Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Existência de soluções para uma classe geral de operadores do tipo $p\&q$-Laplacianos

Christopher Silva Aguiar

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

São Carlos
Julho 2021

Existência de soluções para uma classe geral de operadores do tipo $p\&q$-Laplacianos

Christopher Silva Aguiar

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Matemática.

São Carlos
Julho 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Christopher Silva Aguiar, realizada em 26/08/2021.

Comissão Julgadora:

Rodrigo S. Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues (UFSCar)

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira (UFSCar)

Profa. Dra. Rubia Gonçalves Nascimento (UFPA)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais, noiva e aos que nunca acreditaram em mim.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente aos meus pais por além de terem me apoiado incondicionalmente em todos os momentos, me deram sempre forças para continuar e nunca desistir, sempre reforçando que se não desse certo, eles estariam lá para me ajudar a levantar, o que me fez dedicar integralmente a este trabalho.

Agradeço a minha noiva Kauane por ter vivido estes dois anos comigo durante todo o processo do mestrado, tornando esta jornada mais amena com muitas risadas e momentos de diversão, onde mesmo com incontáveis obstáculos a serem superados, eu sempre sabia que poderia contar com seu apoio e seu carinho nas diversas horas, cultivando momentos de muita felicidade que nunca serão esquecidos. Este trabalho é fruto da nossa luta!

Agradeço ao meu orientador Rodrigo da Silva Rodrigues por ter sido praticamente um pai para mim durante o mestrado, me ensinando o que era um mestrado, como estudar, por ter tido muita paciência enquanto eu estava preso em alguma parte deste trabalho, por nunca ter perdido a fé na minha capacidade.

Aos professores do DM que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta dissertação de mestrado, em particular o professor Edivaldo Lopes dos Santos pelas diversas orientações fornecidas desde o início desta etapa.

Agradeço aos meus amigos de infância Paulo Victor e Pedro Henrique por ter me ajudado com momentos hilários de descontração, seja passando raiva com jogos ou morrendo de rir de coisas bizarras ou até mesmo morrendo de cansaço após um jogo de basquete.

Aos meus amigos de graduação, Dino e João Paulo por contribuírem com meus estudos me ajudando nos horários de aperto e pelas orientações. E também a um grande amigo, Thiago Fernandes, pelos momentos de conversas, brincadeiras e palhaçadas. Se tornou um grade irmão para mim.

Aos amigos que adquiri durante esta etapa em São Carlos, em especial, a Raquel Magalhães por nossos momentos de estudo, por sofrer juntos antes de provas e até mesmo pelas risadas em momentos inapropriados.

Agradeço a todos os envolvidos e contribuintes para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Neste trabalho, estudaremos existência de soluções fracas não triviais para duas classes de problemas elípticos e não lineares, cujas não linearidades possuem crescimento subcrítico e que envolvem operadores gerais do tipo $p\&q-$Laplaciano.

No primeiro problema abordaremos existência de soluções fracas não triviais para uma classe geral de problemas de autovalores, o qual foi estudado em [9].

No segundo problema estudamos existência de múltiplas soluções para uma classe semelhante ao problema anterior, adicionando uma perturbação à não linearidade. As técnicas utilizadas foram motivadas pela tese [32].

Em nossos estudos utilizamos métodos variacionais incluindo os clássicos Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work, we will study the existence of non-trivial weak solutions for two classes of elliptic and nonlinear problems, whose growth condition on these nonlinearities is subcritical and which involve general operators of the $p\&q$-Laplacian type.

The first problem will address the existence of non-trivial weak solutions for a general class of eigenvalue problems, which was studied in [9].

In the second problem we study the existence of multiple solutions for a class of equations similar to the previous one, by adding a perturbation to the nonlinearity. The tecniques was motived by the thesys [32].

The main tools in your study are variational methods, including the classic Ekeland Variational Principle and the Mountain Pass Theorem.

Sumário

Capítulo

1

Introdução

Nesta dissertação abordaremos duas classes de problemas, ambos elípticos e não lineares, que possuem condição de crescimento subcrítico na não linearidade e o operador envolvido é um operador não homogêneo que foi abordado em alguns trabalhos na última década. Apresentaremos neste trabalho três tipos de resultados: resultados sobre não existência de solução, resultados sobre existência de solução com energia mínima e por último resultados sobre existência de múltiplas soluções, podendo estas terem nível de energia positiva ou negativa. Estes resultados serão demonstrados via métodos variacionais, que são técnicas utilizadas para garantir a existência de pontos críticos de um dado funcional, e nosso trabalho se resume em modelar o problema para aplicarmos os resultados variacionais e concluir que estes pontos críticos serão nossas soluções esperadas.

No primeiro problema, que será abordado no **Capítulo 2**, estudamos a existência de soluções fracas não triviais para uma classe generalizada de problemas de autovalores dado por:

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda |u|^{m-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, $2 \leq p \leq N$, $a(t)$ é uma função de classe C^1 que satisfaz algumas possíveis hipóteses, $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $m \in \mathbb{R}$, onde iremos dar mais detalhes sobre sua localização na reta durante o trabalho.

As propriedades que assumiremos sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são as que seguem: além de ser uma função de classe C^1, $a(t)$ também satisfaz a seguinte hipótese:

(a_1) existem constantes ϵ_i e q, com $i = 0, 1, 2$ e 3 e $2 \leq p \leq q < N$ tais que:

$$\epsilon_0 + \epsilon_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Ao decorrer dos resultados, iremos precisar de alguma ou algumas das seguintes hipóteses adicionais sobre a função a:

(a_2) existe uma constante real positiva α satisfazendo $\dfrac{q}{p} \leq \alpha < \dfrac{m}{p}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} t \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{para todo } t \geq 0;$$

(a_3) a aplicação

$$t \to a(t)t^{\frac{p-2}{p}}$$

é crescente para qualquer $t \geq 0$;

Cada hipótese citada possui sua importância. A hipótese (a_1) é aquela que nos ajudará a fazer as contas de majoração do nosso futuro funcional. A hipótese (a_2) é semelhante a condição de Ambrosetti-Rabinowitz muito conhecida na literatura, onde este nos ajudará a provar que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale quando estivermos no caso $p\&q$-superlinear. E por último, a hipótese (a_3) também nos ajudará a provar a condição de Palais-Smale mas para o caso $p\&q$-sublinear.

Esta função a abordada nos dá um certo grau de generalidade, no sentido de que, através dela, nosso problema engloba algumas classes de problemas que foram abordados em literaturas. Vejamos alguns exemplos que deixarão claro o quão geral é o nosso operador.

Exemplo 1.1. *Se $a(t) = 1$, então esta satisfaz as hipóteses impostas sobre a com $q = p$ e $\epsilon_0 + \epsilon_1 = 1 = \epsilon_2 + \epsilon_3$. Desta forma, obtemos o operador*

$$L(u) = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{1.2}$$

que é conhecido como $p-$laplaciano.

Muitos problemas abordados envolvem este operador. Vejamos algum destes. Em [5] temos que J.P. García Azorero e I. Peral Alonso demonstraram a existência de infinitas soluções para o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{m-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

considerando ambos os casos semilinear, linear e superlinear. Em [21] Giovanni Franzina e Pier Domenico Lamberti estudam existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda\|u\|_q^{p-q}|u|^{q-2}u,$$

Em [6] novamente J.P. García Azorero e I. Peral Alonso estudaram existência de soluções, a depender de λ, para o seguinte problema cujo crescimento da não linearidade é crítico e envolve uma perturbação:

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q-2} + |u|^{p^*-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para este foi estudado existência considerando $1 < q < p$ e o caso $p < q < p^*$.

Exemplo 1.2. *Tomando* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$, *então as hipóteses sobre a são satisfeitas com* $\epsilon_i = 1$, *onde* $i = 0, 1, 2, 3$. *Desta forma, obtemos o operador*

$$L(u) = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u),$$

que é conhecido como p&q−laplaciano.

Em [11] foi mostrado a existência de autovalores positivos para o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = \lambda g(x)|u|^{p-2}u, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para $1 < q < p < q^*$ e λ suficientemente grande. Vale a pena ressaltar que para este operador obtemos equações com aplicações. Sabemos que esta classe de equações veio inspirada num sistema geral de reação-difusão dado por:

$$u_t = -div(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) - div(|\nabla u|^{q-2}|\nabla u|) + c(x, u),$$

onde em linguagem de aplicação, temos que a função u pode descrever concentração, densidade de alguma substância ou até mesmo população. A função c é dita ser um termo de reação e, a depender da aplicação, c normalmente é um polinômio em u com coeficientes variáveis. As aplicações que apresentam tal comportamento estão em Biofísica, Física de Plasma e modelos de reações Físicas. Para mais detalhes, veja em [37], [22] e [27].

Exemplo 1.3. *Se* $a(t) = 1 + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *então as hipótese sobre a são satisfeitas com* $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 = 1$ *e* $\epsilon_3 = 0$. *Desta forma obtemos o operador:*

$$L(u) = -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1 + |\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right),$$

que é uma perturbação do operador p−laplaciano.

Exemplo 1.4. *Seja* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$. *Temos que esta função satisfaz as hipóteses sobre* $a(t)$ *com* $\epsilon_i = 1$, *com* $i = 0, 1, 3$ *e* $\epsilon_2 = 2$. *Desta forma obtemos o operador*

$$L(u) = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) - div\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1 + |\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right),$$

onde este é uma perturbação do operador p&q−laplaciano.

Desta forma, o sentido de generalidade que nós queremos transmitir sobre o operador é dada da seguinte forma: como cada operador $L(u)$ citado nos exemplos satisfaz as hipóteses impostas sobre $a(t)$, então todos os teoremas que serão mostrados no Capítulo

2 também serão válidos para os problemas da forma

$$\begin{cases} L(u) = \lambda |u|^{m-2}u, & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $L(u)$ é dado por qualquer operador definido nos exemplos acima.

Agora vejamos então os teoremas principais que demonstraremos no Capítulo 2. Para este, nós dividimos em alguns casos, onde estes dependerão de p, q e m. Segue abaixo a lista dos teoremas mostrados, começando pelos que garantem existência de solução:

Teorema 1.1. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $1 < m < p$ *e* $2 \leq p \leq q$. *Então para qualquer* $\lambda > 0$, *o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Teorema 1.2. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $1 < m = p$ *e* $2 \leq p < q$. *Então existe uma constante* $\lambda^{**} > 0$ *tal que, para qualquer* $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$, *o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução não trivial.*

Teorema 1.3. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $2 \leq p < m < q$. *Então para qualquer* $\lambda > 0$ *limitado inferiormente por uma constante* $\lambda^{**} > 0$, *isto é, para todo* $\lambda > \lambda^{**}$, *o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução não trivial.*

Teorema 1.4. *Assuma que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz as hipóteses* (a_1), (a_2) *e* (a_3) *com* $2 \leq p \leq q < m < q^*$. *Então para qualquer* $\lambda > 0$ *o problema* (2.1) *possuirá pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Como o objetivo principal do nosso trabalho é explorar a aplicação de métodos variacionais, nós provaremos novamente cada teorema anterior via outro método variacional diferente, onde será necessário acrescentar a hipótese (a_3) junto às outras hipóteses em cada teorema.

Ainda no Capítulo 2, demonstramos alguns resultados sobre não existência, que são os seguintes:

Teorema 1.5. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $1 < m = p$ *e* $2 \leq p = q$. *Então existe uma constante* $\lambda^* > 0$ *tal que qualquer autovalor generalizado* $\lambda > 0$ *para o problema* (2.1), *é limitado inferiormente por* λ^*, *ou seja,* $\lambda \geq \lambda^*$.

Teorema 1.6. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $1 < m = p$ *e* $2 \leq p < q$. *Então existe uma constante* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (2.1) *não possui nenhuma solução fraca não trivial, para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*]$.

Teorema 1.7. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $2 \leq p < m < q$. *Então existe uma constante* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* (2.1) *não possui nenhuma solução fraca não trivial para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*]$.

Como vimos acima, nosso operador envolvendo $a(t)$ possui suas vantagens para estudar. Tendo em vista esta afirmação, muitos autores focaram neste tipo de operador durante a última década, onde destacamos os seguintes trabalhos: [19], [20], [8], [7] e [15]. Vale citar também alguns trabalhos que envolvem este operador mas com coeficientes variáveis, sendo estes: [23] e [24]. Também nesta linha sobre coeficientes variáveis mas abordando problemas de autovalores generalizados envolvendo os operadores $p(x)-$laplaciano e $p(x)\&q(x)-$laplaciano, citamos os trabalhos: [36] e [30]. E vale citar por último o trabalho [31] também sobre autovalor generalizado, porém o operador deste generaliza o operador focado neste trabalho.

Para o segundo problema, que é abordado no **Capítulo 3**, procuramos por existência e multiplicidade de soluções fracas para um problema semelhante ao problema (1.1), porém envolvendo uma perturbação:

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda|u|^{m-2}u + \mu|u|^{s-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é também um domínio suave e limitado, com $N \geq 3$, $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais positivos, $m, s \in \mathbb{R}$ e $a(t)$ é uma função que irá satisfazer as seguintes hipóteses. (a_1) existem constantes ϵ_i e q, com $i = 0, 1, 2$ e 3 e $2 \leq p < q < N$ tais que:

$$\epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3)t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde H é uma função que satisfaz $H(\eta) = 0$, se $\eta = 0$ e $H(\eta) = 1$, se $\eta > 0$. Desta forma definimos γ da seguinte forma:

$$\gamma = (1 - H(\epsilon_3))p + H(\epsilon_3)q. \tag{1.4}$$

Ao decorrer dos resultados, iremos precisar de alguma ou algumas das seguintes hipóteses adicionais sobre a função a:

(a_2) existe uma constante real positiva α satisfazendo

$$\frac{1}{\alpha}a(t) \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{com } \frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{m}{p},$$

para todo $t \geq 0$.

(a_2') existe uma constante real positiva α satisfazendo

$$\frac{1}{\alpha}a(t) \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{com } \frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{s}{p},$$

para todo $t \geq 0$.

(a_3) a aplicação

$$t \to a(t)t^{\frac{p-2}{p}}$$

é crescente para qualquer $t \geq 0$.

Existe um vasto histórico de autores que abordaram problemas com perturbação, onde o operador é um caso particular do que estamos trabalhando, o qual é garantido a existência e multiplicidade de soluções. Vejamos alguns exemplos:

Em [10], foi mostrado que existe infinitas soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda|u|^{q-2} + \mu|u|^{p-2}u, \quad \text{em} \;\; \Omega, \\ \quad u = 0, & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

para todo $\lambda, \mu > 0$, quando $1 < q < 2 < p < 2^*$. Temos que este problema em questão generaliza, até certo ponto, o trabalho que desencadeou todo o estudo e que nomeou a estrutura côncava-convexa, visto em [3], onde o tema abordado é a mesma equação acima tomando $\mu = 1$ e envolve o caso crítico, isto é, $1 < q < 2 < p \leq 2^*$. E em [3] a existência é vinculada a λ suficientemente pequeno.

Em [25] foi provado a existência de múltiplas soluções não triviais para o problema

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = f(x,u), & \text{em} \;\; \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0, & \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

quando $1 < q \leq p$ e $f(x,u)$ é uma função contínua em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ satisfazendo algumas hipóteses dependendo de um parâmetro $r \in (p, p^*)$. Temos que este problema engloba outros, como por exemplo, problemas de autovalores e problemas quando a não linearidade possui uma perturbação, sendo então um importante exemplo relacionado tanto com os problemas do Capítulo 2 quanto aos do Capítulo 3.

Os principais resultados mostrados no Capítulo 3 são os que seguem:

Teorema 1.8. *Suponha que $a(t)$ satisfaz (a_1) e (a_3), com $1 < m < s < \gamma$. Então:*

- *Se $p < m$ então para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \;\; e \;\; \|u_n\| \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; n \longrightarrow \infty.$$

- *Se $p \geq m$ então possuímos duas opções:*

  i) existe $\lambda^* > 0$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda^*$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \;\; e \;\; \|u_n\| \longrightarrow 0 \;\; quando \;\; n \longrightarrow \infty.$$

  ii) existe $\mu^* > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$ e para cada $\mu \geq \mu^*$, o problema (3.1) *possui infinitas soluções* $\{u_n\}$ *satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema 1.9. *Suponha que* $a(t)$ *satisfaz* (a_1) *e* (a_3)*, com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$*. Então*

- *Se* $p < m$ *então para cada* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$*, o problema* (3.1) *possui infinitas soluções* $\{u_n\}$ *satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Se* $p \geq m$ *então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para cada* $\lambda \geq \lambda^*$ *e* $\mu > 0$*, o problema* (3.1) *possui infinitas soluções* $\{u_n\}$ *satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Se* $p \geq m$ *então existe* $\mu^* > 0$ *tal que para cada* $\mu \geq \mu^*$ *e* $\lambda > 0$*, o problema* (3.1) *possui infinitas soluções* $\{u_n\}$ *satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema 1.10. *Suponham válidas as hipóteses* (a_1)*,* (a_2') *e* (a_3)*, com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$*. Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todos* $0 < \lambda < \lambda^*$ *e* $\mu > 0$*, o problema* (3.1) *admite infinitas soluções* $\{u_n\}$ *para o problema* (3.1) *satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \text{ e } \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema 1.11. *Suponham válidas as hipóteses* (a_1)*,* (a_2') *e* (a_3)*, com* $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$*. Então, existe* $\Lambda > 0$ *tal que para todos* $0 < \lambda < \Lambda$ *e* $\mu > 0$*, o problema* (3.1) *admite infinitas soluções* $\{u_n\}$ *para o problema* (3.1) *satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \text{ e } \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Teorema 1.12. *Suponha que* $a(t)$ *satisfaz as hipóteses* (a_1) *e* (a_3)*, com* $1 < s < \gamma = m < \gamma^*$*. Então:*

1. *Se* $p > s$ *existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para* $0 < \lambda < \lambda^*$*, o problema* (3.1) *possui pelo menos uma solução não trivial com energia mínima;*

2. *Se* $p \leq s$ *existe* $\lambda^* > 0$ *e* $\mu^* > 0$ *tal que para* $0 < \lambda < \lambda^*$ *e para* $\mu > \mu^*$*, o problema* (3.1) *possui pelo menos uma solução não trivial com energia mínima;*

Teorema 1.13. *Suponham válidas as hipóteses* (a_1)*,* (a_2) *e* (a_3)*, com* $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$*. Então para todos* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$*, existe infinitas soluções* $\{u_n\}$ *para o problema* (3.1) *satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \ e \ \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \ quando \ n \longrightarrow \infty.$$

E por último, no apêndice contém todos os resultados básicos que tornou todo este trabalho possível.

Gostaríamos de enfatizar que esta dissertação foi um estudo detalhado de duas classes de problemas variacionais sendo que a primeira é basicamente o trabalho [9] dos autores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Sara Barile e para a segunda classe de problemas tomamos como base as técnicas abordadas na tese de doutorado [32], da autora Amanda Angélica Feltrin Nunes, em particular o caso concavo-convexo.

Capítulo

2

Existência de soluções com energia mínima para um problema de autovalor generalizado

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência das chamadas soluções fracas não triviais, a qual é definida formalmente na próxima seção, para o problema

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) = \lambda |u|^{m-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $1 < m \in \mathbb{R}$, onde iremos detalhar mais a diante sobre sua localização na reta comparado com p e por último, relembre que $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz a seguinte hipótese:
(a_1) existem constantes ϵ_i e q, com $i = 0, 1, 2$ e 3 e $2 \leq p \leq q < N$ tais que:

$$\epsilon_0 + \epsilon_1 t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde, em alguns casos específicos, precisaremos de alguma ou algumas das seguintes hipóteses adicionais sobre a função a para alguns resultados:
(a_2) existe uma constante real positiva α satisfazendo $\dfrac{q}{p} \leq \alpha < \dfrac{m}{p}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} t \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{para todo } t \geq 0;$$

(a_3) a aplicação

$$t \to a(t)t^{\frac{p-2}{p}}$$

é crescente para qualquer $t \geq 0$;

(a_4) as funções a e sua derivada a' satisfazem

$$a'(t)t < \left(\frac{q-p}{p}\right) a(t), \quad \text{para todo } t > 0.$$

Vamos agora aos detalhes sobre m. Iremos dividir o trabalho sobre o problema (2.1) em casos a depender das constantes p, q, p^*, q^*, m e m^* e nestes nos fornecerão problemas nos quais utilizaremos algumas ferramentas variacionais que garantem a existência ou não de soluções. São os casos:

Caso 1: $1 < m \leq p$ e $2 \leq p \leq q$;

Caso 2: $2 \leq p < m < q$;

Caso 3: $2 \leq p \leq q < m < q^*$,

onde cada um desses três casos, além de ter pelo menos dois subcasos cada, eles também tem algo em comum: todos os resultados contidos nestes casos assumem que a função a satisfaz a hipótese (a_1).

Para o Caso 1, teremos quatro subcasos a tratar, os quais serão:

Subcaso 1.1: $1 < m < p$ e $2 < p \leq q$;

Subcaso 1.2: $1 < m = p$ e $2 \leq p = q < m^* < p^* = q^*$;

Subcaso 1.3: $1 < m = p$ e $2 \leq p < q$.

Os dois primeiros subcasos possuem dois resultados cada um, onde mostramos a existência de uma solução fraca não trivial associada a todo $\lambda > 0$, onde no principal teorema em cada subcaso garantimos esta existência através do Teorema de Weiestrass Generalizado. Já no segundo resultado, garantimos novamente existência de uma solução fraca não trivial como no resultado principal, porém utilizando uma técnica variacional diferente, a partir do Princípio Variacional de Ekeland.

Já nos dois últimos subcasos, nos deparamos com uma classe de problemas especiais, dado por:

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde estes generalizam um problema que muitos pesquisadores investigaram, que é o típico problema de autovalor para um operador $p-$Laplaciano (veja em [5]). Porém há uma distinção nos resultados de cada situação. No Subcaso 1.2, possuímos apenas um resultado que nos afirma que se a satisfaz a hipótese (a_1) e se o problema admite uma solução fraca associada a $\lambda > 0$ então este parâmetro é limitado inferiormente por uma constante maior que zero, ou seja, $\lambda \geq \lambda^* > 0$. Já no Subcaso 1.3, possuímos três resultados onde o segundo, e principal teorema, utiliza novamente a hipótese (a_1) e o Teorema Generalizado de Weiestrass para garantir a existência de uma solução fraca associada a λ desde que $\lambda > \lambda^{**} > 0$, onde esta constante é definida no teorema. No terceiro teorema veremos novamente o que foi concluído no teorema principal, porém utilizando novamente o outro método variacional, o Princípio de Ekeland, onde este resultado assume as hipóteses (a_1) e (a_3). Agora, o primeiro resultado deste Subcaso é o primeiro resultado diferente comparado ao que visto até o momento. Ele é difere no seguinte sentido: ele nos garante a existência de uma constante λ^* tal que se $\lambda \in (0, \lambda^*]$, então o problema (2.2) não possuirá solução não trivial, e então termina o Caso 1.

Para o Caso 2, provamos resultados que afirmam o mesmo que o subcaso passado, onde o resultado principal nos garante a existência de uma solução fraca não trivial para λ limitado inferiormente via Teorema Generalizado de Weiestrass, mas com uma diferença para verificar uma das hipóteses deste Teorema. O terceiro resultado nos garante a mesma tese do teorema principal, porém utilizando o Princípio Variacional de Ekeland. E por último, o primeiro resultado nos mostra que para $\lambda > 0$ em uma vizinhança pequena da origem, temos que o problema não possui solução fraca não trivial.

O último caso, se divide novamente em dois subcasos, os quais são tratados unicamente, isto é, os resultados valem para ambos os subcasos, que são:
Subcaso 3.1: $2 \leq p = q < m < p^* = q^*$;
Subcaso 3.2: $2 \leq p < q < m < q^*$.

Nesta parte possuímos apenas dois resultados, onde o primeiro nos mostra que o funcional associado ao problema em questão satisfaz a Geometria do Passo da Montanha, e o segundo resultado nos garante a existência de uma solução fraca associada a todo $\lambda > 0$.

2.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Nesta seção iremos detalhar nossa estratégia para a resolução do problema juntamente com algumas ferramentas utilizadas. Para isto, seja Ω um subconjunto suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$.

Definição 2.1. *Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$, com $k \geq 0$ um inteiro e $q \geq 1$ como sendo:*

$$W^{k,s} = \{u \in L^s(\Omega) \, : \, D^\alpha u \in L^s(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Este espaço é usualmente munido com a norma

$$\|u\|_{k,s} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^s dx \right)^{1/s}. \tag{2.3}$$

Vamos agora definir o espaço com o qual trabalharemos:

Definição 2.2. *Definimos o espaço de Sobolev $W_0^{k,s}(\Omega)$ como sendo o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,s}(\Omega)$, onde $C_0^\infty(\Omega)$ denota o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte compacto.*

Observação 2.1. *Neste trabalho denotaremos os conjuntos $W^{k,s}(\Omega)$ e $W_0^{k,s}(\Omega)$ simplesmente por $W^{k,s}$ e $W_0^{k,s}$, respectivamente.*

Tomemos $k = 1$ e $s = q$. Assim, temos o espaço $W_0^{1,q}$ e que será munido com a norma:

$$\|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Observação 2.2. *Temos que a norma em (2.4) e a norma em (2.3) tomando $k = 1$ e $s = q$ são equivalentes em $W_0^{1,q}$ (Lema A.5).*

Por Ω ser limitado, temos válida a igualdade $X = W_0^{1,p} \cap W_0^{1,q} = W_0^{1,q}$, o que se demonstra rapidamente utilizando o Teorema A.1. Este será o espaço que utilizaremos ao tratar do nosso problema. Iremos munir este espaço com a norma

$$\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q},$$

no qual esta também é equivalente às outras definidas anteriormente ((2.3) e (2.4)) em $W_0^{1,q}$.

Como nossa abordagem será variacional, então procuramos soluções fracas para o problema por meio de pontos críticos para um funcional. Para isso, primeiramente devemos dar uma definição formal para o que seria uma solução fraca.

Definição 2.3. *Seja $u \in W_0^{1,q}$. Então u é dita uma solução fraca para o problema (2.1) se satisfizer*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2}uv dx = 0, \tag{2.5}$$

para toda $v \in W_0^{1,q}$.

Temos que esta equação foi inspirada em um argumento visto no problema Laplaciano, que pode ser visto em [18].

Observação 2.3. *Temos que a solução fraca está diretamente associada ao valor $\lambda > 0$, ou seja, diremos que u será uma solução fraca para um $\lambda > 0$ associado.*

Observação 2.4. *Apenas para caso de curiosidade, quando u é uma solução fraca associada a $\lambda > 0$, então este $\lambda > 0$ respectivo é dito um autovalor generalizado para o problema (2.1) e u é sua autofunção associada.*

Assim, baseado nesta definição, juntamente com as condições de crescimento subcrítico, vamos definir o funcional no qual iremos procurar seus pontos críticos:

Definição 2.4. *Definimos o funcional de energia $J_\lambda : W_0^{1,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx, \tag{2.6}$$

onde p e m satisfazem as hipóteses definidas e $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

Temos que esta expressão está bem definida, isto é, estas integrais existem para toda $u \in W_0^{1,q}$. De fato, se $u \in W_0^{1,q}$, temos pela hipótese (a_1) que:

$$\begin{aligned}
|J_\lambda(u)| &= \left|\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^{|\nabla u|^p} a(s)dsdx\right| + \left|\frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx\right| \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}} dsdx + \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \epsilon_2|\nabla u|^p + \frac{p}{q}\epsilon_1|\nabla u|^q dx + \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx + \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q + \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m,
\end{aligned}$$

onde $\|u\|_m$ representa a norma em L^m dada por $\|u\|_m = \left(\int_\Omega |u|^m dx\right)^{1/m}$. Agora, como visto nos possíveis casos, temos sempre que $m < q^*$, então pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.2), temos que a norma $\|u\|_m$ é finita. Portanto o lado direito da desigualdade

$$|J_\lambda(u)| \leq \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q + \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m$$

é finito, donde concluímos que J_λ está bem definido.

Vejamos agora uma importante propriedade deste funcional:

Teorema 2.1. *O funcional $J_\lambda : W_0^{1,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx,$$

com $A(t) = \int_0^t a(s)ds$, é de classe C^1, onde sua derivada de Fréchet é dada por:

$$\langle J_\lambda'(u), v\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx, \tag{2.7}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,q}$.

Demonstração. Vamos definir primeiramente duas funções, a primeira é $F_1 : \Omega\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F_1(x,y) = \int_0^{|y|^p} a(s)ds,$$

e a segunda será $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F_2(x,y) = m\int_0^{|y|} s^{m-1}ds.$$

Então para $0 < t < 1$ e utilizando o quociente de Newton, obtemos:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{A(|\nabla u + t\nabla v|^p) - A(|\nabla u|^p)}{t}dx \;=\; \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)}{t}dx$$

e

$$\frac{\lambda}{m}\int_\Omega \frac{|u+tv|^m - |u|^m}{t}dx \;=\; \frac{\lambda}{m}\int_\Omega \frac{F_2(x,u+tv) - F_1(x,u)}{t}dx.$$

Assim, utilizando a hipótese (a_1) sobre a função a e aplicando o Teorema do Valor Médio (ver [28, página 137]), existe $0 < \theta < 1$ tal que, dado $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)|}{|t|} &\leq \frac{a(|\nabla u + \theta t\nabla v|^p)p|\nabla u + \theta t\nabla v|^{p-1}}{|t|}|\nabla tv| \\
&\leq [\epsilon_2 + \epsilon_3(|\nabla u + \theta t\nabla v|^p)^{\frac{q-p}{p}}]p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| \\
&\leq [\epsilon_2 + \epsilon_3(|\nabla u| + |\nabla v|)^{q-p}]p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| \\
&= \epsilon_2|\nabla v|p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} + \epsilon_3(|\nabla u| + |\nabla v|)^{q-1}|\nabla v|.
\end{aligned}$$

Agora observemos alguns fatos: para prosseguirmos teremos que somar alguns elementos específicos para chegarmos na desigualdade almejada, e estes elementos serão dados a partir dos seguintes argumentos:

$$(|\nabla u|+|\nabla v|)^p = (|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}(|\nabla u|+|\nabla v|) = (|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|+(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}|\nabla u|$$

e

$$(|\nabla u|+|\nabla v|)^q = (|\nabla u|+|\nabla v|)^{q-1}(|\nabla u|+|\nabla v|) = (|\nabla u|+|\nabla v|)^{q-1}|\nabla v|+(|\nabla u|+|\nabla v|)^{q-1}|\nabla u|.$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)|}{|t|} &\leq \epsilon_2|\nabla v|p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} + \epsilon_3(|\nabla u| + |\nabla v|)^{q-1}|\nabla v| \\
&\leq \epsilon_2|\nabla v|p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} + \epsilon_2 p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla u| \\
&\quad + \epsilon_3|\nabla v|p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{q-1} + \epsilon_q p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{q-1}|\nabla u| \\
&= \epsilon_2 p(|\nabla u| + |\nabla v|)^p + \epsilon_3 p(|\nabla u| + |\nabla v|)^q.
\end{aligned}$$

Agora, como $2 \leq p \leq q$, podemos aplicar o Lema A.4, e obtermos que:

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)|}{|t|} &\leq \epsilon_2 p(|\nabla u| + |\nabla v|)^p + \epsilon_3 p(|\nabla u| + |\nabla v|)^q \\
&\leq \epsilon_2 p 2^{p-1}(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) + \epsilon_3 p 2^{q-1}(|\nabla u|^q + |\nabla v|^q) \\
&\in L^1(\Omega),
\end{aligned}$$

onde esta última afirmação é facilmente vista pois como $u, v \in W_0^{1,q}$ então por uma aplicação direta da Desigualdade de Hölder (Teorema A.1), temos que estas também estão em $W_0^{1,p}$.

Façamos a mesma estratégia utilizando $F_2(x, y)$: para $0 < t < 1$, temos:

$$\frac{\lambda}{m}\int_\Omega \frac{|u+tv|^m - |u|^m}{t}dx = \frac{\lambda}{m}\int_\Omega \frac{F_2(x,u+tv) - F_2(x,u)}{t}dx.$$

Assim, aplicando novamente o Teorema do Valor Médio, obtemos que existe $0 < \theta < 1$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{F_2(x,u+tv) - F_2(x,u)}{t} &\leq \frac{m|u+\theta tv|^{m-1}|\theta tv|}{|t|} \\
&\leq m(|u| + |v|)^{m-1}|v|.
\end{aligned}$$

Devemos agora somar um elemento específico para obtermos as condições de aplicar o Lema A.4. Observe então que:

$$\begin{aligned}
m(|u| + |v|)^{m-1}|v| &\leq m(|u| + |v|)^{m-1}|v| + m(|u| + |v|)^{m-1}|u| \\
&= m(|u| + |v|)^{m-1}(|v| + |u|) \qquad (2.8) \\
&= m(|u| + |v|)^m.
\end{aligned}$$

Então pela equação (2.8), por $m > 1$ e pelo Lema A.4 obtemos então que:

$$\begin{aligned}
\frac{F_2(x,u+tv) - F_2(x,u)}{t} &\leq m(|u| + |v|)^{m-1}|v| \\
&\leq m(|u| + |v|)^m \\
&\leq 2^{m-1}m(|u|^m + |v|^m) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada (Teorema A.3), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{A(|\nabla u + t\nabla v|^p) - A(|\nabla u|^p)}{t}dx &= \frac{1}{p}\int_\Omega \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{F_1(x,\nabla u + t\nabla v) - F_1(x,\nabla u)}{t}dx \\
&= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\, dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{\lambda}{m}\int_\Omega \frac{|u+tv|^m-|u|^m}{t}dx &= \frac{\lambda}{m}\int_\Omega \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{F_2(x,u+tv)-F_1(x,u)}{t}dx\\
&= \lambda\int_\Omega |u|^{m-2}uv\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, falta apenas provar que esta derivada é contínua. Para isto utilizaremos novamente a Desigualdade de Hölder (Teorema A.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right| &\overset{(a_1)}{\leq} \left|\int_\Omega (\epsilon_2+\epsilon_3|\nabla u|^{q-p})|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right|\\
&\leq \left|\int_\Omega \epsilon_2|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right|\\
&\quad +\left|\int_\Omega \epsilon_3(|\nabla u|^{q-p})|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right|\\
&\overset{\text{Teo. A.1}}{\leq} \epsilon_2\left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad +\epsilon_3\left(\int_\Omega (|\nabla u|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \epsilon_2\|u\|_{1,p}^{p-1}\|v\|_{1,p}+\epsilon_3\|u\|_{1,q}^{q-1}\|v\|_{1,q}.
\end{aligned}$$

Agora para segunda componente da derivada, obtemos pelo mesmo argumento:

$$\begin{aligned}
\lambda\left|\int_\Omega |u|^{m-2}uv dx\right| &\overset{\text{Teo. A.1}}{\leq} \lambda\left(\int_\Omega (|u|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}}dx\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(\int_\Omega (|v|)^m dx\right)^{\frac{1}{m}}\\
&= \lambda\|u\|_m^{m-1}\|v\|_m.
\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que os operadores definidos como as componentes da derivada $\langle J_\lambda'(u),v\rangle$ são limitados e, portanto, contínuos, e isto conclui o que queríamos demonstrar. $\square$

Vimos então acima que o funcional J_λ é contínuo e possui derivada contínua. Agora, vejamos qual a relação entre a derivada do funcional com as soluções fracas para o problema.

Definição 2.5. *Seja E um espaço de Banach e $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Então dizemos que o funcional possui um ponto de mínimo global se existir $w \in E$ tal que:*

$$\varphi(w) \leq \varphi(v),\ \forall v \in E,$$

ou seja,

$$\varphi(w) = \min_{v\in E}\varphi(v).$$

Agora vejamos o seguinte lema que utilizaremos em todo resultado deste capítulo.

Lema 2.1. *Suponhamos que o funcional J_λ definido em (2.6) possui um ponto de mínimo global $w \in W_0^{1,q}$. Então w é uma solução fraca para o problema (2.1).*

Demonstração. De fato, como w é ponto de mínimo, temos que, para $h \in W_0^{1,q}$:

$$J_\lambda(w+th) - J_\lambda(w) \geq 0.$$

Então:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J_\lambda(w+th) - J_\lambda(w)}{t} \geq 0 \text{ e } \lim_{t \to 0^-} \frac{J_\lambda(w+th) - J_\lambda(w)}{t} \leq 0.$$

Assim, como sabemos que este quociente é a derivada de J_λ em w e sabemos ainda que esta derivada existe pois demonstramos que J_λ é de classe C^1 no Teorema 2.1, temos então que o limite acima tem que ser igual a zero e, então, concluímos que w é uma solução fraca para o problema. □

Com o resultado acima, concluímos nossa argumentação de como iremos tratar do nosso problema, que é a busca por pontos críticos para o funcional J_λ. Assim, precisaremos de resultados que nos garantam a existência destes pontos, e para isto utilizaremos os chamados resultados variacionais que são os seguintes: o Teorema Generalizado de Weiestrass (Teorema A.5), o Princípio de Ekeland (Teorema A.6 e Corolário A.1) e por último quando o funcional satisfizer a Geometria do Passo da Montanha, utilizaremos o Teorema A.8.
Vamos definir alguns conceitos que utilizaremos ao decorrer do trabalho. Para isso seja E um espaço de Banach.

Definição 2.6. *Dizemos que uma função $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferiormente se para qualquer sequência $\{u_n\} \subset E$ com $u_n \rightharpoonup u$ em E tivermos*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \varphi(u_n).$$

Definição 2.7. *Dizemos que uma função $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é coerciva se $\varphi(u) \longrightarrow \infty$ sempre que $\|u\| \longrightarrow \infty$.*

Definição 2.8. *Dizemos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c se toda sequência $(PS)_c$, isto é, se $\{x_n\} \subset E$, com $I(x_n) \longrightarrow c$ em E e $I'(x_n) \longrightarrow 0$ em E', quando $n \longrightarrow \infty$, possuir uma subsequência fortemente convergente.*

Agora, usando os argumentos de [20, Lema 2.4] provaremos o seguinte lema que nos será muito útil em algumas demonstrações.

Lema 2.2. *Suponham válidas as hipóteses (a_1) e (a_3) sobre a função a e suponha $2 \leq p \leq q$. Então, para todos $x, y \in \mathbb{R}^N$, vale a seguinte desigualdade:*

$$\langle a(|x|^p)|x|^{p-2} \cdot x - a(|y|^p)|y|^{p-2} \cdot y, x-y \rangle \geq C_1|x-y|^p + C_2|x-y|^q,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Notemos primeiramente que

$$\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}\cdot x - a(|y|^p)|y|^{p-2}\cdot y, x-y\rangle = \sum_{j=1}^{N}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)\cdot(x_j-u_j). \tag{2.9}$$

Notemos também que, para todos $z\eta \in \mathbb{R}^N$ e pela Regra do Produto, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}\cdot z_j)\eta_i\eta_j &= \sum_{i,j=1}^{N}\left[(\frac{\partial}{\partial z_i}a(|z|^p))|z|^{p-2}z_j) + (a(|z|^p)(\frac{\partial}{\partial z_i}|z|^{p-2}z_j)\right]\eta_i\eta_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\left\{a'(|z|^p)p|z|^{p-1}\frac{1}{|z|}z_i|z|^{p-2}z_j\right. \\
&\quad \left.+a(|z|^p)\left[(p-2)|z|^{p-3}\frac{1}{|z|}z_iz_j + |z|^{p-2}\delta_{ij}\right]\right\}\eta_i\eta_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}a'(|z|^p)p|z|^{2p-4}z_iz_j\eta_i\eta_j \\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{N}a(|z|^p)(p-2)|z|^{p-4}z_iz_j\eta_i\eta_j \\
&\quad +\sum_{i,j=1}^{N}a(|z|^p)|z|^{p-2}\delta_{ij}\eta_i\eta_j.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i\eta_j &= a(|z|^p)(p-2)|z|^{p-4}\left(\sum_{i,j=1}^{N}z_iz_j\eta_i\eta_j\right) \\
&\quad +a(|z|^p)|z|^{p-2}|\eta|^2 + pa'(|z|^p)|z|^{2p-4}\left(\sum_{i,j=1}^{N}z_iz_j\eta_i\eta_j\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Observemos agora o seguinte, se no somatório $\sum_{i,j=1}^{N}z_iz_j\eta_i\eta_j$ fixarmos o índice j e variarmos o índice i temos que:

$$\sum_{i,j=1}^{N}z_iz_j\eta_i\eta_j = \sum_{j=1}^{N}z_1z_j\eta_1\eta_j + \sum_{j=1}^{N}z_2z_j\eta_2\eta_j + \ldots + \sum_{j=1}^{N}z_Nz_j\eta_N\eta_j.$$

Então se reorganizarmos os termos e colocarmos $\sum_{j=1}^{N}z_j\eta_j$ em evidência, obtemos que:

$$\sum_{i,j=1}^{N}z_iz_j\eta_i\eta_j = (z_1\eta_1+z_2\eta_2+\ldots+z_N\eta_N)\sum_{j=1}^{N}z_j\eta_j = \left(\sum_{j=1}^{N}z_j\eta_j\right)\left(\sum_{j=1}^{N}z_j\eta_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{N}z_j\eta_j\right)^2.$$

Assim, substituindo em (2.11), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}\cdot z_j)\eta_i\eta_j &= \left(\sum_{j=1}^{N} z_j\eta_j\right)^2 |z|^{p-4}\left[a(|z|^p)(p-2)+pa'(|z|^p)|z|^p\right] \\
&\quad + a(|z|^p)|z|^{p-2}|\eta|^2.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Pela hipótese (a_3) temos que a aplicação $a(t)t^{\frac{p-2}{p}}$ é crescente e portanto sua derivada é positiva, ou seja,

$$
(a(t)t^{\frac{p-2}{p}})' = a'(t)t^{\frac{p-2}{p}} + a(t)\frac{p-2}{p}t^{\frac{-2}{p}} \geq 0. \tag{2.13}
$$

Aplicando esta derivada no valor $|z|^p$, e utilizando o fato de que $p \geq 2$, obtemos que:

$$
a'(|z|^p)(|z|^p)^{\frac{p-2}{p}} + a(|z|^p)\frac{p-2}{p}(|z|^p)^{\frac{-2}{p}} = a'(|z|^p)|z|^{p-2} + a(|z|^p)\frac{p-2}{p}|z|^{-2} \geq 0. \tag{2.14}
$$

Agora, se multiplicarmos p e depois multiplicarmos $|z|^2$ de ambos os lados em (2.14), obtemos que

$$
[a(|z|^p)(p-2) + pa'(|z|^p)|z|^p] \geq 0, \tag{2.15}
$$

onde o lado esquerdo desta desigualdade é igual a da equação entre colchetes em (2.12). Então, com esta informação concluímos que

$$
\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}\cdot z_j)\eta_i\eta_j \geq a(|z|^p)|z|^{p-2}|\eta|^2. \tag{2.16}
$$

Por outro lado, observe que se $|y| \geq |x|$, então:

$$
|x-y| \leq |x| + |y| \leq |y| + |y| = 2|y|,
$$

donde concluímos que

$$
\frac{1}{2}|x-y| \leq |y|.
$$

Temos por desigualdade triangular que

$$
|y + t(x-y)| \geq ||y| - |t(x-y)||.
$$

Então, se $t \in [0, \frac{1}{4}]$, temos:

$$
\begin{aligned}
|y+t(x-y)| &\geq |y| - |t(x-y)| \\
&\geq \tfrac{1}{2}|x-y| - t|x-y| \\
&= \left(\frac{1}{2} - t\right)|x-y| \\
&\geq \tfrac{1}{4}|x-y|.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

A última desigualdade se verifica observando que $\frac{1}{2}-t$ é uma função decrescente que atinge o valor mínimo no ponto $t=1/4$. Agora, se tomarmos $z=y+t(x-y)$ e $\eta=x-y$, vamos demonstrar que a seguinte igualdade ocorre:

$$\sum_{j=1}^{N}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j-a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)\cdot(x_j-u_j)=\int_0^1\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i\eta_j dt. \tag{2.18}$$

De fato, como $\frac{dz_i}{dt}=x_i-y_i=\eta_i$, então desenvolvendo o lado direito da equação (2.18) temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^1\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i\eta_j dt &= \sum_{j=1}^{N}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i dt\eta_j\\ &= \sum_{j=1}^{N}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\frac{dz_i}{dt}dt\eta_j \qquad (2.19)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)dz_i\eta_j.\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j) &= \nabla((a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\cdot(x-y)\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i \qquad (2.20)\\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\frac{dz_i}{dt}.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo juntamente com a equação (2.20) e pela definição de z obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\frac{dz_i}{dt}dt\eta_j &= \sum_{j=1}^{N}\left[(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j\right]_{t=0}^{t=1}\eta_j\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left[a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j-a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j\right]\eta_j.\end{aligned}$$

Assim, finalmente concluiremos a desigualdade desejada, pois utilizando a hipótese (a_1)

juntamente com as equações (2.9), (2.16), (2.17) e (2.18) temos:

$$
\begin{aligned}
\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}\cdot x - a(|y|^p)|y|^{p-2}\cdot y, x-y\rangle &\overset{(2.9)}{=} \\
\sum_{j=1}^{N}(a(|x|^p)|x|^{p-2}x_j - a(|y|^p)|y|^{p-2}y_j)\cdot(x_j-u_j) &\overset{(2.17)}{=} \\
\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_i}(a(|z|^p)|z|^{p-2}z_j)\eta_i\eta_j dt &\overset{(2.16)}{\geq} \\
\int_0^1 a(|z|^p)|z|^{p-2}|x-y|^2 dt &\overset{(a_1)}{\geq} \\
\int_0^1 (\epsilon_0+\epsilon_1|z|^{q-p})|z|^{p-2}|x-y|^2 dt &= \\
\int_0^1 \epsilon_0|x-y|^2|z|^{p-2}+\epsilon_1|z|^{q-2}|x-y|^2 dt &\overset{(2.18)}{\geq} \\
\int_0^1 \epsilon_0|x-y|^2\frac{|x-y|^{p-2}}{4^{p-2}}+\epsilon_1\frac{|x-y|^{q-2}}{4^{q-2}}|x-y|^2 dt &= \\
\int_0^1 |x-y|^p\left[\frac{\epsilon_0}{4^{p-2}}\right]+|x-y|^q\left[\frac{\epsilon_1}{4^{q-2}}\right] dt &= \\
|x-y|^p\left[\frac{\epsilon_0}{4^{p-2}}\right]+|x-y|^q\left[\frac{\epsilon_1}{4^{q-2}}\right]. &
\end{aligned}
$$

onde se tomarmos $C_1 = \dfrac{\epsilon_0}{4^{p-2}}$ e $C_2 = \dfrac{\epsilon_1}{4^{q-2}}$ concluímos o resultado. $\square$

Observação 2.5. *Nós adaptamos a demonstração vista em [20, Lema 2.4] e assim demonstramos um caso mais geral, onde também seguem como consequência as duas desigualdades abaixo.*

$$\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}\cdot x - a(|y|^p)|y|^{p-2}\cdot y, x-y\rangle \geq C|x-y|^p$$

e

$$\langle a(|x|^p)|x|^{p-2}\cdot x - a(|y|^p)|y|^{p-2}\cdot y, x-y\rangle \geq C|x-y|^q.$$

Proposição 2.1. *Suponhamos válidas as hipóteses (a_1) e (a_3) sobre a função a com $2 \leq p \leq q$ e $1 \leq m < q^*$. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ uma sequência de Palais-Smale no nível c em relação a J_λ e limitada em $W_0^{1,q}$. Então esta sequência possui uma subsequência fortemente convergente em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Pela sequência $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,q}$, temos pelo Teorema A.4 que existe $u \in W_0^{1,q}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}$. Nosso objetivo será provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,q}$.

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle - \langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\
&= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n)\cdot(u_n - u)dx \\
&\quad -\Bigg(\int_\Omega (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega (|u|^{m-2}u)\cdot(u_n - u)dx\Bigg) \\
&= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)\cdot(u_n - u)dx.
\end{aligned}
$$

E portanto, obtemos a importante igualdade

$$
\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \Big(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \\
&\quad - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \qquad (2.21)\\
&\quad -\lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)\cdot(u_n - u)dx.
\end{aligned}
$$

Como $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ fracamente convergente em $W_0^{1,q}$ e também $J'(u) \in (W_0^{1,q})'$, isto é, no dual de $W_0^{1,q}$, então por uma Proposição (ver [12, Proposição 3.5]) obtemos:

$$\langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0.$$

Agora, como $\{u_n\}$ é limitada, temos então que $\|u_n - u\|$ também é limitada e por $J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$ em $(W_0^{1,q})'$ temos:

$$|\langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{(W_0^{1,p})'} \|u_n - u\| \longrightarrow 0.$$

Portanto, segue que:

$$
\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle - \langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\
&= o_n(1),
\end{aligned} \qquad (2.22)
$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Agora, usando a Desigualdade de Rellich Kondrachov (Teorema A.2) e a Desigualdade de Hölder A.1 com $k = m$ e $k' = \frac{m}{m-1}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |u|^{m-2} u(u_n - u) dx \right| &\leq \left(\int_\Omega (|u|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \|u\|_m^{m-1} \|u_n - u\|_m \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |u_n|^{m-2} u_n(u_n - u) dx \right| &\leq \left(\int_\Omega (|u_n|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \|u_n\|_m^{m-1} \|u_n - u\|_m \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Portanto, obtemos que por (2.23) e (2.24)

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|u_n|^{m-2} u_n) - |u|^{m-2} u)(u_n - u) dx &= \int_\Omega |u_n|^{m-2} u_n (u_n - u) dx \\ &\quad + \int_\Omega |u|^{m-2} u(u_n - u) dx \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim, aplicando as informações obtidas em (2.22) e (2.25) na equação (2.21), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx &= \\ \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u \rangle + \lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2} u_n - |u|^{m-2} u) \cdot (u_n - u) dx &= o_n(1). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Agora, pelo Lema 2.2, segue que para $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u$:

$$0 \leq C|\nabla u_n - \nabla u|^q \leq \langle a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle. \tag{2.27}$$

Assim, integrando (2.27) em Ω e utilizando a equação (2.26) obtemos que:

$$\begin{aligned} C\|u_n - u\|_{1,q}^q &\leq \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \\ &= o_n(1), \end{aligned}$$

no que implica $\|u_n - u\|_{1,q} = o_n(1)$, donde concluímos a convergência forte pelas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{1,q}$ serem equivalentes. □

Lema 2.3. *Suponha que o funcional J_λ seja coercivo em $W_0^{1,q}$, onde $p \leq q$. Então, toda sequência de Palais-Smale é limitada.*

Demonstração. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ e suponhamos por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada. Assim $\|u_n\| \longrightarrow \infty$ e, portanto, pela coercividade de J_λ obtemos que $|J_\lambda(u_n)| \longrightarrow \infty$, o que contradiz a hipótese de que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow c$ por $\{u_n\}$ ser uma sequência $(PS)_c$, donde concluímos que $\{u_n\}$ é limitada. $\square$

2.3 Demonstrando os resultados principais

Neste capítulo, demonstraremos os resultados de existência de soluções fracas a depender das condições impostas para p, q e m juntamente com as condições sobre a função a. Como já comentado anteriormente dividimos em 3 casos gerais, onde estes possuem subcasos. Mas antes disso, demonstraremos um resultado que utilizaremos com grande frequência, que é semicontinuidade fraca inferior do funcional J_λ quando $m < q$.

Lema 2.4. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m < q$ e $2 \leq p \leq q$. Então o funcional J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Tome $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ fracamente convergente, isto é, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,q}$. Agora, novamente pelo Teorema de Rellich–Kondrachov (Teorema A.2), a imersão de $W_0^{1,q}$ em $L^r(\Omega)$, onde $r \in [1, q^*)$, é compacta, e como consequência, obtemos que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$. E como $m < q$, então esta sequência também converge forte em $L^m(\Omega)$ e isto, juntamente com o Lema de Brézis-Lieb (Lema A.7), mostra que

$$\int_\Omega |u_n|^m dx \longrightarrow \int_\Omega |u|^m dx, \text{ se } n \to \infty. \tag{2.28}$$

Ou seja, temos:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx = \limsup_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx = \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx = \int_\Omega |u|^m dx.$$

Além disso, pelo Lema de Fatou o funcional

$$u \longmapsto \int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx \tag{2.29}$$

é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é,

$$\int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} A(|\nabla u_n|^p) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p) dx. \tag{2.30}$$

Assim, por (2.28) e (2.30), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{p} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p) dx - \frac{\lambda}{m} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^m dx \\
&\geq \frac{1}{p} \int_\Omega A(|\nabla u|^p) dx - \frac{\lambda}{m} \int_\Omega |u|^m dx \\
&= J_\lambda(u).
\end{aligned}$$

Portanto, J_λ é fracamente semicontínua inferiormente. $\square$

Agora sim, vamos aos casos!

2.4 CASO 1: $1 < m \leq p$ e $2 \leq p \leq q$

Vejamos seus subcasos. Para isso, em cada subcaso iremos primeiramente demonstrar algumas propriedades, tais como propriedades relacionadas com a geometria do funcional J_λ, que serão úteis para mostrar os resultados principais.

2.4.1 Subcaso 1.1: $1 < m < p$ e $2 \leq p \leq q$

Antes de abordarmos o teorema principal deste subcaso, vejamos alguns alguns resultados.

Lema 2.5. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m < p$ e $2 \leq p \leq q$. Dessa forma temos que o funcional J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Vamos observar que, utilizando a hipótese (a_1) juntamente com o Teorema de Imersão Contínua (ver [12, Corolário 9.15]), obtemos que, para qualquer $u \in W_0^{1,q}$:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} a(t)dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_0 + \epsilon_1 t^{\frac{q-p}{p}} dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\
&\overset{[12,\ Cor.\ 9.15]}{\geq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_{1,q}^m.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Agora, considerando o caso $p < q$, temos de (2.31) que

$$
J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_{1,q}^m. \tag{2.32}
$$

Assim, definimos a função baseada no lado direito da desigualdade acima $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$
\phi(t) = \frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{m}Ct^m.
$$

Temos que ϕ é contínua em $[0,\infty)$. E como $m<p<q$, temos que $\dfrac{\phi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ quando $t \to 0$. De fato, como $q>m>1$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t)}{t} &= \frac{\frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{m}Ct^m}{t} \\ &= t^{m-1}\left[\frac{\epsilon_1}{q}t^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\right] \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

se $t \longrightarrow \infty$, então o resultado segue. Assim, para qualquer $K>0$, existirá $t_0>0$ tal que $\dfrac{\phi(t)}{t} \geq K$, para todo $t>t_0$. Além disso, temos que $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q})$, para qualquer $u \in W_0^{1,q}$. Assim:

1. Se $\|u\|_{1,q} > t_0$, então $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q}) > K\|u\|_{1,q} > Kt_0$;

2. Se $\|u\|_{1,q} \leq t_0$, então $J_\lambda(u) \geq C$, com $C = \min\{\phi(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$.

Isto conclui que para todo $\lambda>0$, temos que J_λ é limitado inferiormente no caso em que $p<q$.

Por outro lado, quando $p=q$ temos de (2.31) que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_{1,p}^m. \tag{2.33}$$

Daí, definimos a função $\phi : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ pela seguinte regra:

$$\phi(t) = \frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)}{p}t^p - \frac{\lambda}{m}Ct^m.$$

Temos que ϕ é contínua em $[0,\infty)$. E como $m<p$, temos que $\dfrac{\phi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ quando $t \to 0$. De fato, como $p>m>1$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t)}{t} &= \frac{\frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)}{p}t^p - \frac{\lambda}{m}Ct^m}{t} \\ &= t^{m-1}\left[\frac{(\epsilon_0+\epsilon_1)}{p}t^{p-m} - C\frac{\lambda}{m}\right] \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

se $t \longrightarrow \infty$, então o resultado segue. Assim, para qualquer $K>0$, existirá $t_0>0$ tal que $\dfrac{\phi(t)}{t} \geq K$, para todo $t>t_0$. Portanto, temos $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,p})$, para qualquer $u \in W_0^{1,p}$. Assim:

1. Se $\|u\|_{1,p} > t_0$, então $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,p}) > K\|u\|_{1,p} > Kt_0$;

2. Se $\|u\|_{1,p} \leq t_0$, então $J_\lambda(u) \geq C$, com $C = \min\{\phi(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$.

desta forma, concluímos que para todo $\lambda>0$, temos que J_λ é limitado inferiormente quando $p=q$. $\square$

Lema 2.6. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1)*, com* $1 < m < p$ *e* $2 \leq p \leq q$*. Então o funcional* J_λ *é coercivo em* $W_0^{1,q}$*.*

Demonstração. No caso $p < q$, utilizando a equação (2.32) juntamente com a condição $q > m > 1$ obtemos que:

$$J_\lambda(u) \ \geq \ \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_{1,q}^m = \|u\|_{1,q}^m\left[\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\right] \longrightarrow \infty,$$

quando $\|u\|_{1,q} \to \infty$, o que demonstra a coercividade.

Por outro lado, no caso $p = q$, segue da equação (2.33) juntamente com a condição $p > m > 1$ que:

$$J_\lambda(u) \ \geq \ \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_{1,p}^m = \|u\|_{1,p}^m\left[\frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1)}{p}\|u\|_{1,p}^{p-m} - \frac{\lambda}{m}C\right] \longrightarrow \infty,$$

quando $\|u\|_{1,p} \to \infty$, o que demonstra a coercividade. □

Agora vejamos os resultados principais para este caso.

Teorema 2.2. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1)*, com* $1 < m < p$ *e* $2 \leq p \leq q$*. Então para qualquer* $\lambda > 0$*, o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Demonstração. Iniciaremos com o caso $p < q$. A ideia desta demonstração é utilizar o Teorema de Weiestrass Generalizado para garantir que o funcional J_λ admite um ponto de mínimo em $W_0^{1,q}$, e este será nosso candidato a solução. Para isto, veja que as duas hipóteses deste resultado são satisfeitas: pelo Lema 2.6 temos que J_λ é coercivo e pelo Lema 2.4 J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. Assim, pela Generalização do Teorema de Weiestrass (Teorema A.5), garantimos a existência de um ponto de mínimo global $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, ou seja,

$$J_\lambda(w) = \min_{u \in W_0^{1,q}} J_\lambda(u).$$

Primeiramente pelo Lema 2.1, temos que w é uma solução fraca para o problema.

Vejamos agora que $w \neq 0$. Para isso sejam $u \in W_0^{1,q}$, com $u \neq 0$ e $t > 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(tu) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tu|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tu|^m dx \\
&\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^{|\nabla tu|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 s^{\frac{q-p}{p}} ds dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tu|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}t^p\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}t^q\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tu|^m dx \\
&= t^m\left[\frac{\epsilon_2}{p}t^{p-m}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}t^{q-m}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m\right].
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Assim, como $q > p > m > 1$, temos que existe $t^* > 0$ suficientemente pequeno tal que :

$$\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m > \frac{\epsilon_2}{p}(t^*)^{p-m}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}(t^*)^{q-m}\|u\|_{1,q}^q.$$

Portanto, para o mesmo t^*, segue que

$$J_\lambda(w) \leq (t^*)^m \left[\frac{\epsilon_2}{p}(t^*)^{p-m}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}(t^*)^{q-m}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m\right] < 0.$$

Como isto ocorre para todo $\lambda > 0$ e por J_λ ser um funcional com $J_\lambda(0) = 0$, temos que ter então $w \neq 0$.

No caso em que $p = q$, os argumentos são similares; sendo que devido aos Lemas 2.4 e 2.6, a Generalização do Teorema de Weiestrass (Teorema A.5), nos fornece o ponto de mínimo global $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, o qual, pelo Lema 2.1, é uma solução fraca para o problema. Para mostrarmos que $w \neq 0$, veja que se $u \in W_0^{1,p}$, com $u \neq 0$ e $t > 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(tu) \\
&\overset{(a_1)\ e\ p=q}{=} \left(\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{p}\right) t^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tu|^m dx \\
&= t^m \left[\left(\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{p}\right) t^{p-m}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m\right].
\end{aligned}$$

Desde que $p > m$ existe $t^* > 0$ suficientemente pequeno tal que :

$$\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m > \left(\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{p}\right)(t^*)^{p-m}\|u\|_{1,p}^p.$$

Assim, para o mesmo t^*, segue que

$$J_\lambda(w) \leq (t^*)^m \left[\left(\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{p}\right)(t^*)^{p-m}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m\right] < 0.$$

Consequentemente como isso ocorre para todo $\lambda > 0$ e por J_λ ser um funcional com $J_\lambda(0) = 0$, temos que ter então $w \neq 0$. $\square$

Agora, como complemento, demonstraremos o próximo resultado. Ele possui a mesma tese do teorema anterior, isto é, a existência de uma solução fraca não trivial para cada $\lambda > 0$, porém utilizando o Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 2.3. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_3), com $1 < m < p$ e $2 \leq p \leq q$. Então para qualquer $\lambda > 0$, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Demonstração. Neste teorema vamos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland (Corolário A.1), o qual garantirá a existência de uma sequência de Palais-Smale $\{u_n\} \subset$

$W_0^{1,p}$, em que provaremos que esta sequência, a menos de subsequências, convergirá para nosso candidato a solução.

No caso $p < q$, temos pelo Lema 2.5 que $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,q}, \mathbb{R})$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$. Assim utilizando o Corolário A.1, com $E = W_0^{1,q}$ e $I = J_\lambda$, obtemos a existência de uma sequência $\{u_n\} \in W_0^{1,q}$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in W_0^{1,q}} J_\lambda(u) \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 \text{ em } (W_0^{1,q})', \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.6 temos que o funcional é coercivo. Portanto pelo Lema 2.3, temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada e pela Proposição 2.1 garantimos que existe $u \in W_0^{1,q}$ tal que, a menos de subsequências, u_n converge forte para u em $W_0^{1,q}$. Como u_n converge forte para u, segue da continuidade de J_λ que $J_\lambda(u) = c = \inf\limits_{v \in W_0^{1,p}} J_\lambda(v)$, ou seja, u é ponto de mínimo global para J_λ. Assim, u é uma solução fraca para o problema pelo Lema 2.1. Esta é não nula para todo $\lambda > 0$ pois como vimos no teorema anterior, o mínimo do funcional é negativo, isto é, $J_\lambda(u) = C < 0$.

A demonstração para o caso $p = q$ é igual a prova acima, trocando apenas o espaço $W_0^{1,q}$ pelo espaço $W_0^{1,p}$. □

2.4.2 Subcaso 1.2: $1 < m = p$ e $2 \leq p = q < m^* = p^* = q^*$

Para os próximos teoremas, serão necessárias algumas informações sobre um problema bastante abordado por alguns autores, o típico problema de autovalor envolvendo o operador p-Laplaciano que é dado por:

$$-\,div(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = \lambda |u|^{q-2} \text{ em } \Omega, \tag{2.35}$$

onde $u = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizaremos o primeiro autovalor para este problema, o qual minimiza o chamado Quociente de Rayleigh (veja [21]), que é dado pela equação:

$$\lambda_1(q) = \inf_{u \in W_0^{1,q};\, u \neq 0} \frac{\|u\|_{1,q}^q}{\|u\|_q^q}. \tag{2.36}$$

Observação 2.6. *Temos que este autovalor está relacionado com uma autofunção ψ que possui algumas propriedades que utilizaremos:*

1) *Podemos normaliza-la de duas formas: Se $\psi_q = \dfrac{\psi}{\|\psi\|_q}$ então $\|\psi_q\|_q = 1$ e, por ψ_q ser uma solução fraca para (2.35), temos:*

$$\int_\Omega |\nabla \psi_q|^q dx = \lambda_1(q) \int_\Omega |\psi_q|^q dx, \tag{2.37}$$

donde concluímos que

$$\|\psi_q\|_{1,q}^q = \lambda_1(q). \tag{2.38}$$

Agora, se $\psi_{1,q} = \dfrac{\psi}{\|\psi\|_{1,q}}$ *então* $\|\psi_{1,q}\|_{1,q} = 1$ *e pela equação* (2.37) *obtemos que:*

$$\|\psi_{1,q}\|_q^q = \frac{1}{\lambda_1(q)}. \tag{2.39}$$

Para mais detalhes deste assunto citaremos [5] como referência.
2) *Seja* $\psi \in W_0^{1,p}$ *a autofunção associada a* $\lambda_1(p)$. *Queremos concluir que* $\psi \in W_0^{1,q}$ *para* $p < q$. *De fato, temos que existe* $\beta > 0$ *tal que* $\psi \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, *ou seja, tanto* ψ *quanto suas derivadas são Hölder contínuas em* Ω *(veja em [26, Teorema 4.8]), e por* Ω *ser limitado, segue que* ψ *e sua derivada são limitadas, ou seja, estão em* $L^\infty(\Omega)$. *Com isto, segue que suas normas em* $L^q(\Omega)$ *são limitadas, ou seja,* $\|\psi\|_q \leq \infty$ *e* $\|\nabla\psi\|_q \leq \infty$. *Portanto, segue que* $\psi \in W_0^{1,q}$.

Vejamos agora o principal resultado para este caso:

Teorema 2.4. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1), *com* $1 < m = p$ *e* $2 \leq p = q < m^* = p^* = q^*$. *Então existe uma constante* $\lambda^* > 0$ *tal que se* $\lambda > 0$ *for um autovalor generalizado de* (2.1) *então* $\lambda \geq \lambda^*$.

Demonstração. Tome $\lambda_1(p)$ como em (2.36). Como estamos no caso $p = q$, então denotaremos $\lambda(q)$ como $\lambda(p)$. Portanto, para todo $u \in W_0^{1,p} \setminus \{0\}$ e para $\lambda > 0$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_1(p) &\leq \frac{\|u\|_{1,p}^p}{\|u\|_p^p} \\ \Leftrightarrow \quad \|u\|_p^p &\leq \frac{\|u\|_{1,p}^p}{\lambda_1(p)} \\ \Leftrightarrow \quad \lambda\|u\|_p^p &\leq \lambda\frac{\|u\|_{1,p}^p}{\lambda_1(p)}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Agora, se $u \neq 0$ for uma solução fraca para (P_λ), então utilizando a hipótese (a_1), a equação (2.40) e $m = p = q$ obtemos que:

$$\begin{aligned} (\epsilon_0 + \epsilon_1)\|u\|_{1,p}^p &= \int_\Omega (\epsilon_0 + \epsilon_1|\nabla u|^{\frac{q-p}{p}})|\nabla u|^p dx \\ &\overset{(a_1)}{\leq} \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx \\ &= \lambda \int_\Omega |u|^p dx \\ &= \lambda\|u\|_p^p \\ &\overset{(2.40)}{\leq} \lambda\frac{\|u\|_{1,p}^p}{\lambda_1(p)}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$(\epsilon_0 + \epsilon_1)\lambda_1(p) \leq \lambda.$$

Portanto, se $0 < \lambda < (\epsilon_0 + \epsilon_1)\lambda_1(p) = \lambda^*$ então a solução terá de ser a solução trivial, caso contrário, a desigualdade construída não seria satisfeita, o que completa a demonstração. $\square$

2.4.3 Subcaso 1.3: $1 < m = p$ e $2 \leq p < q < q^*$

Vejamos primeiramente alguns argumentos que iremos utilizar no decorrer dos resultados. Primeiramente pela hipótese (a_1), temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx &= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} a(t)dt\right)dx \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_0 + \epsilon_1 t^{\frac{q-p}{p}}dt\right)dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora, pela definição de $\lambda_1(q)$, temos que por ser um ínfimo então:

$$\lambda_1(q) = \inf_{u \in W_0^{1,q};\, u \neq 0} \frac{\|u\|_{1,q}^q}{\|u\|_q^q} \leq \frac{\|u\|_{1,q}^q}{\|u\|_q^q},$$

para qualquer $u \in W_0^{1,q} \setminus \{0\}$. Assim, observe que:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(q) &\leq \frac{\|u\|_{1,q}^q}{\|u\|_q^q} \\
\Leftrightarrow \quad \lambda_1(q)\|u\|_q^q &\leq \|u\|_{1,q}^q \\
\Leftrightarrow \quad \lambda_1(q)^{\frac{p}{q}}\|u\|_q^p &\leq \|u\|_{1,q}^p \\
\Leftrightarrow \quad -\|u\|_q^p &\geq -\frac{\|u\|_{1,q}^p}{\lambda_1(q)^{\frac{p}{q}}}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Demonstraremos agora as propriedades geométricas satisfeitas por J_λ para este caso:

Lema 2.7. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m = p$ e $2 \leq p < q < q^*$. Dessa forma temos que o funcional J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Pela equação (2.41) sabemos que:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q.$$

Portanto, pelo Teorema A.1 com $k = \frac{q}{p}$ e $k' = \dfrac{q}{q-p}$ temos que:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\
&\overset{(2.41)}{\leq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p \cdot 1 dx \\
&\overset{Teo.A.1}{\geq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}\left(\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega (1)^{\frac{q}{q-p}} dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C\|u\|_q^p \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C\|u\|_q^p,
\end{aligned}
$$

onde $C = \left(\int_\Omega (1)^{\frac{q}{q-p}} dx\right)^{\frac{q-p}{q}}$.

Aplicando a desigualdade em (2.42) na equação acima obtemos que

$$
J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C\|u\|_q^p \overset{(2.42)}{\geq} \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C'\|u\|_{1,q}^p,
$$

onde $C' = \dfrac{C}{(\lambda_1(q))^{\frac{p}{q}}}$, donde concluímos que

$$
J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C'\|u\|_{1,q}^p. \tag{2.43}
$$

Agora defina a função baseada no lado direito da desigualdade acima $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$
\phi(t) = \frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{p}C't^p.
$$

Temos que ϕ é contínua em $[0, \infty)$. E como $p < q$, temos que $\dfrac{\phi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ quando $t \to 0$. De fato, como $2 \leq p < q$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(t)}{t} &= \frac{\frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{p}C't^p}{t} \\
&= t^{p-1}\left[\frac{\epsilon_1}{q}t^{q-p} - \frac{\lambda}{p}C'\right] \longrightarrow \infty,
\end{aligned}
$$

se $t \longrightarrow \infty$, então o resultado segue. Assim, para qualquer $K > 0$, existirá $t_0 > 0$ tal que $\dfrac{\phi(t)}{t} \geq K$, para todo $t > t_0$. Além disso, temos que $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q})$, para qualquer $u \in W_0^{1,q}$. Assim:

1. Se $\|u\|_{1,q} > t_0$, então $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q}) > K\|u\|_{1,q} > Kt_0$;

2. Se $\|u\|_{1,q} \leq t_0$, então $J_\lambda(u) \geq C$, com $C = \min\{\phi(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$.

Isto conclui que para todo $\lambda > 0$, temos que J_λ é limitado inferiormente. □

Lema 2.8. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m = p$ e $2 \leq p < q < q^*$. Então o funcional J_λ é coercivo em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Utilizando a equação (2.43), juntamente com a condição $2 \leq p < q$ obtemos que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}C'\|u\|_{1,p}^p \\ &= \|u\|_{1,q}^p\left[\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^{q-p} - \frac{\lambda}{p}C'\right] \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,q} \to \infty$, o que demonstra a coercividade. □

O primeiro resultado principal desta seção nos fornece uma vizinhança da origem no qual não conseguimos soluções fracas não triviais associadas a cada λ neste intervalo.

Teorema 2.5. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m = p$ e $2 \leq p < q < q^*$. Então existe uma constante $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.1) não possui nenhuma solução fraca não trivial, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*]$.*

Demonstração. Esta demonstração é semelhante a do Teorema 2.4. Tome $\lambda_1(p)$ o primeiro autovalor para o problema p-Laplaciano. Pelo argumento utilizado na demonstração do Teorema 2.4, temos que para todo $v \in W_0^{1,p} \setminus \{0\}$ e para $\lambda > 0$:

$$\lambda\|v\|_p^p \leq \lambda\frac{\|v\|_{1,p}^p}{\lambda_1(p)}. \tag{2.44}$$

Agora, se $u \neq 0$ for uma solução fraca para (2.26), então pela hipótese (a_1), por $m = p$ e usando a Desigualdade de Hölder (Teorema A.1), obtemos que:

$$\begin{aligned} \epsilon_0\|u\|_{1,p}^p &\leq \epsilon_0\|u\|_{1,p}^p + \epsilon_1\|u\|_{1,q}^q \\ &= \int_\Omega (\epsilon_0 + \epsilon_1|\nabla u|^{\frac{q-p}{p}})|\nabla u|^p dx \\ &\overset{(a_1)}{\leq} \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx \\ &= \lambda\int_\Omega |u|^p dx \\ &= \lambda\|u\|_p^p \\ &\overset{(2.44)}{\leq} \lambda\frac{\|u\|_{1,p}^p}{\lambda_1(p)}, \end{aligned}$$

o que implica que $\lambda_1(p)\epsilon_0 \leq \lambda$. Portanto, se $0 < \lambda < \epsilon_0\lambda_1(p) = \lambda^*$ então a solução terá de ser a solução trivial, caso contrário, a desigualdade construída não seria satisfeita, o que completa a demonstração. □

Vejamos o principal resultado deste subcaso.

Teorema 2.6. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < m = p$ e $2 \leq p < q < q^*$. Então existe uma constante $\lambda^{**} > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. A ideia da demonstração está novamente em utilizar o Teorema de Weiestrass Generalizado para fornecer um candidato para a solução fraca que buscamos.

Pelo Lema 2.8 e pelo Lema 2.4 temos que J_λ é um funcional coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, pela Generalização do Teorema de Weiestrass (Teorema A.5), garantimos a existência de um ponto mínimo global $w \in W_0^{1,q}$ para o funcional.

Pelo Lema 2.1, temos que w é uma solução fraca para o problema. Vejamos quando esta solução será não nula. Para isso tomemos ψ_p a autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(p)$. Como visto na Observação 2.6, temos que

$$\|\psi_p\|_p^p = 1 \text{ e } \|\psi_p\|_{1,p}^p = \lambda_1(p). \tag{2.45}$$

Além disso, também pela Observação 2.6, temos que $\psi_p \in W_0^{1,q}$. Assim, por w ser um ponto de mínimo para o funcional J_λ, utilizando (a_1), a equação (2.45) e a condição $p = m$ temos que:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(t\psi_p) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla t\psi_p|^p)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |t\psi_p|^p dx \\
&\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^{|\nabla t\psi_p|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 s^{\frac{q-p}{p}} dt dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |t\psi_p|^p dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p} t^p \int_\Omega |\nabla\psi_p|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q} t^q \int_\Omega |\nabla\psi_p|^q dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |t\psi_p|^p dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}(t)^p \|\psi_p\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}(t)^q \|\psi_p\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}(t)^p \|\psi_p\|_p^p \\
&\overset{(2.45)}{=} \frac{\epsilon_2}{p}(t)^p \lambda_1(p) + \frac{\epsilon_3}{q}(t)^q \|\psi_p\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{p}(t)^p \cdot 1 \\
&= (t)^p \left(\frac{\epsilon_2\lambda_1(p) - \lambda}{p}\right) + \frac{\epsilon_3}{q}(t)^q \|\psi_p\|_{1,q}^q \\
&= t^p \left[\left(\frac{\epsilon_2\lambda_1(p) - \lambda}{p}\right) + \frac{\epsilon_3}{q}(t)^{q-p} \|\psi_p\|_{1,q}^q\right].
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda > \lambda^{**} = \epsilon_2\lambda_1(p)$, obtemos que

$$\frac{\epsilon_2\lambda_1(p) - \lambda}{p} < 0.$$

E portanto, como $q > p$, temos que existe $t^* > 0$ suficientemente pequeno tal que :

$$\frac{\epsilon_3}{q}(t^*)^{q-p}\|\psi_p\|_{1,q}^q < \left|\frac{\epsilon_2\lambda_1(p) - \lambda}{p}\right|,$$

donde, para este mesmo t^*, concluímos que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(t^*\psi_p) \\ &= (t^*)^p\left[\left(\frac{\epsilon_2\lambda_1(p) - \lambda}{p}\right) + \frac{\epsilon_3}{q}(t^*)^{q-p}\|\psi_p\|_{1,q}^q\right] \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que para $\lambda > \lambda^{**}$, temos que $J_\lambda(w) < 0$ e como J_λ é um funcional que satisfaz $J_\lambda(0) = 0$, então se tivéssemos que $w = 0$ então $J_\lambda(w) = 0$, o que não ocorre! Portanto concluímos que $w \neq 0$. □

Observação 2.7. *Vejamos um interessante fato que ocorre neste caso e que, no artigo base estudado ([9]), não houve nenhuma prova: Pelos Teoremas 2.5 e 2.6, vimos a existência de duas constantes λ^* e λ^{**}, onde para cada elemento λ do intervalo $(0, \lambda^*]$, este λ não possui nenhuma solução não trivial associada para o problema e para cada λ do intervalo (λ^{**}, ∞), temos que (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial associada. Porém, não foi mostrado nenhuma relação entre λ^* e λ^{**}. Se estes forem iguais, não há nada a se mostrar. Então suponha $\lambda^* \neq \lambda^{**}$. Assim, possuímos um intervalo de salto que não foi dada nenhuma informação, em outras palavras, para $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^{**}]$, este λ é ou não um autovalor generalizado para o problema (P_λ)? Ou seja, existe uma solução fraca não trivial associada a este λ? Este seria um ponto interessante para ser estudado e respondido futuramente através de outras técnicas variacionais.*

Agora vejamos o segundo resultado de existência, que nos garante o mesmo que foi mostrado no teorema anterior, isto é, uma solução fraca não trivial porém via outro método variacional.

Teorema 2.7. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_3), com $2 \leq m = p < q$. Então existe uma constante $\lambda^{**} > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Esta demonstração é uma adaptação do Teorema 2.3. Vimos no Lema 2.7 que J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$. Assim utilizando o Corolário A.1, obtemos a existência de uma sequência $\{u_n\} \in W_0^{1,q}$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in W_0^{1,q}} J_\lambda(u) \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0, \text{ em } (W_0^{1,q})' \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.8 temos que o funcional é coercivo. Portanto pelo Lema 2.3, temos que u_n é uma sequência limitada e pela Proposição 2.1 garantimos que existe $u \in W_0^{1,q}$ tal que, a menos de subsequências, u_n converge forte para u em $W_0^{1,q}$. Como u_n converge forte para u, segue da continuidade de J_λ que $J_\lambda(u) = c = \inf_{v \in W_0^{1,p}} J_\lambda(v)$, ou seja, u é ponto de mínimo global para J_λ. Assim, u é uma solução fraca para o problema pelo Lema 2.1. Esta é não nula para todo $\lambda > \lambda^{**}$ pois, como vimos no teorema anterior (Teorema 2.6), o funcional aplicado em seu mínimo global é negativo, isto é, $J_\lambda(u) = C < 0$. □

2.5 CASO 2: $2 \leq p < m < q$

Vejamos as propriedades geométricas satisfeitas pelo funcional, dando ênfase à coercividade, pois demonstramos utilizando um argumento diferente do visto até então. E em seguida, veremos os resultados de existência ou não de soluções não triviais a depender de λ.

Lema 2.9. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $2 \leq p < m < q$. Dessa forma temos que o funcional J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Pela equação (2.41) sabemos que:

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q.$$

Portanto, pela Desigualdade de Hölder (Teorema A.1), com $k = \frac{q}{m}$ e $k' = \dfrac{q}{q-m}$ temos que:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&\overset{(2.41)}{\geq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m \cdot 1 dx \\
&\overset{Teo.A.1}{\geq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\left(\int_\Omega (|u|^m)^{\frac{q}{m}}dx\right)^{\frac{m}{q}}\left(\int_\Omega (1)^{\frac{q}{q-m}}dx\right)^{\frac{q-m}{q}} \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_q^m \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_q^m,
\end{aligned}$$

onde $C = \left(\int_\Omega (1)^{\frac{q}{q-m}}dx\right)^{\frac{q-m}{q}}$.

Aplicando a desigualdade em (2.42), com m no lugar de p, na equação acima obtemos que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\|u\|_q^m \overset{(2.42)}{\geq} \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C'\|u\|_{1,q}^m,$$

onde $C' = \dfrac{C}{(\lambda_1(q))^{\frac{m}{q}}}$, donde concluímos que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C'\|u\|_{1,q}^m.$$

Agora defina a função baseada no lado direito da desigualdade acima $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi(t) = \frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{m}C't^m.$$

Temos que ϕ é contínua em $[0, \infty)$. E como $m < q$, temos que $\dfrac{\phi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ quando $t \to 0$. De fato, como $q > m$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t)}{t} &= \frac{\frac{\epsilon_1}{q}t^q - \frac{\lambda}{m}C't^m}{t} \\ &= t^{m-1}\left[\frac{\epsilon_1}{q}t^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C'\right] \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

se $t \longrightarrow \infty$, então o resultado segue. Assim, para qualquer $K > 0$, existirá $t_0 > 0$ tal que $\dfrac{\phi(t)}{t} \geq K$, para todo $t > t_0$. Além disso, temos que $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q})$, para qualquer $u \in W_0^{1,q}$. Assim:

1. Se $\|u\|_{1,q} > t_0$, então $J_\lambda(u) \geq \phi(\|u\|_{1,q}) > K\|u\|_{1,q} > Kt_0$;
2. Se $\|u\|_{1,q} \leq t_0$, então $J_\lambda(u) \geq C$, com $C = \min\{\phi(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$.

Isto conclui que para todo $\lambda > 0$, temos que J_λ é limitado inferiormente. □

Lema 2.10. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $2 \leq p < m < q$. Então o funcional J_λ é coercivo em $W_0^{1,q}$.*

Demonstração. Para cada $b \in \mathbb{R}$, vamos definir o seguinte conjunto:

$$J_\lambda^b = \{v \in W_0^{1,q} : J_\lambda(v) \leq b\}. \tag{2.46}$$

Se provarmos que este conjunto é limitado para cada b, então isto implicará que o funcional é coercivo. De fato, se estes conjuntos forem limitados, então como $W_0^{1,q}$ é um conjunto ilimitado, temos então que $W_0^{1,q} \not\subseteq J_\lambda^b$ para cada $b \in \mathbb{R}$. Assim, seja $(b_n)_n$ uma sequência real tal que $b_n \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ uma sequência tal que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$ em $W_0^{1,q}$. Assim, para cada n, conseguimos um termo u_n da sequência $\{u_n\}$ tal que

$u_n \notin J_\lambda^{b_n}$, com b_n sendo um termo, reindexado se necessário, da sequência $(b_n)_n$. E isto ocorre pois, caso contrário, $\{u_n\}$ seria uma sequência limitada e não iria para o infinito. Desta forma, isto nos fornece que, para cada u_n, $J_\lambda(u_n) > b_n$. Assim, se fizermos $n \longrightarrow \infty$ temos então que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow \infty$, o que prova a coercividade. Então vamos provar que este conjunto é limitado para cada b.

Suponhamos por absurdo que J_λ^b não seja limitado. Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset J_\lambda^b$, tal que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$ em J_λ^b e

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u_n|^m dx \leq b, \tag{2.47}$$

para cada n. Pelo argumento feito na equação (2.41), obtemos que:

$$\frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^q \leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx. \tag{2.48}$$

Então aplicando a Desigualdade de Hölder (Teorema A.1) com $k = \frac{q}{q-m}$ e $k' = \frac{q}{m}$ obtemos

$$\int_\Omega |u_n|^m \cdot 1dx \leq \left(\int_\Omega (|u_n|^m)^{\frac{q}{m}}dx\right)^{\frac{m}{q}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-m}}dx\right)^{\frac{q-m}{q}} = \|u_n\|_q^m \cdot C, \tag{2.49}$$

onde $C = \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-m}}dx\right)^{\frac{q-m}{q}} = \text{med}(\Omega)^{\frac{q-m}{q}}$. Agora, aplicando a Desigualdade de Poincaré (Lema A.3), obtemos

$$\|u_n\|_q \leq C'\|u_n\|_{1,q} \Rightarrow \|u_n\|_q^m \leq (C')^m\|u_n\|_{1,q}^m, \tag{2.50}$$

com C' sendo a constante de Poincaré. Então, pelas equações (2.46), (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50) obtemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^m\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\right) &= \frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_p^{1,p} + \frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\|u_n\|_{1,q}^m \\
&\overset{(2.48)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\|u_n\|_{1,q}^m \\
&\overset{(2.50)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}C\cdot\|u_n\|_q^m \\
&\overset{(2.49)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u_n|^m\cdot 1dx \\
&\overset{(2.47)}{\leq} b,
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos a desigualdade:

$$\frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_p^{1,p} + \|u_n\|_{1,q}^m\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\right) \leq b. \tag{2.51}$$

Agora vamos dividir em dois casos. Suponha primeiramente que

$$\|u_n\|_{1,q} \leq \left(\frac{\lambda q}{\epsilon_1 m}\right)^{\frac{1}{q-m}} C^{\frac{1}{q-m}} (C')^{\frac{m}{q-m}}. \tag{2.52}$$

Assim, temos que $\{\|u_n\|_{1,q}\}$ é limitada e utilizando que $q-m>0$ temos também

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,q} &\leq \left(\frac{\lambda q}{\epsilon_1 m}\right)^{\frac{1}{q-m}} C^{\frac{1}{q-m}} (C')^{\frac{m}{q-m}} \\ \Leftrightarrow \quad \|u_n\|_{1,q}^{q-m} &\leq \frac{\lambda q}{\epsilon_1 m} C (C')^m \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} &\leq \frac{\lambda}{m} C (C')^m, \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde concluímos a desigualdade:

$$\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m} C \cdot (C')^m\right) \leq 0$$

e logo, se passarmos esta parcela para o outro lado na equação (2.51), obtemos obtemos elemento positivo, donde concluímos que

$$\frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_p^{1,p} \leq b + \left[-\|u_n\|_q^{1,q}\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m} C \cdot (C')^m\right)\right] \leq b + D, \tag{2.54}$$

com $D = D(q, m, \lambda, C, C')$. Assim, nos deparamos com uma contradição pois, concluímos que $\{\|u_n\|_{1,p}\}$ é limitada e, como havíamos assumindo que $\{\|u_n\|_{1,q}\}$ também é limitada, concluímos então que $\{\|u_n\|\}$ é finita, o que contradiz o fato de $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, ou seja, para este caso obtemos que o conjunto J_λ^b é limitado.

Agora vamos ao segundo caso onde suporemos que

$$\|u_n\|_{1,q} \geq 2\left(\frac{\lambda q}{\epsilon_1 m}\right)^{\frac{1}{q-m}} C^{\frac{1}{q-m}} (C')^{\frac{m}{q-m}}. \tag{2.55}$$

Assim pelo mesmo argumento visto na equação (2.53), obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,q} &\geq \left(\frac{\lambda q}{\epsilon_1 m}\right)^{\frac{1}{q-m}} C^{\frac{1}{q-m}} (C')^{\frac{m}{q-m}} \\ \Leftrightarrow \quad \|u_n\|_{1,q}^{q-m} &\geq \frac{\lambda q}{\epsilon_1 m} C (C')^m \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} &\geq \frac{\lambda}{m} C (C')^m, \end{aligned}$$

donde obtemos que

$$\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m} C \cdot (C')^m\right) \geq 0,$$

e concluímos utilizando a equação (2.51) que

$$\frac{\epsilon_0}{p}\|u_n\|_{1,p}^p \leq b \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{1,q}^m\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\right) \leq b. \tag{2.56}$$

Assim, como tomamos $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, então $\|u\|_{1,q} \longrightarrow \infty$, pois obtivemos que $\{\|u_n\|_{1,p}\}$ é limitada. E, desta forma, obtemos outra contradição. De fato, como $q - m > 0$ e $\|u_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty$, teríamos que ter

$$\|u_n\|_{1,q}^m\left(\frac{\epsilon_1}{q}\|u_n\|_{1,q}^{q-m} - \frac{\lambda}{m}C\cdot(C')^m\right) \longrightarrow \infty,$$

o que não ocorre de acordo com a equação (2.56). E assim, temos que ter obrigatoriamente $\{\|u_n\|\}$ limitada, donde concluímos tanto a limitação de J_λ^b como também a prova da coercividade. □

Vejamos o primeiro resultado sobre não existência de solução fraca não trivial.

Teorema 2.8. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $2 \leq p < m < q$. Então existe uma constante $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.1) não possui nenhuma solução fraca não trivial para todo $\lambda \in (0, \lambda^*]$.*

Demonstração. Suponha que u seja uma solução não trivial para o problema (2.26) associada a um $\lambda > 0$, então pela definição de solução (equação (2.5)), tomando $v = u$, obtemos que

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega |u|^m dx.$$

Vamos majorar o lado esquerdo desta desigualdade. Utilizando (a_1) e aplicando a Desigualdade de Poincaré (Lema A.3), obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx &\geq \epsilon_0\|u\|_{1,p}^p + \epsilon_1\|u\|_{1,q}^q \\ &\geq \epsilon_0 C\|u\|_p^p + \epsilon_1 C'\|u\|_q^q, \end{aligned} \tag{2.57}$$

onde C e C' são o inverso das constantes fornecidas pela Desigualdade de Poincaré. Portanto,

$$\begin{aligned} \epsilon_0 C\|u\|_p^p + \epsilon_1 C'\|u\|_q^q &\leq \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx \\ &= \lambda\int_\Omega |u|^m dx \\ &= \lambda\|u\|_m^m. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Como $p < m < q$, segue pela Desigualdade de Interpolação (Lema A.2), com $\alpha \in (0,1)$ e $\frac{1}{m} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ que

$$\|u\|_m \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{(1-\alpha)}.$$

Assim, obtemos que, como $m > 1$ e como $m = \dfrac{pq}{q\alpha + p(1-\alpha)}$ então:

$$\|u\|_m^m \leq \|u\|_p^{m\alpha}\|u\|_q^{m(1-\alpha)} = \|u\|_p^{\frac{pq\alpha}{q\alpha+p(1-\alpha)}}\|u\|_q^{\frac{pq(1-\alpha)}{q\alpha+p(1-\alpha)}}.$$

Agora, tome $\beta = \dfrac{q\alpha}{q\alpha + (1-\alpha)p}$. Por $\alpha \in (0,1)$ temos então que $\beta \in (0,1)$. Além disso, $1 - \beta = \dfrac{(1-\alpha)p}{q\alpha + (1-\alpha)p}$. Assim, obtemos que:

$$\begin{aligned} \|u\|_m^m &\leq \|u\|_p^{\frac{pq\alpha}{q\alpha+p(1-\alpha)}}\|u\|_q^{\frac{pq(1-\alpha)}{q\alpha+p(1-\alpha)}} \\ &= \|u\|_p^{p\left(\frac{q\alpha}{q\alpha+p(1-\alpha)}\right)}\|u\|_q^{q\left(\frac{p(1-\alpha)}{q\alpha+p(1-\alpha)}\right)} \\ &= \|u\|_p^{p\beta}\|u\|_q^{q(1-\beta)}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Agora, aplicando a Desigualdade de Young (Lema A.1) com $a = \dfrac{1}{\beta}$ e $b = \dfrac{1}{1-\beta}$ obtemos

$$\|u\|_m^m \leq \|u\|_p^{\beta p}\|u\|_q^{(1-\beta)q} \leq \beta\|u\|_p^p + (1-\beta)\|u\|_q^q, \tag{2.60}$$

e pela equação (2.58) concluímos que

$$\epsilon_0 C\|u\|_p^p + \epsilon_1 C'\|u\|_q^q \leq \lambda(\beta\|u\|_p^p + (1-\beta)\|u\|_q^q).$$

Assim, reorganizando os termos obtemos

$$(\lambda\beta - \epsilon_0 C)\|u\|_p^p + (\lambda(1-\beta) - \epsilon_1 C')\|u\|_q^q \geq 0. \tag{2.61}$$

Então, o que concluímos nesta argumentação foi o seguinte: se u for uma solução não trivial para o problema associada a um $\lambda > 0$ então ela deve satisfazer a equação (2.61). Contudo, se tomarmos $\lambda < \lambda^* = \min\left\{\dfrac{\epsilon_0 C}{\beta}, \dfrac{\epsilon_1 C'}{(1-\beta)}\right\}$, obteremos que

$$(\lambda\beta - \epsilon_0 C)\|u\|_p^p + (\lambda(1-\beta) - \epsilon_1 C')\|u\|_q^q < 0.$$

o que é uma contradição de acordo com a equação (2.61), donde concluímos que $u = 0$ será a única solução fraca para (2.1), com $\lambda < \lambda^*$. □

O próximo e principal teorema nos mostrará quando o problema terá uma solução fraca não trivial.

Teorema 2.9. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $2 \leq p < m < q$. Então para qualquer $\lambda > 0$ limitado inferiormente por uma constante $\lambda^{**} > 0$, isto é, para todo $\lambda > \lambda^{**}$, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. A ideia desta demonstração será utilizar o Teorema Generalizado de Weiestrass como já visto em alguns teoremas acima para conseguirmos um candidato

a solução. Temos pelo Lema 2.10 que o funcional J_λ é coercivo e pelo Lema 2.4 temos que J_λ é fracamente semicontínuo inferiormente.
Assim, pelo Teorema de Weiestrass Generalizado (Teorema A.5), garantimos a existência de um ponto mínimo global $w \in W_0^{1,q}$ para o funcional.

Pelo Lema 2.1, temos que w é uma solução fraca para o problema. Vejamos agora quando $w \neq 0$. Para isso sejam $u \in W_0^{1,q}$, com $u \neq 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(w) &\leq J_\lambda(u) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega \int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 s^{\frac{q-p}{p}} ds dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &= \frac{\epsilon_2}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &= \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m. \end{aligned}$$

Assim, como u é fixa, temos então que $\|u\|_{1,p}$ e $\|u\|_{1,q}$ são constantes, então existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda > \lambda^*$:

$$\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m > \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q.$$

Portanto, para este λ limitado inferiormente, segue que

$$J_\lambda(w) \leq \left[\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m\right] < 0.$$

Portanto, concluímos que para $\lambda > \lambda^{**}$, temos que $J_\lambda(w) < 0$ e como J_λ é um funcional que satisfaz $J_\lambda(0) = 0$, então se tivéssemos que $w = 0$ então $J_\lambda(w) = 0$, o que não ocorre! Portanto concluímos que $w \neq 0$. Agora, observe que pelo Teorema 2.8, temos a existência de λ^* tal que para $\lambda < \lambda^*$ a solução associada á λ será trivial. Então vale a seguintes desigualdades: $\lambda > \lambda^{**} \geq \lambda^*$.

□

O último resultado para este subcaso nos garantirá a existência de solução fraca igual o teorema anterior, porém utilizando o Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema 2.10. *Suponha que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_3), com $2 \leq p < m < q$. Então existe uma constante $\lambda^{**} > 0$ onde, para qualquer $\lambda \in (\lambda^{**}, +\infty)$ o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Esta demonstração é uma adaptação do Teorema 2.3. Vimos no Lema 2.7 que J_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,q}$. Assim utilizando o Corolário A.1, obtemos a existência de uma sequência $\{u_n\} \in W_0^{1,q}$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in W_0^{1,q}} J_\lambda(u) \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 \text{ em } (W_0^{1,q})', \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Pelo Lema 2.8 temos que o funcional é coercivo. Portanto pelo Lema 2.3, temos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada e pela Proposição 2.1 garantimos que existe $u \in W_0^{1,q}$ tal que, a menos de subsequências, u_n converge forte para u em $W_0^{1,q}$. Como u_n converge forte para u, segue da continuidade de J_λ que $J_\lambda(u) = c = \inf_{v \in W_0^{1,p}} J_\lambda(v)$, ou seja, u é ponto de mínimo global para J_λ. Assim, u é uma solução fraca para o problema pelo Lema 2.1. Agora, esta solução será não nula apenas se $\lambda > \lambda^{**}$, pois no (Teorema 2.9) vimos que $J_\lambda(u) = C < 0$ para $\lambda > \lambda^{**}$. □

2.6 CASO 3: $2 \leq p \leq q < m < q^*$

Temos dois subcasos neste tópico, no qual estudaremos ambos ao mesmo tempo , que são: $2 \leq p = q < m < p^* = q^*$ e $2 \leq p < q < m < q^*$. Para ambos os casos, temos que o funcional satisfaz a geometria do Passo da Montanha, o qual, será demonstrado no lema a seguir.

Lema 2.11. *Assuma que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $2 \leq p \leq q < m < q^*$. Então temos que o funcional linear J_λ satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existem $\rho, \alpha > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq \alpha$, para qualquer $u \in W_0^{1,q}$ com $\|u\| = \rho$;*

2. *Existe $e \in B_\rho^c(0)$ que verifica $J_\lambda(e) < 0$.*

Demonstração. 1- Utilizando a equação (2.31), sabemos que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m.$$

Assim, tomando $C_1 = \min\left\{\frac{\epsilon_0}{p}, \frac{\epsilon_1}{q}\right\}$, obtemos então que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\ &\geq C_1\|u\|_{1,p}^p + C_1\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\ &= C_1\left(\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{1,q}^q\right) - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m. \end{aligned}$$

Tomemos $\|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q} = \rho < 1$. Como $p \leq q$ e $\|u\|_{1,p} < 1$ então $\|u\|_{1,p}^p \geq \|u\|_{1,p}^q$.

Portanto,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq C_1\left(\|u\|_{1,p}^p+\|u\|_{1,q}^q\right)-\tfrac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\ &\geq C_1\left(\|u\|_{1,p}^q+\|u\|_{1,q}^q\right)-\tfrac{\lambda}{m}\|u\|_m^m. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Aplicando o Lema A.4 com $2 \leq p \leq q$, obtemos:

$$\|u\|_{1,p}^q+\|u\|_{1,q}^q \geq 2^{-q+1}(\|u\|_{1,p}+\|u\|_{1,q})^q.$$

Definindo $2^{-q+1}C_1 = C_2$ e substituindo a equação anterior na desigualdade em (2.62) temos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq C_1\left(\|u\|_{1,p}^q+\|u\|_{1,q}^q\right)-\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\ &\geq C_2(\|u\|_{1,p}+\|u\|_{1,q})^q-\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Temos também que, utilizando o Teorema A.2 e o Lema A.5 obtemos que:

$$\|u\|_m \overset{Teo A.2}{\leq} C\|u\|_{1,q} \overset{Lema A.5}{\leq} CC'\|u\|,$$

o que implica que

$$-\|u\|_m^m \geq -(CC')^m\|u\|^m.$$

Definindo $C_m = \dfrac{(CC')^m}{m}$, e substituindo a equação anterior na desigualdade obtida em (2.63), obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq C_2(\|u\|_{1,p}+\|u\|_{1,q})^q-\frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m \\ &\geq C_2(\|u\|_{1,p}+\|u\|_{1,q})^q-C_m\lambda\|u\|^m \\ &= C_2\|u\|^q-C_m\lambda\|u\|^m \\ &= \|u\|^q\left[C_2-C_m\|u\|^{m-q}\right]. \end{aligned}$$

E como $m > q$, existe $0 < \rho < \left(\dfrac{C_2}{C_m}\right)^{\frac{1}{m-q}}$ tal que para toda $u \in W_0^{1,q}$ com $\|u\| = \rho$, temos:

$$J_\lambda(u) \geq \|u\|^q\left[C_2-C_m\|u\|^{m-q}\right] = \rho^q\left[C_2-C_m\rho^{m-q}\right] > 0.$$

Então, com $\alpha = \rho^q\left[C_2-C_m\rho^{m-q}\right]$, o resultado segue.

2- Seja $v \in C_0^\infty(\Omega)$, com $v > 0$ em Ω. Utilizando o argumento feito na equação (2.34) obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(tv) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tv|^p)dx-\frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tv|^m dx \\ &\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega\int_0^{|\nabla tv|^p} \epsilon_2+\epsilon_3 s^{\frac{q-p}{p}}ds dx-\frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tv|^m dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\epsilon_2}{p}t^p\int_\Omega |\nabla v|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}t^q\int_\Omega |\nabla v|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tv|^m dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}(t)^p\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}(t)^q\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}(t)^m\|v\|_m^m \\
&= t^m\left[\frac{\epsilon_2}{p}t^{p-m}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}t^{q-m}\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|v\|_m^m\right].
\end{aligned}
$$

Assim, como $p \leq q < m$, segue então que se $t \longrightarrow \infty$ então $t^{p-m} \longrightarrow 0$ e $t^{q-m} \longrightarrow 0$. Portanto, existe $t' > \rho$ tal que, definindo $e = t'v$, então $\|e\| > \rho$, ou seja, $e \in (B_\rho(0))^c$. E também

$$
J_\lambda(e) \leq (t')^m\left[\frac{\epsilon_2}{p}(t')^{p-m}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}(t')^{q-m}\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|v\|_m^m\right] < 0.
$$

□

Teorema 2.11. *Assuma que $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ satisfaz as hipóteses (a_1), (a_2) e (a_3) com $2 \leq p \leq q < m < q^*$. Então para qualquer $\lambda > 0$ o problema (2.1) possuirá pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Demonstração. A demonstração seguirá da seguinte forma: Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha para garantirmos que a constante c dado pelo teorema é um valor crítico, e assim existirá uma função $u \in W_0^{1,q}$ que será nossa solução e que mostraremos que esta é não trivial.

Pelo Lema 2.11, temos que o funcional satisfaz a Geometria do Passo da Montanha, sendo assim falta apenas mostrar que J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale. Para isto seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ uma sequência $(PS)_c$, então temos que esta satisfaz

$$
J_\lambda(u_n) \longrightarrow c \text{ e } J_\lambda'(u_n) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.
$$

Vejamos que esta sequência possui uma subsequência que converge fortemente em $W_0^{1,q}$. Primeiramente vejamos que esta é limitada. Utilizaremos um argumento muito utilizado em artigos. Vamos majorar o funcional J_λ subtraído pela sua derivada (definida pela equação (2.7)), ambos aplicados na sequência $\{u_n\}$, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u_n|^m dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{m}\left(\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^m dx\right)\right) \qquad (2.64) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx.
\end{aligned}
$$

A hipótese (a_2), nos diz que existe α com $\dfrac{q}{p} \leq \alpha < \dfrac{m}{p}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha}a(t)t \leq A(t),$$

para todo $t \geq 0$. Assim tomando $t = |\nabla u_n|^p$ e integrando em Ω de ambos os lados, obtemos que

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \leq \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx,$$

e então, substituindo na equação (2.64), juntamente com a hipótese (a_1), obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\geq \frac{1}{p}\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&= \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\int_\Omega \left[\epsilon_0 + \epsilon_1(|\nabla u_n|^p)^{\frac{q-p}{p}}\right]|\nabla u_n|^p dx \\
&= \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\epsilon_0\|u_n\|_{1,p}^p + \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\epsilon_1\|u_n\|_{1,q}^q \\
&= C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^q,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

onde $C = \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\epsilon_0$ e $C' = \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{m}\right)\epsilon_1$ são constantes positivas pois, por (a_2), temos que $\alpha < \frac{m}{p}$. Por outro lado, sabemos que:

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq \left|J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right| \leq |J_\lambda(u_n)| + \frac{1}{m}\left|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right|.$$

Temos que $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência real e por $\{u_n\}$ ser uma sequência $(PS)_c$, temos que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow c$. Portanto, $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência limitada, no que implica que existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|J_\lambda(u_n)| \leq C_1. \tag{2.66}$$

Além disso, temos que

$$|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle| \leq \|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,q})'} \cdot \|u_n\|. \tag{2.67}$$

Portanto, utilizando o fato de que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,q})'} \longrightarrow 0$, temos então que existe K tal que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,q})'} \leq K$. E ainda, pelas equações (2.66), (2.67) e tomando $C_2 = \max\{C_1, K\}$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &\leq |J_\lambda(u_n)| + \tfrac{1}{m}|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle| \\
&\leq C_1 + K\cdot\|u_n\| \\
&\leq C_2 + C_2\|u_n\| \\
&= C_2(1 + \|u_n\|).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Portanto, pelas equações (2.65) e (2.68) obtemos a seguinte estimativa:

$$C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^q \leq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle \leq C_2(1 + \|u_n\|),$$

donde obtemos que

$$C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^q \leq C_2(1 + \|u_n\|). \tag{2.69}$$

Para concluir que $\{u_n\}$ é limitada, dividiremos nos casos $p = q$ e $p < q$.

Caso $p = q$: Se $p = q$, então, temos que $\|u_n\| = 2\|u_n\|_{1,p}$. Assim, na equação (2.69) temos:

$$(C + C')\|u_n\|_{1,p}^p \leq C_2(1 + 2\|u\|_{1,p}). \tag{2.70}$$

Assim, se supormos por contradição que $\|u\| \longrightarrow \infty$, então $\|u\|_{1,p} \longrightarrow \infty$ e, portanto, $\|u_n\|_{1,p} \neq 0$. Assim, dividindo ambos os lados da equação (2.70) por $\|u_n\|_{1,p}$, obtemos:

$$(C + C')\|u_n\|_{1,p}^{p-1} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,p}} + 2C_2.$$

Então, se $\|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty$, e por $p - 1 \geq 1$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo da desigualdade acima irá para infinito enquanto é majorado por uma constante no lado direito. Assim, para $p = q$, temos $\{u_n\}$ limitada.

Caso $p < q$: Vamos supor por contradição que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$. Temos as três seguintes possibilidades:

i) $\|u_n\|_{1,p} \leq K$ e $\|u_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty$. Neste caso, podemos supor então que $\|u_n\|_{1,q} \neq 0$. Dividindo ambos os lados da equação (2.69) por $\|u_n\|_{1,q}$ obtemos que:

$$C\frac{\|u_n\|_{1,p}^p}{\|u_n\|_{1,q}} + C'\|u_n\|_{1,q}^{q-1} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,q}} + C_2\frac{\|u_n\|_{1,p}}{\|u_n\|_{1,q}} + C_2 \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,q}} + C_2\frac{K}{\|u_n\|_{1,q}} + C_2.$$

Assim, temos que se $\|u_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo irá para infinito enquanto o lado direito é limitado por uma constante.

ii) $\|u_n\|_{1,q} \leq K$ e $\|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty$. Neste caso, podemos supor então que $\|u_n\|_{1,p} \neq 0$. Dividindo ambos os lados da equação (2.69) por $\|u_n\|_{1,p}$ obtemos que:

$$C\|u_n\|_{1,p}^{p-1}C' + \frac{\|u_n\|_{1,q}^q}{\|u_n\|_{1,p}} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,p}} + C_2 + C_2\frac{\|u_n\|_{1,q}}{\|u_n\|_{1,p}} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,p}} + C_2 + C_2\frac{K}{\|u_n\|_{1,p}}.$$

Assim, temos que se $\|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo irá para infinito enquanto o lado direito é limitado por uma constante.

(iii) $\|u_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty$ e $\|u_n\|_{1,p} \longrightarrow \infty$. Para este item, observe que como $p > q$ e $\|u_n\|_{1,q} \longrightarrow \infty$, então podemos tomar $\|u_n\|_{1,q}^{q-p} \geq 1$, donde este implica que $\|u_n\|_{1,q}^q \geq \|u_n\|_{1,q}^p$. Assim, substituindo na equação (2.69), obtemos que:

$$C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^p \leq C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^q \leq C_2(1 + \|u_n\|).$$

Tome $C'' = \min\{C, C'\}$. Como $p \geq 2$, aplicando o Lema A.4, obtemos que:

$$\begin{aligned} C_2(1 + \|u_n\|) &\geq C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,q}^p \\ &\geq C''\|u_n\|_{1,p}^p + C''\|u_n\|_{1,q}^p \\ &= C''(\|u_n\|_{1,p}^p + \|u_n\|_{1,q}^p) \\ &\overset{Lema A.4}{\geq} C''2^{-p+1}(\|u_n\|_{1,p} + \|u_n\|_{1,q})^p \\ &= C_3\|u_n\|^p, \end{aligned}$$

com $C_3 = C''2^{-p+1}$. Assim, obtemos que

$$C_3\|u_n\|^p \leq C_2(1 + \|u_n\|). \tag{2.71}$$

Como $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, então podemos supor que $\|u_n\| \neq 0$. Portanto, dividindo ambos os lados da desigualdade (2.71) por $\|u_n\|$ temos:

$$C_3\|u_n\|^{p-1} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|} + C_2,$$

donde concluímos uma contradição pois, uma vez que $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, então do lado esquerdo da desigualdade irá para infinito enquanto o lado direito é limitado por uma constante.

Assim, obtendo uma contradição para os três casos, concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,q}$. Então, pela Proposição 2.1 temos que esta possui uma subsequência convergente e portanto, J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$. Então pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.7), temos que c^* é um valor crítico para J_λ, com

$$\begin{aligned} c^* : &= \inf_{g\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} J_\lambda(g(t)) \\ \Gamma : &= \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}. \end{aligned}$$

Isto significa que existe $u \in W_0^{1,q}$ tal que $J_\lambda(u) = c^*$ e $J'_\lambda(u) = 0$, e portanto, u é uma solução fraca para nosso problema. Vejamos agora que $u \neq 0$. Suponha por absurdo que $u = 0$. Então note que, para qualquer curva $g \in \Gamma$, temos que $g([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$, pois $g(0) = 0$ e $g(1) = e$ e $0 < \rho < \|e\|$. Então

$$\max_{t\in[0,1]} J_\lambda(g(t)) \geq \alpha > 0.$$

Portanto, podemos tomar o ínfimo sobre todas as curvas $g \in \Gamma$ na desigualdade acima, concluindo que

$$J_\lambda(u) = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(g(t)) \geq \alpha > 0.$$

então como $J_\lambda(0) = 0$ temos que

$$0 = J_\lambda(u) = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\lambda(g(t)) \geq \alpha > 0,$$

o que é uma contradição. Logo $u \neq 0$. $\square$

Capítulo

3

Existência de múltiplas soluções para um problema $p\&q$-laplaciano geral com perturbação

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas não triviais, a qual é definida formalmente na próxima seção, para o problema

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) = \lambda|u|^{m-2}u + \mu|u|^{s-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $2 \leq \gamma \leq N$, onde γ é um número real que será definido mais a diante, $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais, $1 < m, s \in \mathbb{R}$, onde iremos detalhar mais a diante sobre sua localização na reta comparado com γ e por último, $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz a seguinte hipótese:
(a_1) existem constantes ϵ_i e q, com $i = 0, 1, 2$ e 3 e $2 \leq p < q < N$ tais que:

$$\epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3)t^{\frac{q-p}{p}} \leq a(t) \leq \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}}, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde H é uma função que satisfaz $H(\eta) = 0$, se $\eta = 0$ e $H(\eta) = 1$, se $\eta > 0$. Desta forma definimos γ da seguinte forma:

$$\gamma = (1 - H(\epsilon_3))p + H(\epsilon_3)q. \tag{3.2}$$

Ao decorrer dos resultados, iremos precisar de alguma ou algumas das seguintes hipóteses adicionais sobre a função a:
(a_2) existe uma constante real positiva α satisfazendo

$$\frac{1}{\alpha}a(t) \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{com } \frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{m}{p},$$

para todo $t \geq 0$.
(a_2') existe uma constante real positiva α satisfazendo

$$\frac{1}{\alpha}a(t) \leq A(t) = \int_0^t a(s)ds, \quad \text{com } \frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{s}{p},$$

para todo $t \geq 0$.
(a_3) a aplicação

$$t \to a(t)t^{\frac{p-2}{p}}$$

é crescente para qualquer $t \geq 0$.

Observação 3.1. *Observemos que neste trabalho, quando $H(\epsilon_3) = 1$ então $\gamma = q$ e se $H(\epsilon_3) = 0$ então $\gamma = p$.*

Os casos que consideramos para este problema são:
Caso 1: $1 < m < s < \gamma$;
Caso 2: $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$;
Caso 3: $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$;
Caso 4: $1 < s < m = \gamma$;
Caso 5: $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$.

Para este problema, focaremos em resultados que garantem múltiplas soluções, com exceção do Caso 3. Para o Caso 1 temos que o funcional possui geometria de coercividade. Desta forma, provando que ele satisfaz a condição de Palais-Smale com mais um resultado, conseguimos garantir a existência de infinitas soluções com energia não positiva via Teorema de Clark.

Para o segundo caso, mostraremos dois resultados. Primeiramente temos que o funcional não é coercivo, visto que $\gamma < s$. Desta forma, iremos utilizar uma estratégia que foi inspirado no trabalho [6] e utilizado no trabalho [2], que é truncar o funcional com o auxílio de uma função complementar, obtendo um novo funcional I_λ. Desta forma, conseguiremos provar que I_λ é coercivo e satisfaz a condição de Palais-Smale, além de um outro resultado que será necessário. Visto isto, o primeiro resultado afirma que conseguimos infinitos pontos críticos (com energia negativa, onde estes convergem em norma a 0) para I_λ via Teorema de Clark. E desta forma, finalizaremos o primeiro resultado provando que uma infinidade destes pontos críticos para I_λ, também serão pontos críticos de J_λ (e logo J_λ possui infinitas soluções), para todos λ e μ. Para o segundo resultado provaremos que, para λ suficientemente pequeno, existem infinitas soluções de energia positiva para o problema (3.1), onde estas vão para infinito em norma, e este resultado será via o Teorema do Passo da Montanha Simétrico.

No terceiro caso veremos que o funcional possui a geometria do Passo da Montanha, e logo conseguiremos a existência de uma solução de energia positiva para λ suficientemente pequeno e para todo μ.

O quarto caso seguirá de forma análoga ao terceiro caso, para λ suficientemente pequeno garantiremos que o funcional é coercivo, e desta forma obtemos que o problema (3.1) possuirá solução não trivial via Princípio Variacional de Ekeland.

Para o último caso, conseguiremos o mesmo que foi provado no segundo resultado do Caso 2. Garantiremos infinitas soluções para o problema (3.1) de energia positiva e que vão para infinito em norma, porém a diferença é que neste caso, este resultado ocorre para todos $\lambda, \mu > 0$.

3.2 Formulação variacional e resultados preliminares

Nesta seção iremos detalhar nossa estratégia para a resolução deste novo problema juntamente com algumas ferramentas utilizadas. Para isto, seja Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$.

O espaço com o qual trabalharemos será $W_0^{1,\gamma}$, onde este será munido com a norma

$$\|u\|_{1,\gamma} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^\gamma dx \right)^{1/\gamma}.$$

Novamente nossa abordagem será variacional, então procuramos soluções fracas para o problema por meio de pontos críticos para um funcional. Para isso, vamos definir uma solução fraca para o nosso problema.

Definição 3.1. *Seja $u \in W_0^{1,\gamma}$. Então u é dita uma solução fraca para o problema (3.1) se satisfizer*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2}uv dx - \mu \int_\Omega |u|^{s-2}uv dx = 0, \tag{3.3}$$

para toda $v \in W_0^{1,\gamma}$.

Assim, baseado nesta definição, juntamente com as condições do grau subcrítico, vamos definir o funcional no qual iremos procurar seus pontos críticos:

Definição 3.2. *Definimos o funcional de energia $J_\lambda : W_0^{1,\gamma} \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx, \tag{3.4}$$

onde $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$.

Vejamos agora uma importante propriedade deste funcional:

Teorema 3.1. *O funcional $J_\lambda : W_0^{1,\gamma} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx,$$

com $A(t) = \int_0^t a(s)ds$ *é de classe* C^1*, onde sua derivada de Fréchet é dada por:*

$$\langle J_\lambda'(u), v\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2}uvdx - \mu \int_\Omega |u|^{s-2}uvdx, \quad (3.5)$$

onde $u, v \in W_0^{1,q}$.

Demonstração. Temos que esta demonstração é análoga a demonstração do Teorema 2.1, onde para provar que parcela adicional dada por $\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx$ é de classe C^1, o argumento é o mesmo feito para a parcela $\frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx$. □

Utilizaremos alguns resultados vistos no primeiro capítulo para algumas demonstrações, como o Lema 2.2 para demonstrar que o funcional dado em (3.4) satisfaz a condição de Palais-Smale em alguns casos.

3.3 Demonstrando os resultados principais

3.3.1 Caso 1: $1 < m < s < \gamma$

Para este caso, provaremos que o funcional possui a geometria de coercividade e satisfaz a condição de Palais-Smale. Desta forma, conseguiremos mostrar que o problema (3.1) possui infinitas soluções de energia negativa para todos $\lambda, \mu > 0$ quando $\gamma = p$, isto é, quando $\epsilon_3 = 0$. Para quando $\gamma = q$, observe que não possuímos comparação entre p e m. Desta forma demonstraremos que possuímos infinitas soluções de energia negativa desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- Se $m < p$, teremos soluções para todos $\lambda, \mu > 0$;
- Se $m \geq p$ teremos duas ocasiões que garantem existência de soluções:
    1. λ suficientemente grande e para todo $\mu > 0$;
    2. μ suficientemente grande e para todo $\lambda > 0$.

Lema 3.1. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1)*, com* $1 < m < s < \gamma$*. Então o funcional* J_λ *é coercivo em* $W_0^{1,\gamma}$*.*

Demonstração. Utilizando a hipótese (a_1) juntamente com o Teorema de Imersão

Contínua (ver [12, Corolário 9.15]), obtemos que, para qualquer $u \in W_0^{1,\gamma}$:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} a(t)dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3) t^{\frac{q-p}{p}} dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m - \frac{\mu}{s}\|u\|_s^s \\
&\overset{[12,\ Cor.\ 9.15]}{\geq} \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Se $H(\epsilon_3) = 0$, temos então $\gamma = p$ e logo $\|u\|_{1,\gamma} = \|u\|_{1,p}$. Portanto, pela condição $m < s < \gamma$ obtemos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \frac{\epsilon_0}{\gamma}\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[\frac{\epsilon_0}{\gamma} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma}\right] \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, o que completa a coercividade para $H(\epsilon_3) = 0$.

Se $H(\epsilon_3) = 1$, temos então que $\gamma = q$ e logo $\|u\|_{1,\gamma} = \|u\|_{1,q}$. Portanto, pela condição $m < s < \gamma$ obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[\frac{\epsilon_1}{\gamma} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma}\right] \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, o que completa a coercividade para $H(\epsilon_3) = 1$. $\square$

Proposição 3.1. *Suponhamos válidas as hipóteses (a_1) e (a_3) sobre a função a com $1 < m < s < \gamma$. Temos então que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\gamma}$ uma sequência $(PS)_c$, ou seja, $J_\lambda(u_n) \longrightarrow c$ e $J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$ em $(W_0^{1,\gamma})'$ quando $n \longrightarrow \infty$. Temos então que pelo Lema 3.1 o nosso funcional é coercivo e portanto, por um argumento similar ao Lema 2.3 esta sequência é limitada. Então por esta sequência $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,\gamma}$, temos pelo Teorema *A*.4 que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$. Vamos provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,\gamma}$.

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle - \langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\
&= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx - \mu\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\Bigg(\int_\Omega (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u|^{m-2}u)\cdot(u_n-u)dx - \mu\int_\Omega (|u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx\Bigg) \\
&= \int_\Omega \Bigg(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \\
&\quad -a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Bigg)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\mu\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n - |u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx.
\end{aligned}
$$

E portanto, obtemos a importante igualdade

$$
\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \Bigg(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \\
&\quad -a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Bigg)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\mu\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n - |u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Como $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ fracamente convergente em $W_0^{1,\gamma}$ e também $J'(u) \in (W_0^{1,\gamma})'$, isto é, no dual de $W_0^{1,\gamma}$, então por [12, Proposição 3.5] obtemos:

$$\langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0.$$

Agora, como $\{u_n\}$ é limitada, temos então que $\|u_n - u\|_{1,\gamma}$ também é limitada e por $J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$ em $(W_0^{1,\gamma})'$ temos:

$$|\langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle| \leq \|J'(u_n)\|_{(W_0^{1,p})'} \|u_n - u\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0.$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle - \langle J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\ &= o_n(1), \end{aligned} \tag{3.8}$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Agora, usando o Teorema de Rellich Kondrachov (Teorema A.2) e a Desigualdade de Hölder A.1 com $k = i$ e $k' = \frac{i}{i-1}$, onde $i = m$ ou $i = s$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |u|^{i-2} u(u_n - u) dx \right| &\leq \left(\int_\Omega (|u|^{i-1})^{\frac{i}{i-1}} dx \right)^{\frac{i-1}{i}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^i dx \right)^{\frac{1}{i}} \\ &= \|u\|_i^{i-1} \|u_n - u\|_i \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega |u_n|^{i-2} u_n(u_n - u) dx \right| &\leq \left(\int_\Omega (|u_n|^{i-1})^{\frac{i}{i-1}} dx \right)^{\frac{i-1}{i}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^i dx \right)^{\frac{1}{i}} \\ &= \|u_n\|_i^{i-1} \|u_n - u\|_i \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto, obtemos que por (3.9) e (3.10)

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|u_n|^{i-2} u_n) - |u|^{i-2} u)(u_n - u) dx &= \int_\Omega |u_n|^{i-2} u_n (u_n - u) dx \\ &\quad + \int_\Omega |u|^{i-2} u(u_n - u) dx \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, aplicando as informações obtidas em (3.8) e (3.11) na equação (3.7), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx &= \\ \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle + \lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2} u_n - |u|^{m-2} u) \cdot (u_n - u) dx & \\ + \mu \int_\Omega (|u_n|^{m-2} u_n - |u|^{m-2} u) \cdot (u_n - u) dx &= o_n(1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, pelo Lema 2.2 e pela definição de γ, para $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u$ temos:

$$0 \leq C|\nabla u_n - \nabla u|^\gamma \leq \langle a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle. \tag{3.13}$$

Assim, integrando (3.13) em Ω e utilizando a equação (3.12) obtemos que:

$$\begin{aligned} C\|u_n - u\|_{1,\gamma}^{\gamma} &\leq \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &= o_n(1), \end{aligned}$$

o que implica $\|u_n - u\|_{1,\gamma} = o_n(1)$, donde concluímos a convergência forte em $W_0^{1,\gamma}$. $\square$

Para o próximo lema, vejamos uma propriedade necessária para aplicarmos o Teorema de Clark, sendo que, quando $m \geq p$ poderemos diminuir ou λ ou μ para satisfazer o resultado, obtendo majorações diferentes e portanto duas condições diferentes para solução.

Lema 3.2. *Assumamos que $1 < m < s < \gamma$ e que a função a satisfaz a hipótese (a_1). Então vale as seguintes propriedades:*

- *Se $m < p$ então para cada $k \in \mathbb{N}$, existem um subespaço linear X_k de $W_0^{1,\gamma}$, de dimensão k, e um real $\rho_k > 0$ tal que $\sup_{X_k \cap S_{\rho_k}} J_\lambda < 0$, onde $S_{\rho_k} = \{u \in W_0^{1,\gamma} : \|u\|_{1,\gamma} = \rho_k\}$;*
- *Se $m \geq p$ então existe λ^* tal que para $\lambda > \lambda^*$, a tese do item anterior é válida.*
- *Se $m \geq p$ então existe μ^* tal que para $\mu > \mu^*$, a tese do primeiro item é válida.*

Demonstração. Escolhamos um subespaço linear X_k de $W_0^{1,\gamma}$ com dimensão k. Assim, temos que X_k pode ser visto como subespaço de $W_0^{1,\gamma}$ ou como subespaço de L^i, com $i = m$ ou $i = s$ pois temos por definição que $W_0^{1,\gamma}$ é subespaço de $W^{1,\gamma} \subset L^\gamma$. Porém, pelo Teorema de Rellich Kondrachov (Teorema A.2) temos que $W^{1,\gamma}$ é um subespaço de L^i para todo $i \in [0, \gamma^*)$. Portanto, esta inclusão continua válida para $i = m$ e $i = s$ por serem menor que o expoente crítico γ^*, e então a afirmação segue. Desta forma X_k pode ser munido com duas normas, e por ele possuir dimensão finita, então temos que estas normas são equivalentes. Portanto, conseguimos constantes $c(k) > 0$ e $c'(k) > 0$ tal que

$$c(k)\|u\|_{1,\gamma}^m \leq \frac{1}{m}\|u\|_m^m, \quad \forall u \in X_k, \tag{3.14}$$

e

$$c'(k)\|u\|_{1,\gamma}^s \leq \frac{1}{s}\|u\|_s^s, \quad \forall u \in X_k. \tag{3.15}$$

Agora por (a_1) possuímos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx &\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}} dt\right) dx \\ &= \frac{\epsilon_2}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx \\ &= \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q. \end{aligned}$$

Suponha $\epsilon_3 = 0$. Então teríamos $\gamma = p$ e desta forma as normas $\|u\|_{1,p}$ e $\|u\|_{1,\gamma}$ são iguais. E se supormos $\epsilon_3 > 0$ então $p < \gamma = q$, donde concluímos que para toda $u \in X_k$, as normas $\|u\|_{1,p}$ e $\|u\|_{1,q}$ são equivalentes a norma $\|u\|_{1,\gamma}$, a depender desdes dois casos. Isto quer dizer que existem constantes $c_1(k) > 0$ e $c_2(k) > 0$ tais que:

$$\|u\|_{1,p}^p \leq c_1(k)\|u\|_{1,\gamma}^p \text{ e } \|u\|_{1,q}^q \leq c_2(k)\|u\|_{1,\gamma}^q.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \leq \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q \leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q. \tag{3.16}$$

Desta forma, se $m < p$, pelas equações anteriores e tomando

$$\rho_k = \min\left\{1, \left(\frac{\lambda c(k)}{\frac{2\epsilon_2 c_1(k)}{p} + \frac{2\epsilon_3 c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-m}}\right\} > 0, \tag{3.17}$$

obtemos que, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda\right] \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\left[\left(\frac{\lambda c(k)}{\frac{2\epsilon_2 c_1(k)}{p} + \frac{2\epsilon_3 c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-m}}\right]^{p-m} - c(k)\lambda\right] \\
&= \frac{-\rho_k^m c(k)\lambda}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} J_\lambda(u) \leq \dfrac{-\rho_k^m c(k)\lambda}{2} < 0$, e a prova do primeiro item está completa.

Se $p \geq m$, imporemos condições ou sobre γ ou sobre μ. Comecemos condicionando λ. Para cada X_k, tome $0 < \rho_k \leq 1$ e

$$\lambda \geq \lambda^* = \frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-m} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-m}}{c(k)} > 0.$$

Desta forma obtemos que, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx\\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx\\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m\\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m\\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda\right]\\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda^*\right]\\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\left(\frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-m} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-m}}{c(k)}\right)\right]\\
&= \frac{-\rho_k^m c(k)}{2} < 0.
\end{aligned}
$$

Daí $\sup\limits_{X_k\cap S_{\rho_k}} J_\lambda(u) \leq \frac{-\rho_k^m c(k)}{2} < 0$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$, e que conclui a prova do segundo item.

Agora vamos impor as condições para μ. Para cada X_k, tome $0 < \rho_k \leq 1$ e

$$
\mu \geq \mu^* = \frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-s} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-s}}{c'(k)} > 0.
$$

Desta forma obtemos que, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx\\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx\\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c'(k)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s\\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c'(k)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s\\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\mu\right]\\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\mu^*\right]\\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\left(\frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-s} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-s}}{c'(k)}\right)\right]\\
&= \frac{-\rho_k^s c'(k)}{2} < 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sup_{X_k \cap S_{\rho_k}} J_\lambda(u) \leq \dfrac{-\rho_k^s c(k)}{2} < 0$, sempre que $\mu \geq \mu^*$ e logo concluímos a demonstração do teorema.

$\square$

Podemos finalmente enunciar o primeiro resultado de existência para o problema (3.1).

Teorema 3.2. *Suponha que $a(t)$ satisfaz (a_1) e (a_3), com $1 < m < s < \gamma$. Então:*

- *Se $p < m$ então para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Se $p \geq m$ então possuímos duas opções:*

  i) existe $\lambda^* > 0$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda^*$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

  ii) existe $\mu^* > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$ e para cada $\mu \geq \mu^*$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Para esta demonstração, utilizaremos o Teorema de Clark que nos garantirá o que é afirmado nos itens 1 e 2.
Pelo Lema 3.1 e pela Proposição 3.1, temos que o funcional J_λ é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale. Além disso, uma aplicação direta mostra que o funcional é par. Então com estes fatos juntamente com o Lema 3.2 e com o fato de $J_\lambda(0) = 0$, ficamos aptos a aplicar o Teorema de Clark (Teorema A.9), respeitando a restrição sobre λ ou sobre μ para cada item. Dessa forma, para cada caso (para todo $\lambda, \mu > 0$ se $p < m$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$ e $\mu > 0$ se $p \geq m$ ou para todo $\lambda > 0$ e $\mu \geq \mu^*$ se $p \geq m$) obtemos uma sequência de pontos críticos (e logo soluções) $\{u_n\}$ para o funcional tal que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0$ em $W_0^{1,\gamma}$, quando $n \longrightarrow \infty$ e $J_\lambda(u_n) \leq 0$, o que finaliza a prova. $\square$

3.3.2 Caso 2: $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$

Como foi comentado acima, para este caso o nosso funcional não possui a propriedade de coercividade, pois este não será limitado inferiormente e desta forma precisaremos de outra estratégia, isto é, truncar o funcional, pois desta forma conseguiremos provar que o funcional truncado possui infinitos pontos críticos que coincidem com o funcional original. Desta forma vamos definir o funcional truncado.

Definição 3.3. *Definimos o funcional truncado* $I_\lambda : W_0^{1,\gamma} \longrightarrow \mathbb{R}$ *por:*

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx,$$

onde $\varphi \in C_0^1[0,+\infty)$ *é uma função auxiliar que satisfaz:*

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 1 & em & [0,+\infty), \\ \varphi(t) = 1, & se & t \in [0,\frac{1}{2}], \\ \varphi(t) = 0, & se & t \in [1,+\infty), \\ \varphi'(t) \leq 0 & para & t \in [0,+\infty]. \end{cases} \tag{3.18}$$

Observemos que, mesmo modificando o funcional, ele continua sendo um funcional de classe C^1, visto que a função φ também é de classe C^1, e sua derivada de Fréchet é dada por:

$$\begin{aligned} \langle I_\lambda'(u), v\rangle &= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda\int_\Omega |u|^{m-2}uvdx \\ &\quad -\varphi'(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu\gamma}{s}\int_\Omega |u|^s dx\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\nabla v dx - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\mu\int_\Omega |u|^{s-2}uvdx \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $u, v \in W_0^{1,q}$.

Vejamos então que as propriedades geométricas citadas acima são satisfeitas por I_λ.

Lema 3.3. *Suponha que* $a \in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ *satisfaz a hipótese* (a_1)*, com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$*. Então o funcional* I_λ *é coercivo em* $W_0^{1,\gamma}$*.*

Demonstração. Utilizando a hipótese (a_1) juntamente com o Teorema de Imersão Contínua (ver [12, Corolário 9.15]), obtemos que, para qualquer $u \in W_0^{1,\gamma}$:

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega\left(\int_0^{|\nabla u|^p} a(t)dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &\overset{(a_1)}{\geq} \frac{1}{p}\int_\Omega\left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3)t^{\frac{q-p}{p}}dt\right)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\quad -\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &= \frac{\epsilon_0}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\ &\quad -\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\ &= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}\|u\|_m^m - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu}{s}\|u\|_s^s \\ &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se $H(\epsilon_3) = 0$, temos então $\gamma = p$ e logo $\|u\|_{1,\gamma} = \|u\|_{1,p}$. Portanto, pela condição $m < \gamma$ e pela equação (3.20) obtemos que, se $\|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, temos em particular que $\|u\|_{1,\gamma} > 1$, e então:

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \frac{\epsilon_0}{\gamma}\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[\frac{\epsilon_0}{\gamma} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma}\right] \longrightarrow \infty,
\end{aligned}
$$

o que completa a coercividade para $H(\epsilon_3) = 0$.

Se $H(\epsilon_3) = 1$, temos então que $\gamma = q$ e logo $\|u\|_{1,\gamma} = \|u\|_{1,q}$. Portanto, pela condição $m < \gamma$ e pela equação (3.20) obtemos que, se $\|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, temos em particular que $\|u_n\|_{1,\gamma} > 1$, e então:

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&\geq \frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[\frac{\epsilon_1}{\gamma} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma}\right] \longrightarrow \infty,
\end{aligned}
$$

o que completa a coercividade para $H(\epsilon_3) = 1$. □

Proposição 3.2. *Suponhamos válidas as hipóteses (a_1) e (a_3) sobre a função a com $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. Temos então que o funcional I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\gamma}$ uma sequência $(PS)_c$, ou seja, $I_\lambda(u_n) \longrightarrow c$ e $I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$ em $(W_0^{1,\gamma})'$ quando $n \longrightarrow \infty$. Temos então que pelo Lema 3.3 o funcional I_λ é coercivo e, portanto, esta sequência é limitada por um argumento é análogo ao da demonstração do Lema 2.3. Então por esta sequência $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,\gamma}$, temos pelo Teorema A.4 que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$, a menos de subsequências, e vale também que:

$$
\int_\Omega |\nabla u_n|^\gamma \longrightarrow t_0 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}. \tag{3.21}
$$

Vamos provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,\gamma}$.

Observe que

$$
\begin{aligned}
\langle I_\lambda'(u_n) - I_\lambda'(u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu\gamma}{s}\int_\Omega |u_n|^s dx\int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)dx \\
&\quad -\mu\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\Bigg(\int_\Omega (a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u|^{m-2}u)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\varphi'(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu\gamma}{s}\int_\Omega |u|^s dx\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)dx \\
&\quad -\mu\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx\Bigg) \\
&= \int_\Omega \Big(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\cdot(\nabla u_n-\nabla u)dx \\
&\quad -\lambda\int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\Bigg(\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u_n|^s dx\int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)dx \\
&\quad -\varphi'(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u|^s dx\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)dx\Bigg) \\
&\quad -\mu\Bigg(\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx \\
&\quad -\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx\Bigg).
\end{aligned}
$$

E portanto, obtemos a importante igualdade

$$
\begin{aligned}
\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \int_\Omega \Big(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \\
&\quad - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \Big) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) dx \\
&\quad - \lambda \int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u) \cdot (u_n - u) dx \\
&\quad - \frac{\mu\gamma}{s} \Big(\varphi'(\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma}) \int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) dx \\
&\quad - \varphi'(\|u\|^\gamma_{1,\gamma}) \int_\Omega |u|^s dx \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u) dx \Big) \\
&\quad - \mu \Big(\varphi(\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma}) \int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n) \cdot (u_n - u) dx \\
&\quad - \varphi(\|u\|^\gamma_{1,\gamma}) \int_\Omega (|u|^{s-2}u) \cdot (u_n - u) dx \Big).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Como $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$ fracamente convergente em $W_0^{1,\gamma}$ e também $I'(u) \in (W_0^{1,\gamma})'$, isto é, no dual de $W_0^{1,\gamma}$, então por [12, Proposição 3.5] obtemos:

$$\langle I'_\lambda(u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0.$$

Agora, como $\{u_n\}$ é limitada, temos então que $\|u_n - u\|_{1,\gamma}$ também é limitada e por $I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0$ em $(W_0^{1,\gamma})'$ temos:

$$|\langle I'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle| \leq \|I'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,p})'} \|u_n - u\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0.$$

Portanto, segue que:

$$
\begin{aligned}
\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u\rangle &= \langle I'_\lambda(u_n), u_n - u\rangle - \langle I'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\
&= o_n(1),
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Agora, usando o Teorema de Rellich Kondrachov (Teorema A.2) e a Desigualdade de Hölder (Teorema A.1), com $k = i$ e $k' = \frac{i}{i-1}$, onde $i = m$ ou $i = s$ obtemos que:

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |u|^{i-2}u(u_n - u) dx \right| &\leq \left(\int_\Omega (|u|^{i-1})^{\frac{i}{i-1}} dx \right)^{\frac{i-1}{i}} \left(\int_\Omega |u_n - u|^i dx \right)^{\frac{1}{i}} \\
&= \|u\|_i^{i-1} \|u_n - u\|_i \longrightarrow 0
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

e

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega |u_n|^{i-2}u_n(u_n-u)dx\right| &\leq \left(\int_\Omega (|u_n|^{i-1})^{\frac{i}{i-1}}dx\right)^{\frac{i-1}{i}}\left(\int_\Omega |u_n-u|^i dx\right)^{\frac{1}{i}} \\ &= \|u_n\|_i^{i-1}\,\|u_n-u\|_i \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, obtemos por (3.24) e (3.25) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|u_n|^{m-2}u_n) - |u|^{m-2}u)(u_n-u)dx &= \int_\Omega |u_n|^{m-2}u_n(u_n-u)dx \\ &\quad + \int_\Omega |u|^{m-2}u(u_n-u)dx \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Agora, pela definição de φ, temos que $0 \leq \varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}) \leq 1$. Desta forma, obtemos novamente por (3.24) e (3.25) que:

$$\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u_n|^{s-2}u_n)\cdot(u_n-u)dx - \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega (|u|^{s-2}u)\cdot(u_n-u)dx = o_n(1). \tag{3.27}$$

Assim, aplicando as informações obtidas em (3.23), (3.26) e (3.27) na equação (3.22), obtemos que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\Bigg(\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u_n|^s dx\int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)dx \\ &\quad -\varphi'(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u|^s dx\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)dx\Bigg). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Vamos definir o funcional linear em $W_0^{1,\gamma}$ dado por :

$$v \longmapsto \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\cdot\nabla v dx.$$

Temos que este funcional é contínuo, e como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$ obtemos por [12, Proposição 3.5] que:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\cdot\nabla(u_n-u)dx = o_n(1). \tag{3.29}$$

Desta forma, substituindo em (3.28) obtemos:

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u_n|^s dx\int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u)dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Agora, defina

$$a_n = -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx.$$

Por (3.21), obtemos duas opções: se $t_0 = 0$ então obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla 0|^\gamma \longrightarrow 0.$$

Desta forma, por definição, concluiríamos que $u_n \longrightarrow 0$ em $W_0^{1,\gamma}$, o que provaria a condição de Palais-Smale. Agora suponha $t_0 > 0$. Pela continuidade de φ', temos que

$$\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma}) \longrightarrow \varphi'(t_0) \leq 0. \tag{3.31}$$

Além disso, pelo Teorema de Brezis-Lieb (Veja [13, Teorema 1]), obtemos que $\|u_n\|_s^s \longrightarrow \|u\|_s^s$. Portanto, temos que a_n é uma sequência convergente e não negativa. Assim, obtemos que:

$$-\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)dx = o_n(1).$$

Assim, subtraindo esta parcela na equação (3.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)dx \\
&= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)dx \\
&= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\right)\cdot \nabla(u_n - u)dx,
\end{aligned}$$

e portanto, obtemos que

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\
&\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma})\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\right)\cdot \nabla(u_n - u)dx.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

E por fim, vamos aplicar o Lema 2.2, com $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u$ na primeira componente, e para a segunda iremos aplicar o caso clássico do Lema (no qual pode ser conferido em [35]), em que este nos permite aplicar a desigualdade tanto para p quanto para q, e logo será satisfeito para os nossos dois casos em que estamos trabalhando baseado em γ. Então obtemos que:

$$0 \leq C_1|\nabla u_n - \nabla u|^\gamma \leq \langle a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle. \quad (3.33)$$

e

$$0 \leq C_2|\nabla u_n - \nabla u|^\gamma \leq \langle |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle. \quad (3.34)$$

Assim, integrando (3.33) e (3.34) em Ω e utilizando a equação (3.32) obtemos que:

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \int_\Omega (a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad -\frac{\mu\gamma}{s}\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{\gamma-2}\nabla u\right)\cdot\nabla(u_n - u)dx \\ &\geq (C_1 + C_2 a_n)\|u_n - u\|_{1,\gamma}^\gamma, \end{aligned}$$

onde novamente por a_n ser uma sequência não negativa e convergente, segue que $\|u_n - u\|_{1,\gamma} = o_n(1)$, donde concluímos a convergência forte em $W_0^{1,\gamma}$. □

Lema 3.4. *Assumamos que $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$ e que a função a satisfaz a hipótese (a_1). Então vale as seguintes propriedades:*

- *Se $m < p$ então para cada $k \in \mathbb{N}$, existem um subespaço linear X_k de $W_0^{1,\gamma}$, de dimensão k, e um real $\rho_k > 0$ tal que $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} I_\lambda < 0$, onde $S_{\rho_k} = \{u \in W_0^{1,\gamma} : \|u\|_{1,\gamma} = \rho_k\}$;*

- *Se $m \geq p$ então existe λ^* tal que para $\lambda > \lambda^*$, a tese do item anterior é válida.*

- *Se $m \geq p$ então existe μ^* tal que para $\mu > \mu^*$, a tese do primeiro item é válida.*

Demonstração. Demonstração.
Conseguimos duas constantes $c(k) > 0$ e $c'(k) > 0$ tal que

$$c(k)\|u\|_{1,\gamma}^m \leq \frac{1}{m}\|u\|_m^m, \quad \forall u \in X_k, \quad (3.35)$$

e

$$c'(k)\|u\|_{1,\gamma}^s \leq \frac{1}{s}\|u\|_s^s, \quad \forall u \in X_k, \quad (3.36)$$

onde por (a_1) possuímos a seguinte estimativa:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx &\overset{(a_1)}{\leq} \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\int_0^{|\nabla u|^p} \epsilon_2 + \epsilon_3 t^{\frac{q-p}{p}} dt\right) dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\epsilon_3}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q dx \\
&= \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q.
\end{aligned}
$$

Agora, novamente por outro argumento feito no Lema 3.2 existem constantes $c_1(k) > 0$ e $c_2(k) > 0$ tais que:

$$\|u\|_{1,p}^p \leq c_1(k)\|u\|_{1,\gamma}^p \text{ e } \|u\|_{1,q}^q \leq c_2(k)\|u\|_{1,\gamma}^q.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx \leq \frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,q}^q \leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q. \tag{3.37}$$

Desta forma, se $m < p$, pelas equações anteriores e tomando

$$\rho_k = \min\left\{1, \left(\frac{\lambda c(k)}{\frac{2\epsilon_2 c_1(k)}{p} + \frac{2\epsilon_3 c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-m}}\right\} > 0, \tag{3.38}$$

obtemos que, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$, então $0 \leq \varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma) \leq 1$ e

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda\right] \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\left[\left(\frac{\lambda c(k)}{\frac{2\epsilon_2 c_1(k)}{p} + \frac{2\epsilon_3 c_2(k)}{q}}\right)^{\frac{1}{p-m}}\right]^{p-m} - c(k)\lambda\right] \\
&= \frac{-\rho_k^m c(k)\lambda}{2} < 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sup\limits_{X_k \cap S_{\rho_k}} I_\lambda(u) \leq \dfrac{-\rho_k^m c(k)\lambda}{2} < 0$, e a prova do primeiro item está completa.

Se $p \geq m$, para cada X_k, tome $0 < \rho_k \leq 1$ e

$$\lambda \geq \lambda^* = \frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-m} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-m}}{c(k)} > 0.$$

Desta forma obtemos que, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$:

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \frac{\mu}{s}\varphi(\|u\|_{1,\gamma}^\gamma)\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c(k)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda\right] \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\lambda^*\right] \\
&\leq \rho_k^m\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-m} - c(k)\left(\frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-m} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-m}}{c(k)}\right)\right] \\
&= \frac{-\rho_k^m c(k)}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{X_k \cap S_{\rho_k}} I_\lambda(u) \leq \frac{-\rho_k^m c(k)}{2} < 0,$$

sempre que $\lambda \geq \lambda^*$ e logo a prova do segundo item está completa.

Agora vamos impor as condições para μ. Para cada X_k, tome $0 < \rho_k \leq \frac{1}{2}$ e

$$\mu \geq \mu^* = \frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-s} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-s}}{c'(k)} > 0.$$

Desta forma, para $u \in S_{\rho_k} \cap X_k$, temos que $\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma) = 1$, visto que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma < \frac{1}{2},$$

e também:

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u|^m dx - \varphi(\|u_n\|_\gamma^\gamma)\frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u|^s dx \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c'(k)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&\leq c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^p - c'(k)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\mu\right] \\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\mu^*\right] \\
&\leq \rho_k^s\left[\left(c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\right)\rho_k^{p-s} - c'(k)\left(\frac{1}{2} + \frac{c_1(k)\frac{\epsilon_2}{p}\rho_k^{p-s} + c_2(k)\frac{\epsilon_3}{q}\rho_k^{p-s}}{c'(k)}\right)\right] \\
&= \frac{-\rho_k^s c'(k)}{2} < 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sup\limits_{X_k\cap S_{\rho_k}} J_\lambda(u) \leq \dfrac{-\rho_k^s c(k)}{2} < 0$, sempre que $\mu \geq \mu^*$ e logo concluímos a demonstração deste resultado. $\square$

Podemos então finalmente demonstrar o primeiro resultado de existência para o problema (3.1) para este caso.

Teorema 3.3. *Suponha que $a(t)$ satisfaz (a_1) e (a_3), com $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. Então*

- *Se $p < m$ então para cada $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Se $p \geq m$ então existe $\lambda^* > 0$ tal que para cada $\lambda \geq \lambda^*$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

- *Se $p \geq m$ então existe $\mu^* > 0$ tal que para cada $\mu \geq \mu^*$ e $\lambda > 0$, o problema (3.1) possui infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J_\lambda(u_n) \leq 0 \text{ e } \|u_n\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Para esta demonstração, utilizaremos o Teorema de Clark que nos garantirá a existência de pontos críticos para I_λ, os quais, provaremos que são pontos críticos para J_λ.
Pelo Lema 3.3 e pela Proposição 3.2, temos que o funcional I_λ é coercivo e, portanto, limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale. Além disso, uma aplicação direta mostra que o funcional é par. Então com estes fatos juntamente com o Lema 3.4 e com o fato de $I_\lambda(0) = 0$, ficamos aptos a aplicar o Teorema de Clark (Teorema A.9), a depender da condição relacionada a p e m. Dessa forma, se $m < p$ obtemos uma sequência de pontos críticos $\{u_n\}$ para o funcional I_λ tal que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$ e $I_\lambda(u_n) \leq 0$ para todo $\lambda, \mu > 0$, enquanto se $m \geq p$ obteremos o mesmo afirmado anteriormente, porém para todo $\lambda \geq \lambda^*$ e para todo $\mu > 0$ ou para todo $\lambda > 0$ e $\mu \geq \mu^*$. Desta forma, para finalizar esta prova, vamos mostrar que uma infinidade de pontos críticos para I_λ com norma suficientemente pequena também são pontos críticos para J_λ. Por definição de ponto crítico, temos que $\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle = 0$ para todo $v \in W_0^{1,\gamma}$. Então por (3.19), obtemos que:

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{m-2}u_n v dx - \varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\mu \int_\Omega |u_n|^{s-2}u_n v dx$$
$$-\varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma)\frac{\mu\gamma}{s}\int_\Omega |u_n|^s dx \int_\Omega |\nabla u_n|^{\gamma-2}\nabla u_n \nabla v dx = 0. \tag{3.39}$$

Vimos que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, então pela definição de limite, existe $n_0 > 0$ tal que para $n \geq n_0$ temos $\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma < \frac{1}{2}$ e consequentemente

$$\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma) = 1 \text{ e } \varphi'(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma) = 0.$$

Então substituindo em (3.39) obtemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{m-2}u_n v dx - \mu \int_\Omega |u_n|^{s-2}u_n v dx \\ &= \langle J'_\lambda(u_n), v\rangle, \end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,q}$. Desta forma concluímos que u_n é ponto crítico para J_λ para todo $n \geq n_0$. Além disso, por $\varphi(\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma) = 1$, temos que $J_\lambda(u_n) = I_\lambda(u_n) \leq 0$, o que completa a demonstração. □

O próximo resultado nos garantirá que se tomarmos λ suficientemente pequeno, então o problema (3.1) possui também infinitas soluções com energia positiva. Desta forma, os próximos resultados mostram que o funcional J_λ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha Simétrico para λ suficientemente pequeno.

Lema 3.5. *Suponha válidas as hipóteses* (a_1), (a_2') *e* (a_3) *com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. *Então o funcional* J_λ *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Para isto seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ uma sequência $(PS)_c$, então temos que esta satisfaz

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow c \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Vejamos que esta sequência possui uma subsequência que converge fortemente em $W_0^{1,\gamma}$. Primeiramente vejamos que esta é limitada. Vamos limitar inferiormente e superiormente a subtração do funcional J_λ pela sua derivada (definida pela equação (3.5)), ambos aplicados na sequência $\{u_n\}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u_n|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u_n|^s dx \\ &\quad -\frac{1}{s}\left(\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^m dx - \mu\int_\Omega |u_n|^s dx\right) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\ &= +\left(-\tfrac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{s}\right)\int_\Omega |u_n|^m dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Pela condição de $s > m$, obtemos então que

$$C = -\frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{s} < 0.$$

Desta forma, aplicando Imersão Contínua de Sobolev (Veja [12, Corolário 9.15]), obtemos $C' > 0$ tal que

$$C\int_\Omega |u_n|^m dx = C\|u_n\|_m^m \geq CC'\|u_n\|_{1,\gamma}^m, \tag{3.41}$$

onde denotaremos $K = CC'$. A hipótese (a'_2), nos diz que existe α com

$$\frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{s}{p}$$

tal que

$$\frac{1}{\alpha}a(t)t \leq A(t),$$

para todo $t \geq 0$. Assim tomando $t = |\nabla u_n|^p$ e integrando em Ω de ambos os lados, obtemos que

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \leq \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx,$$

e então, substituindo esta última expressão na equação (3.40), juntamente com a hipótese (a_1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{s}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\quad + \left(-\frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{s}\right)\int_\Omega |u_n|^m dx \\
&\overset{(a_2')}{\geq} \frac{1}{p}\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{s}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\quad + \left(-\frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{s}\right)\int_\Omega |u_n|^m dx \\
&\overset{(3.41)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + K\|u_n\|^m_{1,\gamma} \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)\int_\Omega \left[\epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3)(|\nabla u_n|^p)^{\frac{q-p}{p}}\right]|\nabla u_n|^p dx + K\|u_n\|^m_{1,\gamma} \\
&= \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)\epsilon_0\|u_n\|^p_{1,p} + \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)H(\epsilon_3)\epsilon_1\|u_n\|^q_{1,q} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma} \\
&= C_1\|u_n\|^p_{1,p} + H(\epsilon_3)C_2\|u_n\|^q_{1,q} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma},
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)\epsilon_0$ e $C_2 = \left(\frac{1}{p\alpha} - \frac{1}{s}\right)\epsilon_1$ são constantes positivas pois, por (a_2'), temos que $\alpha < \frac{s}{p}$. Desta forma obtemos duas desigualdades importantes: Se $H(\epsilon_3) = 0$ então $\gamma = p$ e logo obtemos:

$$
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \geq C_1\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma}.
$$

Se $H(\epsilon_3) = 1$ então $\gamma = q$ e logo obtemos

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &\geq C_1\|u_n\|^p_{1,p} + C_2\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma} \\
&\geq C_2\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de ambas as formas obtemos que

$$
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \geq M\|u_n\|^\gamma_{1,\gamma} + K\|u_n\|^m_{1,\gamma}, \tag{3.42}
$$

com $M = C_1$ ou $M = C_2$.

Por outro lado, sabemos que:

$$
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq \left|J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right| \leq |J_\lambda(u_n)| + \frac{1}{s}\left|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right|.
$$

Temos que $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência real e por $\{u_n\}$ ser uma sequência $(PS)_c$, temos que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow c$. Portanto, $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência limitada, no que implica que existe $\bar{C}_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|J_\lambda(u_n)| \leq \bar{C}_1. \tag{3.43}$$

Além disso, temos que

$$|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle| \leq \|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \cdot \|u_n\|_{1,\gamma}. \tag{3.44}$$

Portanto, utilizando o fato de que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \longrightarrow 0$, temos então que existe $\bar{K}$ tal que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \leq \bar{K}$. E ainda, pelas equações (3.43), (3.44) e tomando $\bar{C}_2 = \max\{\bar{C}_1, \bar{K}\}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &\leq |J_\lambda(u_n)| + \frac{1}{s}|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle| \\ &\leq \bar{C}_1 + \bar{K} \cdot \|u_n\|_{1,\gamma} \\ &\leq \bar{C}_2 + \bar{C}_2\|u_n\|_{1,\gamma} \\ &= \bar{C}_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Portanto, pelas equações (3.42) e (3.45) obtemos a seguinte estimativa:

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma} + K\|u_n\|_{1,\gamma}^{m} \leq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{s}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq \bar{C}_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}),$$

donde obtemos que

$$\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma}\left(M + K\|u_n\|_{1,\gamma}^{m-\gamma}\right) \leq \bar{C}_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}). \tag{3.46}$$

Assim, se supormos por contradição que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$ então podemos supor que $\|u_n\|_{1,\gamma} \neq 0$. Assim, dividindo ambos os lados da equação (3.46) por $\|u_n\|_{1,\gamma}$, obtemos:

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma-1}\left(M + K\|u_n\|_{1,\gamma}^{m-\gamma}\right) \leq \frac{\bar{C}_2}{\|u_n\|_{1,\gamma}} + \bar{C}_2.$$

Então, se $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, por $\gamma - 1 \geq 1$ e por $\gamma > m$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo da desigualdade acima irá para infinito enquanto é majorado por uma constante no lado direito. Assim, temos $\{u_n\}$ limitada.

Então por $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,\gamma}$, temos pelo Teorema A.4 que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$. Então resta apenas provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,\gamma}$, e o argumento para tal segue igualmente o argumento feito na Proposição 3.1, donde concluímos a demonstração deste lema. □

Lema 3.6. *Suponhamos válida a hipótese* (a_1) *com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. *Então existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todos* $0 < \lambda < \lambda^*$ *e* $\mu > 0$, *existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $J_\lambda(u) \geq \alpha$ *quando*

$\|u\|_{1,\gamma} = \rho$.

Demonstração. Pelo argumento feito na equação (3.6) temos a seguinte desigualdade:

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s,$$

onde concluímos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq M\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^m\left[M\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-m} - \frac{\lambda}{m}C_1 - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-m}\right], \end{aligned}$$

com $M = \frac{\epsilon_0}{p}$ se $H(\epsilon_3) = 0$ ou $M = \frac{\epsilon_1}{q}$ se $H(\epsilon_3) = 1$. Escolhendo $0 < \rho < \left(\frac{Ms}{\mu C_2}\right)^{\frac{1}{s-\gamma}}$ temos que

$$M\rho^{\gamma-m} - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-m} > 0.$$

Desta forma, para toda $u \in W_0^{1,\gamma}$ com $\|u\|_{1,\gamma} = \rho$ e para todo λ satisfazendo

$$0 < \lambda < \frac{m(M\rho^{\gamma-m} - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-m})}{C_1}$$

temos que

$$J_\lambda(u) \geq \rho^m\left[M\rho^{\gamma-m} - \frac{\lambda}{m}C_1 - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-m}\right] > 0,$$

donde o resultado segue tomando

$$\alpha = \rho^m\left[M\rho^{\gamma-m} - \frac{\lambda}{m}C_1 - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-m}\right].$$

□

Lema 3.7. *Assuma as hipóteses* (a_1) *e* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. *Então para todo subespaço linear com dimensão finita* $K \subset W_0^{1,\gamma}$ *existe uma constante* $\theta(K)$ *tal que* $J_\lambda(u) \leq 0$ *sempre que* $\|u\|_{1,\gamma} \geq \theta(K)$, *onde* $u \in K$.

Demonstração. Seja X_k um subespaço linear de $W_0^{1,\gamma}$ que possui dimensão finita. Utilizando (a_1) juntamente com os argumentos feitos no Lema 3.2 sobre equivalência de normas em espaços de dimensão finita, obtemos constantes $c(K)$, $c'(K)$, $c_1(K)$, $c_2(K) > 0$ tais que, tomando $u \in X_k$, temos:

$$J_\lambda(u) \leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s.$$

Agora, se $\epsilon_3 = 0$ temos que $\gamma = p$, e desta forma, por $\gamma < s$ obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&\leq \frac{\epsilon_2}{\gamma}c_1(K)\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^s\left[\frac{\epsilon_2}{\gamma}c_1(K)\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^{m-s} - c'(K)\mu\right] < 0,
\end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande. Por outro lado se $\epsilon_3 > 0$ temos então que $p < \gamma = q < s$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^s\left[c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^{p-s} + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^{q-s} - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^{m-s} - c'(K)\mu\right] < 0
\end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande, o que completa a demonstração. □

Vamos ao resultado principal sobre existência.

Teorema 3.4. *Suponham válidas as hipóteses* (a_1), (a_2') *e* (a_3), *com* $1 < m < \gamma < s < \gamma^*$. *Assim, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que para todos* $0 < \lambda < \lambda^*$ *e* $\mu > 0$, *o problema* (3.1) *admite infinitas soluções* $\{u_n\}$ *satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \ \text{e} \ \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \ \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Temos que J_λ é um funcional par satisfazendo $J_\lambda(0) = 0$. Além disso, pelos Lemas 3.5, 3.6 e 3.7 temos que todos os requisitos necessários para aplicar o Teorema do Passo da Montanha Simétrico (Teorema A.10) são satisfeitos. Portanto, concluímos que, para todos $0 < \lambda < \lambda^*$, com λ^* dado pelo Lema 3.6 e $\mu > 0$, existe uma sequência ilimitada de valores críticos para J_λ, ou seja, existirá uma sequência $\{u_n\}$ de pontos críticos (e portanto soluções para (3.1)) que satisfaz $J_\lambda(u_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Agora, como para cada subconjunto limitado de $W_0^{1,\gamma}$, temos que J_λ é um funcional limitado para este conjunto, então temos que ter obrigatoriamente que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, o que completa a demonstração. □

3.3.3 Caso 3: $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$

Para este temos que a geometria satisfeita pelo funcional será a de passo da montanha, onde conseguiremos mostrar a existência de infinitas soluções de energia positiva para todo λ suficientemente pequeno.

Lema 3.8. *Suponha válidas as hipóteses* (a_1), (a_2') *e* (a_3) *com* $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o funcional* J_λ *satisfaz a condição de Palais-Smale para todo* $0 < \lambda < \lambda^*$.

Demonstração. Tome $\{u_n\} \subset W_0^{1,\gamma}$ uma sequência $(PS)_c$. Desta forma nosso objetivo é encontrar $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda < \lambda^*$ a sequência $\{u_n\}$ convirja fortemente a menos de subsequências. Pelo Lema 3.5 majoramos inferiormente e superiormente a subtração do funcional pela sua derivada e obtivemos a seguinte desigualdade:

$$\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma}\left(M + K\|u_n\|_{1,\gamma}^{m-\gamma}\right) \leq C_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}),$$

relembrando que

$$K = CC' = C'\left(-\frac{\lambda}{m} + \frac{\lambda}{s}\right) < 0.$$

Aplicando a hipótese $\gamma = m$, obtemos que

$$\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma}(M + K) \leq C_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}), \tag{3.47}$$

Escolha λ satisfazendo

$$0 < \lambda < \frac{msM}{C'(s-m)} = \lambda^*.$$

Desta forma obtemos que

$$M + K > 0. \tag{3.48}$$

Portanto, se supormos por contradição que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$ então podemos supor que $\|u_n\|_{1,\gamma} \neq 0$. Assim, dividindo ambos os lados da equação (3.3.3) por $\|u_n\|_{1,\gamma}$, obtemos:

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma-1}(M + K) \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,\gamma}} + C_2.$$

Então, se $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, por $\gamma - 1 \geq 1$ e por $M + K > 0$ para $\lambda < \lambda^*$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo da desigualdade acima irá para infinito enquanto é majorado por uma constante no lado direito. Assim, temos $\{u_n\}$ limitada.

Então por $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,\gamma}$, temos pelo Teorema A.4 que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$. Então resta apenas provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,\gamma}$, e o argumento para tal segue igualmente o argumento feito na Proposição 3.1, donde concluímos que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale para todo $\lambda < \lambda^*$. □

Lema 3.9. *Suponhamos válida a hipótese (a_1), com $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$. Então existe $\lambda^{**} > 0$ tal que para todos $0 < \lambda < \lambda^{**}$ e $\mu > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq \alpha$ quando $\|u\|_{1,\gamma} = \rho$.*

Demonstração. Pelo argumento feito na equação (3.6) temos a seguinte desigualdade:

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^{p} + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^{q} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s},$$

onde concluímos que, por $\gamma = m$

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq M\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} - \frac{\lambda}{m} C_1 \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} - C_2 \frac{\mu}{s} \|u\|_{1,\gamma}^{s} \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} \left[M - \frac{\lambda}{m} C_1 - C_2 \frac{\mu}{s} \|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma} \right], \end{aligned}$$

com $M = \dfrac{\epsilon_0}{p}$ se $H(\epsilon_3) = 0$ ou $M = \dfrac{\epsilon_1}{q}$ se $H(\epsilon_3) = 1$. Escolhendo $0 < \rho < \left(\dfrac{Ms}{\mu C_2}\right)^{\frac{1}{(s-\gamma)}}$ temos que

$$M - C_2 \frac{\mu}{s} \rho^{s-\gamma} > 0.$$

Desta forma, para toda $u \in W_0^{1,\gamma}$ com $\|u\|_{1,\gamma} = \rho$ e para todo λ satisfazendo

$$0 < \lambda < \frac{m(M - C_2 \frac{\mu}{s} \rho^{s-m})}{C_1} = \lambda^{**}$$

temos que

$$J_\lambda(u) \geq \rho^m \left[M - \frac{\lambda}{m} C_1 - C_2 \frac{\mu}{s} \rho^{s-\gamma} \right] > 0$$

donde o resultado segue tomando

$$\alpha = \rho^m \left[M - \frac{\lambda}{m} C_1 - C_2 \frac{\mu}{s} \rho^{s-\gamma} \right].$$

□

Lema 3.10. *Assuma as hipóteses* (a_1) *e* $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$*. Então para todo subespaço linear com dimensão finita* $K \subset W_0^{1,\gamma}$ *existe uma constante* $\theta(K)$ *tal que* $J_\lambda(u) \leq 0$ *sempre que* $\|u\|_{1,\gamma} \geq \theta(K)$*, onde* $u \in K$*.*

Demonstração. Seja X_k um subespaço linear de $W_0^{1,\gamma}$ que possui dimensão finita. Utilizando (a_1) juntamente com os argumentos feitos no Lema 3.2 sobre equivalência de normas em espaços de dimensão finita, obtemos constantes $c(K)$, $c'(K)$, $c_1(K)$, $c_2(K) > 0$ tais que, tomando $u \in X_k$, temos:

$$J_\lambda(u) \leq c_1(K) \frac{\epsilon_2}{p} \|u\|_{1,\gamma}^{p} + c_2(K) \frac{\epsilon_3}{q} \|u\|_{1,\gamma}^{q} - c(K)\lambda \|u\|_{1,\gamma}^{m} - c'(K)\mu \|u\|_{1,\gamma}^{s}.$$

Agora, se $\epsilon_3 = 0$ temos que $m = \gamma = p$, e desta forma, por $m = \gamma < s$ obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\leq c_1(K) \frac{\epsilon_2}{p} \|u\|_{1,\gamma}^{p} + c_2(K) \frac{\epsilon_3}{q} \|u\|_{1,\gamma}^{q} - c(K)\lambda \|u\|_{1,\gamma}^{m} - c'(K)\mu \|u\|_{1,\gamma}^{s} \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{\gamma} c_1(K) \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} - c(K)\lambda \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} - c'(K)\mu \|u\|_{1,\gamma}^{s} \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^{s} \left[\frac{\epsilon_2}{\gamma} c_1(K) \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c(K)\lambda \|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c'(K)\mu \right] < 0, \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande. Por outro lado se $\epsilon_3 > 0$ temos então que $p < \gamma = q = m < s$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^s\left[c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^{p-s} + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c'(K)\mu\right] < 0 \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande, o que completa a demonstração. □

Vamos ao resultado principal sobre existência.

Teorema 3.5. *Suponham válidas as hipóteses (a_1), (a_2') e (a_3), com $1 < m = \gamma < s < \gamma^*$. Assim, existe $\Lambda > 0$ tal que para todos $0 < \lambda < \Lambda$ e $\mu > 0$, o problema (3.1) admite infinitas soluções $\{u_n\}$ satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \text{ e } \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Temos que J_λ é um funcional par satisfazendo $J_\lambda(0) = 0$. Além disso, pelos Lemas 3.8, 3.9 e 3.10 temos que todos os requisitos necessários para aplicar o Teorema do Passo da Montanha Simétrico (Teorema A.10) são satisfeitos quando tomamos $0 < \lambda < \Lambda = \min\{\lambda^*, \lambda^{**}\}$. Portanto, concluímos que, para todos $0 < \lambda < \Lambda$ e $\mu > 0$, existe uma sequência ilimitada de valores críticos para J_λ, ou seja, existirá uma sequência $\{u_n\}$ de pontos críticos (e portanto soluções para (3.1)) que satisfaz $J_\lambda(u_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Além disso, pelo mesmo argumento do Teorema 3.4, temos $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, o que completa a demonstração. □

3.3.4 Caso 4: $1 < s < \gamma = m < \gamma^*$

Neste caso, veremos que o problema (3.1) irá possuir pelo menos uma solução não trivial para λ suficientemente pequeno, onde este será garantido via Princípio Variacional de Ekeland.

Primeiramente observe que J_λ irá satisfazer a condição de Palais-Smale pra este caso, onde a demonstração é análoga ao Caso 1, visto na Proposição 3.1. Porém, para este comentário ser válido, precisaremos provar que o J_λ é coercivo, donde isto nos fornecerá a limitação de uma sequência $(PS)_c$.

Lema 3.11. *Suponhamos que $a(t)$ satisfaz a hipótese (a_1), com $1 < s < \gamma = m < \gamma^*$. Então existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda < \lambda^*$ o funcional J_λ é coercivo.*

Demonstração. Pelo argumento feito na equação (3.6) temos a seguinte desigualdade:

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s,$$

e, por $\gamma = m$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq M\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma} - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s} \\
&= \|u\|_{1,\gamma}^{s}\left[\left(M - \frac{\lambda}{m}C_1\right)\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - C_2\frac{\mu}{s}\right],
\end{aligned}
$$

com $M = \dfrac{\epsilon_0}{p}$ se $H(\epsilon_3) = 0$ ou $M = \dfrac{\epsilon_1}{q}$ se $H(\epsilon_3) = 1$. Então por $s < \gamma$ e para todo $\lambda > 0$ satisfazendo

$$
0 < \lambda < \frac{Mm}{C_1} = \lambda^*
$$

obtemos que

$$
J_\lambda(u) \geq \|u\|_{1,\gamma}^{s}\left[\left(M - \frac{\lambda}{m}C_1\right)\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - C_2\frac{\mu}{s}\right] \longrightarrow +\infty,
$$

quando $\|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, o que conclui a coercividade. □

Vamos ao resultado principal deste caso.

Teorema 3.6. *Suponha que $a(t)$ satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_3), com $1 < s < \gamma = m < \gamma^*$. Então:*

1. *Se $p > s$ existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda < \lambda^*$, o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não trivial com energia mínima;*

2. *Se $p \leq s$ existe $\lambda^* > 0$ e $\mu^* > 0$ tal que para $\lambda < \lambda^*$ e para $\mu > \mu^*$, o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não trivial com energia mínima;*

Demonstração. Pelo Lema 3.11, sabemos que o funcional é coercivo e portanto limitado inferiormente. Desta forma, pelo Corolário A.1, temos que existe uma sequência $(PS)_c$ $\{u_n\} \subset W_0^{1,\gamma}$ com

$$
J_\lambda(u_n) \longrightarrow c = \inf_{W_0^{1,\gamma}} J_\lambda \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0 \text{ em } (W_0^{1,\gamma})', \text{ quando } n \longrightarrow \infty.
$$

Porém, temos que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale, onde a demonstração é análoga a Proposição 3.1, onde desenvolvemos o produto interno $\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle$ e provamos que algumas parcelas desta igualdade convergem a 0, para garantir a convergência forte via o Lema 2.2. Segue então que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $\{u_n\}$ converge forte para u em $W_0^{1,\gamma}$ e juntamente com a continuidade de J_λ, obtemos que:

$$
J_\lambda(u) = c = \inf_{v \in W_0^{1,\gamma}} J_\lambda(v),
$$

onde garantimos que u é uma solução com energia mínima por u ser um ponto de mínimo global para o funcional. A prova deste argumento é análoga a prova do Lema 2.1 vista na primeira parte do trabalho . Vejamos que esta é não nula. Majorando superiormente o funcional J_λ através da hipótese (a_1) e por u ser ponto de mínimo global, então para $v \in W_0^{1,\gamma}$, onde $v \neq 0$ e $t > 0$:

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(tv) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tv|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |tv|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |tv|^s dx \\ &\overset{(a_1)}{\leq} \frac{\epsilon_2}{p}t^p\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}t^q\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}t^m\|v\|_m^m - \frac{\mu}{s}t^s\|v\|_s^s. \end{aligned}$$

Se $\epsilon_3 = 0$, temos então $\gamma = p$. Assim obtemos que:

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \frac{\epsilon_2}{p}t^p\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}t^q\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}t^m\|v\|_m^m - \frac{\mu}{s}t^s\|v\|_s^s \\ &= t^s\left[\frac{\epsilon_2}{\gamma}t^{\gamma-s}\|v\|_{1,p}^p - \frac{\lambda}{\gamma}t^{\gamma-s}\|v\|_\gamma^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s\right]. \end{aligned}$$

Então, como $\gamma > s$ existe $t' > 0$ tal que

$$J(u) \leq (t')^s\left[\frac{\epsilon_2}{\gamma}(t')^{\gamma-s}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{\gamma}(t')^{\gamma-s}\|v\|_\gamma^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s\right] < 0,$$

donde concluímos que $u \neq 0$, visto que caso contrário, isto é, se $u = 0$ então $J(0) = 0$. Portanto, foi demonstrado que para $\epsilon_3 = 0$ o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não trivial cuja energia é mínima e negativa.

Se $\epsilon_3 > 0$, temos então $\gamma = q$. Assim obtemos que:

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \frac{\epsilon_2}{p}t^p\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{q}t^q\|v\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}t^m\|v\|_m^m - \frac{\mu}{s}t^s\|v\|_s^s \\ &= t^s\left[\frac{\epsilon_2}{p}t^{p-s}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{\gamma}t^{\gamma-s}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{\gamma}t^{\gamma-s}\|v\|_\gamma^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s\right]. \end{aligned}$$

Então, se $p > s$ e utilizando o fato de $\gamma > s$ garantimos a existência de $t' > 0$ tal que

$$J(u) \leq (t')^s\left[\frac{\epsilon_2}{p}(t')^{p-s}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{\gamma}(t')^{\gamma-s}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{\gamma}(t')^{\gamma-s}\|v\|_\gamma^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s\right] < 0,$$

donde concluímos que $u \neq 0$. Portanto, para $p > s$ concluímos a existência de uma solução não trivial de energia mínima negativa sempre que $\lambda < \lambda^*$ e para todo $\mu > 0$.

Se $1 < p \leq s$ então tome $\mu > 0$ tal que

$$\mu > \frac{s\left(\frac{\epsilon_2}{p}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{\gamma}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma\right)}{\|v\|_s^s} = \mu^* > 0. \tag{3.49}$$

Desta forma, obtemos por (a_1) e por u ser ponto de mínimo global que:

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(v) \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{p}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{\gamma}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{\gamma}\|v\|_\gamma^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{p}\|v\|_{1,p}^p + \frac{\epsilon_3}{\gamma}\|v\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\mu}{s}\|v\|_s^s < 0. \end{aligned}$$

Desta forma, para $p \leq s$ concluímos que existe uma solução será não nula sempre que $\lambda < \lambda^*$ e $\mu > \mu^*$, o que conclui a demonstração do teorema. □

3.3.5 Caso 5: $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$

Temos que para este caso, possuiremos infinitas soluções com energia positiva. Para isto vejamos primeiramente uma propriedade fundamental para o funcional.

Lema 3.12. *Suponha válidas as hipóteses (a_1), (a_2) e (a_3) com $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$. Então o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Para isto seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,q}$ uma sequência $(PS)_c$, então temos que esta satisfaz

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow c \text{ e } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Vejamos que esta sequência possui uma subsequência que converge fortemente em $W_0^{1,\gamma}$. Vejamos então que esta é limitada. Utilizaremos novamente a técnica de majorar inferiormente e superiormente o funcional J_λ subtraído pela sua derivada, ambos aplicados na sequência $\{u_n\}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{\lambda}{m}\int_\Omega |u_n|^m dx - \frac{\mu}{s}\int_\Omega |u_n|^s dx \\ &\quad -\frac{1}{m}\left(\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \lambda\int_\Omega |u_n|^m dx - \mu\int_\Omega |u_n|^s dx\right) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\ &\quad + \left(-\frac{\mu}{s} + \frac{\mu}{m}\right)\int_\Omega |u_n|^s dx. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Pela condição de $s \geq m$, obtemos então que

$$-\frac{\mu}{s} + \frac{\mu}{m} \geq 0.$$

Desta forma, obtemos $c > 0$ tal que

$$\left(-\frac{\mu}{s} + \frac{\mu}{m}\right)|t|^s \geq -c, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então utilizando a equação anterior obtemos que

$$\left(-\frac{\mu}{s}+\frac{\mu}{m}\right)\int_\Omega |u_n|^s dx \geq -c\cdot med(\Omega) := c'. \tag{3.51}$$

A hipótese (a_2), nos diz que existe α com $\frac{\gamma}{p} \leq \alpha < \frac{m}{p}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha}a(t)t \leq A(t),$$

para todo $t \geq 0$. Assim tomando $t = |\nabla u_n|^p$ e integrando em Ω de ambos os lados, obtemos que

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \leq \int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx,$$

e então, substituindo na equação (3.50), juntamente com a hipótese (a_1), obtemos:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\quad + \left(-\frac{\mu}{s}+\frac{\mu}{m}\right)\int_\Omega |u_n|^s dx \\
&\overset{(a_2)}{\geq} \frac{1}{p}\frac{1}{\alpha}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{m}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\
&\quad + \left(-\frac{\mu}{s}+\frac{\mu}{m}\right)\int_\Omega |u_n|^s dx \\
&\overset{(3.51)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + c' \\
&\overset{(a_1)}{\geq} \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)\int_\Omega \left[\epsilon_0 + \epsilon_1 H(\epsilon_3)(|\nabla u_n|^p)^{\frac{q-p}{p}}\right]|\nabla u_n|^p dx + c' \\
&= \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)\epsilon_0\|u_n\|_{1,p}^p + \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)H(\epsilon_3)\epsilon_1\|u_n\|_{1,q}^q + c' \\
&= C\|u_n\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)C'\|u_n\|_{1,q}^q + c',
\end{aligned}$$

onde por (a_2) temos que $\alpha < \frac{m}{p}$, o que implica que as constantes $C = \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)\epsilon_0$ e $C' = \left(\frac{1}{p\alpha}-\frac{1}{m}\right)\epsilon_1$ são constantes positivas. Desta forma obtemos duas desigualdades importantes: Se $H(\epsilon_3) = 0$ então $\gamma = p$ e logo obtemos:

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \geq C\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c'.$$

Se $H(\epsilon_3) = 1$ então $\gamma = q$ e logo obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &\geq C\|u_n\|_{1,p}^p + C'\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c' \\ &\geq C'\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c'. \end{aligned}$$

Portanto, de ambas as formas obtemos que

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \geq M\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c', \tag{3.52}$$

com $M = C$ ou $M = C'$.

Por outro lado, sabemos que:

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq \left| J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \right| \leq |J_\lambda(u_n)| + \frac{1}{m}\left|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right|.$$

Temos que $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência real e por $\{u_n\}$ ser uma sequência $(PS)_c$, temos que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow c$. Portanto, $\{J_\lambda(u_n)\}$ é uma sequência limitada, o que implica que existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|J_\lambda(u_n)| \leq C_1. \tag{3.53}$$

Além disso, temos que

$$|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle| \leq \|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \cdot \|u_n\|_{1,\gamma}. \tag{3.54}$$

Portanto, utilizando o fato de que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \longrightarrow 0$, temos então que existe K tal que $\|J'_\lambda(u_n)\|_{(W_0^{1,\gamma})'} \leq K$. E ainda, pelas equações (3.53), (3.54) e tomando $C_2 = \max\{C_1, K\}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle &\leq |J_\lambda(u_n)| + \tfrac{1}{m}\left|\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle\right| \\ &\leq C_1 + K \cdot \|u_n\|_{1,\gamma} \\ &\leq C_2 + C_2\|u_n\|_{1,\gamma} \\ &= C_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Portanto, pelas equações (3.52) e (3.55) obtemos a seguinte estimativa:

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c' \leq J_\lambda(u_n) - \frac{1}{m}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq C_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}),$$

donde obtemos que

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^\gamma + c' \leq C_2(1 + \|u_n\|_{1,\gamma}). \tag{3.56}$$

Assim, se supormos por contradição que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$ então podemos supor que

$\|u_n\|_{1,\gamma} \neq 0$. Assim, dividindo ambos os lados da equação (3.56) por $\|u_n\|_{1,\gamma}$, obtemos:

$$M\|u_n\|_{1,\gamma}^{\gamma-1} + \frac{c'}{\|u_n\|_{1,\gamma}} \leq \frac{C_2}{\|u_n\|_{1,\gamma}} + C_2.$$

Então, se $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty$, e por $\gamma - 1 \geq 1$, obtemos uma contradição pois o lado esquerdo da desigualdade acima irá para infinito enquanto é majorado por uma constante no lado direito. Assim, temos $\{u_n\}$ limitada em $W_0^{1,\gamma}$.

Então por $\{u_n\}$ ser limitada em $W_0^{1,\gamma}$, temos pelo Teorema A.4 que existe $u \in W_0^{1,\gamma}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\gamma}$. Então resta apenas provar a convergência forte de u_n para u em $W_0^{1,\gamma}$, e o argumento para tal segue igualmente o argumento feito na Proposição 3.1, donde concluímos a demonstração deste lema. $\square$

Os dois próximos resultados mostram que o funcional possui a geometria do Passo da Montanha Simétrico.

Lema 3.13. *Suponhamos válida a hipótese (a_1) com $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$. Então para todos $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq \alpha$ quando $\|u\|_{1,\gamma} = \rho$.*

Demonstração. Pelo argumento feito na equação (3.6) temos a seguinte desigualdade:

$$J_\lambda(u) \geq \frac{\epsilon_0}{p}\|u\|_{1,p}^p + H(\epsilon_3)\frac{\epsilon_1}{q}\|u\|_{1,q}^q - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s,$$

onde concluímos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq M\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^m - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[M - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma}\right], \end{aligned}$$

com $M = \frac{\epsilon_0}{p}$ se $H(\epsilon_3) = 0$ ou $M = \frac{\epsilon_1}{q}$ se $H(\epsilon_3) = 1$. Como $\gamma < m$ e $\gamma < s$, segue então que

$$M - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma} \longrightarrow M \text{ quando } \|u\|_{1,\gamma} \longrightarrow 0.$$

Desta forma, temos que existe $0 < \rho < 1$ onde tomando $\|u\|_{1,\gamma} = \rho$ temos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \|u\|_{1,\gamma}^\gamma\left[M - \frac{\lambda}{m}C_1\|u\|_{1,\gamma}^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\|u\|_{1,\gamma}^{s-\gamma}\right] \\ &= \rho^\gamma\left[M - \frac{\lambda}{m}C_1\rho^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-\gamma}\right] > 0, \end{aligned}$$

donde o resultado segue tomando

$$\alpha = \rho^\gamma\left[M - \frac{\lambda}{m}C_1\rho^{m-\gamma} - C_2\frac{\mu}{s}\rho^{s-\gamma}\right].$$

$\square$

Lema 3.14. *Assuma as hipóteses* (a_1) *e* $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$. *Então para todo subespaço linear com dimensão finita* $K \subset W_0^{1,\gamma}$ *existe uma constante* $\theta(K)$ *tal que* $J_\lambda(u) \leq 0$ *sempre que* $\|u\|_{1,\gamma} \geq \theta(K)$, *onde* $u \in K$.

Demonstração. Seja X_k um subespaço linear de $W_0^{1,\gamma}$ que possui dimensão finita. Utilizando (a_1) juntamente com os argumentos feitos no Lema 3.2 sobre equivalência de normas em espaços de dimensão finita, obtemos constantes $c(K)$, $c'(K)$, $c_1(K)$, $c_2(K) > 0$ tais que, tomando $u \in X_k$, temos:

$$J_\lambda(u) \leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s.$$

Agora, se $\epsilon_3 = 0$ temos que $\gamma = p$, e desta forma, por $\gamma < s$ obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{\gamma}c_1(K)\|u\|_{1,\gamma}^\gamma - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^s\left[\frac{\epsilon_2}{\gamma}c_1(K)\|u\|_{1,\gamma}^{\gamma-s} - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^{m-s} - c'(K)\mu\right] < 0, \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande. Por outro lado se $\epsilon_3 > 0$ temos então que $p < \gamma = q < s$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\leq c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^p + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^q - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^m - c'(K)\mu\|u\|_{1,\gamma}^s \\ &= \|u\|_{1,\gamma}^s\left[c_1(K)\frac{\epsilon_2}{p}\|u\|_{1,\gamma}^{p-s} + c_2(K)\frac{\epsilon_3}{q}\|u\|_{1,\gamma}^{q-s} - c(K)\lambda\|u\|_{1,\gamma}^{m-s} - c'(K)\mu\right] < 0 \end{aligned}$$

quando $\|u\|_{1,\gamma}$ for suficientemente grande, o que completa a demonstração. □

Vamos ao resultado principal sobre existência.

Teorema 3.7. *Suponham válidas as hipóteses* (a_1), (a_2) *e* (a_3), *com* $1 < \gamma < m \leq s < \gamma^*$. *Assim para todos* $\lambda > 0$ *e* $\mu > 0$, *existe infinitas soluções* $\{u_n\}$ *para o problema* (3.1) *satisfazendo:*

$$J(u_n) \longrightarrow +\infty \text{ e } \|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow \infty, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Demonstração. Temos que J_λ é um funcional par satisfazendo $J_\lambda(0) = 0$. Além disso, pelos Lemas 3.12, 3.13 e 3.14 temos que todos os requisitos necessários para aplicar o Teorema do Passo da Montanha Simétrico (Teorema A.10) são satisfeitos. Portanto, concluímos que, para todos $\lambda > 0$ e $\mu > 0$, existe uma sequência ilimitada de valores críticos para J_λ, ou seja, existirá uma sequência $\{u_n\}$ de pontos críticos (e portanto soluções para (3.1)) que satisfaz $J_\lambda(u_n) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Agora, devido a hipótese (a_1), para cada subconjunto limitado K de $W_0^{1,\gamma}$, temos que J_λ é limitado em K, então temos que ter obrigatoriamente que $\|u_n\|_{1,\gamma} \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, o que completa a demonstração. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 Desigualdades

Lema A.1 (Desigualdade de Young)**.** *Seja* $1 < p < \infty$. *Então, para todo* $a, b \geq 0$, *tem-se*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Ver p. 92 de [12]. □

Lema A.2 (Desigualdade de Interpolação)**.** *Temos válida a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\alpha} \|u\|_q^{1-\alpha},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{1-\alpha}{q}$, *com* $0 \leq \alpha \leq 1$ *e* $p \leq r \leq q$.

Demonstração. Ver em [12]. □

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se* $1 < k < \infty$ *e* $u \in L^k(\Omega)$, $v \in L^{k'}(\Omega)$, *então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega uv dx \leq \left(\int_\Omega |u|^k dx \right)^{1/k} \left(\int_\Omega |v|^{k'} dx \right)^{1/k'}.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.4]. □

Lema A.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que* $1 \leq p < \infty$ *e* Ω *um conjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^N$. *Então existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$ *tal que:*

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_{1,p}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}.$$

Demonstração. Confira em [12, Corolário 9.19]. □

Lema A.4. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a \geq 0$, $b \geq 0$, *então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Veja [1, Lema 2.2]. □

Lema A.5. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Suponha que com $p \leq q$ e tome o espaço de Sobolev $W_0^{1,q} = W_0^{1,p} \cap W_0^{1,q}$. Temos então que as seguintes normas são equivalentes neste espaço:*

$$\|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q dx + \int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q}, \ \|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q\right)^{1/q} \quad e \ \ \|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q}.$$

Demonstração. Primeiramente observe que para $p = q$ o resultado segue obviamente. Vejamos o caso $p > q$. Para a equivalência das duas normas denotadas por $\|u\|_{1,q}$, veja em [12]. Agora vejamos que as duas últimas normas são equivalentes. De fato, a desigualdade

$$\|u\|_{1,q} \leq \|u\|$$

é imediata. Por outro lado, sabemos que pelo Teorema A.1, temos que:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,p}^p &= \int_\Omega 1 \cdot |\nabla u|^p \\
&\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p)^{\frac{q}{p}} dx\right)^{p/q} \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}} dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= C\|u\|_{1,q}^p,
\end{aligned}$$

onde C é a potência $q - p$ da constante de medida de Ω. Assim, obtemos que

$$\|u\|_{1,p} \leq C\|u\|_{1,q} \Rightarrow \|u\| = \|u\|_{1,p} + \|u\|_{1,q} \leq C'\|u\|_{1,q},$$

com $C' = 1 + C$. E assim, concluímos o que queríamos. □

A.2 Resultados de convergência

Teorema A.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que Ω é limitado e de classe C^1. Então a imersão $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, p^*)$, onde $p < N$ e $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.*

Demonstração. Ver em [12, Teorema 9.16]. □

Lema A.6 (Lema de Fatou)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então,*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} u_n\right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 1.49]. □

Teorema A.3 (Teorema da Convergência Dominada). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$. Se existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$, para todo n e para q.t.p. $x \in \Omega$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} u_n dx.$$

Demonstração. Veja [1, Teorema 1.50]. □

Teorema A.4. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em X possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Veja [12, Proposição 3.5]. □

Lema A.7 (Brézis-Lieb). *Seja $\{u_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$, $0 < p < \infty$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx + o_n(1).$$

Demonstração. Confira [13, Teorema 1]. □

Lema A.8. *Se $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{s,p}(\Omega)$ e existe $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$, então*

$$\|u_n - u\|^p = \|u_n\|^p - \|u\|^p + o_n(1).$$

Demonstração. Veja [33, Lemma 3.2]. □

A.3 Resultados de métodos variacionais

Teorema A.5 (Teorema Generalizado de Weiestrass). *Seja E um espaço de Hilbert (ou, mais de forma mais geral, um espaço de Banach reflexivo) e suponha que um funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é:*
1) *fracamente semicontínuo inferiormente;*
2) *coercivo.*
Então φ é limitada inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_E \varphi.$$

Demonstração. Veja em [16, Teorema 1.2] □

Teorema A.6 (Ekeland). *Sejam E um espaço métrico completo, e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para todo $u \in E$ e todo ϵ, $\delta > 0$ tal que*

$$\inf I \leq I(u) \leq \inf I + \epsilon,$$

existe $v \in E$ tal que

$$I(v) \leq I(u),$$

$$d(u, v) \leq \delta,$$

$$I(w) > I(v) - \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) d(v, w), \ \forall w \neq v.$$

Demonstração. Confira [17, Teorema 1.1]. □

Corolário A.1. *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ inferiormente limitado em E. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset E$ tal que:*

$$I(x_n) \longrightarrow \inf_{x \in E} I(x) \ \text{e} \ I'(x_n) \to 0 \ \text{em} \ E^*, \ \text{quando} \ n \to \infty.$$

Teorema A.7 (Teorema do passo da montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponha que I satisfaz $I(0) = 0$ e também as seguintes condições:*

(i) existem $d, d' > 0$ tais que $I(u) \geq d'$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = d$;

(ii) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > d$ e $I(e) < 0$.

Então, c é um valor crítico, onde este é dado por:

$$\begin{aligned} c: &= \inf_{g \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(g(t)) > 0, \\ \Gamma: &= \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [4]. □

Teorema A.8 (Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e satisfaz as seguintes condições:*

(i) existem $d, d' > 0$ tais que $I(u) \geq d'$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = d$;

(ii) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > d$ e $I(e) < 0$.

Então, existe uma sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c, \quad I'(u_n) \to 0,$$

sendo

$$\begin{aligned} c: &= \inf_{g \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(g(t)) > 0, \\ \Gamma: &= \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [14, Teorema 2.2]. □

Teorema A.9 (Teorema de Clark)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes hipóteses:*

- *$I(0) = 0$;*
- *I é um funcional par;*
- *I é limitado inferiormente;*
- *I satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Se para qualquer $k \in \mathbb{N}$ existir um subespaço k-dimensional X_k de E e uma constante $\rho_k > 0$ tal que

$$\sup_{X_k \cap S_{\rho_k}} I < 0,$$

onde

$$S_\rho = \{u \in E \,:\, \|u\| = \rho\},$$

então pelo menos uma das alternativas abaixo ocorre:

1. *I possui uma sequência de pontos críticos $\{u_n\}$ satisfazendo $\|u_n\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e $I(u_n) < 0$ para todo n;*
2. *existe $r > 0$ tal que para todo $0 < a < r$ existe um ponto crítico u satisfazendo $\|u\| = a$ e $I(u) = 0$.*

Demonstração. Veja em [29, Teorema 1.1]. □

Teorema A.10 (Passo da Montanha Simétrico)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes hipóteses:*

1. *I é um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$;*
2. *Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha$ sempre que $\|u\| = \rho$;*
3. *I satisfaz a condição de Palais-Smale;*
4. *Para todo subespaço de dimensão finita $K \subset R$, existe $C(K) > 0$ de modo que $I(u) \leq 0$ para todo $u \in K$, com $\|u\| \geq C(K)$.*

Então I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Demonstração. Veja [34, Teorema 1.9]. □

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, J. Fournier; *Sobolev spaces*, Academic Press, Boston, 2003.

[2] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma; *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl., **49** (2005), 85-93.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami; *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal., **122** (1994), 519-543.

[4] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz; *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., **14** (1973), 349-381.

[5] J. G. Azorero, I. P. Alonso; *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations, **12** (1987), 1389–1430.

[6] J. G. Azorero, P. H. Alonso; *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymetric term*, Trans. Am. Math. Soc., **323** (1991), 877-895.

[7] S. Barile, G. M. Figueiredo; *Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p&q−problems with potentials vanishing at infinity*, J. Math. Anal. Appl., **427** (2015), 1205-1233.

[8] S. Barile, G. M. Figueiredo; *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q−quasilinear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud., **14** (2) (2014), 511–530.

[9] S. Barile, G. M. Figueiredo; *Some classes of eigenvalues problems for generalized p&q-Laplacian type operators on bounded domains*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **119** (2015), 457-468.

[10] T. Barstsch, M. Willem; *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 3555-3561.

[11] N. Benouhiba, Z. Belyacine; *A class of eigenvalue problems for the* (p, q)*-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Int. J. Pure Appl. Math., **50** (2012), 727–737.

[12] H. Brézis; *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2010.

[13] H. Brezis, E. Lieb; *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., **88** (1983), 486-490.

[14] H. Brezis, L. Nirenberg; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.

[15] F. J. S. A. Correa, A. S. S. Correa, G. M. Figueiredo; *Positive solutions for a class of p&q−singular elliptic equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **16** (2014), 163-169.

[16] D. G. Costa; *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, Boston, 2007.

[17] I. Ekeland; *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324-353.

[18] L. C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1998.

[19] G. M. Figueiredo; *Existence and multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Math. Nachr., **286** (11–12) (2013), 1129–1141.

[20] G. M. Figueiredo; *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl., **378 (2)** (2011), 507–518.

[21] G. Franzina, P. D. Lamberti; *Existence And uniqueness for a p-Laplacian Nonlinear Eigenvalue Problem*, Electronic Journal of Differential Equations, **26** (2010), 1-10.

[22] C. He; G. Li; *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q-Laplacians*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **33** (2008), 337–371.

[23] E. J. Hurtado, O. H. Miyagaki, R. S. Rodrigues; *Existence and Asymptotic Behaviour for a Kirchhoff Type Equation With Variable Critical Growth Exponent*, Milan Journal of Mathematics, **85** (2017), 71–102.

[24] E. J. Hurtado, O. H. Miyagaki, R. S. Rodrigues; *Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Elliptic Equations Without Ambrosetti–Rabinowitz Type Conditions*, Journal of Dynamics and Differential Equations, **30** (2017), 405–432.

[25] Y. Komiya, R. Kajikiya; *Existence of infinitely many solutions for the* $(p, q)-$*Laplace equation*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **23** 49 (2016).

[26] A. Lê; *Eigenvalue problems for the p-Laplacian*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **64 (5)** (2006), 1057–1099.

[27] G. Li, X. Liang; *The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of* $p - q$*-Laplacian type on* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal., **71** (2009), 2316–2334.

[28] E. L. Lima; *Curso de Análise Volume 2*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1999.

[29] Z. Liu, Z. Q. Wang; *On Clark's theorem and its applications to partially sublinear problems*, Ann. I. H. Poincaré- AN, **32** (2015), 1015-1037.

[30] M. Mihailescu, V. Radulescu; *Continuous spectrum for a class of nonhomogeneous differential operators*, Manuscripta Math., **125** (2008), 157–167.

[31] D. Motreanu, M. Tanaka; *On a positive solution for* $(p,q)-$*Laplace equation with indefinite weight*, Minimax Theory Appl., **1** (1) (2014).

[32] A. A. F. Nunes; *Múltiplas soluções em certas classes de problemas elípticos não homogêneos e não locais.* 2018. Tese (Doutorado) - Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

[33] K. Perera, M. Squassina, Y. Yang; *Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-Laplacian problems*, Math. Nachr., **289** (2016), 332-342.

[34] P. H. Rabinowitz, *The Mountain Pass Theorem: Theme and variations, Differential Equation (D.G. de Figueiredo and C.S. Honig, eds)*, Lecture Notes in Math., vol. 957, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

[35] J. Simon; *Régularité de la solução dune équation non linéaire dans* $\mathbb{R}^N$, Jounées dAnalyse non linéarie (Proc. Conf. Besançon, 1977), Lecture Notes in Mathematics, **665**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[36] M. Tanaka; *Generalized eigenvalue problems for* $(p,q)-$*Laplacian with indefinite weight*, J. Math. Anal. Appl., **419** (2014), 1181–1192.

[37] M. Wu, Z. Yang; *A class of* $p-q$*-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in* $\mathbb{R}^N$, *BVP* (2009), **ID** 185319.