

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS -
PPGECE

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS:
FAZENDO ARTE NA AULA DE MATEMÁTICA**

APARECIDA DE SOUZA COSTA SANCHES

ORIENTADOR: PROF. DR. PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI

São Carlos – SP

Novembro/2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS -
PPGECE

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS:
FAZENDO ARTE NA AULA DE MATEMÁTICA**

APARECIDA DE SOUZA COSTA SANCHES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas. Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

São Carlos – SP

Novembro/2021

Sanches, Aparecida de Souza Costa

Transformações Geométricas: Fazendo Arte na Aula de Matemática / Aparecida de Souza Costa Sanches -- 2021. 76f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Pedro Luiz Aparecido Malagutti

Banca Examinadora: Ivo Machado Costa, Marta Cilene Gadotti

Bibliografia

1. Geometria. 2. Simetria. 3. Arte. I. Sanches, Aparecida de Souza Costa. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Aparecida de Souza Costa Sanches, realizada em 10/11/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar)

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti (UNESP)

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico este trabalho ao meu marido e minhas filhas pelo incentivo dado para a conclusão de mais este objetivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter-me dado forças para continuar, inteligência, oportunidade e privilégio de partilhar tamanha experiência durante o curso, e perseverança para concluir o curso de Mestrado.

À minha família, pela imensa paciência e o incentivo dado durante esta jornada.

Ao meu orientador, Professor Pedro Luiz Aparecido Malagutti, por ter aceitado me conduzir neste trabalho.

A todos os professores que tive até hoje e que contribuíram para o meu aprendizado, crescimento profissional e pessoal.

À Edvânia Aparecida Cândida Martins, supervisora da escola onde trabalhei, por conseguir a autorização para aplicação do projeto.

Ao professor Waltair de Queiroz Severino, diretor da escola, que autorizou à aplicação do projeto.

À Daiane Queiroz da Conceição, professora de Matemática da turma, que me ajudou e incentivou na aplicação das atividades.

Aos alunos que participaram das atividades.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

(Paulo Freire)

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar o estudo da simetria no Ensino Fundamental, por meio de aulas dadas *online*, visando a participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, utilizando-se recursos computacionais para estabelecer uma relação significativa entre os conteúdos escolares da área de Geometria e obras de artes. Para a verificação da aprendizagem foram elaboradas folhas de atividades pedagógicas, que poderiam ser impressas ou copiadas, para os alunos resolverem. As folhas de atividades elaboradas exploraram e utilizaram os conceitos de simetrias visando auxiliar na aprendizagem e visualização destes conteúdos. As atividades foram aplicadas *online*, por meio dos aplicativos *Google Meet*, *WhatsApp* e *Classroom* em uma escola da rede pública estadual de Minas Gerais, em uma turma de oitavo ano, buscando a interação aluno-aluno e aluno-professor para a condução e realização das atividades propostas em aula. Podemos afirmar que a aula virtual possibilitou a melhoria do ensino de simetria e, também, que os diálogos com os alunos contribuíram para as aprendizagens dos conteúdos abordados em aula.

Palavras-chave: Geometria, Simetria, Arte.

ABSTRACT

The present work aims to analyze the study of symmetry in Elementary School, through classes given online, aiming at the active participation of the student in the teaching and learning process of Mathematics, using computational resources to establish a significant relationship between the school contents in the area of Geometry and works of art. To verify the learning, sheets of pedagogical activities were prepared, which could be printed or copied, for the students to solve. The elaborated activity sheets explored and used the concepts of symmetry in order to assist in learning and visualizing these contents. The activities were applied online, through the Google Meet, WhatsApp and Classroom applications in a public school in Minas Gerais, in an eighth grade class, seeking student-student and student-teacher interaction for conducting and carrying out the activities proposed in class. We can say that the virtual class made it possible to improve the teaching of symmetry and, also, that the dialogues with the students contributed to the learning of the contents covered in class.

Keywords: Geometry, Symmetry, Art.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Formas da cidade de Brasília.	16
2.1	Vasilhame-Cerâmica Marajoara	20
2.2	Tapete Pazyryk.	21
2.3	Transformações na natureza.	22
2.4	Reflexão - Exemplo 1	23
2.5	Reflexão - Exemplo 2.	23
2.6	Translação - Exemplo 1.	24
2.7	Translação - Exemplo 2.	25
2.8	Reflexão deslizante.	25
2.9	Rotação - Exemplo 1.	26
2.10	Rotação - Exemplo 2.	27
2.11	Homotetia - Exemplo 1.	27
2.12	Homotetia - Exemplo 2.	28
2.13	Homotetia - Exemplo 3.	28
2.14	Céu e Água (1948).	29
2.15	Mãos desenhando (1956).	29
2.16	Afresco da Sala de los Reyes.	30
2.17	Mosaicos de Alhambra - 1.	30
2.18	Mosaicos de Alhambra - 2.	31
2.19	Mosaicos de Alhambra - 3.	31

2.20	Patio de los Arrayanes.	32
3.1	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 1	34
3.2	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 2	34
3.3	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 3	35
3.4	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 4	35
3.5	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 5	36
3.6	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 6	36
3.7	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 7	37
3.8	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 8	37
3.9	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 9	38
3.10	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 10	38
3.11	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 11	39
3.12	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 12	39
3.13	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 13	40
3.14	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 14	40
3.15	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 15	41
3.16	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 16	41
3.17	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 17	42
3.18	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 18	42
3.19	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 19	43
3.20	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 1	44
3.21	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 2	44
3.22	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 3	45
3.23	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 4	45
3.24	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 5	46
3.25	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 6	46

3.26	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 7	47
3.27	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 8	47
3.28	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 9	48
3.29	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 10	48
3.30	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 11	49
3.31	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 12	49
3.32	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 13	50
3.33	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 14	50
3.34	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 15	51
3.35	Apresentação <i>PowerPoint</i> - Slide 16	51
3.36	Exemplo 1 - Construído no GeoGebra.	52
3.37	Exemplo 2 - Construído no GeoGebra.	52
3.38	Exemplo 1 - Construído no GeoGebra para Android.	53
3.39	Exemplo 2 - Construído no GeoGebra para Android.	53
3.40	Exemplo 1 - Construído no Paint 3D.	54
3.41	Exemplo 2 - Construído no Paint 3D.	54
3.42	Exemplo 1 - Produzido com recorte de papel de presente.	55
3.43	Exemplo 2 - Produzido com recorte de papel de presente.	55
4.1	Atividade 1 - Simetria.	57
4.2	Atividade 1 - Aluno A.	58
4.3	Atividade 2 - Simetria.	58
4.4	Atividade 2 - Aluno E.	58
4.5	Atividade 2 - Aluno C.	59
4.6	Atividade 3 - Simetria.	59
4.7	Atividade 3 - Aluno C.	60
4.8	Atividade 3 - Aluno F.	60

4.9	Atividade 3 - Aluno E.	61
4.10	Atividade 3 - Aluno A.	61
4.11	Atividade 4 - Simetria.	61
4.12	Atividade 4 - Aluno A.	62
4.13	Atividade 4 - Aluno D.	62
4.14	Atividade 4 - Aluno F.	62
4.15	Atividade 5 - Simetria.	63
4.16	Atividade 5 - Aluno A.	64
4.17	Atividade 5 a - Aluno F.	64
4.18	Atividade 5 a - Aluno C.	64
4.19	Atividade 5 a - Aluno E.	64
4.20	Atividade 5 b - Aluno F.	65
4.21	Atividade 5 b - Aluno C.	65
4.22	Atividade 6 - Simetria.Fonte: Elaborada pela autora	65
4.23	Atividade 6 - Aluno D.	66
4.24	Atividade 6 - Aluno E.	66
4.25	Atividade 6 - Aluno C.	66
4.26	Atividade 7 - Simetria.	67
4.27	Atividade 7 - Aluno D.	67
4.28	Atividade 7 - Aluno A.	68
4.29	Atividade 8 - Simetria.	68
4.30	Atividade 8 - Aluno D.	68
4.31	Atividade 8 - Aluno B.	69
4.32	Atividade 8 - Aluno E.	69
4.33	Obra de Arte - Aluno D.	69
4.34	Obra de Arte - Aluno C.	70

4.35 Obra de Arte - Aluno E.	70
4.36 Obra de Arte - Aluno B.	71
4.37 Obra de Arte - Aluno F.	71

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	13
1.1 Sobre a autora	13
1.2 Contextualização e Motivação	14
1.3 Objetivos	17
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1 Transformações no Plano	22
2.2 Simetria	22
2.3 Reflexão	23
2.4 Translação	24
2.5 Rotação	26
2.6 Homotetia	27
CAPÍTULO 3 – MATERIAIS E MÉTODOS	33
CAPÍTULO 4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO	57
CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
REFERÊNCIAS	73

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados um pouco da trajetória da autora, a motivação que levou ao estudo das simetrias de rotação, translação e reflexão, além dos objetivos desse estudo.

1.1 Sobre a autora

O presente trabalho é parte conclusiva do curso de Mestrado Profissional em Ciências Exatas, na área de Matemática, ofertada pelo Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).

A autora deste trabalho cursou Licenciatura Plena em Matemática na Unesp - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto, tendo colado grau em 1992.

Somente em 2005 passou a trabalhar como professora após passar em concurso público no estado de Minas Gerais, mais especificamente na cidade de Iturama. Trabalhou somente em duas escolas durante seus anos de exercício como professora de Matemática. Na primeira escola, lecionou em turmas do Ensino Fundamental II. Na segunda escola, trabalhou com Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Durante os anos de pleno exercício do magistério, observou que o ensino da geometria acabava sendo pouco explorado, pois não era possível ministrar todo o conteúdo por falta de tempo. Também observou que o 8º ano/7ª série era o ano com mais conteúdo de álgebra e aritmética a ser estudado. Com isso, o conteúdo de geometria acabava ficando em segundo plano, sendo trabalhado apenas perímetros, áreas e volumes.

Além disso, percebeu que os alunos que adquiriam um melhor aprendizado e obtinham

as melhores notas eram aqueles em que as famílias estavam mais presentes e envolvidas com as atividades extracurriculares (reuniões de pais, sessões cívicas e comemorações) da escola. Alguns alunos menos participativos eram aqueles em que as famílias quase não apareciam na escola. Esses alunos precisavam sempre de um maior incentivo para o aprendizado, o que era difícil de disponibilizar com as salas lotadas.

Constatou, durante os anos de magistério, que o ensino da geometria estava sendo pouco explorado devido ao extenso conteúdo aritmético e algébrico e pela falta de tempo no ano letivo. Buscou inserir na semana um dia específico para essas aulas de geometria. Entretanto, ainda assim, o tempo não era suficiente.

Assim, durante o curso de Mestrado, optou por fazer um estudo sobre Transformações Geométricas - Simetrias em uma turma de 8º ano/7ª série, buscando associar o conteúdo com as artes. Este é um do conteúdos que nunca é explorado devido à falta de tempo, e que, apesar disso, é muito cobrado nas avaliações externas do estado de Minas Gerais.

1.2 Contextualização e Motivação

A geometria faz parte do nosso dia a dia. Faz-se presente em telhados, fachadas, nos cantos de obras, brinquedos, etc. O estudo da geometria ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico, na compreensão do mundo e na resolução de situações do cotidiano. Por isso o tema escolhido para o presente trabalho foi: Geometria, Simetria e Arte nas aulas de Matemática.

Como o 8º ano é um ano com muito conteúdo algébrico e aritmético a ser estudado, a Geometria, nesse ano, acaba ficando de lado e quase nada é trabalhado. Esse tema foi escolhido para o presente trabalho por dois motivos principais. O primeiro consiste no fato de que o conteúdo de simetrias raramente é ensinado. O segundo motivo é o baixo nível de rendimento obtido pelos alunos nas avaliações externas do governo de Minas Gerais, em questões relacionadas ao conteúdo das Transformações Geométricas .

Lorenzato (1995) fez uma pesquisa com professores e detectou que a ausência da geometria em sala de aula está ligada, entre outros motivos, ao despreparo dos professores no uso de recursos em sala de aula e na deficiência de conhecimentos básicos.

“O ensino de Geometria, se comparado ao ensino das outras áreas da Matemática, tem sido o mais desvairador; [...] No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula”. [LORENZATO 1995, p. 03]

Outro motivo citado por Lorenzato (1995) é a exagerada importância dada ao livro didático

por causa da má formação dos professores ou mesmo pelas jornadas exaustivas que desempenham não sobrando tempo necessário para a preparação de aulas. Para ele a Geometria no livro didático é rara ou quase nada, desvinculada do mundo físico.

“[...] a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.” [LORENZATO 1995, p. 4]

Para pesquisadores como Piasesky (2010), a partir dos anos setenta do século passado, a Geometria foi reduzida a simples cálculos:

“Partiu-se do pressuposto de que o ensino da geometria nas escolas, quando ocorria, ficava reduzido a cálculos de ângulos, comprimentos, áreas e volumes com aplicações de fórmulas, sem a devida verificação e representação no plano cartesiano”. [PIASESKI 2010, p. 14]

Além de tudo isso, a pandemia de COVID-19, iniciada no final do ano de 2019, dificultou bastante o trabalho dos professores e a aprendizagem dos alunos. Foi necessário que professores e alunos se adaptassem a uma nova forma de estudo. O estado de Minas Gerais preparou então os PETs (Plano de Estudo Tutorado), com atividades para os alunos resolverem e enviarem para seus professores corrigirem. Porém, para eles realizarem as atividades, deveriam assistir às video aulas no canal da Rede Minas e tirarem dúvidas com seus professores através do aplicativo Conexão Escola. Por esse motivo, ficou ainda mais difícil o ensino das transformações geométricas.

O estudo das transformações geométricas é muito importante, pois auxilia no desenvolvimento de atividades de arte, engenharia, arquitetura e de outras áreas do conhecimento. A Figura 1.1 é um exemplo de simetria na arquitetura.

Figura 1.1: Formas da cidade de Brasília.

Fonte: Importância do Ensino da Geometria.

Disponível em: <<https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/importancia-ensino-geometria.htm>>. Acesso em 02/06/2021.

O ensino das simetrias leva o aluno a desenvolver a capacidade de visualização, proporcionando o desenvolvimento de habilidades de criação, manipulação e imaginação, desde que sistematicamente construídas e exercitadas.

“Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de: criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados com objectos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objectos ou ideias que nunca foram vistos. Vem a propósito dizer que a habilidade para imaginar o que nunca foi visto é importante não apenas para abstrações matemáticas como pontos. Não podemos cortar o tecido para coser uma manga, ou desenhar os planos de uma estante, sem “ver” primeiro, na nossa cabeça, o que ainda não pôde ser visto com os próprios olhos.” [GOLDENBERG 1998, p. 37]

A importância do ensino da geometria no Ensino Fundamental é assim descrita nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

“Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.” [BRASIL 1997, p. 39]

Os PCNs sugerem que, no ensino das transformações geométricas, deve-se propor situações em que os alunos comparem duas figuras, observando o que muda e o que é invariante.

“As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas.” [BRASIL 1997, p. 124]

Há muito tempo, o ensino da geometria apresenta lacunas enfatizando o simbolismo e uma terminologia excessiva, tanto para os alunos da educação básica quanto nos cursos de formação do docente de Matemática. Assim, os professores também são vítimas de uma má formação acadêmica em geometria. Portanto, por esses e outros motivos, procurou-se, mesmo em tempo de pandemia, ensinar o conteúdo de transformações geométricas fazendo associação com as artes.

1.3 **Objetivos**

Os objetivos para o ensino das transformações geométricas estão presentes no Currículo Referência de Minas Gerais [CBC/MG 2019]. Neste documento, enfatiza-se que o estudo da Geometria envolve:

- “O estudo de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, construindo o pensamento geométrico que é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.”

Para os anos finais do ensino fundamental, a geometria deve consolidar e ampliar as aprendizagens realizadas, e não simplesmente reduzi-las a cálculos de áreas e volumes com o uso de fórmulas:

- “[...] devem ser enfatizadas, também, as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica”.

Além disso, no 4º ano do Ensino Fundamental I, o descritor 19 do Currículo Básico Comum de Minas (CBC) cita as habilidades que devem ser adquiridas com o ensino de simetria de reflexão:

- **(EF04MA19)** (Ensino Fundamental, 4º ano, MATEMÁTICA, Descritor 19)
Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de *softwares* de geometria.

No 7º ano do Ensino Fundamental II, as transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano têm por objetivos (1) a multiplicação das coordenadas por um número inteiro e (2) a obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem, em que os alunos devem adquirir as seguintes habilidades:

- **(EF07MA52)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 52)
Reconhecer o plano cartesiano.
- **(EF07MA53)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 53)
Localizar pontos no plano cartesiano.
- **(EF07MA54)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 54)
Representar um conjunto de dados graficamente no plano cartesiano.
- **(EF07MA19)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 19)
Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
- **(EF07MA20)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 20)
Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

Os objetivos em Simetrias de Translação, Rotação e Reflexão têm como habilidades a serem adquiridas o seguinte descritor:

- **(EF07MA21)** (Ensino Fundamental, 7º ano, MATEMÁTICA, descritor 21)
Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

No 8º ano do Ensino Fundamental II, as habilidades a serem adquiridas têm os seguintes descritores em transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação:

- **(EF08MA18)** (Ensino Fundamental, 8º ano, MATEMÁTICA, descritor 18)
Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

O professor precisa estar bem preparado para esse ensino, dominando conceitos, métodos e instrumentos de ensino para conseguir que os alunos adquiram as habilidades exigidas com o ensino das transformações geométricas. Mas o que o professor, realmente, tem em seu auxílio durante as aulas, é o livro didático. Entretanto, o livro não está adequado ao ensino da Geometria. Não custa ressaltar novamente os estudos de Lorenzato (1995, p.4), que fez as seguintes considerações:

“Infelizmente em muitos deles (livros didáticos) a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.” [LORENZATO 1995, p. 04]

Nesta pesquisa, procurou-se trabalhar as transformações geométricas fazendo os alunos identificarem esses conceitos nas obras de arte, principalmente nas de Maurits Cornelis Escher, mais conhecido por M. C. Escher.¹

¹M. C. Escher (Leeuwarden, 17 de junho de 1898 — Hilversum, 27 de março de 1972) foi um artista gráfico holandês, conhecido por seus trabalhos em xilogravuras e litogravuras e meios-tons (mezzotints), que tendem a representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses - padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes, que representam obras fantásticas, incomuns, com várias perspectivas, geradoras de ilusão de ótica no observador. Foi considerado um artista matemático, sobretudo geométrico.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As transformações geométricas são encontradas na história da humanidade já há muitos anos. Exemplo disso encontra-se no Museu Nacional UFRJ, uma cerâmica decorada com o uso de transformações geométricas referente ao período Neolítico, em aproximadamente 3000 a.C.. Na sua decoração, foram utilizados símbolos geométricos e padrões simétricos conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1: Vasilhame-Cerâmica Marajoara



Fonte: Museu Nacional da UFRJ.

Disponível em: < <https://www.museunacional.ufrj.br/dir/exposicoes/arqueologia/arqueologia-brasileira/arqbra011.html> >.

Acesso em 02/06/2021.

Também podemos observar padrões geométricos e simetrias na ornamentação do tapete Pazyryk (Sibéria) do século V a.C., como mostra a Figura 2.2.

Figura 2.2: Tapete Pazyryk.



Fonte:Netzach Tapetes Persas.

Disponível em: < <http://netzachtapetespersas.blogspot.com/2010/08/pazyryk.html> >. Acesso em 02/06/2021.

O matemático Felix Klein (1849-1925) desempenhou um grande papel na história da Geometria das Transformações. Ele se dedicou a desenvolver, aplicar e popularizar o conceito de grupo para caracterizar as diferentes geometrias elaboradas até o século XIX. Para ele, as homotetias e semelhanças formavam o grupo principal, o da geometria euclidiana, e as isometrias formavam o subgrupo das semelhanças, como o das transformações geométricas que não alteram as propriedades das figuras.

Encontramos transformações geométricas criadas pela natureza, como na Figura 2.3.

Figura 2.3: Transformações na natureza.

Fonte: [PINHO 2013, p. 23].

A seguir, serão definidos alguns conceitos importantes.

2.1 Transformações no Plano

Definição: Uma transformação no plano é uma função bijetora do plano ou do espaço sobre si mesmo. Se F é uma figura contida no plano, a imagem de F pela transformação T é definida como $T(F) = \{T(P), P \in F\}$, ou seja, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira.

As principais transformações no plano são: reflexões, translações, rotações e homotetias.

2.2 Simetria

“A simetria em torno do ponto O é a transformação Φ (do plano ou do espaço) que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\phi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX' .” [LIMA 2009]

A simetria preserva a distância entre pontos e a amplitude dos ângulos, isto é, a figura inicial e o seu transformado são congruentes. Os principais tipos de simetrias são: reflexão, translação e rotação.

2.3 Reflexão

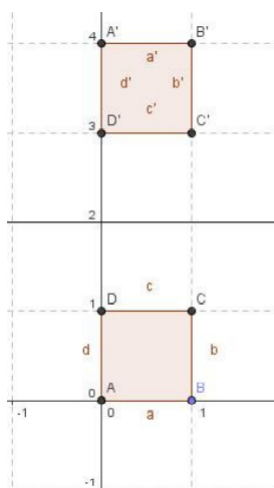
“Seja R uma reta no plano π . A reflexão em torno do eixo R é a transformação $\rho : \pi \rightarrow \pi$, que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que R é a mediatriz do segmento XX' .” [LIMA 2009]

Em uma reflexão:

- Um segmento de reta é transformado em um segmento de reta congruente.
- Um ângulo é transformado em um ângulo congruente.
- Os pontos do eixo mantêm-se fixos (não se movem por efeito da reflexão).

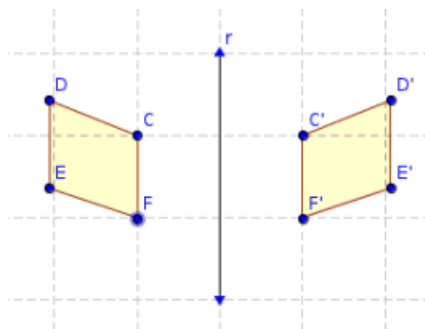
Veja os exemplos, nas Figuras 2.4 e 2.5.

Figura 2.4: Reflexão - Exemplo 1



Fonte: [Cunha et al. 2008, p. 36]

Figura 2.5: Reflexão - Exemplo 2.



Fonte: [PINHO 2013, p. 17]

2.4 Translação

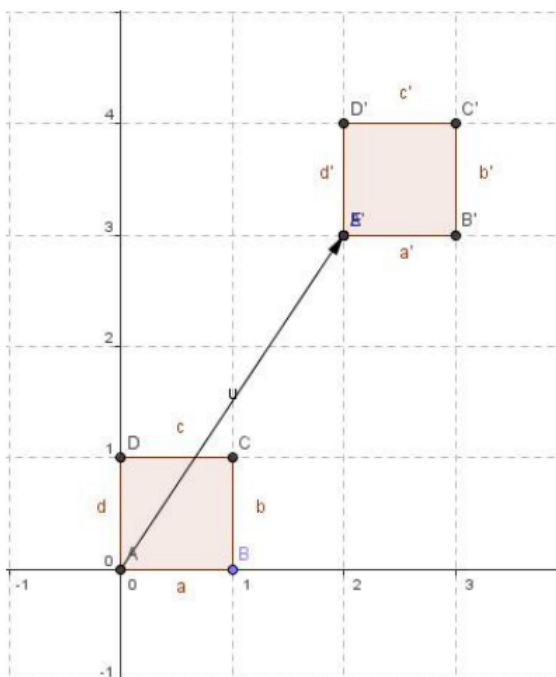
“Seja AB um segmento orientado, no plano π ou no espaço E (orientado significa que a ordem em que os extremos são citados é relevante: primeiro A , e depois B). A translação determinada por AB é a transformação (correspondência biunívoca) $\tau : \pi \rightarrow \pi$ ou $\tau : E \rightarrow E$, definida por $\tau(X) = X'$, de modo que (AB, XX') e (AX, BX') sejam os pares de lados opostos de um paralelogramo”. [LIMA 2009]

Numa translação:

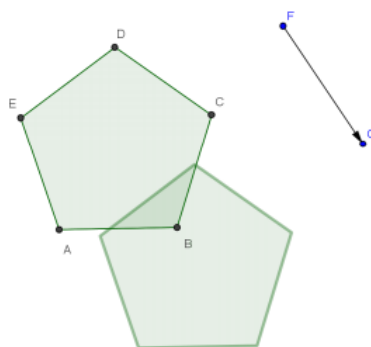
- Qualquer segmento de reta é transformado em um segmento de reta paralelo e com o mesmo comprimento.
- Qualquer ângulo é transformado em um ângulo congruente.

Veja o exemplo das Figuras 2.6 e 2.7.

Figura 2.6: Translação - Exemplo 1.



Fonte: [Cunha et al. 2008, p. 41]

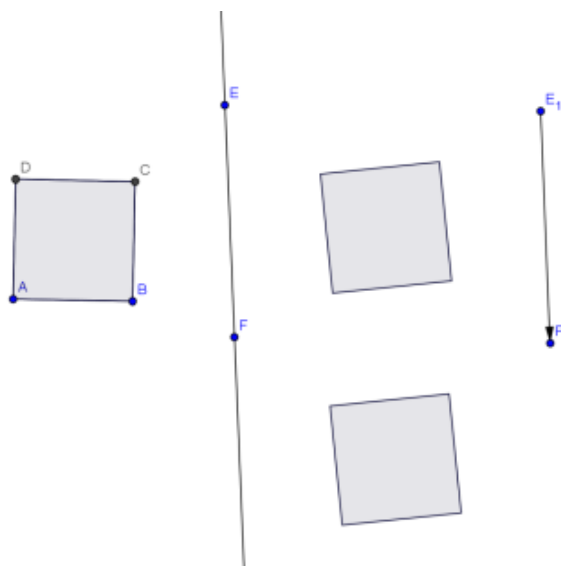
Figura 2.7: Translação - Exemplo 2.

Fonte: [PINHO 2013, p. 19]

Temos também a reflexão deslizante, que é uma simetria que resulta de uma reflexão seguida de uma translação paralela ao eixo de reflexão. Numa reflexão deslizante:

- Um segmento de reta é transformado em um segmento de reta congruente.
- Um ângulo é transformado em um ângulo congruente.
- Não há pontos fixos.
- A distância de um ponto ao eixo de reflexão é igual à distância da imagem desse ponto ao eixo.

Observe o exemplo da Figura 2.8.

Figura 2.8: Reflexão deslizante.

Fonte: [PINHO 2013, p. 20]

2.5 Rotação

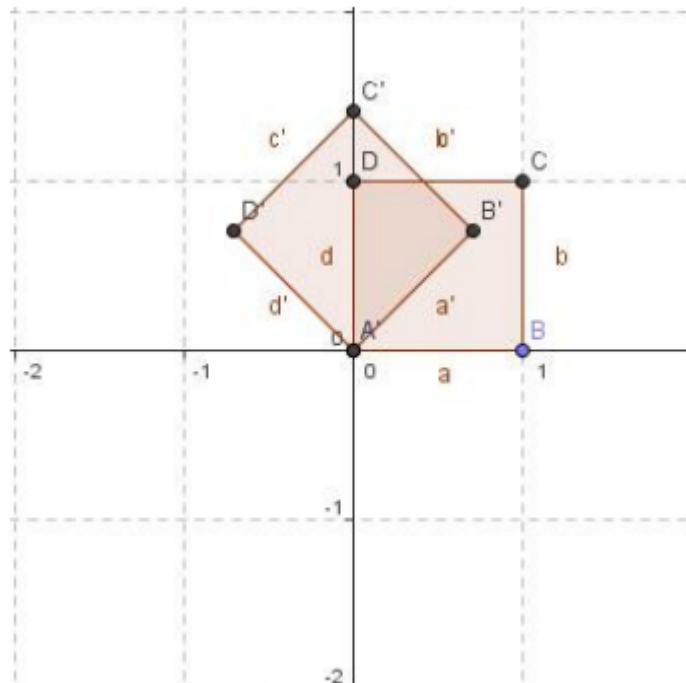
“Fixemos um ponto O no plano π agora orientado (como a tradição recomenda, o sentido positivo é o anti-horário). Dado um ângulo α , a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano π associa o ponto $A' = R_\alpha(A)$ de forma que se tenha $A'O = AO$, $AOA' = \alpha$ e o sentido de A para A' (em torno de O), positivo”. [WAGNER 1993]

Numa rotação:

- Um segmento de reta é transformado em um segmento de reta congruente.
- Um ângulo é transformado em um ângulo congruente.
- O centro de rotação mantém-se fixo.

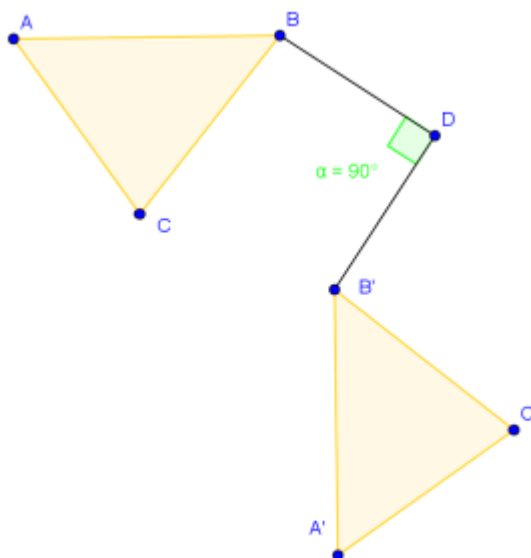
São exemplos de rotação as Figuras 2.9 e 2.10.

Figura 2.9: Rotação - Exemplo 1.



Fonte: [Cunha et al. 2008, p. 42]

Figura 2.10: Rotação - Exemplo 2.



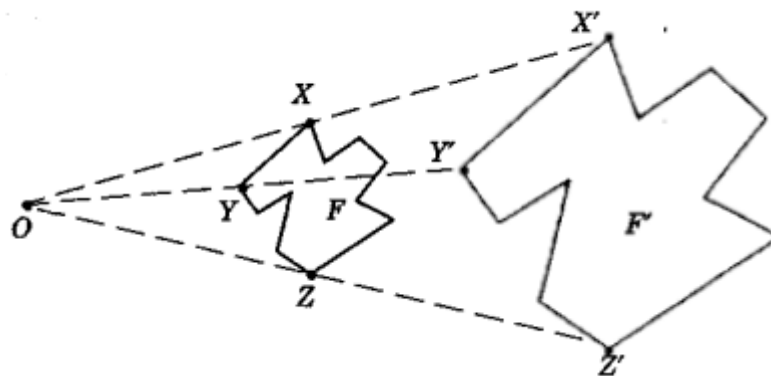
Fonte: [PINHO 2013, p. 18]

2.6 Homotetia

“Sejam O um ponto do plano Π (ou do espaço E) e r um número real positivo. A homotetia de centro O e razão r é a função $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ (ou $\sigma : E \rightarrow E$) definida do seguinte modo: $\sigma(O) = O$ e, para todo $X \neq O$, $\sigma(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX tal que $OX' = r \cdot OX$.” [LIMA 2009]

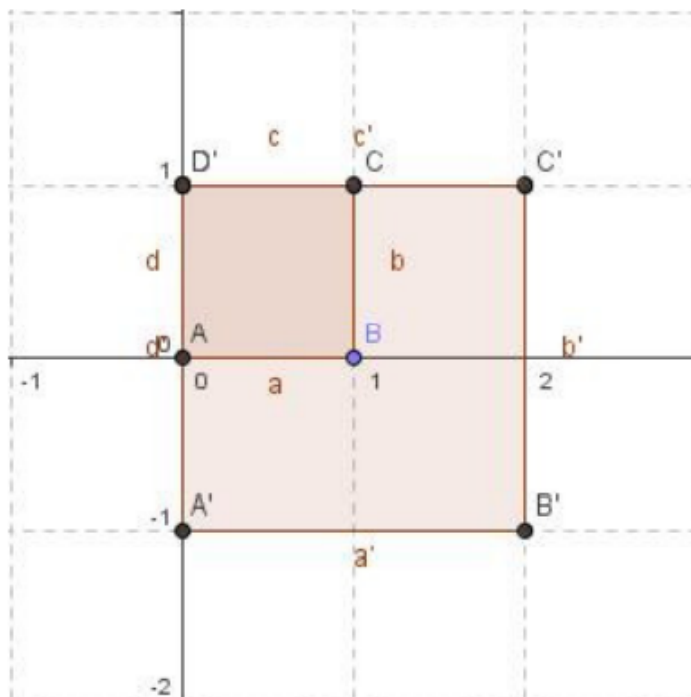
São exemplos de homotetia as Figuras 2.11, 2.12 e 2.13

Figura 2.11: Homotetia - Exemplo 1.



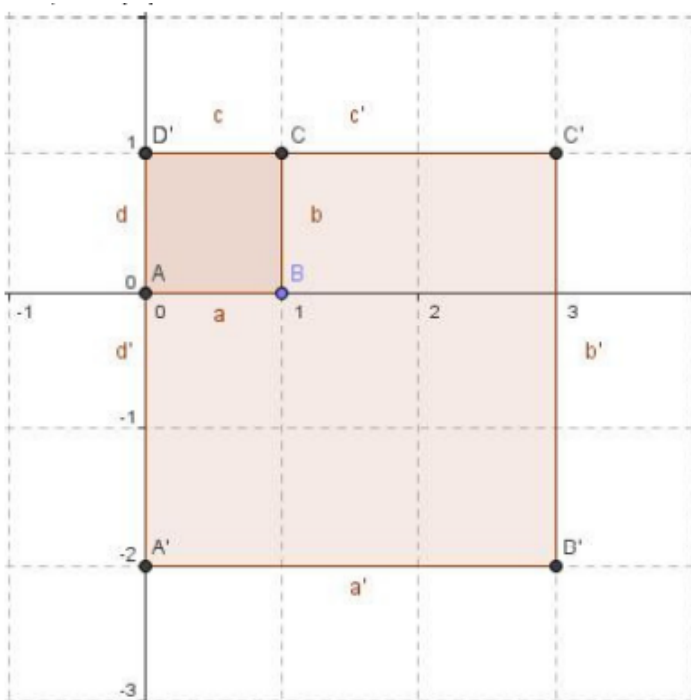
Fonte: [LIMA 2009, p. 37]

Figura 2.12: Homotetia - Exemplo 2.



Fonte: [PINHO 2013, p. 48]

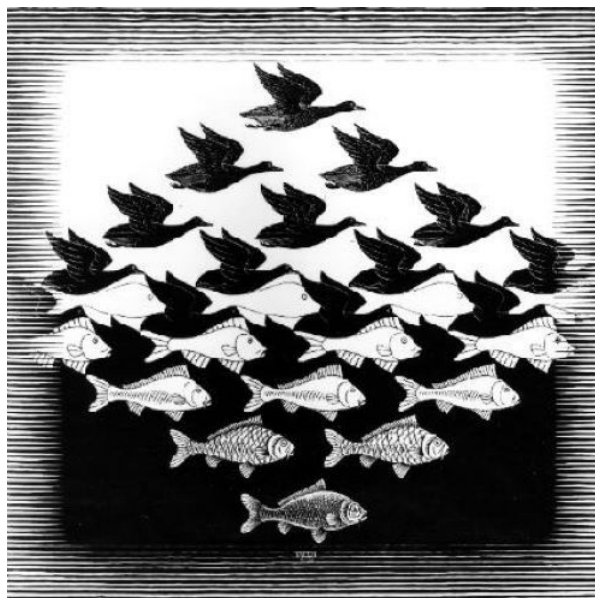
Figura 2.13: Homotetia - Exemplo 3.



Fonte: [PINHO 2013, p. 48]

Nesta pesquisa vamos abordar somente as simetrias de reflexão, translação e rotação. Esses conceitos podem ser vistos em obras de arte, principalmente nas telas do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher. Algumas de suas obras podem ser observadas nas Figuras 2.14 e 2.15.

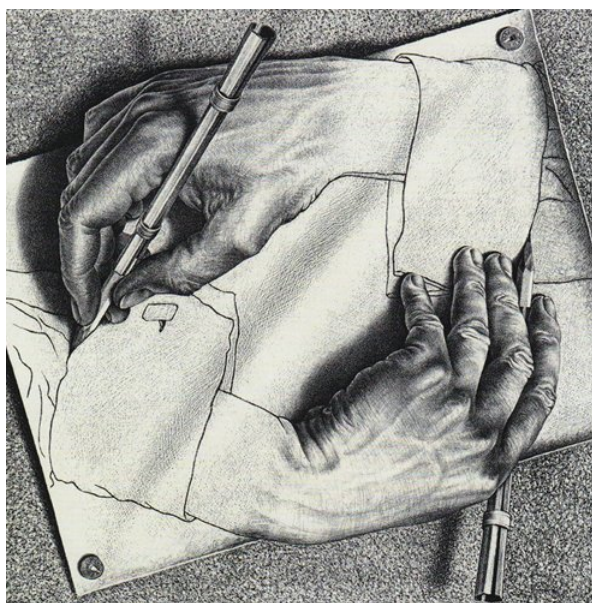
Figura 2.14: Céu e Água (1948).



Fonte: Saia com Arte. Disponível em:

< <https://www.saiacomarte.com/obra/ceu-e-agua/> >. Acesso em 02/06/2021.

Figura 2.15: Mãos desenhando (1956).



Fonte: Arte e Artistas. Disponível em:

< <https://arteartistas.com.br/drawing-hands-desenhando-maos-maurits-cornelis-escher/> >. Acesso em 02/06/2021.

Escher ficou fascinado pela divisão regular do plano encontrada em muitos dos motivos ornamentais do palácio de Alhambra em Granada - Espanha ¹. Exemplo disso são as figuras 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20 .

Figura 2.16: Afresco da Sala de los Reyes.



Fonte: Os Azulejos de Alhambra.

Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=SQtE3-Rz5x8> >. Acesso em 28/09/2021.

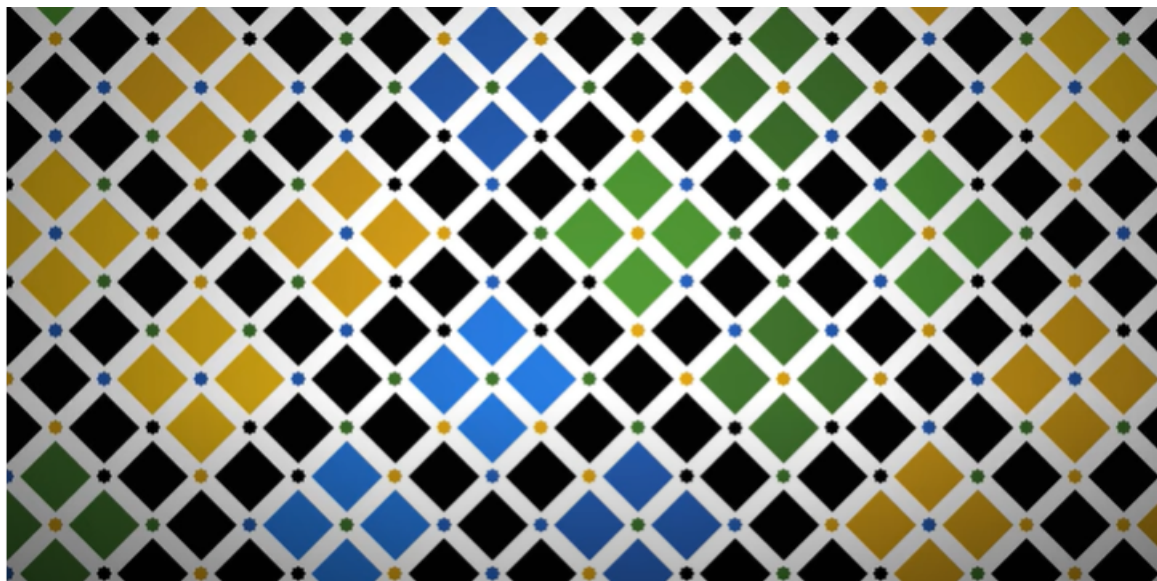
Figura 2.17: Mosaicos de Alhambra - 1.



Fonte: Mosaicos de la Alhambra - Alhambra's Mosaics. Disponível em:

< <https://www.youtube.com/watch?v=CoJ6u8trLyg> >. Acesso em 28/09/2021.

¹O palácio de Alhambra, construído no século XIII, durante a ocupação árabe na Península Ibérica, localiza-se numa colina a sudoeste de Granada (Sul da Espanha).

Figura 2.18: Mosaicos de Alhambra - 2.

Fonte: Mosaicos de la Alhambra - Alhambra's Mosaics. Disponível em:

< <https://www.youtube.com/watch?v=CoJ6u8trLvg> >. Acesso em 28/09/2021.

Figura 2.19: Mosaicos de Alhambra - 3.

Fonte: Mosaicos de la Alhambra - Alhambra's Mosaics. Disponível em:

< <https://www.youtube.com/watch?v=CoJ6u8trLvg> >. Acesso em 28/09/2021.

Figura 2.20: Patio de los Arrayanes.

Fonte: Os Azulejos de Alhambra. Disponível em:

< <https://www.youtube.com/watch?v=SQtE3-Rz5x8> >. Acesso em 28/09/2021.

Já o matemático russo Evgraf Fedonov (1853-1919) em 1891 mostrou que na geometria existem apenas 17 grupos cristalográficos, ou seja, 17 maneiras de se recobrir um plano com polígonos congruentes ou não, sem que existam espaços entre eles e de modo que a superfície total seja igual ao espaço particionado. Todos os grupos são encontrados no Palácio de Alhambra em Granada. Os 17 grupos de simetria do plano podem ser agrupados em cinco seções, de acordo com a ordem máxima das voltas:

- Grupos de simetria sem torções: 4 grupos de simetrias.
- Grupos de simetria com giros de 180° : 5 grupos de simetrias.
- Grupos de simetria com voltas de 120° : 3 grupos de simetrias.
- Grupos de simetria com giros de 90° : 3 grupos de simetrias.
- Grupos de simetria com voltas de 60° : 2 grupos de simetrias.

Capítulo 3

MATERIAIS E MÉTODOS

O presente trabalho foi realizado em uma Escola da rede pública estadual da cidade de Iturama, Minas Gerais, em uma turma de 8º ano. Foi desenvolvido de forma virtual, com encontros *online* através do *Google Meet*, devido à pandemia de COVID-19. Foram realizados apenas quatro períodos (aulas) de 50 minutos para que o trabalho da professora de matemática, da turma, não fosse prejudicado, uma vez que haviam datas previamente marcadas para o desenvolvimento dos PETs - Plano de Estudo Tutorados [SEE/MG].

Para as aulas do estudo, foi elaborada pela professora pesquisadora duas apresentações em *Power Point* contendo a definição e exemplos de simetria e também obras de artes explorando os tipos de simetrias.

Para isso o ensino virtual foi desenvolvido em quatro etapas.

1ª Etapa

Na primeira aula, através do aplicativo *Google Meet* e da apresentação em *Power Point* foi explorado o significado de simetria, seus eixos e principais tipos (reflexão, translação e rotação). Depois, foram explorados alguns exemplos como exercício.

Os *slides* apresentados aos alunos foram:

Figura 3.1: Apresentação PowerPoint - Slide 1



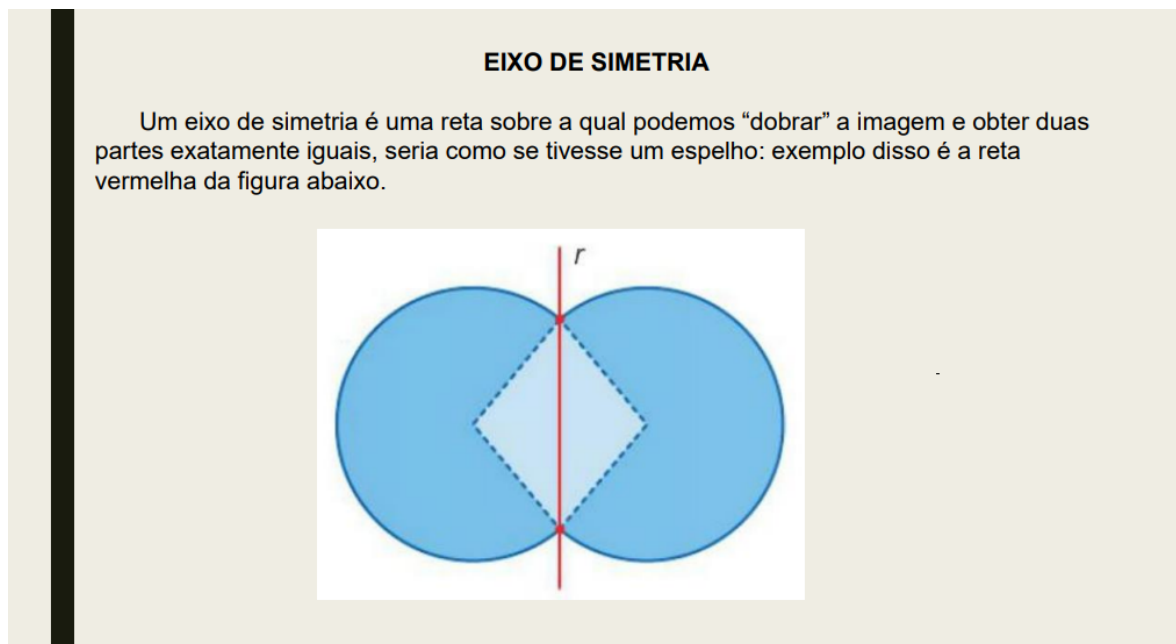
Fonte da figura: Isometrias - Translação, Rotação Reflexão - [ISIDORO, p. 13]

Figura 3.2: Apresentação PowerPoint - Slide 2



Fonte da figura: A conquista da matemática - 7º ano - [JÚNIOR et al. 2018, p. 86]

O slide 2 mostra quando uma figura ou imagem possui ou não simetria.

Figura 3.3: Apresentação PowerPoint - Slide 3

Fonte da figura: Simetrias de rotação.pdf - [ALVES 2013, p. 5]

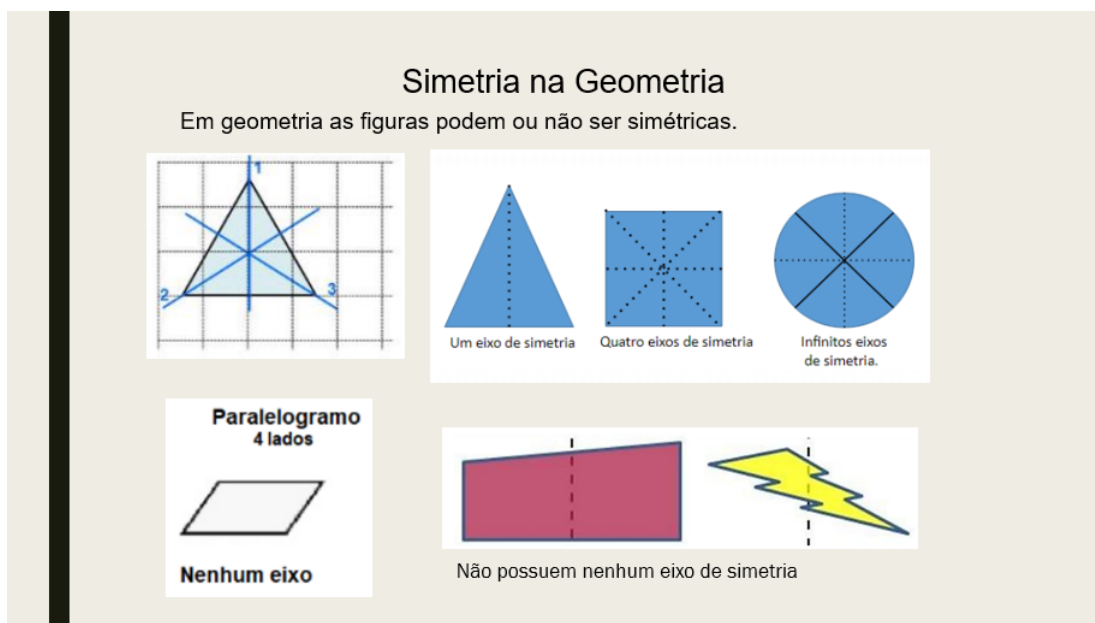
O *slide* 3 explica o que é eixo de simetria.

Figura 3.4: Apresentação PowerPoint - Slide 4

Fonte das imagens: Aula Paraná - Trilhas da Aprendizagem 7º ano - [PARANÁ 2020, p. 6]

O *slide* 4 mostra alguns exemplos de simetria na arquitetura.

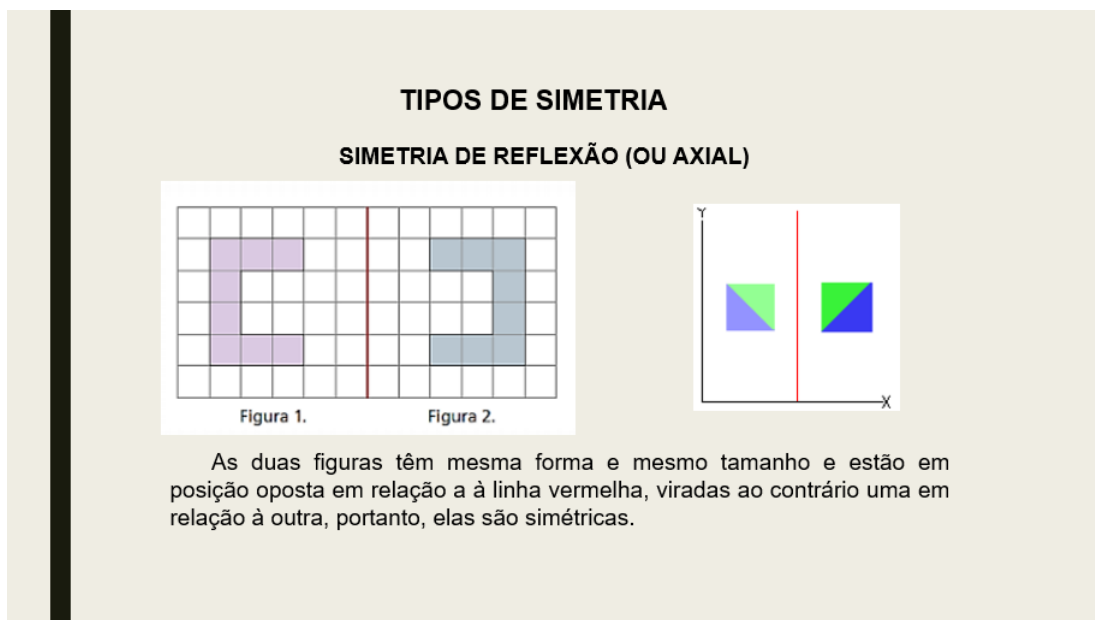
Figura 3.5: Apresentação PowerPoint - Slide 5



Fonte das imagens: Aula Paraná - Trilhas da Aprendizagem 7º ano - [PARANÁ 2020, p. 6-7]
SIMETRIA - Figuras Para Recortar e Dobrar - [www.tudoparaoprofessor.com/atividades]

O slide 5 mostra figuras geométricas que possuem ou não simetria.

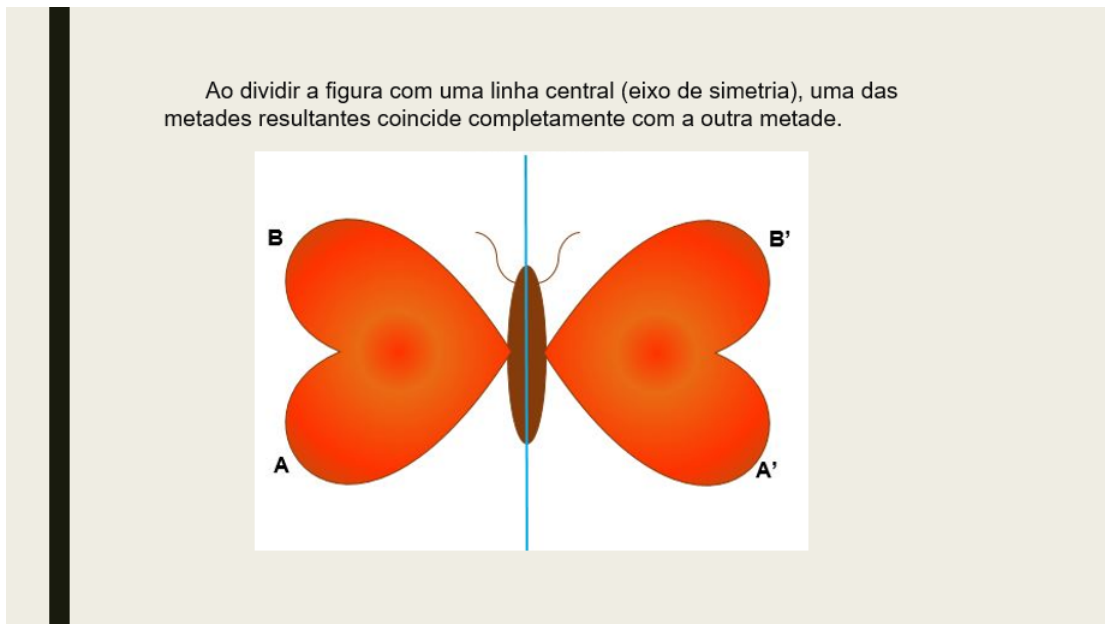
Figura 3.6: Apresentação PowerPoint - Slide 6



Fonte das imagens: A conquista da matemática - 7º ano - [JÚNIOR et al. 2018, p. 87]
Transformações do Plano - Módulo I - Capítulo II - [UFRJ]

O slide 6 mostra o que é a simetria de reflexão.

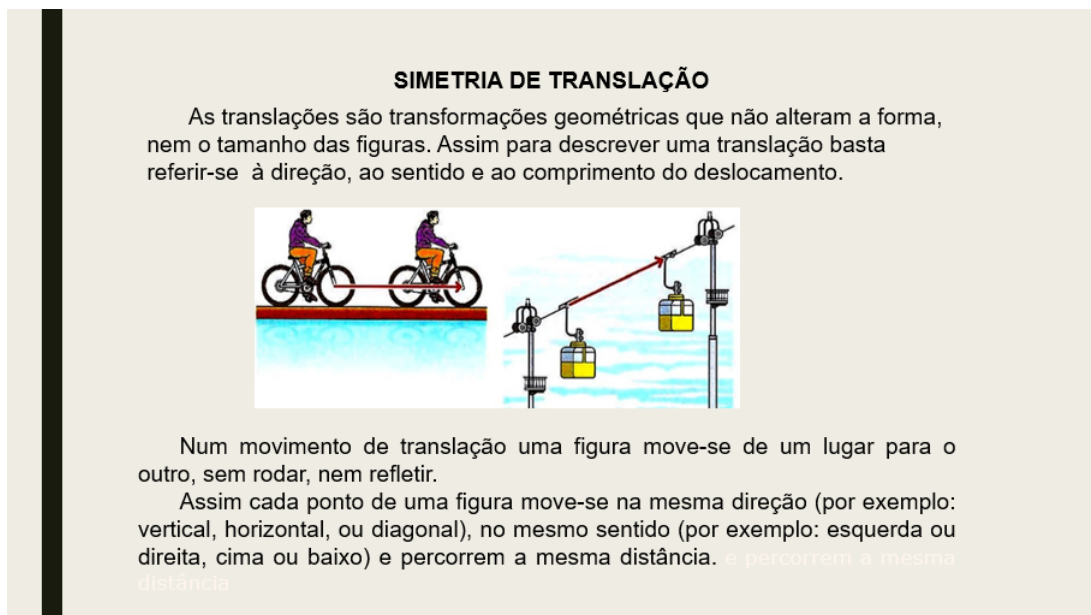
Figura 3.7: Apresentação PowerPoint - Slide 7



Fonte da imagem: Transformações isométricas: composição, tipos e exemplos - [MAESTROVIRTUALE.COM]

O *slide 7* mostra uma figura e o seu eixo de simetria.

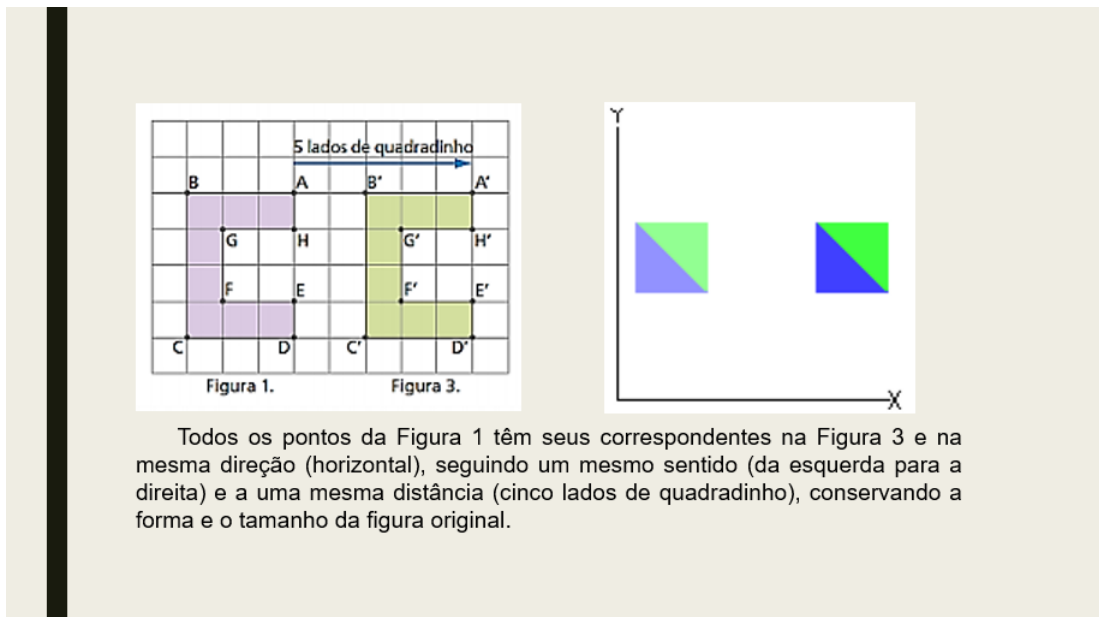
Figura 3.8: Apresentação PowerPoint - Slide 8



Fonte das imagens: Transformações Geométricas - [LARANJO]

Os *slides 8 e 9* mostram o que é a simetria de translação e alguns exemplos.

Figura 3.9: Apresentação PowerPoint - Slide 9



Fonte das imagens: A conquista da matemática - 7º ano - [JÚNIOR et al. 2018, p. 88]
 Transformações do Plano - Módulo I - Capítulo II - [UFRJ]

Figura 3.10: Apresentação PowerPoint - Slide 10

SIMETRIA DE ROTAÇÃO

Numa rotação a figura inicial vai rodando em diferentes ângulos à volta de um ponto fixo, o **centro de rotação**. Esta pode ser positiva, quando se move ao contrário do sentido dos ponteiros do relógio, ou negativa, quando se move no mesmo sentido dos ponteiros dos relógios.


O ponto O é o centro da rotação.

Sentido positivo é o sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

Sentido negativo é o sentido do movimento dos ponteiros do relógio.

Fonte das imagens: Transformações Geométricas - [LARANJO]

Os slides 10, 11 e 12 mostram o que é a simetria de rotação, o que é ângulo de rotação e alguns exemplos.

Figura 3.11: Apresentação PowerPoint - Slide 11

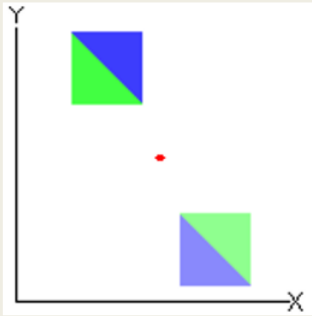
Podemos observar que as duas imagens podem ser sobrepostas de maneira que elas coincidam, embora não tenhamos simetria de reflexão e nem simetria de translação.

Dizemos que as duas figuras são simétricas e que entre elas foi realizado o movimento de rotação.

Fonte da imagem: A conquista da matemática - 7º ano - [JÚNIOR et al. 2018, p. 89]

Figura 3.12: Apresentação PowerPoint - Slide 12

A **rotação** é o "giro" de uma forma ao redor de um ponto chamado **centro de rotação**. A distância ao centro de rotação se mantém constante e a medida do giro é chamada **ângulo de rotação**.



Fonte da imagem: Transformações do Plano - Módulo I - Capítulo II - [UFRJ]

Figura 3.13: Apresentação PowerPoint - Slide 13

Então podemos concluir que:

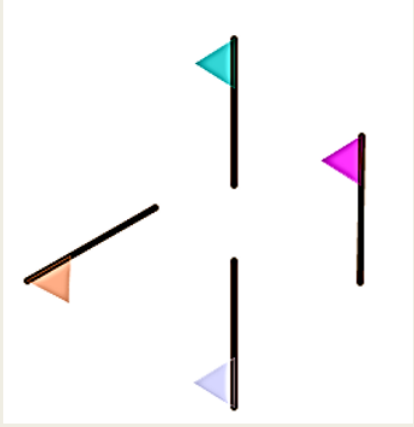
- ❖ Toda figura que apresenta simetria possui pelo menos uma linha chamada **eixo de simetria** da figura.
- ❖ Nem todas as figuras geométricas apresentam simetria sendo chamadas **assimétricas**.
- ❖ Em todos os polígonos regulares o número de eixos de simetria é igual ao número de lados desse polígono.
- ❖ Os tipos de simetria são: **simetria de reflexão**, **simetria de translação** e **simetria de rotação**.

Fonte: Elaborada pela autora

O *slide* 13 apresenta algumas conclusões sobre simetria.

Figura 3.14: Apresentação PowerPoint - Slide 14

Exemplos

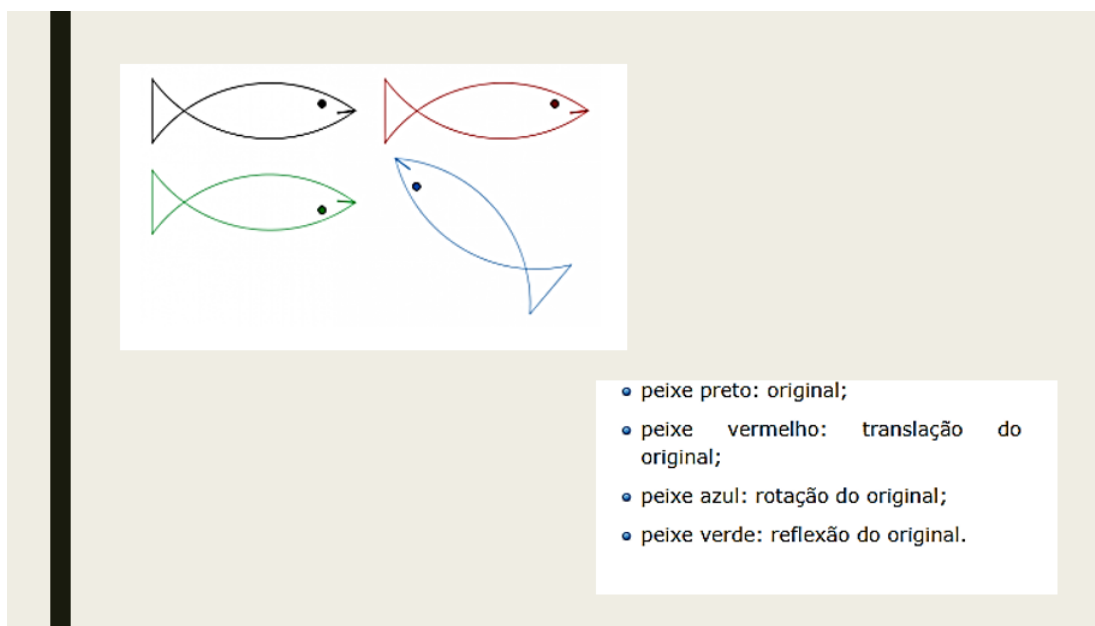


- bandeirinha azul: original;
- bandeirinha rosa: translação da original;
- bandeirinha lilás: reflexão da original;
- bandeirinha laranja: rotação da original.

Fonte: Isometrias e simetrias - [OBMEP]

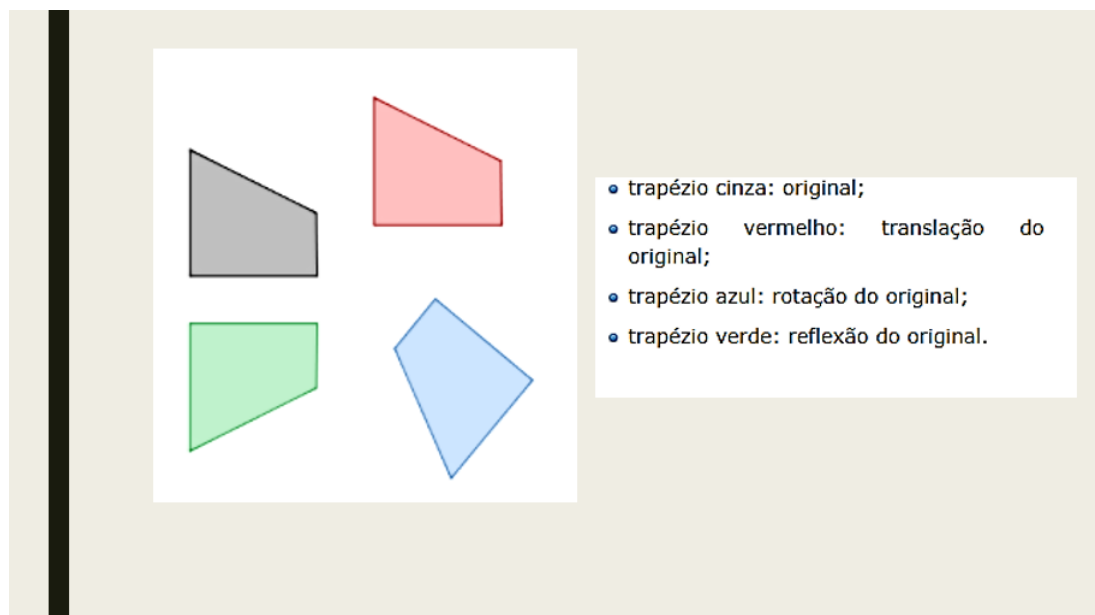
Nos exemplos dos *slides* 14, 15 e 16, temos os três tipos de simetria estudados.

Figura 3.15: Apresentação PowerPoint - Slide 15



Fonte: Isometrias e simetrias - [OBMEP]

Figura 3.16: Apresentação PowerPoint - Slide 16



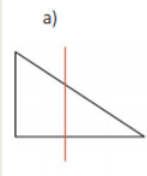

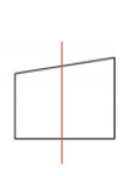
Fonte: Isometrias e simetrias - [OBMEP]

Os slides 17, 18 e 19 apresentam alguns exemplos resolvidos oralmente pelos alunos durante a aula.

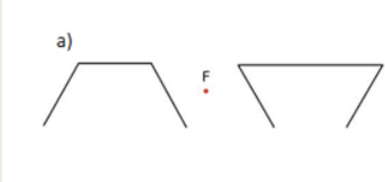
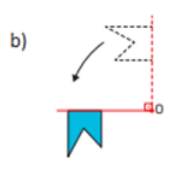
Figura 3.17: Apresentação PowerPoint - Slide 17

Exemplos:

1) Identifique as figuras em que o segmento traçado em vermelho corresponde ao eixo de simetria.

a)  b)  c) 

2) Qual imagem sofreu uma rotação de 90° em torno do ponto F?

a)  b) 

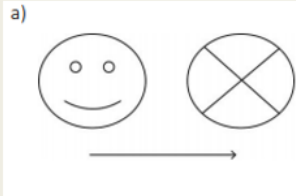
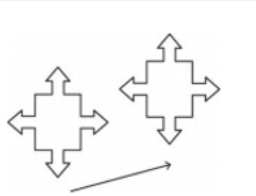
Fontes: Exemplo 1: Matemática Essencial - 8º Ano - Sequência didática 5 - [PATARO e BALESTRI]

Exemplo 2a) Matemática Essencial - 8º Ano - Sequência didática 5 - [PATARO e BALESTRI]

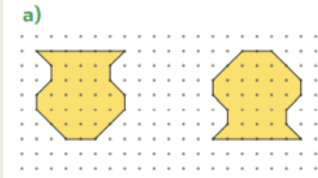
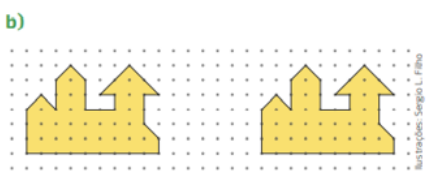
Exemplo 2b) Matemática Essencial - 8º ano - [PATARO e BALESTRI 2018, p. 100]

Figura 3.18: Apresentação PowerPoint - Slide 18

3) Em qual item uma figura foi obtida pela translação da outra ao longo da seta indicada?

a)  b) 

4) Em qual item são apresentadas figuras simétricas por translação?

a)  b) 


Fontes: Exemplo 3: Matemática Essencial - 8º Ano - Sequência didática 5 [PATARO e BALESTRI]

Exemplo 4: Matemática Essencial - 7º ano - [PATARO e BALESTRI 2018, p. 235]

Figura 3.19: Apresentação PowerPoint - Slide 19

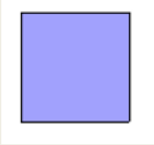
5) Considere um triângulo isósceles, ele é considerado simétrico. Quantos eixos de simetria é possível identificar?

a) 5.
b) 3.
c) 1.
d) 2.



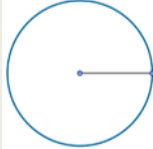
6) O quadrado é uma figura que possui eixo de simetria (é simétrica) ou não possui eixo de simetria (é assimétrica)?

A () Simétrica
B () Assimétrica



7) Um círculo permite desenhar quantos eixos de simetria?

a) 5.
b) 3.
c) 1.
d) 2.
e) infinitos.



Fonte das figuras: Elaboradas pela autora

2ª Etapa

Ao final da segunda aula, ainda através do aplicativo *GoogleMeet* foi mostrada e explicada cada questão da folha de atividades que os alunos deveriam responder para verificar se haviam entendido e compreendido os conceitos de rotação, translação e reflexão. Para resolverem as questões, deveriam imprimir a folha de atividades ou copia-las. Após resolvida, deveriam enviá-la através dos aplicativos *Classroom* ou *WhatsApp* para análise.

Esta foi uma das partes mais difíceis da realização do projeto, já que dependia do aluno possuir ou não impressora. Para a realização das atividades propostas, a folha de atividades deveria ser impressa ou, para aqueles que não tivessem condição de imprimir, poderia ser respondida no caderno, desde que as figuras necessárias fossem copiadas para a resposta. As atividades propostas encontram-se detalhadas no capítulo 4.

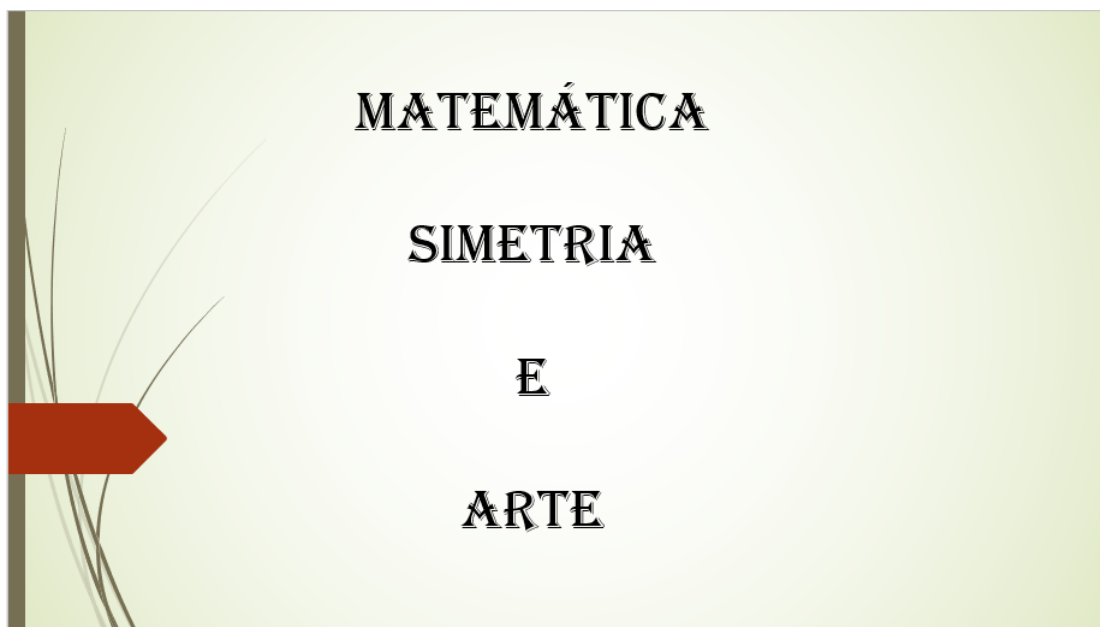
3ª Etapa

Nesta etapa, a aula também através do aplicativo *Google Meet*, por meio de uma apresentação em *PowerPoint* para mostrar algumas obras de arte onde o conceito de simetria poderia ser encontrado. A cada obra apresentada procurava-se descobrir as simetrias presentes. Os alunos apreciaram olhar os quadros sob a perspectiva da matemática. Até a professora da turma con-

fessou que nunca havia parado para analisar obras de arte dessa forma.

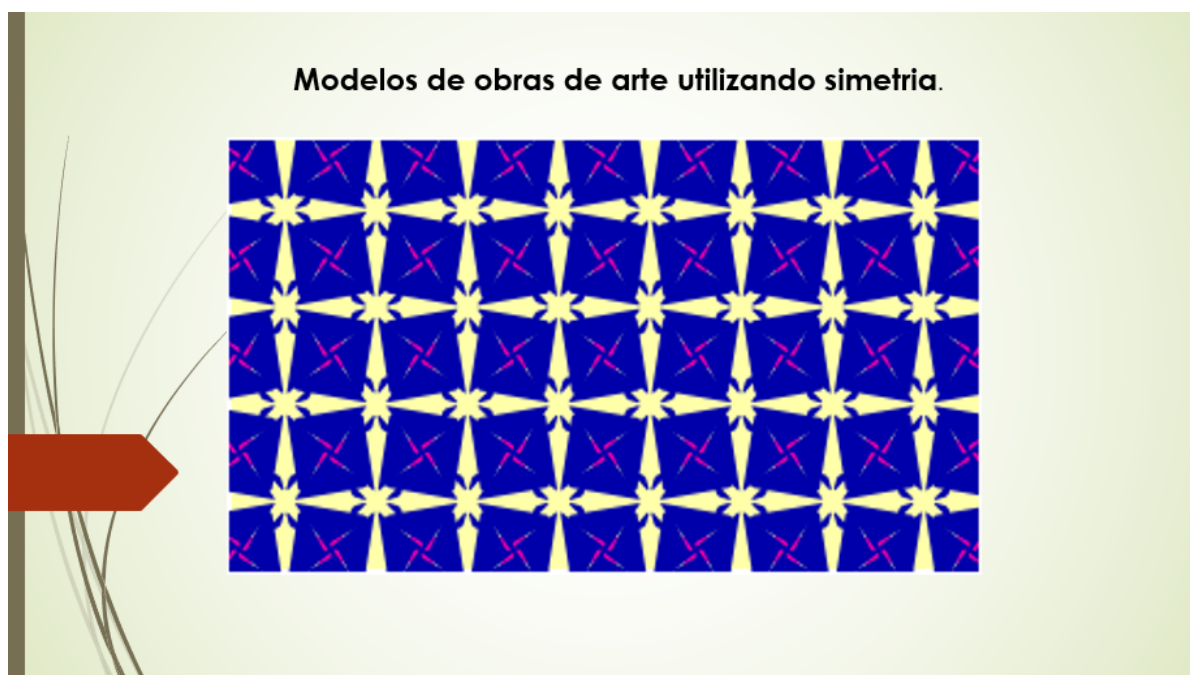
Os *slides* apresentados aos alunos foram:

Figura 3.20: Apresentação PowerPoint - Slide 1



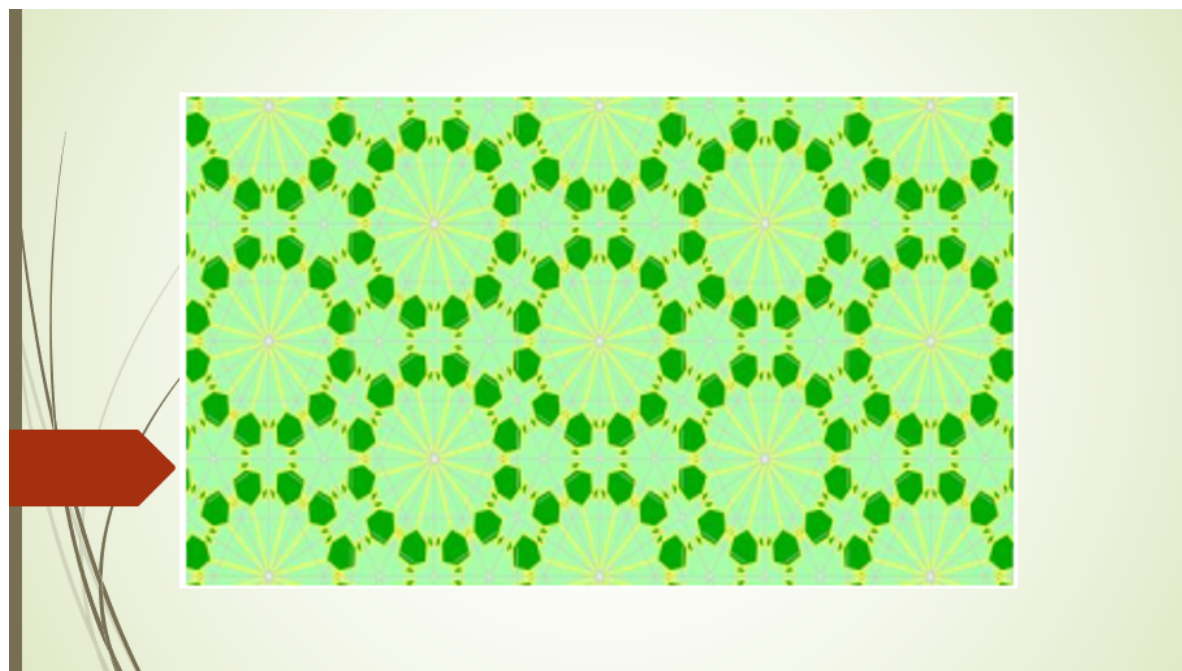
Fonte: Elaborada pela autora

Figura 3.21: Apresentação PowerPoint - Slide 2



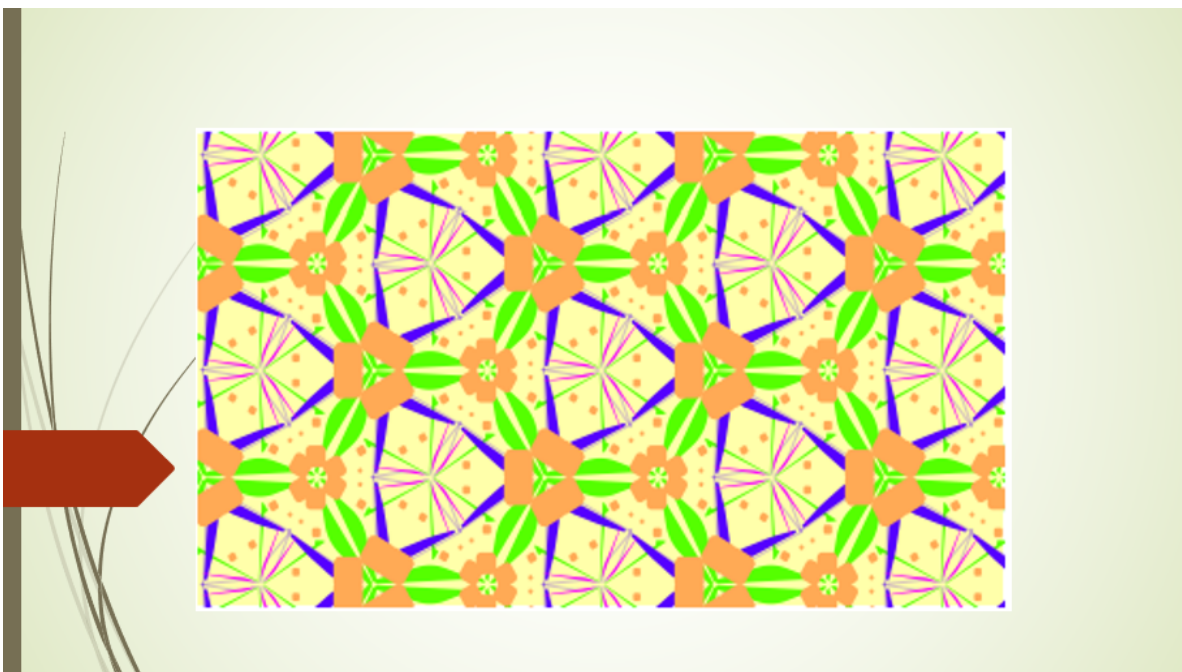
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 2]

Figura 3.22: Apresentação PowerPoint - Slide 3



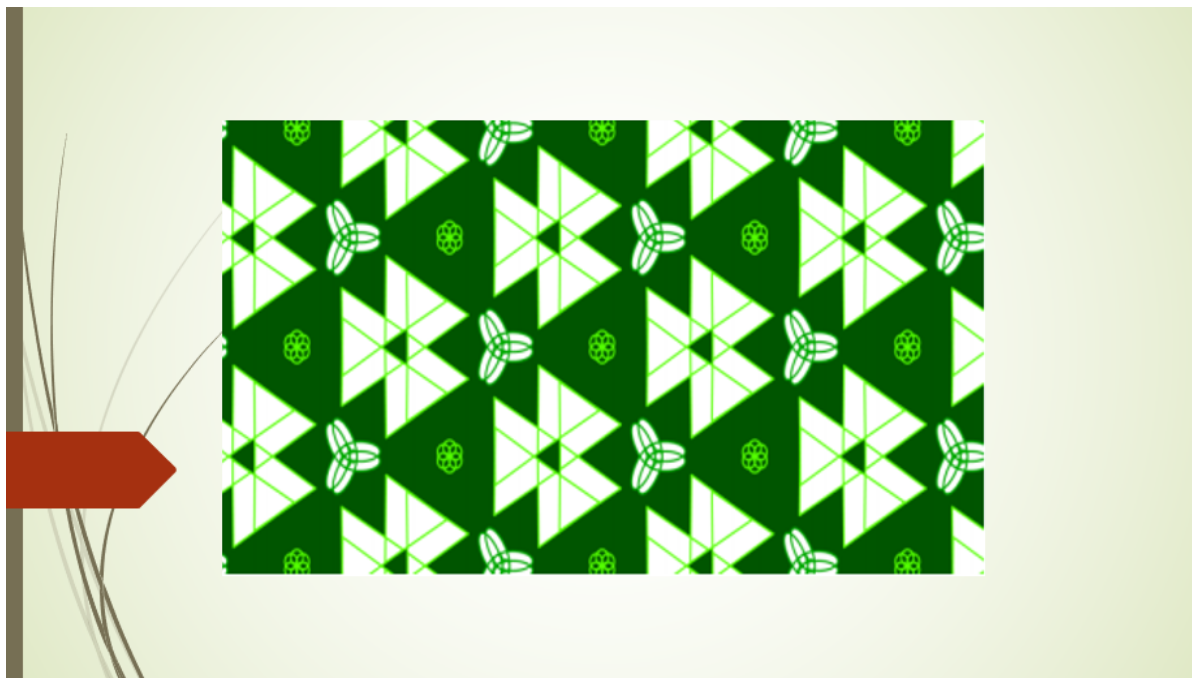
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 3]

Figura 3.23: Apresentação PowerPoint - Slide 4



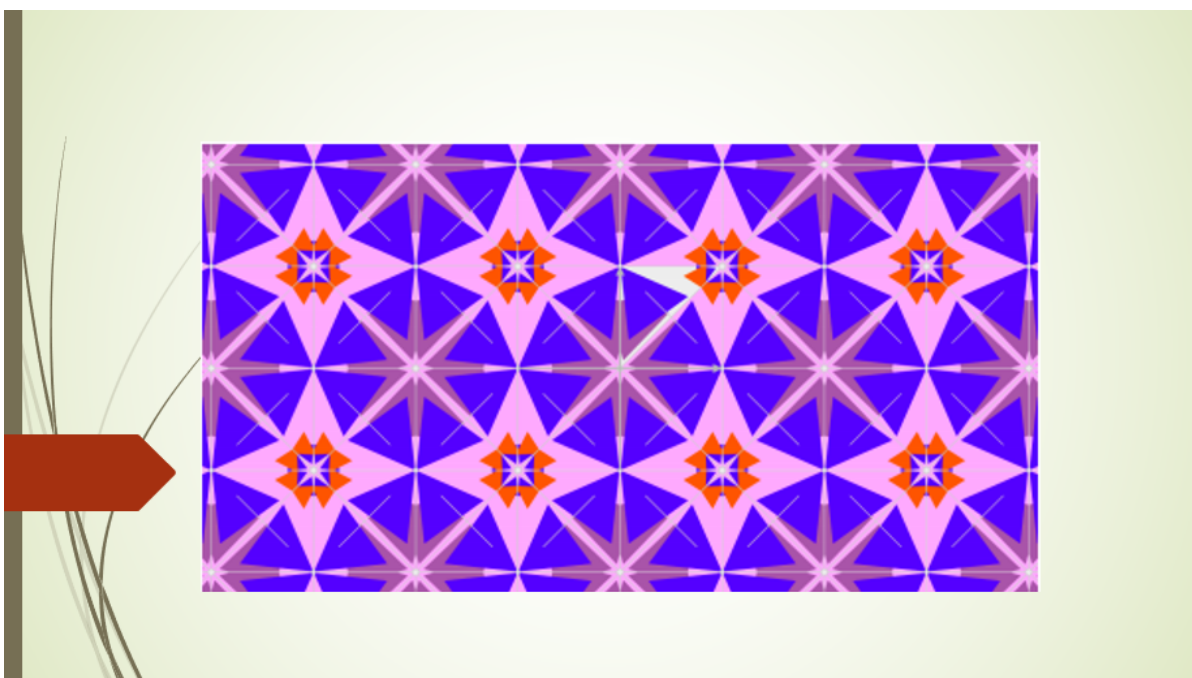
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 3]

Figura 3.24: Apresentação PowerPoint - Slide 5



Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 3]

Figura 3.25: Apresentação PowerPoint - Slide 6



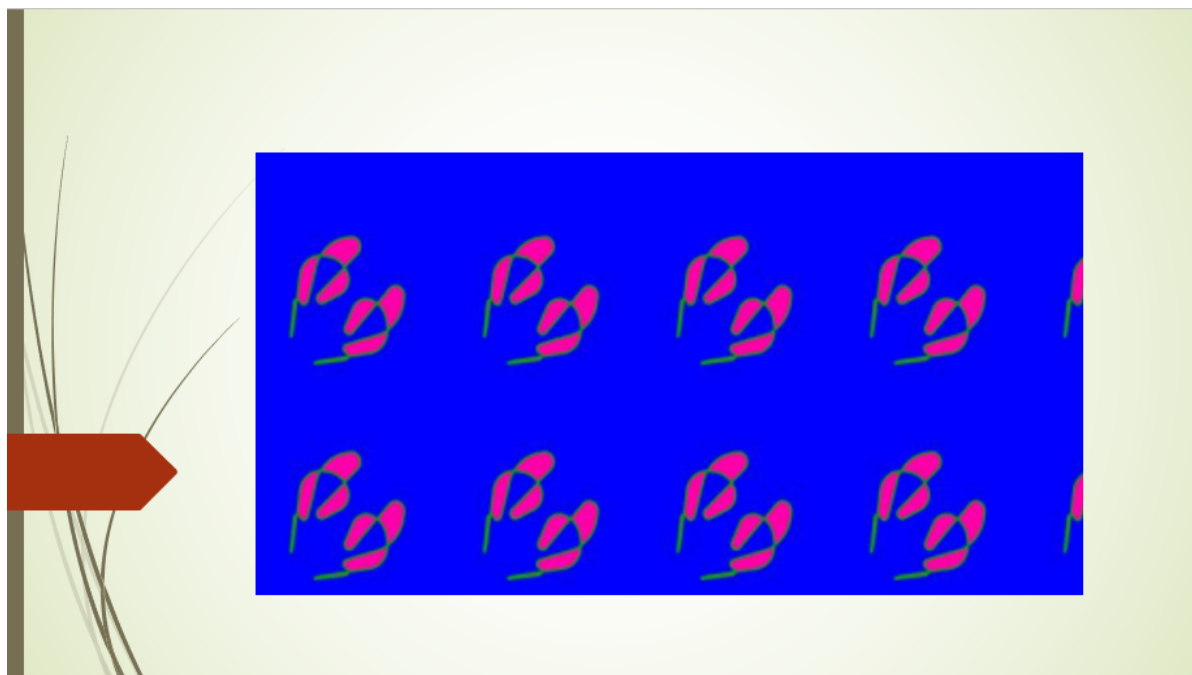
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 4]

Figura 3.26: Apresentação PowerPoint - Slide 7



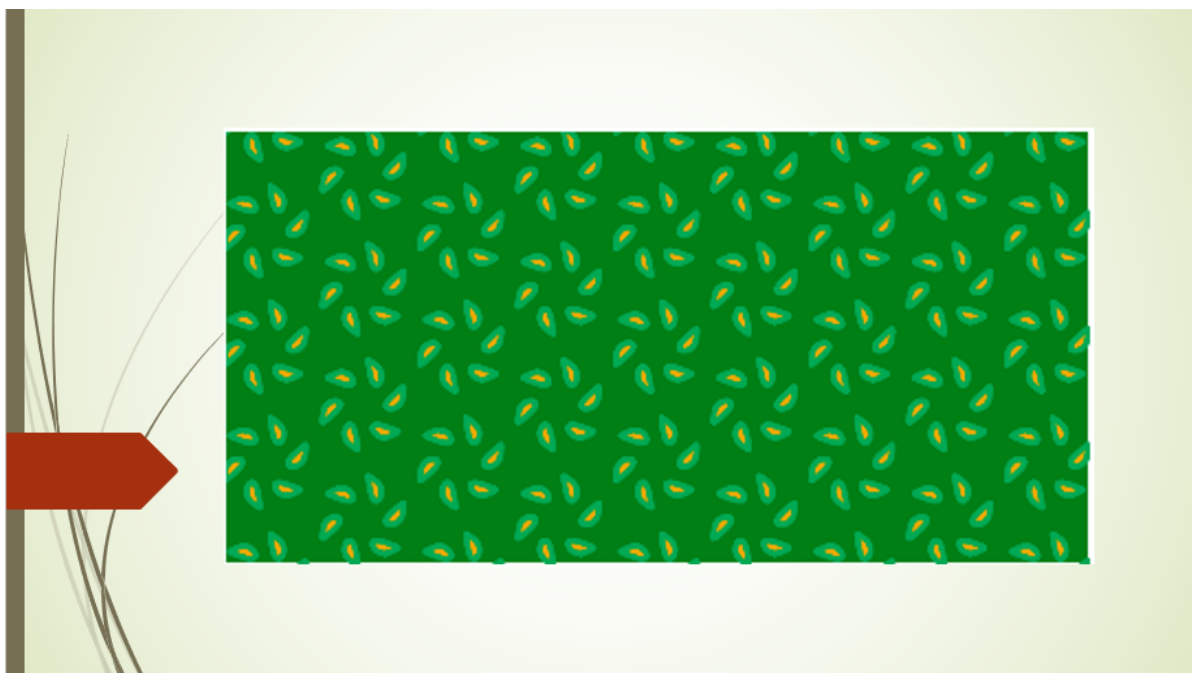
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 4]

Figura 3.27: Apresentação PowerPoint - Slide 8



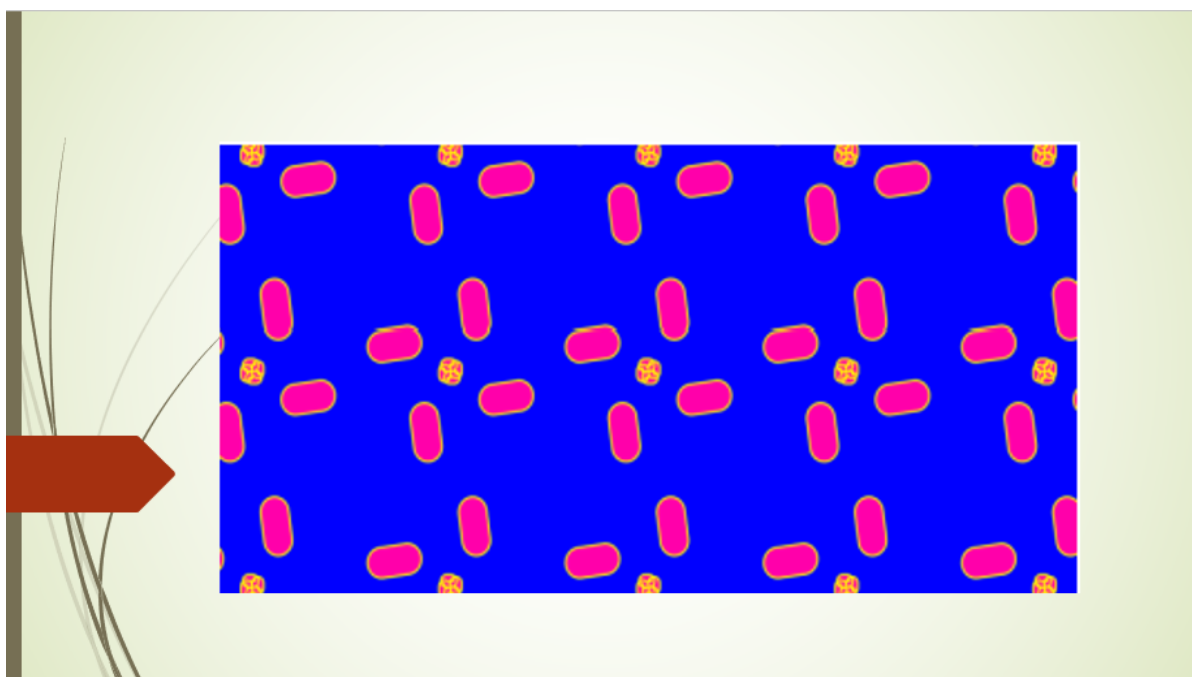
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 4]

Figura 3.28: Apresentação *PowerPoint* - Slide 9



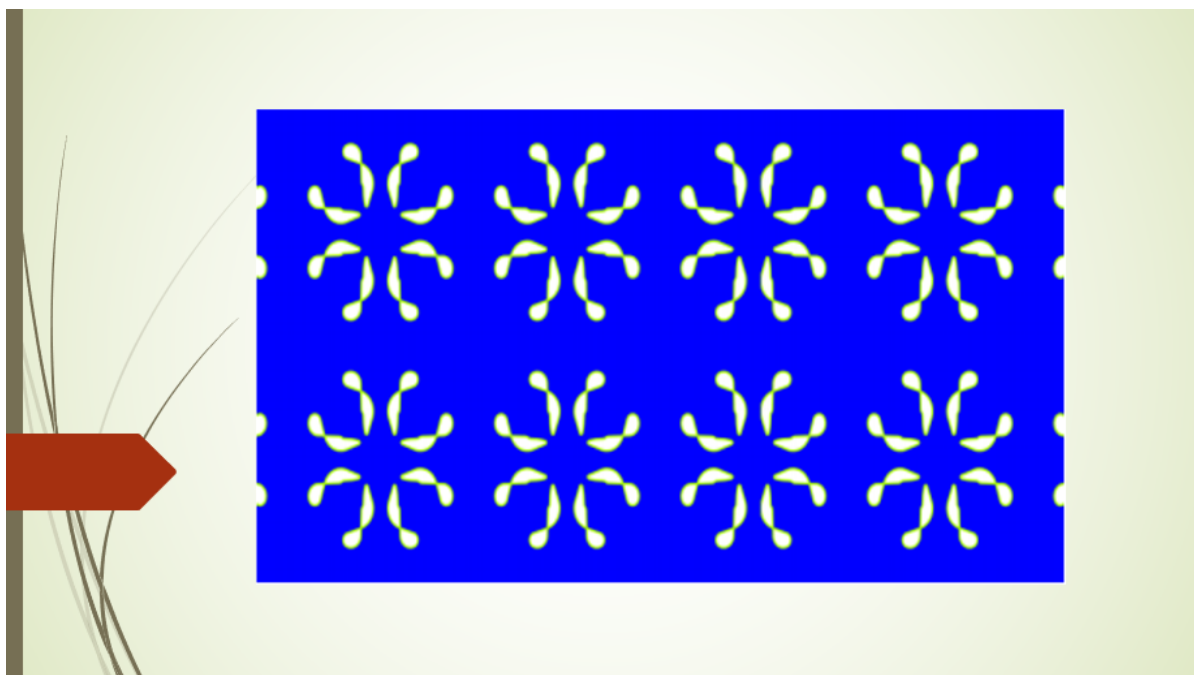
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 5]

Figura 3.29: Apresentação *PowerPoint* - Slide 10



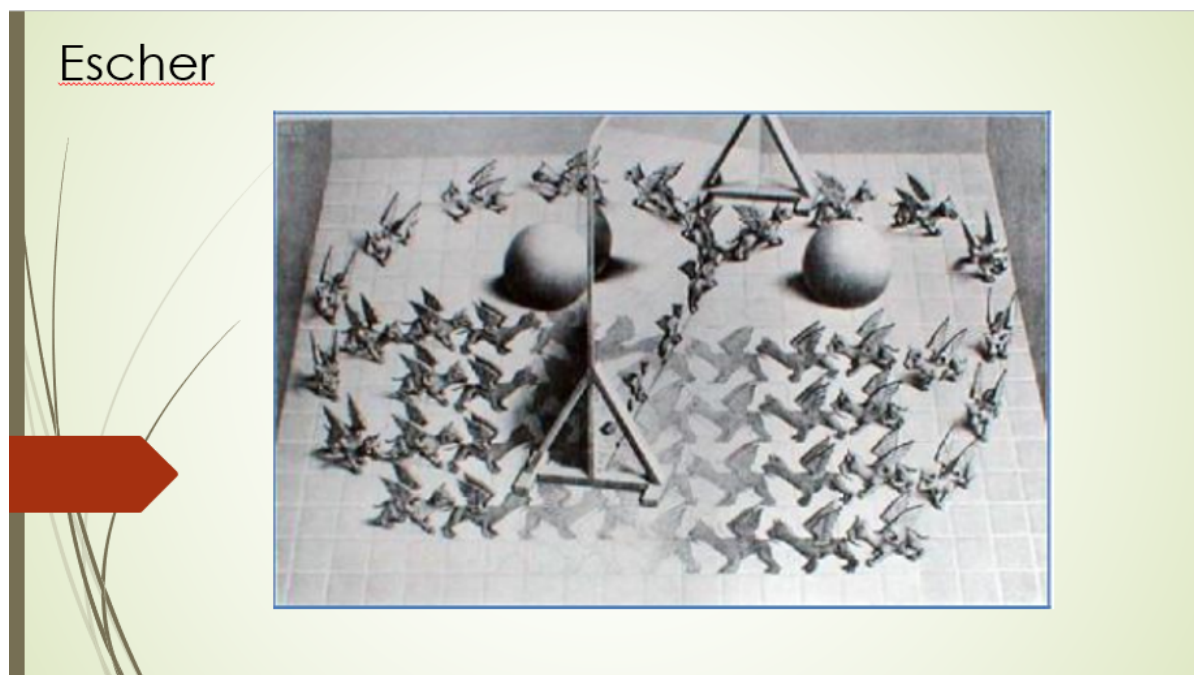
Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 5]

Figura 3.30: Apresentação *PowerPoint* - Slide 11



Fonte: Caderno de atividades - [NOGUEIRA 2014, p. 5]

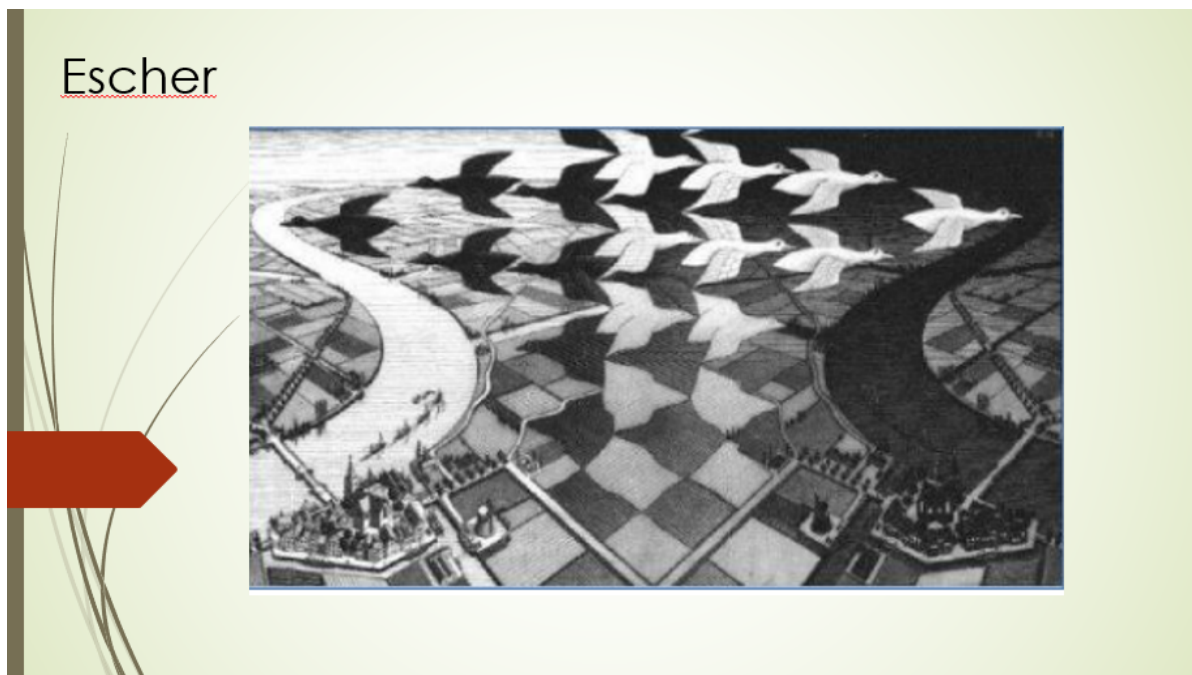
Figura 3.31: Apresentação *PowerPoint* - Slide 12



Obra de arte: Magic Mirror (1946) - Escher - Disponível em:

<https://www.designculture.com.br/escheresque-o-design-da-confusao-no-monument-valley/magic-mirror-1946/>

Figura 3.32: Apresentação PowerPoint - Slide 13



Obra de arte : Dia e Noite (1938) - Escher - Disponível em:
<https://pt.artsdot.com/@/5ZKD2N-Maurits-Cornelis-Escher-dia-e-noite>

Figura 3.33: Apresentação PowerPoint - Slide 14



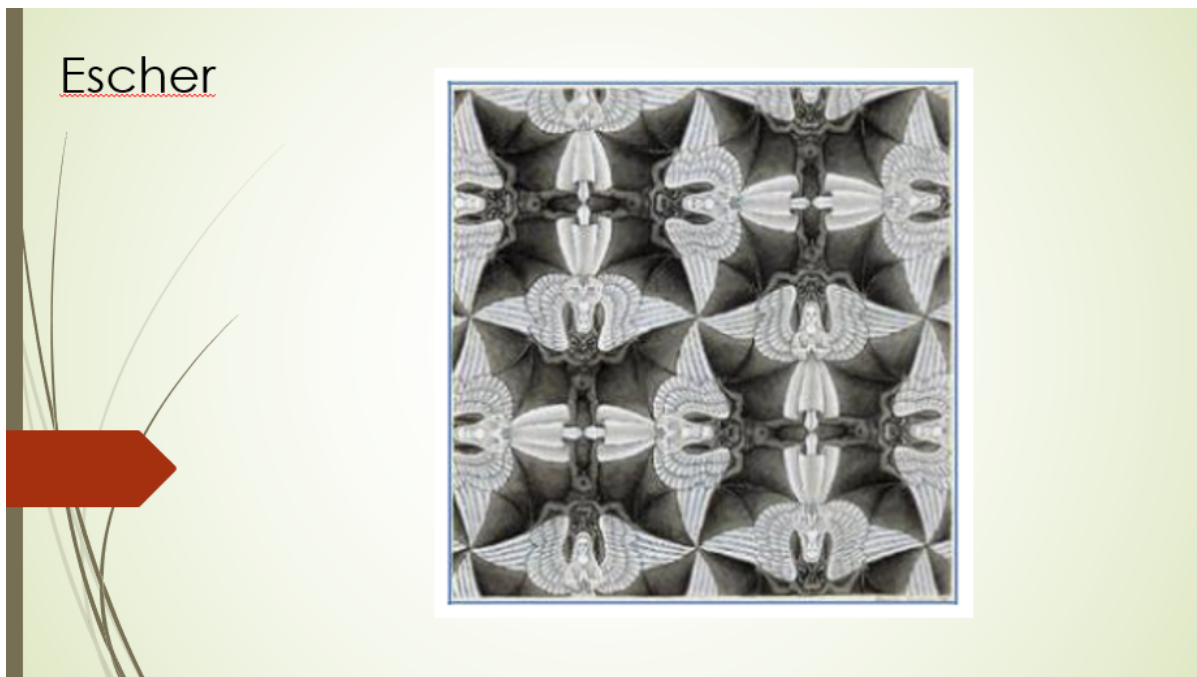
Obra de arte: Céu e Água (1938) - Escher - Disponível em:
<https://www.saiacomarte.com/obra/ceu-e-agua/>

Figura 3.34: Apresentação PowerPoint - Slide 15



Obra de arte: Bird-Fish (1938) - Escher - Disponível em:
<https://www.pleacher.com/mp/escher/fishbird.jpg>

Figura 3.35: Apresentação PowerPoint - Slide 16



Obra de arte: Angel-Devil (1941) - Escher - Disponível em:
<https://drsilverfish.tumblr.com/post/98616195854/mc-escher-angels-and-devils-1941-hi-everyone>

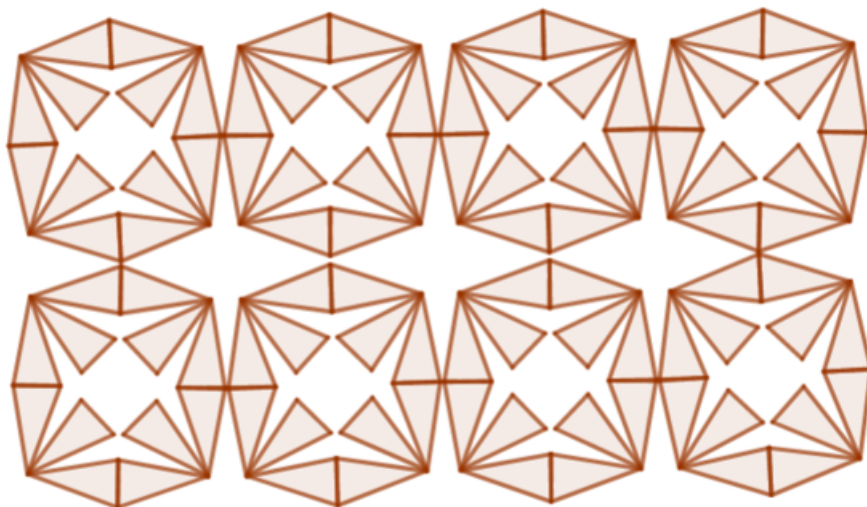
Já na quarta aula, foram elaboradas pequenas obras de arte utilizando os conceitos aprendidos. Para isso, foi mostrado como fazer uma pequena obra de arte, bastante simples, utilizando o *software Paint 3D*, o *GeoGebra* para computador, o *GeoGebra* para *Android* e recortes de papel de presente, conforme os exemplos das Figuras 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40, 3.41, 3.42 e 3.43.

Figura 3.36: Exemplo 1 - Construído no GeoGebra.



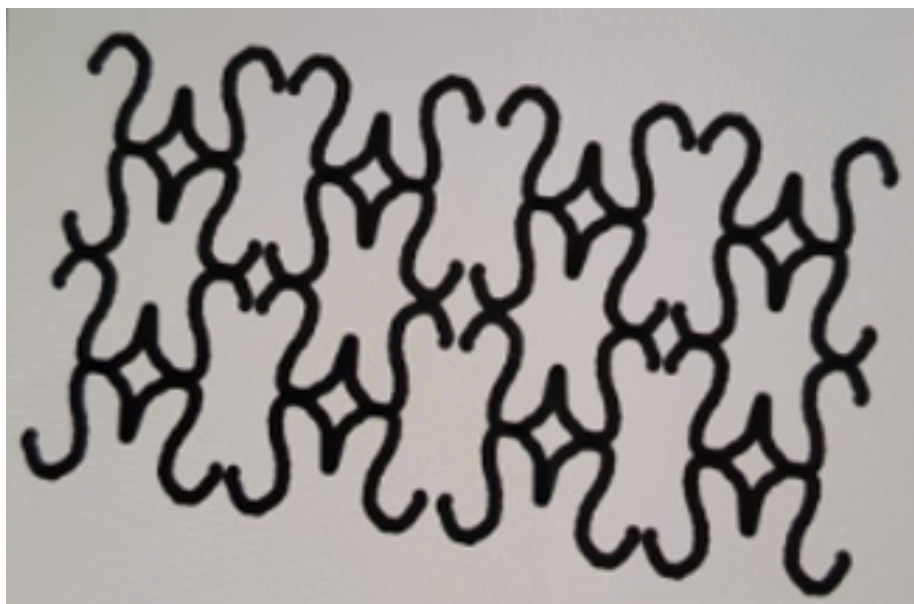
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.37: Exemplo 2 - Construído no GeoGebra.



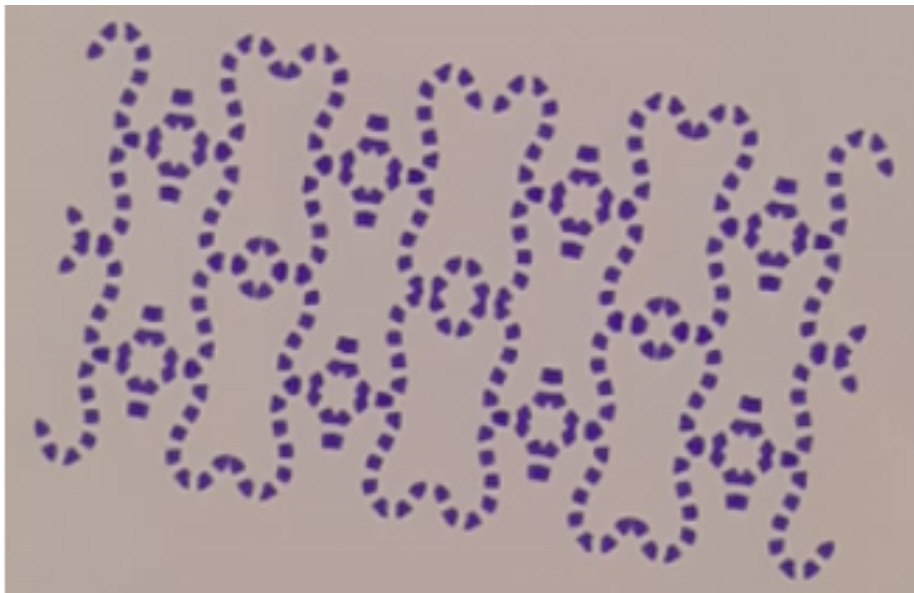
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.38: Exemplo 1 - Construído no GeoGebra para Android.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.39: Exemplo 2 - Construído no GeoGebra para Android.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.40: Exemplo 1 - Construído no Paint 3D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.41: Exemplo 2 - Construído no Paint 3D.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.42: Exemplo 1 - Produzido com recorte de papel de presente.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3.43: Exemplo 2 - Produzido com recorte de papel de presente.



Fonte: Elaborado pela autora.

4ª Etapa

Na última etapa da pesquisa, os alunos deveriam criar pequenas obras de artes utilizando os conceitos de simetria. Para isso, os alunos poderiam utilizar os aplicativos: *GeoGebra*, o *GeoGebra* para *Android*, o *Paint 3D* ou fazer a sua obra com recortes de papel ou simplesmente utilizar papel e lápis. As obras criadas pelos alunos estão apresentadas no capítulo 4.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O presente trabalho buscou verificar se é possível, num período de pandemia e aulas virtuais, ensinar o conteúdo de simetrias de forma simples mostrando que o tema pode ser encontrado, na vida cotidiana, e também em obras de arte.

A seguir vamos analisar as atividades propostas e fazer o levantamento dos resultados obtidos.

Atividade 1:

1) Figuras com alguma simetria estão constantemente aparecendo ao nosso redor. Elas podem ser percebidas no espelho, em algumas flores, em uma toalha de mesa. Sabemos que duas figuras são simétricas por reflexão quando existe um espelho entre elas e todos os pontos simétricos estão equidistantes ao espelho. Nestas condições, a única figura que se encaixa na descrição acima é:

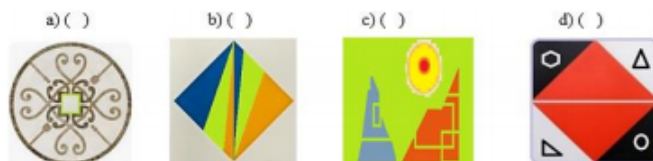


Figura 4.1: Atividade 1 - Simetria.

Fonte: MATEMÁTICA-8ºano-quinzena5-semester2.pdf - Período de 28/09 a 02/10 - Questão 4. [MEDEIROS 2020]

Buscava-se, nessa atividade, verificar se os alunos haviam entendido o conceito de reflexão e conseguiam identificá-lo nas figuras dadas. Todos os alunos que enviaram as atividades responderam corretamente essa questão, conforme a Figura 4.2.

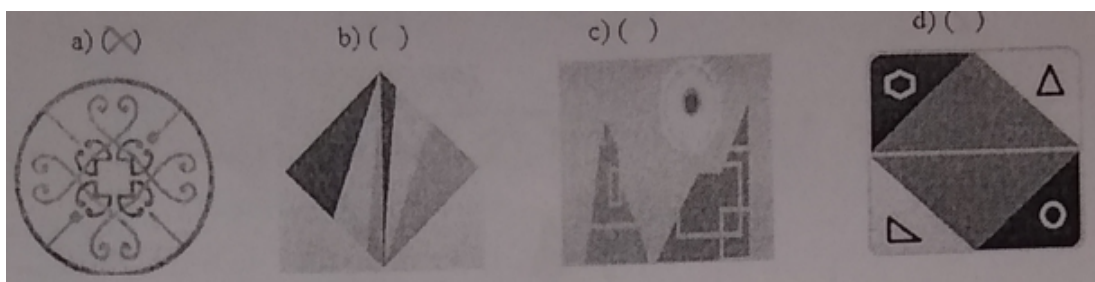
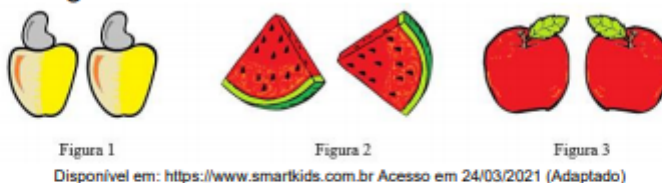


Figura 4.2: Atividade 1 - Aluno A.

Atividade 2:

2) Observe as figuras a seguir.



Considerando as figuras 1, 2 e 3 podemos dizer que as transformações ocorridas foram:

- a) Rotação, Translação e Reflexão.
- b) Translação, Reflexão e Rotação.
- c) Translação, Rotação e Reflexão.
- d) Reflexão, Rotação e Translação.

Figura 4.3: Atividade 2 - Simetria.

Fonte: MATEMÁTICA-8ºano-quinzena5-semester2.pdf - Período de 28/09 a 02/10 - Questão 3. [MEDEIROS 2020]

Nessa atividade, queríamos verificar se os alunos sabiam identificar os tipos de simetrias. Dos alunos que enviaram as atividades, somente um respondeu errado à questão. A resposta incorreta pode ser observada na Figura 4.4.

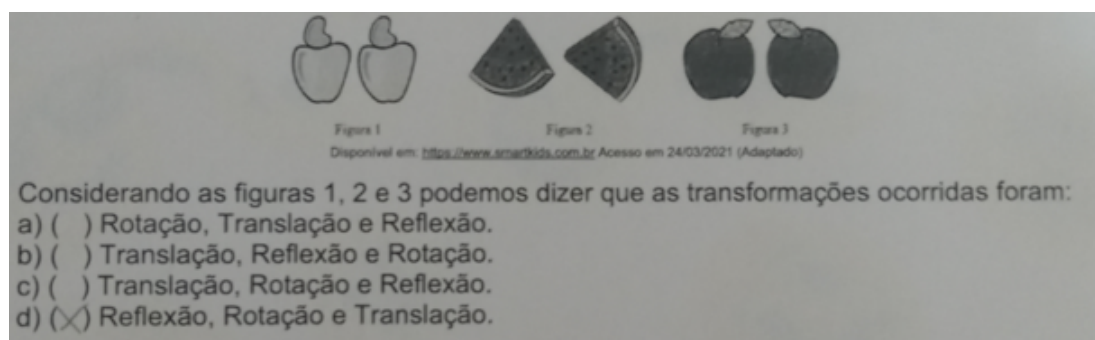


Figura 4.4: Atividade 2 - Aluno E.

Todos os outros responderam como o aluno C (Figura 4.5).

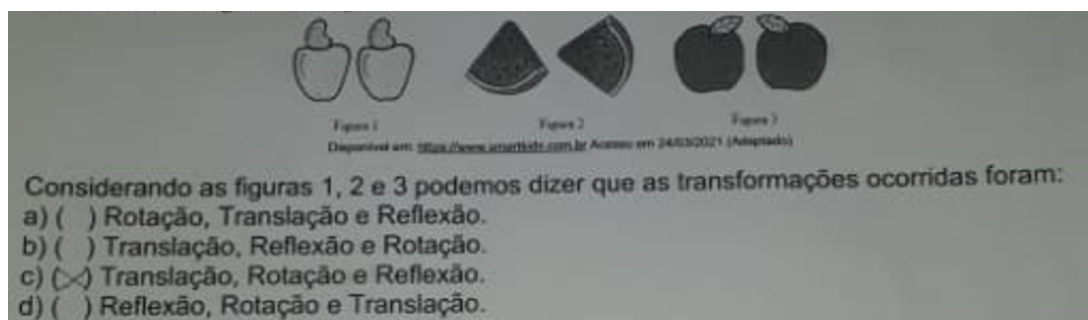


Figura 4.5: Atividade 2 - Aluno C.

Atividade 3:

3) Observe a figura na malha quadriculada a seguir. Desenhe no quadrante correspondente a reflexão dessa figura em relação aos eixos coordenados.

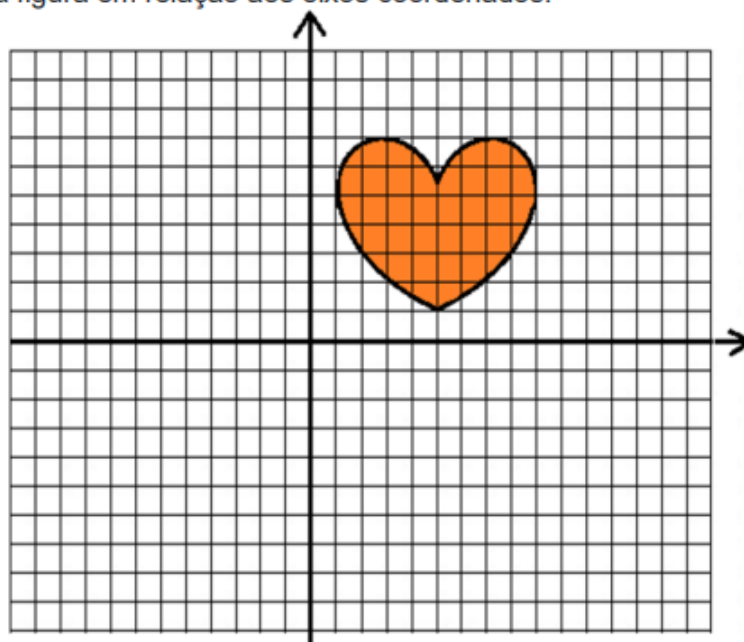


Figura 4.6: Atividade 3 - Simetria.

Fonte: MATEMÁTICA-8ºano-quinzena5-semester2.pdf - Período de 05/10 a 09/10 - Questão 1. [MEDEIROS 2020]

Nessa questão, queríamos verificar se os alunos conseguiam fazer a reflexão de uma figura em relação aos eixos coordenados. Somente dois alunos responderam corretamente à questão. As respostas corretas dos alunos C e F podem ser observadas nas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente.

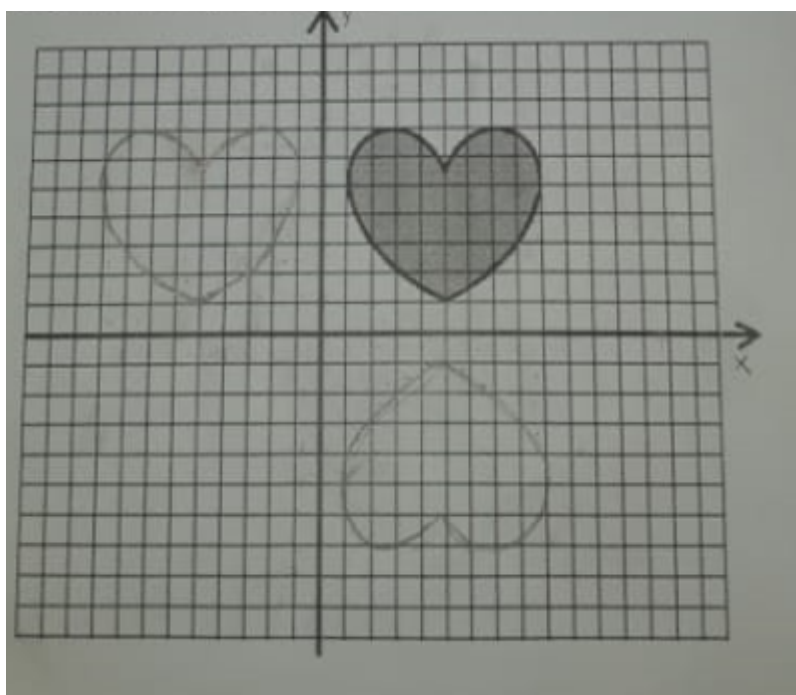


Figura 4.7: Atividade 3 - Aluno C.

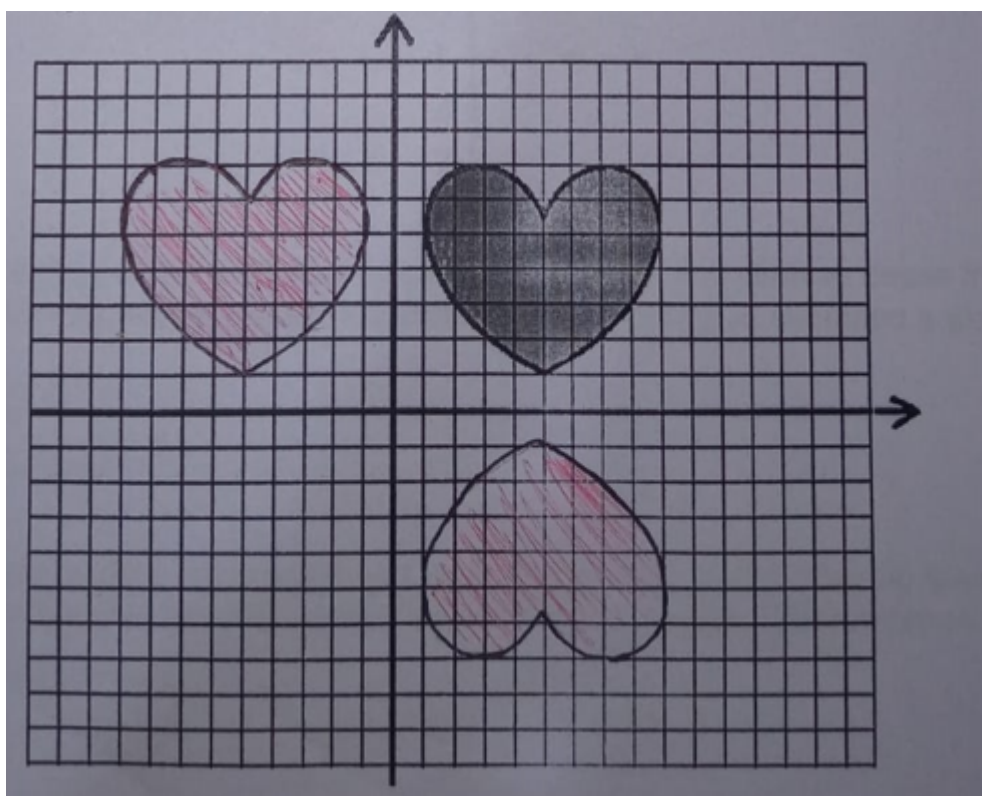


Figura 4.8: Atividade 3 - Aluno F.

A maioria dos alunos fez a reflexão somente em relação a um dos eixos, e não aos dois, conforme a resposta do aluno E na Figura 4.9.

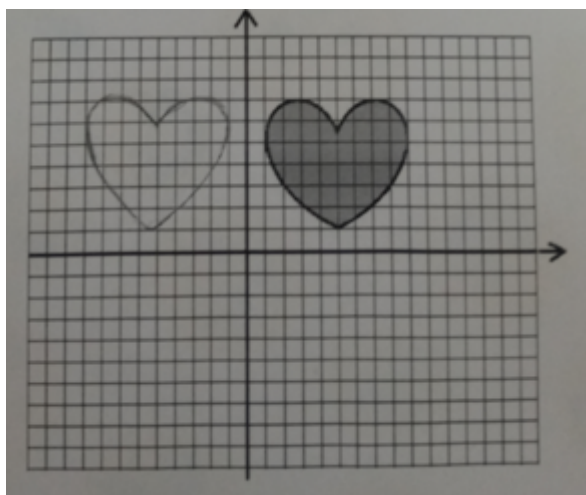


Figura 4.9: Atividade 3 - Aluno E.

Verificamos ainda que alguns alunos confundiram reflexão com translação, como na resposta do aluno A (Figura 4.10).

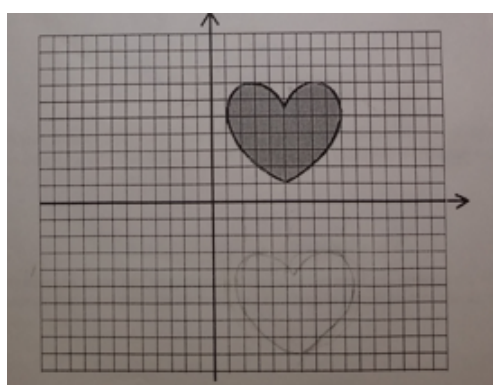


Figura 4.10: Atividade 3 - Aluno A.

Atividade 4:

4) Observe a figura.



Se ela sofrer um giro de 90° no sentido horário sua imagem será:



Figura 4.11: Atividade 4 - Simetria.

Fonte: aap-9-edio_caderno – do – professor_mat₇ – ano.pdf Questão11.

Disponível em: < [https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2019/05/aap-9-edio_caderno – do – professor_mat₇ – ano.pdf](https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2019/05/aap-9-edio_caderno-do-professor_mat7-ano.pdf) >. Acesso em 24/03/2021.

Na atividade 4, além de reconhecer uma rotação, o aluno ainda precisava saber dar um giro de 90° . Alguns alunos responderam corretamente, enquanto outros confundiram um giro de 90° com um giro de 180° .

As respostas corretas dos alunos A e D podem ser observadas nas Figuras 4.12 e 4.13, respectivamente.

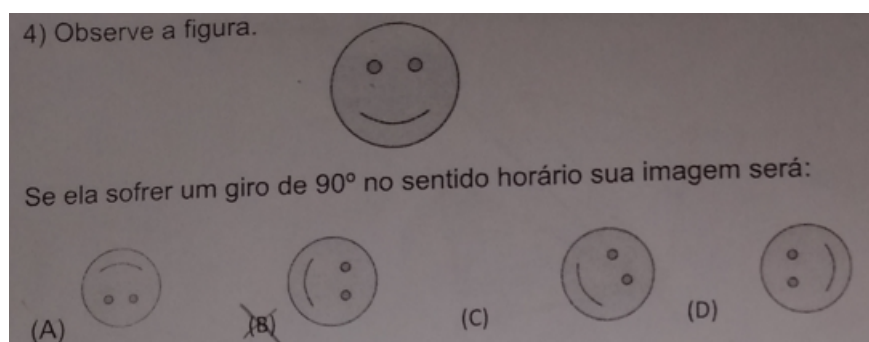


Figura 4.12: Atividade 4 - Aluno A.

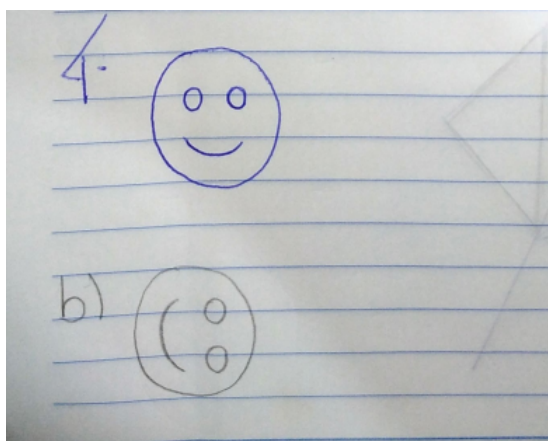


Figura 4.13: Atividade 4 - Aluno D.

A resposta incorreta da atividade, enviada pelo aluno F, pode ser observada na Figura 4.14.

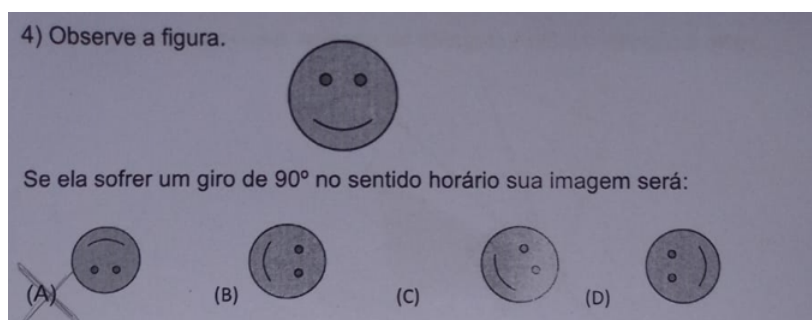
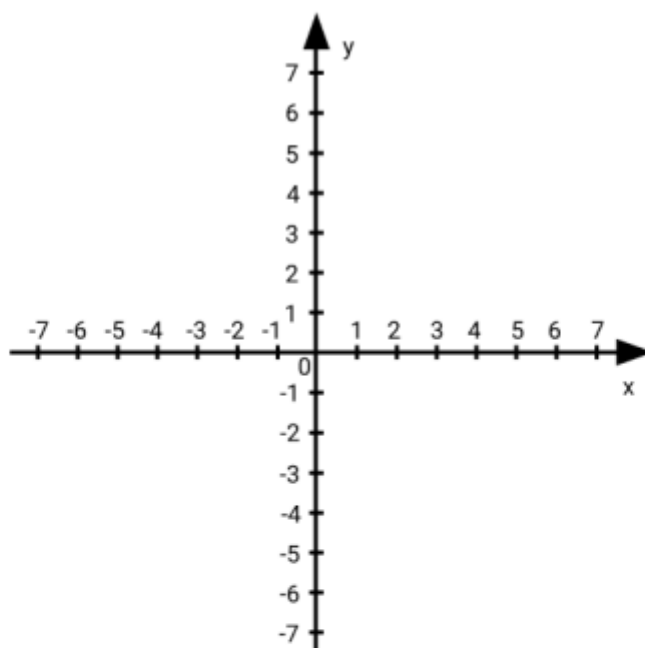


Figura 4.14: Atividade 4 - Aluno F.

Atividade 5:

5) Construa um triângulo de vértices A(2, 2), B(3, 5) e C(7, 4).



a) Por qual número deve ser multiplicada cada coordenada dos vértices desse triângulo ABC de maneira a obter as coordenadas dos vértices de um triângulo simétrico a ele em relação ao eixo y?

b) E por qual número deve ser multiplicada cada coordenada dos vértices do triângulo ABC de maneira a obter as coordenadas dos vértices de um triângulo simétrico em relação ao eixo x?

Figura 4.15: Atividade 5 - Simetria.

Fonte: ALLIFER SCHOOL - Aula 3 e 4 - Questão 2. Disponível em

< <https://www.alliferschool.com/2020/05/sequencia-didatica-transformacoes24.html> >. Acesso em 24/03/2021.

Nesta atividade, verifica-se a habilidade do aluno em desenhar uma figura no plano cartesiano e encontrar o seu simétrico em relação aos eixos coordenados.

Podemos observar que todos os alunos que enviaram as atividades conseguiram desenhar no plano cartesiano corretamente o triângulo pedido, como fez o aluno A (Figura 4.16).

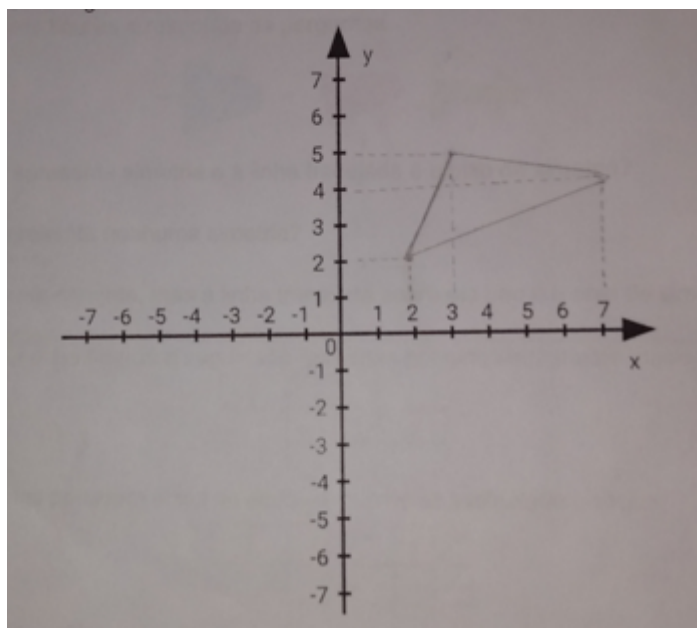


Figura 4.16: Atividade 5 - Aluno A.

Somente o aluno F respondeu corretamente o item a da atividade 5 (Figura 4.17).

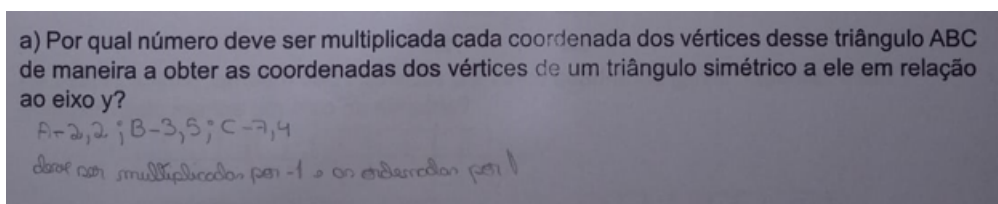


Figura 4.17: Atividade 5 a - Aluno F.

Alguns alunos responderam "por um número negativo", ou simplesmente -1", conforme aluno C e o aluno E (Figuras 4.18 e 4.19).

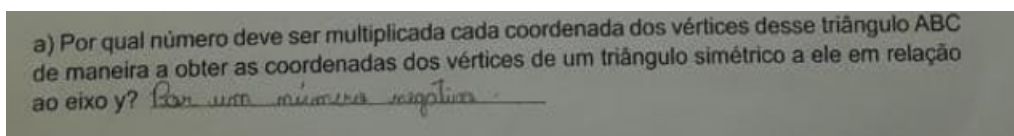


Figura 4.18: Atividade 5 a - Aluno C.

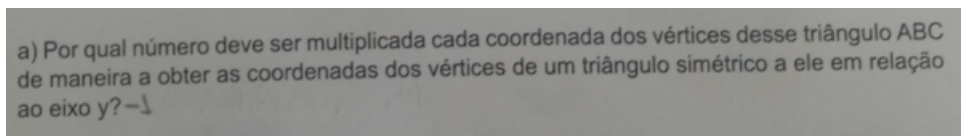


Figura 4.19: Atividade 5 a - Aluno E.

Novamente, somente o aluno F respondeu corretamente o item b da atividade 5 (Figura 4.20).

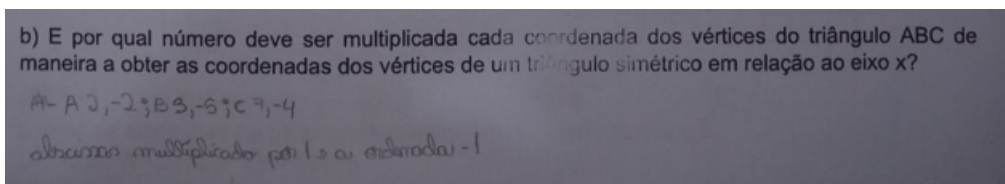


Figura 4.20: Atividade 5 b - Aluno F.

Alguns alunos responderam "por um número positivo", como o aluno C (Figura 4.21).

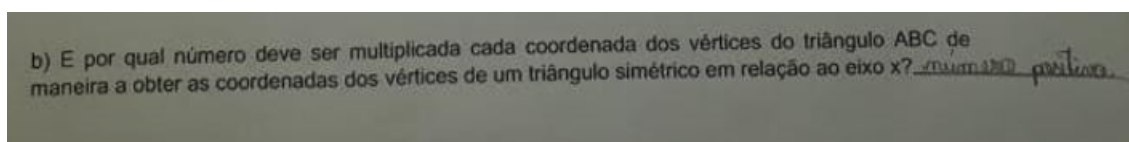


Figura 4.21: Atividade 5 b - Aluno C.

Esta foi a atividade com mais erros dos alunos. Percebe-se que eles não dominam o trabalho com o plano cartesiano.

Atividade 6:

6) Desenhe a imagem por reflexão do triângulo ABC em relação à reta r.

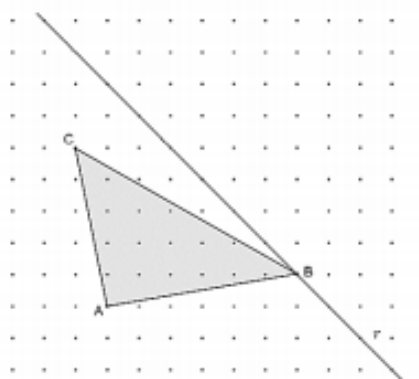


Figura 4.22: Atividade 6 - Simetria.
Fonte: Elaborada pela autora

Os alunos que mais se aproximaram da resposta correta foram os alunos D e E, conforme Figuras 4.23 e 4.24.

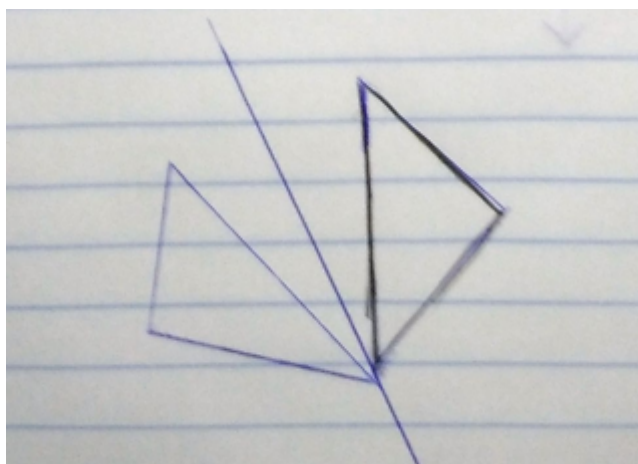


Figura 4.23: Atividade 6 - Aluno D.

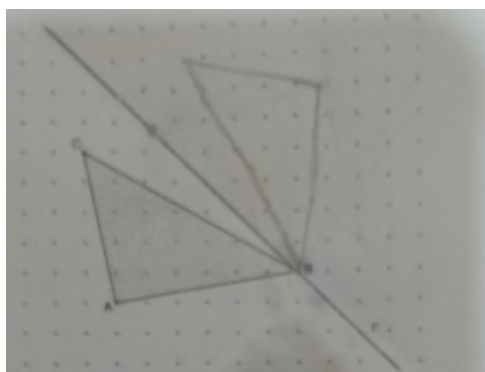


Figura 4.24: Atividade 6 - Aluno E.

Os outros alunos, ao realizar a atividade, cometeram pequenos deslizes na construção. O erro mais grave foi cometido pelo aluno C (Figura 4.25).

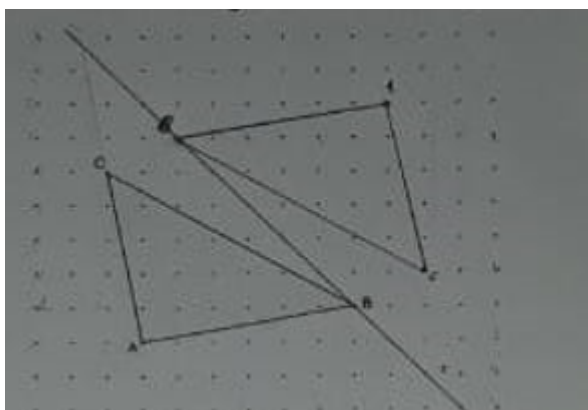
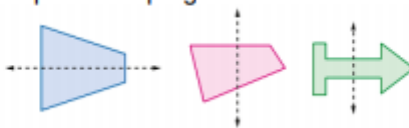


Figura 4.25: Atividade 6 - Aluno C.

Percebe-se que o aluno não conseguiu fazer a reflexão correta da figura.

Atividade 7:

7) Observe estas figuras e responda às perguntas.



- Qual figura apresenta simetria e a linha tracejada é o eixo de simetria?
- Qual não apresenta nenhuma simetria?
- Qual apresenta simetria, mas a linha tracejada sobre ela não é o eixo de simetria?

Figura 4.26: Atividade 7 - Simetria.

Fonte: [Dante 2016, p. 105]

Na atividade 7, buscou-se verificar se os alunos conseguem identificar uma figura com simetria e o seu eixo axial. Somente o aluno D respondeu corretamente aos itens a, b e c da questão, como pode ser observado na Figura 4.27.

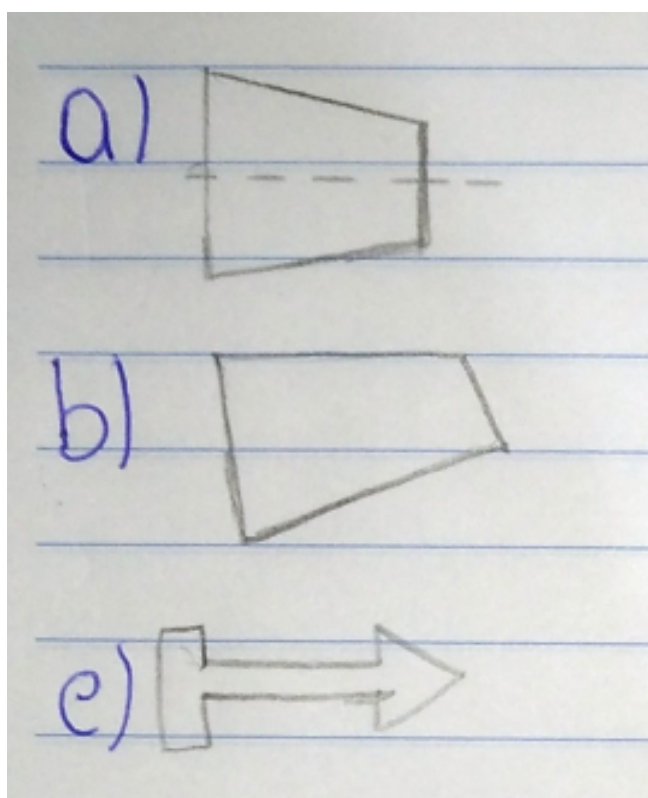


Figura 4.27: Atividade 7 - Aluno D.

Todos os alunos responderam corretamente ao item a da atividade 7. Com exceção do aluno D, os outros alunos inverteram as respostas do item b com o item c e vice-versa. Isso pode ser observado na Figura 4.28.

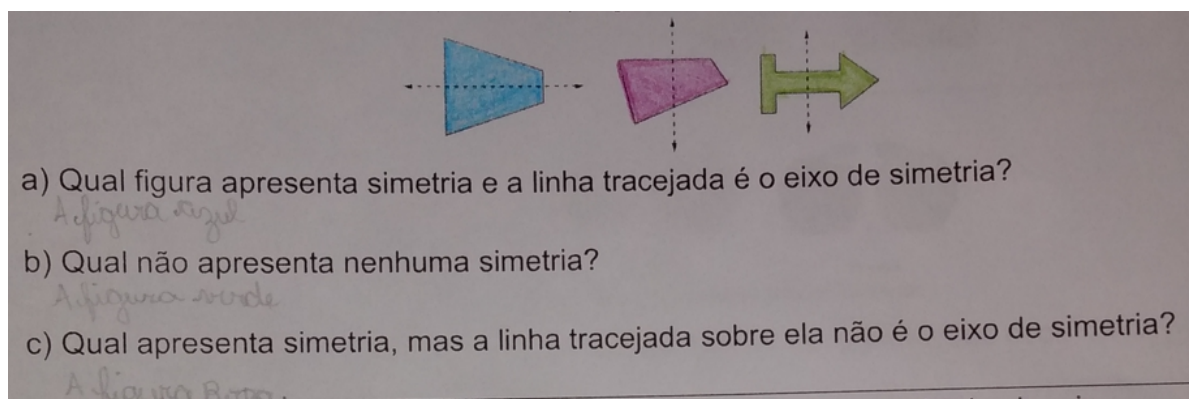
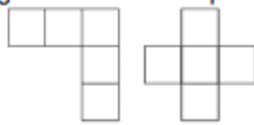


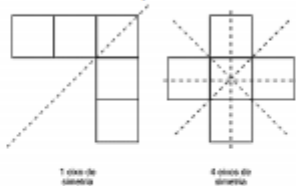
Figura 4.28: Atividade 7 - Aluno A.

Atividade 8:

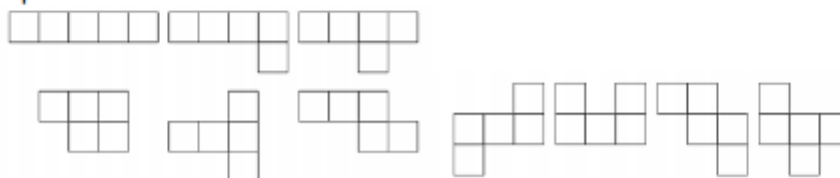
8) (OBMEP) As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.



Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.



As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?



(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 1

Figura 4.29: Atividade 8 - Simetria.

Fonte: OBMEP 2005 - 1ª Fase - Nível 2 - Questão 14.

A atividade 8 foi uma das questões mais difíceis de todas as atividades. Os alunos deveriam identificar quantas figuras possuem ao menos um eixo de simetria. Somente o aluno D conseguiu responder corretamente à questão, como pode ser observado na Figura 4.30.

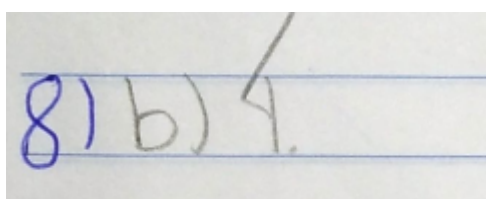


Figura 4.30: Atividade 8 - Aluno D.

As respostas incorretas podem ser observadas nas Figuras 4.31 e 4.32.

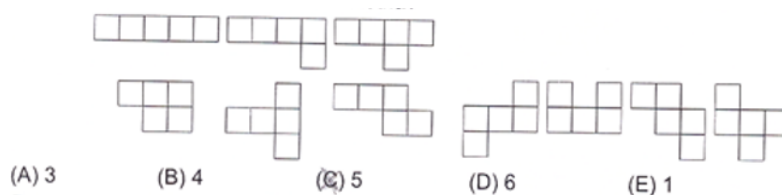


Figura 4.31: Atividade 8 - Aluno B.

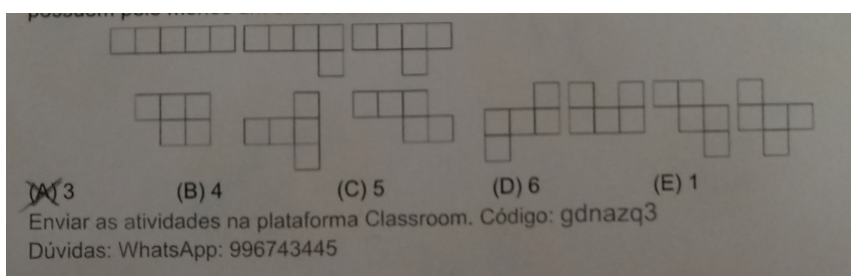


Figura 4.32: Atividade 8 - Aluno E.

Pode-se observar, nessa atividade, que os alunos ainda possuem dificuldades em identificar eixo de simetria em figuras.

Apesar de alguns erros os alunos conseguiram entender os conceitos ensinados. Podemos observar isso nas pequenas obras de artes produzidas por eles conforme as produções abaixo.

O aluno D fez uma figura que possui simetria utilizando o plano cartesiano, conforme pode ser observado na Figura 4.33.

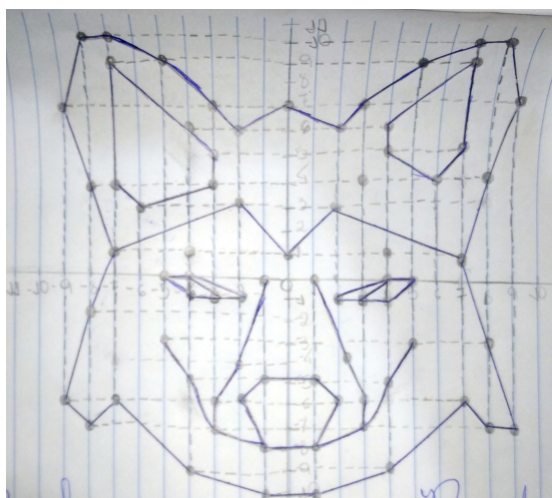


Figura 4.33: Obra de Arte - Aluno D.

O aluno C (Figura 4.34) utilizou o conceito de reflexão para fazer o seu trabalho.

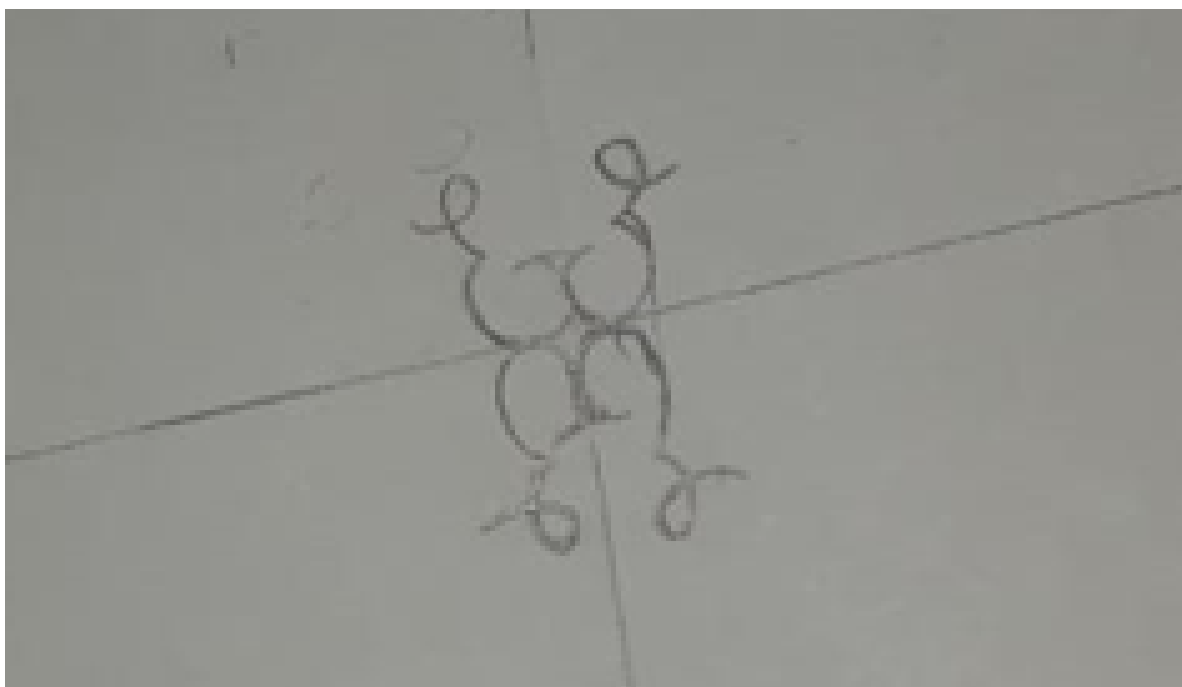


Figura 4.34: Obra de Arte - Aluno C.

O aluno E (Figura 4.35) utilizou reflexão e translação no seu trabalho.

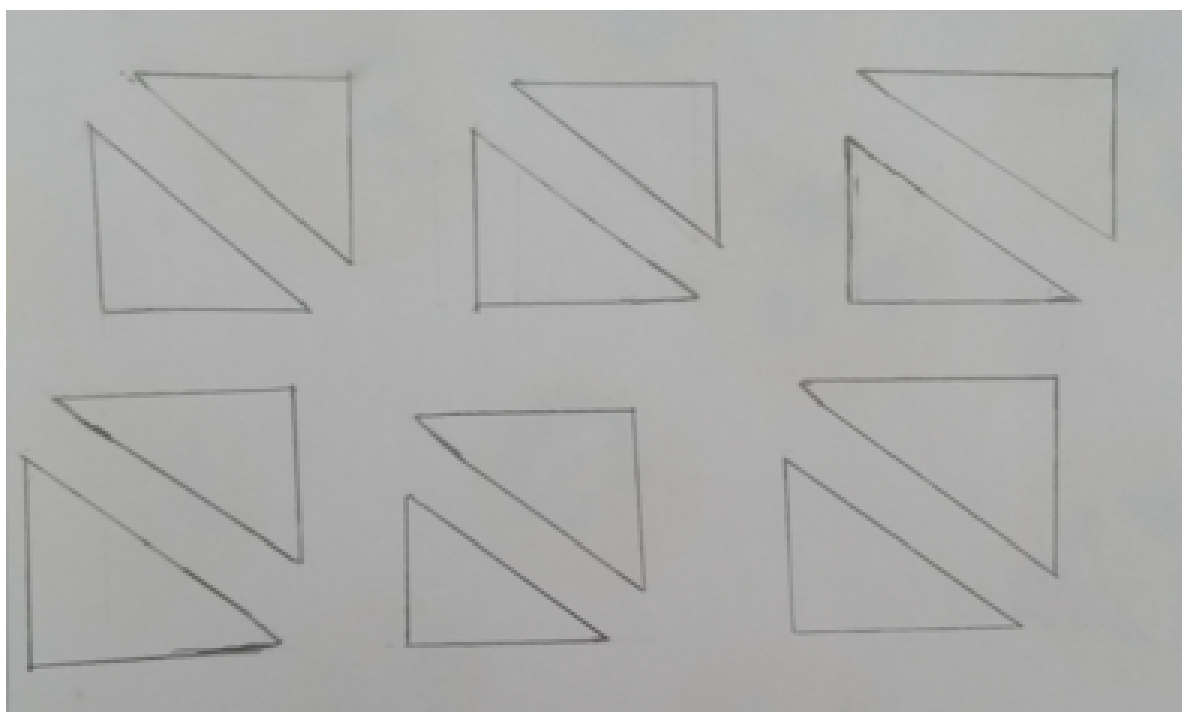


Figura 4.35: Obra de Arte - Aluno E.

O aluno B (Figura 4.36) utilizou-se de reflexão/translação na sua obra.

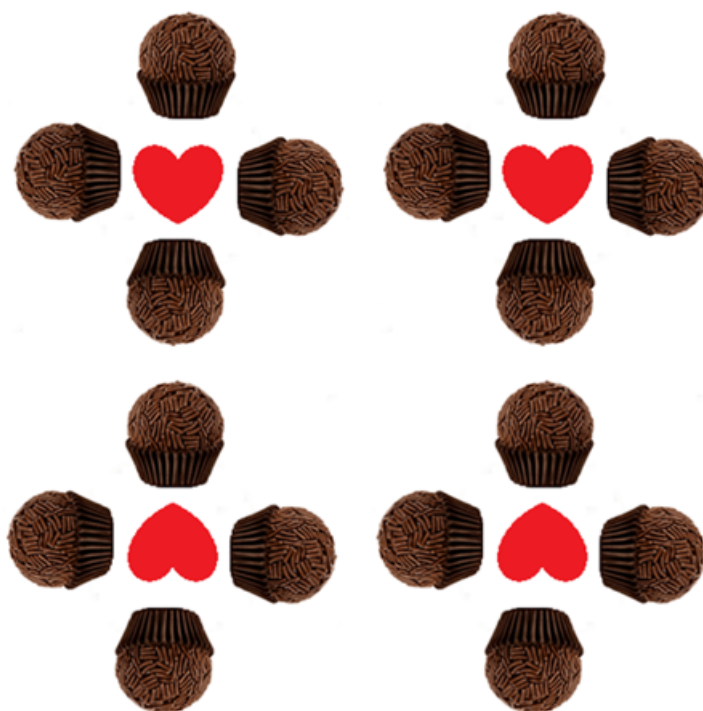


Figura 4.36: Obra de Arte - Aluno B.

O aluno F (Figura 4.37) utilizou-se de reflexões e rotações na realização de sua obra de arte.

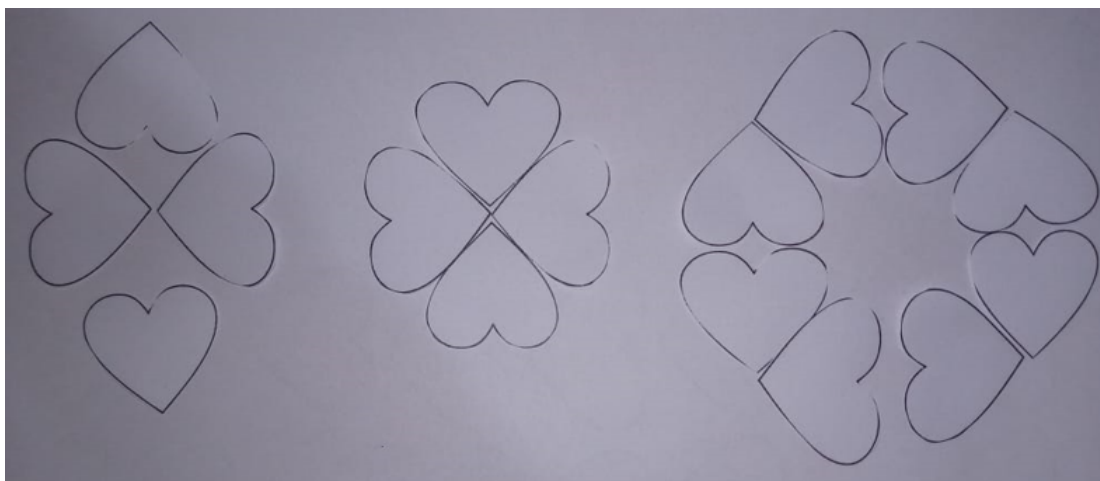


Figura 4.37: Obra de Arte - Aluno F.

As produções dos alunos, apesar de bem simples, mostraram que eles entenderam, pelo menos um pouco, os conceitos ensinados, levando-se em consideração que foram realizadas apenas quatro aulas via *Google Meet* para o ensino de tais conceitos.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que o ensino da geometria é muito importante, pois ajuda o aluno a perceber melhor o mundo ao seu redor, estimula o desenvolvimento de suas habilidades e potencialidades matemáticas e de outros ramos do conhecimento. O grande problema é que o ensino da geometria é pouco explorado nas escolas, por falta de tempo ou mesmo pelo despreparo do professor.

Na realização do presente trabalho, constatou-se que o ensino da geometria vinculado à vida cotidiana é extremamente vantajoso para o aluno. Eles conseguiram observar que o conteúdo ensinado na escola pode ser observado em diferentes áreas de conhecimento. Apesar de estarmos no meio de uma pandemia, com aulas virtuais, às quais muitos alunos não têm acesso aos materiais necessários, é possível ensinar e colher bons resultados.

Ao analisar as atividades realizadas pelos alunos, foi possível observar que houve um aprendizado e que este poderia ter sido bem maior se todos os alunos possuíssem as mesmas condições de acesso às mídias virtuais para assistirem as aulas e realizarem as atividades propostas, ou se estas aulas tivessem sido presenciais com o professor ao lado deles em todos os momentos da realização do trabalho. Alunos, professores e escolas ainda não se encontram preparados para aulas virtuais.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. *Simetrias de rotação e simetrias de translação*. 2013.

BRASIL, S. de E. F. B. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 1997.

CBC/MG, S. de Educação de M. G. *CBC - Currículo Referência de Minas Gerais*. 2019. Último acesso em: 25/05/2021. Disponível em: <http://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php>.

CUNHA, A. I. G.; MORAES, A. P.; GARCIA, O. P. D. V. C. O ensino de funções e de transformações geométricas com o auxílio do software geogebra. 2008.

DANTE, L. R. *Matemática: sistema de ensino ser: ensino fundamental II, caderno 1*. [S.l.]: São Paulo: Ática, 2016.

GOLDENBERG, E. P. "Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II). 1998. 37-44 p. Último acesso em: 25/05/2021. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/712/708>.

ISIDORO, P. *Isometrias - Translação, Rotação Reflexão*. Último acesso em: 02/06/2021. Disponível em: <http://mathclasspias.weebly.com/uploads/9/3/4/3/9343663/isometrias1.pdf>.

JÚNIOR, G.; RUY, J.; CASTRUCCI, B. *A conquista da matemática : 7º ano : ensino fundamental : anos finais*. São Paulo: Editora FTD, 2018.

LARANJO, L. *Transformações Geométricas*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <https://materia8anolaralaranjo.blogspot.com/2016/01/transformacoes-geometricas.html>.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Hoboken, New Jersey: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? a educação matemática em revista. *Blumenau, ano III*, n. 4, 1995. Último acesso em: 02/06/2021.

MAESTROVIRTUALE.COM. *Transformações isométricas: composição, tipos e exemplos*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <https://maestrovirtuale.com/transformacoes-isometricas-composicao-tipos-e-exemplos/>.

MEDEIROS, D. *MATEMÁTICA-8ºano-quinzena5-semester2.pdf - COLÉGIO ESTADUAL MARIA ROSILDA RODRIGUES*. 2020.

NOGUEIRA, R. *Caderno de atividades - am-13-14-6A.pdf*. 2014.

OBMEP, O. C. de Matemática da. *Isometrias e simetrias*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-isometrias/>.

PARANÁ, A. *Aula Paraná - Trilhas da Aprendizagem - 7º Ano - 7ª semana*. 2020.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial – 8º ano – 2º bimestre - Sequência didática 5*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: https://plurall-content.s3.amazonaws.com/oeds/NV/_ORG/PNLD/PNLD20/Matematica/_Essencial/8ano/CARACT/12/_NOVA/_MAT/_8ANO/_2BIM/_Sequencia/_didatica/_5/_CARACT.pdf.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial 7º ano: ensino fundamental, anos finais*. São Paulo: Editora Scipione, 2018.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. *Matemática Essencial 8º ano: ensino fundamental, anos finais*. São Paulo: Editora Scipione, 2018.

PIASESKI, C. M. A geometria no ensino fundamental. 2010. *Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões Campus de Erechim-(Monografia)-Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI-Campos de Erechim*. 33p, 2010.

PINHO, L. V. *Transformações geométricas nos Programas de Matemática do Ensino Básico e Secundário*. 2013.

SEE/MG, S. de Educação de M. G. P. *Plano de Estudo Tutorado*. Último acesso em: 02/06/2021. Disponível em: <https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/pets>.

UFRJ, U. I. de Matemática da. *Transformações do Plano*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap26.html>.

WAGNER, E. *Construções Geométricas, Coleção do Professor de Matemática, SBM*. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner, 1993.

WWW.TUDOPARAOPROFESSOR.COM/ATIVIDADES. *SIMETRIA - Figuras Para Recortar e Dobrar*. Último acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <https://xdocs.com.br/doc/simetria-figuras-para-recortar-e-dobrar-j4ol77rw7z8m>.