2.7: Grafo 7

$$
\begin{aligned}
h(a_1,\ldots,a_6) = -\,(\,& a_3a_5a_1a_4a_2a_6 + a_3a_5a_2a_6a_1a_4 + a_3a_5a_2a_6a_4a_1 + a_3a_6a_1a_2a_5a_4 \\
& a_3a_6a_4a_1a_2a_5 + a_3a_6a_4a_2a_5a_1 + a_3a_6a_2a_5a_1a_4 + a_5a_4a_1a_2a_3a_6 \\
& a_5a_2a_3a_6a_1a_4 + a_5a_2a_3a_6a_4a_1 + a_6a_1a_4a_2a_3a_5 + a_6a_2a_3a_5a_4a_1 \,)\,.
\end{aligned}
$$

Caso 3: $a_4 = r_{11}^{(4)}$, $a_6 = r_{22}^{(6)}$.

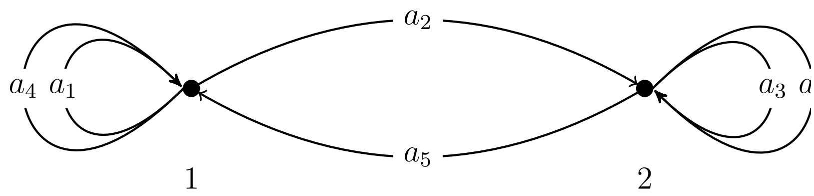


Figura 2.8: Grafo 8

$$
\begin{aligned}
h(a_1,\ldots,a_6) =& a_1a_2a_3a_6a_5a_4 + a_4a_1a_2a_3a_6a_5 + a_4a_2a_6a_3a_5a_1 + a_2a_6a_3a_5a_1a_4 \\
& a_3a_5a_1a_4a_2a_6 + a_6a_3a_5a_1a_4a_2 + a_6a_5a_4a_1a_2a_3 + a_5a_4a_1a_2a_3a_6.
\end{aligned}
$$

Caso 4: $a_4 = r_{12}^{(4)}$, $a_6 = r_{21}^{(6)}$.

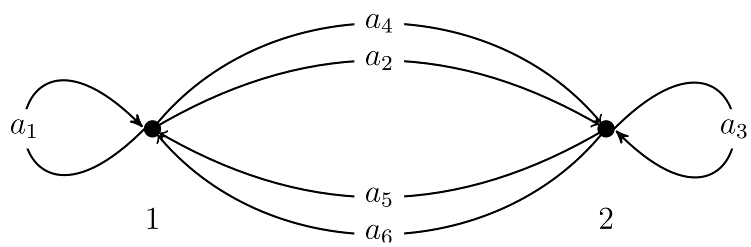


Figura 2.9: Grafo 9

$$\begin{aligned}
h(a_1,\ldots,a_6) =& a_1a_2a_3a_6a_4a_5 + a_1a_2a_5a_4a_3a_6 + a_1a_4a_3a_5a_2a_6 + a_1a_4a_5a_2a_3a_6\\
& a_1a_4a_6a_2a_3a_5 + a_2a_3a_5a_4a_6a_1 + a_2a_5a_1a_4a_3a_6 + a_2a_6a_4a_3a_5a_1\\
& a_4a_3a_5a_2a_6a_1 + a_4a_3a_6a_1a_2a_5 + a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_4a_5a_2a_3a_6a_1\\
& -\big(a_3a_5a_1a_4a_6a_2 + a_3a_5a_2a_6a_1a_4 + a_3a_6a_1a_2a_5a_4 + a_3a_6a_2a_5a_1a_4\\
& a_3a_6a_4a_5a_1a_2 + a_5a_1a_2a_6a_4a_3 + a_5a_2a_3a_6a_1a_4 + a_5a_4a_6a_1a_2a_3\\
& a_6a_1a_2a_5a_4a_3 + a_6a_1a_4a_3a_5a_2 + a_6a_1a_4a_5a_2a_3 + a_6a_2a_5a_1a_4a_3\big).
\end{aligned}$$

□

Portanto, o A-polinômio $f(x_1,\ldots,x_6) = f_{13} - f_{15} - f_{23} + f_{26} + f_{45} - f_{46}$, onde

$$f_{ij} = f_{ij}(x_1,\ldots,x_6) := \sum_{\substack{\sigma\in A_6\\ \{\sigma(i),\sigma(j)\}=\{4,6\}}} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}x_{\sigma(6)},$$

é uma A-identidade para $E\otimes E$ (e para $M_{1,1}(E)$).

Observe que no resultado acima, exigimos que o corpo base tenha característica zero. Mas esse resultado é válido também para corpos infinitos de característica $p > 2$. Antes de enunciar esse resultado, retomemos a questão da linearizaçao de um polinômio.

Sejam R uma álgebra e $f(x,y)$ um polinômio homogêneo de multigrau (s,t) com $s,t \geq 1$. Suponha que $f \in T(R)$. O processo de linearização consiste no seguinte: se $s = 1$ e $t = 1$ então o polinômio já é multilinear e não há o que fazer. Assuma $s > 1$. Defina o seguinte polinômio

$$g(x_1,x_2,y) := f(x_1+x_2,y) - f(x_1,y) - f(x_2,y).$$

Observe que por construção $g \in T(R)$. Além disso, note que esse novo polinômio tem grau $s-1$ nas variáveis x_1 e x_2 e grau t na variável y. Se $s-1 = 1$ então usamos o mesmo argumento na variável y. Caso contrário podemos repetir o processo e definir o novo polinômio

$$h(x_1,x_2,x_3,y) := g(x_1+x_2,x_3,y) - g(x_1,x_3,y) - g(x_2,x_3,y).$$

Note que este novo polinômio também pertence a $T(R)$ e possui multigrau $(s-2, s-2, s-1, t)$. Após $s-1$ passos produziremos um novo polinômio de grau 1 na sua primeira variável e que continua sendo uma identidade para R. Após isso, fazemos o mesmo processo com relação à segunda variável e assim por diante. Observe ainda que cada etapa desse processo não influencia no grau das demais variáveis que faziam parte do polinômio anterior. Assim, após um número finito de passos, obteremos um polinômio multilinear que também é identidade para a álgebra R. Portanto, o fato de um polinômio homogêneo ser identidade implica que sua linearização também o é. Para mais detalhes sobre a linearização de um polinômio, veja [10], Teorema 6.24.

Proposição 2.3.12. *Seja F um corpo com char$(F) = p > 2$. Então o grau mínimo para uma A-identidade de $M_{1,1}(E)$ é 6.*

Demonstração. O Teorema 2.2.2 é válido para corpos de qualquer característica. Sendo assim, $M_{1,1}(E)$ não admite A-identidades de grau 5. Agora considere o polinômio $f(x_1, \ldots, x_6) = f_{13} - f_{15} - f_{23} + f_{26} + f_{45} - f_{46}$ do Teorema 2.3.3. Seus coeficientes são todos ± 1. Como fizemos anteriormente, é suficiente provarmos que $f + (46)f$ e $f - (46)f$ são identidades para $M_{1,1}(E)$ pois como char$(F) \neq 2$, temos $f = \frac{f+(46)f}{2} + \frac{f-(46)f}{2}$.

Afirmação: $f + (46)f$ é identidade para $M_{1,1}(E)$. De fato, note que podemos usar o mesmo argumento do Lema 2.3.4. A linearização do polinômio

$$l(x, y) = yxyx^3 - yx^3yx - xy^2x^3 + xyx^3y + x^3y^2x - x^3yxy.$$

coincide com f e, portanto, é suficiente provarmos que $l(x, y)$ é uma identidade polinomial para $M_{1,1}(E)$. Como os polinômios

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5], \quad q(x_1, x_2) = [[x_1, x_2]^2, x_2]$$

são identidades para $M_{1,1}(E)$ e podemos escrever $l(x, y)$ como consequência de p e q, temos que $f + (46)f$ é identidade.

Afirmação: $f - (46)f$ é identidade para $M_{1,1}(E)$. Observe que as observações 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.8 continuam válidas pois char$(F) \neq 2$. Além disso, todas as proposições necessárias à demonstração do Lema 2.3.5 foram provadas com o uso dessas observações, da propriedade anticomutativa de E e da análise dos caminhos Eulerianos dos grafos associados, o que não depende da característica do corpo envolvido. Logo, o lema é válido neste caso. $\square$

Como consequência obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.13. *Seja F um corpo com char$(F) \neq 2$. Então o grau mínimo para uma A-identidade de $E \otimes E$ é 6*

Demonstração. Se $\mathrm{char}(F) = 0$ então o resultado segue do Teorema do Produto Tensorial de Kemer, da Proposição 2.2.2 e do Teorema 2.3.3.

Se F é infinito com $\mathrm{char}(F) = p > 2$, no artigo [5], Teorema 5, provou-se a validade da versão multilinear do Teorema do Produto Tensorial de Kemer para corpos infinitos. Segundo esse resultado, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades multilineares. Pela proposição anterior, o teorema segue.

Se F é um corpo finito com $\mathrm{char}(F) = p > 2$, considere o anel de polinômios $F\langle x\rangle$ na variável x. Denote por K o corpo de frações de $F\langle x\rangle$. Então K é infinito e contém F. Retomando a definição da álgebra de Grassmann na página 2 podemos construir a álgebra de Grassmann sobre o corpo F, que denotaremos por E_F, cuja F-base é

$$B_F = \{1_F,\ v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}\ :\ k \geq 1,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k\},$$

onde consideramos 1_F como a unidade de F no quociente $F\langle X\rangle / J$ e v_i como o elemento x_i no quociente $F\langle X\rangle / J$, em que J é o ideal em $F\langle X\rangle$ gerado por $\{x_ix_j + x_jx_i\ :\ i, j \in \mathbb{N}\}$. De maneira análoga, podemos construir a álgebra de Grassmann sobre o corpo K, que denotaremos por E_K, cuja K-base é

$$B_K = \{1_K,\ u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_k}\ :\ k \geq 1,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k\},$$

onde consideramos 1_K como a unidade de K no quociente $K\langle X\rangle / J'$ e u_i como o elemento x_i no quociente $K\langle X\rangle / J'$, em que J' é o ideal em $K\langle X\rangle$ gerado por $\{x_ix_j + x_jx_i\ :\ i, j \in \mathbb{N}\}$.

Assim, $B'_F = \{v \otimes_F v'\ :\ v, v' \in B_F\}$ é uma F-base para $E_F \otimes_F E_F$ e $B'_K = \{u \otimes_K u'\ :\ u, u' \in B_K\}$ é uma K-base para $E_K \otimes_K E_K$. Como $E_K \otimes_K E_K$ também é uma F-álgebra, seja Q a F-subálgebra de $E_K \otimes_K E_K$ gerada por B'_K. Observe que $E_F \otimes_F E_F$ e Q são F-álgebras isomorfas.

Pelo caso anterior, o grau mínimo para uma A-identidade de $E_K \otimes E_K$ é 6, logo $E_F \otimes E_F$ satisfaz uma A-identidade de grau 6. Além disso, $E_F \otimes E_F$ não admite A-identidades de grau 5. De fato, suponha que f seja uma A-identidade de grau 5 para $E_F \otimes_F E_F$. Então, f é uma A-identidade para Q. Afirmamos que f é uma A-identidade para $E_K \otimes_K E_K$. De fato, para provar isso é suficiente mostrar que f se anula em B'_K, já que f é multilinear. Porém, B'_K está contido em Q. Logo, f se anula em B'_K e, portanto, é uma A-identidade de grau 5 para $E_K \otimes_K E_K$, o que é um absurdo com o caso anterior. $\square$

Capítulo 3

A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_{1,1}(E)$

No artigo [9], Brandão, Gonçalves e Koshlukov introduziram o conceito de A-identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada. Eles descreveram as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_2(F)$ e calcularam suas A-codimensões graduadas correspondentes. Inspirados nesse trabalho, descrevemos o conjunto de geradores de todas as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_{1,1}(E)$. Mais ainda: calculamos as A-codimensões graduadas desta álgebra. Esperamos que nosso trabalho contribua para a obtenção de descrições das identidades das álgebras $M_{p,q}(E)$ e do comportamento assintótico de suas respectivas codimensões.

3.1 Preliminares

Relembremos que uma álgebra R é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada (ou uma *superálgebra*) se $R = R_0 \oplus R_1$, onde cada R_i é um subespaço vetorial de R e $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$, para cada $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Consideremos dois conjuntos disjuntos infinitos e enumeráveis $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ tais que $X = Y \cup Z$, onde $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. A álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ se torna uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada definindo que as variáveis em Y têm grau 0, as variáveis em Z têm grau 1 e os elementos homogêneos $u = x_{i_1} \cdots x_{i_p}$ têm grau $\deg(u) = \deg(x_{i_1}) + \cdots + \deg(x_{i_p})$, $p \geq 0$. Um polinômio $\mathbb{Z}_2$-graduado $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ é uma *identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada* para R se $f(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_m) = 0$ para quaisquer $r_i \in R_0$, $s_j \in R_1$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. O conjunto de todas as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para R é denotado por $T_{\mathbb{Z}_2}(R)$.

Definição 3.1.1. *Seja R uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Denote por $P_{n,m}$ o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in F\langle X\rangle$ de grau total igual* *a $n+m$ nas variáveis $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m$.*

1. *Dizemos que $f \in P_{n,m}$ é um **A-polinômio $\mathbb{Z}_2$-graduado** se $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ é um A-polinômio. O espaço vetorial de todos os A-polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados em $P_{n,m}$ será denotado por $P^A_{n,m}$.*

2. *Se n e m são inteiros não negativos, considere o quociente*

$$P_{n,m}(R) = \frac{P_{n,m}}{P_{n,m} \cap T_{\mathbb{Z}_2}(R)}.$$

*Definimos a **(n,m)-codimensão graduada de R** por*

$$c_{n,m}(R) = \dim_F (P_{n,m}(R)).$$

*Em analogia a esta situação, definimos a **(n,m)-ésima A-codimensão graduada de R** por $c^A_{n,m}(R) = \dim_F \left(P^A_{n,m}(R)\right)$, onde*

$$P^A_{n,m}(R) = \frac{P^A_{n,m}}{P^A_{n,m} \cap T_{\mathbb{Z}_2}(R)}.$$

3.2 O quociente $P_{n,m}(M_{1,1}(E))$

Consideremos a álgebra $M_{1,1}(E)$ com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \mid r, u \in E_0 \right\}$$
$$(M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in E_1 \right\}.$$

Sempre que mencionado, $M_{1,1}(E)$ será munida da graduação definida acima. Dentre os resultados que apresentaremos, estamos interessados em calcular as A-codimensões graduadas de $M_{1,1}(E)$. Assim, será fundamental estudar o quociente que aparece no item (2) da Definição 3.1.1. Nesta seção, apresentamos uma base para o espaço vetorial $P_{n,m}(M_{1,1}(E))$ usando ideias contidas em [15]. Mais à frente estudaremos o quociente $P^A_{n,m}(M_{1,1}(E))$.

Sejam n, m inteiros não negativos tais que $m > 0$ e considere $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ como a parte inteira de $\frac{m}{2}$. Denote por $(i) = \{i_1, i_2, \dots, i_t \ : \ i_1 < i_2 < \dots < i_t\}$ um subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ e por $(j) = \left\{ j_2, j_4, \dots, j_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \ : \ j_2 < j_4 < \dots < j_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\}$ um subconjunto de $\{1, \dots, m\}$.

Definimos o monômio $M_{(i)(j)} \in P_{n,m}$ como:

$$M_{(i)(j)} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m}, \tag{3.2.1}$$

onde $\{k_1, k_2, \ldots, k_s : k_1 < k_2 < \cdots < k_s\} = \{1, \ldots, n\} \setminus (i)$ e $\{j_1, j_3, \ldots : j_1 < j_3 < \cdots\} = \{1, \ldots, m\} \setminus (j)$. Por exemplo, sejam $n = 4$, $m = 7$, $(i) = \{1, 4\}$ e $(j) = \{1, 3, 7\}$. Assim,

$$M_{(i)(j)} = y_1 y_4 z_2 y_2 y_3 z_1 z_4 z_3 z_5 z_7 z_6.$$

note que temos exatamente $2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ destes monômios. De fato, precisamos contar de quantas maneiras podemos escolher (i) e (j). Perceba que podemos tomar (i) de 2^n maneiras distintas, que é o número de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$. Com relação à (j), temos que escolher $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ elementos de um total de m, o que nos dá $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$.

Um monômio $w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m}$ (com índices não necessariamente ordenados), onde $t, s \geq 0$, $t + s = n$ e $n, m \geq 0$ em certos momentos será chamado de **monômio em boa forma**. Por exemplo, os monômios $y_1 y_2 y_3$, $z_4 y_3 y_1 y_4 z_3 z_1 z_2$ e $z_1 z_3 z_2 z_4$ estão em boa forma, enquanto os monômios $z_1 y_1 z_2 y_2$ e $y_1 y_2 z_2 y_3 z_1 y_4$ não estão em boa forma. A expressão $y_{i_1} \cdots y_{i_t}$ integrante de w será chamada de primeiro bloco de y's em w e assim por diante.

Lema 3.2.1. *Os $2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ monômios $M_{(i)(j)}$ são linearmente independentes, módulo $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}$.*

Demonstração. Vamos assumir m par. O caso m ímpar é análogo. Suponha que

$$f = \sum_{(i),(j)} r_{(i)(j)} M_{(i)(j)} = 0 \pmod{T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}}, \tag{3.2.2}$$

com $r_{(i)(j)} \in F$ para todos $(i), (j)$. Isso implica que f é uma identidade graduada para $M_{1,1}(E)$. Considere a seguinte substituição:

$$y_p \mapsto \overline{y_p} = \alpha_p e_{11} + \beta_p e_{22}, \quad \text{e} \quad z_q \mapsto \overline{z_q} = a_q v_q e_{12} + b_q v_q e_{21},$$

onde e_{kl} é a matriz elementar com 1 na posição (k, l) e zero nas demais entradas, $\alpha_p, \beta_p, a_p, b_q$ são escalares arbitrários pertencentes ao corpo F e v_q são os elementos da base da álgebra de Grassmann, para $p = 1, \ldots, n$ e $q = 1, \ldots, m$. Para qualquer $(i) = \{i_1, \ldots, i_t\}$ e $(j) = \{j_1, j_3, \ldots\}$, temos

$$\begin{aligned}
& M_{(i)(j)}(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n},\overline{z_1},\ldots,\overline{z_m}) = \\
= \; & (\alpha_{i_1}e_{11}+\beta_{i_1}e_{22})\cdots(\alpha_{i_t}e_{11}+\beta_{i_t}e_{22})(a_{j_1}v_{j_1}e_{12}+b_{j_1}v_{j_1}e_{21}) \\
& (\alpha_{k_1}e_{11}+\beta_{k_1}e_{22})\cdots(\alpha_{k_s}e_{11}+\beta_{k_s}e_{22}) \\
& (a_{j_2}v_{j_2}e_{12}+b_{j_2}v_{j_2}e_{21})\cdots(a_{j_m}v_{j_m}e_{12}+b_{j_m}v_{j_m}e_{21}) \\
= \; & (\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_t}e_{11}+\beta_{i_1}\cdots\beta_{i_t}e_{22})(a_{j_1}v_{j_1}e_{12}+b_{j_1}v_{j_1}e_{21})(\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_s}e_{11}+\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_s}e_{22}) \\
& (a_{j_2}b_{j_3}\cdots a_{j_m}v_{j_2}v_{j_3}\cdots v_{j_m}e_{12}+b_{j_2}a_{j_3}\cdots b_{j_m}v_{j_2}v_{j_3}\cdots v_{j_m}e_{21}) \\
= \; & (\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_t}a_{j_1}v_{j_1}e_{12}+\beta_{i_1}\cdots\beta_{i_t}b_{j_1}v_{j_1}e_{21}) \\
& (\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_s}a_{j_2}b_{j_3}\cdots a_{j_m}v_{j_2}v_{j_3}\cdots v_{j_m}e_{12}+\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_s}b_{j_2}a_{j_3}\cdots b_{j_m}v_{j_2}v_{j_3}\cdots v_{j_m}e_{21}) \\
= \; & \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_t}\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_s}a_{j_1}b_{j_2}\cdots b_{j_m}v_{j_1}v_{j_2}\cdots v_{j_m}e_{11} + \\
+ \; & \beta_{i_1}\cdots\beta_{i_t}\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_s}b_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_m}v_{j_1}v_{j_2}\cdots v_{j_m}e_{22}.
\end{aligned}$$

Fixe arbitrariamente $(i)=\{i_1,\ldots,i_t\}$, $(j)=\{j_1,j_3,\ldots\}$ e defina

$$\begin{aligned}
\alpha_{i_1} &= \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_t} &= \beta_{k_1} = \beta_{k_2} = \cdots = \beta_{k_s} &= 1, \\
\alpha_{k_1} &= \alpha_{k_2} = \cdots = \alpha_{k_s} &= \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \cdots = \beta_{i_t} &= 0, \\
a_{j_1} &= a_{j_3} = \cdots = a_{j_{m-1}} &= b_{j_2} = b_{j_4} = \cdots = b_{j_m} &= 1, \\
a_{j_2} &= a_{j_4} = \cdots = a_{j_m} &= b_{j_1} = b_{j_3} = \cdots = b_{j_{m-1}} &= 0.
\end{aligned}$$

Agora considere $(i)'=\{i'_1,\ldots,i'_{t'}\}$ e $(j)'=\{j'_1,j'_3,\ldots\}$. Perceba que pelos mesmos cálculos anteriores teremos

$$\begin{aligned}
M_{(i)'(j)'} \; & (\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n},\overline{z_1},\ldots,\overline{z_m}) = \\
= \; & \alpha_{i'_1}\cdots\alpha_{i'_{t'}}\beta_{k'_1}\cdots\beta_{k'_{s'}}a_{j'_1}b_{j'_2}\cdots b_{j'_m}v_{j'_1}v_{j'_2}\cdots v_{j'_m}e_{11} \\
+ \; & \beta_{i'_1}\cdots\beta_{i'_{t'}}\alpha_{k'_1}\cdots\alpha_{k'_{s'}}b_{j'_1}a_{j'_2}\cdots a_{j'_m}v_{j'_1}v_{j'_2}\cdots v_{j'_m}e_{22}.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Assuma $(i)'\neq(i)$. Então $\{\alpha_{i'_1},\ldots,\alpha_{i'_{t'}}\}\cap\{\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_s}\}\neq\emptyset$ (o que implica que a primeira parcela da equação (3.2.3) se anula). Temos dois casos:

Caso 1: Se $(i)'\neq\{k_1,\ldots,k_s\}$, então $(i)'\cap(i)\neq\emptyset$. Isso implica $\{\beta_{i'_1},\ldots,\beta_{i'_{t'}}\}\cap\{\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_t}\}\neq\emptyset$ e portanto $M_{(i)'(j)'}(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n},\overline{z_1},\ldots,\overline{z_m})=0$. Logo,

$$0=f(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n},\overline{z_1},\ldots,\overline{z_m})=r_{(i)(j)}v_{j_1}\cdots v_{j_m}e_{11} \;\Rightarrow r_{(i)(j)}=0.$$

Caso 2: Se $(i)'=\{k_1,\ldots,k_s\}$, então $\{\beta_{i'_1},\ldots,\beta_{i'_{t'}}\}=\{\beta_{k_1},\ldots,\beta_{k_s}\}$ e

$\{\alpha_{k'_1}, \ldots, \alpha_{k'_{s'}}\} = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_t}\}$. Logo,

$$M_{(i)'(j)'}\left(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}\right) = v_{j'_1} \cdots v_{j'_m} e_{22}.$$

Obtemos então,

$$0 = f\left(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}\right) = r_{(i)(j)} v_{j_1} \cdots v_{j_m} e_{11} + r_{(i)'(j)'} v_{j'_1} \cdots v_{j'_m} e_{22} \Rightarrow r_{(i)(j)} = 0.$$

Se assumirmos $(j)' \neq (j)$, o argumento é análogo. Isso prova que os monômios $M_{(i)(j)}$ são linearmente independentes. □

O próximo resultado estabelece que o conjunto de todos os monômios $M_{(i)(j)} \in P_{n,m}$ é uma base para $P_{n,m}$ módulo $\left(T_{\mathbb{Z}_2}\left(M_{1,1}(E)\right) \cap P_{n,m}\right)$.

Teorema 3.2.2 ([15], Teorema 1)**.** *Seja J o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$. Então*

1. *J é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, por $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$.*

2. *$c_{n,0}\left(M_{1,1}(E)\right) = 1$ e $c_{n,m}\left(M_{1,1}(E)\right) = 2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ para $m > 0$.*

Destacamos que no caso $m = 0$, o monômio $y_1y_2 \cdots y_n + T_{\mathbb{Z}_2}\left(M_{1,1}(E)\right) \cap P_{n,0}$ é o gerador de $P_{n,0}/\left(T_{\mathbb{Z}_2}\left(M_{1,1}(E)\right) \cap P_{n,0}\right)$.

3.3 Descrevendo uma base de $P^A_{n,m}\left(M_{1,1}(E)\right)$

Nesta seção definiremos classes de polinômios graduados em $F\langle X\rangle$ que nos ajudarão a construir os geradores de $P^A_{n,m}\left(M_{1,1}(E)\right)$ e a descrever as A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$. Antes de começar a construção em si, vamos apresentar como obter uma A-consequência a partir de um A-polinômio $\mathbb{Z}_2$-graduado dado em $P_{n,m}$. Note que $P_{n,m}$ é um $(S_n \times S_m)$-módulo com a seguinte ação: dados $f \in P_{n,m}$ e $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in S_n \times S_m$, σf é o polinômio obtido pela ação de σ_1 permutando as variáveis $y_1, \ldots, y_n$ e σ_2 permutando as variáveis $z_1, \ldots, z_m$.

Definição 3.3.1. *Seja $S \subseteq F\langle X\rangle$ um conjunto de A-polinômios $\mathbb{Z}_2$-graduados. Denote por $\langle S\rangle$ o ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S. Para quaisquer n, m inteiros não negativos,denote por $\langle S\rangle_{n,m}$ o $(S_n \times S_m)$-submódulo de $P_{n,m}$ gerado pela interseção $\langle S\rangle \cap P_{n,m}$. O conjunto das **A-consequências** de S em $P^A_{n,m}$ é definido como*

$$\langle S\rangle_{n,m} \cap P^A_{n,m}.$$

Observe que, de acordo com a definição acima, para obter A-consequências de um A-polinômio graduado f podemos, primeiramente, multiplicar f à esquerda e à direita por polinômios de forma que o produto ainda seja multilinear e, então, permutar adequadamente as variáveis de modo que o resultado seja um A-polinômio. Mais ainda, se f é uma A-identidade graduada, então o será também qualquer A-consequência de f.

Exemplo 3.3.2. *Considere* $f(y_1, y_2, z_1) = [y_1y_2, z_1]$ *e* $\sigma = ((1\ 2\ 3),(1\ 4)) \in S_3 \times S_4$. *Então*

$$y_1z_2[y_2y_3, z_4]z_3z_1 \in P_{3,4}^{A}$$

é uma A*-consequência de* f*. Com efeito, multiplicando* f *à esquerda por* y_3z_2 *e à direita por* z_3z_4 *nós obtemos*

$$y_3z_2y_1y_2z_1z_3z_4 - y_3z_2z_1y_1y_2z_3z_4.$$

Agora, aplicando σ*, temos*

$$y_1z_2y_2y_3z_4z_3z_1 - y_1z_2z_4y_2y_3z_3z_1 = y_1z_2[y_2y_3, z_4]z_3z_1.$$

Lema 3.3.3. *Sejam* n, m, p, q *inteiros não negativos tais que* $n \leq p$ *e* $m \leq q$*. Considere também* $\{i_1, \ldots, i_p\}$ *uma permutação de* $\{1, \ldots, p\}$ *e* $\{j_1, \ldots, j_q\}$ *uma permutação de* $\{1, \ldots, q\}$*. Suponha que* $f\left(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\right)$ *e* $g\left(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q\right)$ *são* A*-polinômios* $\mathbb{Z}_2$*-graduados em* $F\left\langle X\right\rangle$ *tais que*

$$g = u'f\left(y_{i_{s+1}}, \ldots, y_{i_{s+n}}, z_{j_{t+1}}, \ldots, z_{j_{t+m}}\right)v' \in P_{p,q}^{A},$$

onde $u' = u\left(y_{i_1}, \ldots, y_{i_s}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_t}\right)$ *e* $v' = v\left(y_{i_{s+n+1}}, \ldots, y_{i_p}, z_{j_{t+m+1}}, \ldots, z_{j_q}\right)$ *para certos* $u \in P_{s,t}$ *e* $v \in P_{p-s-n,q-t-m}$*. Então* g *é uma* A*-consequência de* f*.*

Demonstração. Considere $\sigma_1 \in S_p$ a permutação tal que

$$\begin{array}{cccc}
\sigma_1(1) = i_{s+1}, & \sigma_1(2) = i_{s+2}, & \ldots, & \sigma_1(n) = i_{s+n},\\
\sigma_1(n+1) = i_1, & \sigma_1(n+2) = i_2, & \ldots, & \sigma_1(n+s) = i_s,\\
\sigma_1(s+n+1) = i_{s+n+1}, & \sigma_1(s+n+2) = i_{s+n+2}, & \ldots, & \sigma_1(p) = i_p.
\end{array}$$

Considere também $\sigma_2 \in S_q$ a permutação tal que

$$\begin{array}{cccc} \sigma_2(1) = j_{t+1}, & \sigma_2(2) = j_{t+2}, & \ldots, & \sigma_2(m) = j_{t+m}, \\ \sigma_2(m+1) = j_1, & \sigma_2(m+2) = j_2, & \ldots, & \sigma_2(m+t) = j_t, \\ \sigma_2(t+m+1) = j_{t+m+1}, & \sigma_2(t+m+2) = j_{t+m+2}, & \ldots, & \sigma_2(q) = j_q. \end{array}$$

Então, denotando

$$\begin{aligned} u'' &= u\left(y_{n+1}, \ldots, y_{n+s}, z_{m+1}, \ldots, z_{m+t}\right) \\ v'' &= v\left(y_{s+n+1}, \ldots, y_p, z_{t+m+1}, \ldots, z_q\right), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} g &= u' f\left(y_{i_{s+1}}, \ldots, y_{i_{s+n}}, z_{j_{t+1}}, \ldots, z_{j_{t+m}}\right) v' \\ &= (\sigma_1, \sigma_2)\left(u'' f\left(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\right) v''\right) \in \langle f \rangle_{p,q} \cap P^A_{p,q}, \end{aligned}$$

como queríamos $\square$

O lema anterior nos mostra que para obter A-consequências de um polinômio f, podemos substituir as variáveis de f por outras variáveis de mesmo grau e multiplicar f à esquerda e à direita por monômios de modo que o produto final seja um A-polinômio.

3.3.1 Definindo classes de polinômios graduados

No que se segue, definiremos vários "tipos"de polinômios graduados. Nós os usaremos para construir subespaços vetoriais (denotados por $H_{n,m,k}$) de $P^A_{n,m}$, para $k = 1, 2, \ldots, 10$ e inteiros não negativos arbitrários n, m. Após isso, compararemos os quocientes $P^A_{n,m}/H_{n,m,k}$ e $P_{n,m}\left(T_{\mathbb{Z}_2}\left(M_{1,1}(E)\right) \cap P_{n,m}\right)$. Recorde que os monômios $M_{(i)(j)}$ definidos na equação (3.2.1) formam uma base para $P_{n,m}/\left(T_{\mathbb{Z}_2}\left(M_{1,1}(E)\right) \cap P_{n,m}\right)$, onde

$$M_{(i)(j)} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m},$$

para $(i) = \{i_1, i_2, \ldots, i_t : i_1 < i_2 < \cdots < i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $(j) = \left\{j_2, j_4, \ldots, j_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} : j_2 < j_4 < \cdots < j_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\right\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $\{k_1, k_2, \ldots, k_s : k_1 < k_2 < \cdots < k_s\} = \{1, \ldots, n\} \setminus (i)$ e $\{j_1, j_3, \ldots : j_1 < j_3 < \cdots\} = \{1, \ldots, m\} \setminus (j)$. Nosso objetivo é fazer com que, a cada etapa de construção dos subespaços $H_{n,m,k}$, o conjunto gerador do quociente $P^A_{n,m}/H_{n,m,k}$ fique mais "próximo"da base mencionada.

Polinômios de tipos 1, 2, 3 e 4

Mantendo a notação anterior, definimos os polinômios:

$$\begin{aligned}
&f^{(1)}_{2t+1}(y_1,\ldots,y_{2t+1},z_1,z_2)=[z_1y_1\cdots y_{2t}z_2,y_{2t+1}],\quad t\geq 0,\\
&f^{(2)}_{2t+1}(y_1,\ldots,y_{2t+1},z_1,z_2)=[z_2y_1\cdots y_{2t-1}z_1y_{2t},y_{2t+1}],\quad t\geq 1,\\
&f^{(3)}_{2t+1}(y_1,\ldots,y_{2t+1},z_1,z_2)=[y_1z_2y_2\cdots y_{2t}z_1,y_{2t+1}],\quad t\geq 1,\\
&f^{(4)}_{2t+2}(y_1,\ldots,y_{2t+2},z_1,z_2)=z_2y_1\cdots y_{2t+1}z_1y_{2t+2}-y_{2t+2}z_2y_2y_1y_3\cdots y_{2t+1}z_1,\quad t\geq 1.
\end{aligned}$$

Sejam $S^{(1)}=\left\{f^{(1)}_{2t+1}\ :\ t\geq 0\right\}$, $S^{(2)}=\left\{f^{(2)}_{2t+1}\ :\ t\geq 1\right\}$, $S^{(3)}=\left\{f^{(3)}_{2t+1}\ :\ t\geq 1\right\}$ e $S^{(4)}=\left\{f^{(4)}_{2t+2}\ :\ t\geq 1\right\}$. Os polinômios que pertencem ao conjunto de todas as A-consequências de $S^{(i)}$ serão chamados de **polinômios de tipo i**, para $i=1,2,3,4$. Além disso, para inteiros não negativos n,m definimos $H_{n,m,r}$ como o subespaço vetorial de $P^A_{n,m}$ formado por todas as A-consequências de $S^{(1)}\cup S^{(2)}\cup\cdots\cup S^{(r)}$ para $r=1,2,3,4$.

Lema 3.3.4. *Cada polinômio definido acima é uma A-identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração. Os primeiros três tipos de polinômios são identidades graduadas porque o comutador $[y_1,y_2]$ é uma identidade graduada para $M_{1,1}(E)$. O quarto tipo de polinômio é também uma identidade graduada pois

$$f^{(4)}_{2t+2}=[z_2y_1\cdots y_{2t+1}z_1,y_{2t+2}]+y_{2t+2}z_2[y_1,y_2]y_3\cdots y_{2t+1}z_1$$

e ambas parcelas são identidades para $M_{1,1}(E)$. Não é difícil checar que todos são A-polinômios. □

Os próximos dois lemas podem ser encontrados em [9].

Lema 3.3.5 ([9], Lema 4)**.** *Sejam $n\geq 0$ e $m\geq 2$. Então o espaço quociente $P^A_{n,m}/H_{n,m,3}$ é gerado pelos elementos $w+H_{n,m,3}$:*

1. *Se n é ímpar, então $w=y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m}$ onde $w\in P^A_{n,m}$, $s+t=n$, $s\geq 0$ e $t\geq 0$.*

2. *Se n é par, então $w=y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m}$ onde $w\in P^A_{n,m}$, $s+t=n$, $s\geq 0$ e $t\geq 0$, ou $w=z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_{n-1}}z_{j_2}y_{k_n}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$ onde $w\in P^A_{n,m}$.*

Lema 3.3.6 ([9], Lema 7)**.** *Sejam $m \geq 2$ e $n \neq 2$. O espaço vetorial $P_{n,m}^A$ é gerado,módulo $H_{n,m,4}$, pelos monômios $w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m}$. Aqui, $w \in P_{n,m}^A$, $t \geq 0$, $s \geq 0$, $t + s = n$.*

Observação 3.3.7. *A ideia na demonstração dos dois lemas acima é usar os polinômios pertencentes a $H_{n,m,3}$ (ou $H_{n,m,4}$) para "rearranjar"os monômios $w \in P_{n,m}^A$ de modo que eles possam ser escritos na forma desejada, módulo $H_{n,m,3}$ (ou $H_{n,m,4}$). Portanto, se $U \subseteq F\langle X \rangle$ é um subespaço vetorial de $P_{n,m}^A$ tal que $H_{n,m,3} \subseteq U$, então o Lema 3.3.5 é também válido para $P_{n,m}^A/U$. Analogamente, o Lema 3.3.6 permanece válido para $P_{n,m}^A/U$ se $H_{n,m,4} \subseteq U$.*

Polinômios de tipo 5

Definimos

$$f^{(5)}(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = z_1 y_2 z_2 y_1 z_3 + y_1 z_3 y_2 z_2 z_1.$$

Note que $f^{(5)} \in P_{2,3}^A$ e é uma identidade graduada para $M_{1,1}(E)$. De fato, podemos escrever

$$f^{(5)}(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = [z_1 y_2 z_2, y_1] z_3 + y_1 \left(z_1 y_2 z_2 z_3 + z_3 y_2 z_2 z_1 \right)$$

e ambas parcelas são identidades graduadas para $M_{1,1}(E)$. Definimos também o conjunto $S^{(5)} = \left\{ f^{(5)} \right\}$. Os polinômios que pertencem ao conjunto de todas as A-consequências de $S^{(5)}$ serão chamados de **polinômios de tipo 5**. Como anteriormente, $H_{n,m,5}$ é o subespaço vetorial de $P_{n,m}^A$ formado pelas A-consequências de $S^{(1)} \cup \cdots \cup S^{(5)}$.

Lema 3.3.8. *Sejam $n = 2$ e $m \geq 3$. Então $P_{2,m}^A / H_{2,m,5}$ é gerado por $w + H_{2,m,5}$, onde w é um monômio em boa forma.*

Demonstração. Vamos usar o Lema 3.3.6 (veja a Observação 3.3.7). É suficiente considerar um monômio $w = z_{j_1} y_{k_1} z_{j_2} y_{k_2} z_{j_3} \cdots z_{j_m} \in P_{2,m}^A$ e mostrar que ele pode ser escrito em boa forma, módulo $H_{2,m,5}$. Perceba que

$$f^{(5)}\left(y_{k_2}, y_{k_1}, z_{j_1} z_{j_2}, z_{j_3} \right) z_{j_4} \cdots z_{j_m} = w - y_{k_2} z_{j_3} y_{k_1} z_{j_2} z_{j_1} \cdots z_{j_m}.$$

Então, $w = y_{k_2} z_{j_3} y_{k_1} z_{j_2} z_{j_1} \cdots z_{j_m} \pmod{H_{2,m,5}}$ e o lema está provado. □

O próximo passo é considerar algumas A-identidades graduadas que nos permitirão impor alguma ordem sobre os índices do primeiro bloco de y's em um monômio em boa forma.

Polinômios de tipo 6

Para inteiros t, s, m tais que $t \geq 2$, $s \geq 0$ e $m \geq 3$, definimos o polinômio $f^{(6)}_{t,s,m}(y_1, \ldots, y_{t+s}, z_1, \ldots, z_m)$ conforme abaixo: Primeiro considere $m = 3$.

Se s é par, então

$$f^{(6)}_{t,s,3} = y_1 y_2 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 z_3 + y_2 y_1 \cdots y_t z_3 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 z_1$$

Se s é ímpar, então

$$f^{(6)}_{t,s,3} = y_1 y_2 \cdots y_t z_3 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 z_1 + y_2 y_1 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 z_3$$

Agora seja $m \geq 4$ (isso implica que temos pelo menos três z's no fim de cada monômio).

Se s é par, então

$$\begin{aligned} f^{(6)}_{t,s,m} &= y_1 y_2 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-3} z_{m-2} z_{m-1} z_m \\ &+ y_2 y_1 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-3} z_m z_{m-1} z_{m-2} \end{aligned}$$

Se s é ímpar, então

$$\begin{aligned} f^{(6)}_{t,s,m} &= y_1 y_2 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-3} z_m z_{m-1} z_{m-2} \\ &+ y_2 y_1 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-3} z_{m-2} z_{m-1} z_m \end{aligned}$$

Separamos os casos "s par"e "s ímpar"apenas para garantir que $f^{(6)}_{t,s,m}$ seja um A-polinômio. Note que $f^{(6)}_{t,s,m} \in P^A_{t+s,m}$.

Lema 3.3.9. *Sejam t, s, m inteiros tais que $t \geq 2$, $s \geq 0$ e $m \geq 3$. Então, $f^{(6)}_{t,s,m}$ é uma A-identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração. Não é difícil ver que $f^{(6)}_{t,s,m}$ é um A-polinômio. Para provar que ele é uma identidade graduada, vamos lidar com o caso $m \geq 4$ e s par. Todos os outros casos são similares. Veja que

$$\begin{aligned} f^{(6)}_{t,s,m} &= [y_1, y_2] \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-2} z_{m-1} z_m \\ &+ y_2 y_1 \cdots y_t z_1 y_{t+1} \cdots y_{t+s} z_2 \cdots z_{m-3} \left(z_{m-2} z_{m-1} z_m + z_m z_{m-1} z_{m-2} \right) \end{aligned}$$

e as duas parcelas são identidades graduadas para $M_{1,1}(E)$. □

Polinômios de tipo 7

Sejam r, s inteiros tais que $s \geq 2$ e $1 \leq r \leq s-1$. Se s é par, definimos

$$f_{s,r}^{(7)}(y_1, \ldots, y_s, z_1, z_2, z_3) = z_1 y_1 \cdots y_r y_{r+1} \cdots y_s z_2 z_3 + z_3 y_1 \cdots y_{r+1} y_r \cdots y_s z_2 z_1.$$

Se s é ímpar, definimos

$$f_{s,r}^{(7)}(y_1, \ldots, y_s, z_1, z_2, z_3) = z_3 y_1 \cdots y_r y_{r+1} \cdots y_s z_2 z_1 + z_1 y_1 \cdots y_{r+1} y_r \cdots y_s z_2 z_3.$$

É imediato ver que $f_{s,r}^{(7)} \in P_{s,3}^A$.

Lema 3.3.10. *Sejam s, r inteiros tais que $s \geq 2$ e $1 \leq r \leq s-1$. Então $f_{s,r}^{(7)}$ é uma A-identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada para $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração. Para provar que $f_{s,r}^{(7)} \in T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$, note que se s é par

$$\begin{aligned} f_{s,r}^{(7)} &= z_1 y_1 \cdots [y_r, y_{r+1}] \cdots y_t z_2 z_3 \\ &+ \left(z_1 y_1 \cdots y_{r+1} y_r \cdots y_s z_2 z_3 + z_3 y_1 \cdots y_{r+1} y_r \cdots y_s z_2 z_1\right) \end{aligned}$$

e ambas parcelas são identidades graduadas para $M_{1,1}(E)$. Quando s é ímpar o mesmo é válido. $\square$

Denote $S^{(7)} = \left\{ f_{s,r}^{(7)} \ : \ s \geq 2, \ 1 \leq r \leq s-1 \right\}$. Como fizemos nos tipos de polinômios anteriores, denotamos $H_{n,m,7}$ como o conjunto das A-consequências de $S^{(1)} \cup \cdots \cup S^{(7)}$.

Observação 3.3.11. *Suponha que*

$$w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_3} \cdots z_{j_m} \in P_{n,m}^A,$$

é um monômio em boa forma tal que $m \geq 3$ e $s + t = n$. Então, se $t \geq 2$ ou $s \geq 2$ podemos ordenar, módulo $H_{n,m,7}$, todos os z's da seguinte forma:

$$j_1 < j_3 < j_5 < j_7 < \cdots ; \quad j_2 < j_4 < j_6 < \cdots .$$

De fato, se $t \geq 2$ e s é par (quando s é ímpar é análogo) temos

$$\begin{aligned} H_{n,m,7} &\ni f_{t,s,3}^{(6)}(y_{i_1}, \ldots, y_{i_t}, y_{k_1}, \ldots, y_{k_s}, z_{j_1}, z_{j_2}, z_{j_3}) z_{j_4} \cdots z_{j_m} \\ &= w + y_{i_2} y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_3} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_1} \cdots z_{j_m}, \end{aligned}$$

isto é, $w = -y_{i_2}y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_3}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}z_{j_1}\cdots z_{j_m} \pmod{H_{n,m,7}}$*. Então, podemos permutar as variáveis* z_{j_1} *e* z_{j_3} *desde que multipliquemos* w *por* -1 *e permutemos dois* y*'s consecutivos. Em geral, se quisermos permutar* $z_{j_{2p+1}}$ *e* $z_{j_{2p+3}}$*, onde* $p \geq 1$*, basta notar que*

$$\begin{aligned} H_{n,m,7} &\ni f^{(6)}_{t,s,2p+3}\left(y_{i_1},\ldots,y_{i_t},y_{k_1},\ldots,y_{k_s},z_{j_1},\cdots,z_{j_{2p+1}},z_{j_{2p+2}},z_{j_{2p+3}}\right)z_{j_{2p+4}}\cdots z_{j_m} \\ &= w + y_{i_2}y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_{2p+3}}z_{j_{2p+2}}z_{j_{2p+1}}\cdots z_{j_m} \end{aligned}$$

e concluímos o mesmo acima. Para permutar as variáveis $z_{j_2}, z_{j_4}, \ldots$ *usamos o mesmo argumento.*

Se tivermos $s \geq 2$ *podemos fazer o mesmo. De fato, para permutar* z_{j_1} *e* z_{j_3} *basta notar que*

$$\begin{aligned} H_{n,m,7} &\ni y_{i_1}\cdots y_{i_t}f^{(7)}_{s,1}\left(y_{k_1},\ldots,y_{k_s},z_{j_1},z_{j_2},z_{j_3}\right)z_{j_4}\cdots z_{j_m} \\ &= w + y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{z_{j_3}}y_{k_2}y_{k_1}y_{k_3}\cdots y_{k_s}z_{j_2}z_{j_1}\cdots z_{j_m}. \end{aligned}$$

Em geral, se quisermos permutar $z_{j_{2p+1}}$ *e* $z_{j_{2p+3}}$ *para* $p \geq 1$*, então*

$$\begin{aligned} H_{n,m,7} &\ni y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}f^{(6)}_{s,0,2p+2}\left(y_{k_1},\ldots,y_{k_s},z_{j_2},\cdots,z_{j_{2p+1}},z_{j_{2p+2}},z_{j_{2p+3}}\right)z_{j_{2p+4}}\cdots z_{j_m} \\ &= w + y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_2}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_{2p+3}}z_{j_{2p+2}}z_{j_{2p+1}}\cdots z_{j_m} \end{aligned}$$

(neste caso as variáveis $y_{k_1},\ldots,y_{k_s}$ *"fizeram o papel"das variáveis* $y_{i_1},\ldots,y_{i_t}$ *em* $f^{(6)}_{t,s,m}$*). Para permutar as variáveis* $z_{j_2}, z_{j_4}, \ldots$ *usamos a mesma estratégia.*

Observação 3.3.12. *Suponha que tenhamos um monômio em boa forma*

$$w = y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m},$$

onde $s + t = n$ *e* $m \geq 3$*. Podemos ordenar, módulo* $H_{n,m,7}$*, todos os* y*'s da seguinte maneira:*

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_t, \quad k_1 < k_2 < \cdots k_s.$$

Com efeito, voltemos nossa atenção ao primeiro bloco de y*'s em* w*. Se* $t \leq 1$ *não há o que fazer. Considere então* $t \geq 2$ *e assuma* s *par (o caso quando* s *é ímpar é análogo). Para* $1 \leq r \leq t-1$*, temos*

$$
\begin{aligned}
H_{n,m,7} &\ni y_{i_1}\cdots y_{i_{r-1}} f^{(6)}_{t-r+1,s,3}\left(y_{i_r},\ldots y_{i_t}, y_{k_1},\ldots y_{k_s}, z_{j_1}, z_{j_2}, z_{j_3}\right) z_{j_4}\cdots z_{j_m}\\
&= y_{i_1}\cdots y_{i_r} y_{i_{r+1}}\cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_3}\cdots z_{j_m}\\
&+ y_{i_1}\cdots y_{i_{r+1}} y_{i_r}\cdots y_{i_t} z_{j_3} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_1}\cdots z_{j_m},
\end{aligned}
$$

isto é, $w = -y_{i_1}\cdots y_{i_{r+1}} y_{i_r}\cdots y_{i_t} z_{j_3} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_1}\cdots z_{j_m} \pmod{H_{n,m,7}}$*. Assim, podemos permutar as variáveis* y_{i_r} *e* $y_{i_{r+1}}$ *desde que multipliquemos* w *por* -1 *e permutemos* z_{j_1} *e* z_{j_3}*, mantendo os outros* z*'s em seus lugares.*

Agora olhamos para o segundo bloco de y*'s em* w*. Para* $s \geq 2$ *(se* $s \leq 1$ *não há o que provar) e* $1 \leq r \leq s-1$*, temos*

$$
\begin{aligned}
H_{n,m,7} &\ni y_{i_1}\cdots y_{i_t} f^{(7)}_{s,r}\left(y_{k_1},\ldots y_{k_s}, z_{j_1}, z_{j_2}, z_{j_3}\right) z_{j_4}\cdots z_{j_m}\\
&= w + y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_{j_3} y_{k_1}\cdots y_{k_{r+1}} y_{k_r}\cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_1} z_{j_4}\cdots z_{j_m},
\end{aligned}
$$

isto é, podemos permutar y_{k_r} *e* $y_{k_{r+1}}$ *desde que multipliquemos* w *por* -1 *e permutemos* z_{j_1} *e* z_{j_3}*, mantendo os outros* z*'s em seus lugares.*

Lema 3.3.13. *Sejam* $n, m \geq 3$*. Então* $P^A_{n,m}/H_{n,m,7}$ *é gerado por* $w + H_{n,m,7}$*, onde*

$$w = y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m},\ \ s,t \geq 0,\ \ s+t=n$$

e

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_t; \quad k_1 < k_2 < \cdots < k_s; \quad j_1, j_3 < j_5 < j_7 < \cdots; \quad j_2 < j_4 < j_6 < \cdots.$$

Não podemos garantir que j_1 *e* j_3 *podem ser ordenados.*

Demonstração. De acordo com o Lema 3.3.6, $P^A_{n,m}/H_{n,m,7}$ é gerado por $w = y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_3}\cdots z_{j_m} + H_{n,m,7}$, onde $w \in P^A_{n,m}$, $s,t \geq 0$ e $s+t=n$. Primeiramente, olhemos para os z's. Usando a Observação 3.3.11 podemos ordenar os z's da seguinte maneira:

$$j_1 < j_3 < j_5 < \cdots; \quad j_2 < j_4 < j_6 < \cdots.$$

Por outro lado, usando a Observação 3.3.12 podemos ordenar os y's da seguinte forma:

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_t; \quad k_1 < k_2 < \cdots < k_s$$

apenas “pagando o preço”de permutar z_{j_1} e z_{j_3}, mantendo todos os outros z’s em seus lugares. Isso prova o lema. $\square$

Agora queremos estender o Lema 3.3.13 para cobrir os casos $0 \leq n \leq 2$ e $m \geq 3$. Precisaremos de um novo tipo de polinômio:

Polinômios de tipo 8

Definimos $f^{(8)}_{t,p,q}$ para $t = 0, 1$ e $1 \leq p < q$ do seguinte modo:
Se $q \geq p + 3$, então

$$\begin{aligned} f^{(8)}_{0,p,q}(z_1, \ldots, z_{q+2}) &= z_1 \cdots z_p z_{p+1} z_{p+2} \cdots z_q z_{q+1} z_{q+2} \\ &- z_1 \cdots z_{p+2} z_{p+1} z_p \cdots z_{q+2} z_{q+1} z_q \end{aligned}$$

Se $q = p + 2$, então

$$\begin{aligned} f^{(8)}_{0,p,p+2}(z_1, \ldots, z_{p+4}) &= z_1 \cdots z_p z_{p+1} z_{p+2} z_{p+3} z_{p+4} \\ &- z_1 \cdots z_{p+2} z_{p+1} z_{p+4} z_{p+3} z_p \end{aligned}$$

Se $q = p + 1$, então

$$\begin{aligned} f^{(8)}_{0,p,p+1}(z_1, \ldots, z_{p+3}) &= z_1 \cdots z_p z_{p+1} z_{p+2} z_{p+3} \\ &- z_1 \cdots z_{p+2} z_{p+3} z_p z_{p+1} \end{aligned}$$

Para $t = 1$ definimos:
Se $p \geq 2$, então

$$f^{(8)}_{1,p,q}(y_1, z_1, \ldots, z_{q+2}) = f^{(8)}_{0,p,q}(z_1 y_1, z_2, \ldots, z_q, z_{q+2}, z_{q+1}).$$

Se $p = 1$, então

$$\begin{aligned} f^{(8)}_{1,1,2}(y_1, z_1, z_2, z_3, z_4) &= z_1 y_1 z_2 z_4 z_3 - z_4 y_1 z_3 z_1 z_2, \\ f^{(8)}_{1,1,3}(y_1, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= z_1 y_1 z_2 z_3 z_5 z_4 - z_3 y_1 z_2 z_4 z_5 z_1, \\ f^{(8)}_{1,1,q}(y_1, z_1, \ldots, z_{q+2}) &= z_1 y_1 z_2 z_3 \cdots z_q z_{q+2} z_{q+1} - z_3 y_1 z_2 z_1 \cdots z_{q+1} z_{q+2} z_q \text{ para } q \geq 4. \end{aligned}$$

Enfatizamos que $S^{(8)}$ e $H_{n,m,8}$ são definidos de maneira análoga aos casos anteriores. Ademais, note que $f^{(8)}_{t,p,q} \in P^A_{t,q+2}$.

Lema 3.3.14. *Sejam t, p, q inteiros tais que $t = 0, 1$ e $1 \leq p < q$. Então $f^{(8)}_{t,p,q}$ é uma identidade polinomial graduada para $M_{1,1}(E)$.*

Demonstração. Provemos o lema para os polinômios $f^{(8)}_{1,1,2}$ e $f^{(8)}_{1,1,3}$. Como $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ pertence a $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$, temos, módulo $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$

$$z_1y_1z_2z_4z_3 = -z_4y_1z_2z_1z_3 = z_4y_1z_3z_1z_2,$$

o que implica que $f^{(8)}_{1,1,2} = z_1y_1z_2z_4z_3 - z_4y_1z_3z_1z_2 \in T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$. O exato mesmo argumento vale para $f^{(8)}_{1,1,3}$. Os outros casos são similares. □

Proposição 3.3.15. *Sejam $n \geq 0$ e $m \geq 3$. Então $P^A_{n,m}/H_{n,m,8}$ é gerado por $w + H_{n,m,8}$, onde*

$$w = y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m},\ \ s,t \geq 0,\ \ s+t = n$$

e

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_t; \quad k_1 < k_2 < \cdots < k_s; \quad j_1, j_3 < j_5 < j_7 < \cdots ; \quad j_2 < j_4 < j_6 < \cdots .$$

Não podemos garantir que j_1 e j_3 podem ser ordenados.

Demonstração. Devido ao Lema 3.3.13, precisamos apenas considerar os casos em que $0 \leq n \leq 2$. Os casos $n = 0$ e $n = 1$ serão resolvidos usando o Lema 3.3.6. Para o caso $n = 2$, usaremos o Lema 3.3.8. Ao todo temos um total de 6 casos:

(1) $w = z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 0$;

(2) $w = y_{i_1}z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 1$;

(3) $w = z_{j_1}y_{i_1}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 1$;

(4) $w = y_{i_1}z_{j_1}y_{i_2}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 2$;

(5) $w = y_{i_1}y_{i_2}z_{j_1}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 2$;

(6) $w = z_{j_1}y_{i_1}y_{i_2}z_{j_2}z_{j_3}\cdots z_{j_m}$, quando $n = 2$.

Considere o caso (1): se $m = 3$ não há o que provar. Assuma $m \geq 4$. Usando polinômios do tipo 8, primeiro ordenamos os índices $j_1, j_3, j_5, \ldots$ enquanto permutamos os índices j_2 e j_4. Por exemplo, se quisermos permutar z_{j_1} e z_{j_3}, consideramos

$$\begin{aligned} H_{0,m,8} &\ni f^{(8)}_{0,1,2}(z_{j_1}, z_{j_2}, z_{j_3}, z_{j_4})\, z_{j_5}\cdots z_{j_m} \\ &= w - z_{j_3}z_{j_4}z_{j_1}z_{j_2}\cdots z_{j_m}, \end{aligned}$$

o que nos dá o que queremos. Em geral, se quisermos transpor $z_{j_{2p+1}}$ e $z_{j_{2p+3}}$ para $p \geq 1$, consideramos

$$\begin{aligned} H_{0,m,8} &\ni f_{0,2,2p+1}^{(8)}\left(z_{j_1}, z_{j_2}z_{j_3}, z_{j_4}, \cdots, z_{j_{2p+1}}, z_{j_{2p+2}}, z_{j_{2p+3}}\right) z_{j_{2p+4}} \dots z_{j_m} \\ &= w - z_{j_1}z_{j_4}z_{j_3}z_{j_2} \cdots z_{j_{2p+3}}z_{j_{2p+2}}z_{j_{2p+1}} \cdots z_{j_m}, \end{aligned}$$

como queríamos. Agora, usamos o mesmo argumento acima para transpor $z_{j_2}, z_{j_4}, z_{j_6}, \dots$ enquanto permutamos z_{j_1} e z_{j_3}. O caso (2) é análogo. Os casos (3) e (4) são resolvidos da mesma forma utilizando polinômios do tipo 8 da forma $f_{1,p,q}^{(8)}$ no lugar de $f_{0,p,q}^{(8)}$. Nos casos (5) e (6) usamos as Observações 3.3.11 e 3.3.12. □

Agora, queremos estender o Lema 3.3.13 para cobrir os casos $n \geq 0$ e $0 \leq m \leq 2$. Para isso, precisamos adicionar novos tipos de polinômios.

Polinômios de tipos 9 e 10

Definimos os polinômios

$$\begin{aligned} f^{(9)}(y_1, y_2, y_3) &= [y_1, y_2y_3] \\ f^{(10)}(y_1, y_2, y_3, y_4, z_1) &= y_1y_2z_1y_3y_4 - y_2y_1z_1y_4y_3. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que $f^{(9)} \in P_{3,0}^{A}$, $f^{(10)} \in P_{4,1}^{A}$ e ambos os polinômios são A-identidades graduadas para $M_{1,1}(E)$. Novamente, $S^{(9)}$, $S^{(10)}$ e $H_{n,m,10}$ são definidos de maneira análoga às situações anteriores.

Observação 3.3.16. *Suponha que $w = y_{i_1}y_{i_2}y_{i_3}\cdots y_{i_t} \in P_{t,0}^{A}$, onde $t \geq 3$. Usando um polinômio de tipo 9, podemos dizer que cada variável de w pode "pular duas outras variáveis vizinhas e consecutivas"(para "frente"ou para "trás"), módulo $H_{t,0,10}$. Mais precisamente, escolha $r \in \{1, 2, \dots, t-2\}$. Então*

$$\begin{aligned} H_{t,0,10} &\ni y_{i_1}\cdots y_{i_{r-1}} f^{(9)}\left(y_{i_r}, y_{i_{r+1}}, y_{i_{r+2}}\right) y_{i_{r+3}}\cdots y_{i_t} \\ &= w - y_{i_1}\cdots y_{i_{r-1}}y_{i_{r+1}}y_{i_{r+2}}y_{i_r}y_{i_{r+3}}\cdots y_{i_t}, \end{aligned}$$

isto é, a variável y_{i_r} pulou para a "frente"as duas variáveis $y_{i_{r-1}}y_{i_{r+1}}$. Da mesma forma, poderíamos também mover a variável y_{i_r} para "trás", para $3 \leq r \leq t$.

Proposição 3.3.17. *Sejam $n \geq 0$ e $0 \leq m \leq 2$ tais que $(n, m) \neq (2, 2)$. Então $P_{n,m}^{A}/H_{n,m,10}$ é gerado por $w + H_{n,m,10}$, onde:*

(1) $w = y_{i_1}\cdots y_{i_t}$, *quando* $m = 0$*;*

(2) $w = y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_1 y_{k_1}\cdots y_{k_s}$, *quando* $m = 1$*;*

(3) $w = y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2}$, *quando* $m = 2$.

Em todos os três casos $w \in P^A_{n,m}$, $s + t = n$ *e*

$$i_1 < \cdots < i_{t-1}, i_t;$$
$$k_1, k_2 < k_3 < \cdots < k_s;$$
$$i_{t-1} < i_t \text{ sempre que } s \geq 2 \text{ ou } m = 0.$$

Demonstração. **Caso (1)**: (Neste caso $t = n$). Qualquer monômio em $P^A_{n,0}/H_{n,0,10}$ tem a forma $w = y_{i_1}\cdots y_{i_n}$ módulo $H_{n,0,10}$. Se $n = 0$ ou $n = 1$ não há o que provar. O caso $n = 2$ é imediato. Assuma $n \geq 3$. A demonstração será feita por indução sobre o comprimento de w. Assuma que o resultado seja válido para n e considere $w = y_{i_1}\cdots y_{i_n} y_{i_{n+1}}$. Se existe um número par de variáveis à direita de y_{n+1}, então podemos usar a Observação 3.3.16 para escrever $w = y_{i_1}\cdots \widehat{y_{n+1}}\cdots y_{i_{n+1}} y_{n+1}$ (mod $H_{n+1,0,10}$). Agora nós usamos a hipótese de indução em $w' = y_{i_1}\cdots \widehat{y_{n+1}}\cdots y_{i_{n+1}}$ (que também é um A-polinômio) e terminamos. Se há um número ímpar de variáveis à direita de y_{n+1}, então temos dois cenários: se y_{n+1} ocupa a posição n em w, então podemos usar novamente a Observação 3.3.16 para movermos para trás a variável que ocupa a última posição em w de modo que y_{n+1} passe a ser a última variável em w; daí terminamos usando a hipótese de indução como no caso anterior. Mas caso y_{n+1} ocupe a posição $r \leq n-1$, então basta mover para trás a variável que ocupa a posição $r + 1$. Daí, teremos um número ímpar de variáveis à direita de y_{n+1} e terminamos da mesma forma que anteriormente.

Caso (2): Similar ao caso (1). Além disso, perceba que se $s \geq 2$ podemos usar um polinômio de tipo 10 para ordenar $i_{t-1} < i_t$ apenas permutando y_{k_1} e y_{k_2}.

Caso (3): De acordo com o Lema 3.3.6, todo monômio em $P^A_{n,2}/H_{n,2,10}$ é da forma $w = y_{i_1}\cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1}\cdots y_{k_s} z_{j_2}$ módulo $H_{n,2,10}$. Agora procedemos como nos casos anteriores para ordenar os índices. Além disso, note que se $s \geq 2$ podemos utilizar um polinômio de tipo 10 para ordenar $i_{t-1} < i_t$ apenas permutando y_{k_1} e y_{k_2}. □

3.3.2 O teorema principal

Nesta seção provaremos o resultado principal deste capítulo. De acordo com o Lema 3.2.1 e o Teorema 3.2.2, o conjunto $\{M_{(i)(j)} : (i), (j)\}$ é uma base para o espaço vetorial

$P_{n,m}$, módulo $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}$, onde $M_{(i)(j)}$ são os monômios definidos na equação (3.2.1).

Lema 3.3.18. *A seguinte desigualdade é válida para quaisquer inteiros $n, m \geq 0$*

$$\dim \frac{P^A_{n,m}}{H_{n,m,10}} \leq \dim \frac{P_{n,m}}{T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}}.$$

Demonstração. **Caso $\boldsymbol{m \geq 3}$**: Usaremos a Proposição 3.3.15. $P^A_{n,m}$ é gerado, módulo $H_{n,m,10}$, por

$$w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m}, \; s, t \geq 0, \; s + t = n,$$

onde

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_t; \; k_1 < k_2 < \cdots < k_s; \; j_1, j_3 < j_5 < j_7 < \cdots; \; j_2 < j_4 < j_6 < \cdots.$$

Primeiro contamos quantos destes monômios w existem em $P_{n,m}$. Denote por C o conjunto de todos os monômios $w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \in P_{n,m}$ cujos índices satisfazem as desigualdades acima. É evidente que o conjunto gerador dado na Proposição 3.3.15 coincide com $\{w \in C \; : \; w \in P^A_{n,m}\}$. Temos 2^n formas de escolher o conjunto $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ (uma vez que esse conjunto é escolhido, $\{k_1, \ldots, k_s\}$ fica determinado). De igual maneira, temos $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ maneiras de escolher $\{j_1, j_3, j_5, \ldots\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ (uma vez que esse conjunto é escolhido, $\{j_2, j_4, j_6, \ldots\}$ fica determinado). Defina

$$A = \{w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \in C \; : \; j_1 < j_3\} \text{ e}$$
$$B = \{w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} \cdots z_{j_m} \in C \; : \; j_1 > j_3\}.$$

Assim, $A \cup B = C$ e $|A| = |B| = 2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, o que implica $|C| = 2^{n+1} \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ (pois $A \cap B = \emptyset$). Mas exatamente metade dos elementos de C são A-polinômios, o que nos dá

$$\dim \frac{P^A_{n,m}}{H_{n,m,10}} \leq 2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} = \dim \frac{P_{n,m}}{T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}}.$$

Caso $\boldsymbol{m = 0}$: usamos a Proposição 3.3.17. Neste caso, temos

$$\dim \frac{P^A_{n,0}}{H_{n,0,10}} = 1 = \dim \frac{P_{n,0}}{T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,0}}.$$

Caso $\boldsymbol{m = 1}$: para cada $(i) = \{i_1, \ldots, i_t\}$ escolhido, temos no máximo dois monômios

$w \in P_{n,1}$ cujos índices satisfazem as desigualdades da Proposição 3.3.17. De fato, se $s \geq 2$, temos duas possibilidades para w:

$$w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_1 y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_s} \text{ e } w = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_1 y_{k_2} y_{k_1} \cdots y_{k_s}.$$

Mas apenas um deles é um A-polinômio. Similarmente, se $s = 1$ temos no máximo duas possibilidades para w:

$$\begin{aligned} &w = y_{i_1} \cdots y_{i_{t-1}} y_{i_t} z_1 y_{k_1} \text{ and } y_{i_1} \cdots y_{i_t} y_{i_{t-1}} z_1 y_{k_1} \qquad \text{se } t \geq 2 \\ &w = y_{i_1} z_1 y_{k_1} \qquad \text{se } t = 1 \\ &w = z_1 y_{k_1} \qquad \text{se } t = 0. \end{aligned}$$

O mesmo acontece se $s = 0$. Assim, o número de geradores de $P^A_{n,1}$ módulo $H_{n,1,10}$ é, no máximo, igual ao número de escolhas para (i). Assim, como no caso $m \geq 3$,

$$\dim \frac{P^A_{n,1}}{H_{n,1,10}} \leq 2^n = \dim \frac{P_{n,1}}{T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,1}}.$$

Caso $\boldsymbol{m = 2}$: Assuma que $n \neq 2$. Então, usando a Proposição 3.3.17, obtemos a desigualdade desejada como no caso $m = 1$. Devemos nos atentar quando $n = 2$. De acordo com o Lema 3.3.5, o leitor pode checar que os seguintes monômios geram $P^A_{2,2}$ módulo $H_{2,2,10}$:

$$\begin{aligned} &y_1 y_2 z_1 z_2, \quad z_1 y_1 y_2 z_2, \quad y_1 z_2 y_2 z_1, \quad y_2 z_1 y_1 z_2, \\ &y_2 y_1 z_2 z_1, \quad z_2 y_2 y_1 z_1, \quad z_1 y_2 z_2 y_1, \quad z_2 y_1 z_1 y_2. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Por outro lado, os seguintes monômios formam uma base para $P_{2,2}$ módulo $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{2,2}$ (veja o Lema 3.2.1 e o Teorema 3.2.2):

$$\begin{aligned} &z_1 y_1 y_2 z_2, \quad y_1 z_2 y_2 z_1, \quad y_1 y_2 z_1 z_2, \quad y_2 z_1 y_1 z_2, \\ &z_2 y_1 y_2 z_1, \quad y_2 z_2 y_1 z_1, \quad y_1 z_1 y_2 z_2, \quad y_1 y_2 z_2 z_1. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Isso finaliza a prova do lema. □

Agora estamos prontos para o resultado principal deste capítulo. O próximo teorema garante que as A-identidades polinomiais graduadas para $M_{1,1}(E)$ coincidem com o conjunto $H_{n,m,10}$. Além disso, calculamos a (n, m)-ésima A-codimensão graduada de $M_{1,1}(E)$:

Teorema 3.3.19. *(1) As A-identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $M_{1,1}(E)$ coincidem com o conjunto $H_{n,m,10}$, isto é, $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,m} = H_{n,m,10}$.*

(2) As A-codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ são:

(a) $c^A_{1,2}(M_{1,1}(E)) = 2$.

(b) $c^A_{0,2}(M_{1,1}(E)) = 1$.

(c) $c^A_{2,1}(M_{1,1}(E)) = 3$

(d) $c^A_{1,1}(M_{1,1}(E)) = 1$

(e) Para todos os outros n, m, tem-se que

$$c^A_{n,m}(M_{1,1}(E)) = c_{n,m}(M_{1,1}(E)) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ 2^n \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, & \text{se } m > 0. \end{cases}$$

Demonstração. Denote $I_{n,m} = T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P_{n,m}$ e $I^A_{n,m} = T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,m}$. Note que por construção $H_{n,m,10} \subseteq I^A_{n,m}$. Assim, para provar o item (1) é suficiente mostrar que

$$\dim \frac{P^A_{n,m}}{I^A_{n,m}} = \dim \frac{P^A_{n,m}}{H_{n,m,10}}. \tag{3.3.3}$$

Perceba que temos para quaisquer inteiros $n, m \geq 0$

$$\dim \frac{P^A_{n,m}}{I^A_{n,m}} \leq \dim \frac{P^A_{n,m}}{H_{n,m,10}} \leq \dim \frac{P_{n,m}}{I_{n,m}},$$

onde a última desigualdade é devido ao Lema 3.3.18.

Caso 1: $m \geq 3$. Para obter a igualdade (3.3.3), provaremos que

$$\dim \frac{P^A_{n,m}}{I^A_{n,m}} = \dim \frac{P_{n,m}}{I_{n,m}}.$$

Considere a aplicação linear

$$\varphi : \frac{P^A_{n,m}}{I^A_{n,m}} \longrightarrow \frac{P_{n,m}}{I_{n,m}}$$

definida por $\varphi\left(u + I^A_{n,m}\right) = u + I_{n,m}$. Obviamente esta aplicação é bem definida e injetiva. Tome $M_{(i)(j)} = y_{i_1} \cdots y_{i_t} z_{j_1} y_{k_1} \cdots y_{k_s} z_{j_2} z_{j_3} \cdots z_{j_m} \in P_{n,m}$ como na equação (3.2.1). Se $M_{(i)(j)} \in P^A_{n,m}$, então $\varphi\left(M_{(i)(j)} + I^A_{n,m}\right) = M_{(i)(j)} + I_{n,m}$. Se $M_{(i)(j)} \notin P^A_{n,m}$, então considere

$u = -y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_3}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}z_{j_1}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m}$ (permutamos z_{j_1} e z_{j_3}). Como $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ é uma identidade graduada, note que $M_{(i)(j)} - u \in I_{n,m}$. Logo, $\varphi(u + I^A_{n,m}) = u + I_{n,m} = M_{(i)(j)} + I_{n,m}$. Assim, neste Caso (1), φ é um isomorfismo. Portanto, se $m \geq 3$ então $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,m} = H_{n,m,10}$ e $c^A_{n,m}(M_{1,1}(E)) = c_{n,m}(M_{1,1}(E))$.

Caso 2: $n \geq 3$. Considere novamente a aplicação φ definida no Caso (1). Tome $M_{(i)(j)} = y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m} \in P_{n,m}$ como na equação (3.2.1). Se $M_{(i)(j)} \in P^A_{n,m}$, Então $\varphi\left(M_{(i)(j)} + I^A_{n,m}\right) = M_{(i)(j)} + I_{n,m}$. Se $M_{(i)(j)} \notin P^A_{n,m}$, temos duas situações: se $t \geq 2$, considere $u = y_{i_2}y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m}$ (permutamos y_{i_1} e y_{i_2}). Como $[y_1, y_2]$ é uma identidade graduada, temos $M_{(i)(j)} - u \in I_{n,m}$ e, portanto, $\varphi\left(u + I^A_{n,m}\right) = M_{(i)(j)} + I_{n,m}$. Se $s \geq 2$ o argumento é análogo considerando $u = y_{i_1}\cdots y_{i_t}z_{j_1}y_{k_2}y_{k_1}\cdots y_{k_s}z_{j_2}\cdots z_{j_m} \in P^A_{n,m}$ (permutamos y_{k_1} e y_{k_2}). Assim, a aplicação φ é um isomorfismo. Portanto, se $n \geq 3$, então $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,m} = H_{n,m,10}$ e $c^A_{n,m}(M_{1,1}(E)) = c_{n,m}(M_{1,1}(E))$.

Falta-nos checar os casos $0 \leq n \leq 2$ e $0 \leq m \leq 2$.

Caso 3: $n = 2$ e $m = 2$. Considere mais uma vez a aplicação φ definida no Caso 1. As equações (3.3.1) e (3.3.2) da demonstração do Lema 3.3.18 dão os geradores de $P^A_{2,2}$ módulo $H_{2,2,10}$ e $P_{2,2}$ módulo $I_{2,2}$, respectivamente. Os primeiros quatro monômios da equação (3.3.2) pertencem a $P^A_{2,2}$. Mais ainda

$$z_2y_1y_2z_1 + I = z_2y_2y_1z_1 + I, \quad y_2z_2y_1z_1 + I = z_2y_1z_1y_2 + I,$$
$$y_1z_1y_2z_2 + I = z_1y_2z_2y_1 + I, \quad y_1y_2z_2z_1 + I = y_2y_1z_2z_1 + I.$$

Logo, a aplicação φ é sobrejetora (consequentemente um isomorfismo) e terminamos como nos Casos 1 e 2.

Caso 4: $n = 1$ e $m = 2$. Usando a Proposição 3.3.17, temos que o conjunto $B = \{y_1z_1z_2, z_2y_1z_1\}$ gera $P^A_{1,2}$ módulo $H_{1,2,10}$. Afirmamos que B é linearmente independente. Com efeito, suponha que $\alpha y_1z_1z_2 + \beta z_2y_1z_1 = 0 \pmod{H_{1,2,10}}$, para certos $\alpha, \beta \in F$. logo, $\alpha y_1z_1z_2 + \beta z_2y_1z_1 \in T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E))$. Como na demonstração do Lema 3.2.1, concluímos que $\alpha = 0 = \beta$ (use a substituição $y_1 = e_{11}$, $z_1 = v_1e_{12}$ e $z_3 = v_2e_{21}$). Analogamente, concluímos que B é linearmente independente, módulo $I^A_{1,2}$. Portanto a igualdade (3.3.3) está provada e obtemos $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,m} = H_{n,m,10}$ e $c^A_{1,2}(M_{1,1}(E)) = 2$.

Caso 5: $n = 0$ e $m = 2$. Procedemos como no caso anterior. Temos que $\{z_1z_2\}$ é uma base para $P^A_{0,2}$ módulo $H_{0,2,10}$. Obviamente, $\{z_1z_2\}$ é também uma base para $P_{0,2}$ módulo $I^A_{0,2}$. Isso prova a igualdade (3.3.3) e, portanto, $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{0,2} = H_{0,2,10}$ e $c^A_{0,2}(M_{1,1}(E)) = 1$.

Caso 6: $n = 2$ e $\mathrm{m} = 1$. Podemos usar um argumento análogo ao Caso 4 para mostrar que $\{y_1y_2z_1, y_2z_1y_1, z_1y_1y_2\}$ é uma base para $P^A_{2,1}$ módulo $H_{2,1,10}$ e para $P^A_{2,1}$ módulo $I^A_{2,1}$. Logo, $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{2,1} = H_{2,1,10}$ e $c^A_{2,1}(M_{1,1}(E)) = 3$.

Caso 7: $\boldsymbol{n = 1}$ e $\boldsymbol{m = 1}$. Usamos apenas um argumento similar ao usado no Caso 4. É fácil ver que $\{y_1z_1\}$ é uma base para $P^A_{1,1}$ módulo $H_{1,1,10}$ e para $P^A_{1,1}$ módulo $I^A_{1,1}$. Logo, $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{1,1} = H_{1,1,10}$ e $c^A_{1,1}(M_{1,1}(E)) = 1$.

Caso 8: $\boldsymbol{n = 0}$ e $\boldsymbol{m = 1}$. Novamente, mesma situação do Caso 4. Não é difícil ver que $\{z_1\}$ é uma base para $P^A_{0,1}$ módulo $H_{0,1,10}$ e para $P_{0,1}$ módulo $I^A_{0,1}$. Portanto, $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{0,1} = H_{0,1,10}$ e $c^A_{0,1}(M_{1,1}(E)) = 1$.

Caso 9: $\boldsymbol{m = 0}$. Usamos a Proposição 3.3.17 e argumentos análogos aos usados nos casos anteriores para mostrar que $T_{\mathbb{Z}_2}(M_{1,1}(E)) \cap P^A_{n,0} = H_{n,0,10}$ e $c^A_{n,0}(M_{1,1}(E)) = 1$. □

Embora $M_{1,1}(E)$ e $M_2(F)$ não sejam PI-equivalentes, o comportamento assintótico de suas respectivas A-codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas é o mesmo:

Corolário 3.3.20. *Sejam $n, m \geq 0$ inteiros. Então*

$$c^A_{n,m}(M_{1,1}(E)) = c^A_{n,m}(M_2(F)).$$

Demonstração. O Teorema 18 em [9] prova que as A-codimensões $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(F)$ são as mesmas que encontramos no Teorema anterior. Isso prova o corolário. □

Seja R uma álgebra G-graduada. Um dos possíveis caminhos na sequência deste resultado seria estabelecer a noção de A-identidades G-graduadas de R, onde G é um grupo finito qualquer. Em seguida, acreditamos ser possível o estabelecimento de uma relação entre as A-identidades G-graduadas de R e as A-identidades $(G \times \mathbb{Z}_2)$-graduadas para $R \otimes E$ e também uma relação entre suas respectivas A-codimensões graduadas.

Capítulo 4

Apêndice

Neste apêndice provaremos a Proposição 2.3.9. Vamos enunciá-la novamente:

Proposição 4.0.1. *Seja h o polinômio definido em* (2.3.2) *e considere uma substituição arbitrária $x_i = a_i$, onde $a_i \in M_{1,1}(E)$. Suponha que pelo menos dois elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ pertençam a uma mesma componente R_{ij}. Então $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.*

Observe que, sem perda de generalidade, precisamos considerar apenas os casos em que $a_1, a_2 \in R_{12}$ ou $a_1, a_2 \in R_{21}$. Os Lemas 4.0.2-4.0.11 formam a demonstração desta proposição. Recordamos que para $k = 1, 2, \ldots, 6$, se $a_k \in R_{ij}$ então escreveremos $a_k = r_{ij}^{(k)}$ onde $r_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k)} e_{ij}$, onde $u_{ij}^{(k)} \in E^{(0)}$ se $i = j$ ou $u_{ij}^{(k)} \in E^{(1)}$ se $i \neq j$. Além disso, e_{ij} representa a matriz elementar 2×2 com 1 na entrada (i, j) e zero nas demais. Além disso, usaremos em certos momentos a seguinte terminologia: dado um monômio $m = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, dizemos que um outro monômio $m' = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$, é um *submonômio* de m se pudermos escrever $m = m_1 m' m_2$, com m_1, m_2 monômios.

Lema 4.0.2. *Sejam $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}$ e $a_3 = r_{11}^{(3)}$. Se $a_5 = r_{11}^{(5)}$ ou $a_5 = r_{12}^{(5)}$, então $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.*

Demonstração. Se $a_5 = r_{11}^{(5)}$ então podemos usar a Observação 2.3.6. Se $a_5 = r_{12}^{(5)}$, então $h_{ij}(a_1, \ldots, a_6) = 0$ para todos i, j. De fato, em cada monômio de cada h_{ij} aparecem 3 dos quatro elementos a_1, a_2, a_3, a_5 juntos. Como o produto de três destes elementos é sempre nulo, temos o resultado. □

Lema 4.0.3. *Sejam $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}, a_3 = r_{11}^{(3)}, a_5 = r_{21}^{(5)}$. Então $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.*

Demonstração. Para cada h_{ij} podemos considerar apenas os monômios que possuem os submonômios

$$a_1 a_5 a_2,\ a_1 a_5 a_3,\ a_2 a_5 a_1,\ a_2 a_5 a_3,\ a_3 a_1 a_5,\ a_3 a_2 a_5,\ a_5 a_3 a_1,\ a_5 a_3 a_2.$$

Por exemplo, teremos

$$\begin{aligned} h_{13} = &- a_4a_3a_6a_1a_5a_2 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 - a_6a_2a_4a_1a_5a_3 \\ &+ a_4a_3a_6a_2a_5a_1 - a_6a_3a_4a_2a_5a_1 - a_4a_1a_6a_2a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3 \\ &+ a_4a_2x_6a_3a_1a_5 - a_6a_2a_4a_3a_1a_5 - a_4a_1a_6a_3a_2a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 \\ &+ a_4a_2x_6a_5a_3a_1 - a_6a_2a_4a_5a_3a_1 - a_4a_1a_6a_5a_3a_2 + a_6a_1a_4a_5a_3a_2. \end{aligned}$$

Pela Observação 2.3.7 aplicada a a_1 e a_2, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} &- a_4a_3a_6a_1a_5a_2 = a_4a_3a_6a_2a_5a_1, \quad -a_6a_3a_4a_2a_5a_1 = a_6a_3a_4a_1a_5a_2, \\ &- a_4a_1a_6a_2a_5a_3 = a_4a_2a_6a_1a_5a_3, \quad -a_6a_2a_4a_1a_5a_3 = a_6a_1a_4a_2a_5a_3 \\ &- a_4a_1a_6a_3a_2a_5 = a_4a_2a_6a_3a_1a_5, \quad -a_6a_2a_4a_3a_1a_5 = a_6a_1x_4a_3a_2a_5 \\ &- a_4a_1a_6a_5a_3a_2 = a_4a_2x_6a_5a_3a_1, \quad -a_6a_2a_4a_5a_3a_1 = a_6a_1a_4a_5a_3a_2. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} h_{13} = 2\,(&a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3 \\ &+ a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 + a_4a_2x_6a_5a_3a_1 + a_6a_1a_4a_5a_3a_2). \end{aligned} \tag{4.0.1}$$

Usando a mesma ideia aplicada a h_{15}, temos

$$\begin{aligned} h_{15} = &+ a_4a_1a_5a_2a_6a_3 - a_6a_1a_5a_2a_4a_3 - a_4a_1a_5a_3a_6a_2 + a_6a_1a_5a_3a_4a_2 \\ &- a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_6a_2a_5a_1a_4a_3 + a_4a_2a_5a_3a_6a_1 - a_6a_2a_5a_3a_4a_1 \\ &- a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_3a_1a_5a_4a_2 + a_4a_3a_2a_5a_6a_1 - a_6a_3a_2a_5a_4a_1 \\ &- a_4a_5a_3a_1a_6a_2 + a_6a_5a_3a_1a_4a_2 + a_4a_5a_3a_2a_6a_1 - a_6a_5a_3a_2a_4a_1. \end{aligned}$$

Usando novamente a Observação 2.3.7 com relação a a_1 e a_2, temos

$$\begin{aligned} h_{15} = -2\,(&a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_6a_1a_5a_2a_4a_3 + a_4a_1a_5a_3a_6a_2 + a_6a_2a_5a_3a_4a_1 \\ &+ a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_3a_2a_5a_4a_1 + a_4a_5a_3a_1a_6a_2 + a_6a_5a_3a_2a_4a_1). \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

De modo geral, temos

$$\begin{aligned} h_{23} = &+ a_3a_4a_6a_1a_5a_2 - a_3a_6a_4a_1a_5a_2 - a_2a_4a_6a_1a_5a_3 + a_2a_6a_4a_1a_5a_3 \\ &- a_3a_4a_6a_2a_5a_1 + a_3a_6a_4a_2a_5a_1 + a_1a_4a_6a_2a_5a_3 - a_1a_6a_4a_2a_5a_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- a_2a_4x_6a_3a_1a_5 + a_2a_6a_4a_3a_1a_5 + a_1a_4a_6a_3a_2a_5 - a_1a_6a_4a_3a_2a_5\\
&- a_2a_4x_6a_5a_3a_1 + a_2a_6a_4a_5a_3a_1 + a_1a_4a_6a_5a_3a_2 - a_1a_6a_4a_5a_3a_2,\\
h_{26} =& - a_3a_4a_1a_5a_2a_6 + a_3a_6a_1a_5a_2a_4 + a_2a_4a_1a_5a_3a_6 - a_2a_6a_1a_5a_3a_4\\
&+ a_3a_4a_2a_5a_1a_6 - a_3a_6a_2a_5a_1a_4 - a_1a_4a_2a_5a_3a_6 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4\\
&+ a_2a_4a_3a_1a_5x_6 - a_2a_6a_3a_1a_5a_4 - a_1a_4a_3a_2a_5a_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4\\
&+ a_2a_4a_5a_3a_1x_6 - a_2a_6a_5a_3a_1a_4 - a_1a_4a_5a_3a_2a_6 + a_1a_6a_5a_3a_2a_4,\\
h_{45} =& - a_1a_5a_2a_4a_6a_3 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 - a_1a_5a_3a_6a_4a_2\\
&+ a_2a_5a_1a_4a_6a_3 - a_2a_5a_1a_6a_4a_3 - a_2a_5a_3a_4a_6a_1 + a_2a_5a_3a_6a_4a_1\\
&+ a_3a_1a_5a_4a_6a_2 - a_3a_1a_5a_6a_4a_2 - a_3a_2a_5a_4a_6a_1 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1\\
&+ a_5a_3a_1a_4a_6a_2 - a_5a_3a_1a_6a_4a_2 - a_5a_3a_2a_4a_6a_1 + a_5a_3a_2a_6a_4a_1,\\
h_{46} =& + a_1a_5a_2a_4a_3a_6 - a_1a_5a_2a_6a_3a_4 - a_1a_5a_3a_4a_2a_6 + a_1a_5a_3a_6a_2a_4\\
&- a_2a_5a_1a_4a_3a_6 + a_2a_5a_1a_6a_3a_4 + a_2a_5a_3a_4a_1a_6 - a_2a_5a_3a_6a_1a_4\\
&- a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_1a_5a_6a_2a_4 + a_3a_2a_5a_4a_1a_6 - a_3a_2a_5a_6a_1a_4\\
&- a_5a_3a_1a_4a_2a_6 + a_5a_3a_1a_6a_2a_4 + a_5a_3a_2a_4a_1a_6 - a_5a_3a_2a_6a_1a_4.
\end{aligned}
$$

Pelo mesmo argumento anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
h_{23} =& -2\left(a_3a_4a_6a_2a_5a_1 + a_3a_6a_4a_1a_5a_2 + a_2a_4a_6a_1a_5a_3 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3\right.\\
&\left. + a_2a_4x_6a_3a_1a_5 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5 + a_2a_4x_6a_5a_3a_1 + a_1a_6a_4a_5a_3a_2\right),\\
h_{26} =& +2\left(a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_3a_6a_1a_5a_2a_4 + a_2a_4a_1a_5a_3a_6 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4\right.\\
&\left. + a_2a_4a_3a_1a_5x_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_2a_4a_5a_3a_1x_6 + a_1a_6a_5a_3a_2a_4\right),\\
h_{45} =& +2\left(a_2a_5a_1a_4a_6a_3 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 + a_2a_5a_3a_6a_4a_1\right.\\
&\left. + a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1 + a_5a_3a_1a_4a_6a_2 + a_5a_3a_2a_6a_4a_1\right),\\
h_{46} =& -2\left(a_2a_5a_1a_4a_3a_6 + a_1a_5a_2a_6a_3a_4 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6 + a_2a_5a_3a_6a_1a_4\right.\\
&\left. + a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_2a_5a_6a_1a_4 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6 + a_5a_3a_2a_6a_1a_4\right).
\end{aligned}
\tag{4.0.3}
$$

Observe que como $h = h_{13} - h_{15} - h_{23} + h_{26} + h_{45} - h_{46}$, temos que $h\left(a_1, \ldots, a_6\right) = 2\Delta$, onde Δ é a soma de todos os monômios dentro dos parênteses de (4.0.1), (4.0.2) e (4.0.3). Vamos agora analisar as possibilidades de escolha de a_4 e a_6:

(1) $\boldsymbol{a_4 = r_{11}^{(4)}}$.

(a) $x_6 = r_{11}^{(6)}$. Neste caso $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$ devido à Observação 2.3.6 aplicada a a_4 e a_6.

(b) $x_6 = r_{12}^{(6)}$. Todos os monômios de (4.0.1), (4.0.2) e (4.0.3) que possuem algum dos submonômios $a_1a_4, a_2a_4, a_4a_5, a_1a_6, a_6a_1, a_2a_6, a_6a_2, a_6a_3$ ou a_6a_4 é nulo. Como todos os monômios possuem algum dos submonômios mencionados, temos que $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

(c) $a_6 = r_{21}^{(6)}$. Pela mesma razão acima, podemos excluir os monômios contendo os submonômios $a_1a_4, a_2a_4, a_4a_5, a_3a_6, a_4a_6, a_5a_6$ ou a_6a_5. Neste caso,

$$\begin{aligned} h = 2\,(& a_6x_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_2a_5a_1a_6a_3 \\ & a_6a_2a_5a_3a_4a_1 + a_6a_3a_2a_5a_4a_1 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5 \\ & a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 \\ & a_5a_3a_2a_6a_4a_1 + a_1a_5a_2a_6a_3a_4 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6)\,. \end{aligned}$$

Utilizando a notação $r_{ij} = u_{ij}^{(k)}e_{ij}$ onde o superíndice representa a variável que foi substituída, teremos

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) = 2\Big(& u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(2)}e_{22} + u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}e_{11} \\ & + u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}e_{11} + u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}e_{11} \\ & + u_{21}^{(6)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(1)}e_{22} + u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(1)}e_{22} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}e_{11} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}e_{11} \\ & + u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}e_{11} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}e_{11} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(4)}e_{11} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)}e_{11} \\ & + u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(1)}e_{22} + u_{12}^{(1)}u_{11}^{(5)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}e_{11} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}e_{11} + u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}e_{11}\Big) \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, encontramos:

$$\begin{aligned} & h(a_1, \ldots, a_6) = \\ & 2\Big(u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)} + u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)} + u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)} + u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(4)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)} \\ & + u_{12}^{(1)}u_{11}^{(5)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(3)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)} + u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(5)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}\Big)\, e_{11}+ \end{aligned}$$

$$+ 2\left(u^{(6)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{11}u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(2)}_{12} + u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{11}u^{(1)}_{12} + u^{(6)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(4)}_{11}u^{(1)}_{12}\right.$$
$$\left.+u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(4)}_{11}u^{(1)}_{12}\right) e_{22}$$

Tendo em vista que $u^{(k)}_{ii}$ pertence ao centro de E e que $u^{(k)}_{ij}u^{(l)}_{pq} = -u^{(l)}_{pq}u^{(k)}_{ij}$ para $i \neq j$ e $p \neq q$, não é difícil ver que a expressão acima se anula. Isso termina esse subcaso.

(d) $a_6 = r^{(6)}_{22}$. Podemos excluir os monômios de (4.0.1), (4.0.2) e (4.0.3) contendo algum dos seguintes submonômios: a_1a_4, a_2a_4, a_4a_5, a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_6a_3, a_4a_6,a_6a_4, ou a_5a_6. Assim, temos

$$h(a_1, \ldots, a_6) = 2\left(a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6\right).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) =& 2\left(u^{(4)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(6)}_{22}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(1)}_{12} + u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(1)}_{12}u^{(6)}_{22}\right. \\ &\left.+u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(6)}_{22} + u^{(3)}_{11}u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(4)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(6)}_{22}\right) e_{12} = 0 \end{aligned}$$

pelo mesmo cálculo do item anterior.

(2) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{12}}$. Neste caso podemos excluir os monômios de (4.0.1), (4.0.2) (4.0.3) que contêm $a_1a_4, a_4a_1, a_2a_4, a_4a_2$ ou a_4a_3. Assim,

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) = 2\,(&a_4a_5a_3a_1a_6a_2 + a_3a_4a_6a_2a_5a_1 + a_1a_6a_4a_5a_3a_2 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4 \\ &a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 + a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_1a_5a_2a_6a_3a_4) \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

(a) $a_6 = r^{(6)}_{11}$. Esta situação é apenas uma permutação do caso (1)(b).

(b) $a_6 = r^{(6)}_{12}$. Neste caso $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$ pela Observação 2.3.8.

(c) $a_6 = r^{(6)}_{21}$. Calculamos

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) =& 2\left(u^{(4)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(1)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12} + u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(1)}_{12} + u^{(1)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(4)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(2)}_{12}\right. \\ &+ u^{(1)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{12} + u^{(1)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(2)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(4)}_{12} + u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12} \\ &\left.+u^{(3)}_{11}u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(4)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(2)}_{12} + u^{(1)}_{12}u^{(5)}_{21}u^{(2)}_{12}u^{(6)}_{21}u^{(3)}_{11}u^{(4)}_{12}\right) e_{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(d) $a_6 = r^{(6)}_{22}$. Podemos excluir de (4.0.4) os monômios com submonômios a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_6a_3, a_6a_4 e a_5a_6. Isso implica $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

(3) $\boldsymbol{a_4 = r_{21}^{(4)}}$.

(a) $a_6 = r_{11}^{(6)}$. Permutação do caso (1)(c).

(b) $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Permutação do caso (2)(c).

(c) $a_6 = r_{21}^{(6)}$. Excluímos de (4.0.1), (4.0.2) e (4.0.3) os monômios com algum dos submonômios a_3a_4,a_4a_5, a_5a_4, a_3a_6, a_4a_6, a_6a_4, a_5a_6 e a_6a_5. Neste caso,

$$\begin{aligned} h(a_1,\dots,a_6) =& 2\left(a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5\right. \\ &\left. + a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_6a_1a_5a_2a_4a_3 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6 + a_5a_3a_2a_6a_1a_4\right). \end{aligned}$$

Como anteriormente pode-se checar que $h(a_1,\dots,a_6) = 0$.

(d) $a_6 = r_{22}^{(6)}$. Excluímos de (4.0.1), (4.0.2) e (4.0.3) os monômios com submonômios a_3a_4, a_4a_5, a_5a_4, a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_6a_3, a_4a_6 e a_5a_6. Temos

$$\begin{aligned} h(a_1,\dots,a_6) =& 2\left(a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_6a_5a_3a_2a_4a_1 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5\right. \\ &\left. + a_1a_6a_5a_3a_2a_4 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 + a_5a_3a_2a_6a_4a_1 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6\right) \\ =& 0 \end{aligned}$$

pela mesma estratégia empregada anteriormente.

(4) $\boldsymbol{a_4 = r_{22}^{(4)}}$. Os casos $a_6 = r_{11}^{(6)}$, $a_6 = r_{12}^{(6)}$ e $a_6 = r_{21}^{(6)}$ são permutações dos casos (1)(d), (2)(d) e (3)(d), respectivamente. O caso $a_6 = r_{22}^{(6)}$ segue da Observação 2.3.6 aplicada a a_4 e a_6.

□

Lema 4.0.4. *Sejam* $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}, a_3 = r_{11}^{(3)}$ *e* $a_5 = r_{22}^{(5)}$. *Então* $h(a_1,\dots,a_6) = 0$.

Demonstração. Como sempre 3 dos 4 elementos do enunciado aparecem juntos em cada monômio, para cada h_{ij} podemos considerar apenas os monômios que contenham os submonômios $a_3a_1a_5$ ou $a_3a_2a_5$. Usando isso e a Observação 2.3.6 aplicada a a_1 e a_2, temos

$$\begin{aligned} h_{13}(a_1,\dots,a_6) &= a_4a_2a_6a_3a_1a_5 - a_6a_2a_4a_3a_1a_5 - a_4a_1a_6a_3a_2a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 \\ &= 2(a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5). \end{aligned} \tag{4.0.5}$$

Obtemos também

$$
\begin{aligned}
h_{15}(a_1,\ldots,a_6) &= -2(a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_3a_2a_5a_4a_1),\\
h_{23}(a_1,\ldots,a_6) &= -2(a_2a_4a_6a_3a_1a_5 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5),\\
h_{26}(a_1,\ldots,a_6) &= +2(a_2a_4a_3a_1a_5a_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4),\\
h_{45}(a_1,\ldots,a_6) &= +2(a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1),\\
h_{46}(a_1,\ldots,a_6) &= -2(a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_2a_5a_6a_1a_4).
\end{aligned} \tag{4.0.6}
$$

Novamente, $h(a_1,\ldots,a_6) = 2\Delta$, onde Δ é a soma dos monômios nos parênteses de (4.0.5)-(4.0.6).

(1) $\boldsymbol{a_4 = r_{11}^{(4)}}$. Excluímos os monômios com submonômios a_1a_4, a_2a_4, a_4a_5 ou a_5a_4. Assim,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = 2\left(a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1\right). \tag{4.0.7}$$

(a) $a_6 = r_{11}^{(6)}$. Temos $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$ por conta da Observação 2.3.6.

(b) $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Descartamos de (4.0.7) os monômios que contêm a_6a_2, a_6a_3 ou a_6a_4. Isso implica $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(c) $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Calculamos usando (4.0.7):

$$
\begin{aligned}
h(a_1,\ldots,a_6) = 2\Big(&u_{11}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)} + u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(2)}\\
&+u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)} + u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(4)}u_{12}^{(1)}\Big)\, e_{12}\\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

(d) $a_6 = r_{22}^{(6)}$. Podemos descartar de (4.0.7) os monômios que contêm a_6a_2, a_6a_3 ou a_6a_4. Portanto, $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(2) $\boldsymbol{a_4 = r_{12}^{(4)}}$. Nesta situação, ao eliminar de (4.0.5)-(4.0.6) os monômios que contêm a_1a_4, a_4a_1, a_2a_4, a_4a_2, a_4a_3 ou a_5a_4. Isso implica $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$. Não precisamos nos preocupar com as possibilidades de escolha para a_6.

(3) $\boldsymbol{a_4 = r_{21}^{(4)}}$.

(a) $a_6 = r_{11}^{(6)}$. Permutação do caso (1)(c).

(b) $a_6 = r_{12}^{(6)}$. Permutação do caso (2)(c).

(c) $a_6 = r_{21}^{(6)}$. Descartamos de (4.0.5)-(4.0.6) os monômios contendo a_3a_4, a_4a_5, a_3a_6, a_6a_5, a_4a_6 ou a_6a_4. Isso nos dá $h_{23}(a_1, \ldots, a_6) = h_{45}(a_1, \ldots, a_6) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) = 2\,(&a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 + a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_3a_2a_5a_4a_1 \\ &+ a_2a_4a_3a_1a_5a_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_2a_5a_6a_1a_4)\,. \end{aligned}$$

Calculando, encontramos

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) = 2 &\left(u_{21}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)} + u_{21}^{(6)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}\right. \\ &\left.+u_{21}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(2)} + u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(4)}u_{12}^{(1)}\right) e_{22}+ \\ &+ 2\left(u_{12}^{(2)}u_{21}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(6)} + u_{12}^{(1)}u_{21}^{(6)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(4)}\right. \\ &\left.+u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{21}^{(6)} + u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(6)}u_{12}^{(1)}u_{21}^{(4)}\right) e_{11} \\ =&0. \end{aligned}$$

(d) $a_6 = r_{22}^{(6)}$. Descartamos de (4.0.5)-(4.0.6) os monômios com a_3a_4, a_4a_5, a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_6a_3 ou a_4a_6. Isso nos dá

$$h(a_1, \ldots, a_6) = 2\,(a_1a_6a_4a_3a_2a_5 + a_2a_4a_3a_1a_5a_6 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6)$$

E o cálculo como anteriormente nos leva a

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_6) &= 2\left(u_{12}^{(1)}u_{22}^{(6)}u_{21}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)} + u_{12}^{(2)}u_{21}^{(4)}u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{22}^{(5)}\right. \\ &\left.+u_{11}^{(3)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(5)}u_{22}^{(6)}u_{21}^{(4)}u_{12}^{(1)} + u_{11}^{(3)}u_{12}^{(1)}u_{22}^{(5)}u_{21}^{(4)}u_{12}^{(2)}u_{22}^{(6)}\right) e_{12} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{a_4 = r_{22}^{(4)}}$. Os casos $a_6 = r_{11}^{(6)}$, $a_6 = r_{12}^{(6)}$, $a_6 = r_{21}^{(6)}$ são uma consequência imediata de (1)(d), (2)(d) e (3)(d), respectivamente. O caso $a_6 = r_{22}^{(6)}$ é trivial devido à Observação 2.3.6.

□

Lema 4.0.5. *Sejam* $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}, a_3 = r_{12}^{(3)}$. *Se* $a_5 = r_{11}^{(5)}$, $a_5 = r_{12}^{(5)}$ *ou* $a_5 = r_{22}^{(5)}$, *então* $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

Demonstração. Assuma $a_5 = r_{11}^{(5)}$ ou $a_5 = r_{22}^{(5)}$. Como em cada monômio de h três dos quatro elementos de $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$ estão sempre juntos, é fácil ver que $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$. Se $a_5 = r_{12}^{(5)}$ então o lema segue da Observação 2.3.8. $\square$

Lema 4.0.6. *Sejam* $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}, a_3 = r_{12}^{(3)}, a_5 = r_{21}^{(5)}$. *Then* $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

Demonstração. Para cada h_{ij}, podemos considerar apenas os monômios que possuem $a_1a_5a_2$, $a_1a_5a_3$, $a_2a_5a_1$, $a_2a_5a_3$, $a_3a_5a_1$, ou $a_3a_5a_2$. Assim,

$$\begin{aligned} h_{13}(a_1, \ldots, a_6) = &- a_4a_3a_6a_1a_5a_2 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 - a_6a_2a_4a_1a_5a_3 \\ &+ a_4a_3a_6a_2a_5a_1 - a_6a_3a_4a_2a_5a_1 - a_4a_1a_6a_2a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3 \\ &- a_4a_2a_6a_3a_5a_1 + a_6a_2a_4a_3a_5a_1 + a_4a_1a_6a_3a_5a_2 - a_6a_1a_4a_3a_5a_2. \end{aligned}$$

Aplicando a Observação 2.3.6 a a_1 e a_2, obtemos

$$\begin{aligned} h_{13}(a_1, \ldots, a_6) = +2\,(&a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 \\ &+a_6a_1a_4a_2a_5a_3 + a_6a_2a_4a_3a_5a_1 + a_4a_1a_6a_3a_5a_2\,). \end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} h_{15}(a_1, \ldots, a_6) = -2\,(&a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_6a_1a_5a_2a_4a_3 + a_4a_1a_5a_3a_6a_2 \\ &+a_6a_2a_5a_3a_4a_1 + a_4a_3a_5a_2a_6a_1 + a_6a_3a_5a_1a_4a_2\,), \\ h_{23}(a_1, \ldots, a_6) = -2\,(&a_3a_4a_6a_2a_5a_1 + a_3a_6a_4a_1a_5a_2 + a_2a_4a_6a_1a_5a_3 \\ &+a_1a_6a_4a_2a_5a_3 + a_1a_4a_6a_3a_5a_2 + a_2a_6a_4a_3a_5a_1\,), \\ h_{26}(a_1, \ldots, a_6) = +2\,(&a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_3a_6a_1a_5a_2a_4 + a_2a_4a_1a_5a_3a_6 \\ &+a_1a_6a_2a_5a_3a_4 + a_1a_4a_3a_5a_2a_6 + a_2a_6a_3a_5a_1a_4\,), \\ h_{45}(a_1, \ldots, a_6) = +2\,(&a_2a_5a_1a_4a_6a_3 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 \\ &+a_2a_5a_3a_6a_4a_1 + a_3a_5a_2a_4a_6a_1 + a_3a_5a_1a_6a_4a_2\,), \\ h_{46}(a_1, \ldots, a_6) = -2\,(&a_2a_5a_1a_4a_3a_6 + a_1a_5a_2a_6a_3a_4 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6 \\ &+a_2a_5a_3a_6a_1a_4 + a_3a_5a_2a_4a_1a_6 + a_3a_5a_1a_6a_2a_4\,). \end{aligned} \tag{4.0.9}$$

Observe que quando dizemos que estamos "aplicando"a Observação 2.3.6 a a_1 e a_2"pertencentes a um determinado monômio m, por exemplo, seria o mesmo que dizer que $(1\ 2)m = -m$. Neste caso, como $a_1, a_2, a_3 \in R_{12}$, temos que se τ é qualquer permutação no conjunto $\{1, 2, 3\}$, então $\tau m = (-1)^{\tau} m$. Considere novamente a igualdade em (4.0.8). Note que

$$a_4a_3a_6a_2a_5a_1 = (1\ 2\ 3)a_4a_2a_6a_1a_5a_3 = (1\ 3\ 2)a_4a_1a_6a_3a_5a_2$$
$$a_6a_3a_4a_1a_5a_2 = (1\ 2\ 3)a_6a_1a_4a_2a_5a_3 = (2\ 3\ 1)a_6a_2a_4a_3a_5a_1.$$

Isso implica que

$$h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = +6\left(a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2\right). \tag{4.0.10}$$

De igual maneira,

$$\begin{aligned} h_{15}(a_1,\ldots,a_6) &= -6\left(a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_6a_1a_5a_2a_4a_3\right),\\ h_{23}(a_1,\ldots,a_6) &= -6\left(a_3a_4a_6a_2a_5a_1 + a_3a_6a_4a_1a_5a_2\right),\\ h_{26}(a_1,\ldots,a_6) &= +6\left(a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_3a_6a_1a_5a_2a_4\right),\\ h_{45}(a_1,\ldots,a_6) &= +6\left(a_2a_5a_1a_4a_6a_3 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3\right),\\ h_{46}(a_1,\ldots,a_6) &= -6\left(a_2a_5a_1a_4a_3a_6 + a_1a_5a_2a_6a_3a_4\right). \end{aligned} \tag{4.0.11}$$

(1) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{11}}$. Podemos remover das igualdades (4.0.10)-(4.0.11) os monômios que contêm a_1a_4, a_2a_4, a_3a_4 ou a_4a_5. Obtemos então

$$h(a_1,\ldots,a_6) = 6\left(a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_3a_6a_4a_1a_5a_2 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3\right). \tag{4.0.12}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Basta aplicar a Observação 2.3.6 a a_4 e a_6.

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$ devido à Observação 2.3.8.

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Neste caso, podemos usar o mesmo argumento com a transposição (5 6). Além disso, perceba que $a_2a_6a_4 = a_4a_2a_6$, o que nos dá

$$a_4a_3a_6a_2a_5a_1 = -a_4a_2a_6a_3a_5a_1 = a_4a_2a_6a_1a_5a_3 = -a_4a_2a_5a_1a_6a_3,$$
$$a_3a_6a_4a_1a_5a_2 = -a_1a_6a_4a_3a_5a_2 = a_1a_6a_4a_2a_5a_3 = -a_1a_5a_4a_2a_6a_3 = -a_1a_5a_2a_6a_4a_3.$$

Logo a expressão se anula.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Removendo os monômios contendo a_6a_1, a_6a_2, a_6a_3, a_5a_6, a_4a_6 ou a_6a_4, temos $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(2) $\boldsymbol{a_4 = r_{12}^{(4)}}$. Aplicação da Observação 2.3.8.

(3) $\boldsymbol{a_4 = r_{21}^{(4)}}$.

(a) $\boldsymbol{a_6 = r_{11}^{(6)}}$. Permutação do caso (1)(c).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r_{12}^{(6)}}$. Permutação do que seria o caso (2)(c).

(c) $\boldsymbol{a_6 = r_{21}^{(6)}}$. Observe as igualdades (4.0.10)-(4.0.11). Note que cada monômio dentro dos parênteses é obtido através da aplicação da permutação (1 2)(4 6) no seu "vizinho". Assim, teremos

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) = 12\,(&a_4a_3a_6a_2a_5a_1 + a_4a_2a_5a_1a_6a_3 + a_3a_4a_6a_2a_5a_1 \\ &+a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_2a_5a_1a_4a_6a_3 + a_2a_5a_1a_4a_3a_6)\,. \end{aligned}$$

Da mesma forma que anteriormente, o leitor pode checar que a expressão se anula (basta usar a propriedade 2.3.7 nos índices 1,2,3 e nos índices 4,5,6 separadamente).

(d) $\boldsymbol{a_6 = r_{22}^{(6)}}$. Podemos eliminar de (4.0.10)-(4.0.11) os monômios com submonômios $a_6a_1, a_6a_2, a_6a_3, a_5a_6$ ou a_4a_6. Assim,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = 6\,(a_3a_6a_4a_1a_5a_2 + a_3a_4a_2a_5a_1a_6 + a_1a_5a_2a_6a_4a_3 + a_2a_5a_1a_4a_3a_6)\,.$$

Novamente o leitor pode checar que a expressão acima é zero (basta "permutar"os índices 1 e 2 e "comutar"o 6).

(4) $\boldsymbol{a_4 = r_{22}^{(4)}}$. Os casos $a_6 = r_{11}^{(6)}$, $a_6 = r_{12}^{(6)}$ e $a_6 = r_{21}^{(6)}$ são permutações dos casos prévios. O caso $a_6 = r_{22}^{(6)}$ é também imediato devido à Observação 2.3.6.

□

Lema 4.0.7. *Sejam* $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}$ *e* $a_3 = r_{21}^{(3)}$. *Se* $a_5 = r_{11}^{(5)}$ *ou* $a_5 = r_{12}^{(5)}$, *então* $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

Demonstração. Estes casos são permutações dos casos dos lemas anteriores. □

Lema 4.0.8. *Sejam* $a_1 = r_{12}^{(1)}, a_2 = r_{12}^{(2)}, a_3 = r_{21}^{(3)}$ *e* $a_5 = r_{21}^{(5)}$. *Então* $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

Demonstração. Para cada h_{ij} podemos considerar apenas os monômios que contenham $a_1a_3a_2$, $a_2a_3a_1$, $a_1a_5a_2$, $a_2a_5a_1$, $a_3a_1a_5$, $a_5a_1a_3$, $a_3a_2a_5$ e $a_5a_2a_3$.

Temos

$$\begin{aligned} h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = &+ a_4a_5a_6a_1a_3a_2 - a_6a_5a_4a_1a_3a_2 - a_4a_5a_6a_2a_3a_1 + a_6a_5a_4a_2a_3a_1 \\ &- a_4a_3a_6a_1a_5a_2 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_3a_6a_2a_5a_1 - a_6a_3a_4a_2a_5a_1 \\ &+ a_4a_2a_6a_3a_1a_5 - a_6a_2a_4a_3a_1a_5 - a_4a_2a_6a_5a_1a_3 + a_6a_2a_4a_5a_1a_3 \\ &- a_4a_1a_6a_3a_2a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 + a_4a_1a_6a_5a_2a_3 - a_6a_1a_4a_5a_2a_3. \end{aligned}$$

Observe que $(1\ 2)m = -m = (3\ 5)m$ para qualquer monômio m neste lema. Assim, a igualdade acima se torna

$$\begin{aligned} h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(& a_4a_5a_6a_1a_3a_2 + a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_6a_3a_4a_1a_5a_2 + a_4a_3a_6a_2a_5a_1 \\ & + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_2a_4a_5a_1a_3 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 + a_4a_1a_6a_5a_2a_3\ ). \end{aligned}$$

Aplicando (12)(35) à quarta coluna, obtemos a primeira. Similarmente, aplicando (12)(35) à terceira coluna, obtemos a segunda. Assim,

$$h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(a_4a_5a_6a_1a_3a_2 + a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_2a_4a_5a_1a_3\ ). \tag{4.0.13}$$

Usando o mesmo argumento, obtemos

$$\begin{aligned} h_{15}(a_1,\ldots,a_6) &= -4\,(a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_6a_2a_3a_1a_4a_5 + a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_5a_1a_3a_4a_2\ ), \\ h_{23}(a_1,\ldots,a_6) &= -4\,(a_5a_4a_6a_1a_3a_2 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_2a_4a_6a_3a_1a_5 + a_2a_6a_4a_5a_1a_3\ ), \\ h_{26}(a_1,\ldots,a_6) &= +4\,(a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_5a_6a_2a_3a_1a_4 + a_2a_4a_3a_1a_5a_6 + a_2a_6a_5a_1a_3a_4\ ), \\ h_{45}(a_1,\ldots,a_6) &= +4\,(a_1a_3a_2a_4a_6a_5 + a_2a_3a_1a_6a_4a_5 + a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_5a_1a_3a_6a_4a_2\ ), \\ h_{46}(a_1,\ldots,a_6) &= -4\,(a_1a_3a_2a_4a_5a_6 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_5a_1a_3a_6a_2a_4\ ). \end{aligned} \tag{4.0.14}$$

Como nos lemas anteriores, $h(a_1,\ldots,a_6) = 4\Delta$, onde Δ é a soma dos monômios nos parênteses de (4.0.13)-(4.0.14).

(1) $\boldsymbol{a_4 = r_{11}^{(4)}}$. Podemos eliminar das igualdades (4.0.13)-(4.0.14) os monômios contendo a_1a_4, a_2a_4, a_4a_3 ou a_4a_5, obtendo

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(\,& a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_6a_5a_1a_3a_4a_2 \\ & + a_5a_4a_6a_1a_3a_2 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_2a_6a_5a_1a_3a_4 \\ & + a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_5a_1a_3a_6a_4a_2 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6\,)\,. \end{aligned} \tag{4.0.15}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Aplicação da Observação 2.3.6.

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. Eliminando de (4.0.15) os monômios contendo a_1a_6, a_6a_1, a_2a_6, a_6a_2, a_6a_4, temos

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(\,a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_6a_5a_1a_3a_4a_2\,)\,.$$

É uma tarefa simples verificar que a expressão acima é nula.

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Ao eliminar de (4.0.15) os monômios que possuem a_3a_6, a_6a_3, a_4a_6, a_5a_6 ou a_6a_5, conseguimos

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(\,a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6\,)\,.$$

Novamente, não é difícil ver que a expressão acima se anula.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Desconsideramos de (4.0.15) os monômios que possuem a_4a_6, a_6a_4, a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6 ou a_5a_6. Obtemos

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(\,& a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_6a_5a_1a_3a_4a_2 \\ & + a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_2a_6a_5a_1a_3a_4 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6\,)\,. \end{aligned}$$

Como nos outros lemas, não é dificl verificar que a expressão acima é igual a zero.

(2) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{12}}$. Podemos eliminar de (4.0.13)-(4.0.14) os monômios com a_1a_4, a_4a_1, a_2a_4 ou a_4a_2. Isso nos dá

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(\,& a_4a_5a_6a_1a_3a_2 + a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_5a_4a_6a_1a_3a_2 + a_2a_6a_4a_5a_1a_3 \\ & + a_2a_6a_5a_1a_3a_4 + a_2a_3a_1a_6a_4a_5 + a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4\,)\,. \end{aligned} \tag{4.0.16}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Permutação do caso (1)(b).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r_{12}^{(6)}}$. Podemos eliminar de (4.0.16) os monômios que possuem a_1a_6 a_6a_1, a_2a_6, a_6a_2, a_4a_6 ou a_6a_4. Isso implica $h(a_1,\ldots,a_6)=0$.

(c) $\boldsymbol{a_6 = r_{21}^{(6)}}$. Podemos eliminar de (4.0.16) os monômios que possuem a_3a_6, a_6a_3, a_5a_6 ou a_6a_5. Assim,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +4\left(a_5a_4a_6a_1a_3a_2 + a_2a_6a_4a_5a_1a_3 + a_2a_3a_1a_6a_4a_5 + a_3a_1a_5a_4a_6a_2\ \right).$$

E isso nos dá $h(a_1,\ldots,a_6)=0$

(d) $\boldsymbol{a_6 = r_{22}^{(6)}}$. Eliminamos de (4.0.16) os monômios com a_6a_1, a_6a_2, a_6a_4, a_3a_6 ou a_5a_6. Assim,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +4\left(a_2a_6a_5a_1a_3a_4 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4\right).$$

Mais uma vez, temos $h(a_1,\ldots,a_6)=0$.

(3) $\boldsymbol{a_4 = r_{21}^{(4)}}$. Desconsideramos de (4.0.13)-(4.0.14) os monômios que possuem a_3a_4, a_4a_3, a_4a_5 or a_5a_4:

$$\begin{aligned} h(a_1,\ldots,a_6) = +4\,(&a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_2a_4a_6a_3a_1a_5 \\ &+a_5a_6a_2a_3a_1a_4 + a_1a_3a_2a_4a_6a_5 + a_5a_1a_3a_6a_4a_2 + a_5a_1a_3a_6a_2a_4\ ). \end{aligned} \tag{4.0.17}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r_{11}^{(6)}}$. Permutação do caso (1)(c).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r_{12}^{(6)}}$. Permutação do caso (2)(c).

(c) $\boldsymbol{a_6 = r_{21}^{(6)}}$. Ao remover de (4.0.17) os monômios possuindo a_3a_6, a_6a_3, a_4a_6, a_6a_4, a_5a_6 ou a_6a_5, temos $h(a_1,\ldots,a_6)=0$.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r_{22}^{(6)}}$. Descartando de (4.0.17) os monômios com a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_4a_6 ou a_5a_6, temos

$$h(a_1,\ldots,a_6) = 4\left(a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5\right).$$

E isso nos dá $h(a_1,\ldots,a_6)=0$.

(4) $\boldsymbol{a_4 = r_{22}^{(4)}}$. Basta usarmos a Observação 2.3.6.

□

Lema 4.0.9. *Sejam $a_1 = r_{12}^{(1)}$, $a_2 = r_{12}^{(2)}$, $a_3 = r_{21}^{(3)}$ e $a_5 = r_{22}^{(5)}$. Então $h(x_1,\ldots,x_6)=0$.*

Demonstração. Para cada h_{ij} podemos considerar apenas os monômios que contenham $a_1a_3a_2$, $a_1a_5a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_2a_5a_3$, $a_3a_1a_5$, $a_3a_2a_5$, $a_5a_3a_1$ e $a_5a_3a_2$. Temos

$$\begin{aligned}h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = &+ a_4a_5a_6a_1a_3a_2 - a_6a_5a_4a_1a_3a_2 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 - a_6a_2a_4a_1a_5a_3\\ &- a_4a_5a_6a_2a_3a_1 + a_6a_5a_4a_2a_3a_1 - a_4a_1a_6a_2a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3\\ &+ a_4a_2a_6a_3a_1a_5 - a_6a_2a_4a_3a_1a_5 - a_4a_1a_6a_3a_2a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5\\ &+ a_4a_2a_6a_5a_3a_1 - a_6a_2a_4a_5a_3a_1 - a_4a_1a_6a_5a_3a_2 + a_6a_1a_4a_5a_3a_2.\end{aligned}$$

Novamente, usando o mesmo argumento dos lemas anteriores, teremos

$$\begin{aligned}h_{13}(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(&a_4a_5a_6a_1a_3a_2 + a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3\\ &+a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_6a_1a_4a_3a_2a_5 + a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_6a_1a_4a_5a_3a_2\,).\end{aligned} \tag{4.0.18}$$

Da mesma forma, teremos

$$\begin{aligned}h_{15}(a_1,\ldots,a_6) = -2\,(&a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_6a_2a_3a_1a_4a_5 + a_4a_1a_5a_3a_6a_2 + a_6a_2a_5a_3a_4a_1\\ &+a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_6a_3a_2a_5a_4a_1 + a_4a_5a_3a_1a_6a_2 + a_6a_5a_3a_2a_4a_1\,).\\ h_{23}(a_1,\ldots,a_6) = -2\,(&a_5a_4a_6a_1a_3a_2 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_2a_4a_6a_1a_5a_3 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3\\ &+a_2a_4a_6a_3a_1a_5 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5 + a_2a_4a_6a_5a_3a_1 + a_1a_6a_4a_5a_3a_2\,).\\ h_{26}(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(&a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_5a_6a_2a_3a_1a_4 + a_2a_4a_1a_5a_3a_6 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4\\ &+a_2a_4a_3a_1a_5a_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_2a_4a_5a_3a_1a_6 + a_1a_6a_5a_3a_2a_4\,).\\ h_{45}(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(&a_1a_3a_2a_4a_6a_5 + a_2a_3a_1a_6a_4a_5 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 + a_2a_5a_3a_6a_4a_1\\ &+a_3a_1a_5a_4a_6a_2 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1 + a_5a_3a_1a_4a_6a_2 + a_5a_3a_2a_6a_4a_1\,).\\ h_{46}(a_1,\ldots,a_6) = -2\,(&a_1a_3a_2a_4a_5a_6 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6 + a_2a_5a_3a_6a_1a_4\\ &+a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_2a_5a_6a_1a_4 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6 + a_5a_3a_2a_6a_1a_4\,).\end{aligned} \tag{4.0.19}$$

Assim, $h(a_1,\ldots,a_6) = 2\Delta$, onde Δ é a soma dos monômios nos parênteses de (4.0.18)-(4.0.19).

(1) $\boldsymbol{a_4 = r_{11}^{(4)}}$. Neste caso, podemos eliminar de (4.0.18)-(4.0.19) os monômios contendo a_1a_4, a_2a_4, a_4a_3, a_4a_5 e a_5a_4. Logo,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(\,a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5$$
$$+a_4a_1a_5a_3a_6a_2 + a_6a_2a_5a_3a_4a_1 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3$$
$$+a_1a_6a_2a_5a_3a_4 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2 + a_2a_5a_3a_6a_4a_1 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1$$
$$+a_5a_3a_2a_6a_4a_1 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6\,)\,. \tag{4.0.20}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Basta aplicar a Observação 2.3.6.

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. Podemos eliminar de (4.0.20) os monômios que possuirem a_1a_6, a_6a_1, a_2a_6, a_6a_2, a_5a_6 e a_6a_4. Isso implica $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Eliminamos de (4.0.20) os monômios contendo a_3a_6, a_6a_3, a_6a_5 e a_4a_6. Logo,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(\,a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_6a_2a_5a_3a_4a_1 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3$$
$$+a_1a_6a_2a_5a_3a_4 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1 + a_5a_3a_2a_6a_4a_1 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6\,)$$

e o leitor pode checar que a expressão acima é nula.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Eliminamos de (4.0.20) os monômios contendo a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6, a_4a_6 e a_6a_4. Assim,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(\,a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5 + a_1a_5a_3a_4a_2a_6\,)$$

Como no item anterior, $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(2) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{12}}$. Eliminamos de (4.0.18)-(4.0.19) os monômios contendo a_1a_4, a_4a_1, a_2a_4, a_4a_2 e a_5a_4. Logo,

$$h(a_1,\ldots,a_6) = +2\,(\,a_4a_5a_6a_1a_3a_2 + a_4a_3a_1a_5a_6a_2 + a_4a_5a_3a_1a_6a_2 + a_1a_6a_4a_3a_2a_5$$
$$+a_1a_6a_4a_5a_3a_2 + a_1a_6a_2a_5a_3a_4 + a_2a_3a_1a_6a_4a_5 + a_1a_5a_3a_4a_6a_2\,)\,. \tag{4.0.21}$$

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Permutação do caso (1)(b).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. Eliminamos de (4.0.21) os monômios com a_1a_6, a_6a_1, a_2a_6, a_6a_2, a_5a_6 a_4a_6 e a_6a_4. Isso implica $h(a_1,\ldots,a_6) = 0$.

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Neste caso o leitor pode checar diretamente que a expressão em (4.0.21) se anula.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Podemos eliminar de de (4.0.21) os monômios com a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6 e a_6a_4. Isso implica $h(a_1,\dots,a_6)=0$.

(3) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{21}}$.

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Permutação do caso (1)(c).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. Permutação do caso (2)(c).

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Podemos eliminar de (4.0.18)-(4.0.19) os monômios com a_3a_4, a_4a_3, a_4a_5, a_3a_6, a_6a_3, a_6a_5, a_4a_6, a_6a_4. Assim,

$$\begin{aligned} h(a_1,\dots,a_6) = +2\,(& a_4a_2a_6a_1a_5a_3 + a_6a_1a_4a_2a_5a_3 + a_5a_4a_1a_3a_2a_6 + a_5a_6a_2a_3a_1a_4 \\ & + a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_3a_2a_5a_6a_1a_4 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6 + a_5a_3a_2a_6a_1a_4\ ). \end{aligned}$$

Como anteriormente, não é difícil ver que $h(a_1,\dots,a_6)=0$.

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Podemos eliminar de (4.0.18)-(4.0.19) os monômios com a_3a_4, a_4a_3, a_4a_5, a_6a_1, a_6a_2, a_3a_6 e a_4a_6. Assim,

$$\begin{aligned} h(a_1,\dots,a_6) = +2\,(& a_6a_5a_4a_2a_3a_1 + a_4a_2a_6a_3a_1a_5 + a_4a_2a_6a_5a_3a_1 + a_4a_1a_3a_2a_6a_5 \\ & + a_6a_3a_2a_5a_4a_1 + a_6a_5a_3a_2a_4a_1 + a_5a_6a_4a_2a_3a_1 + a_1a_6a_4a_2a_5a_3 \\ & + a_5a_4a_1a_4a_2a_6 + a_1a_6a_3a_2a_5a_4 + a_1a_6a_5a_3a_2a_4 + a_3a_2a_5a_6a_4a_1 \\ & + a_5a_3a_2a_6a_4a_1 + a_2a_3a_1a_6a_5a_4 + a_3a_1a_5a_4a_2a_6 + a_5a_3a_1a_4a_2a_6\ ). \end{aligned}$$

Logo, $h(a_1,\dots,a_6)=0$.

(4) $\boldsymbol{a_4 = r^{(4)}_{22}}$.

(a) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{11}}$. Permutação do caso (1)(d).

(b) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{12}}$. Permutação do caso (2)(d).

(c) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{21}}$. Permutação do caso (3)(d).

(d) $\boldsymbol{a_6 = r^{(6)}_{22}}$. Basta aplicar a Observação 2.3.6.

□

Lema 4.0.10. *Sejam* $a_1 = r^{(1)}_{12}$, $a_2 = r^{(2)}_{12}$ *e* $a_3 = r^{(3)}_{22}$. *Então* $h(a_1,\dots,a_6)=0$.

Demonstração. Os casos $a_5 = r_{11}^{(5)}$, $a_5 = r_{12}^{(5)}$ e $a_5 = r_{21}^{(5)}$ seguem de permutações dos lemas anteriores. O caso $a_5 = r_{22}^{(5)}$ segue da Observação 2.3.6. □

Lema 4.0.11. *Sejam* $a_1 = r_{21}^{(1)}$ *e* $a_2 = r_{21}^{(2)}$. *Então* $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$.

Demonstração. Note que se $a_1, a_2 \in R_{12}$ então pelos lemas anteriores $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$ para quais quer a_3, a_4, a_5, a_6. A Proposição 2.2.1 nos garante então que se $a_1, a_2 \in R_{21}$ então $h(a_1, \ldots, a_6) = 0$ independentemente das componentes em que a_3, a_4, a_5 e a_6 estejam. Isso prova o lema. □

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449-463, (1950).

[2] S. M. Alves Jorge, A. C. Vieira, *Central polynomials for matrix algebras over the Grassmann algebra*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **3** (2), 179-191, (2009).

[3] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30** (12), 5849-5860, (2002).

[4] S. S. Azevedo, M. Fidelis and P. Koshlukov, *Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic*, Commun. Algebra **33** (4), 1011-1022, (2005).

[5] S. S. Azevedo, M. Fidelis and P. Koshlukov, *Tensor Product Theorems in positive characteristic*, J. Algebra **276** (2), 836-845, (2004).

[6] C. Bekh-Ochir, S. A. Rankin, *The identities and the central polynomials of the infinite dimensional unitary Grassmann algebra over a finite field*, Commun. Algebra **39** (3), 819-829, (2011).

[7] A. Ya. Belov, *On non-Specht varieties*, Fund. Prikl. Mat. **5**, 47-66, (1999).

[8] A. P. Brandão Jr, and D. J. Gonçalves, *Central A-polynomials for the Grassmann algebra*, Serdica Math. J. **38**, 297-312, (2012).

[9] A. P. Brandão Jr, D. J. Gonçalves, and P. Koshlukov, *Graded A-identities for the matrix algebra of order two*, Int. J. Algebra Comput. **26** (8), 1617-1631, (2016).

[10] M. Brešar., *Introduction to Noncommutative Algebra*. Springer, (2014).

[11] L. Carini and O. M. Di Vincenzo, *On the multiplicities of the cocharacters of the tensor square of the Grassmann algebra*, Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **69**, 237-246, (1991).

[12] L. Centrone, *$\mathbb{Z}_2$-graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic*, Linear Algebra Appl. **435**, 3297-3313, (2011).

[13] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme* (Em Alemão), Mathematische Annalen **85**, 184-194, (1922).

[14] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, *Graded polynomial identities for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra **31**(3), 1453-1474, (2003).

[15] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. **80**, 323-335, (1992).

[16] O. M. Di Vincenzo and V. Nardozza, *$\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities for $M_{k,l}(E) \otimes E$*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108**, 27-39, (2000).

[17] O. M. Di Vincenzo, V. R. T. da Silva, *On $\mathbb{Z}_2$-graded identities of the Grassmann algebra*, Linear Algebra Appl. **431** (1-2), 56-72, (2009).

[18] V. Drensky, *Explicit formula for the codimension of certain T-ideals*, Siberian Mathematical Journal **29** (6), 897-902, (1988).

[19] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[20] The GAP Group, 2002. GAP - Group, Algorithms and Programming version 4.3. Disponível em: http://www.gap-system.org.

[21] D. J. Gonçalves, *A-Identidades em Álgebras Associativas*, Tese de doutorado, (2009).

[22] D. J. Gonçalves and P. Koshlukov, *A-Identities for the Grassmann algebra: The Conjecture of Henke and Regev*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, 2711-2717, (2008).

[23] D. J. Gonçalves and P. Koshlukov, *A-identities for upper triangular matrices: a question of Henke and Regev*, Israel J. Math. **186**, 407-426, (2011).

[24] D. J. Gonçalves, W. Schützer and H. L. Talpo, *A-identities for the 2×2 matrix algebra*, Archiv der Mathematik **106** (5), 417-429, (2016).

[25] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical Surveys and Monographs **122**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., (2005).

[26] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$*, Israel J. Math. **122**, 305-316, (2001).

[27] A. V. Grishin, *Examples of T-spaces and T-ideals of characteristic* 2 *without the finite basis property*, Fund. Prikl. Mat. **5**, 101-118, (1999)

[28] A. Henke and A. Regev, *A-codimensions and A-cocharacters*, Israel J. Math. **133**, 339-355, (2003).

[29] A. Henke and A. Regev, *Explicit decompositions of the group algebras FS_n and FA_n*, In Polynomial identities and combinatorial methods (Pantelleria, 2001), vol. **235** of Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 329-357, Dekker, New York, (2003).

[30] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra Logic **26**, 362–397, (1987).

[31] A. R. Kemer, *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Trans. of Math. Monographs **87**, (1991).

[32] A. R. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Izvestiya: Mathematics **25** (2), 359-374, (1985).

[33] P. Koshlukov and S. S. de Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157-176, (2002).

[34] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 496-500, (1948).

[35] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Am. Math. Soc. **181**, 429-438, (1973).

[36] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal* (Em Russo), Sibirsk. Matem. Zh. **4** (5), 1122-1126, (1963).

[37] F. A. Naves, H. L. Talpo, *Graded A-identities for $M_{1,1}(E)$*, Linear and Multilinear Algebra, DOI: 10.1080/03081087.2021.1915234 (2021).

[38] F. A. Naves, H. L. Talpo, *Minimum degree of an A-identity of $E \otimes E$*, Int. J. Algebra Comput. **30** (06), 1237–1256, (2020).

[39] A. P. Popov, *Identities for the tensor square of the Grassmann algebra*, Algebra and Logic **21**, 442-471, (1982); (Tradução para o Inglês) Algebra and Logic **21**, 296-316, (1982).

[40] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. **11**, 131–152 (1972).

[41] A. Regev, *Tensor products of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra **133** (2), 512-526, (1990).

[42] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23**, 187-188, (1976).

[43] V. V. Shchigolev, *Examples of Infinitely bases T-ideals*, Fund. Prikl. Mat. **5**, 307-312, (1999).

[44] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Math. Zeitschrift **52**, 557-589, (1950).

[45] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26** (2), 601-612, (1998).

[46] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (12), 3517-3524, (1999).

[47] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme* (Em Alemão), Mathematische Annalen **113**, 528-567, (1936).