UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores 2×2

Mateus Eduardo Salomão

São Carlos-SP
Outubro de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores 2×2

Mateus Eduardo Salomão

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Dimas José Gonçalves

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP

Outubro de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Mateus Eduardo Salomão, realizada em 28/10/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Prof. Dr. Ivan Shestakov (USP)

Prof. Dr. Antonio Ioppolo (UNIMIB)

Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior (UFCG)

Prof. Dr. Waldeck Schutzer (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Aos meus pais, Ione e Nelson.

"O único lugar em que sucesso vem antes de trabalho, é no dicionário."
Albert Einstein

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida, por sempre me guiar e me iluminar, e por todas as oportunidades que tive ao longo da minha caminhada.

Quero agredecer aos meu pais Ione e Nelson (em memória) por todo o amor e apoio que dispensaram a mim. Agradeço a eles pela educação que me proporcionaram, bem como as lições e exemplos de caráter que presenciei em meu lar. Sou grato e tenho muito orgulho de ser filho deles.

Aos demais familiares que sempre me incentivaram a seguir na carreira acadêmica, que rezaram e torceram pela minha prosperidade, expresso minha gratidão.

Uma pessoa admirável que tive o prazer de conviver é o professor Dimas, meu orientador de mestrado e de doutorado, agradeço a ele por ter aceito desempenhar esse papel em minha formação. Agradeço pela enorme dedicação e empenho que teve comigo e com o meu trabalho, bem como por todos os seus ensinamentos, que vão muito além da matemática. É um grande homem.

Ao longo da minha jornada na matemática, conheci e convivi com pessoas que se tornaram especiais e fundamentais em minha vida. Quero agradecer ao Evandro, que esteve comigo em praticamente toda essa caminhada, agradecer pela amizade, pela parceria e por todo apoio, tanto na matemática quanto na vida. Muitas pessoas falam que parecemos irmãos, para mim ele é de fato um irmão que a vida me deu. Agradeço ao Carlos, outra pessoa que esteve sempre presente em minha vida e que também tenho um carinho como de um irmão, agradeço por sua amizade, por sua preocupação e apoio que sempre dispensou a mim. Conheci outras pessoas também nessa área, a Daiana de Fávero, a Daiana Mara, o Braian, a Eliane e a Maria, trilhamos caminhos diferentes, mas eu tenho uma grande afeição por todos e posso lhes chamar de amigos.

Agradeço a todos os meus amigos que não são da área de matemática. Destaco em especial o Fernando e o Guilherme, meus grandes amigos de infância. Também agradeço a uma amiga que entrou recentemente em minha vida por conta do Evandro, sua namorada Paulinha.

Não posso deixar de agradecer aos profissionais que participaram da minha formação. Sendo assim, agradeço a todos os meus professores da escola Cristo Rei, do colégio Agostinho Pereira, da UTFPR - Campus Pato Branco e da UFSCar, pela excelente formação que me proporcionaram. Também agradeço a todos os demais profissionais destas instituições.

Gostaria de agradecer aos professores membros da banca, que com suas sugestões contribuíram para tornar o texto mais claro.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Seja K um corpo (finito ou infinito) de $\mathrm{char}(K) \neq 2$, e seja $UT_n = UT_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre K. Se $\cdot$ é o produto usual em UT_n, então com o novo produto $a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a)$, UT_n é uma álgebra de Jordan, denotada por $UJ_n = UJ_n(K)$. Nesta tese, descrevemos o conjunto I de todas as identidades polinomiais de UJ_2 para todo K, e provamos que I tem a Propriedade de Specht quando K é infinito, isto é, I e todo T-ideal que contém I é finitamente gerado, como um T-ideal. Além disso, descrevemos o conjunto de todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UJ_2 com qualquer $\mathbb{Z}_2$-graduação, e descrevemos uma base linear para a correspondente álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Palavras-chave: Álgebra das matrizes triangulares superiores, Álgebra de Jordan, Identidades polinomiais, Álgebra graduada, Identidades polinomiais graduadas, Propriedade de Specht.

Abstract

Let K be a field (finite or infinite) of $\text{char}(K) \neq 2$, and let $UT_n = UT_n(K)$ be the $n \times n$ upper triangular matrix algebra over K. If $\cdot$ is the usual product on UT_n, then with the new product $a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a)$, UT_n becomes a Jordan algebra, denoted by $UJ_n = UJ_n(K)$. In this thesis, we describe the set I of all polynomial identities of UJ_2 for any K, and we prove that I has the Specht property when K is infinite, namely that, I and every T-ideal containing I, is finitely generated as a T-ideal. Moreover, we describe the set of all $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of UJ_2 with any $\mathbb{Z}_2$-grading, and we describe a linear basis for the corresponding relatively free $\mathbb{Z}_2$-graded algebra.

Keywords: Upper triangular matrix algebra, Jordan algebra, Polynomial identities, Graded algebra, Graded polynomial identities, Specht property.

Sumário

Introdução

O assunto a ser abordado nesta tese de Doutorado está inserido no contexto da *Teoria das PI-álgebras*, isto é, teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais. No que segue, escreveremos a importância do assunto estudado e como a tese está dividida.

Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo K, e denote o produto de dois elementos $a,b \in A$ por $a \cdot b$. Podemos associar a A uma álgebra de Lie, denotada por $A^{(-)}$, considerando o produto de Lie usual $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$ no espaço vetorial A. Se a característica de K é diferente de 2, podemos considerar no espaço vetorial A o produto de Jordan $a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a)$, e isto torna o espaço vetorial A uma álgebra de Jordan, denotada por $A^{(+)}$. O conhecido teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) afirma que toda álgebra de Lie é uma subálgebra de alguma $A^{(-)}$. No caso de álgebras de Jordan, não existe um teorema análogo ao PBW. Uma álgebra de Jordan que é uma subálgebra de alguma $A^{(+)}$ é chamada de *especial*, caso contrário, ela é chamada de *excepcional*. Existem álgebras de Jordan excepcionais, o “menor” exemplo sendo a álgebra de Albert de dimensão 27. Para mais informações sobre a teoria das álgebras de Jordan, indicamos os livros de Jacobson [19] e de McCrimmon [29].

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável, e sejam $A(X)$ e $J(X)$ a álgebra associativa livre e a álgebra de Jordan livre, respectivamente, livremente geradas sobre K por X. Assim, se A é uma álgebra associativa arbitrária e $a_i \in A$, então existe um único homomorfismo $\varphi\colon A(X) \to A$ tal que $\varphi(x_i) = a_i$ para todo $i \geq 1$ e, analogamente, pode-se dizer o mesmo para $J(X)$ e uma álgebra de Jordan arbitrária J. Podemos interpretar $A(X)$ como um espaço vetorial sobre K com uma base consistindo de todos os monômios (associativos) nas variáveis x_i, e um produto definido em tais monômios por justaposição. Os elementos de $A(X)$ são chamados polinômios (associativos, mas não comutativos). Não se conhece uma descrição transparente de $J(X)$. Na verdade, a descrição de uma base do espaço vetorial $J(X)$ é um problema em aberto. Deve ser mencionado aqui, e pode ser mostrado que, $J(X)$ é excepcional. Como no caso associativo, também chamamos os elementos de $J(X)$ de polinômios.

Nesta tese, estudaremos identidades polinomiais para uma certa álgebra de Jordan. Sendo assim, convém relembrarmos que $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in J(X)$ é uma identidade polinomial (ou simplesmente identidade) para uma álgebra de Jordan J, quando $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in J$. Da mesma forma, definimos identidades para álgebras associativas. O conjunto de todas as identidades satisfeitas por uma álgebra de Jordan J é denotado por $T(J)$. Pode-se mostrar facilmente que este é um ideal, mais ainda, $T(J)$ é fechado por endomorfismos de $J(X)$, logo é um T-ideal. Pode ser mostrado que todo ideal T em $J(X)$ que é fechado por endomorfismos é o T-ideal de alguma álgebra de Jordan. Por exemplo, o T-ideal da álgebra quociente $J(X)/T$. Uma álgebra A que satisfaz $T(A) \neq \{0\}$ é chamada de PI-álgebra. Indicamos aos leitores interessados as referências por nós utilizadas [2], [10], [12], [19] e [43].

Um dos principais problemas na teoria de PI-álgebras é descrever uma base do conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra. Tal base de um T-ideal consiste de um conjunto de elementos que o gera como um T-ideal. Sabe-se que este problema foi resolvido apenas em poucos casos. No caso de álgebras associativas, as identidades da álgebra de Grassmann E são conhecidas e foram descritas em [27] e [26]. As identidades da álgebra das matrizes de ordem 2 foram descritas em [31] e [9], para o caso em que o corpo base é de característica 0, e em [23] para o caso em que o corpo base é infinito de característica $p \neq 2$. As identidades de $E \otimes E$ também são conhecidas para o caso de característica 0, veja [30]. Adicionando a esta lista as identidades da álgebra $UT_n(K)$ das matrizes triangulares superiores de ordem n, que estão descritas em [28] e [33], obtemos uma lista praticamente completa das álgebras associativas cujas identidades são conhecidas. Salientamos que resta um caso remanescente para a descrição completa das identidades de $M_2(K)$, que é o caso em que K é um corpo infinito de característica 2. Voltando-nos para as álgebras de Jordan, a situação se torna ainda menos clara. Bases das identidades das álgebras de Jordan de uma forma bilinear simétrica não degenerada foram descritas em [17] para o caso de dimensão finita em característica 0, e em [39] para o caso geral.

Em contraste com o caso associativo, as identidades da álgebra de Jordan $UJ_n = UJ_n(K) = UT_n(K)^{(+)}$ (espaço vetorial $UT_n(K)$ com o produto de Jordan $\circ$), são conhecidas apenas quando $n = 2$. Elas foram descritas em [24] para o caso em que K é um corpo infinito de característica diferente de 2 e 3. A descrição das identidades polinomiais de UJ_n quando $n \geq 3$, é um problema em aberto.

No ano 1950, W. Specht [34] apresentou um problema que moldou boa parte do desenvolvimento da PI-teoria. Ele perguntou se os T-ideais das PI-álgebras associativas eram finitamente gerados. Naturalmente, pode-se fazer uma pergunta semelhante para variedades de álgebras não associativas, como por exemplo, álgebras de Lie e álgebras de Jordan.

Em 1970, Vaughan-Lee [40, 41] provou para o caso de álgebras de Lie em característica 2, que a resposta para o problema de Specht é negativa. Já em [8], Drensky extendeu este resultado para álgebras de Lie sobre um corpo infinito de característica $p > 2$.

Posteriormente em 1985, Kemer desenvolveu uma sofisticada teoria, onde deu uma classificação dos T-ideais na álgebra associativa livre em característica 0. Como uma consequência desta teoria, Kemer obteve uma resposta positiva para o problema de Specht para álgebras associativas quando a característica do corpo base é 0 (ver [21, 22]). Empregando e adaptando os métodos desenvolvidos por Kemer, resultados semelhantes foram obtidos para amplas classes de álgebras de Lie (ver [18]) e álgebras de Jordan (ver [37]). Mais recentemente, por volta do ano 2000, descobriu-se que no caso de álgebras associativas sobre corpos infinitos de característica $p \neq 0$, a resposta para o problema de

Specht é negativa. Os primeiros exemplos de T-ideais que não admitem bases finitas foram apresentados simultaneamente, e independentemente, em [4, 15, 32]. O problema de Specht também pode ser proposto no contexto de álgebras graduadas e correspondentes identidades graduadas. Discutiremos estes conceitos na sequência.

Se G é um grupo qualquer e uma álgebra é graduada sobre o grupo G, dizemos que tal álgebra é G-graduada. A noção de álgebra graduada foi introduzida e estudada pela primeira vez no contexto de álgebras comutativas, com o intuito de generalizar propriedades de anéis de polinômios. Já o estudo de graduações em álgebras associativas foi iniciado por Wall em [42]. Ele descreveu a graduação de álgebras simples de dimensão finita sobre o grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$. Com o surgimento da teoria de Kemer, foi possível utilizá-la no desenvolvimento do estudo das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas e suas identidades polinomiais graduadas. Além disso, também se seguiram estudos adicionais de graduações e identidades polinomiais graduadas em álgebras associativas. Motivados em parte pelos resultados de Kemer, as graduações em álgebras se tornaram objeto de intenso interesse e estudo. Com relação ao problema de Specht para álgebras graduadas, destacamos que a solução positiva do problema para as PI-álgebras associativas sobre um corpo de característica 0, graduadas por um grupo finito, foi obtida em [35, 1].

Quanto às G-graduações em $UT_n = UT_n(K)$, em que G é um grupo qualquer, foi provado em [38] que toda G-graduação em UT_n é isomorfa a uma G-graduação elementar, e em [6], as G-graduações elementares foram classificadas. Mais ainda, em [6] foi provado que duas G-graduações em UT_n são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais G-graduadas. O conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas de UT_n foi descrito em [6], quando K é um corpo infinito e em [13] quando K é um corpo finito. Para os leitores interessados em mais detalhes a respeito de graduações em álgebras, sugerimos a referência [11] e a bibliografia nela contida.

De agora em diante, voltaremos nossa atenção para a álgebra de Jordan $UJ_2 = UJ_2(K)$, onde K é um corpo de característica diferente de 2, e faremos o uso do fato de toda $\mathbb{Z}_2$-graduação em UJ_2 ter sido descrita em [24]. Vale destacar que em [25], os autores provaram que se K é infinito, então toda G-graduação em UJ_n é, a menos de isomorfismo graduado, ou elementar ou MT (mirror type). Mais ainda, em [25] os autores provaram que duas G-graduações em UJ_n são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades polinomiais G-graduadas. Além disso, também em [24], Koshlukov e Martino descreveram o conjunto das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UJ_2 quando K é um corpo infinito de característica 0 e, como consequência, em [5] foi provado que a variedade das álgebras de Jordan gerada por UJ_2 munida com qualquer G-graduação tem a propriedade de Specht.

No primeiro capítulo desta tese, faremos uma exposição dos conceitos básicos a respeito da teoria de PI-álgebras, dando ênfase às álgebras de Jordan. Em especial, na Seção 1.5 apresentaremos algumas propriedades e as $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra UJ_2. O intuito de tal capítulo é estabelecer firmemente o contexto deste trabalho, bem como notações e resultados básicos, de modo a deixar o texto o mais independente possível com relação à referências externas.

Em seguida, no Capítulo 2, motivados pelos resultados obtidos em [24], faremos a descrição das identidades polinomiais para a ágebra de Jordan $UJ_2 = UJ_2(K)$, sobre um corpo arbitrário (finito ou infinito) de $\text{char}(K) \neq 2$, e mais ainda, também exibiremos uma base para o T-ideal $T(UJ_2)$. Desse modo, estaremos estendendo e ampliando trabalhos precedentes como [24], no qual foram descritas tais identidades quando K é infinito e de $\text{char}(K) \neq 2,3$. Destacamos que para o caso infinito, as demonstrações apresentadas serão válidas para qualquer corpo de $\text{char}(K) \neq 2$, não sendo necessário considerar separadamente o caso em que $\text{char}(K) = 3$. Os métodos empregados para obter tais resultados são combinatórios. Consideramos separadamente os casos em que o corpo base é finito (Subseção 2.3) ou infinito (Subseção 2.2), e enfatizamos que as provas de cada caso são diferentes.

No Capítulo 3, mostraremos que no caso em que K é um corpo infinito, $T(UJ_2)$ possui a propriedade de Specht. Em outras palavras, provaremos que todo T-ideal em $J(X)$ que contém $T(UJ_2)$ é finitamente gerado, como um T-ideal. Para deduzir tal fato, usaremos a técnica de conjuntos parcialmente bem-ordenados (veja [16]). A nossa abordagem para a prova de tal fato inclui nela o caso em que $\text{char}(K) = 0$ e fornece uma demonstração alternativa para o teorema principal de [5]. No melhor do nosso conhecimento, a nossa demonstração é nova e independente da apresentada em [5].

Finalmente, no Capítulo 4, descreveremos o conjunto das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para UJ_2 munida de qualquer $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial quando K é qualquer corpo (finito ou infinito) de característica diferente de 2. Mais ainda, descreveremos uma base para a correspondente álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições e alguns resultados básicos da Teoria de PI-álgebras e da Teoria de Álgebras de Jordan, que é o nosso principal objeto de estudo, partindo do pressuposto de que o leitor possua alguma familiaridade com o assunto. De qualquer modo, para informações mais detalhadas e um aprofundamento do tema, sugerimos as referências [10], [12], [19] e [43] .

Ao longo deste capítulo, a menos de alguma menção em contrário, K denotará um corpo e todas as álgebras e espaços vetoriais serão sobre K.

1.1 Álgebras

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e propriedades referentes a estrutura de uma álgebra, particularmente aos que se referem a uma classe muito importante de álgebras, as chamadas álgebras de Jordan.

Uma *álgebra* sobre K é um espaço vetorial A sobre K, equipado com uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ que satisfaz:

i) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$;

ii) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$;

iii) $\lambda(a\cdot b) = (\lambda a)\cdot b = a\cdot(\lambda b)$,

para todos $a,b,c \in A$ e todo $\lambda \in K$. A operação $\cdot$ é chamada de *multiplicação* ou *produto*. Por simplicidade, quando o contexto permitir, omitiremos o símbolo $\cdot$ e escreveremos ab para indicar o produto $a\cdot b$.

Dada uma álgebra A, dizemos que

1) A é *associativa*, se $(ab)c = a(bc)$, para todos $a,b,c \in A$;

2) A é *comutativa*, se $ab = ba$, para todos $a, b \in A$;

3) A é *unitária* (ou *com unidade*), se a multiplicação possui elemento neutro, isto é, se existe $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$, para todo $a \in A$.

Como exemplo, colocamos abaixo a álgebra associativa unitária $UT_n(K)$, objeto principal de estudo desta tese.

Exemplo 1.1. O espaço vetorial das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em K, e com a multiplicação usual é uma álgebra associativa unitária, denotada por $UT_n(K)$. Destacamos nesta álgebra a *matriz unitária* e_{ij}, cuja entrada (i, j) é igual a 1 e demais entradas são iguais a 0. É notável e útil que

$$e_{ij}e_{tl} = \delta_{jt}e_{il},$$

onde δ_{jt} é o delta de Kronecker.

Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial I de A é um *ideal* de A, se

$$ax \in I \text{ e } xa \in I,$$

para todos $a \in A$ e $x \in I$. Neste caso, o espaço vetorial quociente A/I com o produto

$$(a+I)(b+I) = ab + I,$$

onde $a, b \in A$, é uma álgebra, chamada de *álgebra quociente* de A por I.

Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo* de álgebras se

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$

para todos $x, y \in A$. Neste caso, dizemos que φ é um *isomorfismo* se φ for bijetivo. Se existe um isomorfismo $\varphi : A \to B$, dizemos que as álgebras A e B são *isomorfas*. Um *endomorfismo* de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A.

Definição 1.2. Seja A uma álgebra. Se $a, b, c \in A$, dizemos que

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

é o *associador* de a, b e c, nesta ordem.

Uma álgebra é associativa quando o associador de quaisquer três elementos da álgebra for nulo.

Definição 1.3. Seja K um corpo de $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Uma álgebra comutativa A é chamada de *álgebra de Jordan* se

$$(a^2, b, a) = 0,$$

para todos $a, b \in A$.

Note que uma álgebra é chamada de álgebra de Jordan se

$$ab = ba \text{ e } ((a^2)b)a = (a^2)(ba),$$

para todos $a, b \in A$. Podemos criar uma álgebra de Jordan a partir de uma álgebra associativa como no exemplo abaixo:

Exemplo 1.4. Seja A uma álgebra associativa equipada com o produto $\cdot$. Denote por A^+ o espaço vetorial A equipado com o novo produto $\circ$, chamado *produto de Jordan*, definido por:

$$a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a),$$

onde $a, b \in A$. Então o espaço vetorial A^+ equipado com o produto $\circ$ é uma álgebra de Jordan.

A álgebra de Jordan apresentada a seguir será o principal objeto de estudo desta tese.

Definição 1.5. Seja K um corpo de $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Considere a álgebra associativa $UT_n(K)$, do Exemplo 1.1, com o produto usual de matrizes $\cdot$. Pelo Exemplo 1.4, a álgebra $UT_n(K)^+$ com o produto $\circ$ é uma álgebra de Jordan, denotada por $UJ_n(K)$.

Dada uma álgebra de Jordan A qualquer, convém destacar algumas relações que nela são válidas e que de fato serão muito úteis para cálculos. Se $u, v, w \in A$, então

$$(w, v, u) = -(u, v, w) \quad \text{e} \quad (v, u, w) = (u, v, w) - (u, w, v). \tag{1.1}$$

De fato, a primeira igualdade segue de

$$(w, v, u) = (wv)u - w(vu) = -((uv)w - u(vw)) = -(u, v, w),$$

e a segunda igualdade segue de

$$(u, v, w) - (u, w, v) = (uv)w - u(vw) - (uw)v + u(wv) = (vu)w - v(uw) = (v, u, w).$$

Uma outra identidade básica, porém menos óbvia, obtida a partir de $ab - ba = 0$ e de um processo de "linearização" de $(a^2, b, a) = 0$, é mostrada no próximo lema.

Lema 1.6. *Se A é uma álgebra de Jordan, então*

$$((uv)c)d + ((ud)c)v + ((vd)c)u = (uv)(cd) + (uc)(vd) + (ud)(vc), \tag{1.2}$$

para todos $u, v, c, d \in A$.

Demonstração. Uma vez que A é uma álgebra de Jordan, segue que

$$((u+v)^2, c, (u+v)) = 0,$$

para todos $u,v,c \in A$. Como $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, $(u^2,c,u) = 0$ e $(v^2,c,v) = 0$, temos que

$$(u^2,c,v) + 2(uv,c,u) + 2(uv,c,v) + (v^2,c,u) = 0, \tag{1.3}$$

para todos $u,v,c \in A$. Substituindo u por $u+d$ nesta igualdade acima, obtemos

$$((u+d)^2,c,v) + 2((u+d)v,c,(u+d)) + 2((u+d)v,c,v) + (v^2,c,(u+d)) = 0,$$

para todos $u,v,c,d \in A$. Pela equação (1.3), aplicada às variáveis adequadas, temos que

$$2(ud,c,v) + 2(uv,c,d) + 2(dv,c,u) = 0,$$

o que implica

$$(ud,c,v) + (uv,c,d) + (dv,c,u) = 0,$$

para todos $u,v,c,d \in A$. Usando a definição de associador na igualdade acima, obtemos o desejado. □

Lema 1.7. *Se A é uma álgebra de Jordan, então*

$$((uv)c)d + ((ud)c)v + ((vd)c)u = ((uv)d)c + ((uc)d)v + ((vc)d)u, \tag{1.4}$$

para todos $u,v,c,d \in A$.

Demonstração. Se $u,v,c,d \in A$, então por (1.2) temos que

$$\begin{aligned}((uv)c)d + ((ud)c)v + ((vd)c)u &= (uv)(cd) + (uc)(vd) + (ud)(vc)\\ &= (uv)(dc) + (ud)(vc) + (uc)(vd)\\ &= ((uv)d)c + ((uc)d)v + ((vc)d)u,\end{aligned}$$

como desejado. □

Para um estudo mais detalhado a respeito de álgebras de Jordan, indicamos ao leitor a referência [19].

1.2 Álgebras livres

O principal objetivo desta seção é definir o conceito de álgebra de Jordan livre. Este é o ambiente natural em que se discutem as identidades polinomiais das álgebras de Jordan.

Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto infinito e enumerável, e seja X' o conjunto X acrescido dos símbolos de parênteses à esquerda "(" e de parênteses à direita ")", isto é,

$$X' = X \cup \{(\ ,\ )\}.$$

Considere todas as sequências finitas de elementos de X'. Duas sequências $a_1a_2\cdots a_m$ e $b_1b_2\cdots b_n$, onde $a_i, b_i \in X'$, são consideradas iguais se $m = n$ e $a_i = b_i$, para todo $i = 1,2,\ldots,m$. De fato, será mais útil considerar um certo subconjunto deste, denotado por $M\{X\}$, construído indutivamente do seguinte modo:

i) Todos os elementos de X pertencem a $M\{X\}$;

ii) Se $x_i, x_j \in X$ e $u, v \in M\{X\} \setminus X$, então as sequências $x_i x_j, x_i(u), (u)x_i$ e $(u)(v)$ pertencem a $M\{X\}$;

iii) Nenhuma outra sequência pertence a $M\{X\}$.

Os elementos de $M\{X\}$ são chamados de *palavras não associativas de elementos de* X.

Por exemplo, a sequência $(x_1(x_2x_3))x_4$ é uma palavra não associativa de elementos de X, mas a sequência $(x_1(x_2x_3)x_4)$ não é. As seguintes palavras não associativas são de fato distintas:

$$((x_1x_5)x_2)(x_3x_1),\ (x_1(x_5x_2))(x_3x_1),\ (((x_1x_5)x_2)x_3)x_1,\ (x_1x_5)(x_2(x_3x_1)),\ x_1x_2 \text{ e } x_2x_1.$$

Definimos em $M\{X\}$ uma operação binária, denotada por $\cdot$, de acordo com as seguintes leis:

$$x_i \cdot x_j = x_i x_j, \quad x_i \cdot u = x_i(u), \quad v \cdot x_i = (v)x_i \quad \text{e} \quad u \cdot v = (u)(v),$$

para todos $x_i, x_j \in X$, e todos $u, v \in M\{X\} \setminus \{X\}$.

Adicionamos ao conjunto $M\{X\}$ um novo símbolo, denotado por 1, e obtemos o conjunto $M\{X\} \cup \{1\}$. Seja $K\{X\}$ o K-espaço vetorial com base $M\{X\} \cup \{1\}$. Estendemos a multiplicação de $M\{X\}$ para os elementos de $K\{X\}$ através da regra

$$\left(\alpha 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \cdot \left(\beta 1 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = (\alpha\beta)1 + \sum_{j=1}^{m} (\alpha\beta_j)v_j + \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i)u_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j(u_i \cdot v_j),$$

onde $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j \in K$ e $u_i, v_j \in M\{X\}$ para todos i, j. Com essa multiplicação, $K\{X\}$ é uma álgebra, denominada *álgebra livre unitária, livremente gerada por* X. Os elementos de $K\{X\}$ são denominados *polinômios não associativos*. Um polinômio não associativo da forma αu, com $\alpha \in K$ e $u \in M\{X\}$, é chamado *monômio não associativo*.

A álgebra $K\{X\}$ possui a seguinte propriedade universal: Se A é uma álgebra unitária e $\varphi : X \to A$ é uma função, então existe um único homomorfismo de álgebras $K\{X\} \to A$ que estende φ. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [43, Theorem 1].

Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um elemento arbitrário de $K\{X\}$, A uma álgebra unitária e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Pela propriedade universal de $K\{X\}$, segue que existe um único homomorfismo $\theta : K\{X\} \to A$ tal que $\theta(x_i) = a_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, e $\theta(y) = 0$, para todo $y \in X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. É conveniente denotar a imagem de f pelo homomorfismo θ por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Um polinômio não associativo $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K\{X\}$ é uma *identidade polinomial* para uma álgebra unitária A se

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. O conjunto de todas as identidades de A é um ideal da álgebra $K\{X\}$, que é chamado de *T-ideal* da álgebra A e será denotado por $\mathrm{Id}(A)$. Por vezes, considera-se o conjunto de todas as identidades que são satisfeitas por cada álgebra em uma classe de álgebras $\mathscr{V}$, que é também um ideal de $K\{X\}$, chamado de *T-ideal* de $\mathscr{V}$ e denotado por $\mathrm{Id}(\mathscr{V})$. Assim, tal conjunto é

$$\mathrm{Id}(\mathscr{V}) = \bigcap_{A\in\mathscr{V}} \mathrm{Id}(A).$$

Seja I um subconjunto não vazio de $K\{X\}$. A classe de todas as álgebras unitárias A, tais que, $I \subseteq \mathrm{Id}(A)$, é chamada de *variedade determinada por I* e será denotada por $\mathscr{V}(I)$. Por exemplo, se

$$f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3),$$

então $\mathscr{V}(\{f\})$ é a classe de todas as álgebras associativas unitárias. A classe de todas as álgebras de Jordan unitárias é a variedade $\mathscr{V}(\{f_1, f_2\})$, onde

$$f_1 = x_1x_2 - x_2x_1 \ \text{ e } \ f_2 = ((x_1^2)x_2)x_1 - (x_1^2)(x_2x_1).$$

Seja $\mathscr{V}$ uma variedade de álgebras unitárias e $F \in \mathscr{V}$ uma álgebra gerada por um conjunto Y. A álgebra F é chamada de *álgebra livre na variedade $\mathscr{V}$, livremente gerada por Y*, se para qualquer álgebra $A \in \mathscr{V}$, toda função de Y em A pode ser unicamente estendida à um homomorfismo de álgebras de F em A.

Seja I um conjunto de polinômios em $K\{X\}$. Denotaremos por $I(K\{X\})$ o ideal de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma

$$f(f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

onde $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K\{X\}$. Um resultado importante sobre álgebras livres é o seguinte: Se $I \subseteq K\{X\}$, então a restrição à X do homomorfismo canônico

$$\sigma : K\{X\} \to K\{X\}/I(K\{X\})$$

é injetora, e a álgebra quociente $K\{X\}/I(K\{X\})$ é livre na variedade $\mathscr{V}(I)$, livremente gerada por $\sigma(X)$. Veja [43, Theorem 2].

Na sequência do texto, apresentaremos três álgebras livres que serão necessárias nos resultados descritos nesta tese.

Seja Ass o ideal de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma

$$(f_1, f_2, f_3) = (f_1f_2)f_3 - f_1(f_2f_3),$$

onde $f_1, f_2, f_3 \in K\{X\}$. A álgebra quociente $K\{X\}/Ass$ é livre na classe das álgebras associativas unitárias, livremente gerada por $\sigma(X)$, onde $\sigma : K\{X\} \to K\{X\}/Ass$ é o homomorfismo canônico. Por comodidade e quando não houver confusão de notação, identificaremos em determinados contextos em que nos referirmos a elementos de $K\{X\}/Ass$, o elemento $x_i + Ass$ por x_i. Denotaremos a álgebra $K\{X\}/Ass$ por $K\langle X\rangle$ e dizemos que ela é a *álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X*.

Seja *Com* o ideal de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma

$$(f_1, f_2, f_3) = (f_1 f_2) f_3 - f_1(f_2 f_3) \quad \text{e} \quad [f_1, f_2] = f_1 f_2 - f_2 f_1,$$

onde $f_1, f_2, f_3 \in K\{X\}$. A álgebra quociente $K\{X\}/Com$ é livre na classe das álgebras associativas comutativas unitárias, livremente gerada por $\sigma(X)$, onde $\sigma : K\{X\} \to K\{X\}/Com$ é o homomorfismo canônico. Por comodidade e quando não houver confusão de notação, identificaremos em determinados contextos em que nos referirmos a elementos de $K\{X\}/Com$, o elemento $x_i + Com$ por x_i. Denotaremos a álgebra $K\{X\}/Com$ por $K[X]$ e dizemos que ela é a *álgebra associativa comutativa unitária livre, livremente gerada por* X.

Seja *Jor* o ideal de $K\{X\}$ gerado por todos os elementos da forma

$$[f_1, f_2] = f_1 f_2 - f_2 f_1 \quad \text{e} \quad (f_1^2, f_2, f_1) = ((f_1^2) f_2) f_1 - (f_1^2)(f_2 f_1),$$

onde $f_1, f_2 \in K\{X\}$. A álgebra quociente $K\{X\}/Jor$ é livre na classe das álgebras de Jordan unitárias, livremente gerada por $\sigma(X)$, onde $\sigma : K\{X\} \to K\{X\}/Jor$ é o homomorfismo canônico. Denotaremos a álgebra $K\{X\}/Jor$ por $J(X)$ e dizemos que esta é a *álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por* X. Se $f \in K\{X\}$ é um monômio (polinômio) não associativo, dizemos que $f + Jor$ é um *monômio* (*polinômio*) em $J(X)$. Por comodidade e quando não houver confusão de notação, identificaremos em determinados contextos em que nos referirmos a elementos de $J(X)$, o elemento $x_i + Jor$ por x_i. Neste caso temos, por exemplo, as seguintes igualdades em $J(X)$:

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 \ \text{ e } \ ((x_1^2) x_2) x_1 = (x_1^2)(x_2 x_1).$$

Se $f \in J(X)$, escrevemos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que $x_1, \ldots, x_n \in X$ são as variáveis que aparecem em f. Além disso, cada monômio que aparece em f é dito um monômio de f. Se u é um monômio de f, definimos o *grau* de u como sendo a quantidade de variáveis em X (incluindo as repetições) que ocorrem em u, e o denotamos por $\deg u$. Também definimos o grau de u na variável x_i como o número de ocorrências de x_i em u, e o denotamos por $\deg_{x_i} u$. Adequadamente, se $f \in J(X)$, definimos o grau

$$\deg f := \max\{\deg u \mid u \text{ é monômio de } f\}.$$

Por fim, o grau de $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in J(X)$ em x_i é definido como

$$\deg_{x_i} f := \max\{\deg_{x_i} u \mid u \text{ é monômio de } f\}.$$

Para facilitar a notação, adotaremos a sequinte convenção para o produto de polinômios em $J(X)$: Se $f_1, f_2, \ldots, f_n \in J(X)$, então denotaremos

$$f_1 f_2 \cdots f_n = f_1(f_2 \cdots f_n). \tag{1.5}$$

Isto é, quando omitirmos os parênteses internos em um produto de Jordan, significa que o produto é *normado à direita*.

Definimos o conjunto Ω dos *associadores longos* em $J(X)$ como sendo o menor subconjunto de $J(X)$ tal que para cada f_1, f_2, $f_3 \in X \cup \Omega$ tem-se $(f_1, f_2, f_3) \in \Omega$. Ao lidar com associadores longos, vamos omitir os parêntesis internos quando eles são normados à esquerda, isto é,

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n) = ((f_1, f_2, f_3), f_4, \ldots, f_n)$$

quando n é ímpar. Se $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n} \in X$ e $n \geq 3$ é ímpar, dizemos que

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n})$$

é um *associador regular*.

Para finalizar a seção, ressaltamos que as identidades (1.1), (1.2) e (1.4) apresentadas na Seção 1.1 são válidas para todas as álgebra de Jordan, em particular, são válidas para a álgebra $J(X)$. Usaremos várias vezes tais identidades no decorrer da tese.

1.3 Identidades polinomiais

Nesta seção, recordaremos alguns conceitos básicos da teoria de PI-álgebras (do inglês *Polynomial Identity*) para álgebras de Jordan e, além disso, introduziremos mais algumas notações que serão usadas no decorrer do texto.

Ao longo desta seção, as álgebras consideradas serão álgebras de Jordan unitárias sobre um corpo K de $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Definição 1.8. Sejam A uma álgebra de Jordan unitária e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in J(X)$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial* para A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T(A) \neq \{0\}$ dizemos que A é uma *PI-álgebra*.

Exemplo 1.9. O polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6)$$

é uma identidade polinomial para a álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, definida na Definição 1.5. De fato, dados $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in UJ_2(K)$, temos que

$$(a_1, a_2, a_3) = \alpha e_{12} \quad \text{e} \quad (a_4, a_5, a_6) = \beta e_{12},$$

para alguns $\alpha, \beta \in K$. Então,

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (a_1, a_2, a_3)(a_4, a_5, a_6) = (\alpha e_{12})(\beta e_{12}) = 0.$$

Logo, $UJ_2(K)$ é uma PI-álgebra.

Definição 1.10. Um ideal I de $J(X)$ é chamado de *T-ideal* de $J(X)$ se

$$\varphi(I) \subseteq I$$

para todo endomorfismo de álgebras $\varphi : J(X) \to J(X)$.

Pela propriedade universal de $J(X)$, temos que um ideal I de $J(X)$ é um T-ideal de $J(X)$ se, e somente se,

$$f(g_1,\ldots,g_n) \in I$$

para todo $f(x_1,\ldots,x_n) \in I$ e $g_1,\ldots,g_n \in J(X)$.

Se A é uma PI-álgebra de Jordan, então $T(A)$ é um T-ideal. Reciprocamente, pode ser mostrado que se I é um T-ideal de $J(X)$, então

$$T(J(X)/I) = I.$$

Assim, um ideal de $J(X)$ é um T-ideal de $J(X)$ se, e somente se, é o conjunto das identidades polinomiais de alguma PI-álgebra de Jordan.

Dado um subconjunto S de $J(X)$, dizemos que a interseção dos T-ideais de $J(X)$ que contêm S é o *T-ideal gerado por S*. Este é o menor T-ideal de $J(X)$ que contém S e será denotado por $\langle S\rangle^T$. A seguinte proposição, cuja prova é deixada para o leitor, fornece uma descrição mais precisa para $\langle S\rangle^T$.

Proposição 1.11. *Seja S um subconjunto de $J(X)$. O T-ideal de $J(X)$ gerado por S é formado por todas as combinações lineares de elementos do tipo*

$$u_1u_2\cdots u_m f(g_1,\ldots,g_n),$$

onde $u_1,\ldots,u_m,g_1,\ldots,g_n \in J(X)$ e $f(x_1,\ldots,x_n) \in S$.

Em geral, dado um T-ideal, queremos encontrar um conjunto de geradores que torne sua descrição tão simples e evidente quanto for possível. Os seguintes conceitos e resultados auxiliam muito nessa tarefa.

Definição 1.12. Considere um polinômio $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in J(X)$. Dizemos que

a) f é *homogêneo* de grau d em x_i, se $\deg_{x_i} u = d$, para todo monômio u de f;

b) f é *multi-homogêneo* com *multigrau* $(d_1,\ldots,d_n)$, se f é homogêneo de grau d_i em x_i, para todo $i = 1,\ldots,n$;

c) f é *multilinear* de grau n, se é multi-homogêneo com multigrau $(1,\ldots,1)$;

d) a *componente homogênea* de f com grau d em x_i é a soma de todos os monômios u de f tais que $\deg_{x_i} u = d$;

e) a *componente multi-homogênea* de f com multigrau $(d_1,\ldots,d_n)$ é a soma dos monômios u de f tais que $\deg_{x_i} u = d_i$, para todo $i = 1,\ldots,n$.

O próximo lema é uma adaptação de [10, Proposition 4.2.3] para o contexto de álgebras de Jordan. Para isso, denotaremos por $|K|$ a cardinalidade do corpo K.

Lema 1.13. *Sejam $f \in J(X)$, $w \in X$, $\deg_w f = d_w$, e*

$$f = \sum_{i=0}^{d_w} f_i,$$

onde f_i é a componente homogênea de f com $\deg_w f_i = i$. Se $d_w < |K|$, então

$$\langle f\rangle^T = \langle f_0, f_1,\ldots,f_{d_w}\rangle^T.$$

Como consequência do lema acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.14. *Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in J(X)$ um polinômio. Se $\deg_{x_i} f < |K|$, para todo $i = 1,\ldots,n$, então o T-ideal de $J(X)$ gerado por f é igual ao T-ideal de $J(X)$ gerado por todas as componentes multi-homogêneas de f. Em particular, se K é infinito, então todo T-ideal de $J(X)$ é gerado por seus elementos multi-homogêneos.*

A próxima proposição é uma adaptação de [10, Proposition 4.2.3] para o contexto de álgebras de Jordan.

Proposição 1.15. *Se o corpo K tem $\operatorname{char}(K) = 0$, então todo T-ideal de $J(X)$ é gerado por seus elementos multilineares.*

Seja $K[x_1,\ldots,x_n]$ a álgebra associativa comutativa unitária livre, livremente gerada por $\{x_1,\ldots,x_n\}$. O próximo lema é fato bem conhecido e está provado em [20, Seção 2.12]. Este será utilizado algumas vezes nos próximos capítulos.

Lema 1.16. *Seja K um corpo com $|K| \geq q$. Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$ dado por*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{d_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{d_n=0}^{q-1} \lambda_{(d_1,\ldots,d_n)} x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n},$$

onde $\lambda_{(d_1,\ldots,d_n)} \in K$. Se $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$ para todos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$, então $\lambda_{(d_1,\ldots,d_n)} = 0$ para todo $(d_1,\ldots,d_n)$.

1.4 Álgebras Graduadas

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de álgebra graduada, álgebra graduada livre, e identidade polinomial graduada no contexto de álgebras de Jordan. Destacamos que este tema é bastante conhecido para álgebras arbitrárias e por isso o abordaremos apenas no contexto de Jordan. Ao longo desta seção, G denotará um grupo qualquer com operação multiplicação $\cdot$. Como antes, escreveremos simplesmente ab ao invés de $a \cdot b$, quando $a, b \in G$.

Definição 1.17. Dizemos que uma álgebra de Jordan A é uma *álgebra G-graduada*, se A pode ser escrita como uma soma direta de subespaços vetoriais

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \text{ tais que } A_g A_h \subseteq A_{gh},$$

para todos $g, h \in G$.

A partir desta definição, cada elemento $a \in A$ pode ser escrito de maneira única como uma soma finita

$$a = \sum_{g \in G} a_g,$$

onde $a_g \in A_g$ para todo $g \in G$. Os subespaços A_g são chamados *componentes homogêneas* de A. Um elemento $a \in A$ é *homogêneo de grau g* (ou simplesmente *homogêneo*), com respeito a G-graduação, se $a \in A_g$. Um subespaço $B \subseteq A$ é *graduado* (ou homogêneo) se

$$B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A_g).$$

Em outras palavras, B é graduado se, para todo $b \in B$, ao escrevermos

$$b = \sum_{g \in G} b_g \text{ com } b_g \in A_g, \text{ tivermos } b_g \in B,$$

para todo $g \in G$. Similarmente, podemos definir subálgebras graduadas, ideais graduados, etc.

Na próxima seção descreveremos as $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$. Para fins de classificação, precisamos do conceito de isomorfismo graduado.

Definição 1.18. Sejam A e B duas álgebras de Jordan G-graduadas, e seja $\varphi : A \to B$ uma função.

(a) Dizemos que φ é um *homomorfismo G-graduado* se φ é um homomorfismo de álgebras tal que $\varphi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$.

(b) Se φ é um homomorfismo G-graduado bijetivo, dizemos que φ é um *isomorfismo G-graduado*. Neste caso, dizemos que A e B são *álgebras G-graduadas isomorfas*.

De modo análogo, definimos monomorfismo, epimorfismo, endomorfismo e automorfismo G-graduado.

Na sequência, introduziremos outro objeto universal. Dado um grupo "abeliano" G, para cada $g \in G$ fixemos um conjunto infinito de variáveis $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$, e denotemos

$$X = \bigcup_{g \in G} X_g.$$

Agora consideremos a álgebra de Jordan unitária livre $J(X)$, livremente gerada por X. Definimos # em alguns elementos de $J(X)$, como abaixo:

(a) Se $x \in X_g$, então $\#(x) = g$.

(b) Se u e v são monômios de $J(X)$, então $\#(uv) = \#(u)\#(v)$.

Denotaremos por $J(X)_g$ o subespaço vetorial de $J(X)$ gerado por todos os monômios $f \in J(X)$ que satisfazem $\#(f) = g$.

Por exemplo,

$$(x_1^{g_1} x_3^{g_2})(x_1^{g_2} x_2^{g_5}) \in J(X)_g, \text{ onde } g = g_1 g_2 g_2 g_5.$$

Temos que $J(X)_g J(X)_h \subseteq J(X)_{gh}$, para todo $g, h \in G$. Logo,

$$J(X) = \bigoplus_{g \in G} J(X)_g$$

é uma álgebra G-graduada, chamada de *álgebra de Jordan unitária livre G-graduada*, e denotada por $J(X)^{\mathrm{gr}}$. Aqui cabe uma observação: por definição, estamos assumindo que $1 \in J(X)_e$, onde e é o elemento neutro do grupo G.

Agora, definiremos o conceito de identidades G-graduadas em álgebras de Jordan.

Definição 1.19. Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra de Jordan unitária G-graduada, onde G é grupo abeliano. Dizemos que um polinômio $f = f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_n}^{g_n}) \in J(X)^{\mathrm{gr}}$ é uma *identidade polinomial G-graduada* para A se

$$f(a_1^{g_1}, a_2^{g_2}, \ldots, a_n^{g_n}) = 0,$$

para todos $a_i^{g_i} \in A_{g_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Denotamos por $T_G(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas da álgebra de Jordan G-graduada A.

No estudo das identidades ordinárias temos o conceito de T-ideal. É bastante natural generalizar esse conceito para o caso de identidades G-graduadas,

Definição 1.20. Um ideal G-graduado I de $J(X)^{\mathrm{gr}}$ é um *T_G-ideal* se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo G-graduado φ de $J(X)^{\mathrm{gr}}$.

Analogamente ao caso ordinário, um ideal G-graduado I de $J(X)^{\mathrm{gr}}$ é um T_G-ideal se, e somente se,

$$f(h_1, \ldots, h_n) \in I,$$

para todos $f(x_{i_1}^{g_1}, x_{i_2}^{g_2}, \ldots, x_{i_n}^{g_n}) \in I$ e $h_i \in J(X)_{g_i}$. É corriqueiro verificar que se A é uma álgebra de Jordan unitária G-graduada, então o conjunto $T_G(A)$ das suas identidades polinomiais G-graduadas é um T_G-ideal de $J(X)^{\mathrm{gr}}$.

Dado um subconjunto S de $J(X)^{\mathrm{gr}}$ definimos o *T_G-ideal gerado por S* como sendo a interseção de todos os T_G-ideais de $J(X)^{\mathrm{gr}}$ que contêm S. Este é o menor T_G-ideal de $J(X)^{\mathrm{gr}}$ que contém S, e será denotado por $\langle S \rangle^{T_G}$.

Usando argumentos similares ao Lema 1.13, temos o seguinte resultado:

Lema 1.21. *Sejam $f \in J(X)^{gr}$, $w \in X$ e*

$$f = \sum_{i=0}^{d_w} f^{(i)},$$

onde $f^{(i)}$ é a componente homogênea de f com $\deg_w f^{(i)} = i$. Se $d_w < |K|$ então

$$\langle f \rangle^{T_G} = \langle f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(d_w)} \rangle^{T_G}.$$

1.5 A álgebra de Jordan $UJ_2(K)$

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, nosso principal objeto de estudo. Mantemos que K denotará um corpo arbitrário de $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Relembramos da Definição 1.5, que a álgebra de Jordan $UJ_2(K)$ é o espaço vetorial das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em K, munido com o produto de Jordan $\circ$, dado por

$$u \circ v = (1/2)(u \cdot v + v \cdot u),$$

onde $\cdot$ denota o produto usual de matrizes e $u, v \in UJ_2(K)$. Por conveniência, se $u, v \in UJ_2(K)$, escreveremos $u \circ v = uv$.

Se e_{ij} é a matriz unitária com entrada (i, j) igual a 1, e demais entradas iguais a 0, denotamos por $1, a, b$ os seguintes elementos de $UJ_2(K)$:

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad a = e_{11} - e_{22} \quad \text{e} \quad b = e_{12}.$$

O conjunto $\{1, a, b\}$ é uma base para o espaço vetorial $UJ_2(K)$ e valem

$$aa = 1 \quad \text{e} \quad ab = bb = 0. \tag{1.6}$$

Em [24], os autores descreveram todas as possíveis $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$. Para fins de completude, tal descrição será colocada nesta tese, conforme a sequência de resultados abaixo.

Lema 1.22. *Seja $J = UJ_2(K)$. As seguintes decomposições $J = J_0 \oplus J_1$ são $\mathbb{Z}_2$-graduações de J, onde $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.*

1. *A graduação* associativa*: $J_0 = K \oplus Kb$, $J_1 = Ka$.*

2. *A graduação* escalar*: $J_0 = K$, $J_1 = Ka \oplus Kb$.*

3. *A graduação* clássica*: $J_0 = K \oplus Ka$, $J_1 = Kb$.*

4. *A graduação* trivial*: $J_0 = J$, $J_1 = 0$.*

Aqui cabe observar que identificamos K com o conjunto das matrizes escalares em J.

Demonstração. A prova consiste de cálculo corriqueiro usando (1.6) e será deixada para o leitor. □

Proposição 1.23. *As quatro graduações do Lema 1.22 são aos pares não isomorfas.*

Demonstração. Na graduação escalar temos $\dim J_0 = 1$, enquanto que $\dim J_0 \geq 2$ nas outras três graduações. Assim, a graduação escalar não pode ser isomorfa a nenhuma das outras três. Do mesmo modo, a graduação trivial não pode ser isomorfa a nenhuma das outras, pois $\dim J_0 = 3$. Na graduação clássica temos que $J_1^2 = 0$, enquanto que na graduação associativa $J_1^2 = K$. Assim, as graduações clássica e associativa não são isomorfas. □

Proposição 1.24. *As quatro graduações do Lema 1.22 são, a menos de isomorfismos graduados, as únicas $\mathbb{Z}_2$-graduações em $J = UJ_2(K)$.*

Demonstração. Seja $J = J_0 \oplus J_1$ uma graduação não trivial de J. Então $\dim J_0 = 1$ ou $\dim J_0 = 2$.

Caso 1. $\dim J_0 = 1$.

Neste caso, $J_0 = K$. Escreva $a = \alpha 1 + u$ e $b = \beta 1 + v$, onde $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in J_1$. Então,

$$1 = a^2 = \alpha^2 + 2\alpha u + u^2.$$

Como $1, \alpha^2 \in J_0$, $u^2 \in J_1 J_1 \subseteq J_0$ e $\alpha u \in J_0 J_1 \subseteq J_1$, segue que $2\alpha u \in J_0 \cap J_1 = 0$. Logo, $\alpha = 0$ e portanto $a \in J_1$. Com um raciocínio análogo, usando o fato que $b^2 = 0$, concluímos que $b \in J_1$. Logo, se $\dim J_0 = 1$, então a graduação em J é a escalar.

Caso 2. $\dim J_0 = 2$.

Neste caso, $\dim J_1 = 1$. Seja $\{1, u\}$ uma base de J_0, e seja $\{v\}$ uma base de J_1. Podemos escrever $u = \alpha a + \beta b$ e $v = \lambda 1 + \mu a + \nu b$, onde $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu \in K$. Temos que $uv = \lambda u + \alpha\mu \in J_0$ e $uv \in J_1$. Logo, $uv = 0$, isto é, $\lambda u + \alpha\mu = 0$. Como $\{1, u\}$ é um conjunto linearmente independente, segue que $\lambda = 0$ e $\alpha\mu = 0$.

Estamos diante da seguinte situação: $\{1, u\}$ é uma base de J_0, $\{v\}$ é uma base de J_1,

$$u = \alpha a + \beta b \ \text{ e } \ v = \mu a + \nu b, \tag{1.7}$$

onde $\alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ e $\alpha\mu = 0$.

(a) Consideremos primeiramente o caso em que $\alpha = 0$. Neste caso, temos $u = \beta b$ e, sem perda de generalidade, podemos supor que $u = b$. Obrigatoriamente, temos $\mu \neq 0$, pois caso contrário teríamos que v pertence a J_0, o que seria um absurdo. Assim, podemos supor que $\mu = 1$ e temos

$$v = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $\nu = 0$, então temos exatamente a graduação associativa. Se $\nu \neq 0$, então a matriz v pode ser diagonalizada, isto é, existe uma matriz triangular superior w tal que

$$w \cdot v \cdot w^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a,$$

onde $\cdot$ é o produto associativo usual de matrizes. A função $\varphi : J \to J$ dada por $\varphi(x) = w \cdot x \cdot w^{-1}$ é um isomorfismo de álgebras de Jordan. Além disso, como

$$\varphi(1) = 1, \;\; \varphi(b) = \xi b \;\text{ e }\; \varphi(v) = a$$

para algum $\xi \in K$, segue que φ é um isomorfismo graduado de J, com a graduação analisada, em J com a graduação associativa.

(b) Por fim, analisaremos o caso $\mu = 0$. Por (1.7), podemos supor que $v = b$. Mas $u = \alpha a + \beta b$ e, neste caso, obrigatoriamente $\alpha \neq 0$. Multiplicando a expressão de u por α^{-1}, podemos considerar $\alpha = 1$, e então repetimos o processo de diagonalização acima com v no lugar de u. Neste caso, temos um isomorfismo graduado de J, com a graduação analisada, em J com a graduação clássica. $\square$

As identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $UJ_2(K)$ foram descritas em [24] para toda $\mathbb{Z}_2$-graduação de $UJ_2(K)$, quando o corpo K é de $\operatorname{char}(K) = 0$. No Capítulo 2 descreveremos tais identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a graduação trivial, e no Capítulo 4 para as demais graduações, quando K é qualquer corpo (finito ou infinito) de $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

1.6 Involuções e $*$-identidades polinomiais

Nesta seção, enunciaremos as definições e propriedades básicas a respeito de álgebras com involuções. No seu final, faremos um lema que será utilizado em alguns capítulos posteriores desta tese. Ao longo desta seção, K denotará um corpo com $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Definição 1.25. Sejam A uma álgebra associativa e $* : A \longrightarrow A$ uma função. Dizemos que $*$ é uma *involução* sobre A se os três itens abaixo forem satisfeitos:

i) $(a+b)^* = a^* + b^*$, para todos $a, b \in A$;

ii) $(ab)^* = b^* a^*$, para todos $a, b \in A$;

iii) $(a^*)^* = a$, para todo $a \in A$.

Se $*$ é uma involução sobre A, dizemos que A é uma *álgebra com involução* $*$, e a denotamos por $(A, *)$.

Exemplo 1.26. Um exemplo de involução sobre $UT_2(K)$ é a involução $*$ definida por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c \in K$. Esta involução será de grande importância para este trabalho, como veremos no decorrer da tese.

Gostaríamos apenas de mencionar, sem se aprofundar no assunto, que todas as involuções de $UT_n(K)$ (do primeiro tipo) foram descritas em [7].

Os conceitos de elementos simétrico e antissimétrico tornam convenientes os cálculos em uma álgebra com involução.

Definição 1.27. Seja $(A,*)$ uma álgebra com involução. Um elemento $a \in A$ é *simétrico* se $a^* = a$, e *antissimétrico* se $a^* = -a$. Denotamos por A^+ e A^- os seguintes subespaços vetoriais de A:

$$A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\} \quad \text{e} \quad A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}.$$

É imediato que $A = A^+ \oplus A^-$ como espaço vetorial.

Exemplo 1.28. Seja $(UT_2(K),*)$ a álgebra com involução definida no Exemplo 1.26. Então, segue que

$$UT_2(K)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b \in K \right\} \quad \text{e} \quad UT_2(K)^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a,b \in K \right\}.$$

Note que uma base para $UT_2(K)^+$ é o conjunto $\{1, e_{12}\}$, e uma base para $UT_2(K)^-$ é $\{e_{11} - e_{22}\}$, onde 1 é a matriz identidade, e os e_{ij} são as matrizes unitárias de $UT_2(K)$.

Considere dois conjuntos disjuntos e enumeráveis, como abaixo:

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots\} \text{ e } Z = \{z_1, z_2, \ldots\}.$$

Agora denote por $K\langle Y \cup Z\rangle$ a álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por $Y \cup Z$. Considere a involução $*$ sobre $K\langle Y \cup Z\rangle$, onde

$$y_i^* = y_i \quad \text{e} \quad z_i^* = -z_i,$$

para todo i.

Definição 1.29. Um elemento $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in K\langle Y \cup Z\rangle$ é uma *identidade polinomial com involução* (ou $*$-*identidade polinomial*) para uma álgebra com involução $(A,*)$, se

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0,$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A^-$. O conjunto de todas as $*$-identidades polinomiais para $(A,*)$ será denotado por $T(A,*)$.

Exemplo 1.30. Seja $(UT_2(K),*)$ a álgebra com involução definida no Exemplo 1.26. Os elementos de $K\langle Y \cup Z\rangle$ dados por

$$f(y_1, y_2, z_1, z_2) = [y_1, z_1][y_2, z_2] \quad \text{e} \quad g(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$$

pertencem a $T(UT_2(K),*)$, onde

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

denota o comutador. De fato, sejam $a_1, a_2 \in UT_2(K)^+$ e $b_1, b_2 \in UT_2(K)^-$. Neste caso,

$$a_1 = \alpha_1 1 + \beta_1 e_{12},\ a_2 = \alpha_2 1 + \beta_2 e_{12},\ b_1 = \gamma_1(e_{11} - e_{22}) \text{ e } b_2 = \gamma_2(e_{11} - e_{22}),$$

onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in K$ para $i = 1, 2$. Então,

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = [a_1, b_1][a_2, b_2] = (-2\beta_1\gamma_1 e_{12})(-2\beta_2\gamma_2 e_{12}) = 0, \text{ e}$$

$$g(b_1, b_2) = [b_1, b_2] = [\gamma_1(e_{11} - e_{22}), \gamma_2(e_{11} - e_{22})] = 0.$$

Antes de enunciar o resultado principal da seção, definiremos a seguinte notação com o intuito de simplificação:

Notação 1.31. Seja K um corpo finito com $|K| = q$ elementos. Denotaremos por Λ_n o conjunto de todas as n-uplas $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tais que:

a) $0 \leq a_1, \ldots, a_n < 2q$;

b) Se $a_i \geq q$ para algum i, então $a_j < q$ para todo $j \neq i$.

Com os conceitos definidos, podemos enunciar o próximo lema, que foi provado por Urure e Gonçalves em [36]. Como já citado anterioremente, este fato será utilizado em alguns resultados da tese.

Lema 1.32. *Seja K um corpo finito com $|K| = q$ elementos e* $\mathrm{char}(K) \neq 2$. *Denote $J = T(UT_2(K), *)$, onde $*$ é a involução do Exemplo 1.26. O conjunto de todos os polinômios*

$$y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n} + J,$$

onde $(s_1, \ldots, s_n) \in \Lambda_n$ e $n \geq 1$, é um subconjunto linearmente independente do espaço quociente $K\langle Y \cup Z\rangle / J$.

Demonstração. Para a demonstração, veja [36, Lema 5.8]. □

Gostaríamos de mencionar que as $*$-identidades polinomiais de $UT_2(K)$, com qualquer involução, foram descritas em [7] e [36]. A descrição referente a $UT_3(K)$ foi feita em [7] e [14], quando K é infinito. Para os demais casos de $UT_n(K)$, o problema de descrição das $*$-identidades polinomiais permanece em aberto.

1.7 Fatos básicos de álgebra linear e de combinatória

Nesta seção, apresentaremos dois fatos básicos que serão utilizados em alguns resultados ao longo da tese. Eles envolvem conceitos de álgebra linear e análise combinatória.

O primeiro lema, diz respeito a uma igualdade entre subespaços vetoriais.

Lema 1.33. *Sejam I e J subespaços de um espaço vetorial V tais que $I \subseteq J$. Se B é um subconjunto de V tal que $\bar{B} = \{b + I \mid b \in B\}$ gera o espaço vetorial quociente V/I, e $\bar{\bar{B}} = \{b + J \mid b \in B\}$ é linearmente independente em V/J, então $I = J$.*

Demonstração. Suponha que $I \subsetneq J$, e seja $u \in J \setminus I$. Pelo fato que $\bar{B}$ gera V/I, segue que

$$u + I = \sum_{b \in B} \alpha_b b + I, \ \alpha_b \in K,$$

onde ao menos um coeficiente $\alpha_b \neq 0$. Em particular, existe $h \in I$ tal que $u = \sum_{b \in B} \alpha_b b + h$. Como $u, h \in J$, segue que $\sum_{b \in B} \alpha_b b \in J$, ou seja,

$$\sum_{b \in B} \alpha_b b + J = J.$$

Como $\bar{\bar{B}}$ é linearmente independente, segue que $\alpha_b = 0$ para todo $b \in B$, o que é uma contradição. Logo, $I = J$. □

O segundo e último resultado da seção é um lema técnico sobre a congruência, módulo p, de certos coeficientes multinomiais, onde p é um número primo. Este lema será utilizado no Capítulo 3.

Lema 1.34. *Se p é um número primo e $1 \leq m < n$, então os coeficientes multinomiais*

$$\alpha = \binom{p^n - 1}{p^m - 1, \underbrace{p^m, \ldots, p^m}_{(p-1)\, fatores}, \underbrace{p^{m+1}, \ldots, p^{m+1}}_{(p-1)\, fatores}, \ldots, \underbrace{p^{n-1}, \ldots, p^{n-1}}_{(p-1)\, fatores}} \neq 0 \pmod{p}$$

e

$$\beta = \binom{p^n}{\underbrace{p^m, \ldots, p^m}_{(p)\, fatores}, \underbrace{p^{m+1}, \ldots, p^{m+1}}_{(p-1)\, fatores}, \ldots, \underbrace{p^{n-1}, \ldots, p^{n-1}}_{(p-1)\, fatores}} = 0 \pmod{p}.$$

Demonstração. Escrevemos $(p^n)! = p^N b$, onde $p \nmid b$. Pela Fórmula de Legendre,

$$N = \left\lfloor \frac{p^n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p^n}{p^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{p^n}{p^n} \right\rfloor = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1}, \tag{1.8}$$

onde $\lfloor a \rfloor$ é a parte inteira de a. Assim,

$$(p^n - 1)! = \frac{p^n (p^n - 1)!}{p^n} = \frac{p^n!}{p^n} = \frac{p^N b}{p^n} = p^{N-n} b. \tag{1.9}$$

Escrevendo

$$(p^m - 1)!(p^m!)^{p-1}(p^{m+1}!)^{p-1} \cdots (p^{n-1}!)^{p-1} = p^M a,$$

onde $p \nmid a$, temos por (1.8) e (1.9) que

$$(p^m - 1)!(p^m!)^{p-1}(p^{m+1}!)^{p-1} \cdots (p^{n-1}!)^{p-1} = \left(p^{\frac{p^m-1}{p-1} - m}\right)\left(p^{\frac{p^m-1}{p-1}}\right)^{p-1} \cdots \left(p^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}}\right)^{p-1} a,$$

e assim,

$$M = \left(\frac{p^m - 1}{p - 1} - m \right) + (p^m - 1) + \cdots + (p^{n-1} - 1) = \frac{p^n - 1}{p - 1} - n = N - n.$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{(p^n - 1)!}{(p^m - 1)!(p^m!)^{p-1}(p^{m+1}!)^{p-1} \cdots (p^{n-1}!)^{p-1}} = \frac{p^{N-n}b}{p^{N-n}a} = \frac{b}{a} \neq 0 \pmod{p}.$$

Como

$$\beta = \binom{p^n}{p^m} \alpha = p^{n-m} \alpha$$

e $n > m$, segue que $p \mid \beta$. O lema está provado. $\square$

CAPÍTULO 2

Identidades polinomiais para $UJ_2(K)$

Seja $T(UJ_2)$ o T-ideal de $UJ_2 = UJ_2(K)$, isto é, o subconjunto de $J(X)$ formado por todas as identidades polinomiais de $UJ_2(K)$. Em [24], Koshlukov e Martino descreveram $T(UJ_2)$ quando K é um corpo infinito de $\text{char}(K) \neq 2,3$. Neste capítulo, descrevemos $T(UJ_2)$ para um corpo arbitrário K (finito ou infinito) de $\text{char}(K) \neq 2$. Os resultados aqui apresentados são de minha autoria em conjunto com os professores Gonçalves e Koshlukov, e estão submetidos, para análise, num periódico.

2.1 Resultados gerais

Nesta seção, K denotará um corpo (finito ou infinito) de $\text{char}(K) \neq 2$. Enunciaremos e provaremos alguns resultados gerais a respeito de $T(UJ_2)$ que serão utilizados, posteriormente, nas demonstrações dos principais teoremas deste capítulo.

Começamos com o seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja $X_i = \alpha_i 1 + \beta_i a + \gamma_i b$, onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in K$, $1 = e_{11} + e_{22}$, $a = e_{11} - e_{22}$ e $b = e_{12}$. Se $n \geq 1$, então*

a) $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{2n+1}) = [(-1)^{n-1}(\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3)\beta_2\beta_4\beta_5\cdots\beta_{2n+1}]b$;

b) $X_1\cdots X_m(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_{2n+1}}) = [(-1)^{n-1}\alpha_1\cdots\alpha_m(\beta_{i_1}\gamma_{i_3} - \gamma_{i_1}\beta_{i_3})\beta_{i_2}\beta_{i_4}\beta_{i_5}\cdots\beta_{i_{2n+1}}]b$.

Demonstração. a) Vamos provar por indução em n. Uma verificação direta mostra que

$$(X_1, X_2, X_3) = [(\beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3)\beta_2]b = \det\begin{pmatrix} \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} b.$$

Assim, o caso $n = 1$ é verdadeiro. Por hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned}
(X_1,\ldots,X_{2n+1}) &= ((X_1,\ldots,X_{2n-1}),X_{2n},X_{2n+1}) \\
&= \det\begin{pmatrix} \beta_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-2}(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)\beta_2\beta_4\cdots\beta_{2n-1} \\ 0 & \beta_{2n+1} & \gamma_{2n+1} \end{pmatrix} b \\
&= (-1)^{n-1}(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)\beta_2\beta_4\cdots\beta_{2n+1}b.
\end{aligned}$$

b) Usando as igualdades $ab = bb = 0$, juntamente com o item a), obtemos a igualdade desejada. □

Na sequência, destacaremos três importantes identidades polinomiais para UJ_2. Por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

Notação 2.2. Seja I o T-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_2,x_3,x_4) - x_1(x_2,x_3,x_4) - x_2(x_1,x_3,x_4), \tag{2.1}$$

$$(x_1,(x_2,x_3,x_4),x_5), \tag{2.2}$$

$$(x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6). \tag{2.3}$$

Definimos a relação de equivalência $\equiv$ em $J(X)$ como segue: se $f,g \in J(X)$, então

$$f \equiv g \quad \text{se, e somente se,} \quad f+I = g+I.$$

Lema 2.3. *Se I é o T-ideal definido acima, então $I \subseteq T(UJ_2)$.*

Demonstração. Aplicando o Lema 2.1 aos 3 geradores de I, temos que eles pertencem a $T(UJ_2)$. Logo, $I \subseteq T(UJ_2)$. □

No próximo lema, analisaremos o comportamento de um produto com duas variáveis dentro de um associador.

Lema 2.4. *As seguintes equivalências são válidas em $J(X)$:*

a) $(x_1x_2,x_3,x_4) \equiv (x_1,x_3,x_4)x_2 + (x_2,x_3,x_4)x_1$;

b) $(x_3,x_4,x_1x_2) \equiv (x_3,x_4,x_1)x_2 + (x_3,x_4,x_2)x_1$;

c) $(x_3,x_1x_2,x_4) \equiv (x_3,x_1,x_4)x_2 + (x_3,x_2,x_4)x_1$.

Demonstração. Como $T(x_1,x_2,x_3,x_4) \in I$, obtemos $T(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv 0$, isto é,

$$(x_1x_2,x_3,x_4) \equiv (x_1,x_3,x_4)x_2 + (x_2,x_3,x_4)x_1.$$

Isto prova a afirmação de (a).

Por (1.1), temos $(x_3,x_4,x_1x_2) = -(x_1x_2,x_4,x_3)$. Agora, usamos (a) e depois (1.1), nesta ordem, para deduzir (b).

Por (1.1), temos

$$(x_3,x_1x_2,x_4) = (x_1x_2,x_3,x_4) - (x_1x_2,x_4,x_3).$$

Agora, aplicamos (a) e depois (1.1), nesta ordem, para obter (c). □

No que segue, será conveniente escrevermos alguns polinômios módulo o T-ideal $\langle (x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, por isso, daremos uma caracterização dos elementos deste T-ideal. Vale lembrar a convenção (1.5): todos os produtos de Jordan sem parêntesis são supostos normados à direita. Também lembramos que se $x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_n} \in X$ e $n \geq 3$ é ímpar, então

$$(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_n})$$

é chamado de associador regular.

Lema 2.5. *Se $h \in \langle (x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, então $h+I$ é uma combinação linear de elementos da forma $fg+I$, onde $f \in J(X)$ e g é um associador regular.*

Demonstração. Se $h \in \langle (x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, então h é uma combinação linear de elementos

$$m_1m_2\cdots m_t(u,v,w), \tag{2.4}$$

onde $m_1,\ldots,m_t,u,v,w \in J(X)$ são monômios.

Afirmação 1. $h+I$ é uma combinação linear de elementos

$$m_1m_2\cdots m_t f+I, \tag{2.5}$$

onde $m_1,m_2,\ldots,m_t \in J(X)$ são monômios e $f \in J(X)$ é um associador regular.

Prova da Afirmação 1. Aplicando o Lema 2.4 várias vezes em (u,v,w) da equação (2.4), temos a afirmação.

Portanto, para provar o lema é suficiente supor $h+I$ como em (2.5).

Afirmação 2. Sejam $m_1,\ldots,m_t$ monômios com $\deg m_1+\cdots+\deg m_t = n$. Se f é um associador regular, então $m_1m_2\cdots m_t f+I$ é uma combinação linear de elementos $mg+I$, onde m é um monômio com $\deg m \leq n$ e g é um associador regular.

Prova da Afirmação 2. Vamos provar a afirmação usando indução em n. O caso $n=1$ é trivial. Suponha que $n \geq 2$. Aplicando a hipótese de indução em $m_2\cdots m_t f+I$, obtemos que $m_1m_2\cdots m_t f+I$ é uma combinação linear de elementos m_1mg+I, onde m é um monômio com $\deg m \leq \deg m_2+\cdots+\deg m_t$ e g é um associador regular.

Assim, para um polinômio m_1mg+I como acima, temos

$$\deg m_1+\deg m \leq \deg m_1+\deg m_2+\cdots+\deg m_t = n.$$

Se $\deg m_1 + \deg m < n$, então usando novamente a hipótese de indução teremos a afirmação provada. Se $\deg m_1 + \deg m = n$, então

$$m_1 m g \equiv (m_1 m)g - (m_1, m, g) \equiv (m_1 m)g + (g, m, m_1). \tag{2.6}$$

Pelo Lema 2.4 temos que $(g, m, m_1) + I$ é uma combinação linear de elementos $m'_1 \cdots m'_r g' + I$, onde $m'_1, \ldots, m'_r$ são monômios com $\deg m'_1 + \cdots + \deg m'_r \leq n-2$ e g' é um associador regular. Aplicando a hipótese de indução em $m'_1 \cdots m'_r g' + I$, temos por (2.6) que a afirmação está provada.

Pelas Afirmações 1 e 2 a demonstração do lema está completa. □

No próximo lema, mostraremos que uma determinada classe de polinômios são elementos de I.

Lema 2.6. *Se $y_1, \ldots, y_6 \in X$, então*

$$(x_1(y_1, y_2, y_3))(y_4, y_5, y_6) \equiv 0.$$

Demonstração. Como

$$(x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5) \text{ e } (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6)$$

pertencem a I, temos

$$(x_1(y_1, y_2, y_3))(y_4, y_5, y_6) = x_1((y_1, y_2, y_3)(y_4, y_5, y_6)) + (x_1, (y_1, y_2, y_3), (y_4, y_5, y_6)) \equiv 0,$$

como era desejado. □

Em seguida, descreveremos os geradores do espaço quociente $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T / I$. Para isso, primeiro criaremos a seguinte notação:

Notação 2.7. Seja $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in J(X)$ o monômio com $\deg_{x_i} g = d_i$, definido por

$$g = x_1 \cdots x_1 x_2 \cdots x_2 \cdots x_n \cdots x_n.$$

Denotaremos g simplesmente por

$$g = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}.$$

Lema 2.8. *O espaço vetorial quociente $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T / I$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios*

$$(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n})(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2k+1}}) + I,$$

onde $n \geq 0$, $a_i \geq 0$ para todo i, e $k \geq 1$.

Demonstração. Se $g \in \langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$, então pelo Lema 2.5 temos que $g + I$ é uma combinação linear de elementos da forma $mh + I$, onde $m \in J(X)$ é um monômio e h é um associador regular.

Afirmação 1. Se $m = m(x_1, \ldots, x_n) \in J(X)$ é um monômio com multigrau $(b_1, \ldots, b_n)$ e h é um associador regular, então

$$mh \equiv (x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n})h.$$

Prova da Afirmação 1. Temos que $m = x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n} + \widehat{h}$, para algum $\widehat{h} \in \langle (x_1,x_2,x_3)\rangle^T$. Assim,

$$mh = (x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n} + \widehat{h})h = (x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n})h + \widehat{h}h.$$

Pelos Lemas 2.5 e 2.6, segue que $\widehat{h}h \in I$, e portanto

$$mh \equiv (x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n})h.$$

A afirmação está provada.

Pela Afirmação 1, temos que $g+I$ é uma combinação linear dos elementos desejados e o lema está provado. $\square$

O próximo lema diz respeito a algumas equivalências, módulo I, que são válidas para associadores. Este fato foi provado em [24, Lemas 16, 17], mas vamos incluí-lo para conveniência do leitor e completude do texto.

Denotemos por $Sym(n)$ o grupo simétrico das permutações de $\{1,\ldots,n\}$.

Lema 2.9. *Se $y_1, y_2 \in X$ e $\sigma \in Sym(3)$, então*

$$(y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) \equiv (y_1, x_1, y_2, x_2, x_3).$$

Demonstração. É suficiente provar que

a) $(y_1,x_1,y_2,x_2,x_3) \equiv (y_1,x_1,y_2,x_3,x_2)$;

b) $(y_1,x_1,y_2,x_2,x_3) \equiv (y_1,x_2,y_2,x_3,x_1)$.

Por (1.1) e pelo fato que $(x_1,(x_2,x_3,x_4),x_5) \in I$, segue que

$$\begin{aligned}(y_1,x_1,y_2,x_2,x_3) &\equiv (x_2,(y_1,x_1,y_2),x_3) - (x_2,x_3,(y_1,x_1,y_2))\\ &\equiv -(x_2,x_3,(y_1,x_1,y_2)) \equiv (y_1,x_1,y_2,x_3,x_2).\end{aligned}$$

Portanto, o item a) está provado.

Seja $f = (y_1,x_1,y_2,x_2,x_3) - (y_1,x_2,y_2,x_3,x_1)$. Pela definição de associador, pelo Lema 2.4 - item c), e pelo fato que $(x_1,(x_2,x_3,x_4),x_5) \in I$, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}f &\equiv ((y_1,x_1,y_2)x_2)x_3 - (y_1,x_1,y_2)(x_2x_3) - ((y_1,x_2,y_2)x_3)x_1 + (y_1,x_2,y_2)(x_3x_1)\\ &\equiv ((y_1,x_1,y_2)x_2)x_3 - (y_1,x_1(x_2x_3),y_2) + (y_1,(x_2x_3),y_2)x_1 - ((y_1,x_2,y_2)x_3)x_1\\ &\quad + (y_1,x_2(x_3x_1),y_2) - (y_1,(x_3x_1),y_2)x_2\\ &\equiv ((y_1,x_1,y_2)x_2)x_3 + (y_1,(x_1,x_3,x_2),y_2) + ((y_1,x_2,y_2)x_3)x_1 + ((y_1,x_3,y_2)x_2)x_1\\ &\quad - ((y_1,x_2,y_2)x_3)x_1 - ((y_1,x_3,y_2)x_1)x_2 - ((y_1,x_1,y_2)x_3)x_2\\ &\equiv ((y_1,x_1,y_2)x_2)x_3 + ((y_1,x_3,y_2)x_2)x_1 - ((y_1,x_3,y_2)x_1)x_2 - ((y_1,x_1,y_2)x_3)x_2\\ &\equiv (x_2,(y_1,x_1,y_2),x_3) + (x_2,(y_1,x_3,y_2),x_1) \equiv 0.\end{aligned}$$

A prova do item b), e do lema, está completa. $\square$

O lema seguinte é um resultado que será utilizado várias vezes no decorrer do texto. Este nos diz como podemos "permutar as variáveis", módulo I, dentro de um associador regular.

Lema 2.10. *Se $y_1, y_2 \in X$ e $\sigma \in Sym(2n+1)$, então*

$$(y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n+1)}) \equiv (y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, x_{2n+1}),$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $f = (y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n+1)})$. Note que é suficiente provar que

$$f \equiv (y_1, x_{\sigma(i)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(2n+1)}), \tag{2.7}$$

para todo $i = 2, \ldots, 2n+1$. Vamos provar por indução em n. O caso $n = 1$ é consequência do Lema 2.9. Suponha que $n \geq 2$. Por hipótese de indução, (2.7) é verdadeira para todo $i = 2, \ldots, 2n-1$. Se $i = 2n$, por hipótese de indução e pelo Lema 2.9, obtemos

$$\begin{aligned} f &\equiv (((y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(2n+1)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(2n-2)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(2n+1)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(2n-2)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2n+1)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(2n)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2n+1)}). \end{aligned}$$

Se $i = 2n+1$, pelo Lema 2.9 e o caso anterior segue que

$$\begin{aligned} f &\equiv (((y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(2n+1)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(2n+1)}, x_{\sigma(2n)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(2n+1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2n)}) \\ &\equiv (((y_1, x_{\sigma(2n+1)}, y_2, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(2n-3)}), x_{\sigma(2n-2)}, x_{\sigma(2n-1)}), x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(1)}). \end{aligned}$$

A prova está completa. □

Por simplicidade de expressão, usaremos a seguinte notação:

Notação 2.11. Se $f, g \in J(X)$, $x \in X$ e $d \geq 1$, denotamos

$$(f, g, x^{(d)}) = (f, g, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{d \text{ fatores}}).$$

Para finalizar a seção, vamos descrever um conjunto de geradores para o espaço vetorial $J(X)/I$. Este será crucial nas duas próximas seções, onde descreveremos $T(UJ_2)$ para um corpo arbitrário K de $\text{char}(K) \neq 2$.

Lema 2.12. *Seja S o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios* *(a)* $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$,

(b) $(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n})(x_t,x_u,x_l,x_u^{(s_u)},x_{u+1}^{(s_{u+1})},\ldots,x_n^{(s_n)})$,

onde $m_1,\ldots,m_n \geq 0$*;* $t \leq u$ *e* $t < l$*;* $s_u,\ldots,s_n \geq 0$*;* $s_u+s_{u+1}+\cdots+s_n$ *é par;* $n \geq 0$*. Então o espaço vetorial quociente* $J(X)/I$ *é gerado pelo conjunto de todos os elementos* $h+I$*, onde* $h \in S$*.*

Demonstração. Se $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in J(X)$ é um monômio com multigrau $(a_1,\ldots,a_n)$, onde $a_1,\ldots,$ $a_n \geq 0$, então

$$f = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} + g,$$

para algum $g \in \langle (x_1,x_2,x_3)\rangle^T$. Pelos Lemas 2.8 e 2.10, e por (1.1), segue que $g+I$ é uma combinação linear de elementos $h+I$, onde $h \in S$. Portanto, $f+I$ também pode ser escrito como tal combinação linear, acrescentando o elemento $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}+I$. □

2.2 Identidades de $UJ_2(K)$, quando K é infinito

Esta seção, que consiste apenas de um resultado, será dedicada a descrever o T-ideal $T(UJ_2(K))$ sobre corpos infinitos de $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Destacamos que este T-ideal foi descrito em [24, Teorema 19], mas sobre corpos infinitos de $\mathrm{char}(K) \neq 2,3$. Uma vez que a demonstração do resultado desta seção vale para todo corpo infinito de $\mathrm{char}(K) \neq 2$, não será necessário considerar o caso remanescente ($\mathrm{char}(K) = 3$) separadamente.

Teorema 2.13. *Seja* K *um corpo infinito de característica diferente de 2. Se* $T(UJ_2(K))$ *é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan* $UJ_2(K)$*, então* $T(UJ_2(K))$ *é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios*

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4),\ \ (x_1,(x_2,x_3,x_4),x_5) \text{ e } (x_1,x_2,x_3)(x_4,x_5,x_6).$$

Mais ainda, $I = T(UJ_2(K))$*, e o conjunto no Lema 2.12 é uma base para o espaço vetorial quociente* $J(X)/I$*.*

Demonstração. Como já foi comentado anteriormente, escreveremos $UJ_2(K) = UJ_2$. Pelo Lema 2.3, temos $I \subseteq T(UJ_2)$.

Seja S o conjunto no Lema 2.12, e $\overline{S} = \{g+T(UJ_2) \mid g \in S\}$. Pelo Lema 2.12, segue que $J(X)/T(UJ_2) = \operatorname{span}\overline{S}$. Mostraremos que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{g\in S}\lambda_g g \in T(UJ_2), \qquad \lambda_g \in K.$$

Como K é um corpo infinito, pela Proposição 1.14, podemos supor que f é um polinômio multi-homogêneo. Seja $d = (d_1,\ldots,d_n)$ o multigrau de $f(x_1,\ldots,x_n)$. Neste caso,

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n) =& \lambda x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}+ \\
&+\sum_m (x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}) \underbrace{\left(\sum_{l=2}^{n} \lambda_{m,l}(x_t,x_u,x_l,x_u^{(s_u)},x_{u+1}^{(s_{u+1})},\dots,x_n^{(s_n)})\right)}_{f_m}
\end{aligned}
$$

onde $m=(m_1,\dots,m_n)$; $t\le u$ e $t<l$; $m_i+\deg_{x_i} f_m = d_i$, para todo i. Substituindo as variáveis de f pela matriz identidade 1 de UJ_2, obtemos

$$f(1,\dots,1)=\lambda 1 = 0,$$

ou seja, $\lambda = 0$. Usando o mesmo argumento como em [10, Proposição 4.3.3], obtemos

$$\langle f\rangle^T = \langle f_m \mid \ m=(m_1,\dots,m_n), \text{ e } m_1,\dots,m_n\ge 0\rangle^T. \tag{2.8}$$

Portanto,

$$f_m(x_t,x_{t+1},\dots,x_n)=\sum_{l=2}^{n}\lambda_{m,l}(x_t,x_u,x_l,x_u^{(s_u)},x_{u+1}^{(s_{u+1})},\dots,x_n^{(s_n)})\in T(UJ_2),$$

para todo m. Fixe $l>t$, $X_l=a+b$ e $X_i=a$ se $i\neq l$. Aqui, $a=e_{11}-e_{22}$ e $b=e_{12}$. Pelo Lema 2.1, temos

$$f_m(X_t,X_{t+1},\dots,X_n)=\pm\lambda_{m,l}b=0,$$

e então $\lambda_{m,l}=0$, como desejado.

Como $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente, e $I\subseteq T(UJ_2)$, pelo Lema 2.12 e pelo Lema 1.33, segue que $I=T(UJ_2)$. □

2.3 Identidades de $UJ_2(K)$, quando K é finito

Nesta seção, descreveremos o T-ideal das identidades polinomiais de $UJ_2(K)$, para o caso em que K é um corpo finito de char$(K)\neq 2$. Inicialmente, faremos alguns lemas que mais adiante serão utilizados no teorema principal, enunciado no final da seção, e que descreverá um conjunto gerador para $T(UJ_2(K))$.

Nesta seção, K será um corpo finito com $|K|=q$ elementos, e char$(K)\neq 2$.

Usaremos a seguinte notação:

Notação 2.14. Seja I' o T-ideal de $J(X)$ gerado pelos 3 polinômios (2.1), (2.2), (2.3) e pelos 5 polinômios

$$(x_1^q - x_1)(x_2,x_3,x_4), \tag{2.9}$$

$$(x_1,x_2^q - x_2,x_3), \tag{2.10}$$

$$(x_1^q - x_1)(x_2^q - x_2), \tag{2.11}$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_2^{(q-1)}) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_2,x_3), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&(x_1,x_1,x_2,x_1^{(q-2)},x_2^{(q-1)},x_3) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_3,x_2^{(q)}) + (x_1,x_3,x_2) + \\ &-(-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_1,x_2,x_1^{(q-2)},x_3).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Note que I' é gerado, como um T-ideal, por 8 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 2.15. *Se I' é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T(UJ_2)$.*

Demonstração. Como o grupo multiplicativo $K^* = (K - \{0\}, \cdot)$ tem ordem $q-1$, segue que $\alpha^{q-1} = 1$ para todo $\alpha \in K - \{0\}$. Assim,

$$\alpha^q = \alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in K.$$

Provaremos apenas que $(x_1^q - x_1)(x_2,x_3,x_4) \in T(UJ_2)$ e deixaremos a verificação dos demais polinômios para o leitor. Se

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ então } X_1^q = \begin{bmatrix} a_{11}^q & a'_{12} \\ 0 & a_{22}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix},$$

para algum $a'_{12} \in K$. Logo, $X_1^q - X_1 = \alpha e_{12}$, onde $\alpha = a'_{12} - a_{12}$. Pelo Lema 2.1, se $X_2, X_3, X_4 \in UJ_2$, então $(X_2,X_3,X_4) = \beta e_{12}$, para algum $\beta \in K$. Logo,

$$(X_1^q - X_1)(X_2,X_3,X_4) = (\alpha e_{12})(\beta e_{12}) = 0,$$

como desejado. □

Os próximos dois lemas nos darão três classes de elementos que estão em I'.

Lema 2.16. *Se $n \geq 0$ e $y_1, \ldots, y_n \in X$, então os polinômios*

$$(x_1, y_1 \cdots y_n(x_2^q - x_2), x_3) \quad e \quad (y_1 \cdots y_n(x_1^q - x_1))(x_2,x_3,x_4)$$

pertencem a I'.

Demonstração. Sejam $f = (x_1, y_1 \cdots y_n(x_2^q - x_2), x_3)$ e $g = (y_1 \cdots y_n(x_1^q - x_1))(x_2,x_3,x_4)$. Vamos provar o lema por indução em n. Se $n = 0$, f se reduz a (2.10), g se reduz a (2.9), e não há nada a provar.

Suponha que $n \geq 1$. Como $I \subseteq I'$, pelo Lema 2.4 temos a seguinte igualdade módulo I':

$$f = (x_1,y_1,x_3)(y_2 \cdots y_n(x_2^q - x_2)) + (x_1, y_2 \cdots y_n(x_2^q - x_2), x_3)y_1.$$

Aplicando a hipótese de indução nos dois somandos de f, concluímos que $f \in I'$. Com respeito a g, pela definição de associador, temos que

$$g = y_1((y_2 \cdots y_n(x_1^q - x_1))(x_2,x_3,x_4)) + (y_1, y_2 \cdots y_n(x_1^q - x_1), (x_2,x_3,x_4)).$$

Aplicando novamente a hipótese de indução nos dois somandos à direita da igualdade, temos que $g \in I'$.

O lema está provado. □

Lema 2.17. *O polinômio*

$$(x_1,x_2,x_3,x_4^{(q+1)}) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_4)$$

pertence a I'.

Demonstração. Pelo Lema 2.10 e por (2.12), temos

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4^{(q+1)}) + I' &= (x_1,x_4,x_3,x_4^{(q-1)},x_2,x_4) + I' \\ &= ((-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_4,x_3),x_2,x_4) + I' \\ &= (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_4) + I',\end{aligned}$$

como desejado. □

Para fins de simplificação, usaremos a próxima notação.

Notação 2.18. Denotaremos por Λ_n o conjunto de todos os elementos $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tais que:

a) $0 \le a_1,\ldots,a_n < 2q$;

b) Se $a_i \ge q$ para algum i, então $a_j < q$ para todo $j \ne i$.

Nosso objetivo é descrever $T(UJ_2)$. Como $I' \subseteq T(UJ_2)$, será muito útil sabermos um conjunto gerador para o espaço quociente $J(X)/I'$, para que assim possamos provar a igualdade dos dois T-ideais acima.

Lema 2.19. *O espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios $g + I'$ tais que:*

(a) $g = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$ *ou*

(b) $g = (x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})(x_t,x_u,x_l,x_u^{(s_u)},x_{u+1}^{(s_{u+1})},\ldots,x_n^{(s_n)})$

onde $(m_1,\ldots,m_n) \in \Lambda_n$; $0 \le p_1,\ldots,p_n < q$; $t \le u$ *e* $t < l$; $0 \le s_u < q-1$, $0 \le s_{u+1},\ldots,s_n < q$ *e* $s_u + s_{u+1} + \cdots + s_n$ *é par; e* $n \ge 0$. *Mais ainda, se* $u = t$ *e* $s_u = q-2$, *então* $0 \le s_l < q-1$.

Demonstração. Seja $f(x_1,\ldots,x_n)\in J(X)$ um monômio. Vamos provar que $f+I'$ é uma combinação linear de elementos $g+I'$, onde g é como em (a) ou (b) no enunciado.

Afirmação 1. $f+I'$ é uma combinação linear de elementos

$$x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+g+I',$$

onde $(m_1,\ldots,m_n)\in\Lambda_n$ e $g\in\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$.

Prova da Afirmação 1: Denotemos por $H=\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T+I'$. Temos que

$$f+H=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}+H=(x_1^{a_1})(x_2^{a_2})\cdots(x_n^{a_n})+H, \tag{2.14}$$

onde $a_i\geq 0$ para todo i. Como $(x_i^q-x_i)(x_j^q-x_j)\in I'\subseteq H$, obtemos

$$(x_i^q)(x_j^q)+H=(x_i^q)x_j+x_i(x_j^q)-x_ix_j+H \quad \text{e} \quad x_i^{2q}+H=2x_i^{q+1}-x_i^2+H. \tag{2.15}$$

Assim, se existe $a_j\geq 2q$ em (2.14), podemos usar a segunda equação de (2.15) e escrever $f+H$ como uma combinação linear de elementos $m+H$, onde $m=x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$ com $0\leq b_1,\ldots,b_n<2q$. Além disso, se existem $1\leq j<k\leq n$ tais que $b_j,b_k\geq q$ em $m+H$, então

$$m+H=x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j}\cdots x_k^{b_k}\cdots x_n^{b_n}+H=x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j-q}\cdots x_k^{b_k-q}\cdots x_n^{b_n}(x_j^q)(x_k^q)+H,$$

e pela primeira equação de (2.15) segue que

$$\begin{aligned}m+H&=x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j-q}\cdots x_k^{b_k-q}\cdots x_n^{b_n}((x_j^q)x_k+x_j(x_k^q)-x_jx_k)+H\\&=x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j}\cdots x_k^{b_k-q+1}\cdots x_n^{b_n}+x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j-q+1}\cdots x_k^{b_k}\cdots x_n^{b_n}\\&\quad -x_1^{b_1}\cdots x_j^{b_j-q+1}\cdots x_k^{b_k-q+1}\cdots x_n^{b_n}+H.\end{aligned}$$

Agora, comparemos o grau de m nas variáveis x_j e x_k, com os graus dos 3 últimos somandos em tais variáveis! Aplicando várias vezes este argumento, podemos supor que $f+H$ é uma combinação linear de elementos $x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+H$, onde $(m_1,\ldots,m_n)\in\Lambda_n$. Portanto, $f+I'$ é uma combinação linear de elementos $x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+g+I'$, onde $(m_1,\ldots,m_n)\in\Lambda_n$ e $g\in\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, como era o desejado.

Afirmação 2. Se $g\in\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T$, então $g+I'$ é uma combinação linear de elementos

$$(x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n})h+I',$$

onde $0\leq p_i<q$ para todo i, e h é um associador regular.

Prova da Afirmação 2: Como $I\subseteq I'$ temos, pelo Lema 2.5, que $g+I'$ é uma combinação linear de elementos da forma $mh+I'$, onde $m\in J(X)$ é um monômio e h é um associador regular. Denotando por $J=\langle(x_1,x_2,x_3)\rangle^T+\langle x_1^q-x_1\rangle^T$, segue que

$$m+J=x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}+J,$$

onde $0 \leq p_i < q$ para todo i. Assim, existem $u \in \langle (x_1, x_2, x_3) \rangle^T$ e $\widehat{u} \in \langle x_1^q - x_1 \rangle^T$ tais que

$$m = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} + u + \widehat{u},$$

onde $0 \leq p_i < q$ para todo i. Portanto, se h é um associador regular temos

$$mh + I' = (x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})h + uh + \widehat{u}h + I'.$$

Pelos Lemas 2.8 e 2.6, segue que $uh \in I \subseteq I'$, e pelo Lema 2.16 temos $\widehat{u}h \in I'$. Portanto, $g + I'$ é uma combinação linear de elementos

$$(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n})h + I',$$

onde $0 \leq p_i < q$ para todo i, e h é um associador regular. Assim, a Afirmação 2 está provada.

Afirmação 3. Se h é um associador regular, então $h + I'$ é uma combinação linear de elementos da forma

$$(x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \ldots, x_n^{(s_n)}) + I',$$

onde $t \leq u$ e $t < l$, $0 \leq s_u < q-1$, $0 \leq s_{u+1}, \ldots, s_n < q$, $s_u + s_{u+1} + \cdots + s_n$ é par, e $n \geq 0$. Além disso, se $u = t$ e $s_u = q-2$, então $0 \leq s_l < q-1$.

Prova da Afirmação 3: Se h é um associador regular, então pelo Lema 2.10 e por (1.1) segue que

$$h + I' = (x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \ldots, x_n^{(s_n)}) + I',$$

onde $t \leq u$ e $t < l$, $s_u, \ldots, s_n \geq 0$, $s_u + s_{u+1} + \cdots + s_n$ é par, e $n \geq 0$. Por (2.12) e pelo Lema 2.17, temos

$$(x_1, x_2, x_3, x_2^{(q-1)}) + I' = (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_2, x_3) + I',$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4^{(q+1)}) + I' = (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_2, x_3, x_4^{(2)}) + I'.$$

Assim, podemos supor $0 \leq s_u < q-1$ e $0 \leq s_{u+1}, \ldots, s_n \leq q$. Além disso, novamente pelo Lema 2.10 e por (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4^{(q)}, x_5) + I' &= (x_1, x_4, x_3, x_4^{(q-1)}, x_2, x_5) + I' \\ &= (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_4, x_3, x_2, x_5) + I' \\ &= (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + I'.\end{aligned}$$

Assim, podemos supor $0 \leq s_{u+1}, \ldots, s_n < q$.

Agora, se $u = t$ e $s_u = q-2$, então por (2.13) temos que

$$\begin{aligned}(x_t, x_t, x_l, x_t^{(q-2)}, x_l^{(q-1)}, x_r) + I' = &-(x_t, x_r, x_l) + (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_t, x_r, x_l^{(q)}) \\ &+ (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_t, x_t, x_l, x_t^{(q-2)}, x_r) + I',\end{aligned}$$

onde $r \neq t, l$, pois $s_t < q-1$ e $s_l < q$. Como

$$(x_t, x_r, x_l^{(q)}) + I' = (x_t, x_l, x_l, x_l^{(q-2)}, x_r) + I',$$

podemos supor que $0 \leq s_l < q-1$. Portanto, $h+I'$ é uma combinação linear dos elementos desejados e a prova da afirmação está completa.

Pelas Afirmações 1, 2 e 3 concluímos que $f+I'$ é uma combinação linear de elementos $g+I'$ onde os g's são como em (a) ou (b).

O lema está provado. □

O próximo teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.20. *Seja K um corpo finito com $|K| = q$ elementos, e característica diferente de 2. Se $T(UJ_2(K))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, então $T(UJ_2(K)) = I'$. Mais ainda, o conjunto no Lema 2.19 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.15 temos $I' \subseteq T(UJ_2)$.

Denote por S' o conjunto de todos os polinômios g no Lema 2.19 - item (a), e por S'' o conjunto de todos o polinômios no Lema 2.19 - item (b). Seja $S = S' \cup S''$ e $\overline{S} = \{g+T(UJ_2) \mid g \in S\}$. Como $I' \subseteq T(UJ_2)$, pelo Lema 2.19 segue que $J(X)/T(UJ_2) = \operatorname{span}\overline{S}$.

Vamos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{g\in S} \lambda_g g \in T(UJ_2),\ \lambda_g \in K.$$

Seja $f = f' + f''$, onde

$$f' = \sum_{g\in S'} \lambda_g g \quad \text{e} \quad f'' = \sum_{g\in S''} \lambda_g g.$$

Denotemos por $UT_2^+ = \operatorname{span}\{e_{11}+e_{22}, e_{12}\}$. Como $f''(a_1,\ldots,a_n) = 0$ para todo $a_i \in UT_2^+$, concluímos que $f'(a_1,\ldots,a_n) = 0$ para todo $a_i \in UT_2^+$.

Seja $*$ a involução na álgebra associativa UT_2 definida por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Note que os elementos simétricos de UT_2 formam o subespaço vetorial UT_2^+. Além disso, se $u, v \in UT_2^+$ então

$$u \circ v = u \cdot v$$

onde $\cdot$ é o produto usual de UT_2. Assim,

$$f' = f'(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m\in\Lambda_n} \lambda_m x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n},$$

onde $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \Lambda_n$ e $\lambda_m \in K$, é uma $*$-identidade polinomial para UT_2 no caso em que $x_1,\ldots,x_n$ são variáveis simétricas. Pelo Lema 1.32, obtemos $\lambda_m = 0$ para todo $m \in \Lambda_n$.

Em particular,

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{g\in S''}\lambda_g g.$$

Denote por $g_{(p,t,u,l,s_u,s)}$ o polinômio

$$g_{(p,t,u,l,s_u,s)}=(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})(x_t,x_u,x_l,x_u^{(s_u)},x_{u+1}^{(s_{u+1})},\dots,x_n^{(s_n)}),$$

onde $p=(p_1,\dots,p_n)$ com $0\le p_1,\dots,p_n<q$ e $s=(s_{u+1},\dots,s_n)$. Então

$$\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n)=&\sum_p\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{s_t=0}^{q-3}\sum_{(s_{t+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)}g_{(p,t,t,l,s_t,s)}\\
&+\sum_p\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\dots,\widehat{s_l},\dots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}g_{(p,t,t,l,q-2,s)}\\
&+\sum_p\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{u>t}\sum_{s_u=0}^{q-2}\sum_{(s_{u+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)}g_{(p,t,u,l,s_u,s)}.
\end{aligned}$$

Seja $X_i=\alpha_i1+\beta_ia+\gamma_ib$, onde $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in K$, $1=e_{11}+e_{22}$, $a=e_{11}-e_{22}$ e $b=e_{12}$. Pelo Lema 2.1 temos

$$f(X_1,\dots,X_n)=Bb=0,$$

onde $B=\sum_p\overline{B_p}\alpha_1^{p_1}\cdots\alpha_n^{p_n}$ com $p=(p_1,\dots,p_n)$, $0\le p_1,\dots,p_n<q$, e

$$\begin{aligned}
\overline{B_p}=&\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{s_t=0}^{q-3}\sum_{(s_{t+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_t^{s_t+1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n}\\
&+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\dots,\widehat{s_l},\dots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\pm\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_t^{q-1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n}\\
&+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{u>t}\sum_{s_u=0}^{q-2}\sum_{(s_{u+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_u^{s_u+1}\beta_{u+1}^{s_{u+1}}\cdots\beta_n^{s_n}.
\end{aligned}$$

Como $B=0$, $|K|=q$ e $\deg_{\alpha_i}B<q$ para todo i, pelo Lema 1.16 temos $\overline{B_p}=0$ para todo p. Usando o fato que $\beta_t^q=\beta_t$, obtemos

$$\begin{aligned}
0=\overline{B_p}=&\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{s_t=0}^{q-3}\sum_{(s_{t+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_t^{s_t+1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n}\\
&+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\dots,\widehat{s_l},\dots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\pm\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_l\beta_t\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n}\\
&+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\dots,\widehat{s_l},\dots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\mp\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_t\beta_t^{q-1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_l^{s_l+1}\cdots\beta_n^{s_n}\\
&+\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{u>t}\sum_{s_u=0}^{q-2}\sum_{(s_{u+1},\dots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_u^{s_u+1}\beta_{u+1}^{s_{u+1}}\cdots\beta_n^{s_n}.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Primeiramente suponha que $0 \leq s_1 \leq q-3$. Vamos mostrar que os coeficientes $\lambda_{(p,1,1,l,s_1,s)}$ são nulos para todo $2 \leq l \leq n$ e para todo s. Temos que a componente homogênea M de $\overline{B_p}$ com $\deg_{\beta_1} M = s_1+2$ e $\deg_{\gamma_l} M = 1$ é

$$M = \sum_{(s_2,\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,1,1,l,s_1,s)}\gamma_l\beta_1^{s_1+2}\beta_2^{s_2}\cdots\beta_n^{s_n}.$$

Como $\deg_{\beta_1}\overline{B_p} < q$ e $\deg_{\gamma_l}\overline{B_p} = 1 < q$, segue que M é uma identidade polinomial para K. Assim, como $\deg_{\gamma_l} M = 1 < q$ e $\deg_{\beta_j} M < q$ para todo j, temos pelo Lema 1.16 que $\lambda_{(p,1,1,l,s_1,s)} = 0$ para todos $2 \leq l \leq n$, $0 \leq s_1 \leq q-3$ e s.

Em particular, por (2.16) temos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{B_p} = & \sum_{t=2}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{s_t=0}^{q-3}\sum_{(s_{t+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_t^{s_t+1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\pm\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_l\beta_t\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\mp\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_t\beta_t^{q-1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_l^{s_l+1}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{u>t}\sum_{s_u=0}^{q-2}\sum_{(s_{u+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_u^{s_u+1}\beta_{u+1}^{s_{u+1}}\cdots\beta_n^{s_n}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, vamos mostrar que $\lambda_{(p,1,1,l,q-2,s)} = 0$ para todos l, s. Temos que a componente homogênea M de $\overline{B_p}$ com $\deg_{\beta_1} M = q-1$ e $\deg_{\gamma_1} M = 1$ é

$$M = \sum_{l=2}^{n}\sum_{(s_2,\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\mp\lambda_{(p,1,1,l,q-2,s)}\gamma_1\beta_1^{q-1}\beta_2^{s_2}\cdots\beta_l^{s_l+1}\cdots\beta_n^{s_n}.$$

Como $\deg_{\beta_1}\overline{B_p} < q$ e $\deg_{\gamma_1}\overline{B_p} = 1 < q$ segue que M é uma identidade polinomial para K. Assim, como $\deg_{\gamma_1} M = 1 < q$ e $\deg_{\beta_j} M < q$ para todo j, temos pelo Lema 1.16 que $\lambda_{(p,1,1,l,q-2,s)} = 0$ para todos l, s.

Em particular, por (2.17) temos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{B_p} = & \sum_{t=2}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{s_t=0}^{q-3}\sum_{(s_{t+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_t^{s_t+1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=2}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\pm\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_l\beta_t\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=2}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\sum_{s_l=0}^{q-2}\mp\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)}\gamma_t\beta_t^{q-1}\beta_{t+1}^{s_{t+1}}\cdots\beta_l^{s_l+1}\cdots\beta_n^{s_n} \\ & +\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{l>t}\sum_{u>t}\sum_{s_u=0}^{q-2}\sum_{(s_{u+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1}\pm\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)}(\beta_t\gamma_l-\gamma_t\beta_l)\beta_u^{s_u+1}\beta_{u+1}^{s_{u+1}}\cdots\beta_n^{s_n}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Finalmente, vamos mostrar que $\lambda_{(p,1,u,l,s_u,s)} = 0$ para todos $u > 1$, $l > 1$, s_u e s. A componente homogênea M de $\overline{B_p}$ com $\deg_{\beta_1} M = 1$ e $\deg_{\gamma_l} M = 1$ é

$$M = \sum_{u>1} \sum_{s_u=0}^{q-2} \sum_{(s_{u+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,1,u,l,s_u,s)} \beta_1 \gamma_l \beta_u^{s_u+1} \beta_{u+1}^{s_{u+1}} \cdots \beta_n^{s_n}.$$

Como $\deg_{\beta_1} \overline{B_p} = 1 < q$ e $\deg_{\gamma_l} \overline{B_p} = 1 < q$ segue que M é uma identidade polinomial para K. Assim, como $\deg_{\gamma_l} M = 1 < q$ e $\deg_{\beta_j} B_{(p,1,u,l,s_u,s)} < q$ para todo j, segue pelo Lema 1.16 que $\lambda_{(p,1,u,l,s_u,s)} = 0$ para todos $u > 1$, $l > 1$, $0 \leq s_u \leq q-2$ e $0 \leq s_{u+1}, \ldots, s_n \leq q-1$.

Por (2.18) temos

$$\begin{aligned}
0 = \overline{B_p} = & \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{l>t} \sum_{s_t=0}^{q-3} \sum_{(s_{t+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,t,t,l,s_t,s)} (\beta_t\gamma_l - \gamma_t\beta_l) \beta_t^{s_t+1} \beta_{t+1}^{s_{t+1}} \cdots \beta_n^{s_n} \\
& + \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{l>t} \sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \sum_{s_l=0}^{q-2} \pm\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)} \gamma_l \beta_t \beta_{t+1}^{s_{t+1}} \cdots \beta_n^{s_n} \\
& + \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{l>t} \sum_{(s_{t+1},\ldots,\widehat{s_l},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \sum_{s_l=0}^{q-2} \mp\lambda_{(p,t,t,l,q-2,s)} \gamma_t \beta_t^{q-1} \beta_{t+1}^{s_{t+1}} \cdots \beta_l^{s_l+1} \cdots \beta_n^{s_n} \\
& + \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{l>t} \sum_{u>t} \sum_{s_u=0}^{q-2} \sum_{(s_{u+1},\ldots,s_n=0)}^{q-1} \pm\lambda_{(p,t,u,l,s_u,s)} (\beta_t\gamma_l - \gamma_t\beta_l) \beta_u^{s_u+1} \beta_{u+1}^{s_{u+1}} \cdots \beta_n^{s_n}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento em $\overline{B_p}$ for $t = 2, \ldots, n-1$, respectivamente, obtemos que $\lambda_{(p,t,u,l,s_t,s)} = 0$ para todo (p,t,u,l,s_t,s).

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T(UJ_2)$. Mais ainda, como $I' \subseteq T(UJ_2)$, pelo Lema 2.19 e Lema 1.33 temos $I' = T(UJ_2)$. $\square$

CAPÍTULO 3

Propriedade de Specht para $UJ_2(K)$

Seja K um corpo infinito de $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Neste capítulo, vamos provar que $T(UJ_2(K))$ tem a propriedade de Specht, isto é, todo T-ideal contendo $T(UJ_2(K))$ é finitamente gerado como um T-ideal. Observamos que este resultado foi obtido em [5] para $\mathrm{char}(K) = 0$. A prova feita nesta tese tem uma abordagem diferente, que também funciona no caso em que K é infinito de $\mathrm{char}(K) > 2$. Os resultados aqui apresentados são de minha autoria em conjunto com os professores Gonçalves e Koshlukov, e estão submetidos, para análise, num periódico.

3.1 Propriedade de Specht, quando K é infinito

Nesta seção, K denotará um corpo infinito de $\mathrm{char}(K) = p \neq 2$. Aqui provaremos o resultado citado na introdução deste capítulo.

Por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

Notação 3.1. Se $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,x_{l_1},x_j,x_{l_2},\ldots,x_{l_t})$, onde $\deg_{x_i} f = d_i \geq 1$ para todo i e $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_t$, então denotaremos $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ por

$$f = f^{(j)}_{(d_1,\ldots,d_n)}.$$

Lema 3.2. *Seja $f = f(x_1,\ldots,x_n) \notin T(UJ_2)$ um polinômio dado por*

$$f = \sum_{j=2}^{m} \alpha_j f^{(j)}_{(d_1,\ldots,d_n)},$$

onde $\alpha_j \in K$, $1 \leq d_1 = \ldots = d_m = d$ e $2 \leq m \leq n$.

(a) Se existe $2 \leq i \leq m$ tal que $(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) \neq 0$, então

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \langle f^{(2)}_{(d_1,\ldots,d_n)} \rangle^T + T(UJ_2).$$

(b) Se $(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) = 0$ *para todo* $2 \leq i \leq m$*, então* $\alpha_2 = \ldots = \alpha_m$*. Neste caso,*

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \left\langle \sum_{j=2}^{m} f^{(j)}_{(d_1,\ldots,d_n)} \right\rangle^T + T(UJ_2).$$

Demonstração. Suponha $d \geq 2$ e $m \geq 3$. Os outros casos são análogos e serão deixados para o leitor.

Para cada $i = 2, \ldots, m$, denotemos por $v_i = v_i(x_1, \ldots, x_n)$ o polinômio:

$$v_i = f(x_i, x_2, x_3, \ldots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

Temos as seguintes igualdades, módulo $T(UJ_2)$:

$$\begin{aligned} v_i = &+ \alpha_i(x_i, x_i, x_1, x_i^{(d-2)}, \ldots, x_1^{(d-1)}, \ldots) + \\ &+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j(x_i, x_i, x_j, x_i^{(d-2)}, \ldots, x_1^{(d)}, \ldots, x_j^{(d-1)}, \ldots) \\ = &- \alpha_i(x_1, x_1, x_i, x_1^{(d-2)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots) + \\ &+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j(x_i, x_1, x_j, x_1^{(d-1)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots, x_j^{(d-1)}, \ldots). \end{aligned}$$

Note que usamos o Lema 2.10 e (1.1). Por (1.1),

$$\begin{aligned} v_i = &- \alpha_i(x_1, x_1, x_i, x_1^{(d-2)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots) + \\ &- \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j(x_1, x_j, x_i, x_1^{(d-1)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots, x_j^{(d-1)}, \ldots) + \\ &+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_j(x_1, x_i, x_j, x_1^{(d-1)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots, x_j^{(d-1)}, \ldots). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.10, temos a seguinte igualdade módulo $T(UJ_2)$:

$$f - v_i = (\alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m)(x_1, x_1, x_i, x_1^{(d-2)}, \ldots, x_i^{(d-1)}, \ldots). \tag{3.1}$$

Se $(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) \neq 0$ para algum $i = 2, \ldots, m$, então

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \langle f - v_i \rangle^T + T(UJ_2) = \langle f^{(2)}_{(d_1,\ldots,d_n)} \rangle^T + T(UJ_2),$$

e o lema está provado.

Suponhamos que $(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_m) = 0$ para todo $i = 2, \ldots, m$. Neste caso, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + \alpha_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + 2\alpha_m = 0 \end{cases}, \tag{3.2}$$

com matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que A é uma matriz de tamanho $(m-1)\times(m-1)$. Temos que

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (m-2)+2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = m.$$

Se $p \nmid m$, então $\det A \neq 0$ e $\alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Mas isso é um absurdo.

Se $p \mid m$, então $\det A = 0$. Como A é uma matriz quadrada de tamanho $(m-1)\times(m-1)$, e tem posto $m-2$, segue que $\{(1,1,\ldots,1)\}$ é uma base para o espaço vetorial de soluções do sistema linear (3.2). Neste caso, obtemos a afirmação de b). □

Teorema 3.3. *Seja K um corpo infinito de* $\mathrm{char}(K) = p > 2$. *Se J é um T-ideal de $J(X)$ tal que $T(UJ_2) \subseteq J$, então J é gerado, como um T-ideal, por $T(UJ_2)$ e alguns polinômios da forma:*

1) $f^{(2)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})}$, *onde* $0 \leq r_1 = r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_n$ *e* $n \geq 2$; *ou*

2) $\sum_{j=2}^{m} f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})}$, *onde* $0 \leq r_1 = \ldots = r_m \leq r_{m+1} \leq \ldots \leq r_n$, $2 \leq m \leq n$ *e* $p \mid m$.

Demonstração. Por (2.8), segue que J é gerado, como um T-ideal, por $T(UJ_2)$ e alguns polinômios multi-homogêneos com multigrau $(d_1,\ldots,d_n)$ no subespaço

$$\mathrm{span}\{f^{(j)}_{(d_1,\ldots,d_n)} \mid 2 \leq j \leq n\}.$$

Usando argumentos similares ao Teorema 6 de [3, Seção 4.2], Lema 2.10 e (1.1), temos que J é gerado por $T(UJ_2)$ e alguns polinômios multi-homogêneos com multigrau $(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})$ no subespaço

$$\mathrm{span}\{f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})} \mid 2 \leq j \leq n\}.$$

Renomeando as variáveis, se necessário, pelo Lema 2.10 e (1.1) podemos supor $0 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_n$.

Seja $f(x_1,\ldots,x_n) \in J - T(UJ_2)$ dado por

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})},$$

onde $\alpha_j \in K$ para todo j, e $0 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_n$.

Caso 1. Suponhamos $r_1 < r_j$ e $\alpha_j \neq 0$ para algum $j \geq 2$.

Sem perda de generalidade, vamos estudar o caso $r_1 < r_2$ e $\alpha_2 \neq 0$. Escrevemos

$$p^{r_2} = p^{r_2-1}(p-1) + p^{r_2-2}(p-1) + \cdots + p^{r_1+1}(p-1) + p^{r_1}p.$$

Trocando a variável x_2 de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por uma soma de variáveis distintas em $X - \{x_1, \ldots, x_n\}$, como abaixo,

$$x_2 =: y_1 + \cdots + y_p + \sum_{i=1}^{r_2-r_1-1} \left[\sum_{l=1}^{p-1} y_{(i,l)} \right],$$

obtemos um novo polinômio $\overline{f}$. Denotemos por h a componente multi-homogênea de $\overline{f}$ tal que $\deg_{x_i} h = p^{r_i}$ se $i \neq 2$; $\deg_{y_i} h = p^{r_1}$ se $1 \leq i \leq p$; $\deg_{y_{(i,l)}} h = p^{r_1+i}$ se $1 \leq i \leq r_2 - r_1 - 1$ e $1 \leq l \leq p-1$. Seja

$$h = h(x_1, y_1, \ldots, y_p, y_{(1,1)}, \ldots, y_{(1,p-1)}, y_{(2,1)}, \ldots, y_{(2,p-1)}, \ldots, y_{(r_2-r_1-1,p-1)}, x_3, \ldots, x_n),$$

e

$$d = (p^{r_1}, p^{r_1}, \ldots, p^{r_1}, p^{r_1+1}, \ldots, p^{r_1+1}, p^{r_1+2}, \ldots, p^{r_1+2}, \ldots, p^{r_2-1}, p^{r_3}, \ldots, p^{r_n}).$$

Pelos Lemas 2.10 e 1.34, o polinômio h é igual, módulo $T(UJ_2)$, a

$$h = \alpha\alpha_2 \left(\sum_{i=2}^{p+1} f_d^{(i)}(x_1, y_1, \ldots, y_p, y_{(1,1)}, \ldots, y_{(2,1)}, \ldots, y_{(r_2-r_1-1,p-1)}, x_3, \ldots, x_n) \right),$$

onde o coeficiente multinomial

$$\alpha = \binom{p^{r_2}-1}{p^{r_1}-1, \underbrace{p^{r_1}, \ldots, p^{r_1}}_{(p-1)fatores}, \underbrace{p^{r_1+1}, \ldots, p^{r_1+1}}_{(p-1)fatores}, \ldots, \underbrace{p^{r_2-1}, \ldots, p^{r_2-1}}_{(p-1)fatores}} \neq 0.$$

Pelo Lema 3.2 - item a), segue que

$$\langle f_d^{(2)} \rangle^T + T(UJ_2) = \langle h \rangle^T + T(UJ_2) \subseteq \langle f \rangle^T + T(UJ_2),$$

onde $f_d^{(2)} = f_d^{(2)}(x_1, y_1, \ldots, y_p, y_{(1,1)}, \ldots, y_{(2,1)}, \ldots, y_{(r_2-r_1-1,p-1)}, x_3, \ldots, x_n)$. Neste caso,

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \langle \widehat{f},\ f_d^{(2)} \rangle^T + T(UJ_2),$$

onde

$$\widehat{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=3}^{n} \alpha_j f^{(j)}_{(p^{r_1}, \ldots, p^{r_n})}.$$

Agora podemos aplicar o mesmo argumento a $\widehat{f}$ e, após vários passos, renomeando as variáveis se necessário e usando o Lema 2.10, obtemos

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \langle F \rangle^T + T(UJ_2),$$

onde F é um conjunto formado pelos polinômios multi-homogêneos que são combinação linear dos elementos no item 1) do enunciado.

Caso 2. Suponhamos que não exista $j \geq 2$ tal que $r_1 < r_j$ e $\alpha_j \neq 0$.

Neste caso, renomeando as variáveis se necessário e usando o Lema 2.10, podemos supor que

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=2}^{m} \alpha_j f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})},$$

onde $0 \leq r_1 = \ldots = r_m \leq r_{m+1} \leq \ldots \leq r_n$, $2 \leq m \leq n$ e $\alpha_j \neq 0$ para cada $j = 2,\ldots,m$. Pelo Lema 3.2, segue que

$$\langle f\rangle^T + T(UJ_2) = \langle f^{(2)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})}\rangle^T + T(UJ_2)$$

ou

$$\langle f\rangle^T + T(UJ_2) = \left\langle \sum_{j=2}^{m} f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})} \right\rangle^T + T(UJ_2) \text{ e } p \mid m.$$

Desta forma, finalizamos a prova deste teorema. □

Um conjunto parcialmente ordenado $(P,\leq)$ é chamado de *conjunto parcialmente bem-ordenado* se, para todo subconjunto não vazio arbitrário Q de P, existem elementos $q_1,\ldots,q_n \in Q$ (chamados *minimais de* Q) com a seguinte propriedade: se $q \in Q$, então $q_i \leq q$, para algum $1 \leq i \leq n$.

Primeiramente, os conjuntos parcialmente bem-ordenados foram estudados de um ponto de vista sistematicamente algébrico por Higman [16]. Mais tarde, os principais resultados de [16] foram redescobertos várias vezes por diferentes autores.

Precisamos de algumas propriedades básicas dos conjuntos parcialmente bem-ordenados. Estas propriedades são bem conhecidas e deixamos como sugestão ao leitor a referência [3] para mais informações e aplicações para o estudo de PI álgebras.

O próximo lema é o corolário da Proposição 4 em [3, Seção 5.2].

Lema 3.4. *Sejam $(P_1,\leq_1)$ e $(P_2,\leq_2)$ conjuntos parcialmente bem-ordenados. Se $P = P_1 \times P_2$, definimos a relação $\leq$ em P como segue: se $p_1, p_1' \in P_1$ e $p_2, p_2' \in P_2$, então*

$$(p_1,p_2) \leq (p_1',p_2') \Leftrightarrow p_1 \leq_1 p_1' \ \text{ e } \ p_2 \leq_2 p_2'.$$

Então $(P,\leq)$ é um conjunto parcialmente bem-ordenado.

O próximo teorema é consequência do Teorema 4 em [3, Seção 5.2].

Teorema 3.5. *Considere a ordem usual no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Seja $D(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as sequências finitas $(a_1,\ldots,a_r)$, nas quais as componentes estão em $\mathbb{N}$ e $r \geq 1$. Definimos a seguinte ordem $\preceq$ em $D(\mathbb{N})$: $(a_1,\ldots,a_r) \preceq (b_1,\ldots,b_s)$ se, e somente se, existe uma função injetora $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:*

(i) ψ preserva ordem, isto é, se $u \leq v$ então $\psi(u) \leq \psi(v)$;

(ii) $\psi(r) \leq s$;

(iii) $a_i \leq b_{\psi(i)}$, *para todo* $i = 1, \ldots, r$.

Então, $(D(\mathbb{N}), \preceq)$ *é um conjunto parcialmente bem-ordenado.*

Teorema 3.6. *Seja K um corpo infinito de* $\mathrm{char}(K) = p > 2$. *Se J é um T-ideal de* $J(X)$ *tal que* $T(UJ_2) \subseteq J$, *então J é finitamente gerado como um T-ideal.*

Demonstração. Consideremos o conjunto parcialmente bem-ordenado $D(\mathbb{N})$ do Teorema 3.5, e definimos a seguinte ordem $\leq$ em $\mathbb{N} \times D(\mathbb{N})$: se $l, l' \in \mathbb{N}$ e $d, d' \in D(\mathbb{N})$, então

$$(l,d) \leq (l',d') \Leftrightarrow l \leq l' \text{ e } d \leq d'. \tag{3.3}$$

Pelo Lema 3.4, segue que $\mathbb{N} \times D(\mathbb{N})$ é um conjunto parcialmente bem-ordenado.

Se J é um T-ideal de $J(X)$ tal que $T(UJ_2) \subseteq J$, então pelo Teorema 3.3 existem subconjuntos $A, B \subseteq J$ tais que

$$J = T(UJ_2) + \langle A \cup B \rangle^T,$$

onde:

(1) A é formado por alguns polinômios

$$f^{(2)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})},$$

com $0 \leq r_1 = r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_n$ e $n \geq 2$.

(2) B é formado por alguns polinômios

$$\sum_{j=2}^{m} f^{(j)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})},$$

com $0 \leq r_1 = \ldots = r_m \leq r_{m+1} \leq \ldots \leq r_n$, $2 \leq m \leq n$, e $p \mid m$.

Dado um elemento em A, denotemos

$$\eta\left(f^{(2)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})}\right) = (p^{r_1}, (p^{r_3}, \ldots, p^{r_n})).$$

Notemos que $p^{r_1} \in \mathbb{N}$ e $(p^{r_3}, \ldots, p^{r_n}) \in D(\mathbb{N})$, isto é,

$$\eta\left(f^{(2)}_{(p^{r_1},\ldots,p^{r_n})}\right) \in \mathbb{N} \times D(\mathbb{N}).$$

Pelo Lema 2.10, segue que

$$f^{(2)}_{(p^{r_1+1},p^{r_1+1},p^{r_3},\ldots,p^{r_n})} = \left(f^{(2)}_{(p^{r_1},p^{r_1},p^{r_3},\ldots,p^{r_n})}, x_1^{((p-1)p^{r_1})}, x_2^{((p-1)p^{r_1})}\right)$$

módulo $T(UJ_2)$, e também

$$f^{(2)}_{(p^{r_1},p^{r_1},\ldots,p^{r_j+1},\ldots,p^{r_n})} = \left(f^{(2)}_{(p^{r_1},p^{r_1},\ldots,p^{r_j},\ldots,p^{r_n})}, x_j^{((p-1)p^{r_j})}\right)$$

módulo $T(UJ_2)$. Portanto, por (3.3), se $f, f' \in A$ e $\eta(f) \leq \eta(f')$, então $f' \in \langle f \rangle^T + T(UJ_2)$. Como o conjunto $\mathbb{N} \times D(\mathbb{N})$ é parcialmente bem-ordenado, por definição segue que o subconjunto $\eta(A) = \{\eta(f) \mid f \in A\}$ tem elementos minimais $\eta(f_1), \ldots, \eta(f_k)$, para alguns $f_1, \ldots, f_k \in A$. Assim,

$$J = T(UJ_2) + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle^T + \langle B \rangle^T.$$

Dado um elemento em B, seja

$$h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})} = \sum_{j=2}^{m} f^{(j)}_{(p^{r_1}, \ldots, p^{r_n})},$$

onde $0 \leq r_1 = \ldots = r_m \leq r_{m+1} \leq \ldots \leq r_n$, $2 \leq m \leq n$, e $p \mid m$. Mais ainda, denotemos

$$\xi\left(h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})}\right) = (m, (p^{r_1}, (p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n}))).$$

Note que $m \in \mathbb{N}$ e $(p^{r_1}, (p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})) \in \mathbb{N} \times D(\mathbb{N})$, isto é,

$$\xi\left(h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})}\right) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times D(\mathbb{N})).$$

Definimos a seguinte ordem $\leq$ em $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times D(\mathbb{N}))$: se $m, m', l, l' \in \mathbb{N}$ e $d, d' \in D(\mathbb{N})$, então

$$(m, (l, d)) \leq (m', (l', d')) \Leftrightarrow m \leq m',\ l \leq l' \ \text{ and } \ d \leq d'. \tag{3.4}$$

Pelo Lema 3.4, segue que $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times D(\mathbb{N}))$ é um conjunto parcialmente bem-ordenado.

Como acima, temos

$$h_{(m, p^{r_1+1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})} \in \langle h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_n})} \rangle^T + T(UJ_2)$$

e também

$$h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_j+1}, \ldots, p^{r_n})} \in \langle h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+1}}, \ldots, p^{r_j}, \ldots, p^{r_n})} \rangle^T + T(UJ_2).$$

Fixemos um inteiro $m \geq 1$ tal que $p \mid m$, e denotemos por Y o conjunto de todas as m-uplas abaixo:

$$\begin{gathered}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m), \quad (x_1, x_3, x_4, \ldots, x_m, x_{m+1}), \ldots, \\ (x_1, x_{p+2}, x_{p+3}, \ldots, x_{m+p-1}, x_{m+p}), (x_1, x_{p+3}, x_{p+4}, \ldots, x_{m+p}, x_2), \\ (x_1, x_{p+4}, x_{p+5}, \ldots, x_2, x_3), \ldots, (x_1, x_{m+p}, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_{m-1}).\end{gathered}$$

Notemos que Y tem $m+p-1$ elementos. Pelo Lema 2.10, temos que $h_{(m+p, p^{r_1}, p^{r_{m+p+1}}, \ldots, p^{r_n})}$ é igual, módulo $T(UJ_2)$, a

$$\frac{1}{m+p-1} \sum_{y \in Y} \left(h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+p+1}}, \ldots, p^{r_n})}(y_1, \ldots, y_m, x_{m+p+1}, \ldots, x_n), y_{m+1}^{(p^{r_1})}, \ldots, y_{m+p}^{(p^{r_1})}\right),$$

onde $y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y$, $y_{m+1} < \ldots < y_{m+p}$ e $\{y_1, \ldots, y_{m+p}\} = \{x_1, \ldots, x_{m+p}\}$. Em outras palavras,

$$h_{(m+p, p^{r_1}, p^{r_{m+p+1}}, \ldots, p^{r_n})} \in \langle h_{(m, p^{r_1}, p^{r_{m+p+1}}, \ldots, p^{r_n})} \rangle^T + T(UJ_2).$$

Portanto, por (3.4), se $h, h' \in B$ e $\xi(h) \leq \xi(h')$ então $h' \in \langle h \rangle^T + T(UJ_2)$. Como o conjunto $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times D(\mathbb{N}))$ é parcialmente bem-ordenado, segue que o subconjunto $\xi(B) = \{\xi(h) \mid h \in B\}$ tem elementos minimais $\xi(h_1), \ldots, \xi(h_t)$, para alguns $h_1, \ldots, h_t \in B$. Portanto,

$$J = T(UJ_2) + \langle f_1, \ldots, f_k \rangle^T + \langle h_1, \ldots, h_t \rangle^T,$$

como era o desejado. □

Agora, apresentaremos uma outra prova para [5, Teorema 15].

Teorema 3.7. *Seja K um corpo de* $\operatorname{char}(K) = 0$. *Se J é um T-ideal de $J(X)$ tal que $T(UJ_2) \subsetneq J$, então*

$$J = T(UJ_2) + \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \rangle^T$$

para algum número ímpar $m \geq 3$. Além disso, J é finitamente gerado, como um T-ideal.

Demonstração. Como $\operatorname{char}(K) = 0$, temos que J é gerado por seus elementos multilineares. Por (2.8), J é gerado, como um T-ideal, por $T(UJ_2)$ e alguns polinômios

$$f = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (x_1, x_2, x_j, x_3, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n),$$

onde $\alpha_j \in K$ para cada j, e $n \geq 3$ é um número ímpar. Pelo Lema 3.2, segue que

$$\langle f \rangle^T + T(UJ_2) = \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \rangle^T + T(UJ_2).$$

Portanto, se $m = \min\{n \mid (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J\}$ então

$$J = T(UJ_2) + \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m) \rangle^T.$$

Pelo Teorema 2.13, segue que J é finitamente gerado, como um T-ideal. □

CAPÍTULO 4

Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $UJ_2(K)$

As identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $UJ_2 = UJ_2(K)$ foram descritas em [24] para toda $\mathbb{Z}_2$-graduação de UJ_2, quando o corpo K é de $\mathrm{char}(K) = 0$. Vale lembrar que no Teorema 1.24, mostramos que as únicas $\mathbb{Z}_2$-graduações da álgebra de Jordan UJ_2 são (a menos de isomorfismos) as seguintes: associativa, escalar, clássica e trivial. No Capítulo 2, fizemos a descrição das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a graduação trivial, quando K é qualquer corpo (finito ou infinito) de $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Neste capítulo, faremos tal descrição para as demais $\mathbb{Z}_2$-graduações de UJ_2. Os resultados aqui apresentados são de minha autoria em conjunto com o professor Gonçalves, e estão submetidos, para análise, num periódico.

4.1 Álgebra de Jordan unitária livre $\mathbb{Z}_2$-graduada

Precisamos definir o ambiente em que estudaremos as identidades polinomiais mencionadas na introdução deste capítulo, isto é, a álgebra de Jordan unitária livre $\mathbb{Z}_2$-graduada em que trabalharemos. Sejam $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ dois conjuntos infinitos, enumeráveis e disjuntos de variáveis. Seja $X = Y \cup Z$ e $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Denotemos por $J(X)$ a álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por X. Definimos # nos monômios de $J(X)$ do seguinte modo:

$$\#(y_i) = 0 \ \text{ e } \ \#(z_i) = 1,$$

para todo $i \geq 1$. Além disso, se u, v são monômios de $J(X)$, então

$$\#(uv) = \#(u) + \#(v).$$

Agora, se $g \in \mathbb{Z}_2$, defina $J(X)_g$ como sendo o subespaço vetorial de $J(X)$ gerado por todos os monômios $f \in J(X)$ tais que $\#(f) = g$. Logo,

$$J(X) = J(X)_0 \oplus J(X)_1$$

é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, chamada *álgebra de Jordan unitária livre $\mathbb{Z}_2$-graduada*. Esta construção é um caso particular do que já foi feito na Seção 1.4.

Se $f \in J(X)_0$, dizemos que f é um *polinômio par*. Por outro lado, se $f \in J(X)_1$, dizemos que f é um *polinômio ímpar*.

4.2 A graduação associativa

Nesta seção descreveremos as identidades de UJ_2 referentes a graduação associativa.

Notação 4.1. Seja $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$ o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ formado pelas identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $UJ_2 = UJ_2(K)$ com a graduação associativa.

Nesta seção, K denotará um corpo qualquer de $\text{char}(K) = p \neq 2$. Nosso objetivo aqui será o de descrever $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Vale lembrar que

$$UJ_2 = (UJ_2)_0 \oplus (UJ_2)_1\,,$$

onde

$$(UJ_2)_0 = \text{span}\{e_{11} + e_{22},\ e_{12}\} \quad \text{e} \quad (UJ_2)_1 = \text{span}\{e_{11} - e_{22}\}.$$

Notação 4.2. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3),\ (z_1, y_1, y_2),\ (z_1, y_1, z_2),\ (z_1, z_2, z_3) \quad \text{e} \quad (z_1 z_2, z_3, z_4). \tag{4.1}$$

Definimos a relação de equivalência $\equiv$ em $J(X)$ como segue: se $f, g \in J(X)$, então

$$f \equiv g \Leftrightarrow f + I = g + I.$$

Lema 4.3. *Se I é o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal definido acima, então $I \subseteq T_{Ass}(UJ_2)$.*

Demonstração. Vale lembrar que se $1 = e_{11} + e_{22}$, $a = e_{11} - e_{22}$ e $b = e_{12}$, então

$$a^2 = 1 \ \text{ e } \ ab = b^2 = 0.$$

Agora, a prova do lema consiste de uma verificação direta e deixamos os detalhes para o leitor. □

Nos próximos três lemas, mostraremos que certos polinômios são elementos de I.

Lema 4.4. *Os polinômios*

$$(z_1, y_1, y_2),\ (y_1, z_1, y_2) \quad e \quad (y_1, y_2, z_1)$$

pertencem a I.

Demonstração. Por definição, temos $(z_1, y_1, y_2) \in I$. Por (1.1),

$$(y_1, z_1, y_2) = (z_1, y_1, y_2) - (z_1, y_2, y_1) \in I \text{ e } (y_1, y_2, z_1) = -(z_1, y_2, y_1) \in I,$$

como era o desejado. □

Lema 4.5. *Os polinômios*

$$(z_1z_2,x_1,x_2),\ (x_1,z_1z_2,x_2)\ \ e\ \ (x_1,x_2,z_1z_2)$$

pertencem a I, onde x_1 e x_2 são quaisquer variáveis em $Y \cup Z$.

Demonstração. Por (4.1) e Lema 4.4, obtemos

$$(z_1z_2,x_1,x_2) \in \langle (y_1,y_2,y_3),(y_1,z_1,y_2),(y_1,y_2,z_1),(z_1z_2,z_3,z_4)\rangle^{T_{\mathbb{Z}_2}} \subseteq I.$$

Uma vez que $(z_1z_2,x_1,x_2) \in I$, segue de (1.1) que $(x_1,z_1z_2,x_2),\ (x_1,x_2,z_1z_2) \in I$. □

Lema 4.6. *O polinômio*

$$((y_1y_2)z_1)z_2 - ((y_1z_1)z_2)y_2 - ((y_2z_1)z_2)y_1 + (z_1z_2)(y_1y_2)$$

pertence a I.

Demonstração. Seja $f = ((y_1y_2)z_1)z_2 - ((y_1z_1)z_2)y_2 - ((y_2z_1)z_2)y_1 + (z_1z_2)(y_1y_2)$. Se $u = y_1,\ v = z_1,\ c = z_2$ e $d = y_2$ na identidade (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} f &= ((y_1y_2)z_1)z_2 + ((y_1y_2)z_2)z_1 - (z_1y_1)(z_2y_2) - (z_2y_1)(z_1y_2) \\ &= ((y_1y_2)z_1)z_2 + ((y_1y_2)z_2)z_1 - ((z_1y_1)y_2)z_2 - ((z_2y_1)y_2)z_1 + (z_1y_1,y_2,z_2) + (z_2y_1,y_2,z_1) \\ &= (y_2,y_1,z_1)z_2 + (y_2,y_1,z_2)z_1 + (z_1y_1,y_2,z_2) + (z_2y_1,y_2,z_1). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4 e por $(z_1,y_1,z_2) \in I$, concluímos que $f \in I$. □

O próximo lema diz respeito a algumas propriedades envolvendo os elementos pares e ímpares na álgebra quociente $J(X)/I$.

Lema 4.7. *As subálgebras de $J(X)/I$ geradas pelos conjuntos*

$$Y + I = \{y + I \mid y \in Y\} \quad e \quad Z + I = \{z + I \mid z \in Z\}$$

são comutativas e associativas.

Demonstração. Sejam A_Y e A_Z as subálgebras de $J(X)/I$ geradas pelos conjuntos $Y + I$ e $Z + I$, respectivamente. A álgebra $J(X)$ é comutativa, assim A_Y e A_Z são comutativas também.

Como $(y_1,y_2,y_3) \in I$, temos que A_Y é associativa.

Finalmente, sejam f_1, f_2, f_3 polinômios nas variáveis $z_1, z_2, \ldots$. Notemos que cada f_i é a soma de um polinômio par com um polinômio ímpar. Devemos provar que $f = (f_1, f_2, f_3) \in I$ e, para isso, é suficiente considerar que cada f_i é par ou ímpar. A tabela abaixo mostra que f é consequência de $g \in I$.

f_1	f_2	f_3	g
Par	Par	Par	(y_1,y_2,y_3)
Par	Par	Ímpar	(y_1,y_2,z_1)
Par	Ímpar	Par	(y_1,z_1,y_2)
Par	Ímpar	Ímpar	(z_1z_2,x_1,x_2), (y_1,y_2,z_1) e (y_1,y_2,y_3)
Ímpar	Par	Par	(z_1,y_1,y_2)
Ímpar	Par	Ímpar	(z_1,y_1,z_2)
Ímpar	Ímpar	Par	(z_1z_2,x_1,x_2), (y_1,y_2,z_1) e (y_1,y_2,y_3)
Ímpar	Ímpar	Ímpar	(z_1,z_2,z_3)

Provaremos apenas o quarto caso da tabela, os demais serão deixados par o leitor. Sejam f_1, f_2 e f_3 monômios par, ímpar e ímpar, respectivamente. Vamos mostrar por indução em $\deg f_1$ que $f = (f_1, f_2, f_3) \in I$. Se $\deg f_1 = 2$, então f é consequência de $(z_1z_2,x_1,x_2) \in I$ (ver o Lema 4.5). Suponhamos que $\deg f_1 \geq 4$ e seja $f_1 = f_1'f_1''$, onde f_1' e f_1'' são monômios de grau $< \deg f_1$. Se f_1' e f_1'' são ímpares, então f é consequência de $(z_1z_2,x_1,x_2) \in I$. Se f_1' e f_1'' são pares, obteremos as equivalências abaixo do seguinte modo: por $(y_1,y_2,z_1) \in I$ obtemos ($\triangle$1); por hipótese de indução obtemos ($\triangle$2); por $(y_1,y_2,y_3) \in I$ obtemos ($\triangle$3).

$$((f_1'f_1'')f_2)f_3 \overbrace{\equiv}^{(\triangle 1)} (f_1'(f_1''f_2))f_3 \overbrace{\equiv}^{(\triangle 2)} f_1'((f_1''f_2)f_3) \overbrace{\equiv}^{(\triangle 2)} f_1'(f_1''(f_2f_3)) \overbrace{\equiv}^{(\triangle 3)} (f_1'f_1'')(f_2f_3).$$

Assim, $(f_1'f_1'', f_2, f_3) \equiv 0$ como desejado.

Como $(f_1, f_2, f_3) = -(f_3, f_2, f_1)$ obtemos o sétimo caso. Os outros casos são triviais. Portanto a subálgebra A_Z é associativa. $\square$

Observação 4.8. Sejam $g, h \in J(X)$, onde $g = g(y_1, \ldots, y_n)$ é um monômio nas variáveis em Y, e $h = h(z_1, \ldots, z_n)$ é um monômio nas variáveis em Z. Pelo lema anterior, temos que:

(a) Se $\deg_{y_i} g = d_i$ para todo i, então

$$g \equiv \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{(d_1\ fatores)} \underbrace{y_2 \cdots y_2}_{(d_2\ fatores)} \cdots \underbrace{y_n \cdots y_n}_{(d_n\ fatores)}.$$

Neste caso, escreveremos simplesmente

$$g \equiv y_1^{d_1} y_2^{d_2} \cdots y_n^{d_n}.$$

(b) Se $\deg_{z_i} h = d_i$ para todo i, então

$$h \equiv \underbrace{z_1 \cdots z_1}_{(d_1\ fatores)} \underbrace{z_2 \cdots z_2}_{(d_2\ fatores)} \cdots \underbrace{z_n \cdots z_n}_{(d_n\ fatores)}.$$

Neste caso, escreveremos simplesmente

$$h \equiv z_1^{d_1} z_2^{d_2} \cdots z_n^{d_n}.$$

Lema 4.9. *Sejam $f,g \in J(X)$ e $Z' = z_1z_2\cdots z_s$, onde s é par. Então*

$$(fZ')g \equiv (fg)Z'.$$

Demonstração. Denotemos $Z'' = z_1z_2\cdots z_{s-1}$. Pelos Lemas 4.5 e 4.7 temos

$$(fZ')g \equiv (f(Z''z_s))g \equiv f((Z''z_s)g) \equiv f(g(Z''z_s)) \equiv (fg)(Z''z_s) \equiv (fg)Z'.$$

O lema está provado. □

Os próximos dois lemas referem-se a algumas equivalências, módulo I. Eles nos dizem como podemos "permutar as variáveis", módulo I, em certos produtos envolvendo elementos pares e ímpares de $J(X)$. Antes de enunciá-los, relembramos que $Sym(s)$ denota o grupo simétrico de $\{1,\ldots,s\}$.

Lema 4.10. *Se s é ímpar e $\sigma \in Sym(s)$, então*

$$(y_1z_{\sigma(1)})(z_{\sigma(2)}\cdots z_{\sigma(s)}) \equiv (y_1z_1)(z_2\cdots z_s).$$

Demonstração. Pelos Lema 4.9 e Lema 4.7 temos

$$\begin{aligned}(y_1z_{\sigma(1)})(z_{\sigma(2)}\cdots z_{\sigma(s)}) &\equiv y_1(z_{\sigma(1)}(z_{\sigma(2)}\cdots z_{\sigma(s)})) \equiv y_1(z_1(z_2\cdots z_s))\\ &\equiv (y_1z_1)(z_2\cdots z_s).\end{aligned}$$

A prova está completa. □

Lema 4.11. *Se s é par e $\sigma \in Sym(s)$, então*

$$(((y_1z_{\sigma(1)})z_{\sigma(2)})y_2)(z_{\sigma(3)}\cdots z_{\sigma(s)}) \equiv (((y_1z_1)z_2)y_2)(z_3\cdots z_s).$$

Demonstração. Suponha $s=2$. Como $(z_1,y_1,z_2) \in I$, obtemos

$$((y_1z_1)z_2)y_2 \equiv ((z_1y_1)z_2)y_2 \equiv (z_1(y_1z_2))y_2 \equiv ((y_1z_2)z_1)y_2.$$

Se $s \geq 4$, denote $Z' = z_{\sigma(3)}\cdots z_{\sigma(s)}$. Pelo Lema 4.9 temos

$$(((y_1z_{\sigma(1)})z_{\sigma(2)})y_2)Z' \equiv ((y_1z_{\sigma(1)})(z_{\sigma(2)}Z'))y_2 \tag{4.2}$$

e também

$$(((y_1z_{\sigma(1)})z_{\sigma(2)})y_2)Z' \equiv ((y_1(z_{\sigma(1)}Z'))z_{\sigma(2)})y_2. \tag{4.3}$$

Agora usamos o Lema 4.7 para ordenar as variáveis $z_1,\ldots,z_s$ em (4.2) e (4.3). □

No próximo resultado, descreveremos um conjunto de geradores para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$. Ele será crucial nas duas próximas subseções, nas quais descreveremos $T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)$ para um corpo arbitrário K de $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Lema 4.12. *Seja S o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios*

(a) $Y'Z'$,

(b) $(Y'z_{j_1})Z'$,

(c) $(((y_i z_{j_1})z_{j_2})Y')Z'$,

onde $Y' = y_{i_1}\cdots y_{i_r}$ com $r \geq 0$ e $i_1 \leq \ldots \leq i_r$; $Z' = z_{l_1}\cdots z_{l_s}$ com $s \geq 0$ par e $j_1 \leq j_2 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_s$. Então o espaço vetorial quociente $J(X)/I$ é gerado pelo conjunto de todos elementos $g+I$ onde $g \in S$.

Demonstração. Sejam A, B e C os conjuntos de todos os elementos $g+I$, tais que g está em (a), (b) e (c), respectivamente. Denotemos $D = A\cup B\cup C$.

Afirmação 1. Se $Y' = y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m}$, $Y'' = y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_t}$ e $Z' = z_{l_1}\cdots z_{l_s}$ com $s \geq 0$ par, $m \geq 0$ e $t \geq 0$, então $(((Y'z_{j_1})z_{j_2})Y'')Z' + I \in \operatorname{span} D$.

Prova da Afirmação 1. A prova será por indução em m. Se $m = 0$, pelos Lemas 4.9 e 4.7 obtemos $((z_{j_1}z_{j_2})Y'')Z' + I \in A \subset \operatorname{span} D$. Se $m = 1$, pelos Lemas 4.7 e 4.11 obtemos $(((y_{k_1}z_{j_1})z_{j_2})Y'')Z' + I \in C \subset \operatorname{span} D$.

Suponhamos $m \geq 2$. Pelo Lema 4.6, pelo fato $(y_1, y_2, y_3) \equiv 0$, e pelo Lema 4.9 temos, respectivamente, as seguintes congruências:

$$\begin{aligned}
(((Y'z_{j_1})z_{j_2})Y'')Z' &\equiv ((((y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})z_{j_1})z_{j_2})Y'')Z'\\
&\equiv (((((y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}})z_{j_1})z_{j_2})y_{k_m})Y'')Z'\\
&\quad + ((((y_{k_m}z_{j_1})z_{j_2})(y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}}))Y'')Z'\\
&\quad - (((z_{j_1}z_{j_2})(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m}))Y'')Z'\\
&\equiv ((((y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}})z_{j_1})z_{j_2})(y_{k_m}Y''))Z'\\
&\quad + (((y_{k_m}z_{j_1})z_{j_2})((y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}})Y''))Z'\\
&\quad - ((y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})Y'')((z_{j_1}z_{j_2})Z').
\end{aligned}$$

Pelos Lemas 4.7 e 4.11, segue que $(((y_{k_m}z_{j_1})z_{j_2})((y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}})Y''))Z' + I \in C \subset \operatorname{span} D$ e $((y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})Y'')((z_{j_1}z_{j_2})Z') + I \in A \subset \operatorname{span} D$. Por indução,

$$((((y_{k_1}\cdots y_{k_{m-1}})z_{j_1})z_{j_2})(y_{k_m}Y''))Z' + I \in \operatorname{span} D.$$

A Afirmação 1 está provada.

Agora, se f é um monômio em $J(X)$, devemos provar por indução em $\deg(f)$ que $f + I \in \operatorname{span} D$.

Os casos $\deg(f) = 1$ e $\deg(f) = 2$ são triviais.

Suponhamos $\deg(f) \geq 3$ e escreva $f = gh$, onde $g, h \in J(X)$ são monômios de grau $< \deg(f)$. Por hipótese de indução, segue que $g+I$ e $h+I$ pertencem a $\operatorname{span} D$. Escrevendo $g+I$ e $h+I$ como combinações lineares de elementos em D, aplicando a distributividade em $f+I = (g+I)(h+I)$, e analisando separadamente cada termo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g+I$ e $h+I$ pertencem a D. Temos seis casos a considerar:

1. $g+I$ e $h+I$ pertencem a A.

   Neste caso, $g+I = Y'Z'+I$ e $h+I = Y''Z''+I$. Pelo Lema 4.9 temos

   $$f \equiv (Y'Z')(Y''Z'') \equiv ((Y'Z')Y'')Z'' \equiv ((Y'Y'')Z')Z'' \equiv (Y'Y'')(Z'Z'').$$

   Pelo Lema 4.7, segue que $f+I \in A \subset \operatorname{span} D$.

2. $g+I$ pertence a A e $h+I$ pertence a B.

   Neste caso, $g+I = Y'Z'+I$ e $h+I = (Y''z_{j_1})Z''+I$. Pelos Lemas 4.9 e 4.4 temos

   $$f \equiv (Y'Z')((Y''z_{j_1})Z'') \equiv (Y'(Y''z_{j_1}))(Z'Z'') \equiv ((Y'Y'')z_{j_1})(Z'Z'').$$

   Pelos Lemas 4.7 e 4.10, segue que $f+I \in B \subset \operatorname{span} D$.

3. $g+I$ pertence a A e $h+I$ pertence a C.

   Neste caso, $g+I = Y'Z'+I$ e $h+I = (((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y'')Z''+I$. Pelo Lema 4.9, e pelo fato de $(y_1,y_2,y_3) \in I$, temos

   $$\begin{aligned} f &\equiv (Y'Z')((((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y'')Z'') \equiv (Y'(((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y''))(Z'Z'') \\ &\equiv ((((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y'')Y')(Z'Z'') \equiv (((y_iz_{j_1})z_{j_2})(Y''Y'))(Z'Z''). \end{aligned}$$

   Pelos Lemas 4.7 e 4.11, segue que $f+I \in C \subset \operatorname{span} D$.

4. $g+I$ e $h+I$ pertencem a B.

   Neste caso, $g+I = (Y'z_{j_1})Z'+I$ e $h+I = (Y''z_{j_2})Z''+I$. Pelo Lema 4.9, pelo fato de $(z_1,y_1,z_2) \in I$ e pelo Lema 4.4 temos

   $$\begin{aligned} f &\equiv ((Y'z_{j_1})Z')((Y''z_{j_2})Z'') \equiv ((Y'z_{j_1})(Y''z_{j_2}))(Z'Z'') \\ &\equiv (((Y'z_{j_1})Y'')z_{j_2})(Z'Z'') \equiv (((Y'Y'')z_{j_1})z_{j_2})(Z'Z''). \end{aligned}$$

   Pela Afirmação 1, segue que $f+I \in \operatorname{span} D$.

5. $g+I$ pertence a B e $h+I$ pertence a C.

   Neste caso, $g+I = (Y'z_{j_1})Z'+I$ e $h+I = (((y_iz_{j_2})z_{j_3})Y'')Z''+I$. Temos as seguintes congruências:

   $$\begin{aligned} f &\equiv ((Y'z_{j_1})Z')((((y_iz_{j_2})z_{j_3})Y'')Z'') \equiv [(Y'z_{j_1})(((y_iz_{j_2})z_{j_3})Y'')](Z'Z'') \\ &\equiv [((Y'z_{j_1})Y'')((y_iz_{j_2})z_{j_3})](Z'Z'') \equiv [((Y'Y'')z_{j_1})((y_iz_{j_2})z_{j_3})](Z'Z'') \\ &\equiv [(Y'Y'')(z_{j_1}((y_iz_{j_2})z_{j_3}))](Z'Z'') \equiv [(Y'Y'')((z_{j_1}z_{j_3})(y_iz_{j_2}))](Z'Z'') \\ &\equiv [(Y'Y'')(y_iz_{j_2})][(z_{j_1}z_{j_3})(Z'Z'')] \equiv [((Y'Y'')y_i)z_{j_2}][(z_{j_1}z_{j_3})(Z'Z'')]. \end{aligned}$$

   Pelos Lemas 4.7 e 4.10, segue que $f+I \in B \subset \operatorname{span} D$.

6. $g+I$ e $h+I$ pertencem a C.

   Neste caso, $g+I=(((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y')Z'+I$ e $h+I=(((y_jz_{j_3})z_{j_4})Y'')Z''+I$. Temos as seguintes congruências:

$$\begin{aligned}
f &\equiv ((((y_iz_{j_1})z_{j_2})Y')Z')((((y_jz_{j_3})z_{j_4})Y'')Z'')\\
&\equiv [(((y_iz_{j_1})z_{j_2})((y_jz_{j_3})z_{j_4}))(Y'Y'')](Z'Z'')\\
&\equiv [(((y_iz_{j_1})(y_jz_{j_3}))(z_{j_2}z_{j_4}))(Y'Y'')](Z'Z'')\\
&\equiv [((y_iz_{j_1})(y_jz_{j_3}))(Y'Y'')][(z_{j_2}z_{j_4})(Z'Z'')]\\
&\equiv [(((y_iy_j)z_{j_1})z_{j_3})(Y'Y'')][(z_{j_2}z_{j_4})(Z'Z'')].
\end{aligned}$$

   Pela Afirmação 1, segue que $f+I\in \operatorname{span} D$.

A prova está completa. □

4.2.1 A graduação associativa, quando K é infinito

Esta subseção, que consiste apenas de um resultado, presta-se a descrever o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$ sobre corpos infinitos de $\operatorname{char}(K)\neq 2$.

Teorema 4.13. *Se K é um corpo infinito de* $\operatorname{char}(K)\neq 2$*, então $I=T_{Ass}(UJ_2)$, isto é, $T_{Ass}(UJ_2)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, pelos polinômios em (4.1). Além disso, o conjunto no Lema 4.12 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.3 temos $I\subseteq T_{\text{Ass}}(UJ_2)$.

Seja S o conjunto do Lema 4.12, e seja $\overline{S}=\{g+T_{\text{Ass}}(UJ_2):\ g\in S\}$. Como $I\subseteq T_{\text{Ass}}(UJ_2)$, temos pelo Lema 4.12 que $J(X)/T_{\text{Ass}}(UJ_2)=\operatorname{span}\overline{S}$.

Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f=\sum_{g\in S}\lambda_g g\in T_{\text{Ass}}(UJ_2),\ \lambda_g\in K.$$

Como K é um corpo infinito, pela Proposição 1.21 toda componente multi-homogênea de f pertence a $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Assim é suficiente considerar os três casos abaixo:

$$\begin{aligned}
f=\lambda&(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_1^{t_1}\cdots z_s^{t_s})\\
&+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(((y_iz_1)z_2)(y_1^{k_1}\cdots y_i^{k_i-1}\cdots y_r^{k_r}))(z_1^{t_1-1}z_2^{t_2-1}z_3^{t_3}\cdots z_s^{t_s})
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
f=\lambda&(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_1^{t_1}\cdots z_s^{t_s})\\
&+\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(((y_iz_1)z_1)(y_1^{k_1}\cdots y_i^{k_i-1}\cdots y_r^{k_r}))(z_1^{t_1-2}z_2^{t_2}z_3^{t_3}\cdots z_s^{t_s})
\end{aligned}$$

ou

$$f=\lambda(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}z_1)(z_1^{t_1}\cdots z_s^{t_s})$$

onde $t_1+\cdots+t_s$ é par. Devemos provar que $\lambda=\lambda_i=0$ para todo i. Denotemos

$$1=e_{11}+e_{22},\ a=e_{11}-e_{22} \text{ e } b=e_{12}.$$

No primeiro e segundo casos, seja $Y_i=\alpha_i 1+\beta_i b$ e $Z_i=\gamma_i a$, onde $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\in K$. Temos

$$f(Y_1,\ldots,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s)=\begin{bmatrix} A & B\\ 0 & A\end{bmatrix}=0,$$

onde

$$A=\left(\lambda+\sum_{i=1}^r\lambda_i\right)\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_r^{k_r}\gamma_1^{t_1}\cdots\gamma_s^{t_s}=0;$$

$$B=\sum_{i=1}^r\left(\lambda k_i+\lambda_i(k_i-1)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^r\lambda_j k_i\right)\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i-1}\cdots\alpha_r^{k_r}\beta_i\gamma_1^{t_1}\cdots\gamma_s^{t_s}=0.$$

Como $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ são quaisquer elementos de K, e K é infinito, temos pelo Lema 1.16 que

$$\lambda+\sum_{i=1}^r\lambda_i=0 \tag{4.4}$$

e também

$$\lambda k_i+\lambda_i(k_i-1)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^r\lambda_j k_i=0$$

para todo $i=1,\ldots,r$, isto é,

$$\lambda k_i+\lambda_1k_i+\cdots+\lambda_i(k_i-1)+\cdots+\lambda_rk_i=0 \tag{4.5}$$

para todo $i=1,\ldots,r$. Pelas equações (4.4) e (4.5) obtemos o sistema linear

$$\begin{cases}\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r=0\\ \lambda k_1+\lambda_1(k_1-1)+\lambda_2k_1+\cdots+\lambda_rk_1=0\\ \lambda k_2+\lambda_1k_2+\lambda_2(k_2-1)+\cdots+\lambda_rk_2=0\\ \vdots\\ \lambda k_r+\lambda_1k_r+\lambda_2k_r+\cdots+\lambda_r(k_r-1)=0\end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ k_1 & k_1-1 & k_1 & \cdots & k_1 & 0\\ k_2 & k_2 & k_2-1 & \cdots & k_2 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ k_r & k_r & k_r & \cdots & k_r-1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Assim, $\lambda = \lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

No terceiro caso, isto é,

$$f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s) = \lambda(y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r} z_1)(z_1^{t_1} \cdots z_s^{t_s})$$

onde $t_1 + \cdots + t_s$ é par, seja $Y_i = 1$ e $Z_i = a$ para todo i. Então

$$f(Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s) = \lambda a = 0,$$

e portanto $\lambda = 0$.

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Além disso, como $I \subseteq T_{\text{Ass}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.12 e 1.33, temos $I = T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. □

4.2.2 A graduação associativa, quando K é finito

Nesta subseção, descreveremos o T-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UJ_2 com a graduação associativa, para o caso em que K é um corpo finito.

Ao longo desta subseção, K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e $\text{char}(K) \neq 2$.

Usaremos a seguinte notação:

Notação 4.14. Seja I' o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos 5 polinômios em (4.1) e pelos 3 polinômios

$$(y_1^q - y_1)(y_2^q - y_2), \quad z_1^q - z_1 \quad \text{e} \quad (y_1^q - y_1)z_1. \tag{4.6}$$

Notemos que I' é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, por 8 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 4.15. *Se I' é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T_{Ass}(UJ_2)$.*

Demonstração. Como $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo com $q-1$ elementos, segue que $x^{q-1} = 1$, para todo $x \in K \setminus \{0\}$. Portanto,

$$x^q = x, \quad \text{para todo} \quad x \in K,$$

como já vimos nos capítulos anteriores. O lema é uma consequência direta deste fato, e deixamos os detalhes das contas para o leitor. □

Na sequência, exibiremos um lema que se refere a uma classe de associadores que pertencem a I'.

Lema 4.16. *O polinômio (y_1^q, x_1, x_2) pertence a I', onde x_1 e x_2 são quaisquer variáveis em $Y \cup Z$.*

Demonstração. Como (y_1, y_2, y_3), (y_1, z_1, y_2), $(y_1, y_2, z_1) \in I \subseteq I'$ (ver definição de I e Lema 4.4) segue que $(y_1^q, x_1, x_2) \in I'$ quando $x_1 \in Y$ ou $x_2 \in Y$.

Vamos provar que $(y_1^q, z_1, z_2) \in I'$.

Afirmação 1. $(y_1^n, z_1, z_2) + I' = n[((y_1 z_1) z_2) y_1^{n-1}] - n[(z_1 z_2) y_1^n] + I'$ para todo $n \geq 1$.

Prova da Afirmação 1. O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos $n \geq 2$. Pelos Lemas 4.6 e 4.9,

$$\begin{aligned}(y_1^n, z_1, z_2) + I' &= (y_1^n z_1)z_2 - y_1^n(z_1z_2) + I' \\ &= ((y_1^{n-1}z_1)z_2)y_1 + ((y_1z_1)z_2)y_1^{n-1} - (z_1z_2)y_1^n - y_1^n(z_1z_2) + I' \\ &= (y_1^{n-1}, z_1, z_2)y_1 + ((y_1z_1)z_2)y_1^{n-1} - (z_1z_2)y_1^n + I'.\end{aligned}$$

Agora aplicamos a hipótese de indução no primeiro somando e o fato de $(y_1, y_2, y_3) \in I'$ para concluir a prova da afirmação.

Em particular, se $n = q$ então

$$(y_1^q, z_1, z_2) + I' = q[((y_1z_1)z_2)y_1^{q-1}] - q[(z_1z_2)y_1^q] + I' = I',$$

e a prova está completa. □

O próximo resultado diz respeito a uma igualdade, módulo I', que será crucial nos resultados posteriores.

Lema 4.17. *A seguinte equação é válida em $J(X)/I'$:*

$$((y_iz_1)z_2)y_j^q + I' = ((y_iz_1)z_2)y_j + ((y_jz_1)z_2)y_i - (z_1z_2)(y_iy_j) + I'.$$

Demonstração. Seja $g = ((y_iz_1)z_2)y_j^q$. Pelo Lema 4.16 temos

$$g + I' = (y_iz_1)(z_2y_j^q) + I'.$$

Como $(y_j^q - y_j)z \in I'$, obtemos

$$y_j^q z + I' = y_jz + I'.$$

Usamos esta equação, os fatos de $(z_1, y_1, z_2) \in I'$ e de $(z_1, y_1, y_2) \in I'$, e o Lema 4.6 para obter

$$\begin{aligned}g + I' &= (y_iz_1)(y_jz_2) + I' = ((y_iz_1)y_j)z_2 + I' = ((y_iy_j)z_1)z_2 + I' \\ &= ((y_iz_1)z_2)y_j + ((y_jz_1)z_2)y_i - (z_1z_2)(y_iy_j) + I'\end{aligned}$$

como desejado. □

Nosso objetivo é descrever $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Como $I' \subseteq T(UJ_2)$, será muito útil conhecermos um conjunto gerador para o espaço quociente $J(X)/I'$, pois assim poderemos provar a igualdade entre I' e $T(UJ_2)$. Faremos isso no próximo lema, mas antes vamos fixar uma notação.

Notação 4.18. Denotemos por Λ_n o conjunto de todos os elementos $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$ tais que:

a) $0 \leq s_1, \ldots, s_n < 2q$;

b) Se $s_i \geq q$ para algum i, então $s_j < q$ para todo $j \neq i$.

Lema 4.19. *O espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios $g+I'$, tais que*

(a) $g=\overline{Y}$ *ou*

(b) $g=Y_1'Z_1'$ *ou*

(c) $g=(Y_1'z_j)Z_2'$ *ou*

(d) $g=(((y_iz_j)z_l)Y_1')Z_3'$

onde

- $\overline{Y}=y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$ *com* $(k_1,\ldots,k_r)\in\Lambda_r$ *e* $r\geq 1$ *;*
- $Y_1'=y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$ *com* $0\leq k_1,\ldots,k_r<q$ *e* $r\geq 1$*;*
- $Z_1'=z_1^{t_1}\cdots z_s^{t_s}$ *com* $0\leq t_1,\ldots,t_s<q$*,* $s\geq 1$ *e* $t_1+\cdots+t_s>0$ *par;*
- $Z_2'=z_j^{t_j}z_{j+1}^{t_{j+1}}\cdots z_s^{t_s}$ *com* $j\geq 1$*,* $s\geq 1$*,* $0\leq t_j<q-1$*,* $0\leq t_{j+1},\ldots,t_s<q$ *e* $t_j+\cdots+t_s\geq 0$ *par;*
- $Z_3'=z_l^{t_l}z_{l+1}^{t_{l+1}}\cdots z_s^{t_s}$ *com* $1\leq j\leq l$*,* $s\geq 1$*,* $0\leq t_{l+1},\ldots,t_s<q$ *e* $t_l+t_{l+1}+\cdots+t_s\geq 0$ *par. Além disso, se* $j<l$ *então* $0\leq t_l<q-1$*. Se* $j=l$ *então* $0\leq t_l<q-2$*.*

Demonstração. Primeiramente, em virtude do Lema 4.7, os polinômios $\overline{Y},Y_1',Z_1',Z_2'$ e Z_3' estão bem definidos.

Sejam A, B, C e D os conjuntos de todos os elementos $g+I'$, tais que g está em (a), (b), (c) e (d) respectivamente. Denotemos por $E=A\cup B\cup C\cup D$. Se f é um monômio em $J(X)$, devemos provar que $f+I'\in\operatorname{span}E$.

Como $I\subseteq I'$, temos pelo Lema 4.12 que o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios:

(a') $Y'Z'+I'$,

(b') $(Y'z_j)Z''+I'$,

(c') $(((y_iz_j)z_l)Y')Z''+I'$,

onde $Y'=y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_r^{k_r}$; $0\leq k_1,\ldots,k_r$; $r\geq 1$; $Z'=z_1^{l_1}z_2^{l_2}\cdots z_s^{l_s}$; $0\leq l_1,l_2,\ldots,l_s$; $s\geq 1$; $l_1+l_2+\cdots+l_s$ par; $Z''=z_l^{t_l}z_{l+1}^{t_{l+1}}\cdots z_s^{t_s}$; $0\leq t_l,t_{l+1},\ldots,t_s$; $1\leq j\leq l$; $s\geq 1$; $t_l+t_{l+1}+\cdots+t_s$ par.

Sejam A', B' e C' os conjuntos de todos os elementos em (a'), (b') e (c'), respectivamente. Devemos provar que $A'\cup B'\cup C'\subseteq\operatorname{span}E$.

Caso 1. $f+I'\in A'$.

Neste caso, $f+I' = (y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_1^{l_1}\cdots z_s^{l_s})+I'$. Como $(y_i^q-y_i)(y_j^q-y_j)\in I'$, obtemos

$$y_i^q y_j^q + I' = y_i^q y_j + y_i y_j^q - y_i y_j + I' \text{ e } y_i^{2q}+I' = 2y_i^{q+1}-y_i^2+I'.$$

Usando várias vezes estas duas equações e o Lema 4.7, podemos supor que $(k_1,\dots,k_r)\in\Lambda_r$.

Se $l_1=\ldots=l_s=0$, então $f+I'\in A\subset \operatorname{span}E$.

Suponhamos $l_i\neq 0$ para algum i. Como $(z_i^q-z_i)\in I'$, obtemos

$$z_i^q+I' = z_i+I'. \tag{4.7}$$

Usando várias vezes esta equação e o Lema 4.7, podemos supor $0\leq l_1,\dots,l_s<q$. Temos dois casos a considerar: $0\leq k_1,\dots,k_r<q$ e $k_m\geq q$ para algum m. No primeiro caso, $f+I'\in B\subset\operatorname{span}E$. No segundo caso, seja $k_m=q+u_m$, onde $0\leq u_m<q$. Seja

$$j_1=\min\{j\mid l_j\geq 1\}.$$

Se $l_{j_1}-1\geq 1$ denotemos $j_2=j_1$; caso contrário denote

$$j_2=\min\{j\mid l_j\geq 1;\ j\neq j_1\}.$$

Pelos Lemas 4.7 e 4.9, temos

$$f+I' = [(y_m^q(z_{j_1}z_{j_2}))\underbrace{(y_1^{k_1}\cdots y_m^{u_m}\cdots y_r^{k_r})}_{Y_1'}]\underbrace{(z_{j_1}^{l_{j_1}-1}z_{j_2}^{l_{j_2}-1}\cdots z_s^{l_s})}_{Z_3'}+I'.$$

Como $(y_m^q-y_m)z\in I'$, obtemos

$$y_m^q z+I' = y_m z+I'. \tag{4.8}$$

Usando esta equação e o Lema 4.16, obtemos

$$f+I' = [((y_m^q z_{j_1})z_{j_2})Y_1']Z_3'+I' = [((y_m z_{j_1})z_{j_2}))Y_1']Z_3'+I'\in D\subset\operatorname{span}E.$$

Este caso está finalizado.

Caso 2. $f+I'\in B'$.

Neste caso, $f+I' = ((y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})z_j)(z_j^{t_j}z_{j+1}^{t_{j+1}}\cdots z_s^{t_s})+I'$. Pelo Lema 4.4 e (4.8), podemos supor $0\leq k_1,\dots,k_r<q$. Por (4.7), podemos supor $0\leq t_j,t_{j+1},\dots,t_s<q$. Se $t_j<q-1$, então $f+I'\in C\subset\operatorname{span}E$. Se $t_j=q-1$, pelo Lema 4.7, Lema 4.9 e (4.7) obtemos

$$\begin{aligned} f+I' &= (\underbrace{(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})}_{Y_1'}z_j)(z_j^{q-1}\underbrace{z_{j+1}^{t_{j+1}}\cdots z_s^{t_s}}_{Z_2'})+I' = (Y_1'z_j)(z_j^{q-1}Z_2')+I' \\ &= (Y_1'z_j^q)Z_2'+I' = (Y_1'z_j)Z_2'+I'\in C\subset\operatorname{span}E. \end{aligned}$$

Caso 3. $f+I'\in C'$.

Neste caso, $f+I' = (((y_iz_j)z_l)\underbrace{(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})}_{Y_1'})(z_l^{t_l}\underbrace{z_{l+1}^{t_{l+1}}\cdots z_s^{t_s}}_{Z_3'})+I'$. Pelo Lema 4.16, Lema 4.17 e Caso 1, podemos supor $0\le k_1,\ldots,k_r<q$. Por (4.7), podemos supor $0\le t_l,\ldots,t_s<q$ também. Temos dois casos a considerar:

(3.a) $j<l$.

Neste caso, $f+I' = (((y_iz_j)z_l)Y_1')(z_l^{t_l}Z_3')+I'$. Se $t_l=q-1$, pelo Lema 4.9 e (4.7) temos

$$f+I' = (((y_iz_j)z_l^q)Y_1')Z_3'+I' = (((y_iz_j)z_l)Y_1')Z_3'+I'.$$

Assim, podemos supor $0\le t_l<q-1$. Neste caso, $f+I'\in D\subset \operatorname{span}E$.

(3.b) $j=l$.

Neste caso, $f+I' = (((y_iz_l)z_l)Y_1')(z_l^{t_l}Z_3')+I'$. Se $t_l=q-1$, podemos usar o mesmo argumento como no Caso 3.a. Se $t_l=q-2$, então existe $k>l$ tal que $t_k\ge 1$, pois $q-2$ é ímpar. Escreva $f+I' = (((y_iz_l)z_l)Y_1')((z_l^{q-2}z_k)Z_3'')+I'$. Pelo Lema 4.9 e (4.7) obtemos

$$\begin{aligned} f+I' &= (((y_iz_l)(z_l^{q-1}z_k))Y_1')Z_3''+I' \\ &= (((y_iz_l^q)z_k)Y_1')Z_3''+I' = (((y_iz_l)z_k)Y_1')Z_3''+I' \in D\subset \operatorname{span}E. \end{aligned}$$

Assim, podemos supor $0\le t_l<q-2$. Neste caso, $f+I'\in D\subset \operatorname{span}E$.

O lema está provado. □

O próximo teorema é o principal resultado desta subseção.

Teorema 4.20. *Se K é um corpo finito com $|K|=q$ elementos e* $\operatorname{char}(K)\neq 2$, *então $I'=T_{Ass}(UJ_2)$, isto é, $T_{Ass}(UJ_2)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, pelos* 8 *polinômios em (4.1) e (4.6). Além disso, o conjunto no Lema 4.19 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.15 temos $I'\subseteq T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)$.

Denotemos por S' o conjunto de todos polinômios g no Lema 4.19 - item (a). Denotemos por S'' o conjunto de todos os polinômios g no Lema 4.19 - itens (b), (c), (d). Sejam $S=S'\cup S''$ e $\overline{S}=\{g+T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)\mid g\in S\}$. Como $I'\subseteq T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)$, pelo Lema 4.19 segue que $J(X)/T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)=\operatorname{span}\overline{S}$.

Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_s)=\sum_{g\in S}\lambda_g g\in T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2),\ \lambda_g\in K.$$

Em particular,

$$h=f(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0)=\sum_{g\in S'}\lambda_g g=\sum_{k\in\Lambda_r}\lambda_k y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}\in T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2),\ k=(k_1,\ldots,k_r).$$

Seja $*$ a involução na álgebra "associativa" UT_2 definida por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Notemos que os elementos simétricos de UT_2 formam um subespaço vetorial com base $\{e_{11}+e_{22}, e_{12}\}$. Além disso, se $u, v \in (UJ_2)_0$ então

$$u \circ v = u \cdot v,$$

onde $\cdot$ é o produto usual de UT_2. Assim, $h = h(y_1, \ldots, y_r)$ é uma $*$- identidade polinomial para UT_2 se $y_1, y_2, \ldots$ são variáveis simétricas. Pelo Lema 1.32, obtemos $\lambda_k = 0$ para todo $k \in \Lambda_r$.

Em particular,

$$f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s) = \sum_{g \in S''} \lambda_g g.$$

Escreva

$$f = \sum_t f_t,\ t = (t_1, \ldots, t_s),$$

onde f_t é multi-homogêneo nas variáveis $z_1, \ldots, z_s$ e $\deg_{z_i} f_t = t_i$ para todo i. Como $|K| = q$ e $\deg_{z_i} f < q$ para todo i, pelo Lema 1.21 temos $f_t \in T_{\mathrm{Ass}}(UJ_2)$ para todo t, e

$$\begin{aligned} f_t = {} & \sum_k \lambda_k (y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r})(z_1^{t_1} \cdots z_s^{t_s}) \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_k \lambda_{(i,k)} (((y_i z_1) z_2)(y_1^{k_1} \cdots y_i^{k_i} \cdots y_r^{k_r}))(z_1^{t_1-1} z_2^{t_2-1} z_3^{t_3} \cdots z_s^{t_s}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

ou

$$\begin{aligned} f_t = {} & \sum_k \lambda_k (y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r})(z_1^{t_1} \cdots z_s^{t_s}) \\ & + \sum_{i=1}^{r} \sum_k \lambda_{(i,k)} (((y_i z_1) z_1)(y_1^{k_1} \cdots y_i^{k_i} \cdots y_r^{k_r}))(z_1^{t_1-2} z_2^{t_2} \cdots z_s^{t_s}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

ou

$$f_t = \sum_k \lambda_k ((y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}) z_1)(z_1^{t_1-1} z_2^{t_2} \cdots z_s^{t_s}) \tag{4.11}$$

onde $k = (k_1, \ldots, k_r)$, $0 \leq k_j < q$ para todo j. Devemos provar que $\lambda_k = \lambda_{(i,k)} = 0$ para todos k, i.

Suponhamos f_t como em (4.9). Sejam $Y_i = \alpha_i 1 + \beta_i e_{12}$ e $Z_i = e_{11} - e_{22}$, onde $\alpha_i, \beta_i \in K$. Temos

$$f_t(Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix} = 0,$$

onde

$$A=\sum_k \lambda_k \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_i<q-1}}\lambda_{(i,k)}\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i+1}\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_i=q-1}}\lambda_{(i,k)}\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{q}\cdots\alpha_r^{k_r};$$

$$\begin{aligned}B=&\sum_k \lambda_k\left(\sum_{j=1}^{r}k_j\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_j^{k_j-1}\beta_j\cdots\alpha_r^{k_r}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_i<q-1}}\lambda_{(i,k)}\left(k_i\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}k_j\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i+1}\cdots\alpha_j^{k_j-1}\beta_j\cdots\alpha_r^{k_r}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_i=q-1}}\lambda_{(i,k)}\left((q-1)\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{q-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}k_j\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{q}\cdots\alpha_j^{k_j-1}\beta_j\cdots\alpha_r^{k_r}\right).\end{aligned}$$

Como $B=0$ para todos $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_r\in K$, e $\deg_{\beta_i}B=1<q$ para todo i, segue que cada componente homogênea de B com respeito a β_i de grau 1 é zero também. Assim, $B=B_1+\cdots+B_r$ onde

$$\begin{aligned}B_i=&\sum_k \lambda_k k_i\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{\substack{k\\ k_i<q-1}}\lambda_{(i,k)}k_i\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{k_i}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}\\ &+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_l<q-1}}\lambda_{(l,k)}k_i\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_l^{k_l+1}\cdots\alpha_i^{k_i-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}+\sum_{\substack{k\\ k_i=q-1}}\lambda_{(i,k)}(q-1)\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{q-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}\\ &+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_l=q-1}}\lambda_{(l,k)}k_i\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_l^{q}\cdots\alpha_i^{k_i-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}=0,\end{aligned}$$

e $B_1=\ldots=B_r=0$. Como $B_i=0$ para todos $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_i\in K$, e $\deg_{\alpha_i}B_i<q$, segue que cada componente homogênea de B_i com respeito a α_i é zero também. Assim, $B_i=B_{i,0}+B_{i,1}+\cdots+B_{i,q-1}$ onde $\deg_{\alpha_i}B_{i,j}=j$, e

$$B_{i,q-1}=\sum_{\substack{k\\ k_i=q-1}}\lambda_{(i,k)}(q-1)\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_i^{q-1}\beta_i\cdots\alpha_r^{k_r}=0.$$

Como $B_{i,q-1}$ é uma identidade polinomial para K e $\deg_{\alpha_j}B_{i,q-1}<q$ para todo j, pelo Lema 1.16 obtemos $\lambda_{(i,k)}=0$ para todo i e $k=(k_1,\ldots,k_{i-1},q-1,k_{i+1},\ldots,k_r)$.

Em particular, por (4.9) temos

$$\begin{aligned}f_t=&\sum_k \lambda_k y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}z_1^{t_1}\cdots z_s^{t_s}\\ &+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{k\\ k_i<q-1}}\lambda_{(i,k)}(((y_iz_1)z_2)(y_1^{k_1}\cdots y_i^{k_i}\cdots y_r^{k_r}))(z_1^{t_1-1}z_2^{t_2-1}z_3^{t_3}\cdots z_s^{t_s}).\end{aligned}$$

Como $\deg_{y_j} f_t < q$ e $\deg_{z_j} f_t < q$ para todo j, cada componente multi-homogênea de f_t pertence a $T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Agora, usando argumentos similares como no Teorema 4.13 segue que $\lambda_k = \lambda_{(i,k)} = 0$ para todos i,k como desejado.

O segundo caso (4.10) é análogo ao primeiro (4.9).

Agora, seja f_t como em (4.11), isto é,

$$f_t = \sum_k \lambda_k((y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})z_1)(z_1^{t_1-1}\cdots z_s^{t_s}).$$

Como $\deg_{y_j} f_t < q$ para todo j, segue que

$$f_{t,k}(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_s) = \lambda_k((y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})z_1)(z_1^{t_1-1}\cdots z_s^{t_s}) \in T_{\text{Ass}}(UJ_2)$$

para todo k. Assim, se $Y_i = 1$ e $Z_i = e_{11} - e_{22}$, então

$$0 = f_{t,k}(Y_1,\ldots,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s) = \lambda_k(e_{11} - e_{22})$$

e portanto $\lambda_k = 0$ para todo k.

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. Além disso, como $I' \subseteq T_{\text{Ass}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.19 e 1.33, temos que $I' = T_{\text{Ass}}(UJ_2)$. $\square$

4.3 A graduação escalar

Nesta seção descreveremos as identidades de UJ_2 referentes a graduação escalar.

Notação 4.21. Seja $T_{\text{Sca}}(UJ_2)$ o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ formado pelas identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $UJ_2 = UJ_2(K)$ com a graduação escalar.

Nesta seção, K denotará um corpo qualquer de $\text{char}(K) = p \neq 2$. Nosso objetivo aqui será o de descrever $T_{\text{Sca}}(UJ_2)$. Vale lembrar que

$$UJ_2 = (UJ_2)_0 \oplus (UJ_2)_1,$$

onde

$$(UJ_2)_0 = \text{span}\{e_{11} + e_{22}\} \quad \text{e} \quad (UJ_2)_1 = \text{span}\{e_{11} - e_{22},\ e_{12}\}.$$

Notação 4.22. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$(y_1,y_2,y_3),\ (z_1,y_1,y_2),\ (y_1,z_1,z_2) \quad \text{e} \quad z_1(z_2,z_3,z_4). \tag{4.12}$$

Definimos a relação de equivalência $\equiv$ em $J(X)$ do seguinte modo: se $f,g \in J(X)$, então

$$f \equiv g \Leftrightarrow f + I = g + I.$$

Lema 4.23. *Se I é o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal definido acima, então $I \subseteq T_{Sca}(UJ_2)$.*

Demonstração. A prova consiste de uma verificação direta e deixaremos os detalhes para o leitor. □

O próximo lema nos dá duas classes de polinômios que pertencem a I.

Lema 4.24. *Seja $x_1, x_2, x_3 \in Y \cup Z$.*

(a) Se $x_i \in Y$ para algum $1 \leq i \leq 3$, então $(x_1, x_2, x_3) \in I$.

(b) $z_1(x_1, x_2, x_3) \in I$.

Demonstração. Por $(y_1, y_2, y_3), (z_1, y_1, y_2), (y_1, z_1, z_2) \in I$ e por (1.1), provamos o item (a).
Por $z_1(z_2, z_3, z_4) \in I$ e pelo item (a), provamos o item (b). □

O próximo lema diz respeito a uma equivalência, módulo I, que é válida para certos produtos envolvendo os elementos ímpares.

Lema 4.25. *Se s é par e $\sigma \in Sym(s)$, então*

$$(z_{\sigma(1)}z_{\sigma(2)})(z_{\sigma(3)}z_{\sigma(4)})\cdots(z_{\sigma(s-1)}z_{\sigma(s)}) \equiv (z_1z_2)(z_3z_4)\cdots(z_{s-1}z_s).$$

Demonstração. Como $(z_{\sigma(i)}z_{\sigma(i+1)})$ é um polinômio par, pelo Lema 4.24 - item (a) é suficiente provar que $(z_1z_2)(z_3z_4) \equiv (z_1z_3)(z_2z_4)$. Pelo Lema 4.24, obtemos

$$(z_1z_2)(z_3z_4) \equiv z_1(z_2(z_3z_4)) \equiv z_1((z_2z_3)z_4) \equiv z_1((z_3z_2)z_4) \equiv z_1(z_3(z_2z_4)) \equiv (z_1z_3)(z_2z_4).$$

A prova está completa. □

Na sequência, apresentaremos um resultado que será fundamental nas duas próximas subseções, nas quais descreveremos $T_{\text{Sca}}(UJ_2)$ para um corpo arbitrário K de $\text{char}(K) \neq 2$. Este nos dará um conjunto de geradores para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$.

Lema 4.26. *Seja S o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios*

(a) $Y'Z'$ e

(b) $Y'(z_{i_0}Z')$,

onde $Y' = y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$; $k_i \geq 0$ para todo i; $r \geq 0$; $Z' = (z_{i_1}z_{j_1})(z_{i_2}z_{j_2})\cdots(z_{i_t}z_{j_t})$; $i_1 \leq j_1 \leq i_2 \leq j_2 \leq \ldots \leq i_t \leq j_t$; $t \geq 0$; $i_0 \geq 1$. Então, o espaço vetorial quociente $J(X)/I$ é gerado pelo conjunto de todos os elementos $g + I$, onde $g \in S$.

Demonstração. Sejam A e B os conjuntos de todos os elementos $g + I$, tais que g está em (a) e (b), respectivamente. Denote $C = A \cup B$. Se $f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s)$ é um monômio em $J(X)$, devemos provar que $f + I \in \operatorname{span} C$.

Pelo Lema 4.24 - item (a) temos

$$f \equiv y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r} g(z_1, \ldots, z_s), \tag{4.13}$$

onde $g(z_1, \ldots, z_s)$ é um monômio nas variáveis $z_1, z_2, \ldots, z_s$.

Seja A_Z a subálgebra de $J(X)/I$ gerada pelo conjunto $\{z + I \mid z \in Z\}$.

Afirmação 1. O espaço vetorial A_Z é gerado por todos os elementos $Z'' + I$ e $z_{i_0} Z'' + I$, onde $Z'' = (z_{i_1} z_{j_1})(z_{i_2} z_{j_2}) \cdots (z_{i_t} z_{j_t})$ e $t \geq 0$.

Prova da Afirmação 1. Seja $h \in A_Z$ um monômio. Vamos provar o resultado por indução em $\deg h = n$. Para $n = 1, 2, 3$ o resultado é trivial. Suponhamos $n \geq 4$ e seja $h = h_1 h_2$, onde $\deg h_1$, $\deg h_2 < n$. Usamos a hipótese de indução em h_1 e h_2, e pelo Lema 4.24 - item (a) temos o resultado desejado.

Por (4.13), Afirmação 1 e Lema 4.25 finalizamos a prova do lema. □

4.3.1 A graduação escalar, quando K é infinito

Esta subseção, que consiste apenas de um resultado, presta-se a descrever o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal $T_{\text{Sca}}(UJ_2)$ sobre corpos infinitos de $\text{char}(K) \neq 2$.

Teorema 4.27. *Se K é um corpo infinito de* $\text{char}(K) \neq 2$*, então $I = T_{Sca}(UJ_2)$, isto é, $T_{Sca}(UJ_2)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, pelos polinômios em (4.12). Além disso, o conjunto no Lema 4.26 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$.*

Demonstração. Se

$$g = g(z_1, \ldots, z_n) = z_{i_0} (z_{i_1} z_{j_1})(z_{i_2} z_{j_2}) \cdots (z_{i_t} z_{j_t}),$$

onde $i_1 \leq j_1 \leq i_2 \leq j_2 \leq \ldots \leq i_t \leq j_t$, e $d = (\deg_{z_1} g, \deg_{z_2} g, \ldots, \deg_{z_n} g)$, denotamos

$$g = g_{(z_{i_0}, d)}.$$

Pelo Lema 4.23 temos $I \subseteq T_{\text{Sca}}(UJ_2)$.

Seja S o subconjunto no Lema 4.26, e seja $\overline{S} = \{g + T_{\text{Sca}}(UJ_2) \mid g \in S\}$. Como $I \subseteq T_{\text{Sca}}(UJ_2)$, temos pelo Lema 4.26 que $J(X)/T_{\text{Sca}}(UJ_2) = \text{span}\,\overline{S}$.

Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{g \in S} \lambda_g g \in T_{\text{Sca}}(UJ_2),\ \lambda_g \in K.$$

Como K é um corpo infinito, cada componente multi-homogênea de f pertence a $T_{\text{Sca}}(UJ_2)$. Assim, é suficiente considerar

$$f = \lambda y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r} (z_{i_1} z_{j_1})(z_{i_2} z_{j_2}) \cdots (z_{i_t} z_{j_t}) \quad \text{ou} \quad f = \sum_{i_0 = 1}^{n} \lambda_{i_0} y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r} g_{(z_{i_0}, d)},$$

onde $i_1 \leq j_1 \leq i_2 \leq j_2 \leq \ldots \leq i_t \leq j_t$ e $t \geq 0$. Devemos provar que $\lambda = \lambda_{i_0} = 0$, para todo i_0. Denote

$$1 = e_{11} + e_{22},\ a = e_{11} - e_{22} \quad \text{e} \quad b = e_{12}.$$

Para o primeiro caso, seja $Y_i = 1$ e $Z_i = a$ para todo i. Então,

$$f(Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_n) = \lambda 1 = 0,$$

e portanto $\lambda = 0$.

Para o segundo caso, seja $Y_i = 1$ para todo i, $Z_{i_0} = a + b$, $Z_i = a$ para todo $i \neq i_0$. Como $ab = b^2 = 0$, obtemos

$$f(Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_n) = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)a + \lambda_{i_0} b = 0,$$

e portanto $\lambda_{i_0} = 0$ como desejado.

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\text{Sca}}(UJ_2)$. Além disso, como $I \subseteq T_{\text{Sca}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.26 e 1.33, temos $I = T_{\text{Sca}}(UJ_2)$. □

4.3.2 A graduação escalar, quando K é finito

Nesta subseção descreveremos o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UJ_2 com a graduação escalar, para o caso em que K é um corpo finito.

Ao longo desta subseção, K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e $\text{char}(K) \neq 2$.

Iniciamos com o seguinte lema técnico:

Lema 4.28. *Se $u = \alpha a + \beta b$, onde $\alpha, \beta \in K$, $a = e_{11} - e_{22}$ e $b = e_{12}$, então*

i) $u^{2n} = \alpha^{2n} 1$,

ii) $u^{2n-1} = \alpha^{2n-1} a + \alpha^{2n-2} \beta b$,

para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $u^q = \alpha a + \alpha^{q-1} \beta b$.

Demonstração. Usando indução em n, podemos provar i) e ii). Como $p \neq 2$, temos que p é ímpar. Assim, q é ímpar também, e

$$u^q = \alpha^q a + \alpha^{q-1} \beta b = \alpha a + \alpha^{q-1} \beta b.$$

O lema está provado. □

Usaremos a seguinte notação:

Notação 4.29. Seja I' o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos 4 polinômios em (4.12) e pelos 2 polinômios

$$y_1^q - y_1 \quad \text{e} \quad (z_1^q - z_1) z_2. \tag{4.14}$$

Notemos que I' é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, por 6 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 4.30. *Se I' é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T_{Sca}(UJ_2)$.*

Demonstração. Vamos verificar apenas o último polinômio. Como $ab = b^2 = 0$, então pelo Lema 4.28, segue que

$$(z_1^q - z_1)z_2 \in T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2).$$

□

No próximo lema, exibiremos um conjunto de geradores para o espaço quociente $J(X)/I'$. Isso nos será muito útil para a descrição de $T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$.

Lema 4.31. *Seja $\widehat{S}$ o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios*

(a) $Y_1'Z_1'$ *e*

(b) $Y_1'(z_{i_0}Z_1')$,

onde $Y_1' = y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$; $0 \le k_i < q$ *para todo* i; $r \ge 0$; $Z_1' = (z_{i_1}z_{j_1})(z_{i_2}z_{j_2})\cdots(z_{i_t}z_{j_t})$; $i_1 \le j_1 \le i_2 \le j_2 \le \ldots \le i_t \le j_t$; $t \ge 0$; $0 \le \deg_{z_k}(Z_1') < q$ *para todo* k; $i_0 \ge 1$. *Então, o espaço vetorial quociente* $J(X)/I'$ *é gerado pelo conjunto de todos os elementos* $g + I'$, *onde* $g \in \widehat{S}$.

Demonstração. Sejam A e B os conjuntos de todos os elementos $g + I'$, tais que g está em (a) e (b), respectivamente. Denotemos $C = A \cup B$. Se $f(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_s)$ é um monômio em $J(X)$, devemos provar que $f + I' \in \operatorname{span} C$.

Como $I \subseteq I'$, pelo Lema 4.26 segue que o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios:

(a') $Y'Z' + I'$,

(b') $Y'(z_{i_0}Z') + I'$,

onde $Y' = y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$; $k_i \ge 0$ for all i; $r \ge 0$; $Z' = (z_{i_1}z_{j_1})(z_{i_2}z_{j_2})\cdots(z_{i_t}z_{j_t})$; $i_1 \le j_1 \le i_2 \le j_2 \le \ldots \le i_t \le j_t$; $t \ge 0$; $i_0 \ge 1$.

Sejam A' e B' os conjuntos de todos os elementos em (a') e (b'), respectivamente. Devemos provar que $A' \cup B' \subseteq \operatorname{span} C$.

Caso 1. $f + I' \in A'$.
Neste caso, $f + I' = (y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_{i_1}z_{j_1})(z_{i_2}z_{j_2})\cdots(z_{i_t}z_{j_t}) + I'$. Como $(y_i^q - y_i) \in I'$, podemos supor que $0 \le k_1,\ldots,k_r < q$.

Agora,

$$\underbrace{(z_kz_k)\cdots(z_kz_k)}_{(q-1)/2 \text{ vezes}}(z_kz_l) + I' = z_k^{q-1}(z_kz_l) + I'$$

e $z_k^{q-1}(z_kz_l) + I' = (z_k^{q-1}z_k)z_l + I' = (z_k^q)z_l + I' = z_kz_l + I'$ (ver (4.14) e Lema 4.24). Assim, podemos supor que $0 \le \deg_{z_k} Z' < q$, para todo k, e então $f + I' \in A \subseteq \operatorname{span} C$.

Caso 2. $f + I' \in B'$.
Usando argumentos análogos ao Caso 1, podemos provar que $f + I' \in B \subseteq \operatorname{span} C$.

O lema está provado. $\square$

No próximo teorema, decreveremos o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal $T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$.

Teorema 4.32. *Se K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e $\mathrm{char}(K) \neq 2$, então $I' = T_{Sca}(UJ_2)$, isto é, $T_{Sca}(UJ_2)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, pelos 6 polinômios em (4.12) e (4.14). Além disso, o conjunto no Lema 4.31 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.30, temos $I' \subseteq T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$.

Consideremos o subconjunto $\widehat{S}$ no Lema 4.31 e seja $\overline{S} = \{g + T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2) \mid g \in \widehat{S}\}$. Como $I' \subseteq T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$, pelo Lema 4.31 segue que $J(X)/T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2) = \operatorname{span}\overline{S}$. Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente.

Por simplicidade, vamos fixar algumas notações. Se $k = (k_1, \ldots, k_r)$, escrevemos $y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r} = y^{[k]}$. Além disso, se $g = (z_{i_1} z_{j_1}) \cdots (z_{i_t} z_{j_t})$, $\deg_{z_i} g = d_i$ e $d = (d_1, \ldots, d_n)$, então escrevemos $g = z^{[d]}$.

Seja

$$f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{g \in \widehat{S}} \lambda_g g \in T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2),$$

onde $\lambda_g \in K$. Vamos provar que $\lambda_g = 0$ para todo g. Como $\deg_{y_i} f < q$, para todo i, podemos supor que

$$f = \lambda y^{[k]} + \sum_d \lambda_d y^{[k]} z^{[d]} + \sum_{i=1}^{n} \sum_d \lambda_{(i,d)} y^{[k]} (z_i z^{[d]}).$$

Substituindo y_i e z_i pelas matrizes 1 e 0, respectivamente, e para todo i, obtemos

$$0 = f(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \lambda \cdot 1,$$

e então $\lambda = 0$. Agora, como $T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$ é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $J(X)$, segue que $f_1, f_2 \in T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$, onde

$$f_1 = \sum_d \lambda_d y^{[k]} z^{[d]} \quad \text{e} \quad f_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_d \lambda_{(i,d)} y^{[k]} (z_i z^{[d]}).$$

Como $\deg_{z_i} f_1 < q$, para todo i, segue que cada $g_d = \lambda_d y^{[k]} z^{[d]} \in T_{\mathrm{Sca}}(UJ_2)$. Substituindo y_i e z_i pelas matrizes 1 e $a = e_{11} - e_{22}$, respectivamente, e para todo i, obtemos

$$0 = g_d(1, \ldots, 1, a, \ldots, a) = \lambda_d \cdot 1,$$

e então $\lambda_d = 0$.

Denotemos $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{12}$ e $Z_i = \alpha_i a + \beta_i b$, onde $\alpha_i, \beta_i \in K$. Temos

$$f_2(1, \ldots, 1, Z_1, \ldots, Z_n) = \alpha a + \beta b = 0, \quad \text{onde} \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_d \lambda_{(i,d)} \beta_i \alpha_1^{d_1} \cdots \alpha_n^{d_n}$$

e $\alpha \in K$. Como $\alpha_i, \beta_i \in K$, para todo i, $\beta = 0$, $\deg_{\alpha_i} \beta < q$ e $\deg_{\beta_i} \beta < q$, então pelo Lema 1.16 segue que $\lambda_{(i,d)} = 0$ para todo (i,d).

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\text{Sca}}(UJ_2)$. Além disso, como $I' \subseteq T_{\text{Sca}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.31 e 1.33, temos que $I' = T_{\text{Sca}}(UJ_2)$, e o teorema está provado. □

4.4 A graduação clássica

Nesta seção descreveremos as identidades de UJ_2 referentes a graduação clássica.

Notação 4.33. Seja $T_{\text{Cla}}(UJ_2)$ o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ formado pelas identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $UJ_2 = UJ_2(K)$ com a graduação clássica.

Nesta seção, K denotará um corpo qualquer de $\text{char}(K) = p \neq 2$. Nosso objetivo aqui será o de descrever $T_{\text{Cla}}(UJ_2)$. Vale lembrar que

$$UJ_2 = (UJ_2)_0 \oplus (UJ_2)_1,$$

onde

$$(UJ_2)_0 = \text{span}\{e_{11} + e_{22},\ e_{11} - e_{22}\} \quad \text{e} \quad (UJ_2)_1 = \text{span}\{e_{12}\}.$$

Notação 4.34. Seja I o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$(y_1, y_2, y_3),\ z_1 z_2 \quad \text{e} \quad (y_1, z_1, y_2). \tag{4.15}$$

Definimos a relação de equivalência $\equiv$ em $J(X)$ do seguinte modo: se $f, g \in J(X)$, então

$$f \equiv g \Leftrightarrow f + I = g + I.$$

Lema 4.35. *Se I é o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal definido acima, então $I \subseteq T_{Cla}(UJ_2)$.*

Demonstração. A prova do lema consiste de uma verificação direta e deixaremos os detalhes para o leitor. □

No próximo lema, provaremos que um certo polinômio pertence a I. Este será crucial nos principais resultados da seção.

Lema 4.36. *O polinômio*

$$y_1(y_2(y_3 z_1)) - \frac{1}{2}\left(y_1(z_1(y_2 y_3)) + y_2(z_1(y_1 y_3)) + y_3(z_1(y_1 y_2)) - z_1(y_1(y_2 y_3))\right)$$

pertence a I.

Demonstração. Seja

$$f = 2y_1(y_2(y_3z_1)) - y_1(z_1(y_2y_3)) - y_2(z_1(y_1y_3)) - y_3(z_1(y_1y_2)) + z_1(y_1(y_2y_3)).$$

Fazendo $u = y_2$, $v = y_3$, $c = z_1$ e $d = y_1$ em (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} f &= 2((y_3z_1)y_2)y_1 - ((z_1y_2)y_1)y_3 - ((z_1y_3)y_1)y_2 \\ &= (y_3,z_1,y_2)y_1 + (y_2,z_1y_3,y_1) + (y_3,z_1y_2,y_1). \end{aligned}$$

Como $(y_1,z_1,y_2) \in I$ segue que $f \in I$, e então

$$y_1(y_2(y_3z_1)) - \frac{1}{2}\left(y_1(z_1(y_2y_3)) + y_2(z_1(y_1y_3)) + y_3(z_1(y_1y_2)) - z_1(y_1(y_2y_3))\right) = \frac{1}{2}f \in I.$$

□

O próximo resultado diz respeito a algumas propriedades envolvendo os elementos pares na álgebra quociente $J(X)/I$.

Lema 4.37. *A subálgebra de $J(X)/I$ gerada pelo conjunto*

$$Y + I = \{y + I \mid y \in Y\}$$

é comutativa e associativa.

Demonstração. Seja A_Y a subálgebra de $J(X)/I$ gerada pelo conjunto $Y+I$. Como a álgebra $J(X)$ é comutativa, então a subálgebra A_Y é comutativa também. Além disso, pelo fato de $(y_1,y_2,y_3) \in I$, segue que A_Y é associativa. O lema está provado. □

Usaremos a seguinte notação:

Notação 4.38. Se $Y' = y_{i_1}\cdots y_{i_r}$ e $Y'' = y_{j_1}\cdots y_{j_s}$ são monômios em $J(Y)$ tais que $r,s \geq 0$, $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ e $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_s$, escrevemos $Y' < Y''$ se

i) $r < s$ ou

ii) $r = s$ e $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots,\ i_l = j_l,\ i_{l+1} < j_{l+1}$ para algum l.

No próximo resultado, descreveremos um conjunto de geradores para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$. Este será fundamental nas duas próximas subseções, nas quais descreveremos $T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$ para um corpo arbitrário K de $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Lema 4.39. *Seja S o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios*

(a) Y' *e*

(b) $Y'(z_iY'')$,

onde $Y' = y_{i_1} \cdots y_{i_r}$; $r \geq 0$; $i_1 \leq \ldots \leq i_r$; $Y'' = y_{j_1} \cdots y_{j_s}$; $s \geq 0$; $j_1 \leq \ldots \leq j_s$; $Y' \leq Y''$. *Então, o espaço vetorial quociente* $J(X)/I$ *é gerado pelo conjunto de todos os elementos* $g+I$ *onde* $g \in S$.

Demonstração. Sejam A e B os conjuntos de todos os elementos $g+I$, tais que g está em (a) e (b), respectivamente. Denotemos $C = A \cup B$. Se f é um monômio em $J(X)$, devemos provar que $f+I \in \operatorname{span} C$. Isso será demonstrado por indução em $\deg f$.

Os casos $\deg f = 1$ e $\deg f = 2$ são triviais.

Suponhamos que $\deg f \geq 3$ e seja $f = gh$, onde $g, h \in J(X)$ são monômios com grau $< \deg f$. Por hipótese de indução, segue que $g+I$ e $h+I$ pertencem a $\operatorname{span} C$. Escrevendo $g+I$ e $h+I$ como combinações lineares de elementos em C, aplicando a distributividade em $f+I = (g+I)(h+I)$, e analisando separadamente cada termo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g+I$ e $h+I$ pertencem a C. Além disso, pelo fato de $z_1 z_2 \in I$, é suficiente considerar dois casos:

1. $g+I$ e $h+I$ pertencem a A.

   Neste caso, $g+I = Y'+I$, $h+I = Y_1'+I$ e $f \equiv Y'Y_1'$. Pelo Lema 4.37, segue que $f+I \in A \subset \operatorname{span} C$.

2. $g+I$ pertence a A e $h+I$ pertence a B.

   Neste caso, $g+I = Y'+I$ e $h+I = Y_1'(z_i Y_2')+I$. Pelo Lema 4.36, temos que

$$\begin{aligned} f \equiv & Y'(Y_1'(z_i Y_2')) \\ \equiv & \frac{1}{2}\left(Y'(z_i(Y_1'Y_2')) + Y_1'(z_i(Y'Y_2')) + Y_2'(z_i(Y'Y_1')) - z_i(Y'(Y_1'Y_2'))\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

   Vamos mostrar que $f+I \in \operatorname{span} B$. Primeiramente, usamos o Lema 4.37 para ordenar as variáveis em $Y_1'Y_2'$, $Y'Y_2'$, $Y'Y_1'$, $Y'(Y_1'Y_2')$ que aparecem em (4.16). Agora, se $Y_3 > Y_4$ são monômios em $J(Y)$, então por $(y_1, z_1, y_2) \in I$, segue que $Y_3(z_i Y_4) \equiv Y_4(z_i Y_3)$. Usando este fato, caso necessário, provamos que os somandos em (4.16) pertencem a B. Logo, $f+I \in \operatorname{span} B \subset \operatorname{span} C$.

O lema está provado. □

4.4.1 A graduação clássica, quando K é infinito

Esta subseção, que consiste apenas de um resultado, presta-se a descrever o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal $T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$ sobre corpos infinitos de $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Teorema 4.40. *Se* K *é um corpo infinito de* $\operatorname{char}(K) \neq 2$, *então* $I = T_{Cla}(UJ_2)$, *isto é,* $T_{Cla}(UJ_2)$ *é gerado, como um* $T_{\mathbb{Z}_2}$*-ideal, pelos polinômios em (4.15). Além disso, o conjunto no Lema 4.39 é uma base para o espaço vetorial quociente* $J(X)/I$.

Demonstração. Pelo Lema 4.35 temos $I \subseteq T_{\text{Cla}}(UJ_2)$.

Seja S o conjunto no Lema 4.39, e seja $\overline{S} = \{g + T_{\text{Cla}}(UJ_2) \mid g \in S\}$. Como $I \subseteq T_{\text{Cla}}(UJ_2)$, temos pelo Lema 4.39 que $J(X)/T_{\text{Cla}}(UJ_2) = \operatorname{span}\overline{S}$.

Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_n) = \sum_{g\in S} \lambda_g g \in T_{\text{Cla}}(UJ_2),\ \lambda_g \in K.$$

Como K é um corpo infinito, cada componente multi-homogênea de f pertence a $T_{\text{Cla}}(UJ_2)$. Assim, é suficiente supor que

$$f(y_1,\dots,y_r) = \lambda y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r} \quad \text{ou} \quad f(y_1,\dots,y_r,z_j) = \sum_l \lambda_l (y_1^{k_1-l_1}\cdots y_r^{k_r-l_r})(z_j(y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})),$$

onde $l = (l_1,\dots,l_r)$, $0 \le l_i \le k_i$ para todo i, e $y_1^{k_1-l_1}\cdots y_r^{k_r-l_r} \le y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}$. Devemos provar que $\lambda = \lambda_l = 0$, para todo l.

Para o primeiro caso, temos $f(1,\dots,1) = \lambda \cdot 1 = 0$, e então $\lambda = 0$.

Para o segundo caso, seja $Y_i = \alpha_i e_{11} + \beta_i e_{22}$ para todo i, onde $\alpha_i, \beta_i \in K$, e seja $Z_j = e_{12}$. Vale lembrar que $(UJ_2)_0 = \operatorname{span}\{e_{11}, e_{22}\}$. Temos

$$f(Y_1,\dots,Y_r,Z_j) = ue_{12} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} u = (1/4)\sum_l \lambda_l \left(\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_r^{k_r} + \alpha_1^{k_1-l_1}\cdots\alpha_r^{k_r-l_r}\beta_1^{l_1}\cdots\beta_r^{l_r}\right) + \\ + (1/4)\sum_l \lambda_l \left(\alpha_1^{l_1}\cdots\alpha_r^{l_r}\beta_1^{k_1-l_1}\cdots\beta_r^{k_r-l_r} + \beta_1^{k_1}\cdots\beta_r^{k_r}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que $y_1^{k_1-l_1}\cdots y_r^{k_r-l_r} \le y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}$, temos que se $l = (l_1,\dots,l_r) \ne k = (k_1,\dots,k_r)$, então o coeficiente de $\alpha_1^{k_1-l_1}\cdots\alpha_r^{k_r-l_r}\beta_1^{l_1}\cdots\beta_r^{l_r}$ em u é

$$(1/4)\lambda_l \ \text{ou}\ (1/2)\lambda_l.$$

Aqui cabe observar que o coeficiente $(1/2)\lambda_l$ ocorre apenas na situação em que $k_1 = 2l_1, \dots, k_r = 2l_r$. Como K é infinito e $u = 0$ para todos $\alpha_i, \beta_i \in K$, segue que

$$\lambda_l = 0, \quad \text{para todo} \quad l \ne k.$$

Agora,

$$u = (1/2)\lambda_k \left(\alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_r^{k_r} + \beta_1^{k_1}\cdots\beta_r^{k_r}\right).$$

Com um argumento análogo, provamos que $\lambda_k = 0$.

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\text{Cla}}(UJ_2)$. Além disso, como $I \subseteq T_{\text{Cla}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.39 e 1.33, temos $I = T_{\text{Cla}}(UJ_2)$. $\square$

4.4.2 A graduação clássica, quando K é finito

Nesta subseção descreveremos o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UJ_2 com a graduação clássica, para o caso em que K é um corpo finito.

Ao longo desta subseção, K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Usaremos a seguinte notação:

Notação 4.41. Seja I' o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal de $J(X)$ gerado pelos 3 polinômios em (4.15) e pelo polinômio

$$y_1^q - y_1. \tag{4.17}$$

Notemos que I' é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, por 4 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 4.42. *Se I' é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T_{Cla}(UJ_2)$.*

Demonstração. Dado $Y_1 \in (UJ_2)_0$, temos que $Y_1 = \alpha e_{11} + \beta e_{22}$ para alguns $\alpha, \beta \in K$. Como $|K| = q$, segue que

$$Y_1^q = \alpha^q e_{11} + \beta^q e_{22} = \alpha e_{11} + \beta e_{22} = Y_1.$$

A prova do lema está finalizada. □

No próximo resultado, exibiremos um conjunto de geradores para o espaço quociente $J(X)/I'$. Isso nos auxiliará no objetivo de descrever $T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$.

Lema 4.43. *Seja $\widehat{S}$ o subconjunto de $J(X)$ formado por todos os polinômios*

(a) Y_1' *e*

(b) $Y_1'(z_iY_2')$,

onde $Y_1' = y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}$; $0 \leq k_1, \ldots, k_r < q$; $Y_2' = y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r}$; $0 \leq l_1, \ldots, l_r < q$; $Y_1' \leq Y_2'$; $r \geq 1$; $z_i \in Z$. *Então, o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os elementos $g + I'$, onde $g \in \widehat{S}$.*

Demonstração. Sejam A e B os conjuntos de todos os elementos $g + I'$, onde g está em (a) e (b), respectivamente. Denotemos $C = A \cup B$. Seja f um monômio em $J(X)$, devemos provar que $f + I' \in \mathrm{span}\, C$.

Como $I \subseteq I'$, pelo Lema 4.39 segue que o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios:

(a') $Y' + I'$,

(b') $Y'(z_iY'') + I'$,

onde $Y' = y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r}$; $0 \le k_1,\ldots,k_r$; $Y'' = y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}$; $0 \le l_1,\ldots,l_r$; $Y' \le Y''$; $r \ge 0$; $z_i \in Z$. Sejam A' e B' os conjuntos de todos os elementos em (a') e (b'), respectivamente. Devemos provar que $A' \cup B' \subseteq \operatorname{span} C$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1. $f + I' \in A'$.

Neste caso, $f + I' = y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r} + I'$. Como $y_i^q - y_i \in I'$, podemos supor $0 \le k_1,\ldots,k_r < q$. Assim, $f + I' \in A \subset \operatorname{span} C$.

Caso 2. $f + I' \in B'$.

Neste caso, $f + I' = (y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_i(y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})) + I'$. Analogamente ao Caso 1, podemos supor $0 \le k_1,\ldots,k_r < q$ e $0 \le l_1,\ldots,l_r < q$. Como $(y_1, z_i, y_2) \in I'$, obtemos

$$(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})(z_i(y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})) + I' = (y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})(z_i(y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r})) + I'.$$

Assim, podemos supor que $y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r} \le y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}$, e então $f + I' \in B \subset \operatorname{span} C$.

O lema está provado. $\square$

O próximo teorema é o principal resultado desta subseção. Neste decreveremos o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal $T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$.

Teorema 4.44. *Se K é um corpo finito com $|K| = q$ elementos e* $\operatorname{char}(K) \neq 2$*, então $I' = T_{Cla}(UJ_2)$, isto é, $T_{Cla}(UJ_2)$ é gerado, como um $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal, pelos* 4 *polinômios em (4.15) e (4.17). Além disso, o conjunto no Lema 4.43 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.42, temos $I' \subseteq T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$.

Consideremos o conjunto $\widehat{S}$ no Lema 4.43 e seja $\overline{S} = \{g + T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2) \mid g \in \widehat{S}\}$. Como $I' \subseteq T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$, pelo Lema 4.43 segue que $J(X)/T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2) = \operatorname{span} \overline{S}$. Devemos provar que $\overline{S}$ é um conjunto linearmente independente.

Seja

$$f(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_n) = \sum_{g \in \widehat{S}} \lambda_g g \in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2),\ \lambda_g \in K.$$

Em particular,

$$h = f(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0) = \sum_k \lambda_k y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r} \in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2),$$

onde $k = (k_1,\ldots,k_r)$, $0 \le k_i < q$ para todo i. Como $|K| = q$ e $\deg_{y_i} h < q$ para todo i, segue que

$$h_k(y_1,\ldots y_r) = \lambda_k y_1^{k_1}\cdots y_r^{k_r} \in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2),$$

para todo k. Assim,

$$h_k(1,\ldots,1) = \lambda_k \cdot 1 = 0,$$

então $\lambda_k = 0$.

Agora, temos

$$f(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{(l,m)}\lambda_{(l,m)}(y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})(z_i(y_1^{m_1}\cdots y_r^{m_r}))\in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2),$$

onde $l=(l_1,\ldots,l_r)$, $0\leq l_j<q$ para todo j, $m=(m_1,\ldots,m_r)$, $0\leq m_j<q$ para todo j, e $y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}\leq y_1^{m_1}\cdots y_r^{m_r}$. Uma vez que $f(y_1,\ldots,y_r,0,\ldots,0,z_i,0,\ldots,0)\in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$, podemos supor

$$f=f(y_1,\ldots,y_r,z_i)=\sum_{(l,m)}\lambda_{(l,m)}(y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r})(z_i(y_1^{m_1}\cdots y_r^{m_r}))\in T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2).$$

Seja $Y_j=\alpha_je_{11}+\beta_je_{22}$ para todo j, onde $\alpha_j,\beta_j\in K$, e seja $Z_i=e_{12}$. Temos

$$f(Y_1,\ldots,Y_r,Z_i)=ue_{12}=0,$$

onde

$$\begin{aligned}u=(1/4)\sum_{(l,m)}\lambda_{(l,m)}\left(\alpha_1^{l_1+m_1}\cdots\alpha_r^{l_r+m_r}+\alpha_1^{l_1}\cdots\alpha_r^{l_r}\beta_1^{m_1}\cdots\beta_r^{m_r}\right)+\\+(1/4)\sum_{(l,m)}\lambda_{(l,m)}\left(\alpha_1^{m_1}\cdots\alpha_r^{m_r}\beta_1^{l_1}\cdots\beta_r^{l_r}+\beta_1^{l_1+m_1}\cdots\beta_r^{l_r+m_r}\right).\end{aligned}$$

Como $\alpha_i^q=\alpha_i$ e $\beta_i^q=\beta_i$, para todo i, podemos escrever

$$u=\sum_{(l,m)}\eta_{(l,m)}\alpha_1^{l_1}\cdots\alpha_r^{l_r}\beta_1^{m_1}\cdots\beta_r^{m_r}=0,$$

onde $l=(l_1,\ldots,l_r)$, $0\leq l_i<q$ para todo i, $m=(m_1,\ldots,m_r)$, $0\leq m_i<q$ para todo i, $\eta_{(l,m)}\in K$. Em particular, $\eta_{(l,m)}=0$ para todo (l,m). Agora, se $l\neq(0,\ldots,0)$ e $y_1^{l_1}\cdots y_r^{l_r}\leq y_1^{m_1}\cdots y_r^{m_r}$, temos

$$(1/4)\lambda_{(l,m)}=\eta_{(l,m)}=0\ \text{ ou }\ (1/2)\lambda_{(l,m)}=\eta_{(l,m)}=0,$$

e então $\lambda_{(l,m)}=0$. Em particular,

$$u=(1/2)\sum_{\substack{(l,m)\\ l=(0,\ldots,0)}}\lambda_{(l,m)}\left(\alpha_1^{m_1}\cdots\alpha_r^{m_r}+\beta_1^{m_1}\cdots\beta_r^{m_r}\right)=0.$$

Como $0\leq m_i<q$ para todo i, obtemos $\lambda_{(l,m)}=0$, sempre que $l=(0,\ldots,0)$.

Portanto, o conjunto $\overline{S}$ é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$. Além disso, como $I'\subseteq T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$, pelos Lemas 4.43 e 1.33, segue que $I'=T_{\mathrm{Cla}}(UJ_2)$. □

Referências Bibliográficas

[1] ALJADEFF, E.; KANEL-BELOV, A. Representability and Specht problem for G-graded algebras. **Advances in Mathematics**, v. 225, n. 5, p. 2391–2428, 2010.

[2] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.

[3] BAHTURIN, Y. A. **Identical Relations in Lie Algebras**. Utrecht: VNU Science Press, 1987.

[4] BELOV, A. Y. Counterexamples to the Specht problem. **Sbornik Mathematics**, v. 191, n. 3-4, p. 329–340, 2000.

[5] CENTRONE, L.; MARTINO, F.; SOUZA, M. S. Specht property for some varieties of Jordan algebras of almost polynomial growth. **Journal of Algebra**, v. 521 , p. 137–165, 2019.

[6] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; VALENTI, A. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities. **Journal of Algebra**, v. 275, n. 2, p. 550–566, 2004.

[7] DI VINCENZO, O. M.; KOSHLUKOV, P.; LA SCALA, R. Involutions for upper triangular matrix algebras. **Advances in Applied Mathematics**, v. 37, n. 4, p. 541–568, 2006.

[8] DRENSKY, V. Identities in Lie algebras. **Algebra and Logic**, v. 13, p. 150–165, 1974.

[9] DRENSKY, V. A minimal basis of identities for a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. **Algebra and Logic**, v. 20, n. 3, p. 188–194, 1981.

[10] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras**: Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[11] ELDUQUE, A; KOCHETOV, M. **Gradings on simple Lie algebras**. Providence: American Mathematical Society; Halifax: Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences, 2013.

[12] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[13] GONÇALVES, D. J.; RIVA E. Graded polynomial identities for the upper triangular matrix algebra over a finite field. **Journal of Algebra**, v. 559, p. 625–645, 2020a.

[14] GONÇALVES, D. J.; SILVA, D. C. Polynomial identities with involution for the algebra of 3×3 upper triangular matrices, 2020b. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2007.04112.

[15] GRISHIN, A. V. Examples of T-spaces and T-ideals over a field of characteristic 2 without the finite basis property. **Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika**, v. 5, n. 1, p. 101–118, 1999.

[16] HIGMAN, G. Ordering by Divisibility in Abstract Algebras. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 2, n. 3, p. 326–336, 1952.

[17] IL'TYAKOV, A. V. The Specht property of ideals of identities of certain simple nonassociative algebras. **Algebra and Logic**, v. 24, n. 3, p. 210–228, 1985.

[18] IL'TYAKOV, A. V. On finite basis of identities of Lie algebra representations. **Nova Journal of Algebra and Geometry** , v.1, n.3, p. 207–259, 1992.

[19] JACOBSON, N. **Structure and Representation of Jordan Algebras**. Providence: American Mathematical Society, 1968.

[20] JACOBSON, N. **Basic Algebra I**. New York: W.H. Freeman and Company, 1985.

[21] KEMER, A. R. Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, v. 25, p. 359–374, 1985.

[22] KEMER A. R. Finite basis property of identities of associative algebras. **Algebra and Logic**, v. 26, p. 362–397, 1987.

[23] KOSHLUKOV, P. Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$. **Journal of Algebra**, v. 241, p. 410–434, 2001.

[24] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

[25] KOSHLUKOV, P.; YASUMURA, F. Y. Group gradings on the Jordan algebra of upper triangular matrices. **Linear Algebra and its Applications**, v. 534, p. 1–12, 2017.

[26] KRAKOWSKI, D.; REGEV, A. The polynomial identities of the Grassmann algebra. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 181, p. 429–438, 1973.

[27] LATYŠEV, V. N. On the choice of basis in a T-ideal. **Sibirskii Matematicheskii Zhurnal**, v. 4, p. 1122–1126, 1963.

[28] MAL'CEV, Y. N. A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices. **Algebra and Logic**, v. 10, p. 242–247, 1971.

[29] MCCRIMMON, K. **A taste of Jordan algebras**. New York: Springer-Verlag, 2004.

[30] POPOV, A. P. Identities of the tensor square of a Grassmann algebra. **Algebra and Logic**, v. 21, p. 296–316, 1983.

[31] RAZMYSLOV, Y. P. Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero. **Algebra and Logic**, v. 12, p. 47–63, 1973.

[32] SHCHIGOLEV, V. V. Construction of non-finitely based T-ideals. **Communications in Algebra**, v. 29, n. 9, p. 3935-3941, 2001.

[33] SIDEROV, P. N. A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field. **Pliska Studia Mathematica Bulgarica**, v. 2, p. 143–152, 1981.

[34] SPECHT, W. Gesetze in Ringen. I. **Mathematische Zeitschrift**, v. 52, p. 557–589, 1950.

[35] SVIRIDOVA, I. Identities of PI-algebras graded by a finite abelian group. **Communications in Algebra**, v. 39, n. 9, p. 3462–3490, 2011.

[36] URURE, R. I. Q.; GONÇALVES, D. J. Identities with involution for 2×2 upper triangular matrices algebra over a finite field. **Linear Algebra and its Applications**, v. 544, p. 223–253, 2018.

[37] VAĬS, A. Y.; ZEL'MANOV, E. I. Kemer's theorem for finitely generated Jordan algebras. **Soviet Mathematics**, v. 33, n. 6, p. 38–47, 1990.

[38] VALENTI, A.; ZAICEV, M. V. Group gradings on upper triangular matrices. **Archiv der Mathematik**, v. 89, n. 1, p. 33–40, 2007.

[39] VASILOVSKY, S. Y. A finite basis for polynomial identities of the Jordan algebra of a bilinear form. **Siberian Advances in Mathematics**, v. 1, n. 4, p. 142–185, 1991.

[40] VAUGHAN-LEE, M. R. Varieties of Lie algebras. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 21, n. 2, p. 297–308, 1970.

[41] VAUGHAN-LEE, M. R. Abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 11, n. 2, p. 263–266, 1975.

[42] WALL, C.T.C. Graded Brauer groups. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik**, v. 213, p. 187–199, 1963/1964.

[43] ZHEVLAKOV, K. A; SLIN'KO A. M.; SHESTAKOV, I.P.; SHIRSHOV, A. I. **Rings that are nearly associative**. New York-London: Academic Press, 1982.