LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

TÉCNICA DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA EM ANÁLISE DA RETA

BRUNA CAVALCANTE GALO

Sorocaba

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

TÉCNICA DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA EM ANÁLISE DA RETA

BRUNA CAVALCANTE GALO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso Licenciatura em Matemática, sob a Orientação do Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 2/2021/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

BRUNA CAVALCANTE GALO

TÉCNICA DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA APLICADA EM ANÁLISE NA RETA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba

Sorocaba, 18 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Paulo César Oliveira
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Sadao Massago

Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela**, **Docente**, em 19/11/2021, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago**, **Docente**, em 19/11/2021, às 18:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira**, **Docente**, em 19/11/2021, às 23:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0527238** e o código CRC **84C78705**.

Dedico essa monografia a meu avô, José Galo (in memoriam), por ter acreditado em mim sempre e ensinado em todos nossos momentos juntos como ser uma pessoa boa para si, para os outros e para o mundo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço imensamente a minha família, meus pais Neila e Rodrigo, tal como minha irmã Caroline, por todo carinho, paciência e apoio em todos momentos da minha vida.

Agradeço ao meu companheiro por todo carinho, amor e motivação durante todos instantes de nossa vida, bem como agradeço amigos pelas lições, aprendizados e incentivos diários nesse processo.

Agradeço ao Prof. Dr. Antônio Luís Venezuela por toda paciência, dedicação, instigação, estímulo e sapiência para me instruir ao decorrer da monografia, tal como na minha formação profissional como matemática.

Agradeço ao Grupo de Nanoneurobiofísica (GNN) e todos seus participantes, em especial meu orientador Prof. Dr. Fábio de Lima Leite e minha coorientadora Dra. Jéssica Cristiane Magalhães Ierich por toda paciência, orientação e inspiração durante a iniciação científica, contribuindo na construção da minha carreira acadêmica.

Aos prezados Prof. Dr. Paulo César Oliveira e o Prof. Dr. Sadao Massago que aceitaram compor a banca de monografia contribuindo nesse processo.

Por fim, agradeço a Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), campus Sorocaba, ao conjunto de funcionários e docentes que promovem nessa instituição um ensino de alta qualidade.

Sumário

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar o processo de demonstração realizado na disciplina de Análise Matemática da Reta. A escolha do tema ocorreu a partir da análise bibliográfica realizada na disciplina de Análise Matemática presente no curso da graduação. A partir da análise da bibliografia básica da disciplina, encontrou-se problemas de compreensão no modelo de demonstração de teoremas e resolução dos exercícios. Discorre-se sobre a construção do pensamento lógico matemático, as concepções epistemológicas e a historicidade da Lógica e da Análise Matemática, buscando compreender maneiras que permitissem criar um modelo que suprisse as lacunas na compreensão do processo demonstrativo. Apresentamos um modelo verticalizado, via formulário, denominado Grupo de Formulários de Demonstração que através de uma estrutura quebrável propõe um modo de demonstração voltada ao Ensino Superior, visando estabelecer uma construção lógica para resolução dos problemas de demonstração preservando o rigor da linguagem matemática. E por fim, apresentamos exemplos de aplicação do formulário e comparamos com a metodologia aplicadas em livros universitários referentes a temática.

Palavras-chave: *Análise de Matemática da Reta, Ensino Superior, Grupo de Formulários de Demonstração.*

ABSTRACT

This work aims to study the demonstration process carried out in the discipline of Mathematical Analysis of the Line. The theme was chosen based on the bibliographic analysis carried out in the Mathematical Analysis discipline present in the undergraduate course. From the analysis of the basic bibliography of the discipline, problems of understanding were found in the model of proof of theorems and resolution of the exercises. It discusses the construction of logical mathematical thinking, epistemological conceptions and the historicity of Logic and Mathematical Analysis, seeking to understand ways to create a model that would fill gaps in the understanding of the demonstrative process. We present a vertical model, via form, called Group of Demonstration Forms which, through a breakable structure, proposes a mode of demonstration aimed at Higher Education, aiming to establish a logical construction for solving demonstration problems while preserving the rigor of mathematical language. And finally, we present examples of application of the form and compare it with the methodology applied in university textbooks related to the subject.

Keywords: Real Mathematics Analysis, Higher Education, Demonstration Forms Group..

INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

O assunto abordado neste Trabalho de Conclusão de Curso consiste em Análise Matemática da Reta, um dos temas estudados durante a graduação, no qual a autora identificou grandes dificuldades na realização da disciplina, dada sua complexidade na compreensão do processo demonstrativo. A Análise Matemática da Reta, apresenta em seu campo de estudo outros conteúdos como Teoria dos Números, Teoria dos Conjuntos e Cálculo Diferencial e Integral. Dado que é uma disciplina pertencente a grade curricular da Universidade Federal de São Carlos será utilizada a bibliografia fornecida como base para análise do material e comparativo com a proposta. O trabalho é de uma categoria introdutória, sem aplicações diretas, dessa forma é um material de cunho teórico para auxílio do processo demonstrativo em Análise Matemática da Reta. O desenvolvimento da teoria é construído principalmente a partir da análise da obra de Lima (2019) e realizou-se pesquisas para suporte da construção da proposta, trazendo bibliografias que respaldassem a necessidade desse desenvolvimento enfatizando a importância e vantagens, partindo da construção da lógica e análise minuciosa dos componentes de um enunciado matemático até desenvolvimento de um plano de resolução e construção passo a passo.

Segundo Silva Filho (2000), a lógica desenvolvida pelo filósofo Aristóteles na Antiguidade, representa a etapa inicial de uma investigação em qualquer ramo da ciência, pois permite compreender um raciocínio a partir de premissas que possam sustentar essa busca pelo conhecimento verdadeiro. As concepções iniciais da Lógica Matemática, tais como processos demonstrativos são apresentados de acordo com os estudos de Alencar Filho (2002).

De acordo com as concepções históricas de Roque (2012), Eves (2004), Boyer e Merzbach (2012) e Bardi (2006), a Análise Matemática vem se desenvolvendo desde os primórdios da Matemática na sociedade grega e egípcia, passando por uma era de grandes construções da matemática no cenário francês durante o período intitulado como Revolução Científica, marco de transitividade da Idade Média para Idade Moderna. Sendo sua construção impactada fortemente diante da concepção do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz, até o século XIX a partir dos questionamentos de Gauss referente a ausência de rigor da Matemática, consagrando a vertente da matemática “pura” definida sobre três períodos com grandes marcos de uma construção matemática formal e simbólica.

O conceito de Análise Matemática de Stillwell e Stewart (2017) defende que a área é um ramo de estudo sobre conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral, além de relacionar com as funções e os conjuntos numéricos.

A partir de concepções de Piaget e Garcia (2011) com a epistemologia construída pelo filósofo Bachelard, podemos determinar a importância da construção de um modelo via formulário para os processos de demonstração realizados na disciplina de Análise Real da Reta. Outros estudos, ao decorrer do trabalho enfatizam a relevância da estrutura verticalizada aplicada no desenvolvimento da proposta apresentada e como podem contribuir para no processo da epistemologia genética, e consequentemente na compreensão da Análise Real.

A autora não identificou na literatura uma pesquisa análoga ao presente trabalho, todavia foram identificadas aplicações semelhantes de demonstração verticalizada. Stefanowick (2014) descreve em seu livro diferentes tipos de provas e demonstrações matemáticas, para exemplificação a autora utiliza exercícios de Teoria dos Conjuntos e Teoria dos Números apresentando na resolução uma identificação de elementos como hipótese e tese e realizando as etapas de demonstração de modo vertical. Analogamente Hemmerling (1970) retrata demonstrações verticais de teoremas da Geometria Euclidiana, sendo um modelo aproximado do desenvolvido nesse trabalho. Por intermédio dessas aplicações, conseguiu-se identificar um detalhamento superior na demonstração e consequentemente uma compreensão melhor do processo.

O objetivo geral deste trabalho consiste na apresentação e aplicação de um Formulário de Demonstração Matemática inicialmente voltada ao Ensino Superior, buscando reestruturar o modo de demonstração realizado no conteúdo de Análise Real da Reta, para que o estudante possa compreender as etapas de construção do raciocínio lógico para resolução dos problemas de demonstração.

Objetivos específicos desse trabalho são:

- Caracterizar o processo de construção epistemológico baseado no uso dos formulários;
- Descrever a aplicação via formulários na demonstração em Análise Matemática da Reta;
- Descrever as vantagens e desvantagens estrutural do formulário em comparação com as demonstrações realizadas em livros universitários.

O trabalho presente é dividido em três capítulo, sem contar a Introdução e Objetivos, como modo de organização. Para que o leitor possa gozar de uma melhor compreensão, se orienta um conhecimento prévio de Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Teoria dos Números, Cálculo Diferencial e Integral.

No primeiro capítulo descrevemos sobre a construção histórica da Lógica e sua definição, os princípios do simbolismo da linguagem matemática e as principais técnicas de demonstração.

No segundo capítulo apresenta a historicidade da Análise Matemática, sua definição e áreas de estudo, as concepções piagetiana e bachelardiana referente a epistemologia genética.

Por fim, o terceiro capítulo apresenta o Grupo de Formulário de Demonstração (GFD), suas estruturas, exemplificações de aplicações e comparação com métodos tradicionais demonstrativos realizadas em livros.

1. LÓGICA MATEMÁTICA

Neste capítulo, primordialmente, será abordado questionamentos a respeito da Lógica Matemática, discorrendo sobre sua definição, constituição, importância no desenvolvimento da matemática e, essencialmente, sua composição formal simbólica e repercussão nas técnicas demonstrativas.

1.1. Definição e Historicidade

O termo *Lógica* é ocasionalmente aplicado no cotidiano, em geral para defender a ideia de algo que é considerado uma verdade. Dessa forma, segundo Machado e Cunha (2005) a lógica pode ser definida como o estudo das afirmações ou conclusões sustentadas por uma premissa, isto é, Lógica é um conjunto de premissas e conclusões que determinam uma argumentação.

Na Matemática a Lógica não seria diferente, eventualmente buscamos demonstrar se uma afirmação é bivalente, verdadeira ou falsa, para isso utilizamos a Lógica para comprovar.

A Lógica surge de um conjunto de tratados publicados por Aristóteles em seu livro intitulado *Organon*, o termo *organon* representa não um elemento ou objeto, mas sim a maneira de se pensar, *a posteriori* essa terminologia passou a ser denominada *logike*, traduzida para linguagem latina como *lógica* (Silva Filho, 2000). A Lógica, segundo as concepções aristotélicas, representa a etapa inicial de uma investigação científica, pois somente com ela somos capazes de entender o raciocínio sustentado por leis ou normas, podendo assim aplicá-las na busca pela verdade.

Conforme o estudo publicado por Maio (2002), a Lógica, ou “centro lógico exato” em termos de estruturas neurológicas se localiza na mesma área do cérebro ao qual se desenvolve a linguagem, de modo que desde o período da infância do ser humano como incentivado o processo de constituição linguística, formamos também a compreensão do “raciocínio lógico exato” por construções de estruturas neurais. A proximidade das estruturas construídas e fortificadas por sinapses entre a constituição linguística e a lógica clássica, podem demonstrar a importância e facilidade humana na compreensão da simbologia matemática como uma linguagem que possui uma ordem demonstrativa, ou um processo para busca da verdade.

Ainda segundo o filósofo grego Aristóteles, a Lógica é a base que indica, conforme as hipóteses presentes, quais as possíveis conclusões podemos obter durante o processo demonstrativo. Dessa forma, lógica é raciocinar, organizar de modo coerente pensamentos ou ideias e com justificativas eloquentes determinar uma conclusão, de modo a definir se é verdadeira ou falsa. Torna-se imprescindível destacar que a lógica de Aristóteles dure cerca de 2300 anos, não sendo até atualmente substituída, mas sim remodelada ou incrementada por outros pesquisadores, acompanhando o desenvolvimento da matemática e suas aplicações na ciência.

Conforme destacado, o desenvolvimento de outras Lógicas se fez necessário a medida do avanço científico, as denominadas *Lógicas não Clássicas* e entre essas lógicas se destacam a Lógica Fuzzy desenvolvida e aplicada na ciência da computação. As Lógicas não Clássicas surgiram durante o século XIX, devido a dois marcos matemáticos, sendo o primeiro na área da geometria, a construção das geometrias não euclidianas, e o segundo algébrico, que é a construção de uma Álgebra não comutativa. Esses avanços essenciais, permitiu a aplicação da Matemática em áreas de grandes avanços como a Física Quântica, a qual se permitiu desenvolver as Lógica Modal e a Lógica Paraconsistentes, Lógica que permite trabalhar com modalidades sendo as mais comuns a possibilidade e eventualidade e a Lógica que identifica os casos de exceções do Princípio de não Contradição, respectivamente (TASINAFFO, 2008, p. 17).

Apesar de cada Lógica não Clássica possuir sua devida relevância tanto no progresso da Matemática como nas aplicações científicas, o presente trabalho se pautará essencialmente sobre a Lógica Clássica.

Dessa forma, a Lógica Matemática Clássica apresentada e definida por Aristóteles, está presente na mesma região cerebral da linguagem e apresenta em sua parte essencial a presença de preposições e sentenças semânticas na construção do raciocínio, se utilizando de conectivos, quantificadores e implicações, presentes na Teoria dos Conjuntos e Cálculo. Esse sistema de linguagem próprio da Matemática, é o que denominamos de *simbologia matemática*, uma linguagem padronizada ao decorrer do tempo e estabelecida como universal.

1.2. Simbologia Matemática

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados presentes no trabalho de Alencar Filho (2002), que são requisitos necessários para compreensão do uso da simbologia matemática no formulário de demonstração contemplado posteriormente. Os assuntos tratados serão referentes a simbologia para Lógica Matemática e Teoria dos Números.

Definição 1.1. Proposição é todo conjunto de palavras ou símbolos que expressam um juízo, ou afirmam fatos.

Por exemplo, podemos vislumbrar uma proposição através da análise da Trigonometria. Observando o eixo horizontal do círculo trigonométrico, podemos estabelecer um ponto no círculo e a projeção sobre esse eixo permite determinar o valor do ângulo da razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo retângulo, ou seja, o valor do cosseno. Realizando a projeção no ângulo de 90º (ou $\frac{\pi}{2}$) no eixo horizontal verifica-se que o valor de cosseno de $\frac{\pi}{2}$ é equivalente a 0, assim podemos estabelecer a proposição da Trigonometria conforme o Exemplo (1.1).

Exemplo 1.1. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Para o desenvolvimento da lógica são adotadas regras fundamentais denominadas princípios ou axiomas, os quais determinam a bivalência da lógica, isto é, se é verdadeira ou falsa.

Princípio 1.1. (Princípio da não contradição) Uma proposição não é verdadeira e falsa simultaneamente. Em fórmula: “não (p e não-p)”.

Princípio 1.2. (Princípio do terceiro excluído) Toda proposição pode ser ou verdadeira, ou falsa, ou seja, sempre existe um desses dois casos e nunca outro ou um terceiro. Em fórmula: “p ou não-p”

Princípio 1.3. (Princípio da Identidade) Uma preposição é idêntica a si mesmo, ou seja, “x é x”, sendo x um conceito ou uma ideia.

Definição 1.2. O valor lógico de uma proposição corresponde a verdade (V), se a proposição é verdadeira, ou falsidade (F), quando a proposição é falsa.

Conforme os Princípios (1.1), (1,2) e (1,3), o valor lógico das proposições podem assumir um único valor, sendo somente V ou F.

As proposições possuem classificações sendo elas simples e compostas. A *proposição simples* é uma afirmação do tipo: Sujeito + Verbo + Predicado, representadas pelo alfabeto latino minúsculo. Por exemplo: p: “Carlos é advogado”. Enquanto, uma *proposição composta* é a combinação de duas ou mais proposições simples por meio de *conectivos* “e”, “ou”, “se, então” e “se, e somente se”, essas por sua vez são representadas pelo alfabeto latino maiúsculo. Exemplificando: P: “Carlos é advogado e careca”.

Definição 1.3. Denominam-se *conectivos* as palavras utilizadas para formar novas proposições partindo das anteriores, sendo eles “e”, “ou”, “não”, “se... então...” e “...se e somente se...”.

Podemos estabelecer os conectivos em aspectos comuns permitindo conectar as preposições simples, tomando duas proposições simples como “o número 25 é ímpar” e “o número 25 é um quadrado perfeito”, perceba que se tratam de um mesmo valor e tais podem ser conectados através da adição de informações, ou seja por intermédio do conectivo “e”, possibilitando criar uma proposição composta.

Exemplo 1.2. O número 25 é ímpar e um quadrado perfeito.

De acordo com o princípio do terceiro excluído, o valor lógico de uma proposição é bivalente. Para se determinar o valor lógico de uma proposição composta precisamos conhecer os valores das proposições simples, a construção desse processo ocorre através da *tabela verdade,* tabela que se organiza em arranjos binários com repetição, terciários com repetição e assim por diante, dependendo da quantidade de proposições simples presentes.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabela 1 - Tabela verdade de duas proposições simples.

Nas proposições podemos realizar operações, denominadas operações lógicas, regidas pelo cálculo proposicional, entre as operações podemos encontrar a negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional.

Definição 1.4. A *negação* da proposição p, representa o “$não\, p$”, dessa forma se a preposição é verdade (V), quando negada apresenta o valor lógico inverso, isto é, nesse caso a proposição seria falsa (F). A notação utilizada para indicar a negação é “$\sim p$”, outro modo de representação encontrado em livros acadêmicos é “$\neg$”.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabela 2 - Tabela verdade da negação de uma proposição.

Definição 1.5. A *conjunção* de duas proposições r e s possui valor lógico verdadeiro (V) quando ambas as proposições simples r e s são verdadeiras, no caso contrário o valor lógico é F. A conjunção lê-se como "r e s", e é representada por "r ^ s".

r	s	$r \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 3 - Tabela verdade da conjunção das proposições r e s.

Definição 1.6. A *disjunção* de duas proposições r e s, denominam "r ou s", o valor lógico é verdade (V) quando uma das proposições simples r ou s tem valor lógico verdadeiro, e o único valor lógico falso (F) da disjunção ocorre no caso em que ambas as proposições r e s são falsas. A notação da disjunção de duas proposições é representada por "$r \vee s$".

r	s	$r \vee s$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 4 - Tabela verdade da disjunção das proposições r e s.

A língua portuguesa permite em sua interpretação a duplicidade de sentidos do termo "ou", por isso a necessidade de distinguir a disjunção em inclusiva e exclusiva. No caso da disjunção inclusiva indica que pelo menos uma das proposições é válida ou ambas, enquanto, a exclusiva necessariamente exige que somente uma seja válida e a outra invalidada.

Definição 1.7. Na *disjunção exclusiva* de duas proposições r e s, lida como "ou r ou s", temos como valor lógico verdade (V) quando os valores de cada proposição simples são opostos e valor lógico falso (F) quando as proposições r e s possuem valores idênticos. A notação da disjunção exclusiva das proposições r e s é representada por "$r \veebar s$".

r	s	r ⊻ s
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 5 -Tabela verdade da disjunção exclusiva das proposições r e s.

Definição 1.8. Uma *proposição condicional* representada por "se r então s", possui valor lógico verdadeiro (V) quando as duas proposições indicam mesmo valor lógico, no caso de r ser falsa e s verdadeira, ou vice versa, o valor lógico é a falsidade (F). Na condicional, a representação simbólica é dada como "$r \to s$", onde "$\to$" é uma implicação.

Definição 1.9. A *proposição bicondicional* representada como "r se e somente se s", apresenta valor lógico verdadeiro (V) quando as duas proposições simples r e s são verdades ou falsidades, os demais casos possuem valor lógico falso (F). A notação da bicondicional é "$r \leftrightarrow s$", onde podemos interpretar como r sendo condição necessária e suficiente para s, ou s a condição necessária e suficiente para r, isto é, "$r \to s$" e "$s \to r$".

No Exemplo (1.3) demonstramos o caso de uma construção completa de uma tabela verdade para o caso da proposição composta $P(p,q) = \sim(p^\wedge q) \vee \sim(\, q \leftrightarrow p)$, no qual podemos analisar a conjunção de proposições, a proposição condicional, a negação e a disjunção das proposições, analisando como a tabela verdade analisa cada proposição e estabelece suas relações.

Exemplo 1.3. Construa a tabela verdade do caso $P(p,q) = \sim(p^\wedge q) \vee \sim(\, q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(\, q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(\, q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Tabela 6- Exemplificação da construção da tabela verdade do caso $P(p,q) = \sim(p^\wedge q) \vee \sim(\, q \leftrightarrow p)$.

Previamente a abordagem da implicação lógica, equivalência lógica e apresentação de algumas propriedades da álgebra das proposições, será definido resumidamente três conceitos essenciais para o desenvolvimento das temáticas relatadas.

Definição 1.10. Denomina-se “tautologia”, a proposição composta, na qual a última coluna expressa na tabela verdade contém somente verdade (V), ou seja, todos os valores lógicos da última colunas da tabela verdade são verdadeiros.

Definição 1.11. A “contradição” representa o inverso da tautologia, ou seja, a proposição composta é uma contradição quando os valores lógicos da última coluna da tabela verdade são todos falsos (F).

Definição 1.12. Contingência representa a proposição composta na qual a última coluna apresenta valores lógicos verdadeiros (V) e falsos (F), cada um apresentado pelo menos uma vez, de modo simples a contingência é quando não se tem uma tautologia ou uma contradição.

A implicação lógica tal como equivalência lógica refere-se as preposições compostas, nestas se encontram presentes algumas propriedades e teoremas que podem ser demonstradas pelo uso da tabela verdade.

Definição 1.13. Sejam as proposições compostas $P(p,q,r,s,\dots)$ e $Q(p,q,r,s,\dots)$, se $P(p,q,r,s,\dots)$ implica $Q(p,q,r,s,\dots)$, então $Q(p,q,r,s,\dots)$ será verdadeira (V) todas as vezes em que a proposição $P(p,q,r,s,\dots)$ for verdade (V). Em termos de notação, definimos que $P(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,s,\dots)$.

A implicação lógica goza de algumas propriedades imediatas, sendo elas a reflexiva e a transitiva.

Propriedade 1.1. (Reflexividade) $P(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow P(p,q,r,s,\dots)$.

Propriedade 1.2. (Transitividade) Se $P(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,s,\dots)$ $e\, Q(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,s,\dots)$, então $P(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,s,\dots)$.

Teorema 1.1. A proposição $P(p,q,r,s,\dots)$ implica em uma proposição $Q(p,q,r,s,\dots)$, se e somente se, ocorre uma condicional entre as proposições é uma tautologia. Matematicamente podemos descrever que:

$$[P(p,q,r,s,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,s,\dots)] \Leftrightarrow [P(p,q,r,s,\dots) \rightarrow Q(p,q,r,s,\dots)]$$

Uma observação necessária é que os símbolos “⇒” e “→” possuem diferentes sentidos, sendo que a primeira representa uma relação, enquanto a segunda descreve uma operação lógica.

Definição 1.14. Uma proposição $P(p, q, r, s, \dots)$ é equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, s, \dots)$, se as tabelas verdade das proposições são iguais, isto é, se ambas as proposições são contraditórias ou tautológicas. A notação da equivalência das proposições, é representada por $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$.

Proposição 1.3. (Reflexiva) $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, s, \dots)$.

Proposição 1.4. (Simetria) Se $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$, então $Q(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, s, \dots)$.

Proposição 1.5. (Transitividade) Se $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$ e $Q(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, s, \dots)$, então $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, s, \dots)$.

Teorema 1.2. A equivalência entre as proposições $P(p, q, r, s, \dots)$ e $Q(p, q, r, s, \dots)$ ocorre se, e somente se a bicondicional das proposições é tautológica, ou seja:

$$[P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)] \Leftrightarrow [P(p, q, r, s, \dots) \leftrightarrow P(p, q, r, s, \dots)]$$

A álgebra das proposições é o conjunto das propriedades referente as proposições simples sobre relações, as propriedades dizem respeito a conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, negação condicional e negação bicondicional. Entre essas propriedades estão comutação, idempotência, associação, distribuição, entre outras, essas propriedades possuem sua relevância e incrementam no desenvolvimento lógico, porém para esse trabalho serão somente citadas, e somente em caso de necessidade, serão explicadas.

Conforme definido na seção *1.1 Definição e Historicidade*, a Lógica Matemática clássica representa uma argumentação, utilizando premissas e regras para validar uma conclusão. Desse modo, podemos concluir que o “argumento” representa uma sequência de premissas ou proposições iniciais finita ao qual se acarreta uma consequência ou proposição final. Em termos matemáticos, argumento representa:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$$

onde qual $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ são as premissas e Q a conclusão.

A validação de uma premissa ocorre se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira quando as premissas $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ são verdadeiras. Uma maneira de se validar esses argumentos é a aplicação das Regras de inferência, que representa um conjunto de passos para demonstração, ou roteiro demonstrativo. Os argumentos básicos ou inferências, incluem regras de adição, simplificação, conjunção, absorção, Modus ponens, Modus tollens, silogismo disjuntivo, silogismo hipotético, dilema construtivo e dilema destrutivo, sendo ambas escritas de modo padronizado colocando premissas seguida de um traço horizontas e a conclusão.

No Exemplo (1.4) representa o uso da Regra do Silogismo hipotético através da transitividade da seta realizada pelo argumento, $(\sim p \rightarrow q \vee r), (q \vee r \rightarrow \sim s) \ \vdash (\sim p \rightarrow \sim s)$, no qual $(\sim p \rightarrow q \vee r) = P_1$, $(q \vee r \rightarrow \sim s) = P_2$ e $(\sim p \rightarrow \sim s) = Q$

Exemplo 1.4. Regra do Silogismo hipotético (transitividade da seta)

$$\begin{array}{lr} (1) \sim p \rightarrow q \vee r & P_1 \\ (2) q \vee r \rightarrow \sim s & P_2 \\ \hline (3) \sim p \rightarrow \sim s & Q \end{array}$$

Outro modo de validação são as tabelas verdades apresentadas, onde um argumento é considerado válido se a condicional apresentar uma tautologia, o caso contrário, sofismo, representa a invalidação do argumento.

Teorema 1.3. Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$ é válido se, é somente se, a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ \dots \wedge \ P_n) \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Por fim, apresentaremos alguns símbolos essenciais nas demonstrações matemáticas, os quantificadores, sendo eles: quantificador universal, quantificador existencial e o quantificador de existência e unicidade.

O *quantificador universal*, determina que todos os elementos que pertencem a um conjunto não vazio A $(A \neq 0)$ satisfazem a proposição $p(x)$. Esse quantificador possui a notação "∀" e é interpretado como "Para todo...".

O *quantificador existencial*, considera que um elemento, ao menos, de um conjunto aberto não vazio A $(A \neq 0)$ satisfaz a proposição $p(x)$. A notação desse quantificador é "∃", lido como "Existe...".

Um *quantificador de existência e unicidade*, garante que uma existe e é único o elemento do conjunto aberto não vazio A $(A \neq 0)$ que satisfaça a proposição $p(x)$. Lido como "Existe e é único...", com notação "∃!".

Salientamos que os quantificadores podem ser operados por operações lógicas, podendo sofrer negação e manipulações algébricas de proposições para determinação do valor lógico.

Por fim, não podemos deixar de referenciar um conjunto essencial, o conjunto verdade (V), um conjunto que representa todos os elementos de um conjunto qualquer A que tornam verdadeira uma proposição. Notação: $V = \{x \in A \mid v(p(x)) = V\}$.

1.3. Teoremas e a Demonstração Matemática

Durante o desenvolvimento da matemática, um entre os marcos relevantes da contemporaneidade são os teoremas (ROQUE, 2012, p. 470 – 476).

Conforme defende Lima (2002), se temos uma proposição condicional, ou seja, $P \Rightarrow Q$, seu valor lógico será falso quando seu antecedente for verdadeiro e a consequência falsa, logo quando a hipótese é incapaz de sustentar a validação de uma tese. O termo “conjectura” representa uma afirmação fundamentada por suposições, uma vez demonstrada uma conjectura, então temos um “teorema”.

De acordo com a definição acima, podemos perceber que um teorema é uma sentença matemática, cujo validação é defendida por uma demonstração. Lima (2002) apresenta uma série de termos essenciais que combinados na definição do conceito de teorema, entre eles os termos “hipótese” e “tese”, os quais garantem a estrutura de um teorema. O primeiro termo representa as condições presentem em um teorema, no qual são de fundamentais utilização no processo demonstrativo, enquanto, a tese é a parte que se deseja demostrar.

Sucintamente, um teorema contém uma ou mais hipóteses, causas matemáticas, que por intermédio de um processo lógico matemático se demonstra uma tese, efeito.

Considerando um exemplo ilustrativo e didático podemos tomar um teorema baseado em uma implicação matemática, isto é, “Se, ..., então...”, dessa forma temos sua estrutura da seguinte forma:

$$HIPÓTESE(S) \Rightarrow TESE$$

Os “problemas de demonstração” (teoremas) são expressos na forma de argumentação, onde a conclusão é escrita como: (1) $Q: p \rightarrow q$, condicional ou (2) $Q: p \leftrightarrow q$, bicondicional, sendo p e q proposições simples ou compostas.

Teorema 1.4. Um argumento $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash (p \leftrightarrow q)$ é válido se, é somente se, a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ \dots \wedge \ P_n) \to (p \leftrightarrow q)$ é uma tautologia.

Na teoria da Matemática, estes os “problemas de demonstração” recebem os seguintes nomes:

- “Lema” é um teorema inicial utilizado para demonstrar outro teorema.
- “Proposição” representa um teorema de importância reduzida comparada ao teorema principal, sendo um teorema secundário ao contexto.
- “Corolário” é a consequência imediata de um teorema provado anteriormente, podendo também decorrer de uma definição ou axioma.

A estruturação e o processo lógico dedutivo garantem o que chamamos de demonstração matemática. A demonstração matemática é a abstração de pensamentos e implementação de técnicas auxiliares para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Desse modo, torna-se essencial o conhecimento das definições expostas nesse primeiro capítulo para que se possa compreender a implementação dos formulários no processo de demonstração.

Em conformidade com Singh (1998, p.35) “A busca pela prova matemática é a busca pelo conhecimento mais absoluto do que o conhecimento acumulado por qualquer outra disciplina”.

Diante da necessidade da redação lógica coerente e consciente no processo demonstrativo, são construídos tipos de demonstrações, cada um com seu grau de complexidade, que garantem a manipulação dos elementos matemáticos.

1.4. Tipos de Demonstrações

Os tipos de demonstrações matemáticas são: princípio da indução finita (PIF), direta, contrapositiva e redução por absurdo. A descrição de cada demonstração será realizada abaixo de acordo com o trabalho de Stefanowicz (2014).

A demonstração direta, consiste em assumir a hipótese como verdadeira, partindo de uma argumentação sustentada por afirmações simples, criar uma lógica de cadeia de afirmações dependendo da anterior até concluir a tese. Esse tipo de demonstração ocorre em proposições com implicação lógica, $P \Rightarrow Q$ e em proposições com equivalência, $P \Leftrightarrow Q$, ambas utilizando axiomas e teoremas para demonstração.

O Exemplo (1.5) representa um método de demonstração direta em proposições com uma implicação lógica, isto é $P \Rightarrow Q$. Note que nesse exemplo podemos identificar a hipótese e a tese conforme os conceitos apresentados na seção *1.3.* Nesse caso m, n serem valores pares, representam nossa hipótese e a conclusão ou tese é o somatório dos termos resultar em par, $m + n$ é par

Exemplo 1.5. Se m e n são números pares, então $m + n$ é par.

Demonstração: Sabendo que os termos são pares, ou seja, são múltiplos de 2, então podemos tomar $m = 2k$ e $n = 2l$, onde k, l são números pertencente ao conjunto dos inteiros ($k, l \in \mathbb{Z}$). Dessa forma,

$$m + n = 2k + 2l = 2(k + l)$$

Portanto, $m + n$ é múltiplo de 2, logo $m + n$ é par. ■

A demonstração indireta, diferentemente da direta consiste em assumir uma hipótese como verdade e negar a tese, fazendo uso dos casos da contrapositiva e da redução por absurdo.

O método de redução por absurdo, também denominado "contradição", geralmente é utilizado em teoremas para provar a existência, isto é, no seguinte modelo "Seja não x, logo...", a sua demonstração consiste em assumir que x é válido até atingir um absurdo.

Para exemplificarmos o caso de redução por absurdo, apresentamos o Exemplo (1.6) no qual pela afirmação $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$ iremos demonstrar sua veracidade realizando uma contradição, isto é, provando que $\sqrt{2} + \sqrt{6} \geq \sqrt{15}$ é um absurdo.

Exemplo 1.6. Mostre que a afirmação $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$ é verdadeira.

Demonstração: Suponha por absurdo que:

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} \geq \sqrt{15}$$

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 \geq \sqrt{15}^2$$

$$\Rightarrow 8 + 2\sqrt{12} \geq 15$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{12} \geq 7$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{12})^2 \geq 7^2$$

$$\Rightarrow 48 \geq 49$$

Observamos que $48, 49 \in \mathbb{R}$. De acordo com os conceitos de Lima (2002) o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um conjunto ordenado, tal como o conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$). Segundo Lima (2002) um conjunto ordenado é um conjunto que possui uma relação de ordem, ou seja, apresenta a distinção de qual é o maior ($>$), menor ($<$) e igual ($=$) ao comparar valores. Dessa forma, como $48, 49 \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado, o resultado $48 \geq 49$ é um absurdo, então o problema está demonstrado. ■

A contrapositiva é um método semelhante a redução por absurdo, assumindo a negação da sentença, porém nesse caso assumimos que dada uma sentença, $P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$, modificamos para o modo $\sim Q(p, q, \dots) \Rightarrow \sim P(p, q, \dots)$, ou seja, se inverte as proposições durante a prova do teorema.

Entre as técnicas especiais para demonstração de teoremas, as fundamentais são o método de indução e a demonstração por exaustão. A demonstração por exaustão ou "prova por casos", refere-se ao esgotamento por testes de todas as possibilidades presentes no teorema, isto é, um teorema é repartido em casos e individualmente cada parte é demonstrada. Note que a falha em um dos casos implica invalidação do teorema, tal como o esquecimento de demonstração de uma das partes.

No Exemplo (1.7) apresentamos um exemplo para o caso da prova por casos, no qual a partir da hipótese que $n \in \mathbb{Z}$ chegaremos na tese $n^2 + n$ é par, analisando todas situações possíveis, isto é, verificando se o caso é valido quando n é par e n é ímpar.

Exemplo 1.7. Se $n \in \mathbb{Z}$, então $n^2 + n$ é par.

Demonstração: Nesse problema temos que considerar dois casos, o primeiro sendo n par e o segundo quando n é ímpar.

Caso I: n é par, ou seja, $n = 2k$, logo temos que

$$(2k)^2 + 2k \Rightarrow 4k^2 + 2k = 2(k + 2k^2)$$

Portanto, $n^2 + n$ é par.

Caso II: n é ímpar, isto é, tem forma $n = 2k + 1$, assim

$$(2k + 1)^2 + 2k + 1 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 \Rightarrow 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$$

Portanto, $n^2 + n$ é par. ■

Por fim, a última estratégia referenciada nesse trabalho será o método de indução. O método da indução ou princípio da indução finita (PIF) apresenta duas formas, o primeiro princípio possui o seguinte enunciado:

Seja a um inteiro dado. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ temos dada uma afirmação $P(n)$ de forma que:

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq a,$

$$v\big(P(n)\big) = V \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ v\big(P(a)\big) = V\ e \\ (ii)\ Seja\ n = k \in \mathbb{Z}\ e\ k > a, se\ v\big(P(k)\big) = V, então\ v\big(P(k+1)\big) = V. \end{cases}$$

No Exemplo (1.8) apresentamos uma demonstração do primeiro caso de PIF, no qual demonstraremos que o somatório de n elementos do conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$) é equivalente a fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo 1.8. Demonstre que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja a afirmação $P(n)$: $(\forall n \in \mathbb{N})(1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2})$, primeiramente analisaremos o primeiro caso $v\big(P(a)\big) = V$, como $n \in \mathbb{N}$ então o primeiro valor do conjunto de $n = 1$, assim:

$$(i)P(1): 1\ = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$$

Seja $n = k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ e supondo que $P(k)$ é verdadeiro devemos mostrar que $P(k+1)$, é verdadeiro. De fato:

$$(ii)P(k): 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Somando $k + 1$ em ambos os lados da igualdade temos que,

$$P(k+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$P(k+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por (i) e (ii) e pelo PIF, temos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. ∎

O enunciado do segundo princípio da indução não difere muito ao primeiro, sendo apenas complementar, pois a contemplação desse princípio depende da boa ordenação de um conjunto.

Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ temos dada uma afirmação $P(n)$ de forma que:

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq a,$

$$v\big(P(n)\big) = V \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ v\big(P(a)\big) = V \\ (ii)\ Seja\ n = m \in \mathbb{Z}\ |a \leq m \leq k\ , se\ v(P(m)) = V, então\ v(P(k+1)) = V \end{cases}$$

Na literatura é comum se encontrar o uso das estratégias descritas, porém não são enunciadas quais estratégias cabendo ao aluno identificar qual estratégia adotada pelo autor, sendo algumas de maior facilidade de identificação como o caso do Método de Redução por Absurdo, no qual se inicia uma sentença com “Suponha por absurdo...”. No GFD, também é possível adotar todas as estratégias definidas, todavia para facilitar a compreensão do aluno será identificado qual o tipo de demonstração adotada na resolução do problema de demonstração. A adoção desse recurso é necessária para que o aluno possa recordar qual tipo de método empregado, associar seus conceitos e generalizar para compreender ou realizar um processo lógico de resolução do problema.

2. ANÁLISE MATEMÁTICA

Neste capítulo dissetaremos sobre a construção da Análise Matemática ou Matemática “pura” no contexto histórico, sua definição e importância para o avanço da Matemática, apresentando exemplificações e descrições breves dos principais conteúdos abordados na disciplina de Análise Real, além da apresentação das principais dificuldades na compreensão da disciplina e no processo de demonstração.

2.1. Contexto Histórico

A história da análise matemática e seu rigorismo se impulsiona entre os séculos XVII e XVIII, sendo contemplada somente no século XIX conforme Roque (2012). A necessidade de uma matemática rigorosa, ou seja, os motivos para esse acontecimento, somente ocorre após o advento do Cálculo Diferencial e Integral, assim torna-se imprescindível abordar o contexto histórico principiando das motivações que culminaram no cálculo.

> Métodos de naturezas distintas são comumente integrados em uma narrativa única, o que permite analisar a sua história em paralelo com um movimento para tornar a matemática “rigorosa”. Mas o critério de “rigor” utilizado na história da matemática tradicional espelha-se no da matemática atual e no que esse saber admite como argumentação legítima. Tem-se a impressão, assim, de que os procedimentos investigados evoluíram desde estágios mais rudimentares, nos quais certas inconsistências ainda não haviam sido reparadas, até o momento em que foram formalizados do modo como, hoje, consideramos válido. (ROQUE, 2012, p. 342)

Explorar as causas que culminaram na construção do cálculo exige um retrocesso profundo na história da matemática. Dessa forma, as informações históricas retratadas serão sintetizadas a partir dos estudos de Roque (2012), Eves (2004), Boyer e Merzbach (2012) e Bardi (2006).

2.1.1. Os egípcios e a sociedade grega

Os primeiros questionamentos motivadores surgiram desde a antiguidade com os egípcios e os gregos. Relata-se que os egípcios (aproximadamente 1800 a. C.) foram os primeiros a partir de construções utilizando régua e compasso a se questionar na possibilidade de construção de um quadrado de mesma área de um círculo, problema denominado como quadratura do círculo.

A quadratura do círculo é novamente analisada pelos gregos entre eles Antífon, Hipócrates, Eudoxo e Arquimedes, em especial os avanços de maior significância ocorrem por Eudoxo (408-355 a. C.) e Arquimedes (287-212 a. C.).

O trabalho de Eudoxo (408-355 a. C.) se encontra descrito no livro 5 dos *Elementos* de Euclides (aproximadamente entre 323 – 283 a.C.), no qual se descreve a teoria abstrata das razões e proporções, consiste na utilização do método de exaustão, ou seja, comensurar as áreas pela inscrição de polígonos em uma figura, aumentando os lados do polígono até onde se queira, aproximando o máximo da área desejada. A teoria de Eudoxo representa um avanço sobre os processos infinitos desenvolvidos por Hipócrates (460-370 a.C.) para resolver a quadratura do círculo.

A aprimoração do trabalho de Eudoxo (408-355 a. C.), ocorreu pelo matemático grego Arquimedes (287-212 a. C.), a partir do uso de sequências de aproximações finitas utilizando polígonos sobre a área do círculo. O matemático comprimiu a figura sobre outras duas áreas que se modificam e tendem a figura inicial, sendo uma das áreas crescente e outra decrescente, desse modo a diferença das áreas dos polígonos pode ser menor do que a quantidade de um polígono cujos lados são aumentados, método utilizado para determinação de áreas de figuras curvas.

Entre as sociedades da antiguidade que mais apresentaram contribuições científicas, a grega é a maior entre elas, os desenvolvimentos nas Ciências, Filosofia e Matemática são incalculáveis. O declínio dessa sociedade pela invasão islâmica, prosseguida da maior destruição cultural, o incêndio da biblioteca de Alexandria, proporcionou perdas relativas em todas áreas. Apesar da perda considerável, o desenvolvimento da herança matemática grega ocorreu no Oriente pelos árabes.

2.1.2. Revolução Científica: o progresso do século XVII

As incitações que precederam o cálculo são retomadas somente na Idade Moderna, no período denominado Revolução Científica. O período transitório entre Idade Média e a Idade Moderna é demarcado por guerra, peste e fome no continente Europeu. Apesar do cenário caótico, o período foi notável pela expansão marítima e as rotas comerciais entre o Oriente e Ocidente, desse modo a demanda matemática e científica foi voltada ao desenvolvimento de técnicas de navegações, criação de mapas, construções fortificadas, entre outros.

O início da Revolução Científica, século XV e XVI, representa a construção de uma base algébrica fortificada e simbólica, implementação da numeração indo-arábica, avanço na teoria das equações e aprimoração trigonométrica. Compreende-se que esse período foi um grande preparador para o século XVII à diante, solidificando as bases matemáticas para os primeiros grandes passos do Cálculo Infinitesimal e da Geometria Analítica.

O século XVII reuniu um conjunto de nomes matemáticos respeitáveis, se iniciando com Johannes Kepler (1571-1630) e o desenvolvimento das leis de Kepler. Em 1605, mediante as observações Tycho Brahe (1546-1601), Kepler conseguiu definir três leis matemáticas referente ao movimento planetários, para esse progresso se adotou o uso das elipses, enfatizado na primeira lei de Kepler, tal adoção permitiu o cálculo da elipse por métodos de aproximações de triângulos.

A contribuição francesa na Matemática, ocorreu através de dois grandes nomes, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1607-1665), por intermédio de processos independentes, ambos foram capazes de relacionar Geometria e Álgebra. Apesar do consenso histórico denominar Descartes como pai da Geometria Analítica, foi através da geometria de ambos que foi possível o cálculo da reta tangente em curvas planas, a quadratura do círculo, método para achar máximos e mínimos e posteriormente a formalização do cálculo.

Outras duas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento do Cálculo e a disputa matemática, os dois colaboradores foram James Gregory (1638-1675) e Isaac Barrow (1630-1677).

James Gregory (1638-1675), foi um matemático escocês, cujo a preocupação foi a aprimoração do método de Arquimedes (287-212 a. C.), possibilitando a resolução da quadratura em elipses e hipérboles. Além disso, Gregory proporcionou grandes avanços na análise infinitesimal, sendo quase o desenvolvedor do cálculo antes de Isaac Newton (1643-1727).

O trabalho de Issac Barrow (1630-1677) se fundamenta sobre a solução de curvas, quadratura e as retas tangentes, de modo analítico sendo distinto as abordagens de Descartes e Fermat. Barrow foi capaz de apresentar em seus estudos a relação entre áreas e a tangente, sendo analogamente quase criador do teorema fundamental do cálculo. Todavia, o Cálculo será somente desenvolvido e disputado por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

2.1.3. O Cálculo Diferencial e Integral: criação e disputa

Conforme apresentado resumidamente, o cálculo pode ser formalizado e inventado a partir da contribuição de um conjunto de ideias, teorias e progressos de diversos matemáticos. Esse processo construtivo soma mais de 2000 anos de colaborações e reuniões de trabalhos, sendo iniciado pela geometria da quadratura do círculo e concluído por duas grandes mentes que disputaram incansavelmente pelo seu legado e reconhecimento.

De acordo com Bardi:

> Sem dúvida, é uma história acauteladora sobre a importância de publicar as descobertas científicas. Talvez porque Newton e Leibniz travaram aas guerras do cálculo quando cada um deles estava no ápice de sua fama, o empate, para alguns, será sempre lembrado envolto em uma nuvem de infâmia. Mas, para mim, é uma das mais fascinantes histórias ligadas ao desenvolvimento da ciência, porque combina os mais gloriosos cumes da inovação científica com um dos embates intelectuais mais árduos e pessoais. E é, possivelmente, a única disputa na história da ciência que envolveu duas mentes assim tão poderosas – talvez as maiores do seu tempo. (BARDI, 2006. p. 269)

O matemático Isaac Newton (1643-1727), nasceu na Inglaterra em 1643. Desde seus 18 anos foi estimulado no *Triniti College* a estudar matemática, apresentando grandes vocações para a área. Newton encantando pela matemática estudou os livros desde a antiguidade, como a obra *Elementos* de Euclides até os trabalhos mais recentes da época por renomados matemáticos como Pierre de Fermat (1607-1665), John Wallis (1616-1703), entre outros.

Durante sua vida, o matemático fez grandes contribuições científicas, especialmente nas áreas de matemática e física. O “período de ouro” do trabalho de Newton ocorreu entre 1665 até 1671, momento em que fez avanços sobre os campos da ótica, lei da gravitação universal, cálculo infinitesimal e o teorema binomial. Entre os trabalhos referenciados, os que impulsionaram o Teorema Fundamental do Cálculo são o Teorema Binomial e o Cálculo Infinitesimal.

No período mencionado Newton (1643-1727) escreveu dois grandes manuscritos incluindo os avanços do Cálculo, *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (“Sobre a análise por meio de equações tendo um número infinito de termos”) em 1669 e *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (“Um tratado dos métodos das fluxões e das séries”) entre 1670 e 1671. Entretanto o grande problema foi que Newton não realizou a publicação, a publicação poderia ter poupado um grande embate pelo reconhecimento de inventor do cálculo.

O Método de Fluxões e Séries de Newton, consiste em estabelecer curvas a partir da união de pontos em movimentação. Desse modo, possibilitou a determinação dos limites, taxa de variação ou derivada e integrais permitindo aplicá-las na dinâmica, além disso o matemático conseguiu estabelecer relações entre os conceitos fundamentais do Cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu na Alemanha em 1646, sendo considerado por seus amigos como um intelectual capaz de debater uma grande variedade de assuntos, entre eles se destacavam Teologia, Direito e Matemática. Em 1672, Leibniz foi morar em Paris onde aprendeu sobre a matemática ocidental e os mais recentes avanços, dado que a região francesa, apresentava uma crescente de matemáticos devido a reconhecida academia *Royal Society*.

No período de 1675-1676 o matemático alemão desenvolveu suas maiores contribuições sendo uma calculadora capaz de dividir e multiplicar números com maiores casas e o Cálculo Infinitesimal. Distinto ao Método da Fluxões e Séries, o Cálculo Infinitesimal era mais complexo diante do formalismo e simbologia introduzidos por Leibniz, empregando o mesmo nível de rigorização que as quadraturas de Arquimedes (287 a.C. – 212 a. C.).

Leibniz (1646-1716) realizou a publicação de sua grandiosa invenção, o Cálculo, somente em 1684 e 1686. Um ano após essa publicação, Newton (1643-1727) publicou o que veria a ser sua grande obra, o primeiro volume de *Principia*, as duas outras edições foram publicadas, respectivamente, em 1713 e 1726.

No mesmo ano de publicação de *Principia*, se deu o estopim da guerra do cálculo que somente finalizou anos após mesmo a morte de Leibniz (1646-1716). Ressalta-se que no século XVIII diante da fama de Newton (1643-1727) e suas descobertas no ramo da física, seu trabalho sobre fluxões e séries era mais aceito nas academias, sendo somente no século XIX creditado a Leibniz (1646-1716) suas contribuições ao cálculo e empregado sua notação matemática.

2.1.4. Os séculos XVIII e XIX: o aprimoramento do cálculo e a matemática "pura"

O século XVIII foi demarcado pelas aprimorações sobre o Cálculo, entre as maiores colaborações estão a reconstrução do Cálculo com base na análise algebrizada e a Teoria das Funções por Leonhard Euler (1707-1783), e a definição de conjunto infinito e a Teoria das Funções Contínuas por Bernhard Bolzano (1781-1848).

Apesar da noção de função estabelecidas por esses matemáticos, essas concepções serão criticadas no início do século XIX, incialmente diante do problema de propagação do calor. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático e físico francês, consegue resolver esse problema estabelecendo uma série trigonométrica, apresentando como solução uma função somente em um intervalo, inovando assim a definição de função.

Outra grande preocupação do século XIX é o rigor, o primeiro matemático a questionar essa falta de rigorisidade sobre a matemática na academia foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Torna-se imprescindível definir que o termo "rigor", se refere a forma da análise matemática como ainda hoje, confiável.

O processo de rigorização da matemática e a criação da Matemática "pura", ocorre em três períodos: o primeiro por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), o segundo por um grupo de matemáticos alemães e o terceiro por Giuseppe Peano (1858-1932).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi um matemático francês, que percebeu durante a ministração de seus cursos, a necessidade de ordenar as definições e através de teorias demonstrar teoremas, ou seja, a necessidade de estabelecimento do processo de demonstração. Além disso, Cauchy (1789-1857) implementou as definições de continuidade e limite, como implementadas atualmente, e a definição da integral como uma soma de limites.

As contribuições alemãs ocorrem por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Bernhard Riemann (1826-1866), Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918). Weierstrass (1815-1897) e Reimann (1826-1866) são os primeiros a perceber a necessidade de uma análise além da investigação geométrica, a análise algebrizada. Essa percepção é alcançada através da descoberta de funções contraditórias, como a função contínua não derivável em todos os pontos do domínio por Weierstrass e a função contínua somente para valores irracionais por Reimann.

Cantor (1845-1918) apresentou suas contribuições sobre a Teoria dos Conjuntos categorizando os tipos de infinitos, assim estabeleceu conceitos como enumerabilidade e não-enumerabilidade. O trabalho em comunhão por Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916) concebeu o axioma Cantor-Dedekind referente a continuidade na Análise da Reta.

Por fim, a terceira e última etapa que culminou na Análise Matemática foram os axiomas definidos por Giuseppe Peano (1858-1932), relacionando a lógica com os números naturais, esses axiomas são fundamentais para o início do estudo sobre a Análise Matemática e a construção de seus conceitos, teoremas e propriedades.

2.2. Definição e importância da Análise Real

Segundo Stillwell e Stewart (2017) a Análise é uma área da Matemática que estuda os limites e teorias relacionadas a mudanças contínuas, como diferenciação e integração. Destaca-se que essas teorias são investigadas sobre o contexto de funções e números reais e complexos.

Conforme descrito no tópico *2.1. Contexto Histórico*, a análise se culminou a partir do desenvolvimento do Cálculo. Apesar de ser aplicável a qualquer objetivo em espaços matemáticos, dado por uma distância característica como no caso dos espaços métricos, ou por proximidade determinada pelos espaços topológicos, a Análise pode ser distinguida do ramo da Geometria.

Adentro da Análise se encontram entre as principais vertentes, os seguintes estudos: Análise Real, Análise Complexa, Análise Funcional, Teoria da Medida, Equações Diferenciais, Análise Numérica, Análise Global, entre outras.

Neste trabalho o alvo da investigação será a Análise Real, dada que esse ramo da matemática é ministrado nas universidades como disciplina presente nos cursos de bacharel e licenciatura em Matemática.

A Análise Real consiste no estudo de conceitos e propriedades analíticas do conjunto dos números reais e de uma função real de uma variável real. A disciplina se apresenta como divisor de águas para no aprendizado do futuro matemático ou professor de matemática, uma vez que exige um processo de rigorização e conhecimentos bem estruturados sobre a disciplina de cálculo.

> O Prof. Elon considera a Análise Matemática uma forma de se habituar o futuro professor com o método dedutivo, resumido por ele nas seguintes palavras: “Toda conclusão pressupõe uma hipótese”, isto é, todas as conclusões seguem um modelo de raciocínio dedutivo a partir de hipóteses. Este tipo de pensamento está na base da Análise Matemática e deveria ser intencionalmente explorado e desenvolvido. (REIS, 2001. p. 189)

Dessa forma, conforme apresentado por Reis (2001) existe uma necessidade da Análise Matemática nos cursos de licenciatura, dado que a estrutura ao qual se orienta a disciplina permite evoluir pensamentos dedutivos lógicos. Apesar da presença de tópicos específicos e com maior grau de complexidade como por exemplo, topologia e espaços métricos, esses conhecimentos são realizados por uma extensão de conhecimentos anteriores desenvolvidos ao decorrer do curso, construindo uma estrutura cognitiva, que pode ou não conter falhas dificultando o aprendizado do aluno.

A apresentação da área ocorre por conceitos introdutórios como função, continuamente são retratadas demonstrações simples com apresentação do conjunto dos naturais para o desenvolvimento do método de indução. A evolução dos conceitos ocorre pela construção dos números reais a partir dos números racionais, contemplando propriedades como a desigualdade de Bernoulli.

As definições e propriedades de séries são introduzidas a partir do conceito de convergência, demonstrado pelo conhecimento de limite das sequências. De modo similar, a implementação de outros conjuntos só ocorre a partir do estabelecimento do conhecimento mais simples, via estabelecimento do conjunto dos reais e noções topológicas.

Entre os conceitos mais importantes, está o de limite, pois através dele se introduz novos conceitos essenciais como a noção de continuidade necessária para o Teorema do Valor Intermediário, as noções de séries conforme enfatizado, a definição de derivada posteriormente contribuinte para o conceito de integral e a demonstração mais importante da Análise Real, o Teorema Fundamental do Cálculo. Os saberes mais complicados somente se estabelecem após todas as etapas, como a convergência uniforme e as integrais impróprias.

Desse modo, fica explícito a necessidade da construção de graus de conhecimento do simples ao complexo, que carece ser compreendido em todas as etapas da demonstração de teoremas e propriedades do tema, evitando formação de lacunas no conhecimento e obstáculos no aprendizado da disciplina.

2.3. Epstemologia genética e os obstáculos na demonstração da análise real

A Epistemologia Genética, também denominada Concepção Piagetiana, é o estudo da teoria do conhecimento desenvolvida por Jean Piaget, cujo objetivo é compreender como se cria e evolui o conhecimento humano acerca de algo, ou seja, como a partir de conceitos simples se passa a compreender conceitos complexos.

A teoria epistemológica considera como essencial a análise das estruturas cognitivas e a interação entre o meio ao qual o sujeito está inserido em um período de tempo. Conforme Piaget e Garcia (2011) a construção da cognição sempre ocorre através de uma mesma sequência de procedimento, desse modo entender essa construção possibilita compreender como aprendemos.

> Para Piaget, a construção de novos conhecimentos é vista como adaptação, processo pelo qual o sujeito, em sua interação com o objeto, necessita modificar sua estrutura cognitiva prévia (processo de acomodação) para poder assimilar (processo de assimilação) informações novas, o que, por sua vez, resulta em novo patamar de organização e de adaptação ao objeto. Afinal, "a inteligência é uma adaptação", o que significa dizer que a função da inteligência é "estruturar o universo tal como o organismo estrutura o meio imediato" (PIAGET, 1978b, p. 15). Portanto, para explicar a construção do conhecimento, é necessário entender a organização das estruturas de assimilação do mundo exterior que, ao mesmo tempo que a ele se adaptam, se transformam e transformam-no. (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020. p. 405)

A estrutura cognitiva, mais especificamente sua construção, ocorre por meio de etapas, esse processo é conhecido como Teoria dos Estádios. De acordo com os estudos de Dolle (1987) existem alguns critérios que regem essa teoria, sendo eles a sucessão dos conhecimentos, relação de dependência entre eles, ou seja, para que se possa compreender um nível mais complexo se precisa ter compreendido o nível anterior mais simples, e generalização e modificações que podem ocorrer entre os níveis.

Na Análise Real, as demonstrações são essenciais dado que provam um teorema ou propriedade através de um procedimento formal e rigoroso. O processo de rigorização matemática abordado inicialmente por Cauchy, conforme discorrido no contexto histórico, demonstra a preocupação da Matemática em estabelecer um método dedutivo utilizando conceitos anteriores e linguagem simbólica para uma validação matemática.

Considerando os estudos teóricos, buscou-se identificar as relações pertinentes ao desenvolvimento cognitivo e as dificuldades na compreensão e demonstração na Análise Real. O modelo presente é um estudo comparativo na qual apresenta uma hipótese que pode posteriormente ser aplicada. Dessa maneira, com base na conceituação e rigor demonstrativo matemático, foram determinados os seguintes níveis para o desenvolvimento do processo de demonstração na Análise Real: (i) domínio da linguagem matemática e pensamento lógico; (ii) conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral; (iii) identificação e organização dos elementos e determinação de conhecimentos prévios pra demonstração; (iv) organização e rigorização da demonstração.

A primeira etapa consiste no conhecimento sobre a simbologia matemática, na qual se deve conhecer a Lógica Matemática e sua linguagem reconhecendo quando e como utilizá-la, sem conexões diretas com problemas específicos, sendo necessário que o matemático compreenda como generalizar e implementar essa simbologia em cada caso.

O progresso para segunda etapa, consiste na abstração da linguagem matemática para o Cálculo Diferencial e Integral, considerando todos os seus conceitos e propriedades. Desse modo, se deve realizar uma abstração reflexionante, a partir das informações anteriores ser capaz de aplicar sobre um conhecimento superior, ou seja, a partir do domínio sobre a linguagem matemática se deve formalizar e aplicar a linguagem sobre o Cálculo.

O terceiro nível, consiste sobre uma aplicação em um problema de demonstração específica, sendo necessário a projeção dos níveis inferiores para o nível superior. Consiste na capacidade de determinar os principais elementos lógicos como a hipótese, tese e as premissas em um enunciado formal. A identificação e organização de cada elemento é necessária para que se possa construir um processo dedutivo de demonstração reconhecendo o ponto de partida e final, além de elementos que devem ser utilizados no desenvolvimento.

Ademais, a relação de dependência entre os níveis é averiguada, quando se observa que para se aritmetizar a análise, ou seja, para se compreender o processo de construção da análise é preciso que o sujeito tenha capacidade de realizar a passagem do nível (i) para o nível (ii), e assim posteriormente se estender ao nível (iii), onde a conceituação do Cálculo compõe a teoria base da demonstração e aritmetização da análise real.

Por fim, o último nível consiste na efetivação do processo, onde se depende de todos níveis e os manipula para organizar uma estrutura de demonstração na qual o indivíduo é capaz de compreender em cada etapa a operação realizada e a transição entre essas operações, identificando qual conceito e teoria implementada e descrevendo passo a passo, minuciosamente, por meio de uma linguagem formal e rigorosa.

A proposta dos quatro níveis descreve um modo de demonstração na Análise Real, onde o sujeito a partir de um objeto de conhecimento simples como a lógica matemática apresentada desde o início dos cursos de matemática, compreende como organizar e abstrair o conhecimento para níveis superiores, sendo capaz de ao último nível reconhecer cada etapa do processo e desenvolver com o rigor necessário.

Na literatura referente a Análise Real, esse processo de demonstração ocorre de modo horizontal contínuo, valorizando o uso da simbologia lógica e formalização. Entretanto, algumas etapas descritas como os níveis (ii) e (iii) nem sempre são explicitadas, apresentando lacunas na estrutura cognitiva, implicando no aprendizado do aluno e realização de uma demonstração errada ou incompleta. Desse modo, este trabalho busca apresentar um método de demonstração via formulários verticalizado, capaz de contemplar todos os níveis e contribuir significativamente para a aprendizagem da Análise Real nos cursos de Matemática.

Referente a ordenação e necessidade dos níveis para construção do processo de demonstração na Análise Real, pode-se avaliar o modelo estrutural. O pensamento lógico como proposto no primeiro nível apresenta maior dificuldade de não se apresentar presente ou inerente no indivíduo, afinal o raciocínio lógico é construído nos primórdios do ser humano e a linguagem matemática é instruída nos primeiros anos após o ingresso no ensino superior dos cursos de Matemática.

O segundo nível, referente ao conhecimento sobre Cálculo Diferencial e Integral, pode em primeira instância ser um fator descartável, de modo que o indivíduo poderia compreender Análise sem esse conhecimento prévio. Entretanto, um indivíduo desprovido desse conhecimento recaí sobre uma lógica de intuição, na qual suas demonstrações seriam baseadas em intuitos, esse tipo de lógica empregado é denominado Intuicionismo. Newton Carneiro Affonso da Costa (1992) apresenta uma série de construções Lógica Matemática como o logicismo, o intuicionismo e formalismo descrendo esses métodos e tecendo críticas, no que diz respeito ao Intuicionismo o matemático descreve críticas na adoção da filosofia matemática de Brouwer. Segundo da Costa (1992, p. 47) para ser considerada congruente uma Matemática precisa ter caráter autêntico, condição não encontrada no intuicionismo. Desse modo, torna-se válido a necessidade da compreensão de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, mesmo que o conhecimento apresente lacunas.

O terceiro e quarto níveis, remetem-se em essencial a organização do pensamento lógico e descrição da demonstração em linguagem formal matemática, tais processos efetivam o que se espera no desenvolvimento do aluno, ou seja, são nesses níveis que se coloca em prática o conhecimento aprendido e permitem ao docente avaliar o desempenho e identificar erros na linguagem ou compreensão.

Sobre os aspectos apresentados, compreende-se a necessidade da presença desses níveis, mas destaca-se que esse procedimento pode ser manipulado e reformulado para que se obtenha resultados melhores de compreensão nas demonstrações matemática.

2.4. Epistemologia de Gaston Bachelard e o pensamento científico

O filósofo e poeta francês Gaston Bachelard, nasceu em 27 de junho de 1884 em Bar-sur-Aube na França e morreu em 16 de outubro de 1962. Bachelard dedicou sua vida a educação básica sendo um desenvolvedor de uma epistemologia que rompeu com as filosofias do Imobilismo.

> O espírito científico é essencialmente uma retificação do saber, um alargamento dos quadros do conhecimento. Julga o seu passado condenando-o. A sua estrutura é a consciência dos erros históricos. Cientificamente, pensa-se o verdadeiro como retificação histórica de um longo erro, pensa-se a experiência como retificação da ilusão comum e primeira. (BACHELARD, 1996. p. 120)

No campo filosófico, Bachelard (1996) buscou criticar o caráter unitário científico e o reducionismo, sendo assim em suas obras discorreu sobre obstáculos no conhecimento e desenvolvimento do pensamento científico, denominados como obstáculos epistemológicos.

Na epistemologia bachelardiana se denomina obstáculo a relação de equívoco ou não aceitação entre o sujeito e o objeto de conhecimento. Segundo Araújo (2017, p.35) os obstáculos são definidos em sete categorias pelo filósofo, “[...] a experiência primeira, o conhecimento geral, o obstáculo verbal, o substancialismo, o conhecimento unitário e pragmático, o obstáculo animista e o obstáculo ao conhecimento quantitativo.".

Baseado nos estudos de Araújo (2017), a primeira categoria Bachelard apresenta críticas quanto ao recebimento do conhecimento e aceitação imediatista sem implementação de uma racionalização, propiciando um bloqueio na libertação intelectual ao qual o indivíduo abandona o conhecimento velho para aprender um novo conhecimento. O segundo obstáculo, o conhecimento geral, é apresentado pelo filósofo como um fatalismo, dado que o conhecimento geral ou generalizado inibe o desenvolvimento de um criticismo e pensamento científico, devido sua imprecisão.

No obstáculo verbal, o indivíduo busca construir com palavras ou imagens, metáforas da realidade proporcionando um conhecimento inautêntico. De acordo com Silva (2015) substancialismo, similar ao obstáculo verbal, busca de maneira rápida induzir um falso conhecimento, porém nesse obstáculo se introduz uma explicação temporária da realidade.

O obstáculo unitário e pragmático, é uma categoria ao qual se busca introduzir um conhecimento derivado de amplas generalizações, que apesar de serem úteis em diversos casos, essa forma de conhecimento pode conter imprudências que causam hiatos na construção de novas ideias para o desenvolvimento de um espirito científico. Na categoria de obstáculo animista, remete-se ao fato de atribuir vida a objetos inanimados na tentativa de explicar o conhecimento por uma aproximação com a vivência. Por fim, o obstáculo ao conhecimento quantitativo, ao qual se pressupõe um excesso de objetividade e precisão, que podem admitir aceitação de determinações fantasiosas em busca de um ideal distinto a realidade.

Desse modo, o pensamento científico ou espírito científico, só ocorre quando superado as barreiras. A Matemática como qualquer outra ciência, é fadada aos obstáculos expostos na filosofia bachelardiana, em especial podemos destacar esses obstáculos no processo de demonstração na Análise Real.

No momento em que o estudante recebe um problema ou teorema de Análise Real, pode-se admitir uma aceitação imediata do enunciado, sem questionamento racionais o que pode prejudicar na construção de uma Lógica demonstrativa. Fatores como generalização, implementação de um conceito geral sem direcionamento ao problema apresentado, podem ser fatais para construção de uma lógica errônea. Outro obstáculo recorrente é o excesso da linguagem formal, apesar de necessária, o simbolismo matemático pode ser empregado de modo confuso ou implementado com propósito distinto ao seu real significado, propiciando um resultado diferente ao esperado. Sendo assim, se reforça a necessidade do procedimento defendido na seção *2.3*, ressaltando a inevitabilidade do conhecimento da linguagem matemática e sua lógica, e compreensão de Cálculo Diferencial e Integral para que se possa direcionar uma cognição sem causar falsas suposições, além de uma ordenação no pensamento científico.

3. FORMULÁRIO DE DEMONSTRAÇÃO

Neste capítulo, será realizado uma discussão referente uma técnica de demonstração matemática para a disciplina de Análise Real, o Grupo de Formulários para Demonstração (GFD), detalhando os componentes que compõem essa técnica e a conexão entre esses campos. Ademais, serão abordados problemas de demonstração utilizando o GFD no processo de resolução.

3.1. Descrição do Grupo de Formulários para Demonstração

O Grupo de Formulários para Demonstração (GFD) apresenta em sua composição geral, a união de formulários menores, ou seja, formulários que apresentam apenas uma etapa ou parte do GFD. A junção desses formulários representa uma descrição completa e verticalizada de provas que será aplicada em Análise Real (ver Apêndice I).

O uso de um formulário quebrável em outros formulários apresenta relevância na construção do pensamento lógico matemático, dado que permite ao estudante identificar com maior precisão em qual etapa apresenta dificuldade ou incompreensão.

Analisando a bibliografia nota-se na descrição de livros didáticos a recorrência com maior frequência a abordagem de demonstração horizontal. Processo prejudicial à compreensão do estudante e na construção do pensamento cognitivo, pois dificulta na ordenação lógica e implica em uma defasagem na identificação da quebra do raciocínio.

3.1.1. O Enunciado do Problema

O enunciado do problema representa a primeira parte do GFD, no qual o estudante deve preencher esse campo com o enunciado do problema proposto para demonstração. Nesse campo, deve ser introduzido o enunciado completo e com todas informações disponíveis, inserindo simbologia matemática ou fórmulas, caso seja apresentado por esta razão é necessário verificar que a informação preenchida esteja de acordo com a expressa no material de estudo.

O espaço deferido para o enunciado do problema, se justifica pela necessidade da interpretação do problema. A Matemática é, acima de tudo, uma linguagem constituída pela escrita e por símbolos, ao qual, por seus enunciados matemáticos, podemos extrair informações em níveis lógicos, possibilitando a construção de demonstrações.

> A linguagem matemática, oral e escrita, é um registo científico, uma variedade especializada da língua portuguesa, por isso, com características específicas, por exemplo, uma função é uma transformação de um elemento em outro, uma raiz quadrada não é a base quadrangular de uma árvore, mas sim a operação inversa da

> potenciação e a conjunção e não corresponde obrigatoriamente a uma adição. Além disso, em linguagem matemática escrita, recorre--se a um sistema de notação logográfica, por isso, diferente do sistema fonográfico de registo escrito da língua portuguesa. (MESQUITA, 2013, p.5)

Conforme define Mesquita (2013), os símbolos matemáticos, combinados com a escrita, são suportes para o desenvolvimento da resolução do problema, desde que bem compreendido pelo leitor. Sobre esse aspecto, realçamos a necessidade da compreensão lógica e domínio da linguagem matemática, conforme apresentado na seção *2.3*, dado que a incompreensão possibilita dificuldades na resolução da proposta enunciada.

> [...] a compreensão frásica necessita que cada palavra seja guardada temporariamente, enquanto a frase ouvida [ou lida] é gramaticalmente processada, ou seja, se estabelecem as relações entre as unidades constituintes do enunciado e se reconstrói o seu significado. Uma vez extraído o significado, as palavras exatas de cada constituinte são esquecidas, conservando o ouvinte o cerne da informação. (SIM-SIM, 1998, p.151)

Segundo postulado por Sim-Sim (1998), esse processo cognitivo totalmente relacionado a memória do indivíduo é melhor efetivado quando se possui um vocabulário amplo. No caso da Matemática, essa compreensão se estende além da gramática da linguagem materna, mas para a compreensão da linguagem matemática, no qual por meio simbólico e rigoroso define seus conceitos.

Barguil (2017) defende que os enunciados possuem um propósito comunicativo e se consagram na forma de gêneros discursivos, que possuem uma estrutura baseada no estilo, conteúdo temático e composição. Dessa maneira, a Matemática através de seus enunciados busca comunicar ao seu leitor o que se espera como resultado, fornecendo por vezes ferramentas necessárias para resolução do problema.

Ainda segundo Barguil (2017), os enunciados exigem de seu leitor as habilidades de *interpretar, representar e resolver*. Essa habilidade é conhecida como literacia matemática, sucintamente é a capacidade de identificar e compreender a Matemática, sendo referida pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e defendida em todos âmbitos da educação. Dada sua importância, tal habilidade é demasiadamente discutida no âmbito da Resolução de Problemas Matemáticos na Educação Básica, sobre o qual não entraremos em discussão nesse texto dado sua complexidade e espaço de discussão.

Portanto, o enunciado representa um conjunto de palavras e símbolos matemáticos, ao qual por uma linguagem própria, a Matemática expõe um conjunto de informações do problema ao estudante, ao qual irá interpretar através de uma fragmentação das partes. O desmembramento possibilita recolher dados e criar um fluxo lógico para resolução, essa ruptura conforme descrita no tópico posterior auxilia no processo de literacia e na identificação da estratégia mais adequada na construção da demonstração.

3.1.2. Formulário A – Argumento

O formulário A, representa o primeiro formulário menor, nessa região se encontra uma coluna representada por L, ao qual se determina os números das linhas, indicadas pelo termo "A" representando o formulário A e um número natural iniciando pelo 1 até n. Salientamos que em qualquer parte do GFD se pode acrescentar linhas ou espaços extras de preenchimento.

A segunda coluna representa a identificação de certas informações contidas no enunciado, sendo elas: premissas, identificadas por $P_1, P_2, \dots, P_n$, as hipóteses, condições iniciais para se construir o começo da demonstração, denotadas por $p_1, p_2, \dots, p_n$; e as teses, resultado a ser alcançado na demonstração, indicadas por $q_1, q_2, \dots, q_n$. Entre a identificação das hipóteses e teses, se encontram os símbolos → e ↔, que representam o caso "se, então" e "se, e somente se", respectivamente.

Por fim, a última coluna denominada descrição simbólica, conforme indica o nome remete-se a identificação e descrição das premissas, hipóteses e teses em linguagem matemática formal.

O processo de desmembramento realizado no Formulário A auxilia na identificação dos elementos pertinentes ao enunciado, de modo que o estudante pode identificar cada objeto apresentado e definir o que se espera determinar, além de dados auxiliares no processo de resolução.

Segundo os estudos de Sim-Sim (1998) a compreensão de um enunciado matemático requer sua seriação e interpretação por etapas para que se possam criar agrupamentos, como um processo de descodificação, possibilitando ao indivíduo compreender a mensagem. Sendo assim, a fragmentação realizada nessa etapa do GFD é essencial, devido sua contribuição para o desenvolvimento da habilidade necessária definida por Barguil (2017) como interpretação.

3.1.3. Espaço Teórico e Observações

Para Robert Gagné "O indivíduo necessita e reúne pré-requisitos e usa-os na resolução de um problema. Ao resolvê-lo aprende algo novo. Este é o processo". (apud GONÇALVES, 2006, p.2). De acordo com o psicólogo americano Gagné, para se construir uma solução de um problema é necessário a seleção e aplicação de pré-requisitos.

A necessidade de um plano instrutivo para resolução de um problema, possibilita ao estudante a criação de diversas e variadas rotas ou estratégias para resolução de um mesmo problema, cada uma com sua particularidade. Esse procedimento é denominado *heurística*, um ramo de estudo da Lógica, no qual se definem regras, estratégias, métodos, conceitos, entre outros, que direcionam a solução para o problema.

O pensamento heurístico permite ao indivíduo após o agrupamento de informações pertinentes apresentados pelo problema e a compreensão do enunciado, a reunião de conhecimentos prévios para criação de um processo lógico e individual para se atingir o resultado. "Com isso, pensar heuristicamente produz criatividade e esta conduz a novos paradigmas dentro dessa área de conhecimento." (GERVÁZIO, 2019. p.36)

Sobre esse aspecto, a subseção *3.1.1*, apresenta ao estudante a possibilidade de compreender o enunciado pela fragmentação do Formulário A. Em seguida, reunir seu pré-requisitos referentes a Análise Matemática Real para construção de uma estratégia de demonstração, isto é, implementar o pensamento heurístico, sendo assim é indispensável a presença dessa parte no GFD.

Nesse campo de preenchimento, o indivíduo apresenta liberdade para descrever teorias, conceitos, teoremas, definições, desenhos esquemáticos entre outras fundamentações teóricas, que sejam utilizadas no processo de demonstração, justificando a etapa de construção do raciocínio lógico. Em relação as observações, os estudantes podem inserir ideias, esquemas ou questionamentos que podem surgir ao decorrer da demonstração, permitindo assim se criar um espaço de exposição do raciocínio empregado na solução do problema.

Nessa área, para que haja uma ordem nos fundamentos teóricos, é imprescindível que o aluno enumere os conceitos adotados, utilizando a letra T que representa a teoria descrita e um número $1,2, \dots, n$ para que se possa identificar no passo a passo da demonstração, em qual momento se aplica o conhecimento discorrido.

3.1.4. Formulário B – Demonstração

A primeira linha dessa região que constitui o segundo formulário menor, apresenta o termo “Estratégia”, ao qual o estudante deve identificar qual tipo de técnica de demonstração será aplicada, entre as técnicas estão a contrapositiva, redução por absurdo, direta, método por exaustão ou prova por casos e o método de indução, conforme descrito na seção *1.4*.

A primeira coluna desse formulário, de modo análogo ao formulário A, denominado L, representa o número de linhas indicados pela letra B e por um número do conjunto dos naturais, partindo de 1 até n termos. A segunda coluna é a “Justificativa/Afirmações”, campos ao qual se pode introduzir em linguagem escrita normal, sem uso de simbologia, o motivo de realizar a etapa ou procedimento.

A terceira coluna, LN, representa a identificação das linhas, a qual se constituiu a parte do passo realizado e nessas abas podem ser inseridas números do formulário A ou B. Na quarta coluna, TN, deve se citar a teoria ao qual se faz necessário nessa etapa e essa parte resgata as teorias apresentadas na região do espaço teórico.

Por fim, a última coluna, análoga ao formulário A, representa uma descrição em linguagem matemática, explicitando pelo uso de simbolismo o passo a passo da demonstração. Ressalta-se que o estudante deve fragmentar esses passos ao decorrer das linhas de modo que o raciocínio de cada procedimento seja identificado e apresente coerência.

De modo análogo ao Formulário A, a fragmentação do Formulário B garante que tanto o indivíduo que desenvolveu o processo de resolução possa compreender detalhadamente sua estratégia até o resultado, identificando se possui uma sequência lógica e se todos elementos foram utilizados no processo. Uma aplicação para estudos futuros é sobre a perspectiva do avaliador ou professor, que por intermédio desse método pode identificar a estratégia do estudante e erros na construção lógica, implicando em uma resolução errada, de modo que pode apontar ao aluno em qual linha se detectou o erro do estudante.

3.2. O Ato de “Demonstrar”

De modo análogo a realizar um resumo, resenha ou qualquer produção textual, o processo de demonstração depende do conhecimento, da experiência do autor, ou seja, é um ato particular.

> Na Matemática, o trabalho tem isto de singular: a estrutura por ele edificada é diretamente visada na sua mais completa abstração. Nem por isso ela deixa de ser extraída, contudo, do fundo de uma *experiência*, que se situa em níveis variados de abstração. Pode-se falar já, sem dúvida, de uma experiência matemática ainda ingênua no próprio interior da percepção. Em todo caso, não poderia haver caracterização universal de um plano de abstração específico para a estruturação matemática. Cada episódio, coletivo ou individual, do trabalho matemático se estabelece num nível mais ou menos adiantado de abstração. Mas esta abstração é, antes de tudo vivida como experiência, em parte herdada, em parte conquistada pelo gênio individual. É desta experiência que virão os elementos “intuitivos”, isto é, aqueles que o trabalho assume e recorta como dados, opondo-os – mais ou menos expressamente – às estruturas que suscita. (GRANGER, 1974, p. 29)

No livro *Filosofia do Estilo*, o filósofo francês Gilles-Gaston Granger demonstra como o conhecimento científico se molda através da composição de estruturas linguísticas, esse agrupamento carrega conhecimentos, abstrações e trabalhos de um indivíduo de forma organizada.

Na filosofia de Granger se evidencia como a Matemática faz uso do universo da linguagem usual, tal como estrutura uma por meio do simbolismo e sistemas lógicos, permitindo o surgimento de problemas de estilo. A estilística percorre a história da matemática de modo que, conceitos e propriedades são compreendidos e apresentados por matemáticos de modo singular, ou seja, cada qual em seu próprio estilo.

Conforme Granger (1974, p. 30) “[..] A passagem do amorfo ao estruturado, portanto, nunca é o resultado da imposição de uma forma vinda toda constituída do exterior, $\theta ύ\rho\alpha\theta\varepsilon\nu$, segundo a palavra de Platão.”, isto é, a exteriorização ou abstração é um ato único advindo da forma e conteúdo de uma experiência. O termo grego "$\theta ύ\rho\alpha\theta\varepsilon\nu$", apresentado pelo filósofo Platão, em tradução livre significa “a soleira”, remete-se a um objeto que está além de um cômodo ou ambiente, além de algo estrutural, o nível superior como a abstração.

Dessa forma, mesmo que seja apresentada uma estrutura idêntica para dois indivíduos, haverá inúmeros modos de estilos, pois depende da experiência de cada um, tal como suas experiências anteriores e a forma como essas são organizadas. Estendendo para área científica, em especial a Matemática, permite demonstrar que mesmo apresentados a estruturas semelhantes, a experiência com a Matemática ao redor e a organização desses saberes, permite várias possibilidades estilísticas, ou seja, várias maneiras de demonstração.

Sobre os aspectos apresentados, torna-se imprescindível ressaltar que as demonstrações variam de indivíduo para indivíduo, podendo ser semelhante, extensa ou simplificadas quando comparadas entre si, porém não é um problema, dado que possa atingir a tese utilizando hipótese e premissas, evidenciando sua estratégia de resolução e descrevendo seu fluxo lógico. Sendo assim, alertamos ao leitor que os exemplos apresentados posteriormente, podem ser demonstrados de outras formas.

3.3. Demonstrações de Análise Real via Formulário de Demonstração Matemática

Nesse tópico serão abordados problemas advindos da Análise Real para aplicar de modo prático o preenchimento dos formulários, a partir de exemplos selecionados na literatura pela autora.

Antes de aplicar o GFD, salienta-se que as escolhas dos exercícios ocorreram com base na ordenação do livro de nível universitário Lima (2019)

3.3.1. Problema de Demonstração 1

O primeiro exemplo proposto aborda um dos primeiros tópicos abordados na Análise Real, a apresentação de Conjuntos Finitos, Infinitos e Enumeráveis, essa temática já foi em alguns casos apresentadas ao indivíduo, caso o mesmo tenha conhecimento sobre Teoria dos Conjuntos.

Segundo proposto por Lima (2019), o conteúdo para resolução desse problema é o segundo, sendo que o inicial é uma introdução e revisão sobre conjuntos. No capítulo onde se discute a formação do Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$), conjunto ao qual suas sucessivas extensões permitem a construção de outros conjuntos numéricos.

O conjunto dos números naturais é formado a partir da três axiomas descritos a seguir, denominados de *axiomas de Peano*:

Axioma 1: $\exists s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que é injetiva, $(\forall m, n \in \mathbb{N})(s(m) = s(n) \Rightarrow m = n)$

Axioma 2: $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é conjunto unitário $\{1\}$; $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \neq s(n)$, se $n \neq 1$ então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s(n_0) = n$.

Axioma 3: Princípio da Indução: Se $X \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in X$ e $(\forall n \in X)(s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N})$.

A partir da construção do $\mathbb{N}$ é possível se definir alguns conceitos, como a definição de soma, definição de sucessor e antecessor, definição de produto e a relação de ordem entre os números naturais, sendo essa última necessário o conhecimento para a resolução do enunciado. Cabe ressaltar que cada definição ou relação estabelecida, possui suas propriedades como associatividade, comutatividade, transitividade, lei de cancelamento, entre outros.

A relação de ordem em $\mathbb{N}$ requer a operação de adição, desse modo, para contribuição do melhor entendimento do leitor, explicaremos a definição de adição, conforme apresentado em Lima (2019).

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por:

$$m + n = s^n(m).$$

Desse modo, somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor, isto é:

$$s^1(m) = s(m), \text{ e}$$

$$s^{s^n}(m) = s(s^n(m)),$$

possuindo outra notação possível para o sucessor de n, dado como $s(n)$ é o uso da notação $n + 1$ para representar o sucessor. Com a nova notação temos que:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Conforme já ressaltado anteriormente essa operação goza de algumas propriedades, sendo elas: associatividade, comutatividade, lei de cancelamento e tricotomia.

Agora podemos definir a relação de ordem dos números naturais. Dado $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é menor do que n, e representamos por:

$$m < n,$$

quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Sobre as mesmas condições podemos dizer que n é maior do que m representada por $n > m$. A notação $m \leq n$ significa que m é menor do que ou igual a n.

Essa relação de ordenação goza das propriedades:

Propriedade 1 - Transitividade: se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Propriedade 2 - Tricotomia: dados m, n, exatamente uma das alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n, m < n$, ou $n < m$.

Propriedade 3 - Monotonicidade da adição: se $m < n$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se $m + p < n + p$.

Esse conhecimento inicial prévio é o suficiente para que o leitor possa compreender qual conteúdo abordado na exemplificação e quais definições e conceitos essenciais para interpretação desse problema, assim podemos partir para a resolução do problema, enunciado a seguir.

Enunciado do problema:

Tricotomia - Dados os números naturais m, n, somente uma das possibilidades é verdadeira: $m < n, m = n, n < m$.

Formulário A – Argumento

L		Descrição Simbólica/Texto
A1	P_1: Premissa 1	
A2	P_2: Premissa 2	
A3	p1: Hipótese 1	$\forall m, n \in \mathbb{N}$
A4	p2: Hipótese 2	
	"→" ou "↔"	→ (Se, ... então...)
A5	q1: Tese 1	$m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$ (ou exclusivo)
A6	q2: Tese 2	

Espaço Teórico e Observações

T1. Relação de Ordem no Conjunto dos Naturais (Definição)
A relação de boa ordem entre os números naturais é definida em termos de adição. Dados os números naturais m, n dizemos que m é o menor que n, e denotamos por $m < n$, para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Sobre as mesmas condições, podemos dizer que $n > m$, n é maior que m. A notação $m \leq n$, significa que m é menou ou igual a n.

T2. (Segundo Axioma de Peano)
$\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ só possuiu um elemento. Ou seja, existe um único elemento natural que não é sucessor de nenhum outro, denominado número 1.

Formulário B – Demonstração

Estratégia: Por absurdo				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição Simbólica**
B1	Suponha que simultaneamente	A5		$m < n$ e $m = n$
B2	Então pela definição	B1	T1	$\exists p \in \mathbb{N} \mid m = m + p$
B3	De forma que,	B2		$m + 1 = m + p + 1$
B4	Cancelando o termo em comum m	B3		$1 = p + 1$
B5	Um absurdo, pois	B4	T2	1 não é sucessor $s(p) = p + 1$
B6	Analogamente no caso,	A5		$n < m$ e $m = n$
B7	Por definição,	B6	T1	$\exists k \in \mathbb{N} \mid n = n + k$
B8	Desse modo,	B7		$n + 1 = n + k + 1$
B9	Cancelando o termo n	B8		$1 = k + 1$
B10	Teremos um absurdo, pois	B5, B9	T2	1 não é sucessor $s(k) = k + 1$
B11	Por fim, no caso	A5		$m < n$ e $n < m$
B12	Temos que,	B11	T1	$\exists p \in \mathbb{N} \mid m = n + p$ e $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = m + k$
B13	Do qual resultaria,	B12		$n = n + p + k$
B14	Logo,	B13		$n + 1 = n + p + k + 1$
B15	Cancelando o termo em comum n	B14		$1 = p + k + 1$
B16	Novamente um absurdo,	B15	T2	1 não é sucessor $s(r) = r + 1$
B17	Onde,	B16		$r = p + k$
B18	C.q.d			

A lógica utilizada para esse método de resolução da atividade é adotar um método que haja uma contradição, isto é, que seja absurdo, nesse caso o absurdo é adotar inicialmente que duas relações de ordem podem valer simultaneamente. A manipulação, permite analisar todas as combinações de casos que seriam possíveis, em ambas se conclui um resultado inaceitável, que é o fato do número 1 ser um sucessor de algum valor, dado inválido, pois segundo a definição do livro suporte, o número 1 representa o primeiro elemento do conjunto $\mathbb{N}$, desse modo esse elemento não sucessor de nenhum outro número.

As dificuldades que podem ser encontradas pelos estudantes durante a resolução desse problema é o estabelecimento da relação de ordem em $\mathbb{N}$ com o Axioma de Peano, caso não tenha compreendido completamente os conceitos estabelecidos. O estudante pode também ter uma dificuldade durante a manipulação algébrica para demonstrar a impossibilidade de ocorrência de casos simultâneos, levando a incongruências no resultado.

3.3.2. Problema de Demonstração 2

O segundo exemplo pode ser considerado um pouco mais complexo em relação ao primeiro problema de demonstração, dado que engloba, além do conhecimento sobre os assuntos abordados em Análise, a compreensão de Cálculo Diferencial e Integral, em especial, conteúdo referente a Sequências e Séries.

Os conceitos de sequências e séries como explicados por Stewart (2017) são introdutórios, utilizamos as definições de Lima (2019) para imersão do leitor no conteúdo apresentado no problema.

Uma sequência pode ser entendida como uma listagem de números escritas em uma ordem definida:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, n \in \mathbb{N}$$

O primeiro termo na lista é representado pelo x_1, o segundo termo por x_2, e assim sucessivamente como o enésimo termo x_n. As sequências tratadas nesse caso, são as infinitas de modo que cada termo possui um sucessor. Outras notações para sequências são:

$$(x_n) \text{ ou } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Um exemplo para se tornar compreensível a definição acima, é a sequência de Fibonacci, determinada de modo recursivo pelas condições:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \; e \; x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \;\; n \geq 3$$

Desse modo, cada termo é dado pela soma dos dois termos anteriores, sendo assim os primeiros 8 termos dessa sequência são:

$$(1,1,2,3,5,8,13,21, \dots)$$

Uma sequência (x_n) pode ter um número real a que representa o *limite* da sequência (x_n) de números reais, assim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ ou } x_n \to a, \text{ quando } n \to \infty,$$

quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um número inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Em linguagem simbólica:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \,.\!\equiv\!.\, (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)$$

Se $\lim_{n\to\infty} x_n$ existir, dizemos que a sequência converge (ou é convergente). Caso contrário, dizemos que a sequência diverge (ou é divergente).

Note que ao tratarmos de sequências e posteriormente de séries, já se espera que o estudante tenha compreendido os conceitos iniciais referentes a limite construídos no início do Cálculo, não foi inserido tal conceito nesse trabalho.

No estudo de sequências existem diversas conceituações importantes como crescimento e decrescimento de uma sequência, limites superiores e inferiores de uma sequência. Entretanto, o assunto de maior relevância é a compreensão das séries a partir do conceito das sequências, dessa forma será enfatizado esse aspecto.

Segundo Lima (2019), se somarmos os termos de uma sequência infinita (a_n), teremos a representação:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ \dots .$$

denominado de série infinita (ou somente por série), sendo denotada pela notação:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ou } \sum a_n \ .$$

Outro conceito relevante é a definição de limite de uma série. Dada uma série $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, podemos denotar por s_n as somas parciais, assim:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Desse modo, obtemos uma sequência $\{s_n\}$ a qual, por meio do limite, como apresentado anteriormente, definimos se uma série converge ou diverge, isto é $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, onde $s \in \mathbb{R}$, então a série $\sum a_n$ é convergente:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s \text{ ou } \sum a_n = s$$

Definição 1: Se a sequência (s_n) é divergente, então a série é chamada também de divergente.

Outra maneira de se determinar a convergência de uma série é através de dois teoremas descritos abaixo.

Teorema 1.: Se a série $\sum a_n$ é uma série convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Como a reciprocidade desse teorema não garante que a série é divergente é necessário aplicar o teorema denominado como Teste da Divergência.

Teorema 2. (Teste da Divergência): Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

Variados tipos de testes comparativos podem ser aplicados analisando a convergência sobre os variados tipos de séries. Todavia, será pautado somente essa temática como uma introdução de modo que o estudante possa se situar no conteúdo abordado pelo exemplo. Antes de partimos ao problema é necessário apresentar ao leitor o conceito de convergência absoluta.

Teorema 3. (Critério de Cauchy para Séries): A fim de que a série $\sum a_n$ seja convergente é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.

O Teorema acima é interessante teoricamente, pois garante que se a série $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n$ também converge. Permitindo determinar corolários e definições para casos de convergência absoluta.

Definição 2: Uma série $\sum a_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é uma série convergente.

Teorema 4: Toda série absolutamente convergente é convergente.

A partir dos conceitos apresentados, o autor pode relacionar os teoremas presentes no Espaço Teórico e Desenhos da resolução do problema 2, são advindos como corolário do Critério de Cauchy para séries, possibilitando maior compreensão do processo demonstrativo descrito abaixo.

Enunciado do problema:

Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1,1]$ e $\sum a_n sen(nx), \sum a_n \cos(nx)$ são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

Formulário A – Argumento

L		Descrição Simbólica/Texto
A1	P_1: Premissa 1	$\sum a_n$ é uma série
A2	P_2: Premissa 2	
A3	p1: Hipótese 1	$\sum a_n$ é convergente
A4	p2: Hipótese 2	$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
	"→" ou "↔"	→ (Se, ... então...)
A5	q1: Tese 1	$\sum a_n x^n$ absolutamente convergente, $\forall x \in [-1,1]$
A6	q2: Tese 2	$\sum a_n sen(nx), \sum a_n \cos(nx)$ absolutamente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$
A7	q3: Tese 3	

Espaço Teórico e Observações

T1. (Definição)
Uma série $\sum a_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é série convergente.

T2. (Corolário)
Seja $\sum b_n$ uma série convergente com $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{R}$. Se existir $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n| \leq k.b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ de forma que $n > n_0$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

T3. Função Periódica (Definição)
Uma função periódica se repete ao decorrer de uma variável independente em um período constante, isto é, f é periódica com período $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ para todo x. Um exemplo são: as funções trigonométricas que tem em geral um período de 2π determinado pelo círculo trigonométrico.

<u>Formulário B</u> – **<u>Demonstração</u>**

Estratégia: Demonstração Direta				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição Simbólica**
B1	1º Parte: Conforme a definição, se		T1	$\sum\lvert a_n x^n\rvert$ convergente
B2	Então temos que	B1	T1	$\sum a_n x^n$ absolutamente convergente, $\forall x \in [-1,1]$
B3	Seja,	B1, B2		$\sum\lvert a_n x^n\rvert, \lvert x\rvert \leq 1$
B4	Por hipótese,	A3, B3		$\sum a_n$ convergente
B5	Assim, podemos reescrever como	B4		$\sum a_n\lvert x^n\rvert, \lvert x\rvert \leq 1$
B6	Manipulando, obtemos	B5		$a_n\lvert x\rvert^n \leq 1. a_n$
B7	Conforme a hipótese,	A4		$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
B8	Desse modo, pela definição	B4,B6, B7	T2	$\sum a_n\lvert x\rvert^n \leq 1. \sum a_n$
B9	Sendo assim,	B8	T2	$\sum a_n\lvert x\rvert^n \leq \sum a_n$
B10	Logo,	A5, B9		$\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente
B11	2º Parte: Seja,			$\sum a_n sen(nx), \sum a_n \cos(nx)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
B12	Usaremos da definição,	B11	T1	$\sum\lvert a_n sen(nx)\rvert, \sum\lvert a_n \cos(nx)\rvert$
B13	De acordo com a hipótese	A3, B12		$\sum a_n$ convergente
B14	Dessa forma,	B13		$\sum\lvert a_n sen(nx)\rvert, \sum\lvert a_n \cos(nx)\rvert$
B15	Sabemos por definição que	B14	T3	$\lvert sen(nx)\rvert, \lvert cos(nx)\rvert$ periódicas
B16	Assim,	B15		$\lvert sen(nx)\rvert \leq 1, \lvert cos(nx)\rvert \leq 1$
B17	Isto é,	B14, B16		$a_n\lvert sen(nx)\rvert \leq 1. a_n$, $a_n\lvert cos(nx)\rvert \leq 1. a_n$
B18	Pela definição,	B17	T2	$\sum a_n\lvert sen(nx)\rvert \leq 1 . \sum a_n$, $\sum a_n\lvert cos(nx)\rvert \leq 1. \sum a_n$
B19	Temos que,	B18	T2	$\sum\lvert a_n sen(nx)\rvert \leq \sum a_n$, $\sum\lvert a_n cos(nx)\rvert \leq \sum a_n$
B20	Portanto,	A6		$\sum a_n sen(nx), \sum a_n \cos(nx)$ absolutamente convergentes

B21	C.q.d			

A construção do raciocínio dessa resolução é pautada sobre os conhecimentos anteriormente apresentados sobre o Cálculo Diferencial e Integral. Dado que esse exercício apresenta maior complexidade para se alcançar a tese, é se adotado na construção a separação por etapa.

Na primeira etapa, ao qual o objetivo é resolver $\sum a_n x^n$ absolutamente convergente, $\forall x \in [-1,1]$, partimos da primeira definição apresentada no Espaço Teórico e Observações, buscando desenvolver o módulo da série e utilizando a restrição de domínio dada no Enunciado do problema. A manipulação algébrica realizada dentro do módulo combinado com as hipóteses apresentadas no problema, permite a validação da convergência da série por etapas enfim atingindo a primeira tese. Um ponto crítico para o desenvolvimento desse problema, conforme descrito acima, é a compreensão da retirada do módulo por partes, sendo necessário se avaliar cada parte da série.

Na segunda etapa, referente a tese $\sum a_n sen(nx), \sum a_n$ cos (nx) absolutamente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$, se resolveu de modo análogo a primeira etapa, isto é, analisando cada parte da série, porém nessa etapa ao se analisar as partes que constituem funções trigonométricas é necessário se considerar o fator da periodicidade para se validar a restrição do domínio, e posterior a convergência absoluta da série.

Nesse problema o que pode apresentar maior dificuldade no processo de construção da resolução do estudante é o desconhecimento sobre o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral, pois rompe com o nível (ii) estabelecido na seção *2.3*, no qual ressaltamos a necessidade desse saber e a importância para construção de uma demonstração da Análise Real.

3.3.3. Problema de Demonstração 3

Analogamente aos exemplos anteriores, situaremos o leitor sobre o conteúdo teórico ao qual refere-se no exercício, utilizando como base novamente o trabalho de Lima (2019).

Certos problemas encontrados em diversas áreas da ciência como a determinação da velocidade na Física, ou a construção da reta tangente na Matemática, são questões que envolvem um mesmo tipo de limite especial, tratado como derivada.

Antes de prosseguirmos com a derivada, torna-se fundamental recordar a definição de ponto de acumulação e limite de uma função, sendo assim:

Definição 1.: Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.

O conjunto dos pontos de acumulação de X será representado por X'. A condição $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X) pode ser descrita simbolicamente como:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X; 0, |x - a| < \varepsilon)$$

Observe como nessa definição possuímos uma ligação entre o conceito de limite apresentado na subseção *3.3.2*.

Definição 2.: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definidas num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. (Neste caso, f é uma função real de uma variável real). Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X, isto é, $a \in X'$. O número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

para significar que para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Portanto, quando a é ponto de acumulação do domínio de f, a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pode ser descrita simbolicamente como:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0; x \in X), (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$$

Em linguagem simples, podemos dizer que $f(x)$ tende a L na medida em que x tende ao valor de a, mas que $x \neq a$.Retomado esse conceito primordial, podemos definir esse limite especial, a derivada.

Definição 3.: Sejam $X \subset \mathbb{R}, f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$ (a é ponto de acumulação de X pertencente a X). A derivada de uma função f em um ponto a, denotada por $f'(a)$ é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se o limite da função existir.

Esse tipo de limite acontece com cálculos de taxas de variação. Suponha que y seja uma quantidade relacionada a outra quantidade x, ou seja, y é uma função de x, denotada por $y = f(x)$. Caso x varie entre x_1 e x_2, então a variação de x, ou incremento de x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

de tal modo que a variação de y implique em

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Desse modo o coeficiente de variação é dado por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

denominado como taxa média de variação de y em relação a x no intervalor $[x_1, x_2]$. Se analisarmos o limite dessa taxa de variação, ou seja, a taxa instantânea de variação de y em relação a x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Definição 4.: Uma função f é derivável ou diferenciável em a, se $f'(a)$ existir. É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

A definição acima garante que a curva não apresente pontos de ruptura ou mudanças abruptas de direção, dessa forma o gráfico da função pode ser analisado em todos pontos do intervalo dado que em todos existem limites. Estabelecido esses conceitos, o estudante pode compreender o método de resolução adotado nessa exemplificação.

Enunciado do problema:
Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in X \cap X'$. f é diferenciavél em $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$ $(\exists L \in \mathbb{R}$ e $r_{\bar{x}}: V_{\bar{x}} \to \mathbb{R})(f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + L.h + r_{\bar{x}}(h)$ e $\lim_{h \to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0)$.

Formulário A – Argumento

L		Descrição Simbólica/Texto
A1	P_1: Premissa 1	$X \subset \mathbb{R}$
A2	P_2: Premissa 2	$f: X \to \mathbb{R}$
A3	P_3: Premissa 3	$\bar{x} \in X \cap X'$
A4	p1: Hipótese 1	F é diferenciavél em $\bar{x}$
A5	P2: Hipótese 2	
	"→" ou "↔"	$\leftrightarrow$ $(se, e\ somente\ se)$
A6	q1: Tese 1	$(f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L.h + r_{\bar{x}}(h)$ e $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0)$.
A7	q2: Tese 2	

Espaço Teórico e Observações

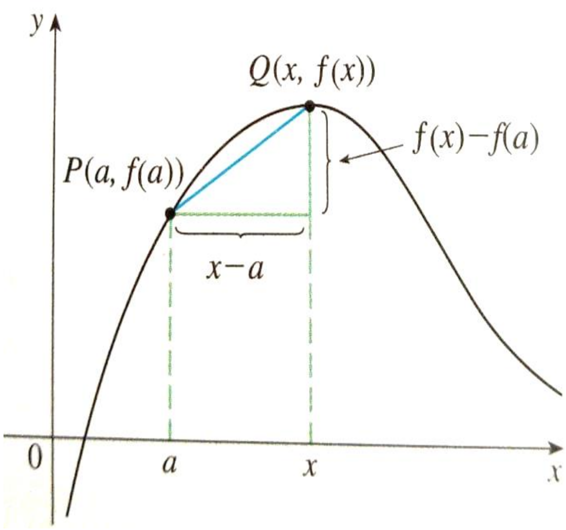
T1. (Definição)

Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in x \cap X'$. f: tem derivada em $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$ $\Leftrightarrow$ $f'deriv\acute{a}vel\ em\ x.$

Seja $f deriv\acute{a}vel\ em\ \bar{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$

T2. (Ilustração gráfica)

Figura 1 - Derivada de uma função: análise do incremento



Fonte: STEWART, James. Cálculo: volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. p 131

Formulário B – **Demonstração**

Estratégia: Direta				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição Simbólica**
B1	($\Longrightarrow$) Por hipótese,	A8		f é diferenciavél em $\bar{x}$
B2	De acordo com a definição,		T1	$f(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = L$
B3	Segundo as definições,	B2	T1, T2	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} \to L'$
B4	Realizando as substituições,	B3		$Lh \to f(\bar{x}+h)-f(\bar{x}) = f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - Lh \to 0$
B5	Desse modo,	B4		$r_{\bar{x}} = f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-Lh$
B6	Assim,	B5		$r_{\bar{x}}(h) \to 0$
B7	Logo,	B6		$f(\bar{x}+h)+Lh+r_{\bar{x}}$
B8	Para o caso,	B5		$h \neq 0$
B9	Temos que,	B8		$\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - \frac{Lh}{h}$
B10	Dessa maneira, usando a definição	B3, B9	T1	$\lim_{h\to 0}\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - L = L - L = 0$
B11	Portanto,	A13, B10		$\lim_{h\to 0}\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0$
B12	($\Longleftarrow$) Conforme a hipótese,	A13		$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L.h + r_{\bar{x}}(h)$ e $\lim_{h\to 0}\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0$
B13	De acordo com a definição e hipótese,	A13	T1	$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + L.h + r_{\bar{x}}(h)$
B14	Tomando,	A13, B13		$r_{\bar{x}} = f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-Lh$
B15	Manipulando a equação, obtemos que	B14		$\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - \frac{Lh}{h}$
B16	Logo,	B15		$\lim_{h\to 0}\frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - L$
B17	Portanto,	A13, B16		$L = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$
B18	C.q.d			

3.4. Analisando o GFD: aspectos positivos e pontos de melhoria do método

O GFD assim como quaisquer métodos propostos da educação, apresenta vantagens e desvantagens em sua aplicação, tal como está sujeito a alterações para aprimoramento do formulário.

Sobre uma perspectiva positiva o GFD apresenta uma estrutura quebrável conforme discorrido anteriormente, de modo que cada parte permite ao estudante realizar detalhadamente uma dissecção de informações, elaboração de uma estratégia de resolução e conjunção de informações pertinentes ao plano, aplicação crítica em passo a passo da resolução dos problemas. Esse método não é encontrado nos livros de caráter universitário referente as demonstrações de Análise Real, diferente da verticalização proposta no GFD, os livros apresentam uma demonstração horizontal corrida.

Figura 2 - Demonstração em um livro universitário.

Uma demonstração na qual o axioma P3 é empregado, chama-se uma *demonstração por indução.*

Para dar um exemplo de demonstração por indução, mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $s(n) \neq n$. Com efeito, seja $X = \{n \in \mathbb{N}; s(n) \neq n\}$. Tem-se $1 \in X$, pois 1 não é sucessor de número algum, em particular $1 \neq s(1)$. Além disso $n \in X \Rightarrow n \neq s(n) \Rightarrow$ (pela injetividade de s) $s(n) \neq s[s(n)] \Rightarrow s(n) \in X$. Assim, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Como $1 \in X$, segue-se do axioma P3 que $X = \mathbb{N}$, ou seja $n \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fonte: LIMA, Elon Lages. Curso de Análise: vol 1. 13.ed. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2019. p. 25.

Observamos, que o sistema de estratégia adotado não é em nenhum momento enunciado pelo autor, nesse caso podemos perceber que é uma demonstração direta, todavia estudantes podem confundir qual tipo da abordagem adotada pelo autor. Além disso, não se explica de quais teorias se utiliza para se concluir o axioma, ou retoma conceitos fundamentais como injetividade e sobrejetividade de uma função. Além disso a demonstração corrida, não permite ao aluno realizar cada etapa do processo, de modo que podem ser omitidas partes de manipulações algébricas que proporcionam lacunas na compreensão do leitor.

Opostamente a demonstração corrida, a verticalização fornecida pelo GFD permite que o leitor realize o passo a passo, reveja e interprete se a próxima etapa, construindo um raciocínio mais solidificado. Uma comparação direta entre as demonstrações de livros e o uso do GFD se encontra a seguir, ao qual também se enfatiza a extensão do GFD para uma Análise Matemática no $\mathbb{R}^n$.

O GFD de demonstração do Teorema da Inversa no $\mathbb{R}^n$, apresenta uma importância para a autora, pois foi através desse desafio proposto pelo orientador que conseguimos identificar possíveis dificuldades, melhorias e implementações que foram aplicadas na construção do GFD. Essas dificuldades tanto de compreensão quanto conceituais, foram resolvidas quando se implementou o GFD, pois permitiu identificar cada etapa os detalhes da demonstração e construir um desenvolvimento lógico, conforme apresentado abaixo.

Enunciado do problema:

Teorema da função inversa: Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um $aberto$ e $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $de\ classe$ C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tal que, $x_0 \in U$, $f'(x_0) \in \mathcal{L}(R^m)$ é isomorfismo. Então f é difeomorfismo de classe C^k numa vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.

<u>Formulário A</u> – <u>Argumento</u>

L		Descrição Simbólica/Texto
A1	P_1: Premissa 1	$U \subset \mathbb{R}^m$ $(aberto)$
A2	P_2: Premissa 2	$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $de\ classe$ C^k $(1 \leq k \leq \infty)$
A3	P_3: Premissa 3	
A4	p1: Hipótese 1	$\exists x_0 \in U, f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ é $isomorfismo$
A5	p2: Hipótese 2	
	"→" ou "↔"	$\rightarrow$ $(se, então)$
A6	q1: Tese 1	f é difeomorfismo C^k da vizinhança V de n_0 sobre a vizinhança W de $f(x_0)$
A7	q2: Tese 2	

Espaço Teórico e Observações

T1. Aplicação diferenciável (Definição):
$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $x \in U$ quando $\exists T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f(x+h) = f(x) + T.h + r(h)$, onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

T2. Aplicação de classe C^k (Definição):
f é aplicação de classe C^k, ou k vezes continuamente diferenciável, $f \in C^k$, quando $f^{(k)}$ for contínua.

T3. Bola aberta (Definição):
Uma bola aberta de centro x_0 com raio r. É o conjunto de todos pontos do espaço métrico X que estão a uma distância menor que r do centro, ou seja,

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$$

T4. Desigualdade do valor médio (Teorema):
Sendo $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua no conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^m$. Se segmento da reta fechado $[a, a+h] \subset U$ e f diferenciável em todos pontos $[a, a+h]$ então

$$|f(a+h) - f(a)| \leq h. sup_{\{0<t<1\}} |f'(a+th)|$$

T5.
Sejam $U \in \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplicação na forma $f(x) = T.x + \phi(x)$, onde $T \in GL(\mathbb{R}^m)$ e $\phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \lambda |x - y|$ com $\lambda. |T^{-1}| < 1$. Então f é homeomorfismo de U sobre aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$

T6. Homeomorfismo (Definição):
Neste caso dizemos que x e y são um homeomorfismo se ela é injetora, sobrejetora, contínua e possui inversa contínua. Quando na função f temos x e y homeomorfos.

T7. (Propriedade)
Dado o aberto $U \in \mathbb{R}^m, f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciável no ponto $x_0 \in U$. Se $f'(x_0): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é transformação injetiva então $\exists \delta > 0$ e $c > 0$; $|h| < \delta \Rightarrow x_0 + h \in U$ e $|f(x_0 + h) - f(x_0)| \geq c. |h|$.

T8. Difeomorfismo (Definição):
Dois conjuntos são difeomorfas se existe uma aplicação entre elas que é diferenciável, invertível e com inversa diferenciável, isto é, f é difeomorfismo de classe C^k se existe f^{-1} e, f e f^{-1} são de classe C^k.

Formulário B – **Demonstração**

Estratégia: Direta				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição Simbólica**
B1	Suponha que,	A8		$x_0 = 0 \; e \; f(x_0) = f(0) = 0$
B2	Por definição,	B1	T1	$f(x+0) = f'(0)x + r(x)$
B3	No qual,	B2	T2	$r(x) = f(x) - f'(0)x \in C^k$
B4	Onde,	B3		$k \geq 1 \; e \; r'(0) = 0$
B5	Toma-se,			$\lambda: 0 < \lambda < \frac{1}{\lvert f'(0)^{-1} \rvert}$
B6	Assim, existe uma bola aberta V	B5	T3	$V(x_0, \lambda) = \{x \in V: \lvert r'(x) \rvert < \lambda\}$
B7	Pelo teorema da desigualdade do valor médio,	B3, B6	T4	$(\lvert r(x) - r(y) \rvert \leq \lambda \lvert x - y \rvert)(\forall x, y \in V)$
B8	Conforme o teorema,	B7	T5	$f \lvert V \; homeomorfismos \; de \; V \; sobre \; W$
B9	Dado que,	B8		$f': U \to f(R^m) \; contínua \; e \; f'(x_0) \subset GL(R^m)$
B10	Podemos escolher,	B8, B9	T5, T6	$(\forall x \in V)\; (f'(x) invertível)$
B11	Seja,	B10		$g = f^{-1}: W \to V$
B12	Verificando se é diferenciável, então	B11	T1	$g(y+k) = g(y) + [f'(x)]^{-1}.k + s(k)$
B13	Toma-se	B12		$f(x+h) = y + k$
B14	No qual,	B12, B13		$k = f(x+h) - f(x)$
B15	Note que como é homeomorfismo,	B8	T5, T6	$(k \to 0) \Leftrightarrow (h \to 0)$
B16	Assim,	B3, B15		$h = g(y+k) - g(y) =$ $= [f'(x)]^{-1}[f'(x).h + r(h)] + s(k)$
B17	Portanto,	B16		$h = h + [f'(x)]^{-1}.r(h) + s(k)$ $\Rightarrow s(k) =$ $= -[f'(x)]^{-1}.r(h)$

B18	Logo,	B17		$\frac{s(k)}{\lvert k\rvert} = -\frac{\lvert h\rvert}{\lvert k\rvert}\{[f(x)]^{-1}\frac{r(h)}{\lvert h\rvert}\}$
B19	Pela proposição	B18	T7	$k \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{\lvert h\rvert}{\lvert k\rvert}$ $limitada$
B20	Além disso,	B18		$k \longrightarrow 0 \Rightarrow [f(x)]^{-1}\frac{r(h)}{\lvert h\rvert} \to 0$
B21	Portanto,	B19, B20		$\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{s(k)}{\lvert k\rvert} = 0$ $\Rightarrow g$ é $diferenciável, \forall y \in W$
B22	Conforme a afirmação anterior, temos	B21		$g^{'}(y) = [f^{'}(x)]^{-1}, y = f(x)$
B23	Logo	B22	T8	$f\lvert V: V \longrightarrow W$ é $difeomorfismo$
B24	Para ser de classe k, faremos o processo sucessivamente,	A13, B22		$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}, \forall y \in W$
B25	A derivada,	B24		$g^{'}: W \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$
B26	Pode ser representada pela composta,	B25		$g' = iof'of$, $i(X) = X^{-1}$
B27	Dessa forma,	B25, B26		$W \longrightarrow V \longrightarrow GL(\mathbb{R}^m) \longrightarrow GL(\mathbb{R}^m) \subset f(\mathbb{R}^m)$
B28	Como	B26, B27		$f \in C^1$ e $i, f^{'}, g$ $contínuas$
B29	Assim temos que,	B27		$g^{'} \in C^0 \Rightarrow g \in C^1$
B30	Caso,	B27		$f \in C^2$
B31	Então,	B30		$i, f^{'}, g \in C^1$
B32	Logo,	B30, B31		$g^{'} \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$
B33	Sucessivamente podemos concluir que,	A13		f $difeomorfismo$ e $f \in C^k$
B34	C. q. d			

A demonstração segundo Lima (2020) referente ao Teorema da Função Inverna, encontra-se descrita abaixo, para fins de comparação do leitor.

Figura 3 - Demonstração do Teorema da Função Inversa

Demonstração: O trabalho está essencialmente feito. Resta apenas juntar as peças. Para simplificar a notação, suporemos $a = f(a) = 0$, o que não restringe a generalidade. Escrevendo $f(x) = f'(a) \cdot x + r(x)$, a diferenciabilidade forte de f assegura, via Teorema 5, que existe uma bola aberta V, de centro a, tal que $x, y \in V \Rightarrow |r(x) - r(y)| \leqslant \lambda \cdot |x - y|$, com $\lambda \cdot |f'(a)^{-1}| < 1$. Portanto, f é, em V, uma perturbação do isomorfismo $f'(a)$. Segue-se que f é um homeomorfismo de V sobre o aberto $W = f(V)$ e, pelo Lema acima, a inversa $f^{-1}: W \to V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$. No caso particular de $f \in C^k$ $(k \geqslant 1)$, a aplicação derivada $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ é contínua. Como o conjunto $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ e $f'(a) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, a bola V de centro a pode ser tomada, se necessário, tão pequena que $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ seja ainda isomorfismo, para todo $x \in V$. Pelo lema da diferenciabilidade do homeomorfismo inverso, $f^{-1}: W \to V$ é diferenciável em todos os pontos de W, logo f é um difeomorfismo.

Fonte: LIMA, Elon Lages. Curso de Análise: vol. 2. 12. ed. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2020. p. 228

Outra vantagem do GFD é a possibilidade de extensões para outras áreas da Matemática, nesse trabalho nos restringimos a problemas voltados a Análise da Matemática na Reta, mas podemos estender para Análise Matemática no $\mathbb{R}^n$, Análise Complexa, demonstrações nas áreas de Teoria dos Números, Teoria dos Conjuntos, entre outras, isso em nível universitário voltado ao estudante. Na perspectiva do docente conforme descrito na subseção *3.1.4* permite analisar as etapas aplicadas pelo estudante, identificando de modo mais explícito o erro e em qual momento se houve a ruptura da lógica, além de permitir ao docente investigar os métodos estilísticos que cada aluno.

Conforme relatado, esse método é sujeito a sofrer alterações de modo que possa ser alterado para a aplicação na Resolução de Problemas do Ensino Básico, ao qual o professor pode incentivar de modo talvez menos rigoroso, mas ainda precisa analisar qual o problema, quais as ferramentas disponíveis e estabelecer um passo a passo do processo.

Sob perspectiva de desvantagem, o GFD pode ser à primeira vista complexo e incompreensível, caso não seja bem instruído pelo docente, desse modo a tarefa do educador é elucidar o que se deve realizar em cada etapa e como aplicar esse método, ademais deve explicar sua importância para os alunos. A necessidade de relatar a pertinência desse formulário é necessária, dado que o formulário é um processo mais extenso que uma demonstração horizontal, exigindo mais tempo e atenção do estudante, em caso contrário o método pode ser somente exaustivo e sem a presença de uma compreensão efetiva pelos estudantes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho de conclusão de curso discorreu sobre os propósitos referidos nos objetivos, apresentando uma nova perspectiva de abordagem referente a uma disciplina pertinente ao curso de graduação, propiciando novas perspectivas sobre os processos de demonstração.

Dado que a literatura utilizada no tema é fornecida em partes pelas referências básicas da disciplina podemos analisar os pontos de maior dificuldade possíveis encontrados, e descrever a partir de referências complementares a importância do novo método de resolução, via formulários, na construção do pensamento lógico para resolução dos problemas.

Apresentamos também referências históricas para demonstrar a importância da historicidade na construção de um novo pensamento, em especial na matemática, o uso da linguagem matemática e caracterizar a construção desses conceitos.

Por intermédio de uma perspectiva filosófica e psicológica, conseguimos defender a necessidade da estruturação do GFD, tal como essas medidas adotas ajudam na compreensão do processo como um todo do problema, desde seu enunciado, elementos até sua resolução.

Construímos exemplos para o uso do formulário, descrevendo os procedimentos que podem ser empregados pelos alunos, tal como defendemos que a forma de demonstração representa um ato único, de forma que independente da escolha do indivíduo ainda é possível aplicar o método. E findamos sua importância, vantagens e desvantagens em comparação aos métodos tradicionais de demonstração baseado nos livros, atingindo todos objetivos defendidos.

A partir do trabalho presente podem ser desenvolvidos estudos futuros, buscando analisar sobre uma perspectiva computacional como a Theory Isar, consiste em uma linguagem de prova baseada em três elementos: comandos, atributos e métodos. Outra vertente de análise em nível teórico e de aplicação é sobre a perspectiva do docente, tanto referente aos meios de avaliação linha a linha pelo método, permitindo identificar o erro de forma mais precisa, quanto sua experiência após o uso dos formulários aplicados em sala de aula.

Esse trabalho abre diversas perspectivas de continuidade, conforme descrito anteriormente, o GFD é sujeito a alterações e adaptações, desse modo podemos proporcionar extensões para a Resolução de Problemas de Matemática na Educação Básica, analisando conforme os conceitos de George Polya. Dessa forma, esse trabalho introdutório, abre um novo leque de possibilidades de novos estudos práticos e teóricos.

Referências Bibliográficas

ALENCAR FILHO, Edgard. de. **Introdução à Lógica Matemática**. Nobel, São Paulo, SP, 2002.

ARAÚJO, David Velanes de. **A noção de ruptura epistemológica no pensamento de Gaston Bachelard**. Salvador, 2017. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Filosofia, Universidade Federal da Bahia.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARDI, Jason Socrates. **A guerra do cálculo.** Tradução de Aluizio Pestana da Costa. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2006.

BARGUIL, Paulo Meireles. **Ensino de Matemática**. Fortaleza: UFC Virtual, 2017.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

COSTA, Newton Carneiro Affonso da. **Introdução aos Fundamentos da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora HUCITEC, 1992.

DOLLE, Jean-Marie. **Para compreender Piaget**: uma iniciação à Psicologia Genética Piagetiana. 4. ed. Tradução de Maria José J.G. de Almeida. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1987.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GERVÁZIO, Suemilton Nunes. **A heurística matemática:** uma aliada aos processos de ensino e aprendizagem. 2019. Tese (Doutorado em Educação Cinetífica, Matemática e Tecnológica). Universidade São Paulo Faculdade de Educação, São Paulo, 2019.

GONÇALVES, José Lafayette de Oliveira. **Raciocínio Heurístico e a Resolução dos Problemas**. 1. ed. Revista Unijales, 2006.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do Estilo**. São Paulo: Pespectivs – Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do Ensino Médio**. Vol. 1. Ed. 9. Rio de Janeiro: SBM, 2012.,

LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise**: vol.1. Ed. 9. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise**: vol. 2. Ed. 9. Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2020.

MACHADO, Nílson José.; CUNHA, Marisa Ortega da. **Lógica e linguagem cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2005.

MESQUITA, Mónica Sofia Bilro Vasques de. **A interpretação de enunciados matemáticos e a resolução de problemas:** Um estudo com alunos 4º ano de escolaridade. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Pré Escolar e Ensino do 1º ciclo do Ensino Básico). Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal, 2013.

MAIO, Waldemar de. **O Raciocínio Lógico-Matemático**: sua estrutura neurofisiológica e aplicações à Educação Matemática. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. **Psicogênese e história das ciências**. Tradução de Giselle Unti. Petrópolis: Vozes, 2011. p. 376

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Jackson Kamphorst. **Uma proposta de ensino de tópicos de mecânica quântica sob a ótica de Bachelard**. Bagé, 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Fundação Universidade Federal do Pampa

SILVA FILHO, João Inácio da. **Lógica Paraconcistente Anotada**. 1. ed., Santos, SP: Editora Emmy, 2000.

SIM-SIM, Inês. **Desenvolvimento da linguagem**. 2. ed. Lisboa: Universidade Aberta, 1998.

STEWART, James. **Cálculo:** volume 1. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STEWART, James. **Cálculo:** volume 2. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

THOMÉ, Vinícius Weite; DURO, Mariana Lima; ANDRADE, Carina Loureiro. **História da análise e Desenvolvimento Cognitivo**. Bolema, Rio Claro, São Paulo, v. 34, n. 67, p. 399-420. 2020.

APÊNDICE I

Enunciado do problema:

Formulário A – Argumento

L		Descrição Simbólica/Texto
A1	P_1: Premissa 1	
A2	P_2: Premissa 2	
A3	P_3: Premissa 3	
A4	P_4: Premissa 4	
A5	P_5: Premissa 5	
A6	P_6: Premissa 6	
A7	P_7: Premissa 7	
A8	p1: Hipótese 1	
A9	p2: Hipótese 2	
A10	p3: Hipótese 3	
A11	p4: Hipótese 4	
A12	p5: Hipótese 5	
	"$\rightarrow$" ou "$\leftrightarrow$"	
A13	q1: Tese 1	
A14	q2: Tese 2	
A15	q3: Tese 3	
A16	q4: Tese 4	
A17	q5: Tese 5	
A18	q6: Tese 6	

Espaço Teórico e Observações

<u>Formulário B</u> – **<u>Demonstração</u>**

Estratégia:				
L	**Justificativa/Afirmação**	**LN**	**TN**	**Descrição Simbólica**
B1				
B2				
B3				
B4				
B5				
B6				
B7				
B8				
B9				
B10				
B11				
B12				
B13				
B14				
B15				
B16				
B17				
B18				
B19				
B20				
B21				
B22				
B23				
B24				