PRODUTO EDUCACIONAL

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ABORDAGEM DO CONCEITO DE SIMETRIA ATRAVÉS DE UMA DEFINIÇÃO MAIS PRECISA DE VETOR

http://www.pxleyes.com/images/contests/symmetry-2/fullsize/Butterfly-4dba82f50e482_hires.jpg

G. L. Barbosa e J. A. Souza

Sorocaba – SP
Agosto de 2021

PREFÁCIO

Este produto educacional foi elaborado para auxiliar o professor de Física do ensino básico a introduzir conceitos estruturantes e fundamentais da Física, como o de simetria, em um nível introdutório.

Utilizando uma definição mais precisa de vetor, através da demonstração de como as componentes de um vetor arbitrário são transformadas sob a rotação do sistema de coordenadas, mostramos que é possível discutir operações de simetria, o que é um universo homogêneo e isotrópico, invariância de uma propriedade física, entre outros. Pela definição mais precisa de vetor tais conceitos podem ser trabalhados operacionalmente. Nosso intuito é fazer com que o estudante veja a Matemática como uma metodologia essencial para a aprendizagem dos conteúdos de Física e não apenas como um obstáculo para a concretização de sua aprendizagem. Utilizando um sistema físico simples, dado por um bloco deslizando, sem atrito, sobre um plano inclinado sob o efeito exclusivo da força da gravidade, demonstramos analiticamente de maneira convencional, através de conceitos básicos de trigonometria, e utilizando o conceito mais preciso de vetor, como o vetor aceleração do bloco é invariante a partir da consideração de dois sistemas de coordenadas diferentes. A invariância desta propriedade física é apresentada como uma consequência da simetria do espaço.

Todo o desenvolvimento deste produto foi feito em uma linguagem acessível para o professor do ensino médio. Esperamos que esta sequência didática seja útil para motivar tanto os professores quanto os estudantes a verem a importância da Matemática para o desenvolvimento da ciência.

Para dúvidas ou informações adicionais, envie um e-mail para
jasouza@ufscar.br

Os autores.

Este material foi produzido no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba (PROFIS-So)
Sorocaba, agosto de 2021.

SUMÁRIO

1. QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Nesta sequência didática mostramos como é possível explorar o conceito de simetria e operações de simetria através de uma definição mais precisa de vetor. Esta foi dividida em 3 atividades precedidas por um questionário diagnóstico.

O questionário diagnóstico deve ser disponibilizado aos alunos antes do professor apresentar o conteúdo proposto, com o objetivo de mapear o conhecimento dos alunos com relação ao conceito de vetor, principalmente, e verificar se eles têm alguma percepção com relação aos conceitos menos familiares como simetria, isotropia e homogeneidade espaciais, invariância, translação espacial e simulações. Destacamos o conceito de vetor porque a proposta é introduzir um conceito mais preciso desta entidade, em que forneceremos mais informações sobre o mesmo, adicionalmente àquelas adquiridas pelos estudantes em uma definição mais simplificada, dadas pelo módulo, direção e sentido. Dessa forma, o conceito usual e simplificado de vetor pode funcionar como um subsunçor para a introdução do conceito mais preciso.

No questionário sugerido a seguir, o aluno poderá responder cada pergunta através da escolha de uma única resposta de quatro disponíveis: *sim, não, não me lembro* e outra que expressa um certo grau de concordância, como *sim, mas não sei dizer o que é,* ou *sim, mais de uma vez.* As questões propostas são as seguintes:

1. Você já ouviu falar em grandeza vetorial? Você sabe dizer o que é uma grandeza vetorial?
2. Você saberia dizer qual o tipo de grandeza que pode ser considerado uma grandeza vetorial? Por quê?
3. Você já ouviu falar em vetor? Você sabe dizer o que é um vetor?
4. Você já estudou simetria nas aulas de Matemática ou de Arte? Você consegue dizer o que é simetria?
5. Você acha que podemos utilizar a simetria no estudo de Física? Como?
6. Você já ouviu falar sobre isotropia espacial ou espaço isotrópico? Tem ideia do que seja?
7. Você tem alguma ideia sobre o que é homogeneidade espacial ou espaço homogêneo?
8. Você já ouviu falar sobre invariância? Tem noção do que seja?
9. Você já ouviu falar sobre translação espacial? Tem noção do que seja?
10. Em algum momento da sua vida acadêmica (escolar) você já utilizou um simulador interativo para realizar simulações de fenômenos naturais?

Esse questionário pode ser útil também para o professor dar um melhor direcionamento nas atividades propostas e no nível em que os conteúdos devem ser abordados em sala de aula.

2. ATIVIDADE 1: SIMETRIA, ISOTROPIA E HOMOGENEIDADE ESPACIAL

Nesta seção conduzimos o tema de estudo utilizando um discurso razoavelmente socrático para tentar transmitir melhor para o leitor a nossa proposta de como o mesmo pode ser conduzido em sala de aula com os alunos.

Quando iniciamos o desenvolvimento de equações e modelos em uma aula de Física usualmente utilizamos um sistema de coordenadas cartesianas, por exemplo, para definirmos uma origem para o sistema que será estudado, assim como direções, ângulos, sentidos, magnitudes de propriedades físicas, entre outros. É comum também dizermos aos alunos que esse sistema pode ser colocado em qualquer posição do espaço tridimensional que estamos imersos, ou seja, podemos mover a origem do sistema no espaço arbitrariamente sem qualquer prejuízo à nossa análise. Mas por que podemos fazer isso? Por que equacionamos as equações de Newton, por exemplo, livremente, como se as propriedades do sistema que estamos determinando através das mesmas não dependessem da posição em que o sistema é descrito ou da direção na qual as mesmas são medidas? Nós podemos fazer tal asserção?

Sim podemos, mas somente sob a consideração de que o espaço em que estamos analisando o fenômeno físico em estudo é *homogêneo* e *isotrópico*. Mas o que significa isso? Se olharmos no dicionário encontraremos definições do tipo:

Homogêneo: 1. De composição uniforme. **2.** Cujos elementos se equivalem. (FERREIRA, 2010, p. 402).

Isotrópico: Com propriedades físicas idênticas, ou de mesmo valor, independentemente da direção (FERREIRA, 2010, p. 442).

Se pensarmos no meio em que o sistema físico analisado está imerso, este será homogêneo se possuir estrutura, distribuição ou composição uniforme e isotrópico se as propriedades físicas do sistema possuir propriedades físicas com o mesmo valor em diferentes direções.

Dessa forma, se um sistema físico for analisado em um universo homogêneo e isotrópico, este será simétrico sob translações e rotações realizadas em nosso sistema de coordenadas, respectivamente. Isso significa que todos os pontos de um universo homogêneo são similares, pois este possui uma distribuição uniforme, de maneira que se transladarmos, mudarmos de lugar, a origem do nosso sistema de coordenadas de uma posição para outra, ou equivalentemente, mudarmos o próprio sistema físico de lugar, observaremos o mesmo fenômeno. Consequentemente, o sistema físico em estudo poderá ser analisado em qualquer posição de tal forma que suas propriedades físicas não serão modificadas.

Similarmente, todos os ângulos de um universo isotrópico são similares, de maneira que se escolhermos um ponto P do universo, arbitrariamente, e rotacionarmos outros pontos do universo em torno de P, o universo rotacionado coincide com o original, pois as direções neste caso são equivalentes. Isso implica que se rotacionarmos o nosso sistema de coordenadas, ou o próprio sistema físico, as propriedades físicas calculadas ou medidas no sistema rotacionado ou no original serão exatamente as mesmas.

Observem que utilizamos a palavra *simetria* para descrever a homogeneidade e a isotropia do universo. Na verdade, nós falamos em simetria sob translações e rotações, ou seja, descrevemos duas operações de simetria. A palavra simetria é muito familiar para todos nós no nosso dia a dia quando queremos dizer que algo tem uma boa proporção. Vemos simetrias em obras de arte, na música, na literatura, na arquitetura, na beleza que a natureza nos oferece através de plantas e animais e até no corpo humano. Mas a noção de simetria observada em uma música teria o mesmo sentido que a simetria bilateral do rosto de uma pessoa, por exemplo? Notem que no primeiro caso a ideia de simetria está relacionado a algo harmonioso, mais abstrato, envolvendo o que sentimos ao ouvir a música, enquanto que no segundo caso estamos considerando a estrutura do rosto de uma pessoa, que é um conceito geométrico, mais preciso.

Assim como na descrição da homogeneidade e isotropia do universo é possível descrever uma operação de simetria para o rosto ou o corpo de uma pessoa. A simetria bilateral é caracterizada pela operação de reflexão. Se considerarmos um plano passando exatamente no centro de simetria do rosto ou do corpo da pessoa, como se fosse um espelho, cada ponto do lado direito do corpo ou do rosto terá um ponto correspondente à mesma distância deste plano do lado esquerdo. Os ombros ou as orelhas do lado direito, por exemplo, terão a mesma distância dos ombros e das orelhas do lado esquerdo em relação a linha vertical que passa exatamente no centro do corpo da pessoa. Esse mesmo tipo de operação de simetria pode ser observada em uma borboleta ou na arquitetura de uma catedral, como mostrado na figura 1.

Figura 1 – Borboleta e Catedral apresentadas para mostrar as possibilidades de operações de simetria nestes dois sistemas. No primeiro é possível identificar simetria bilateral (linha vertical) e no segundo, além da simetria bilateral com relação ao eixo que passa pelo centro da catedral (linha vertical), é possível identificar diversas outras regiões de simetria nos vitrais, torres, portas e janelas.

Fonte: Borboleta e Catedral disponíveis, respectivamente, em: http://www.pxleyes.com/photography-picture/4dba82f50e482/Butterfly.html e https://www.reddit.com/r/europe/comments/ci1r9u/%C3%A9glise_r%C3%A9form%C3%A9e_saintpaul_strasbourg_france_a/.

Notem que é possível detectar outros planos de reflexão nos vitrais, nas torres e outros lugares da capela. Na sala de aula foram utilizadas figuras geométricas como o retângulo, o quadrado, entre outras, além de objetos como o celular dos próprios alunos, para mostrar para eles as operações de simetria de reflexão e rotação.

Mas como podemos definir simetria cientificamente?

Simetria é uma invariância de um objeto ou sistema sob um conjunto de mudanças, usualmente chamados de transformações ou operações.

Em uma linguagem mais simples, isso significa que um objeto, o qual classificamos cientificamente como um sistema físico, possui simetria se nós podemos fazer alguma mudança no mesmo (transformação), que pode ser uma rotação ou uma translação, por exemplo, de maneira que, após essa mudança, o objeto parece exatamente o mesmo antes de realizarmos a mudança. A isso nós damos o nome de *invariância* (HILL; LEDERMAN, 2000).

Logo, se dissermos que o universo é simétrico, precisamos especificar que tipo de transformação ou operação de simetria deve ser realizada no mesmo de maneira que, após tal mudança, ele aparece exatamente como antes, ou seja, é invariante. Portanto, quando vamos iniciar nossos cálculos e análises de um sistema na sala de aula, usualmente começamos com a consideração de que o universo é simétrico, ou invariante, sob as operações de simetria de translação e rotação.

Podemos arriscar a dizer que simetria é o conceito mais importante da Física. Princípios fundamentais de simetria ditam as leis básicas da Física, o controle da estrutura da matéria e define as interações fundamentais na natureza (HILL; LEDERMAN, 2000). A simetria do universo, dada pela regularidade e harmonia dos fenômenos observáveis, é o que possibilita a existência da ciência. Se não houvesse regularidade no universo não seríamos capazes de estabelecer leis ou mesmo ter tempo suficiente para entender e até manipular os fenômenos existentes na natureza.

Isso pode ficar mais claro ao entendermos a simetria que envolve a translação temporal. Para descrever um evento, como duas partículas colidindo em um acelerador de partículas, o movimento de um pêndulo ou um simples experimento de queda livre, nós utilizamos um sistema de coordenadas tridimensional para o espaço e também uma coordenada extra para o tempo. O tempo marcado no nosso relógio, juntamente com a posição do sistema no espaço, dado por (x, y, z, t), nos possibilita descrever tal evento. A translação temporal está relacionada à evolução do universo no tempo. Matematicamente, isso ocorre quando substituímos o tempo t_i por um novo valor $t_i + T$. O que se observa experimentalmente é que todas as leis da Física, e portanto, todas as equações corretas da Física em um determinado contexto, são invariantes sob a operação de simetria de translação temporal.

É por isso que podemos utilizar as leis de movimento de Newton mesmo centenas de anos após sua descoberta. É por isso que cientistas conseguem reproduzir experimentos, mesmo passados dias, meses ou anos após o primeiro ensaio. As evidências experimentais para tal simetria é muito forte. Além das leis da Física parecerem ser constantes no tempo, os parâmetros básicos da Física como a carga elétrica, a massa eletrônica, a constante de Planck, a velocidade da luz, etc., também parecem ser constantes com o passar dos anos. E isso é constatado em escala astronômica, para grandes distâncias e tempos, e observações geológicas em uma precisão em torno de 10^{-8} ao longo de toda idade do universo (DYSON, 1972).

Uma consequência importantíssima da simetria de translação temporal é o *princípio de conservação de energia*. Desistir dos princípios de simetria implicaria em desistir de princípios básicos e fundamentais para a evolução da ciência, como a conservação de energia.

Portanto, as operações de simetria que utilizamos instintivamente em sala de aula, pois geralmente nós não citamos isso para os alunos, são as translações espacial e temporal, que tem como consequência os princípios de *conservação do momento linear* e *conservação de energia*, respectivamente, e a isotropia espacial, que tem como consequência a *conservação do momento angular*. Em resumo, as leis da Física são invariantes sob as translações espacial e temporal e rotações no espaço. Existem inúmeras outras operações de simetria que podem ser exploradas, principalmente na área de cristalografia (NYE, 1985).

A conexão profunda entre uma simetria das leis da Física e a existência de uma lei de conservação correspondente foi dado pela matemática alemã Emmy Noether em 1905, a qual provou o seguinte teorema (HANC; TULEJA; HANCOVA, 2004):

Para toda simetria contínua das leis da Física, deve existir uma lei de conservação. Para toda lei de conservação, deve existir uma simetria contínua.

A partir da consideração de que o universo é homogêneo e isotrópico, ou seja, este é simétrico sob translações e rotações realizadas em nosso sistema de coordenadas, nós introduzimos, na próxima seção, a definição de vetor sob a rotação do sistema de coordenadas. Antes disso, descrevemos a seguir os objetivos e um questionário sugestivo para o desenvolvimento desta atividade em sala de aula.

2.1 Objetivos

Nossa sugestão é que a atividade 1 seja desenvolvida em duas aulas de 50 minutos. Para o seu desenvolvimento sugerimos que nestas duas aulas sejam introduzidos os conceitos de universo homogêneo e isotrópico, simetria e que seja abordada a importância destes para o estabelecimento e entendimento das leis da Física. Essa discussão pode também fornecer a fundamentação de como devemos desenvolver os cálculos para a análise de fenômenos físicos em sala de aula. Na sequência, é interessante o professor discutir o conceito de simetria e fornecer alguns exemplos simples de operações de simetria que podem ser observadas no cotidiano dos alunos, sempre tentando estabelecer uma relação entre este conceito e o estudo dos fenômenos da natureza para a descrição dos mesmos através das leis da Física.

Para isso, sugerimos a seguir algumas questões disparadoras durante a explicação dos conceitos para cada aula.

PRIMEIRA AULA:

- O que é um sistema de coordenadas? E um par ordenado? Para que serve o sistema de coordenadas na Física?
- O que é homogeneidade? O que é isotropia? Diante de tais conceitos, o que queremos dizer então com universo homogêneo e isotrópico?
- Por que podemos atribuir o zero de energia ou o zero da posição do sistema em qualquer lugar?
- Por que podemos olhar para o sistema em diferentes ângulos e descrever as mesmas leis físicas?
- Se olharmos o sistema de coordenadas por baixo ou por cima, que é o mesmo que o rotacionarmos, a natureza se comportará de maneira diferente e precisaremos de outras leis físicas para descrever o sistema em estudo? Por quê?

SEGUNDA AULA:

- O que vocês entendem quando dizemos que algo é simétrico?
- Por exemplo, quando dizemos que a arquitetura de uma igreja ou prédio exibem uma simetria espetacular, ou que o rosto de um amigo ou amiga de vocês é simétrico, ou que algum animal na natureza possui uma disposição de cores e formas perfeitamente simétricos, o que nós estamos querendo dizer com isso?
- Diante disso, podemos dizer que é possível identificar operações de simetria na natureza ou no nosso cotidiano?
- E no caso do universo homogêneo e isotrópico, existe algum tipo ou tipos de operações de simetria associadas ao mesmo? Quais?
- Qual a importância do conceito de simetria na Física e para a elaboração das leis da natureza? Onde e como podemos identificar a existência da simetria no dia a dia?

2.2 Questionário da Atividade

Para a finalização da atividade sugerimos o questionário a seguir contendo 10 questões dissertativas. Este pode ser respondido digitalmente através dos formulários da Microsoft (*Microsoft Forms*) ou outra plataforma equivalente, como o Google Formulários (*Google Forms*).

1. Descreva, com suas palavras, o que é homogeneidade?
2. Descreva, com suas palavras, o que é isotropia?
3. O que significa dizer que algo é simétrico?
4. O que é simetria?
5. O que são operações de simetria?
6. Descreva, com suas palavras, o que é uma operação de simetria de translação?
7. Descreva, com suas palavras, o que é uma operação de simetria de rotação?
8. O que é um universo homogêneo e isotrópico?
9. Por que podemos colocar o zero do nosso sistema de coordenadas em qualquer lugar quando estamos analisando um sistema físico?
10. Por que podemos olhar para um sistema em diferentes ângulos e descrever as mesmas leis físicas?

3. ATIVIDADE 2: ABORDAGEM DO CONCEITO DE SIMETRIA ATRAVÉS DA DEFINIÇÃO DE VETOR

Em Física nós estamos acostumados a lidar com certas quantidades, como a densidade ou a temperatura de um sistema, as quais não estão conectadas de maneira nenhuma com a direção em que as mesmas são medidas. Com as definições usuais destas propriedades, de fato não tem sentido falar em medir a temperatura ou a densidade do sistema em uma direção específica. As quantidades físicas que são não-direcionais, no sentido citado, são chamadas de *escalares*. O valor de uma propriedade escalar é completamente especificado por um número e a unidade de medida correspondente.

Por outro lado, existem quantidades físicas que podem somente ser definidas com relação a direções. Estas são chamadas de *vetores*. Uma força mecânica ou a força de um campo elétrico são exemplos bem conhecidos de vetores. Para especificar completamente uma grandeza física vetorial, como uma força agindo em um objeto, por exemplo, nós precisamos fornecer a sua magnitude e sua direção. Estas podem ser convenientemente representadas por uma seta de comprimento e direção definidos. Para descrevermos a direção e o sentido (positivo ou negativo) desta grandeza é necessário estabelecermos um sistema de coordenadas. Como discutido na aula anterior, usualmente consideramos um universo homogêneo e isotrópico para realizar tal tratamento.

Na Física, os vetores são úteis para representar grandezas de duas formas distintas. Estes podem representar uma única força agindo em um único ponto, como no caso da força gravitacional agindo no centro de massa de um corpo, representar propriedades de um sistema que se estende pelo espaço, como a velocidade de um fluido variando de ponto a ponto em um dado volume e até mesmo representar a deformação do espaço devido a presença de uma carga elétrica ou um dipolo magnético. Estes últimos casos são referidos usualmente como um *campo vetorial*.

Como já discutido, os vetores podem ser representados por uma seta que especifica sua magnitude e direção. Se considerarmos um espaço tridimensional, o vetor posição $\vec{r}$, por exemplo, pode ser descrito como uma seta que começa na origem $(0,0,0)$ e termina no ponto (x, y, z). Neste caso, o vetor pode ser descrito por $\vec{r} = (x, y, z)$, ou em termos dos versores $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, que formam a base do espaço vetorial cartesiano em três dimensões, $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$.

O professor pode introduzir o conceito de vetor da maneira que achar mais adequada. Para as aulas de Física, esta definição é feita usualmente através de uma propriedade, como uma força mecânica ou a velocidade de um objeto, por exemplo. Esta definição é geralmente suficiente para tratar todos os problemas e fenômenos físicos direcionados para o ensino médio.

Para vislumbrarmos o conceito de simetria utilizando vetores é necessário fornecermos uma definição um pouco mais robusta para estas entidades. Neste trabalho derivamos como as componentes de um vetor são transformadas sob a rotação de um sistema de coordenadas em um universo homogêneo e isotrópico. Na verdade, nós sempre usufruimos deste resultado instintivamente quando discutimos Física em uma sala de aula, mas isso não é demonstrado explicitamente para os alunos. Neste caso específico, não há nenhuma região ou direção do espaço privilegiada, ou seja, as propriedades físicas do sistema que estão sendo analisadas não podem depender da nossa escolha ou orientação do sistema de coordenadas. E isso faz todo sentido, pois não existe nenhuma razão para a natureza responder a um estímulo de maneira diferente apenas porque alteramos a maneira de descrever um fenômeno matematicamente através de um sistema de coordenadas ou outro. Ou seja, qualquer previsão física que venha a ser feita durante a análise de um sistema precisa ser independente das nossas convenções matemáticas.

Apesar de já termos fornecido alguma justificativa no parágrafo anterior, o professor ainda pode estar se perguntando: Se a definição usual de vetor é suficiente para os propósitos de ensino de Física em sala de aula, por que discutir sobre uma definição mais robusta? O conceito de simetria pode ser introduzido apenas com figuras simétricas, como as apresentadas na seção anterior. O que ganhamos com isso? E por que abordar isso em um nível de ensino básico, como o ensino médio?

Com relação as duas primeiras perguntas, o problema reside no fato de que algumas propriedades físicas observadas em diferentes materiais, principalmente meios anisotrópicos, como constantes elásticas, índices de refração, condutividade elétrica, etc., possuem magnitude e direção mas não são vetores. Pelas discussões anteriores, um meio anisotrópico é aquele em que não possui simetria de rotação, ou seja, se rotacionarmos o nosso sistema de coordenadas veremos um sistema diferente, respondendo de maneira diferente a estímulos externos com relação a direção de aplicação dos mesmos. Os cristais são exemplos típicos de meios anisotrópicos. As propriedades de meios como estes são descritas por tensores e neste caso, devemos necessariamente especificar tanto a magnitude quanto a direção em que as propriedades são medidas, uma vez que as direções do meio não são equivalentes. Falaremos um pouco mais sobre tensores no próximo parágrafo. Com relação a terceira pergunta, a introdução deste tema no ensino básico fornece a oportunidade para o professor discutir a Física de uma maneira mais ampla, como no caso das propriedades de materiais, além de fornecer as bases matemáticas da Física, justificando o que fazemos em sala de aula ao equacionarmos um problema e também introduzir conceitos fundamentais para o desenvolvimento da ciência, como o de simetria, de maneira conceitual e operacional.

Com relação aos tensores, podemos pensar nos mesmos como um conceito mais geral para a definição de propriedades físicas, incluindo grandezas escalares, vetoriais e aquelas observadas em meios anisotrópicos, que não são nem escalares e nem vetores. Particularmente, um escalar é um tensor de ordem zero e um vetor é um tensor de primeira ordem ou ordem 1 (ARFKEN; WEBER, 2005; NETO, 2010). A ordem do tensor define o número de componentes do mesmo. Para um espaço tridimensional, com 3 eixos coordenados, uma propriedade escalar é descrita por $3^0 = 1$ componente apenas, ou seja, um único número e uma unidade de medida é suficiente para descrevê-la completamente, como discutido anteriormente. Já um vetor neste espaço, por ser um tensor de ordem 1, é descrito por $3^1 = 3$ componentes, as quais especificarão a direção e o sentido do vetor. Se considerarmos um vetor no espaço bidimensional, teremos $2^1 = 2$ componentes. Vemos então que a ordem n do tensor define o número de componentes NC necessários para especificá-lo em um espaço de D dimensões, ou seja, $NC = D^n$.

Mas existem propriedades que precisam de mais de três componentes no espaço tridimensional para serem especificadas? Sim, como discutido, em meios anisotrópicos em que as direções não são equivalentes precisamos de mais componentes. Para descrevermos uma propriedade física representada por um tensor de ordem 2, por exemplo, precisamos de $3^2 = 9$ componentes. Exemplos de propriedades como esta são a condutividade térmica, a susceptibilidade elétrica, a permissividade elétrica, a permeabilidade magnética, entre outras.

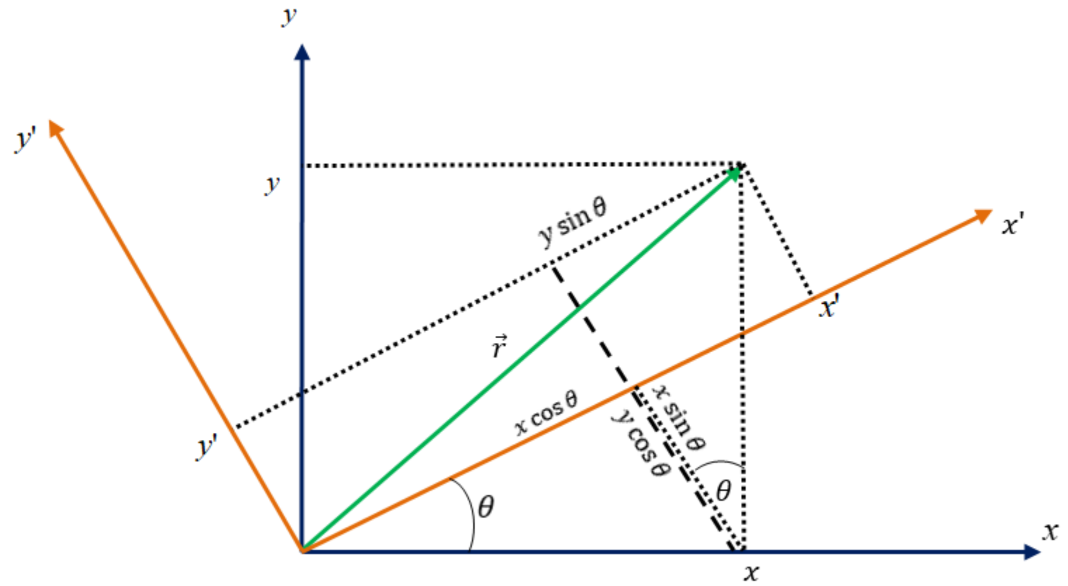
A susceptibilidade elétrica, por exemplo, descreve a resposta do meio à aplicação de um campo elétrico. Um cristal pode ser polarizado em uma direção pela aplicação de um campo elétrico em uma determinada direção, que pode ser a mesma da polarização ou não. Mas a polarização do cristal (meio) pode não existir ou ser medida com intensidade e direção diferentes se a direção do campo elétrico for modificada. Para descrevermos a resposta do meio (polarização) em relação a aplicação de um estímulo externo (campo elétrico) é necessária uma propriedade, dada pela susceptibilidade elétrica, com nove componentes no espaço tridimensional, pois a aplicação de um campo elétrico na direção-*x*, por exemplo, não implica necessariamente uma polarização nesta mesma direção. Esta pode ser medida nas direções *y* ou *z*. Existem propriedades físicas que podem ser representadas por tensores de ordem maior do que dois, como a piezoeletricidade e propriedades elásticas, as quais são descritas por tensores de terceira e quarta ordem, respectivamente (NYE, 1985).

Através de uma definição mais precisa de vetor é possível identificar se uma grandeza física é realmente um vetor, pois esta será independente da direção do sistema de coordenadas. Na verdade, os vetores acabam funcionando como identificadores de meios isotrópicos. O vácuo é um exemplo real de meio isotrópico. Por isso falamos tanto em vetores na Física tratada em sala de aula, pois usualmente os sistemas discutidos são considerados no vácuo. Propriedades como a permissividade elétrica ε_0 e a permeabilidade magnética μ_0 do vácuo são consideradas como constantes, ou seja, estas são representadas por tensores de ordem zero (escalares) porque são descritas em um meio isotrópico, em que todas as direções são equivalentes. Se considerarmos a força de Coulomb entre duas cargas situadas no vácuo ou a velocidade da luz no vácuo, por exemplo, estas serão sempre as mesmas independentemente da direção em que as mesmas são medidas.

3.1 Rotação do Sistema de Coordenadas

Para trabalharmos o conceito de vetor de maneira mais precisa, vamos considerar um vetor $\vec{r}$ em duas dimensões, por simplicidade, representando uma propriedade física qualquer em um meio isotrópico através de dois sistemas de coordenadas diferentes, um rotacionado S' em relação a outro S, como ilustrado na figura 3.2.

Figura 2 – Sistema de coordenadas $S' = \{x', y'\}$ rotacionado por um ângulo θ em relação ao sistema de coordenadas $S = \{x, y\}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que é considerada a rotação dos eixos coordenados de $S = \{x, y\}$ no sentido anti-horário por um ângulo θ, mantendo o vetor $\vec{r}$ fixo, de maneira que a relação das coordenadas do sistema $S' = \{x', y'\}$ podem ser escritas em função das coordenadas de S da seguinte forma:

$$x' = x\,cos(\theta) + y\,sen(\theta) \qquad (1a)$$

$$y' = -\,x\,sen(\theta) + y\,cos(\theta) \qquad (1b)$$

Note que o vetor $\vec{r}$ no nosso sistema de referência cartesiano começa na origem. Pela invariância translacional, discutida anteriormente, poderíamos representar o início do vetor em qualquer ponto do sistema sem afetar a geometria do mesmo. O interessante de considerar o vetor na origem é que o mesmo irá terminar no ponto (x, y). Logo, podemos nos referir ao vetor através de $\vec{r}$ ou de suas componentes (x,y). Consequentemente, pelas equações (1), as componentes de um vetor, sob a rotação do sistema de coordenadas, precisam se transformar como as coordenadas de um ponto.

Isso significa que qualquer vetor $\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$ precisa transformar suas componentes, sob a rotação do sistema de coordenadas, como:

$$A'_x = A_x\,cos(\theta) + A_y\,sen(\theta) \qquad (2a)$$

$$A'_y = -\,A_x\,sen(\theta) + A_y\,cos(\theta) \qquad (2b)$$

A primeira informação sobre vetores que os alunos recebem é que estes são grandezas com módulo, direção e sentido. Mas vimos anteriormente que nem tudo que possui tais propriedades são vetores. Podemos caracterizar um vetor de maneira mais precisa olhando apenas para as suas componentes. Dizemos que as componentes A_x e A_y constituem um vetor $\vec{A}$ se estas se transformarem conforme as equações (2) sob a rotação do sistema de coordenadas. Ou seja, se A_x e A_y não apresentam esta forma invariante, quando o sistema de coordenadas é rotacionado, estes não formam um vetor.

As componentes de $\vec{A}$ em um sistema de coordenadas particular é a representação de $\vec{A}$ naquele sistema de coordenadas. As relações de transformação, dadas pelas equações (2), são uma garantia de que uma propriedade física representada por $\vec{A}$ seja independente da rotação do sistema de coordenadas, pois estamos considerando um universo isotrópico, ou seja, simétrico com relação a operação de rotação.

As componentes de um campo vetorial A_x e A_y, satisfazendo as equações (2), associam uma magnitude A e uma direção com cada ponto do espaço. A magnitude é uma quantidade escalar, que é invariante sob a rotação do sistema de coordenadas. A direção relacionada a S, da mesma forma é invariante sob a rotação do sistema de coordenadas. Vemos com isso que, apesar das componentes de um vetor poderem variar com a rotação do sistema de coordenadas S, como mostrado nas equações (2), as componentes transformadas A'_x e A'_y, relativas a S', definem um vetor com a mesma magnitude e a mesma direção do vetor definido pelas componentes A_x e A_y em relação a S.

Com esta abordagem é possível descrever precisamente o conceito de simetria apresentado na seção 2:

Simetria é uma invariância de um objeto ou sistema sob um conjunto de mudanças, usualmente chamados de transformações ou operações.

O objeto neste caso é um vetor, que pode representar uma propriedade física do sistema em estudo, e a operação realizada é a rotação do sistema de coordenadas, de maneira que, uma propriedade física se mantém a mesma, ou seja, é invariante, sob a rotação do sistema de coordenadas em um espaço isotrópico.

A caracterização de vetor de maneira mais precisa, em termos de como suas componentes são transformadas sob uma rotação do sistema de coordenadas é mais útil e apropriada para a descrição do mundo físico, pois é possível mostrar que as equações vetoriais são independentes de qualquer sistema de coordenadas particular. É importante que isso seja discutido e mostrado para os alunos porque para obtermos resultados analíticos nós precisamos necessariamente expressar a equação através de um sistema de coordenadas específico.

Na próxima atividade mostramos a invariância de uma propriedade física através do exemplo conhecido de um bloco deslizando sobre um plano inclinado. Nós calculamos a aceleração do bloco a utilizando os mesmos sistemas de coordenadas S e S' usados para a descrição de vetor de forma mais precisa, demonstrando matematicamente que $\vec{a} = \vec{a}'$, como consequência da simetria do espaço.

3.2 Objetivos

Nossa proposta é que a atividade 2 seja desenvolvida em 4 aulas de 50 minutos. Nestas aulas sugerimos que sejam discutidos e apresentados os conceitos de grandezas físicas escalares (temperatura, tempo, energia, etc.) e vetoriais (velocidade, aceleração, força, etc.), a equação vetorial dada pela segunda lei de Newton e a definição mais precisa de vetor através da rotação do sistema de coordenadas. Para este último procedimento é importante que os alunos tenham alguma noção sobre espaço vetorial para a realização de operações vetoriais, como adição, subtração, multiplicação por escalar e também noções de trigonometria para a realização de projeção de vetores. Caso os alunos ainda não tenha visto estes tópicos, recomendamos o livro texto destinado a unidade de ensino em que a proposta foi aplicada, “Física 1: mecânica”, de autoria de Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola e Newton Vilas Bôas, veja o capítulo 4 intitulado “Vetores e Cinemática Vetorial” (DOCA; BISCUOLA; BÔAS, 2016).

Nesta atividade utilizamos sempre que possível os simuladores da plataforma *PhET* para representação de vetores, versores, projeção de vetores e operações vetoriais. Na figura 3 apresentamos um exemplo de simulação que pode ser conduzido para as operações de adição e subtração de vetores. A segunda aula foi dedicada para a apresentação e utilização dos simuladores *PhET*.

As questões disparadoras de cada aula são sugeridas e descritas abaixo.

PRIMEIRA AULA:

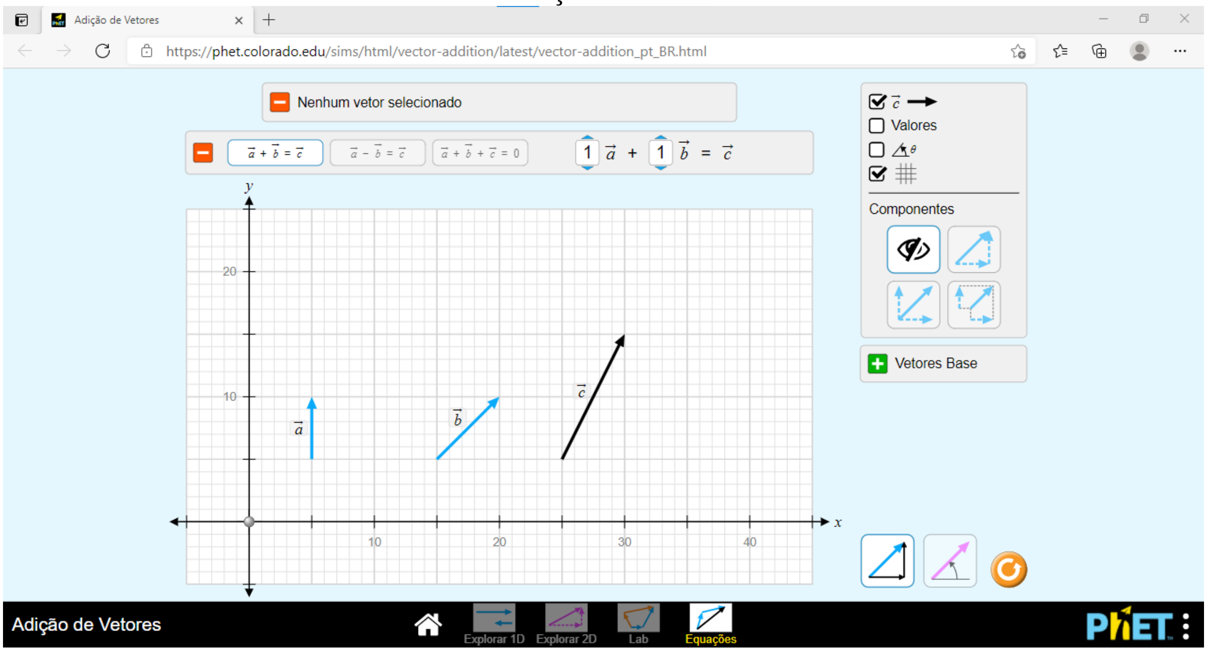
- O que é um escalar?
- O que é um vetor?
- O que um escalar representa na matemática e na descrição de um vetor?
- O que é um versor?

SEGUNDA AULA:

- O que é uma simulação?
- O que é uma simulação computacional?
- Você já utilizou uma plataforma de simulação interativa para realizar simulações de fenômenos da natureza? Especifique.
- Você conhece a plataforma de simulações interativas *PhET*? Você já fez alguma simulação nesta plataforma? Qual?

- Na sua opinião, as aulas de Física deveriam ser complementadas com simulações interativas, como as da plataforma *PhET*? Por quê?

Figura 3 – Layout da página da web da plataforma *PhET* para simular as operações de adição e subtração de vetores.



Fonte: PhET, disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/vector-addition/latest/vector-addition_pt_BR.html. Acesso dia: 16 jul. 2021.

TERCEIRA AULA:

- O que é uma grandeza?

- O que é uma grandeza física?

- Diante das definições de escalar e vetor o que são grandezas escalares e vetoriais?

- A força é uma grandeza escalar ou vetorial? Por quê?

- O que é aceleração? Existe alguma relação entre aceleração e velocidade? A velocidade é uma grandeza vetorial?

- Quando um motorista pisa no acelerador do carro, o que acontece? E quando ele tira o pé do acelerador? A aceleração é uma grandeza vetorial? Por quê?

- O que é necessário para que um bloco ou um objeto comece a se movimentar? O que é preciso saber para determinar a intensidade da força necessária para movimentar um corpo?

QUARTA AULA:

- Como podemos definir vetor de maneira mais precisa?

- Por que estudar uma definição mais precisa de vetor na Física ensinada no ensino médio?

- Qual a implicação dos conceitos de universo homogêneo e isotrópico na definição de vetor?
- Todas as grandezas que possuem magnitude, direção e sentido podem ser definidas como grandezas vetoriais?
- Em que condições uma grandeza que, apresenta as mesmas características de uma grandeza vetorial, não pode ser considerada um vetor?

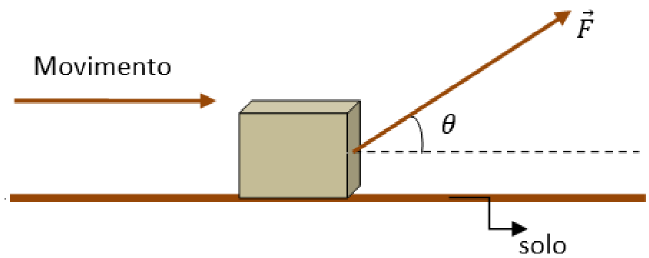
A seguir apresentamos um questionário sugestivo para a atividade, com o intuito de preparar os alunos para a demonstração da invariância de uma propriedade física vetorial, dada pela aceleração de um bloco deslizando em um plano inclinado, no espaço isotrópico a partir do conceito mais preciso de vetor descrito pelas equações (2).

3.3 Questionário da Atividade

1. Num plano-xy, temos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com origens coincidentes, formando um ângulo θ entre si. Se os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são, respectivamente, iguais a 3 e 4, determine o módulo do vetor soma em cada um dos seguintes casos:

a) $\theta = 0°$ b) $\theta = 90°$ c) $\theta = 180°$ d) $\theta = 60°$ e) $\theta = 30°$

2. Considere um bloco de massa $m = 6{,}0\ kg$ se deslocando na direção horizontal. Este sofre a ação de uma força $\vec{F}$, cuja intensidade é $F = 80\ N$, conforme mostrado na figura.

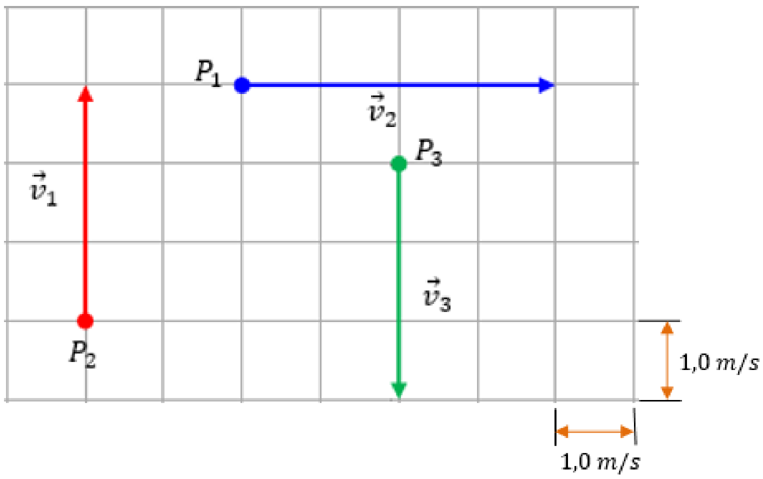


O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o solo é $\mu_d = 0{,}40$. Adote $g = 10\ m/s^2$, $sen(\theta) = 0{,}60$, $\cos(\theta) = 0{,}80$ e obtenha a aceleração do bloco.

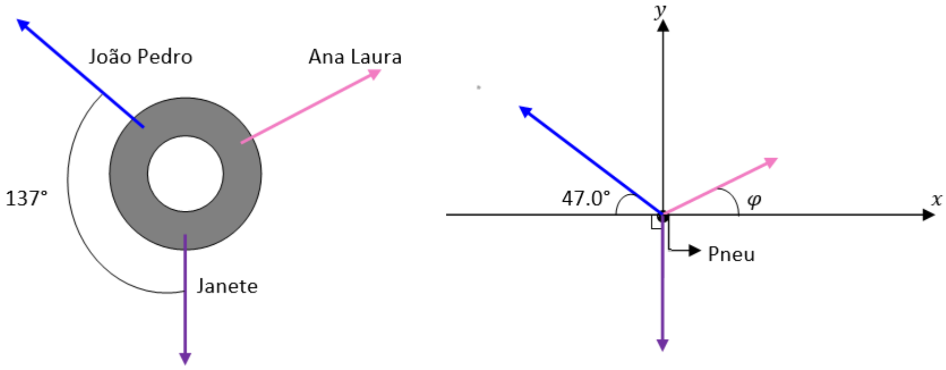
3. As velocidades vetoriais $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ de uma partícula nos instantes $t_1 = 0$, $t_2 = 2s$ e $t_3 = 5s$, respectivamente, estão representadas na figura. Determine o módulo da aceleração (vetor resultante) nos seguintes intervalos de tempo:

a) de t_1 a t_2;

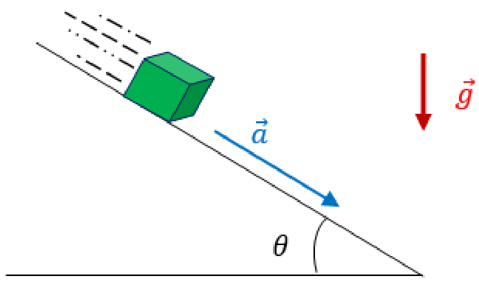
b) de t_1 a t_3.



4. Em uma brincadeira de cabo de guerra, João Pedro, Janete e Ana Laura puxam um pneu de automóvel na direção horizontal, segundo os ângulos indicados na figura, que é mostrada com uma vista superior. Apesar da ação das três forças o pneu permanece imóvel. João Pedro puxa o pneu aplicando sobre ele uma força $\vec{F}_{JP}$, de intensidade 200 N, e Ana Laura puxa o pneu aplicando sobre o mesmo uma força $\vec{F}_{AL}$ de intensidade 150 N. Encontre a intensidade da força que Janete aplica sobre o pneu $\vec{F}_J$.



5. Um bloco de massa $m = 5{,}0\ kg$ é abandonado do topo de um plano inclinado como indicado na figura. O bloco desce em movimento acelerado com aceleração de módulo $|\vec{a}|$. O ângulo formado pela inclinação do plano em relação a horizontal é dado por $\theta = 30°$ e o módulo da aceleração da gravidade é $g = 10\ m/s^2$.

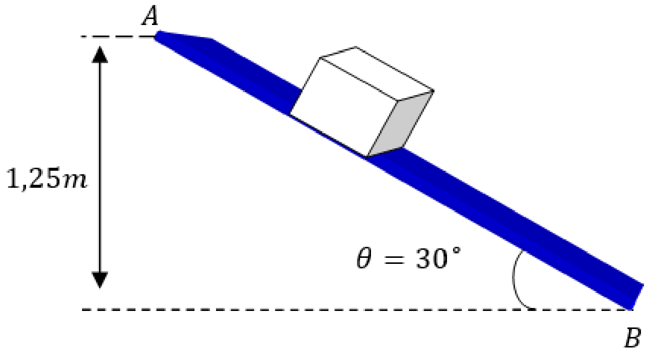


Desprezando o atrito entre o bloco e a superfície e a resistência do ar sobre o bloco:

a) encontre o módulo da aceleração $\vec{a}$.

b) esboce o gráfico do módulo de $\vec{a}$ em função do ângulo θ e o gráfico do módulo de $\vec{a}$ em função da massa m.

6. Um corpo de massa m igual a 40,0 kg parte do repouso do ponto A no topo do escorregador indicado na figura. Este desce livre da ação de atritos e da resistência do ar.



Considerando a intensidade da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, encontre:

a) o módulo da aceleração adquirida pelo corpo e descreva se o valor encontrado depende ou não de sua massa;

b) o intervalo de tempo gasto pelo corpo para realizar o percurso de A até B;

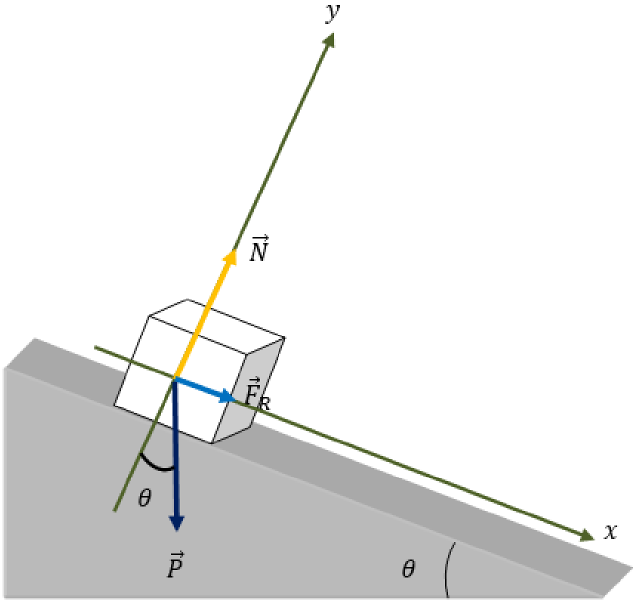
c) a velocidade com que o corpo chega ao ponto B.

4. ATIVIDADE 3: DEMONSTRAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE UMA PROPRIEDADE FÍSICA VETORIAL NO ESPAÇO ISOTRÓPICO

Nesta atividade demonstramos a invariância de uma propriedade física vetorial no espaço isotrópico através de cálculos usualmente desenvolvidos no ensino médio, como soma e subtração de vetores, projeção de vetores, versores, teorema de Pitágoras e relações trigonométricas e em seguida esta demonstração é feita utilizando-se o conceito mais preciso de vetor relacionado à transformação de suas componentes sob a rotação do sistema de coordenadas.

Para isso consideramos um bloco de massa m, deslizando sem atrito sobre um plano inclinado por um ângulo θ, conforme ilustração apresentada na figura 4. As forças que atuam no bloco são a força peso $\vec{P}$ e a força normal $\vec{N}$, exercida pela superfície do plano. A força resultante é denotada por $\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{N}$. A propriedade a ser determinada é a aceleração do bloco.

Figura 4 – Diagrama das forças atuantes em um bloco de massa m sobre o plano inclinado considerando o sistema de coordenadas S = {x, y}.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O primeiro passo é determinar a orientação do movimento do bloco de acordo com o sistema de coordenadas escolhido. Como o meio considerado é isotrópico podemos fazer isso de maneira arbitrária. Vamos considerar inicialmente o eixo-x ao longo da superfície do plano inclinado, com o sentido positivo na direção do movimento do bloco, que desliza para baixo sob a ação da gravidade, como mostrado na figura 4.

Para determinarmos a aceleração do bloco $\vec{a}$ é conveniente expressarmos a força resultante no bloco nas direções x e y, ou seja, $\vec{F}_R = \vec{F}_{Rx} + \vec{F}_{Ry}$. Como estamos considerando o eixo-x na direção do movimento do mesmo, obtemos imediatamente que $\vec{F}_R = \vec{F}_{Rx}$, ou seja, $\vec{F}_{Ry} = 0$.

Uma vez que a força normal está na direção do eixo-y, a força resultante na direção-x é dada apenas pela componente da força peso nesta mesma direção, ou seja,

$$\vec{F}_{Rx} = \vec{P}_x = m\vec{a}_x \,, \tag{3}$$

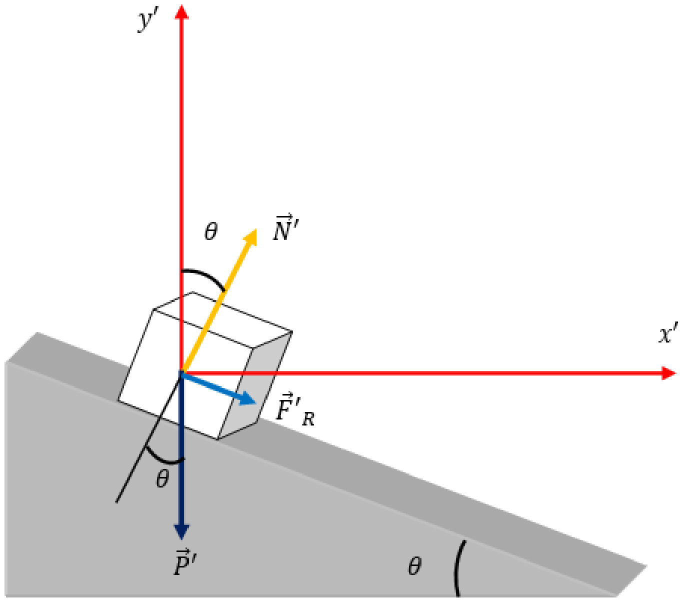
sendo $\vec{P}_x = mg\, sen(\theta)\hat{\imath}$, de maneira que:

$$\vec{a} = \vec{a}_x = \ g\, sen(\theta)\hat{\imath} \,, \tag{4}$$

cujo módulo é dado por $|\vec{a}| = a = \ g\, sen(\theta)$.

Vamos considerar agora o sistema de coordenadas S' = {x', y'}, como mostrado na figura 5.

Figura 5 – Sistema de coordenadas $S' = \{x', y'\}$ utilizado para o cálculo da aceleração $\vec{a}'$ do bloco. Note que o sistema S' pode ser identificado como o sistema S rotacionado por um ângulo θ, que é o mesmo ângulo de inclinação do plano.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso nenhum dos eixos coordenados estão na direção do movimento do bloco, o eixo-*x* é paralelo à base do plano inclinado e o eixo-*y* perpendicular à mesma. Como estamos trabalhando em um meio isotrópico devemos obter, necessariamente, $\vec{a}' = \vec{a}$, independentemente da orientação do eixo de coordenadas. Para mostrar isso vamos considerar o cálculo de $\vec{a}'$ através de relações trigonométricas e em seguida utilizando o conceito mais preciso de vetor, descrito pelas transformações (2). Nos cálculos que seguem, assim como na figura 5, utilizamos o apóstrofo nos vetores $\vec{N}', \vec{P}'$ e $\vec{F}_{R'}$ apenas para diferenciar dos cálculos anteriores no referencial *S*, pois estes são os mesmos vetores, uma vez que são mantidos fixos em ambos os referenciais considerados.

Vamos proceder de maneira semelhante ao que fizemos para o sistema de coordenadas *S*, decompondo a força resultante nas componentes *x'* e *y'*, ou seja, $\vec{F}_{R'} = \vec{F}_{Rx'} + \vec{F}_{Ry'}$. Analisando a figura 5 tem-se que $\vec{F}_{Rx'} = \vec{N}_{x'}$ e $\vec{F}_{Ry'} = \vec{P}' + \vec{N}_{y'}$, cujos módulos são dados por $F_{Rx'} = N_{x'}$ e $F_{Ry'} = N_{y'} - P'$, respectivamente.

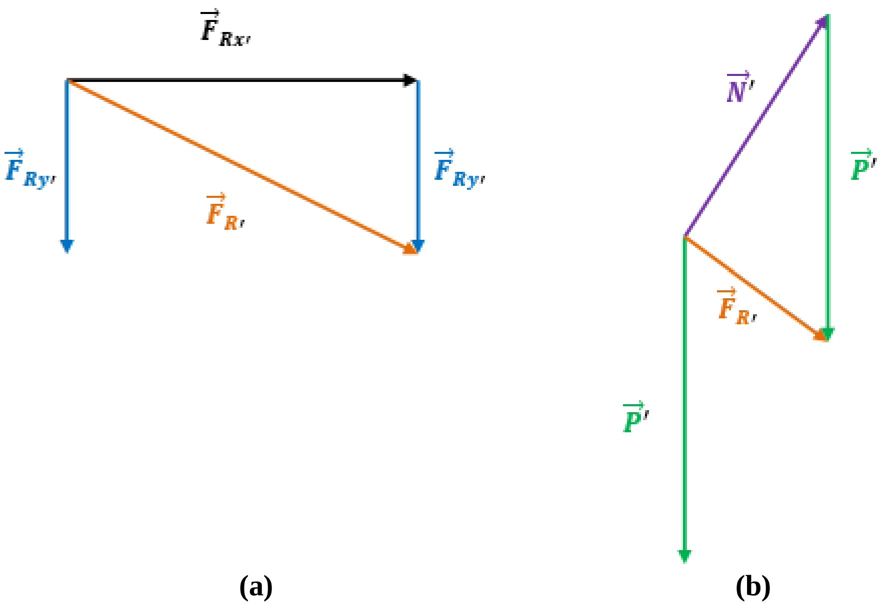
Fazendo a projeção da força normal tem-se que $\vec{N}_{x'} = N' \, sen(\theta) \, \hat{\imath}'$ e $\vec{N}_{y'} = N' \cos(\theta) \, \hat{\jmath}'$, de maneira que a força resultante pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{R'} = N' \, sen(\theta) \, \hat{\imath}' + [N' \cos(\theta) - mg] \, \hat{\jmath}' \, , \tag{5}$$

em que utilizamos $P' = mg$.

Pela equação (5) vemos que para determinar a força resultante em S', e consequentemente a aceleração $\vec{a}'$, precisamos determinar o módulo da força normal N'. Como $\vec{a}_{x'}$ e $\vec{a}_{y'}$ são diferentes de zero neste referencial é necessário explorar o conceito de módulo de um vetor $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ para obtenção de N'. Caso os alunos não tenham familiaridade com este conceito, o professor pode explorar o teorema de Pitágoras com os vetores representados na figura 5, pois o conceito é o mesmo. Nota-se que tanto a força resultante com suas componentes quanto os vetores $\vec{N}', \vec{P}'$ e $\vec{F}_{R'}$ formam triângulos retântulos, como mostrado na figura 6 (a) e (b), respectivamente.

Figura 6 – (a) Triângulo retângulo formado pelo vetor força resultante com suas componentes e (b) triângulo retângulo formado pelos vetores $\vec{N}', \vec{P}'$ e $\vec{F}_{R'}$, de acordo com a figura 5. Estes podem ser utilizados para calcular a magnitude N' do vetor força normal através do teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo triângulo retângulo apresentado na figura 6 (a) podemos escrever,

$$F_{R'}^2 = F_{Rx'}^2 + F_{Ry'}^2 \,. \tag{6}$$

Substituindo as componentes de $\vec{F}_{R'}$, equação (3.5), na equação (3.6) obtém-se:

$$F_{R'}^2 = [N' \, sen(\theta)]^2 + [N' \cos(\theta) - mg]^2$$

$$F_{R'}^2 = N'^2[sen^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + P'^2 - 2P'N' \cos(\theta)$$

$$\therefore \; F_{R'}^2 = N'^2 + P'^2 - 2P'N' \cos(\theta), \tag{7}$$

em que utilizamos a relação fundamental $sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

Considerando agora o triângulo retângulo da figura 6 (b) tem-se:

$$P'^2 = N'^2 + F_{R'}^2 \,,$$

$$\therefore \;\; F_{R'}^{2} = N'^{2} - P'^{2}. \tag{8}$$

Substituindo a equação (7) em (8) e sendo $P = mg$ pode-se mostrar facilmente que,

$$2N'[N' - mg\,cos(\theta)\,] = 0. \tag{9}$$

A equação (9) admite duas soluções físicas. Para $N' = 0$, a superfície não exerce nenhuma força sobre o bloco, ou seja, não há contato entre os dois. Esta não é a situação física que estamos considerando, pois o bloco desliza sobre o plano. Dessa forma, a solução que nos interessa é dada por $N' - mg\,cos(\theta) = 0$, o que nos fornece para o módulo da força normal:

$$N' = mg\,cos(\theta). \tag{10}$$

No referencial *S* podemos obter este resultado imediatamente. Como $\vec{F}_{Ry} = 0$, tem-se que $\vec{N} + \vec{P}_y = 0$, ou em módulo $N - mg\,cos(\theta) = 0$, o que fornece $N = mg\,cos(\theta)$, e portanto, $N = N'$, como esperado.

Substituindo o resultado (10) na equação (5) tem-se,

$$\vec{F}_{R'} = m\vec{a}' = mg\,cos(\theta)\,sen(\theta)\,\hat{\imath}' + [mg\,cos^2(\theta) - mg]\,\hat{\jmath}',$$

$$\vec{F}_{R'} = m\vec{a}' = mg\,cos(\theta)\,sen(\theta)\,\hat{\imath}' - mg\;sen^2(\theta)\;\hat{\jmath}'\,, \tag{11}$$

em que utilizamos a relação $sen^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta)$ na componente $\hat{\jmath}'$.

Logo, a aceleração do bloco no referencial *S'* pode ser escrita como:

$$\vec{a}' = g\,sen(\theta)\,[cos(\theta)\;\hat{\imath}' - sen(\theta)\,\hat{\jmath}']\,. \tag{12}$$

Para mostrarmos que $\vec{a}' = \vec{a}$ precisamos mostrar que a magnitude das acelerações obtidas nos dois referenciais são as mesmas $|\vec{a}'| = |\vec{a}|$ e que a direção de $\vec{a}'$, dada por (12), é compatível com a direção de $\vec{a}$, dada por (4). Já obtemos anteriormente que $|\vec{a}| = g\,sen(\theta)$. Pela definição de módulo de um vetor ou considerando o triângulo retângulo dado por $\vec{a}' = \vec{a}_{x'}\,\hat{\imath}' + \vec{a}_{y'}\,\hat{\jmath}'$, o módulo da aceleração do bloco no referencial *S'* pode ser obtido através da equação (12), ou seja,

$$|\vec{a}'| = \sqrt{g^2\,sen^2(\theta)[cos^2(\theta) + sen^2(\theta)]}\,,$$

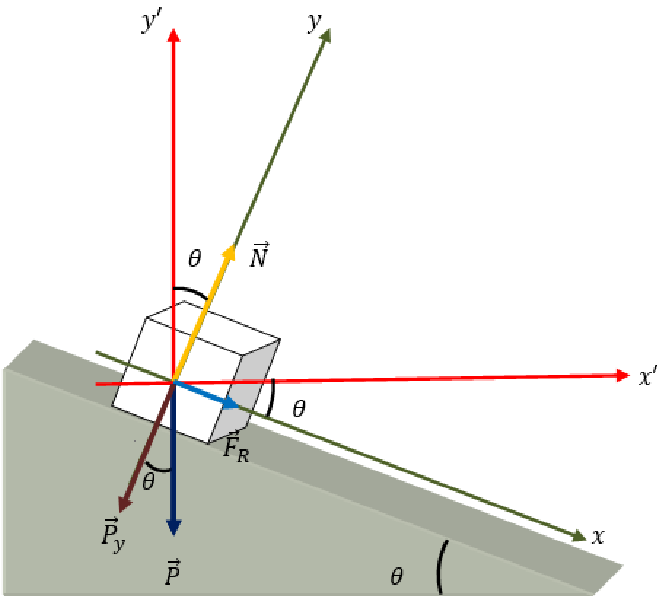
$$|\vec{a}'| = g\,sen(\theta),$$

$$\therefore \;\; |\vec{a}'| = |\vec{a}|\,. \tag{13}$$

Agora, precisamos verficar que a direção da aceleração do bloco no referencial *S*, dada por $\hat{\imath}$, é compatível com a direção da mesma no referencial *S'*, dada por $cos(\theta)\;\hat{\imath}' - sen(\theta)\,\hat{\jmath}'$.

Para checar este resultado vamos escrever os versores $\hat{\imath}'$ e $\hat{\jmath}'$ do referencial *S'* em função dos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ do referencial *S* utilizando a figura 7.

Figura 7 – Representação dos dois sistemas de coordenadas *S* = {*x*, *y*} e *S'* = {*x'*, *y'*} no problema proposto para descrevermos os versores de *S'* em função dos versores de *S* para verificar se a direção da aceleração do bloco obtida em ambos os sistemas são compatíveis.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomando então a projeção do versores de *S'* na direção dos versores de *S* tem-se:

$$\hat{\imath}' = |\hat{\imath}'|\, cos(\theta)\, \hat{\imath} + |\hat{\imath}'|\, sen(\theta)\, \hat{\jmath}, \tag{14a}$$

$$\hat{\jmath}' = -\,|\hat{\jmath}'|\, sen(\theta)\, \hat{\imath} + |\hat{\jmath}'|\, cos(\theta)\, \hat{\jmath}. \tag{14b}$$

Multiplicando a equação (14a) por $cos(\theta)$ e a equação (14b) por $-\,sen(\theta)$,

$$cos(\theta)\, \hat{\imath}' = cos^2(\theta)\, \hat{\imath} + cos(\theta)\, sen(\theta)\, \hat{\jmath}, \tag{15a}$$

$$-\,sen(\theta)\, \hat{\jmath}' = sen^2(\theta)\, \hat{\imath} - sen(\theta)\, cos(\theta)\, \hat{\jmath}, \tag{15b}$$

uma vez que o módulo de um versor é igual a 1. Somando as equações (15a) e (15b) obtemos finalmente:

$$\hat{\imath} = cos(\theta)\ \hat{\imath}' - sen(\theta)\, \hat{\jmath}'. \tag{16}$$

A equação (16) mostra, portanto, que a direção da aceleração no referencial *S* é compatível com a direção da aceleração no referencial *S'*, ficando demonstrado definitivamente que $\vec{a}' = \vec{a}$, como esperado, uma vez que estamos trabalhando em um espaço simétrico em que todas as direções são equivalentes, ou seja, isotrópico.

Vamos mostrar agora que todo o desenvolvimento feito para obenção de $\vec{a}'$ pode ser significativamente simplificado através do uso do conceito mais preciso de vetor dado pelas transformações (2). Para isso basta o professor mostrar geometricamente para os alunos que o referencial *S'* é o referencial *S* rotacionado no sentido anti-horário por um ângulo *θ*, dado pelo ângulo de inclinação do plano sobre o qual o bloco desliza sob o efeito da gravidade.

Considerando então $\vec{A}' = \vec{a}'$ e $\vec{A} = \vec{a}$ nas equações (2), podemos escrever as componentes da aceleração do bloco no referencial *S'* em função das mesmas no referencial *S* como,

$$a'_x = a_x\, cos(\theta) + a_y\, sen(\theta)\,, \tag{17a}$$

$$a'_y = -\, a_x\, sen(\theta) + a_y\, cos(\theta)\,. \tag{17b}$$

Sendo $a_x = g\, sen(\theta)$ e $a_y = 0$, obtemos:

$$a'_x = g\, sen(\theta)\, cos(\theta)\,,$$

$$a'_y = -\, g\, sen^2(\theta)\,,$$

$$\therefore\ \vec{a}' = g\, sen(\theta)\, cos(\theta)\, \hat{\imath}' - g\, sen^2(\theta)\, \hat{\jmath}', \tag{18}$$

ou equivalentemente $\vec{a}' = \ g\, sen(\theta)\ [cos(\theta)\ \hat{\imath}' - sen(\theta)\ \hat{\jmath}']$ em concordância com a equação (12).

Para verificar a compatibilidade da direção de $\vec{a}'$ com a direção de $\vec{a}$ também podemos utilizar o conceito mais preciso de vetor. Uma vez que os versores são os vetores geradores de qualquer vetor de um espaço vetorial, eles fornecerão a direção de cada componente do vetor correspondente. Dessa forma, podemos substituir as componentes A'_x e A'_y nas equações (2) pelos versores $\hat{\imath}'$ e $\hat{\jmath}'$, respectivamente. Procedendo da mesma forma para as componentes no sistema *S*, tem-se:

$$\hat{\imath}' = \hat{\imath}\, cos(\theta)\ + \hat{\jmath}\, sen(\theta), \tag{19a}$$

$$\hat{\jmath}' = -\, \hat{\imath}\, sen(\theta)\ + \hat{\jmath}\, cos(\theta), \tag{19b}$$

que são exatamente as mesmas equações (14) obtidas anteriormente. Fazendo as mesmas manipulações desenvolvidas em (15) obtemos a equação (16) que mostra que $\vec{a}' = \vec{a}$.

Após o desenvolvimento dos cálculos o professor pode retomar o conceito de simetria descrito anteriormente, "s*imetria é uma invariância de um objeto ou sistema sob um conjunto de mudanças, usualmente chamados de transformações ou operações*", e discutir a invariância da propriedade física calculada, dada pela aceleração do bloco, devido a rotação do sistema de coordenadas *S* por um ângulo igual ao ângulo de inclinação do plano. Com este procedimento, o conceito de simetria pode ser apresentado e discutido conceitualmente e operacionalmente.

Os resultados mostram que o conceito mais preciso de vetor, além de fornecer uma oportunidade para o professor introduzir conceitos fundamentais para o desenvolvimento da ciência, como o de simetria, é também um método mais simples e direto para desenvolver os cálculos propostos. A apresentação de transformações de coordenadas de um vetor entre dois sistemas de coordenadas já nos primeiros anos do ensino básico, pode funcionar como um subsunçor para introduzir o princípio da relatividade de Newton e de Einstein, por exemplo, com as transformações de Galileu e de Lorentz, respectivamente. Isso pode facilitar significativamente a introdução de tópicos da Física como a relatividade restrita e as limitações da mecânica newtoniana no regime de altas energias.

4.1 Objetivos

Nosso objetivo nesta atividade foi aplicar o conceito mais preciso de vetor em duas aulas de 50 minutos. Na primeira aula discutimos o assunto através de questões disparadoras e na segunda aula apresentamos aos alunos de maneira demonstrativa como a aceleração de um bloco deslizando, sem atrito, sobre um plano inclinado pode ser obtida utilizando um sistema de coordenadas $S = \{x, y\}$ e o sistema de coordenadas rotacionado $S' = \{x', y'\}$ em relação a S. Os cálculos foram desenvolvidos de maneira convencional e em seguida utilizando o conceito mais preciso de vetor, como discutido na seção anterior. Finalizamos a atividade discutindo a importância da matemática para o desenvolvimento da Física. As questões disparadoras para esta atividade são apresentadas a seguir.

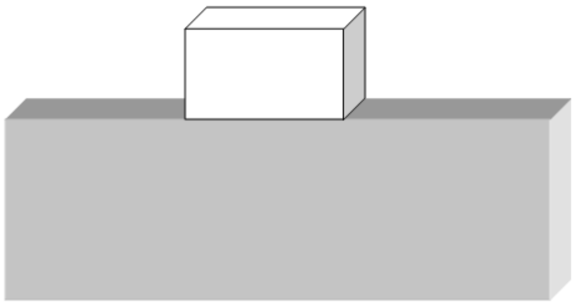
PRIMEIRA AULA:
- O que é um plano inclinado?
- Qual a importância histórica do plano inclinado para a Física?
- Você, no seu dia a dia, já se deparou com um plano inclinado? Em que situação?
- Você já utilizou um plano inclinado para erguer algum objeto pesado?
- As forças exercidas sobre um corpo ao ser erguido na vertical têm a mesma intensidade que a força exercida para erguer o objeto utilizando um plano inclinado? Por quê?
- Como podemos descrever o sistema de coordenadas e o diagrama de forças de um objeto deslizando sobre um plano inclinado?

SEGUNDA AULA:
- Aplicação do conceito mais preciso de vetor em um sistema composto por um bloco de massa m deslizando sem atrito em um plano inclinado sob o efeito da gravidade.
- Diante do exposto, você acha que a matemática é importante para aprender Física? Por quê?

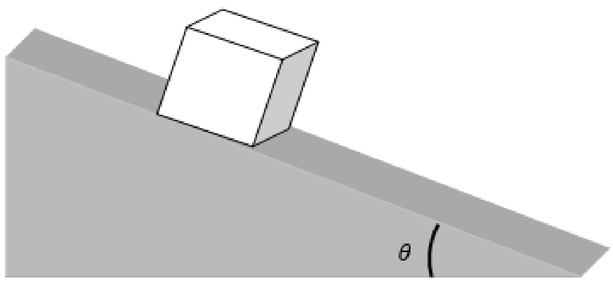
4.2 Questionário da Atividade

Nesta atividade o professor pode solicitar aos alunos que refaçam os cálculos apresentados durante a aula demonstrativa. Caso o professor não queira desenvolver os cálculos de maneira demonstrativa, a sequência de questões a seguir pode auxiliar os alunos no tratamento do sistema mais complexo, em que são considerados os sistemas de coordenadas *S* e *S'* para o cálculo da aceleração do bloco, uma vez que a proposta é introduzida passo a passo em cada exercício.

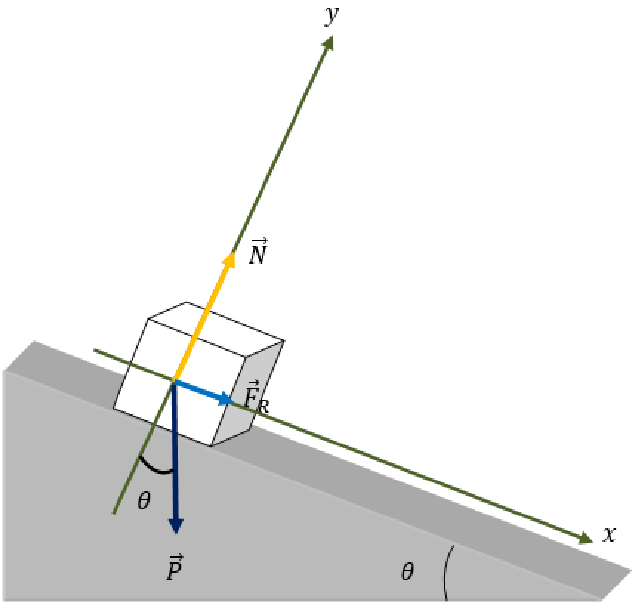
1.a) Seja um bloco de massa m em repouso sobre um plano horizontal. As forças que agem no mesmo são a normal $\vec{N}$ e a peso $\vec{P}$. Estabeleça um sistema de coordenadas e descreva o diagrama de forças desse sistema físico.



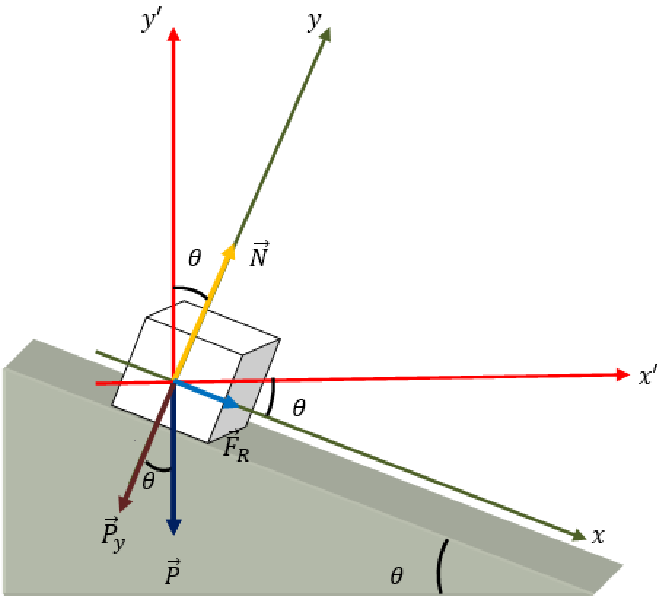
b) Vamos supor agora que o plano seja inclinado por um ângulo θ em relação a horizontal de maneira que o bloco começa a deslizar sem atrito sob o efeito da gravidade. Estabeleça um sistema de coordenadas e faça o diagrama das forças atuantes no bloco nesta situação, representando a força resultante $\vec{F}_R = \vec{N} + \vec{P}$.



2. Considere o sistema de coordenadas $S = \{x, y\}$ representado na figura, realize a decomposição das forças que atuam sobre o bloco e determine a aceleração do bloco nesta situação.



3. Ao considerar um segundo sistema de coordenadas $S' = \{x', y'\}$, como o mostrado na figura abaixo, nota-se que este pode ser obtido pela rotação do sistema $S = \{x,y\}$ por um ângulo θ, que é o mesmo ângulo de inclinação do plano. Diante desta observação, utilize o conceito mais preciso de vetor e determine a aceleração do bloco no sistema S'. O que podemos concluir com os resultados obtidos nos exercícios 2 e 3?



REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Mathematical methods for physicists. 6th Ed. Elsevier Academic Press, 2005.

DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V. Física 1: mecânica. 3ª Ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

DYSON, F. The Fundamental Constants and Their Time Variation. In Aspects of Quantum Theory, edited by Abdus Salam and E. P. Wigner. Cambridge at the University Press, 1972.

FERREIRA, A. B. Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa. 8ª ed. Curitiba: Editora Positivo, 2010.

HANC, J.; TULEJA, A.; HANCOVA, M. Symmetries and conservation laws: Consequences of Noether's theorem. American Journal of Physics, v. 72, n. 4, p. 428-435, April 2004.

HILL, T. C.; LEDERMAN, L. M. Teaching symmetry in the introductory physics curriculum. Physics Teacher, v. 38, p. 348-353, Sept. 2000.

NETO, J. B. Matemática para físicos com aplicações: Vetores, Tensores e Spinores. Vol I. LF Editorial, 2010.

NYE, J. F. Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices. Oxford University Press, 1985.