



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



# Grupos de Tranças de Superfícies e Espaços de Recobrimento

**Autora:** *Raquel Magalhães de Almeida Cruz*

**Orientador:** *Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo*

São Carlos, 26 de novembro de 2021.



# Grupos de Tranças de Superfícies e Espaços de Recobrimento

**Autora:** *Raquel Magalhães de Almeida Cruz*

**Orientador:** *Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo*

**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Matemática.

São Carlos, 26 de novembro de 2021.

*Raquel Magalhães de Almeida Cruz*

---

Raquel Magalhães de Almeida Cruz



---

Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo





# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

## Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Raquel Magalhães de Almeida Cruz, realizada em 09/08/2021.

### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Vandrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Dessislava Hristova Kochloukova (UNICAMP)

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi (UNESP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.



*À mainha*





# Agradecimentos

Algumas vezes durante a graduação, quando eu decidi que gostaria de seguir carreira acadêmica, eu me imaginava escrevendo os agradecimentos da minha dissertação (que nem as pessoas que ensaiam um discurso para quando ganharem o Oscar). Enfim, chegou o meu momento!

Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer à pessoa que assistiu a todas as minhas palestras na época de graduação. Mainha, obrigada pela paciência, amor e carinho inesgotáveis. Mesmo nos momentos em que estávamos em regiões diferentes do país, a senhora se fez presente em minha vida. Sou muito grata por cada “já terminou essa dissertação?”, “deixa eu ver como está” e “minha filha, eu queria entender o que você faz para poder ler seu texto”. Espero que a senhora goste das figurinhas.

Agradeço ao meu irmão Daniel, que é um amorzinho por dentro e tem um jeito especial de demonstrar que se importa. Não se preocupe, eu entendo. Agradeço à minha cunhada Jeane e ao meu sobrinho Davi simplesmente por existirem. Obrigada pela preocupação diária. Sinto saudades de vocês três todos os dias.

No mundo acadêmico, agradeço ao meu orientador Daniel por todo o apoio, paciência e, principalmente, por sempre me presentear com frases memoráveis, como “Raquel, deixa o trabalho do cara em paz”, quando eu quase entrei em um loop infinito de olhar a referência da referência da referência... Trabalhar com companheirismo e bom humor tornou meus dias bem mais alegres e, acredite, produtivos. Devido à sua ajuda, acredito que o resultado deste trabalho em conjunto cumprirá o seu propósito inicial, de ser um texto acessível e possivelmente útil para os que querem conhecer um pouco da Teoria de Tranças.

Agradeço a todos os meus professores do mestrado e da graduação, em especial à professora Simone, a quem eu tenho um carinho imenso, e ao professor Maikel, que sempre estava disposto a me ajudar quando eu batia em sua sala pedindo ajuda com uma matéria difícil. Agradeço também aos docentes e funcionários da UFSCar e ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Vinicius, meu querido e eterno orientador de iniciação científica, obrigada por aceitar a indicação de Manuela e me acolher como sua orientanda. Sem você, não sei se eu teria entrado para o mundo das tranças. Obrigada por ter visto o quanto eu gostava do assunto e ter me dado o livro do Murasugi de presente.

Agradeço a todos os amigos que eu fiz durante o mestrado, em especial a Christian,

Christopher, Gabriel, Kauane (fada sensata), Melges (melhor pessoa para treinar combate) e Pedro (meu parceiro oficial de forró). Agradeço aos meus amigos da graduação, em especial a Jana, Tiago e Victor.

Agradeço à minha incrível equipe de revisão, composta por apenas uma pessoa, a saber Caio. Obrigada por ter consertado meus erros de formatação e por todas as checagens diárias para saber se eu ainda estava viva. Espero que possamos trabalhar juntos de novo.

Gostaria de fazer um agradecimento especial a André, que acompanhou de perto todos os momentos de sofrimento e de alegria da minha vida acadêmica, além de me ouvir falar sobre filmes de super herói e doramas coreanos sempre retribuindo a minha empolgação. Obrigada por cada uma de nossas piadas internas e pelo silêncio confortável. Saranghae.

Por fim, agradeço a todos os amigos espirituais que eu fiz nesta vida e nas outras. Obrigada, Universo, pela oportunidade de escrever estas palavras.

# Resumo

Dada uma superfície  $M$  compacta, conexa e sem bordo, definiremos geometricamente os grupos de tranças de  $M$ , denotado por  $B_n(M)$ . Seguidamente, exploramos a sua relação com os espaços de configuração e o *mapping class group* desta mesma superfície. Apresentaremos com detalhes os principais aspectos algébricos e geométricos dos grupos de tranças de três superfícies específicas, a saber o disco fechado, a esfera e o plano projetivo real. Em sequência, dada  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento com  $d$  folhas, discutiremos a existência de um mergulho de  $B_n(M)$  em  $B_{dn}(\tilde{M})$ . Dispondo deste resultado, estudaremos a classificação dos subgrupos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  e do *mapping class group* do plano projetivo real. Finalizamos com a discussão da realização algébrica dos subgrupos dicíclicos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .



# Abstract

Given  $M$  a compact and connected surface without boundary, we define the braid groups of  $M$ , denoted by  $B_n(M)$ , geometrically. We also explore its relation with the configuration space and the mapping class group of the same surface. In a more detailed manner, we present some relevant algebraic and geometric aspects of the braid groups of three specific surfaces, namely the closed disk, the sphere and the real projective plane. Later we consider  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  a  $d$ -fold covering map and discuss the existence of an embedding from  $B_n(M)$  to  $B_{dn}(\tilde{M})$ . In the possession of such result, we study the classification of the finite subgroups of  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  and the mapping class group of the real projective plane. We conclude with the study of the algebraic realization of the finite dicyclic subgroups of  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .



# Sumário

Introdução	xiii
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Grupo Dicíclico . . . . .	1
1.2 Grupo Diedral . . . . .	5
1.3 Grupos Poliedrais Binários . . . . .	6
1.3.1 Grupo Tetraedral Binário . . . . .	6
1.3.2 Grupo Octaedral Binário . . . . .	7
1.3.3 Grupo Icosaedral Binário . . . . .	8
1.4 Fibrados e Sequência Exata de Homotopia . . . . .	9
1.5 Espaços de Configuração . . . . .	15
1.6 <i>Mapping Class Groups</i> . . . . .	19
<b>2 Introdução aos Grupos de Tranças</b>	<b>25</b>
2.1 Definição Geométrica . . . . .	25
2.2 Grupos de Tranças e Espaços de Configuração . . . . .	32
2.3 Grupos de Tranças e <i>Mapping Class Groups</i> . . . . .	35
<b>3 Grupos de Tranças de Superfícies</b>	<b>39</b>
3.1 Grupos de Tranças do Disco . . . . .	39
3.1.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{D}^2)$ . . . . .	39
3.1.2 Apresentação de $P_n(\mathbb{D}^2)$ . . . . .	43
3.2 Grupos de Tranças da Esfera . . . . .	45
3.2.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{S}^2)$ . . . . .	46
3.2.2 Problema de Dirac . . . . .	48
3.2.3 Propriedades Algébricas . . . . .	52
3.2.4 Diferenças entre $B_n(\mathbb{D}^2)$ e $B_n(\mathbb{S}^2)$ . . . . .	55
3.3 Grupos de Tranças do Plano Projetivo Real . . . . .	56
3.3.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . . . . .	58
3.3.2 Propriedades Algébricas . . . . .	60
3.3.3 Tranças Half Twist e Full Twist em $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . . . . .	62

---

<b>4</b>	<b>Grupos de Tranças de Superfícies e Recobrimentos</b>	<b>69</b>
4.1	Mergulhos dos grupos de tranças de espaços de recobrimento . . . . .	69
4.2	Subgrupos finitos de $B_n(\mathbb{R}P^2)$ e $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$ . . . . .	78
4.3	Subgrupos finitos dicíclicos de $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . . . . .	82
<b>A</b>	<b>Alguns Resultados de Álgebra</b>	<b>89</b>
A.1	Apresentação de Grupos . . . . .	89
A.2	Grupos Triangulares Finitos . . . . .	94
A.3	Lema dos Cinco . . . . .	98
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>



# Introdução

Em 1925, o matemático austríaco Emil Artin deu início ao que hoje chamamos de Teoria de Tranças, ao introduzir os grupos de tranças do disco em seu texto intitulado “Theorie der Zöpfe” [1]. Artin, em [2], estudou amplamente tais grupos e, em 1937, Oscar Zariski [42] começou a explorar o que ocorre quando o disco é trocado por outra superfície. Mais tarde, em 1962, tais grupos foram generalizados por Fox e Neuwirth [14] para grupos de tranças de um espaço topológico qualquer, utilizando espaços de configuração. Os grupos de tranças são objetos matemáticos importantes que aparecem em contextos diversos (geometria, álgebra, topologia, sistemas dinâmicos, teoria de singularidades, entre outros).

Dada uma superfície  $M$  compacta, conexa e sem bordo, vamos dar uma ideia da construção geométrica dos grupos de  $n$ -tranças da superfície  $M$ , denotado por  $B_n(M)$ . Seja  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  um conjunto de  $n$  pontos distintos de  $M$ . Em  $M \times [0, 1]$ , ligamos os pontos de  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \times \{1\}$  aos pontos de  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\} \times \{0\}$  por meio de  $n$  caminhos que não possuem autointerseção e são disjuntos entre si. Além disso, tais caminhos, que chamaremos de cordas, descem de maneira monótona em  $M \times [0, 1]$ . Tal configuração é uma  $n$ -trança. É permitido que as cordas de uma trança sejam deformadas de maneira contínua, de modo que sua estrutura seja preservada durante todo o momento da deformação. Neste contexto, a operação entre duas tranças é definida pela concatenação, isto é, identificamos os pontos finais da primeira trança com os iniciais da segunda. Ademais, existe um epimorfismo natural de  $B_n(M)$  no grupo das permutações de  $n$  letras. O núcleo deste homomorfismo é chamado grupo de  $n$ -tranças puras de  $M$  e o denotamos por  $P_n(M)$ .

Sendo  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento de  $d$  folhas, o objetivo central deste texto é mostrar como os grupos de  $n$ -tranças de  $M$  e de  $\tilde{M}$  se relacionam. Mais precisamente, o nosso trabalho é baseado em [17], em que Daciberg Lima Gonçalves e John Guashi provam que existe um homomorfismo injetor de  $B_n(M)$  em  $B_{dn}(\tilde{M})$ . Esta dissertação está dividida em quatro capítulos e um apêndice. Recomendamos que o leitor que não possui familiaridade com grupos livres e apresentação de grupos inicie a leitura deste texto pelo apêndice.

No primeiro capítulo, apresentaremos os pré-requisitos necessários para que o leitor tenha uma boa compreensão deste material. Nas três primeiras seções, introduzimos três tipos de grupos que serão muito utilizados ao longo do texto, a saber o grupo dicíclico,

o diedral e os grupos poliedrais binários. Na sequência, apresentamos as ferramentas necessárias para definir os grupos de tranças formalmente. A quarta seção deste capítulo trata de fibrados e sequência exata longa de homotopia, enquanto a quinta aborda os espaços de configuração, que foram os objetos utilizados por Fox e Neuwirth [14] para generalizar os grupos de tranças introduzidos por Artin. A sexta e última seção consiste em uma introdução aos *mapping class groups* de uma superfície. É esperado que o leitor tenha familiaridade com assuntos básicos de topologia algébrica, como homotopia, grupo fundamental e espaços de recobrimento.

No Capítulo 2, definimos formalmente os grupos de tranças. Na primeira seção, construímos o grupo de  $n$ -tranças de uma superfície geometricamente. Na seção 2, apresentamos  $B_n(M)$  por meio de uma abordagem topológica utilizando espaços de configuração. Já na terceira seção, vamos relacionar os *mapping class groups* de uma superfície com o seu grupo de tranças, dando ênfase ao caso em que a superfície é um disco fechado.

No Capítulo 3, estudamos os grupos de  $n$ -tranças de três superfícies específicas: o disco, a esfera e o plano projetivo real. Discutiremos suas apresentações e seus principais aspectos algébricos e geométricos. No caso dos grupos de  $n$ -tranças do plano projetivo real, exploraremos sua relação com os *mapping class groups*.

No quarto e último capítulo desta dissertação, vamos estudar detalhadamente os resultados obtidos em [17]. Na seção 1, apresentaremos a demonstração de que uma aplicação de recobrimento induz um mergulho do grupo de tranças do espaço base em um determinado grupo de tranças do seu recobrimento. Como consequência deste resultado, na seção seguinte, exploramos a classificação dos subgrupos finitos de grupo de  $n$ -tranças do  $\mathbb{R}P^2$  e dos subgrupos finitos do *mapping class group* deste mesmo espaço. Na seção 3 deste capítulo, finalizamos com a discussão da realização algébrica dos subgrupos dicíclicos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

Esta dissertação também conta com um apêndice ao final, em que tratamos de alguns resultados básicos de álgebra, como apresentação de grupos e o Lema dos Cinco. Além disso, devido à frequente aparição de tais grupos no estudo da Teoria de Tranças, dedicamos uma seção à discussão dos grupos triangulares finitos.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo inicial, introduziremos definições e resultados necessários para a compreensão dos grupos de tranças de uma superfície. Nele, apresentaremos os grupos dicíclico, diedral e poliedrais binários, bem como a definição de um fibrado e como ele se relaciona com os grupos de homotopia de dimensão mais alta. Depois, exploraremos os espaços de configuração de uma superfície conexa e sem bordo, que são elementos fundamentais para associar os grupos de tranças ao grupo fundamental, que já estamos familiarizados, de um determinado espaço topológico. Ao final, discutiremos a definição dos *mapping class groups* e apresentaremos alguns exemplos.

### 1.1 Grupo Dicíclico

Seja  $m > 1$ . Considere o seguinte conjunto de  $4m$  elementos

$$A = \{1, x, \dots, x^{2m-1}, y, xy, \dots, x^{2m-1}y\}.$$

Em  $A$ , definimos uma operação por meio dos seguintes itens:

- i) 1 é o elemento neutro;
- ii)  $x^a x^b = x^{a+b}$ ;
- iii)  $x^a (x^b y) = x^{a+b} y$ ;
- iv)  $(x^a y) x^b = x^{a-b} y$ ;
- v)  $(x^a y) (x^b y) = x^{a-b+m}$ ,

sendo  $0 \leq a, b \leq 2m - 1$  e as potências de  $x$  consideradas módulo  $2m$ , isto é,  $x$  tem ordem  $2m$ .

A seguir, faremos algumas considerações úteis sobre esta operação.

*Observação 1.1.* Note que

1.  $x^{2m} = x^0 = 1$ ;
2.  $y^2 = yy = (x^0y)(x^0y) = x^{0-0+m} = x^m$ ;
3.  $y^4 = y^2y^2 = x^m x^m = x^{2m} = 1$ .

Da terceira alínea, obtemos que  $y^{-1} = y^3 = y^2y = x^m y$ .

Utilizando a observação feita e argumentos combinatórios, prova-se que  $A$ , munido da operação citada, é um grupo chamado **grupo dicíclico** de ordem  $4m$ .

Uma outra construção do grupo dicíclico de ordem  $4m$  pode ser realizada da seguinte maneira:

Considere o grupo cíclico de ordem  $2m$ ,  $\mathbb{Z}_{2m} = \langle s \mid s^{2m} = 1 \rangle$ . O grupo dicíclico de ordem  $4m$ , denotado por  $\text{Dic}_{4m}$ , é construído adicionando a  $\mathbb{Z}_{2m}$  um gerador, digamos  $t$ , e as relações  $t^2 = s^m$  e  $t^{-1}st = s^{-1}$ . Em termos de apresentação de grupo, podemos escrever

$$\text{Dic}_{4m} = \langle s, t \mid s^{2m} = 1; t^2 = s^m; t^{-1}st = s^{-1} \rangle.$$

Observe que  $t$  é um elemento de ordem 4, pois  $t^4 = s^{2m} = 1$ .

A relação  $s^{2m} = 1$  é consequência das outras duas. De fato,  $t^{-1}st = s^{-1}$  implica que  $(t^{-1}st)^m = (s^{-1})^m$ . Daí,  $t^{-1}s^m t = s^{-m}$ . Então,

$$s^{-m} = t^{-1}(s^m)t = t^{-1}(t^2)t = t^2 = s^m.$$

Assim, obtemos que  $s^{2m} = 1$ .

Portanto,  $\text{Dic}_{4m} = \langle s, t \mid t^2 = s^m; t^{-1}st = s^{-1} \rangle$ .

Mostraremos que as duas definições de grupo dicíclico dadas coincidem, isto é,  $\text{Dic}_{4m}$  é isomorfo ao grupo  $A$ .

**Lema 1.2.** *Seja  $m < 1$ . Então,  $A \approx \text{Dic}_{4m}$ .*

*Demonstração.* Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Dic}_{4m} &\longrightarrow A \\ s &\longmapsto x \\ t &\longmapsto y \end{aligned}$$

definida nos geradores de  $\text{Dic}_{4m}$ .

Note que

$$\varphi(t)^2 \varphi(s)^{-m} = y^2 x^{-m} = x^m x^{-m} = x^0 = 1$$

e

$$\varphi(t)^{-1} \varphi(s) \varphi(t) \varphi(s) = y^{-1} x y x = y^{-1} [(xy)x] = y^{-1} (x^{1-1}y) = y^{-1} y = 1.$$

Como  $\varphi$  satisfaz as relações de  $\text{Dic}_{4m}$ , podemos estendê-la a um homomorfismo definido em todo o grupo.

Agora, consideremos  $\psi: A \longrightarrow \text{Dic}_{4m}$  definido por

$$\psi(x^c) = s^c \text{ e } \psi(x^d y) = s^d t,$$

com  $0 \leq c, d \leq 2m-1$ . Usando as relações de  $\text{Dic}_{4m}$ , mostra-se que  $\psi$  é um homomorfismo de grupos.

Claramente,  $\varphi$  e  $\psi$  são homomorfismos inversos um do outro. Logo,  $\text{Dic}_{4m} \approx A$ .  $\square$

Uma propriedade interessante do grupo dicíclico de ordem  $4m$  é que ele possui somente um elemento de ordem 2, a saber  $t^2$ . Além disso, temos o

**Lema 1.3.** *O centro do grupo  $\text{Dic}_{4m}$ , denotado por  $Z(\text{Dic}_{4m})$ , é igual ao subgrupo gerado por  $t^2$ . Mais ainda,  $Z(\text{Dic}_{4m}) = \{1, t^2\}$  é o único subgrupo normal não-trivial de ordem 2 do grupo dicíclico de ordem  $4m$ .*

Com a finalidade de relacionar o grupo dicíclico de ordem 8 com o grupo dos quatérnios de ordem 8, estudaremos mais uma apresentação de  $\text{Dic}_{4m}$ .

**Lema 1.4.** *Dado  $m < 1$ , o grupo dicíclico de ordem  $4m$  pode ser apresentado por*

$$\langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^m \rangle.$$

*Demonstração.* Seja  $B = \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^m \rangle$  e considere

$$\begin{array}{ccc} f: B & \longrightarrow & \text{Dic}_{4m} & \text{ e } & g: \text{Dic}_{4m} & \longrightarrow & B \\ r & \longmapsto & ts^{-1} & & s & \longmapsto & r^{-1}v \\ v & \longmapsto & t & & t & \longmapsto & v \end{array}$$

aplicações definidas nos geradores de  $B$  e de  $\text{Dic}_{4m}$ , respectivamente.

Utilizando as relações de  $\text{Dic}_{4m}$ , notemos que

$$f(r)^2 = (ts^{-1})^2 = ts^{-1}ts^{-1} = ts^{-1}(st) = t^2 = f(v)^2$$

e

$$[f(r)^{-1}f(v)]^m = [(ts^{-1})^{-1}t]^m = [st^{-1}t]^m = s^m = t^2 = f(v)^2.$$

Pelas relações de  $B$ , também podemos escrever que

$$g(t)^2 = v^2 = (r^{-1}v)^m = g(s)^m$$

e

$$g(t)^{-1}g(s)g(t) = v^{-1}r^{-1}vv = v^{-1}r^{-1}v^2 = v^{-1}r^{-1}r^2 = v^{-1}r = (r^{-1}v)^{-1} = g(s)^{-1}.$$

Logo,  $f$  e  $g$  podem ser estendidos a bem definidos homomorfismos de grupos. É fácil ver que  $f = g^{-1}$ . Dessa maneira,  $B \approx \text{Dic}_{4m}$ , como queríamos.  $\square$

Com esta apresentação de  $\text{Dic}_{4m}$ , veremos que, para  $m = 2$ , temos  $\text{Dic}_{4 \cdot 2} = \text{Dic}_8 \approx \mathcal{Q}_8$ , sendo  $\mathcal{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  com a regra usual de operação  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  o grupo dos quatérnios.

**Lema 1.5.** *O grupo dicíclico de ordem 8 é isomorfo ao grupo dos quatérnios de ordem 8.*

*Demonstração.* Defina  $\eta: \mathcal{Q}_8 \rightarrow \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^2 \rangle \approx \text{Dic}_8$  da seguinte maneira:

$$1 \mapsto 1, -1 \mapsto r^2, \pm i \mapsto r^{\pm 1}, \pm j \mapsto (r^{-1}v)^{\pm 1} \text{ e } \pm k \mapsto v^{\pm 1}.$$

Usando as relações de  $\text{Dic}_8$ , mostra-se que  $\eta$  é um bem definido homomorfismo.

Defina também

$$\begin{aligned} \theta: \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^2 \rangle &\longrightarrow \mathcal{Q}_8 \\ r &\longmapsto i \\ v &\longmapsto k. \end{aligned}$$

Observe que

$$\theta(r)^2 = i^2 = k^2 = \theta(v)^2$$

e

$$[\theta(r)^{-1}\theta(v)]^2 = [(-i)k]^2 = j^2 = k^2 = \theta(v)^2.$$

Como  $\theta$  satisfaz as relações de  $\text{Dic}_8$ , segue que  $\theta$  se estende a um homomorfismo de grupos e facilmente mostra-se que  $\theta = \eta^{-1}$ , de onde obtemos que  $\text{Dic}_8 \approx \mathcal{Q}_8$ .  $\square$

**Lema 1.6.** *O grupo  $\text{Dic}_8$  (consequentemente,  $\mathcal{Q}_8$ ) pode ser realizado como um subgrupo de  $\text{Dic}_{8m}$ , para todo  $m \geq 1$ .*

*Demonstração.* Considere os grupos  $\text{Dic}_8 = \langle s, t \mid t^2 = s^2; t^{-1}st = s^{-1} \rangle$  e, para  $m \geq 1$ ,  $\text{Dic}_{8m} = \langle w, z \mid z^2 = w^{2m}, z^{-1}wz = w^{-1} \rangle$ .

Dada a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: \text{Dic}_8 &\longrightarrow \text{Dic}_{8m} \\ s &\longmapsto z \\ t &\longmapsto w^m. \end{aligned}$$

definida nos geradores do grupo dicíclico de ordem 8, observe que ela se estende a um homomorfismo de grupos, pois satisfaz:

$$\phi(t)^2 = (w^m)^2 = w^{2m} = z^2 = \phi(s)^2$$

e

$$\phi(t)^{-1}\phi(s)\phi(t) = w^{-m}zw^m = w^{-m}(w^{-m}z) = w^{-2m}z = z^{-2}z = z^{-1} = \phi(s)^{-1},$$

onde utilizamos que  $z^{-1}w^kz = w^{-k}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Além disso, sabendo que  $\text{Dic}_8 = \{1, t^2, ts^{-1}, st^{-1}, s, s^{-1}, t, t^{-1}\}$  devido à construção realizada nesta seção, é fácil ver que  $\text{Ker}(\phi) = \{1\}$ . Portanto,  $\phi$  é um monomorfismo. Logo,  $\text{Dic}_8 \approx \phi(\text{Dic}_8)$ , sendo que  $\phi(\text{Dic}_8)$  é um subgrupo de  $\text{Dic}_{8m}$ .  $\square$

## 1.2 Grupo Diedral

Para  $n \geq 3$ , o grupo diedral, denotado por  $\text{Dih}_n$ , é definido como o conjunto dos movimentos rígidos<sup>1</sup> que levam um polígono regular de  $n$  lados nele mesmo, munido da operação composição.

O grupo  $\text{Dih}_n$  é não-abeliano e sua ordem é  $2n$ . Explicitamente,

$$\text{Dih}_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\},$$

sendo que  $r$  representa a rotação por  $\frac{2\pi}{n}$  radianos em torno do seu centro no sentido anti-horário, enquanto  $s$  é a reflexão em torno de um dos seus eixos de simetria (previamente fixado). Se  $n$  é ímpar, cada eixo de simetria conecta o ponto médio de uma aresta do polígono ao seu vértices oposto. Se  $n$  é par, existem  $\frac{n}{2}$  eixos de simetria que ligam pontos médios opostos e  $\frac{n}{2}$  eixos de simetria conectando vértices opostos. Em ambos os casos, existem  $n$  eixos de simetria.

É fácil visualizar que  $r^n = 1$  e  $s^2 = 1$ , por serem rotação e reflexão, respectivamente. Mais ainda, como o elemento  $rs$  pode ser visto como uma reflexão, temos que

$$(rs)^2 = 1 \Rightarrow rsrs = 1 \Rightarrow srs = r^{-1}.$$

Em termos de geradores e relações, podemos escrever

$$\text{Dih}_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1; srs = r^{-1} \rangle$$

e a prova da completude desta apresentação pode ser encontrada em [25].

*Observação 1.7.* Equivalente à definição dada acima, o grupo diedral pode ser visto como um subgrupo de  $\text{SO}(3)$ , grupo das rotações do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Mais especificamente, ele pode ser realizado como um grupo de rotações da esfera  $\mathbb{S}^2$  e, conseqüentemente, um grupo de homeomorfismos da esfera bidimensional que preservam orientação.

Para mais informações sobre o grupo diedral, incluindo uma demonstração para a observação acima, recomendamos consultar [8] para uma abordagem geométrica e [7] para uma abordagem algébrica, em que o grupo diedral é realizado como um subgrupo finito do grupo de automorfismos de um recobrimento duplo orientado.

A seguir, apresentamos um lema que relaciona o grupo dicíclico com o grupo diedral.

**Lema 1.8.** *Seja  $n \geq 3$ . Então,*

$$\text{Dic}_{8(n-1)} / \langle y^2 \rangle \cong \text{Dih}_{2(n-1)},$$

sendo que  $\langle y^2 \rangle$  é o único subgrupo normal de ordem 2 de

---

<sup>1</sup>Um movimento rígido é uma transformação que preserva distâncias (isometria), como rotações, reflexões e translações, por exemplo.

$$\text{Dic}_{8(n-1)} \cong \langle x, y \mid y^2 = x^{2(n-1)}; y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

*Demonstração.* Note que  $\langle y^2 \rangle = \{1, y^2\}$ . Pela apresentação do grupo dicitico, a menos de isomorfismo, podemos escrever que o fecho normal do subgrupo gerado por  $y^2$ , denotado  $\overline{\langle y^2 \rangle}$ , satisfaz

$$\overline{\langle y^2 \rangle} = \langle x^{-1}y^2x, y^2 \rangle = \langle x^{-1}x^{2(n-1)}x, y^2 \rangle = \langle x^{2(n-1)}, y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle.$$

Dessa maneira,  $\langle y^2 \rangle$  é normal em  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ . Ao realizar o quociente, obtemos

$$\text{Dic}_{8(n-1)} / \langle y^2 \rangle \cong \langle x, y \mid y^2 = x^{2(n-1)} = 1; yxy = x^{-1} \rangle.$$

Agora, considere a aplicação de  $\text{Dic}_{8(n-1)} / \langle y^2 \rangle$  em  $\text{Dih}_{2(n-1)}$  definida nos geradores por  $x \mapsto r$  e  $y \mapsto s$ . Devido às apresentações dos grupos citados, esta aplicação estende-se a um isomorfismo de grupos. Logo,

$$\text{Dic}_{8(n-1)} / \langle y^2 \rangle \cong \text{Dih}_{2(n-1)}.$$

□

## 1.3 Grupos Poliedrais Binários

Os grupos poliedrais binários são extensões dos grupos poliedrais já conhecidos. Nesta seção, apresentaremos o grupo tetraedral binário, denotado por  $T^*$ , o grupo octaedral binário,  $O^*$ , e o grupo icosaedral binário,  $I^*$ . Veremos brevemente a definição de cada um, sua respectiva apresentação e alguns lemas. Para uma construção geométrica mais detalhada e uma discussão sobre as propriedades destes grupos, sugerimos [8] e [3], respectivamente.

### 1.3.1 Grupo Tetraedral Binário

Seja  $\text{Spin}(3)$  o recobrimento duplo do grupo ortogonal especial  $\text{SO}(3)$  e denote por  $\pi$  tal aplicação de recobrimento. Sejam  $\theta$  o tetraedro regular com centro na origem do espaço euclidiano tridimensional e  $T$  o subgrupo de  $\text{SO}(3)$  que consiste dos movimentos rígidos que levam  $\theta$  nele mesmo. A pré-imagem  $\pi^{-1}(T) := T^*$  é o que chamamos de **grupo tetraedral binário**. Este grupo é não-abeliano e possui 24 elementos.

**Proposição 1.9.** *Uma apresentação para  $T^*$  é dada por*

$$\langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^3 \rangle.$$

O seu centro é o subgrupo gerado pelo elemento  $s^3$  e este é o único subgrupo normal não-trivial de ordem 2 do grupo  $T^*$ .

O grupo tetraedral binário pode ser escrito como um produto semi-direto, como descrito no



**Lema 1.10** (Bae, Carter e Kim, [4]).  $T^* \cong Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_3$ , sendo que  $\mathbb{Z}_3$  age em  $Q_8$  por meio da conjugação.

### 1.3.2 Grupo Octaedral Binário

De maneira similar ao grupo tetraedral binário, considere  $\lambda$  o octaedro regular com centro na origem do espaço  $\mathbb{R}^3$  e  $O$  o subgrupo de  $SO(3)$  consistindo dos movimentos rígidos que levam  $\lambda$  nele mesmo. Definimos o **grupo octaedral binário** como sendo a imagem inversa de  $O$  por  $\pi$  e o denotamos por  $O^*$ . O grupo  $O^*$  é não-abeliano e tem cardinalidade igual a 48.

**Proposição 1.11.** *Uma apresentação de  $O^*$  é dada por*

$$\langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^4 \rangle.$$

O centro do grupo octaedral binário é o subgrupo gerado por  $s^3$  e é o único subgrupo normal não-trivial de ordem 2 de  $O^*$ .

Abaixo, enunciaremos e provaremos um resultado que relaciona o grupo octaedral binário com o grupo das permutações de 4 letras, denotado por  $\mathcal{S}_4$ .

**Lema 1.12.** *O subgrupo de  $O^*$  gerado por  $s^3$  é normal e possui ordem 2. Além disso,*

$$O^* / \langle s^3 \rangle \cong \mathcal{S}_4.$$

*Demonstração.* Note que o fecho normal do subgrupo gerado por  $s^3$  satisfaz

$$\overline{\langle s^3 \rangle} = \langle t^{-1}s^3t, s^3 \rangle = \langle t^{-1}t^4t, s^3 \rangle = \langle t^4, s^3 \rangle = \langle s^3 \rangle,$$

devido à apresentação do grupo octaedral binário. Então,  $\langle s^3 \rangle$  é normal em  $O^*$ .

Dessa maneira, podemos escrever

$$O^* / \langle s^3 \rangle \cong \langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^4 = 1 \rangle = T(2, 3, 4),$$

sendo  $T(2, 3, 4)$  um grupo triangular<sup>2</sup>. Como  $T(2, 3, 4)$  é isomorfo ao grupo de permutações de 4 letras, pelo Teorema A.16, segue que  $O^* / \langle s^3 \rangle \cong \mathcal{S}_4$ .

Resta-nos verificar que  $|\langle s^3 \rangle| = 2$ . Isto segue imediatamente do Teorema de Lagrange e do fato de  $O^*$  ter 48 elementos, enquanto  $\mathcal{S}_4$  tem 24.  $\square$

<sup>2</sup>Vide Apêndice.

### 1.3.3 Grupo Icosaedral Binário

Sejam  $\omega$  o icosaedro regular com centro na origem de  $\mathbb{R}^3$  e  $I$  o subgrupo de  $SO(3)$  que consiste dos movimentos rígidos que levam o icosaedro  $\omega$  nele mesmo. A pré-imagem  $\pi^{-1}(I) := I^*$  é o que denominamos **grupo icosaedral binário**. Tal grupo é não-abeliano e possui 120 elementos.

**Proposição 1.13.** *Uma apresentação do grupo icosaedral binário é dada por*

$$\langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^5 \rangle.$$

Observamos que o centro do grupo  $I^*$  é o subgrupo  $\langle s^3 \rangle$  e este é o único subgrupo normal não-trivial de ordem 2 do grupo icosaedral binário.

Similarmente ao que fizemos para o grupo octaedral binário, a seguir, apresentaremos um lema que relaciona  $I^*$  com o grupo das permutações pares de 5 letras, denotado por  $\mathcal{A}_5$ .

**Lema 1.14.** *O subgrupo  $\langle s^3 \rangle$  de  $I^*$  é normal e possui ordem 2. Mais ainda,*

$$I^* / \langle s^3 \rangle \cong \mathcal{A}_5.$$

*Demonstração.* Observe que

$$\overline{\langle s^3 \rangle} = \langle t^{-1}s^3t, s^3 \rangle = \langle t^{-1}t^5t, s^3 \rangle = \langle t^5, s^3 \rangle = \langle s^3 \rangle,$$

pelas relações de  $I^*$ . Daí,  $\langle s^3 \rangle$  é subgrupo normal do grupo icosaedral binário.

Então, podemos realizar o quociente de  $I^*$  por  $\langle s^3 \rangle$ . Em termos de apresentação, obtemos

$$I^* / \langle s^3 \rangle \cong \langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^5 = 1 \rangle = T(2, 3, 5).$$

Pelo Teorema A.16, o grupo triangular  $T(2, 3, 5)$  é isomorfo ao grupo das permutações pares de 5 letras. Daí, segue que  $I^* / \langle s^3 \rangle \cong \mathcal{A}_5$ .

Por último, utilizando o Teorema de Lagrange combinado ao fato de que a ordem de  $\mathcal{A}_5$  é 60, enquanto a ordem de  $I^*$  é 120, concluímos que  $|\langle s^3 \rangle| = 2$ .  $\square$

Como mencionado inicialmente, os três grupos poliedrais binários aqui definidos são extensões de seus grupos poliedrais correspondentes. Explicitamente, podemos escrever a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow Z(X) \longrightarrow X^* \longrightarrow X \longrightarrow 1,$$

sendo  $Z(X)$  o centro do grupo  $X$  e  $X = T, O$  ou  $I$ .

Salientamos que tal sequência não cinde para nenhuma das possibilidades listadas.

Um comentário semelhante ao feito na Observação 1.7, referente ao grupo diedral, pode ser feito para os grupos octaedral e icosaedral binários.

*Observação 1.15.* Os grupos obtidos nos Lemas 1.12 e 1.14, ou seja,  $\mathcal{S}_4$  e  $\mathcal{A}_5$ , respectivamente, podem ser realizados como grupos de rotações da esfera bidimensional, sendo estas homeomorfismos de  $\mathbb{S}^2$  que preservam orientação.

A demonstração deste fato encontra-se em [7].

## 1.4 Fibrados e Sequência Exata de Homotopia

**Definição 1.16.** Um fibrado<sup>3</sup> é uma aplicação contínua  $\pi: E \rightarrow B$  com a seguinte propriedade: existe um espaço topológico não-vazio  $F$  tal que, para todo  $x \in B$ , existem uma vizinhança  $U \subset B$  (dita distinguida) e um homeomorfismo  $\varphi_U: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tal que  $\pi_U := \pi \circ \varphi_U$  é a projeção na primeira coordenada.

$E$  é dito **espaço total**,  $B$  é chamado **base** e  $F$  é a **fibra típica** do fibrado.

*Observação 1.17.* A aplicação  $\pi$  é sobrejetiva.

De fato, dado  $x \in B$  qualquer, temos que  $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times F$ , que é um conjunto não-vazio por definição.

*Observação 1.18.* A aplicação  $\pi$  é aberta.

*Demonstração.* Seja  $A \subset E$  aberto. Tome  $x \in \pi(A) \subset B$ . Então, existem  $U_x$  vizinhança distinguida (aberta) de  $x$  e um homeomorfismo  $\varphi_{U_x}: U_x \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_x)$  que satisfaz  $\pi \circ \varphi_{U_x} = \pi_{U_x}$ .

Note que  $\pi^{-1}(U_x) \cap A$  é um aberto de  $E$ . Como  $\varphi_{U_x}$  é um homeomorfismo, segue que  $\pi|_{\pi^{-1}(U_x)} = \pi_{U_x} \circ (\varphi_{U_x})^{-1}$  é uma composição de duas aplicações abertas. Assim,  $\pi|_{\pi^{-1}(U_x)}$  é uma aplicação aberta. Logo,  $\pi(\pi^{-1}(U_x) \cap A)$  é um conjunto aberto de  $B$ .

Por fim, observe que, pela definição de fibrado, podemos escrever

$$\pi(A) = \bigcup_{x \in \pi(A)} \pi(\pi^{-1}(U_x) \cap A).$$

Dessa maneira,  $\pi(A)$  é uma união de abertos de  $B$ . Portanto, é um conjunto aberto.  $\square$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de fibrados.

**Exemplo 1.19.** O exemplo mais simples de fibrado é o **fibrado produto**. Tomando  $E = B \times F$  e  $\pi = \pi_B: B \times F \rightarrow B$  a projeção na primeira coordenada, podemos considerar o diagrama abaixo, sendo  $\pi^{-1}(B) = B \times F$  e  $\text{Id}$  a função identidade com domínio (e contradomínio)  $B \times F$ :

<sup>3</sup>Tal definição pode ser encontrada em [28] sob o termo “fibrado localmente trivial”.

$$\begin{array}{ccc}
 B \times F & \xrightarrow{\text{Id}} & \pi^{-1}(B) \\
 & \searrow \pi_B & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}$$

**Exemplo 1.20.** A função exponencial  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $t \mapsto e^{2\pi it}$  é um fibrado com base  $\mathbb{S}^1$  e fibra típica  $F = \mathbb{Z}$ .

**Exemplo 1.21.** A projeção canônica  $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  dada por  $\pi(x) = [x]$ , é um fibrado com base  $\mathbb{R}P^n$  e fibra típica  $\{x, -x\}$ .

Relembramos aqui que, dadas  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  uma aplicação de recobrimento e  $w: [0, 1] \rightarrow X$  uma função contínua, se  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tal que  $p(\tilde{x}_0) = w(0)$ , então existe um único caminho  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ , chamado **levantamento** de  $w$ , que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 ([0, 1], \{0\}) & \xrightarrow{\tilde{w}} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \searrow w & \downarrow p \\
 & & (X, x_0)
 \end{array}$$

Em outras palavras, todo caminho pode ser levantado por uma aplicação de recobrimento de maneira única, quando fixado o ponto de partida do seu levantamento. Porém, quando tratamos de fibrados, conseguimos garantir apenas a existência do levantamento de um caminho. Vejamos:

**Lema 1.22.** *Seja  $\pi: E \rightarrow B$  um fibrado. Dados qualquer caminho  $a: [s_0, s_1] \rightarrow B$  e qualquer ponto  $\tilde{x}_0 \in E$  tal que  $\pi(\tilde{x}_0) = a(s_0)$ , existe algum levantamento  $\tilde{a}: [s_0, s_1] \rightarrow E$ , com  $\tilde{a}(s_0) = \tilde{x}_0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, suponha que a imagem  $a([s_0, s_1])$  esteja contida em alguma vizinhança distinguida  $U$  e considere o respectivo homeomorfismo

$$\varphi_U: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

tal que  $\pi \circ \varphi_U = \pi|_U$ .

Seja  $\tilde{x}_0 \in E$  de modo que  $\pi(\tilde{x}_0) = a(s_0)$ . Como  $a(s_0) \in U$ , temos que  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(U)$ . Daí, visto que  $\varphi_U$  é um homeomorfismo, existe um único par  $(z_0, y_0) \in U \times F$  que satisfaz  $\varphi_U(z_0, y_0) = \tilde{x}_0$ . Assim,

$$a(s_0) = \pi(\tilde{x}_0) = \pi(\varphi_U(z_0, y_0)) = (\pi \circ \varphi_U)(z_0, y_0) = \pi_U(z_0, y_0) = z_0.$$

Dessa maneira,  $\tilde{x}_0 = \varphi_U(a(s_0), y_0)$ .

Agora, defina  $\tilde{a}: [s_0, s_1] \rightarrow E$  dado por  $\tilde{a}(s) = \varphi_U(a(s), y_0)$ . Então, por definição de fibrado,  $\pi \circ \tilde{a}(s) = \pi \circ \varphi_U(a(s), y_0) = \pi_U(a(s), y_0) = a(s)$ , para todo  $s \in [s_0, s_1]$ . Daí,  $\pi \circ \tilde{a} = a$  e  $\tilde{a}(s_0) = \varphi_U(a(s_0), y_0) = \tilde{x}_0$ .

Em geral, por continuidade e compacidade, existem

$$s_0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_k = s_1$$

de tal forma que cada  $a([\sigma_{i-1}, \sigma_i])$  está contido em algum aberto distinguido  $V_i$ .

Pelo caso inicial, existe um caminho  $\tilde{a}_1: [\sigma_0, \sigma_1] \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \tilde{a}_1 = a|_{[\sigma_0, \sigma_1]}$  e  $\tilde{a}_1(\sigma_0) = \tilde{x}_0$ .

Analogamente, existe um caminho  $\tilde{a}_2: [\sigma_1, \sigma_2] \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ \tilde{a}_2 = a|_{[\sigma_1, \sigma_2]}$  e  $\tilde{a}_2(\sigma_1) = \tilde{a}_1(\sigma_1)$ .

Desta forma, construímos uma sequência  $\tilde{a}_i: [\sigma_{i-1}, \sigma_i] \rightarrow E$  tal que

$$\pi \circ \tilde{a}_i = a|_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i]} \quad \text{e} \quad \tilde{a}_i(\sigma_{i-1}) = \tilde{a}_{i-1}(\sigma_{i-1}).$$

Indutivamente, podemos definir  $\tilde{a}: [s_0, s_1] \rightarrow E$  dada por  $\tilde{a}(s) = \tilde{a}_i(s)$ ,  $\forall s \in [s_0, s_1]$ . Tal aplicação é contínua pelo Lema da Colagem e, além disso, é um levantamento do caminho  $a$ , por construção.  $\square$

Uma consequência imediata do Lema 1.22 é o

**Corolário 1.23.** *Seja  $\pi: E \rightarrow B$  um fibrado. Se a base  $B$  e a fibra típica  $F$  são conexos por caminhos, então o espaço total  $E$  também é conexo por caminhos.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in E$ . Como  $B$  é conexo por caminhos, existe um caminho em  $B$  ligando  $\pi(x)$  a  $\pi(y)$ . O levantamento desse caminho, tomando  $x$  como ponto de partida, liga o ponto  $x$  até um ponto  $z \in \pi^{-1}(\pi(y))$ . Como a fibra típica  $F$  é conexa por caminhos, por hipótese, e  $F$  é homeomorfo a  $\pi^{-1}(\pi(y))$ , garantimos a existência de um caminho na fibra de  $\pi(y)$  ligando  $z$  até  $y$ . Realizando a composição, obtemos um caminho em  $E$  que liga  $x$  a  $y$ .  $\square$

Sobre a relação entre aplicações de recobrimento e fibrados, salientamos que um fibrado tendo como fibra típica um espaço discreto é uma aplicação de recobrimento. Reciprocamente, um recobrimento cujas fibras possuem a mesma cardinalidade é um fibrado com fibra típica discreta.

O próximo resultado nos ajudará a compreender o homomorfismo induzido no grupo fundamental de um fibrado.

**Proposição 1.24.** *Seja  $\pi: E \rightarrow B$  um fibrado com fibra  $F$  conexa por caminhos. Então, o homomorfismo induzido  $\pi_{\#}: \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(B, \pi(\tilde{x}_0))$  é sobrejetivo.*

*Demonstração.* Dado um caminho fechado  $a: [s_0, s_1] \longrightarrow B$  com ponto base  $x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$ , considere um levantamento  $\tilde{a}: [s_0, s_1] \longrightarrow E$ , com  $\tilde{a}(s_0) = \tilde{x}_0$ . Note que o ponto final do levantamento,  $\tilde{a}(s_1)$ , também está em  $\pi^{-1}(x_0)$ .

A pré-imagem  $\pi^{-1}(x_0)$  é conexa por caminhos, porque ela é homeomorfa a  $F$ . Portanto, existe um caminho  $b: [s_0, s_1] \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$  ligando  $\tilde{a}(s_1)$  a  $\tilde{x}_0$ . Então,  $\pi \circ b$  é o caminho constante  $e_{x_0}$  em  $B$ .

Logo,  $\tilde{a}b: [s_0, s_1] \longrightarrow E$  é um caminho fechado com  $\tilde{x}_0$  como ponto base e

$$\pi_{\#}([\tilde{a}b]) = [\pi \circ (\tilde{a}b)] = [ae_{x_0}] = [a].$$

Concluimos assim que  $\pi_{\#}$  é sobrejetiva.  $\square$

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, a proposição anterior nos dá uma relação entre o grupo fundamental do espaço de base e o do espaço total. Explicitamente,

$$\pi_1(B, \pi(\tilde{x}_0)) \cong \frac{\pi_1(E, \tilde{x}_0)}{\text{Ker}(\pi_{\#})}.$$

Nos parágrafos seguintes, apresentaremos brevemente os grupos de homotopia de dimensão mais alta. Sua construção generaliza a feita para o grupo fundamental de um espaço topológico. Ao final desta seção, enunciaremos um resultado que diz que todo fibrado induz o que se chama sequência exata longa nos grupos de homotopia dos espaços topológicos envolvidos.

Sejam  $I^0 = \{0, 1\}$  e  $\partial I^0 = \{0, 1\}$ . Para  $n \geq 1$ , seja  $I^n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$  o cartesiano de  $n$  cópias de  $[0, 1]$  e denote por  $\partial I^n$  o bordo de  $I^n$ , constituído de pontos que possuem ao menos uma coordenada igual a 0 ou 1.

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x_0 \in X$  fixado. Para cada  $n \geq 0$ , defina o conjunto

$$\mathcal{C}_n(X, x_0) = \{\alpha: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0); \alpha \text{ é contínua}\}.$$

As definições e propriedades que apresentaremos a seguir são referentes ao caso  $n \geq 1$ . Para  $n = 0$ , faremos um comentário posteriormente.

**Definição 1.25.** Se  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_n(X, x_0)$ , então a função contínua  $\alpha * \beta: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$  definida por

$$(\alpha * \beta)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

é chamada o produto de  $\alpha$  por  $\beta$  e pertence ao conjunto  $\mathcal{C}_n(X, x_0)$ .

Dizemos que  $\alpha$  é equivalente a  $\beta$  se existe uma homotopia de pares

$$H: (I^n \times [0, 1], \partial I^n \times [0, 1]) \longrightarrow (X, x_0)$$

que satisfaz  $H(s, 0) = \alpha(s)$  e  $H(s, 1) = \beta(s)$ . Neste caso, denotamos  $\alpha \cong \beta$  e é fácil ver que  $\cong$  é uma relação de equivalência.

**Teorema 1.26.** *O conjunto  $\mathcal{C}_n(X, x_0)/\cong$  com a operação induzida por  $*$  é um grupo, chamado o **grupo de homotopia de dimensão  $n$  do espaço topológico  $X$  com ponto base  $x_0$**  e denotado por  $\pi_n(X, x_0)$ .*

Observe que a definição da operação  $*$  envolve apenas uma reparametrização da primeira coordenada da  $n$ -upla pertencente a  $I^n$ . Neste contexto, o elemento identidade é a aplicação  $\mathbf{1}_{x_0}: I^n \rightarrow \{x_0\}$  constante igual a  $x_0$  e o inverso multiplicativo de um elemento  $[\alpha]$  é dado pela classe do caminho  $(\alpha^{-1})(s_1, s_2, \dots, s_n) = \alpha(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Dessa maneira, a prova de que  $\pi_n(X, x_0)$  é um grupo segue análoga à demonstração de que  $\pi_1(X, x_0)$  é um grupo.

Se  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  é uma aplicação contínua, então  $f_{\#}: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ , função dada por  $f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ , é um homomorfismo de grupos, chamado **homomorfismo induzido** por  $f$ .

Veremos agora algumas propriedades básicas, porém importantes, dos grupos de homotopia de dimensão mais alta. As demonstrações dos seguintes itens podem ser encontradas em [24].

**Proposição 1.27.** *Temos que*

1. *Se  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  é uma aplicação de recobrimento, então o homomorfismo  $p_{\#}: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  é injetivo e  $p_{\#}: \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  é isomorfismo, para todo  $n \geq 2$ .*
2. *Os grupos de homotopia são invariantes por equivalência homotópica. Ou seja, se  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  é uma equivalência homotópica, então  $f_{\#}: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  é um isomorfismo de grupos.*
3.  *$\pi_n(X, x_0)$  é abeliano, para  $n \geq 2$ .*
4. *Se  $x_0$  e  $x_1$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $X$ , então  $\pi_n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_1)$  são isomorfos.*
5. *Se  $X$  é um espaço topológico contrátil e  $x_0 \in X$ , então  $\pi_n(X, x_0)$  é trivial para todo  $n \geq 1$ .*

O conjunto  $\pi_0(X, x_0)$  é definido de modo similar aos conjuntos  $\pi_n(X, x_0)$ , porém não possui estrutura de grupo. Sua cardinalidade é igual à cardinalidade do conjunto de componentes conexas por caminhos de  $X$ .

Se  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  é uma função contínua, então  $f_{\#}: \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$ , dada por  $f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ , é uma aplicação bem definida, chamada **induzida de  $f$  em  $\pi_0$** .

Finalmente, apresentamos um teorema e uma proposição que relacionam os fibrados com os grupos de homotopia de dimensão mais alta.

**Teorema 1.28** (Hatcher, [24]). *Seja  $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$  um fibrado com fibra típica  $F$ . Então, a aplicação  $p_{\#}: \pi_n(E, F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  é um isomorfismo para todo  $n \geq 1$ . Mais ainda, se  $B$  é conexo por caminhos, para todo  $n \geq 1$ , existe uma função  $\partial: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$  tal que a sequência*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \cdots \xrightarrow{i_{\#}} \pi_0(E, e_0) \rightarrow 1$$

é uma sequência exata longa, sendo  $\partial$  um homomorfismo de grupos para todo  $n \geq 2$ , chamado **operador bordo**, e  $i_{\#}$  o homomorfismo induzido pelo mergulho  $i: F \rightarrow E$ , que existe devido à fibra típica ser homeomorfa a  $p^{-1}(x)$  para qualquer  $x \in B$ .

Em relação ao aparecimento dos conjuntos  $\pi_0(F, e_0)$  e  $\pi_0(E, e_0)$  na sequência exata longa, definimos o núcleo de uma função, tendo contradomínio um deles, como sendo o subconjunto do seu respectivo domínio formado por todos os elementos que são mandados na classe da função constante.

A sequência acima, substituindo 1 por  $\pi_0(B, b_0)$ , é chamada **sequência exata de homotopia associada ao fibrado  $p$** .

Observamos aqui que o teorema acima é válido ao considerarmos uma hipótese mais fraca sobre  $p$ . Se  $p$  for uma **fibração de Serre**, isto é, uma aplicação que satisfaz a propriedade de levantamento de homotopias para discos de dimensão  $k$ , com  $k \geq 0$  inteiro, o resultado segue verdadeiro. Para mais informações sobre fibrações de Serre, incluindo uma justificativa para o fato citado, sugerimos [24].

**Proposição 1.29.** *Sejam  $p: E \rightarrow B$  e  $p': E' \rightarrow B'$  fibrados com fibras típicas  $F$  e  $F'$ , respectivamente. Sejam  $i: F \rightarrow E$  e  $i': F' \rightarrow E'$  mergulhos. Suponhamos que existam aplicações contínuas  $f: F \rightarrow F'$ ,  $e: E \rightarrow E'$  e  $b: B \rightarrow B'$  que tornam o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} (F, e_0) & \xrightarrow{i} & (E, e_0) & \xrightarrow{p} & (B, b_0) \\ \downarrow f & & \downarrow e & & \downarrow b \\ (F', f(e_0)) & \xrightarrow{i'} & (E', e(e_0)) & \xrightarrow{p'} & (B', b(b_0)) \end{array}$$

Então, também é comutativo o seguinte diagrama (com os pontos bases omitidos), sendo que as sequências horizontais são exatas e as aplicações  $\partial: \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$  e  $\partial': \pi_n(B', b(b_0)) \rightarrow \pi_{n-1}(F', f(e_0))$  são homomorfismos para  $n \geq 2$ :



$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_n(E) & \xrightarrow{p_{\#}} & \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_{\#}} \cdots \\
& & \downarrow f_{\#} & & \downarrow e_{\#} & & \downarrow b_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\
\cdots & \xrightarrow{\partial'} & \pi_n(F') & \xrightarrow{i'_{\#}} & \pi_n(E') & \xrightarrow{p'_{\#}} & \pi_n(B') \xrightarrow{\partial'} \pi_{n-1}(F') \xrightarrow{i'_{\#}} \cdots
\end{array}$$

## 1.5 Espaços de Configuração

Os espaços de configuração são extremamente utilizados na Teoria de Tranças. É por meio deles que, no segundo capítulo, vamos relacionar o grupo de tranças geométrico com o grupo fundamental de um determinado espaço topológico.

**Definição 1.30.** Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. O conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \times X \times \cdots \times X; x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\},$$

munido da topologia induzida, é chamado de espaço de configuração de  $n$  pontos ordenados de  $X$  e denotado por  $F_n(X)$ .

Seja  $M$  uma superfície topológica conexa e sem bordo. A seguir, faremos algumas considerações sobre o  $n$ -ésimo espaço de configuração de  $M$ .

Como  $M$  é uma variedade de dimensão 2,  $F_n(M)$  é uma variedade conexa de dimensão  $2n$ . Logo, seus grupos de homotopia independem da escolha do ponto base.

Agora, para cada  $m$  inteiro não negativo, seja  $Q_m = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$  um conjunto de  $m$  pontos distintos de  $M$ . Para  $m = 0$ , considere  $Q_0 = \emptyset$ . No estudo dos espaços de configuração e, em particular, nas demonstrações que apresentaremos adiante, é importante considerarmos o espaço

$$F_{m,n}(M) := F_n(M \setminus Q_m),$$

que também é variedade de dimensão  $2n$ .

Dado  $Q'_m = \{q'_1, q'_2, \dots, q'_m\}$  um outro subconjunto de  $m$  pontos distintos de  $M$ , com  $q_i \neq q'_j$  para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , é sabido que existe um homeomorfismo de  $M$  que envia  $Q_m$  em  $Q'_m$ . Dessa maneira,  $M \setminus Q_m$  é homeomorfo a  $M \setminus Q'_m$  e, portanto, seus respectivos  $n$ -ésimos espaços de configuração também são homeomorfos. Em outras palavras, a escolha do conjunto  $Q_m$  é irrelevante.

O próximo teorema, provado em 1962, nos permite obter sequências exatas de homotopia envolvendo grupos de tranças.

**Teorema 1.31** (Fadell e Neuwirth, [11]). *Seja  $Q_m$  um conjunto de  $m$  pontos distintos de uma superfície  $M$ , sendo  $m$  um inteiro não negativo. Suponhamos  $n \geq 2$  e  $1 \leq r < n$ . Então, a aplicação  $\pi: F_{m,n}(M) \longrightarrow F_{m,r}(M)$  definida por*

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$$

é um fibrado com fibra típica  $F_{m+r, n-r}(M)$ .

*Demonstração.* Seja  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$  um elemento de  $F_{m,r}(M) = F_r(M \setminus Q_m)$ . Primeiramente, vamos mostrar que  $\pi^{-1}(x^0)$  é homeomorfo ao conjunto  $F_{m+r, n-r}(M)$ .

Notemos que, pela definição da aplicação  $\pi$ , podemos escrever

$$\pi^{-1}(x^0) = \{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}) \in F_{m,n}(M)\}.$$

Ou seja,  $\pi^{-1}(x^0) = \{(x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}); y_i \in M \setminus Q_m \text{ e todas as coordenadas são distintas entre si}\}$ .

Ponhamos  $Q_{m+r} = Q_m \cup \{x_1^0, \dots, x_r^0\}$ . Então,

$$\begin{aligned} F_{m+n, n-r}(M) &= F_{n-r}(M \setminus Q_{m+r}) \\ &= \{(y_1, \dots, y_{n-r}; y_i \in M \setminus Q_{m+r} \text{ e } y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j)\} \end{aligned}$$

e é fácil ver que a aplicação  $h: F_{m+r, n-r}(M) \rightarrow \pi^{-1}(x^0)$  dada por

$$h(y_1, \dots, y_{n-r}) = (x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r})$$

é um homeomorfismo.

O restante da prova é dedicado a mostrar que existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x^0$  de modo que a imagem inversa desta vizinhança pela aplicação  $\pi$  é homeomorfa ao espaço produto  $U \times F_{m+r, n-r}(M)$ .

Sendo  $M$  uma superfície, para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , garantimos a existência de uma vizinhança  $U_i$  de  $x_i^0$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $U_i$  é homeomorfa ao disco aberto unitário;
- (ii)  $\overline{U}_i$  é homeomorfo ao disco fechado unitário;
- (iii)  $\overline{U}_i \cap Q_m = \emptyset$ ;
- (iv)  $\overline{U}_k \cap \overline{U}_j = \emptyset$ , se  $k \neq j$ .

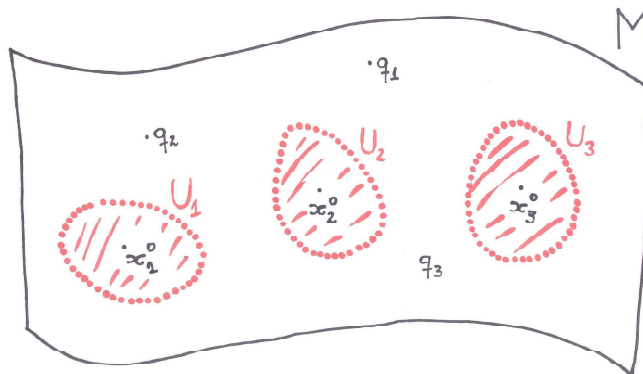


Figura 1.1: Os abertos  $U_i$  (retirado de [27]).

Observamos que  $U = U_1 \times \cdots \times U_r$  é um subconjunto de  $F_{m,r}(M)$  e é uma vizinhança aberta de  $x^0$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ , seja  $\theta_i: U_i \times \overline{U}_i \longrightarrow \overline{U}_i$  uma aplicação com as seguintes propriedades:

- (I)  $\theta_i^x: \overline{U}_i \longrightarrow \overline{U}_i$  dada por  $\theta_i^x(y) = \theta_i(x, y)$  é um homeomorfismo que fixa o bordo de  $U_i$  (sendo  $\partial U_i \approx S^1$ ), com  $x \in U_i$ ;
- (II)  $\theta_i^x(x) = x_i^0$ .

No comentário imediatamente após o final desta demonstração, justificaremos a existência de tais funções  $\theta_i$ .

Pela construção das vizinhanças  $U_i$  e das aplicações  $\theta_i$ , está bem definida a aplicação  $\theta: U \times M \longrightarrow M$  dada por

$$\theta(x_1, \dots, x_r, y) \longmapsto \begin{cases} \theta_i^{x_i}(y), & \text{se } y \in \overline{U}_i \text{ para algum } i \\ y, & \text{se } y \in M \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r). \end{cases}$$

De fato, se existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $y \in \overline{U}_i$  e  $y \in M \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ , temos que  $y \in \partial U_i$ . Pelo item (I), segue que  $\theta_i^{x_i}(y) = y$ . Pelo Lema da Colagem, obtemos também que  $\theta$  é um homeomorfismo.

Notemos agora que, para cada  $x = (x_1, \dots, x_r) \in U$ , a função  $\theta^x: M \longrightarrow M$ , definida por  $\theta^x(y) = \theta(x_1, \dots, x_r, y)$  é um homeomorfismo.

Finalmente, definimos  $\Phi: U \times F_{m+r, n-r}(M) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$  por

$$\Phi(\underbrace{(x_1, \dots, x_r)}_x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x_1, \dots, x_r, (\theta^x)^{-1}(y_1), \dots, (\theta^x)^{-1}(y_{n-r})).$$

Vamos mostrar que  $\Phi$  está bem definida.

Vejam primeiro que nenhuma coordenada de  $\Phi(x, y_1, \dots, y_{n-r})$  pertence a  $Q_m$ . Com efeito, como  $x \in U \subset F_{m,r}(M)$ , temos  $x_i \in M \setminus Q_m$ . Mais ainda, supondo por absurdo que  $(\theta^x)^{-1}(y_j) = q_i$ , para algum  $q_i \in Q_m$ , obtemos

$$y_j = \theta^x(q_i) = \theta(x_1, \dots, x_r, q_i) = q_i,$$

pois  $q_i \in M \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ , pela construção de tais abertos. Teríamos assim  $y_j = q_i$ , o que é um absurdo, visto que  $y_j \in M \setminus Q_{m+r}$  e  $Q_m \subset Q_{m+r}$ .

Então, segue que  $\Phi(x, y_1, \dots, y_{n-r}) \in (M \setminus Q_m) \times \cdots \times (M \setminus Q_m)$ .

Resta-nos mostrar apenas que as coordenadas de  $\Phi(x, y_1, \dots, y_{n-r})$  são duas a duas distintas.

Como  $x \in U \subset F_{m,r}(M)$ , então  $x_i \neq x_j$  sempre  $i \neq j$ , para  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ . Note agora que  $(y_1, \dots, y_{n-r}) \in F_{m+r, n-r}(M)$ . Daí,  $y_i \neq y_j$  sempre que  $i \neq j$ . Como  $(\theta^x)^{-1}$  é homeomorfismo, em particular uma aplicação injetora,  $(\theta^x)^{-1}(y_i) \neq (\theta^x)^{-1}(y_j)$ , para  $i \neq j$ , com  $1 \leq i, j \leq n - r$ . Em seguida, vamos mostrar que não existem  $i, j$  que satisfaçam

$x_i = (\theta^x)^{-1}(y_j)$ . Suponha, por absurdo, que existam. Assim, pelo item (II), podemos escrever

$$\theta^x(x_i) = y_j \Rightarrow \theta(x_1, \dots, x_r, x_i) = y_j \Rightarrow \theta_i^{x_i}(x_i) = y_j \Rightarrow x_i^0 = y_j,$$

o que é um absurdo, visto que  $x_i^0 \in Q_{m+r}$  e  $y_j \in M \setminus Q_{m+r}$ . Portanto,  $x_i \neq (\theta^x)^{-1}(y_j)$ , para quaisquer  $i \in \{1, \dots, r\}$  e  $j \in \{1, \dots, n-r\}$ .

Em suma, provamos que  $\Phi(x, y_1, \dots, y_{n-r}) \in F_{m,n}(M)$ , sendo  $(x, y_1, \dots, y_{n-r})$  elemento qualquer de  $U \times F_{m+r, n-r}$ .

Agora, definimos  $\Psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F_{m+r, n-r}(M)$  por

$$\Psi(\underbrace{x_1, \dots, x_r}_x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x, \theta^x(y_1), \dots, \theta^x(y_{n-r})).$$

Claramente,  $\Phi$  e  $\Psi$  são contínuas e inversas uma da outra. Logo,  $\Phi$  é homeomorfismo.

É fácil ver que, se  $\pi_U: U \times F_{m+r, n-r}(M) \rightarrow U$  é a projeção em  $U$ , então o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \times F_{m+r, n-r}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

Pela arbitrariedade de  $x^0 \in F_{m,r}(M)$ , concluímos que  $\pi$  é um fibrado com fibra típica  $F_{m+r, n-r}(M)$ .  $\square$

Para mostrar que existem funções  $\theta_i$  com as propriedades citadas na demonstração do teorema, notemos que é suficiente exibir uma função  $\theta: D \times \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ , sendo  $D$  o disco unitário aberto do plano  $\mathbb{R}^2$ , tal que

(i) Para cada  $u \in D$ ,  $\theta^u: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ , definida por  $\theta^u(v) = \theta(u, v)$  é um homeomorfismo que fixa  $\partial\overline{D} = S^1$ ;

(ii)  $\theta^u(u) = 0$  (origem), para todo  $u \in D$ .

Tal função  $\theta$  é construída do seguinte modo:

Seja  $(u, v) \in D \times \overline{D}$ . Se  $u = v$ , tome  $\theta(u, v) = 0$  (o que satisfaz a propriedade (ii)). Se  $u \neq v$ , então  $v - u \neq 0$  e existe um único  $t = t(u, v)$  positivo tal que  $\partial_{u,v} := u + t(v - u) \in S^1$ . Definimos

$$\theta(u, v) = \frac{\partial_{u,v}}{t}.$$

Observe que, se  $(u, v) \in D \times S^1$ , por construção, temos  $\partial_{u,v} = v$  e  $t = 1$ . Daí,  $\theta(u, v) = v$ . Portanto,  $\theta^u$  é um homeomorfismo que fixa o bordo do disco unitário, como pede o item (i).

A Figura 1.2 nos mostra a interpretação geométrica da função  $\theta$ :

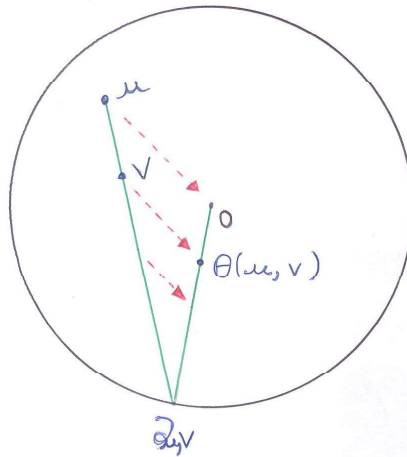


Figura 1.2: A função  $\theta$  (retirado de [27]).

## 1.6 Mapping Class Groups

O objetivo desta seção é introduzir a definição de *mapping class group* de uma superfície e discutir brevemente alguns exemplos.

Fixe  $S = S_{g,n}$  superfície de genus  $g$  com  $n$  pontos removidos do seu interior. Denotaremos por  $\partial S$  a fronteira da superfície  $S$ . Os objetos fundamentais para introduzir o conceito de *mapping class group* são os homeomorfismos de  $S$ . Então, apresentaremos uma definição e enunciaremos alguns resultados importantes acerca deles.

**Definição 1.32.** Sejam  $f, g \in \text{Homeo}(S)$ , sendo  $S$  superfície. Dizemos que  $f$  é **isotópica** a  $g$  quando existe  $H: S \times [0, 1] \rightarrow S$  função contínua que satisfaz:

- i.  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in S$ ;
- ii.  $H_t: S \rightarrow S$ , dado por  $H_t(x) = H(x, t)$ , é um homeomorfismo para todo  $t \in [0, 1]$ .

É fácil ver que o conceito de isotopia produz uma relação de equivalência no conjunto dos homeomorfismos de  $S$ . Ou seja, dados  $f, g \in \text{Homeo}(S)$ , podemos escrever que

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ é isotópica a } g.$$

De maneira similar ao Teorema de Extensão de Homotopias, podemos enunciar

**Teorema 1.33** (Teorema de Extensão de Isotopias). *Seja  $S$  uma superfície qualquer. Se  $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$  é uma isotopia suave entre duas curvas simples fechadas, então existe uma isotopia*

$$H: S \times [0, 1] \rightarrow S,$$

$$\text{tal que } H \Big|_{S \times \{0\}} \text{ é a identidade e } H \Big|_{F(S^1 \times \{0\}) \times [0, 1]} = F.$$

Neste momento do texto, reservamos alguns parágrafos para discutir sobre a relação entre homeomorfismos e difeomorfismos. Sabemos que todo difeomorfismo, em particular, é um homeomorfismo. Por outro lado, um homeomorfismo de uma superfície suave pode ser aproximado por uma aplicação suave. Mais ainda, tomando uma aproximação “suficientemente perto”, podemos garantir que a função suave resultante é homotópica ao homeomorfismo inicial. No entanto, tal função resultante não necessariamente é um difeomorfismo (pode não ser sequer invertível).

Quando trabalhamos com classes de isotopia dessas aplicações, podemos considerá-las tanto homeomorfismos quanto difeomorfismos, devido ao seguinte resultado, provado por Munkres [33] em 1950:

**Teorema 1.34.** *Seja  $S$  uma superfície compacta. Então, todo homeomorfismo de  $S$  é isotópico a um difeomorfismo de  $S$ .*

A seguir, definiremos os *mapping class groups* e faremos algumas observações sobre sua definição.

**Definição 1.35.** O *mapping class group* de uma superfície  $S$  orientável, denotado por  $\mathcal{MCG}(S)$ , é o quociente

$$\frac{\text{Homeo}^+(S)}{\sim},$$

sendo  $\text{Homeo}^+(S)$  o grupo dos homeomorfismos de  $S$  que preservam orientação e  $\sim$  a relação de equivalência advinda do conceito de isotopia de homeomorfismos.

Os elementos deste grupo são chamados de *mapping classes*.

*Observação 1.36.* Para o caso de uma superfície  $N$  não orientável, definimos o *mapping class group* de  $N$  como sendo o grupo dos homeomorfismos de  $N$  módulo isotopia, isto é,

$$\mathcal{MCG}(N) = \frac{\text{Homeo}(N)}{\sim}.$$

*Observação 1.37.* Na Definição 1.35, poderíamos ter tomado  $S$  uma superfície suave orientável e considerado

$$\mathcal{MCG}(S) = \frac{\text{Difeo}^+(S)}{\sim},$$

onde  $\text{Difeo}^+(S)$  é o grupo dos difeomorfismos de  $S$  que preservam orientação.

Tal quociente resulta no mesmo grupo definido anteriormente e a demonstração deste fato baseia-se fortemente no Teorema 1.34. Esta observação nos permite passar da categoria dos homeomorfismos para a categoria dos difeomorfismos quando for conveniente.

Denotaremos por  $\mathcal{MCG}(S, X)$  o grupo em que os *mapping classes* são classes de isotopia de elementos de  $\text{Homeo}^+(S, X)$ , que são homeomorfismos de  $S$  que preservam orientação e deixam o conjunto  $X$  invariante. No caso especial em que  $X = \partial S$ , a notação

$\mathcal{MCG}(S, \partial S)$  indicará que os homeomorfismos considerados são iguais à identidade na fronteira de  $S$ . A mesma notação será utilizada para o caso em que  $S$  é superfície não orientável, sendo feitas as devidas alterações.

Seja  $\text{Homeo}_0(S)$  o subgrupo de  $\text{Homeo}(S)$  consistindo nos elementos que são isotópicos à identidade, ou seja, a componente conexa da identidade no espaço dos homeomorfismos de  $S$ , sendo  $S$  uma superfície orientável. Uma outra maneira de compreender o *mapping class group* de  $S$  é utilizando a caracterização dada na

**Proposição 1.38** (Farb e Margalit, [13]). *Seja  $S$  uma superfície compacta. Então,*

$$\mathcal{MCG}(S) \approx \pi_0(\text{Homeo}(S)) \approx \pi_0(\text{Difeo}(S)).$$

O seguinte teorema nos permite determinar o grupo fundamental de  $\text{Homeo}_0(S)$  para uma superfície  $S$  específica. Ele foi provado pela matemática norte-americana Mary-Elizabeth Hamstrom em uma série de artigos ([19], [20] e [21]) na década de 60.

**Teorema 1.39.** *Seja  $S$  uma superfície compacta, possivelmente com uma quantidade finita de pontos retirados de seu interior. Assuma  $S$  não homeomorfa aos espaços  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $D^2$ , o toro  $\mathbb{T}^2$ , uma coroa circular fechada, um disco com um ponto removido de seu interior e  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ , sendo  $p$  um ponto do plano euclidiano. Então,  $\text{Homeo}_0(S)$  é contrátil.*

Neste caso, como consequência imediata, obtemos que  $\text{Homeo}_0(S)$  é simplesmente conexo.

Agora, trazemos como exemplos os *mapping class groups* do disco fechado  $D^2$ , da esfera  $S^2$ , da faixa de Möbius e do plano projetivo real.

**Exemplo 1.40** (*Alexander's Trick*). Considere  $D^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ . Então,  $\mathcal{MCG}(D^2, \partial D^2)$  é trivial.

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{MCG}(D^2, \partial D^2)$ . Considere  $\phi: D^2 \rightarrow D^2$  homeomorfismo que preserva orientação e satisfaz  $\phi|_{\partial D^2} = \text{Id}_{\partial D^2}$ , sendo  $f = [\phi]$ . Ou seja,  $\phi$  é um representante de  $f$ .

Defina

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right), & \text{se } 0 \leq |x| \leq 1-t \\ x, & \text{se } 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

para  $0 \leq t < 1$  e tome  $F(x, 1)$  como a aplicação identidade em  $D^2$ .

Geometricamente, como representado na Figura 1.3 abaixo, a função  $F$  pode ser interpretada da seguinte maneira: no tempo  $t$  aplicamos a função inicial  $\phi$  ao disco de raio  $(1-t)$  e aplicamos a identidade na parte de fora do disco.

Portanto,  $F$  é uma isotopia de  $\phi$  na função identidade de  $D^2$ .

Como a escolha de  $f$  foi arbitrária, segue que  $\mathcal{MCG}(D^2, \partial D^2) = \{1\}$ . □

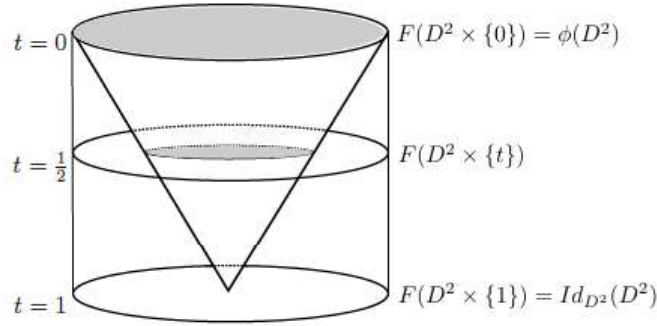


Figura 1.3: Interpretação geométrica da função  $F$  (retirado de [9]).

A demonstração dada no exemplo acima prova um fato mais forte do que o enunciado. A prova nos garante que qualquer homeomorfismo do disco fechado que preserva orientação e fixa  $\partial D^2$  é isotópico à identidade de  $D^2$ . Isto quer dizer que o espaço topológico  $\text{Homeo}^+(D^2, \partial D^2)$ , munido da topologia compacto-aberta, é contrátil.

**Exemplo 1.41.** O *mapping class group* da esfera bidimensional é trivial.

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{MCG}(\mathbb{S}^2)$ . Devido à Observação 1.37, podemos considerar  $\phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  difeomorfismo que preserva orientação e satisfaz  $f = [\phi]$ .

Seja  $\gamma$  um laço simples (sem auto-interseção) suave e orientado de  $\mathbb{S}^2$ . Como  $\phi$  é um difeomorfismo que preserva orientação e  $\mathbb{S}^2$  é simplesmente conexa, existe uma isotopia suave entre  $f(\gamma)$  e  $\gamma$ . Porém, o laço simples  $f(\gamma)$  borda um disco fechado em  $\mathbb{S}^2$ . Pelo Exemplo 1.40,  $f|_{(D^2, f(\gamma))}$  é isotópica a identidade de  $D^2$ . Pelo Teorema de Extensão de Isotopias, podemos estender a isotopia suave entre  $f(\gamma)$  e  $\gamma$  para uma de  $f$  até  $\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ .  $\square$

**Exemplo 1.42.** Seja  $\mathbb{M}$  a faixa de Möbius. Então,  $\mathcal{MCG}(\mathbb{M}, \partial\mathbb{M}) = \{1\}$ .

A prova desse fato pode ser encontrada em [37] (Proposição 5 e Lema 6). Observamos que a isotopia dada nesta demonstração fixa o bordo de  $\mathbb{M}$  em todo o tempo. Dessa maneira, um homeomorfismo de  $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$  é isotópico à identidade da faixa de Möbius com seu bordo removido.

Para calcularmos o  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2)$ , veremos um resultado preliminar.

**Lema 1.43.** *Seja  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma aplicação contínua. Então, existe  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x) = x$  ou  $f(x) = -x$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $f(x) \neq \pm x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ .

Como  $f(x) \neq x, \forall x \in \mathbb{S}^2$ , temos que a função

$$H: [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$(t, x) \mapsto \frac{-tx + (1-t)f(x)}{\| -tx + (1-t)f(x) \|}$$

está bem definida e é contínua. Além disso,



$$H(0, x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x) \text{ e } H(1, x) = \frac{-x}{\|-x\|} = -x = \tau(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ , sendo  $\tau$  a aplicação antipodal de  $\mathbb{S}^2$ . Logo,  $H$  é uma homotopia entre as funções  $f$  e  $\tau$ .

Por outro lado, visto que  $f(x) \neq -x, \forall x \in \mathbb{S}^2$ , segue que a aplicação

$$G: [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (t, x) \longmapsto \frac{tx + (1-t)f(x)}{\|tx + (1-t)f(x)\|}$$

está bem definida e é contínua. Note que, para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ , temos

$$G(0, x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x) \text{ e } G(1, x) = \frac{x}{\|x\|} = x = \text{id}_{\mathbb{S}^2}(x).$$

Daí,  $G$  é uma homotopia entre as funções  $f$  e  $\text{id}_{\mathbb{S}^2}$ .

Portanto, por transitividade, obtemos que a aplicação  $\tau$  é homotópica à  $\text{id}_{\mathbb{S}^2}$ , o que é um absurdo. Logo, existe  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x) = x$  ou  $f(x) = -x$ .  $\square$

**Exemplo 1.44.** O *mapping class group* do plano projetivo real é trivial.

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2)$  e considere  $\phi: \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$  homeomorfismo tal que  $f = [\phi]$ . Seja

$$p: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \\ x \longmapsto [x]$$

a projeção natural.

Observe que  $(\phi \circ p)_{\#}(\pi_1(\mathbb{S}^2)) \subset p_{\#}(\pi_1(\mathbb{S}^2))$  trivialmente. Logo, pelo Teorema do Levantamento de Aplicações, existe  $\bar{\phi}: \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  aplicação contínua que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{S}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Pelo Lema 1.43, existe  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $\bar{\phi}(x) = x$  ou  $\bar{\phi}(x) = -x$ . Dessa maneira,

$$\phi([x]) = \phi(p(x)) = (\phi \circ p)(x) = (p \circ \bar{\phi})(x) = p(\pm x) = [x].$$

Daí,  $\phi$  fixa a classe de  $x$ . Então, a restrição  $\phi|_{\mathbb{R}P^2 \setminus \{[x]\}}$  é um homeomorfismo do plano projetivo real perfurado (que é homeomorfo à Faixa de Möbius com seu bordo removido). Pelo Exemplo 1.42,  $\phi|_{\mathbb{R}P^2 \setminus \{[x]\}}$  é isotópico à identidade de  $\mathbb{R}P^2 \setminus \{[x]\}$ . Além disso, como  $\phi$  fixa  $[x]$ , podemos estender tal isotopia para  $\mathbb{R}P^2$ , obtendo que  $\phi$  é isotópica a  $\text{Id}_{\mathbb{R}P^2}$ .

Pela arbitrariedade de  $f$ , segue que  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2) = \{1\}$ .  $\square$

Para calcular *mapping class groups* não triviais, precisaríamos introduzir um arcabouço teórico que não faz parte do propósito desse texto. Contudo, elencamos abaixo dois exemplos cujas demonstrações podem ser encontradas em [9] e [13].

**Exemplo 1.45.** O *mapping class group* de uma coroa circular é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Exemplo 1.46.** O *mapping class group* do toro  $\mathbb{T}^2$  é isomorfo a  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , sendo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}.$$

## Capítulo 2

# Introdução aos Grupos de Tranças

Neste capítulo, daremos início ao estudo dos grupos de tranças de uma superfície. Primeiro, apresentaremos a definição geométrica de uma trança. Noções intuitivas sobre como deformar uma trança e como operar duas tranças são exploradas, bem como suas formalizações. Veremos que o grupo de tranças com  $n$  cordas e o grupo das permutações de  $n$  letras possuem uma forte relação. Na segunda seção, faremos uma abordagem topológica sobre os grupos de tranças, que nos permitirá utilizar a teoria de grupo fundamental e dos espaços de recobrimento neste contexto. Por fim, veremos brevemente de que maneira o *mapping class group* de uma superfície se conecta ao seu grupo de tranças.

### 2.1 Definição Geométrica

Nesta seção, apresentaremos a definição geométrica de uma trança, descreveremos quando duas tranças podem ser consideradas a mesma e determinaremos uma maneira de operar duas tranças para construir os grupos de tranças de uma superfície.

Seja  $M$  uma superfície compacta, conexa e sem bordo. Seja  $n$  um inteiro positivo e considere  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  um conjunto de pontos dois a dois distintos de  $M$ . Defina  $A_i = P_i \times \{1\}$  em  $M \times \{1\}$  e  $B_i = P_i \times \{0\}$  em  $M \times \{0\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 2.1.** Uma  $n$ -trança sobre  $M$  baseada em  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  é uma  $n$ -upla  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  de caminhos  $b_i: [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ , que satisfazem as seguintes condições:

- i)* Para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos que  $b_i(0) = A_i$  e  $b_i(1) = B_j$ , para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ ;
- ii)* Para qualquer **superfície de nível**  $M \times \{t\}$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , existem exatamente  $n$  pontos de interseção entre o conjunto  $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$  e cada superfície de nível.

Cada caminho  $b_i$  é chamado  $i$ -ésima corda da trança  $\beta$  ou, simplesmente, uma corda da trança.

Em outras palavras, as condições *i*) e *ii*) indicam que os pontos  $\{A_i\}$  são ligados aos pontos  $\{B_j\}$  por meio de cordas que não possuem interseção entre si e “descem” de maneira monótona partindo de  $M \times \{1\}$  até  $M \times \{0\}$ .

A condição *ii*) é ilustrada na figura abaixo, onde a superfície  $M$  é um quadrado fechado.

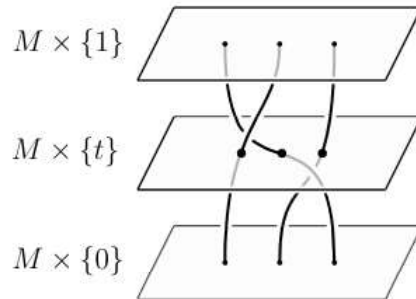


Figura 2.1: Condição *ii*) (retirado de [18]).

Na Figura 2.2 temos, em ordem, uma 2-trança do disco fechado  $\mathbb{D}^2$ , uma 3-trança da esfera  $\mathbb{S}^2$  e uma 4-trança do quadrado unitário.

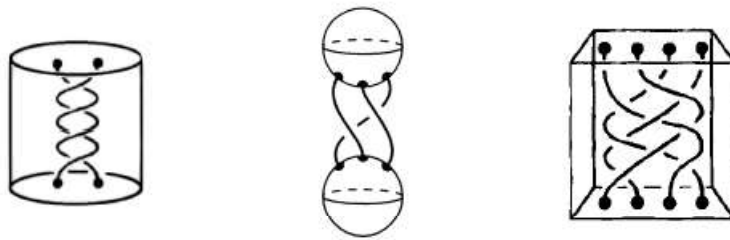


Figura 2.2: Exemplos de tranças (retirado de [35]).

Denotaremos por  $\mathcal{B}_n(M)$  o conjunto de todas as  $n$ -tranças (ou conjunto das  $n$ -tranças totais) de  $M$  baseadas em  $\{P_1, \dots, P_n\}$ .

Intuitivamente, duas tranças são consideradas a mesma quando podemos deformar continuamente uma na outra por meio de uma quantidade finita de movimentos que preservam a estrutura de trança. Para tratarmos deste conceito formalmente, sem perda de generalidade, assumiremos a imagem de cada  $b_i$  como sendo um caminho poligonal. Observamos que a Figura 2.3 ilustra a situação descrita na Definição 2.2.

**Definição 2.2.** Seja  $\beta$  uma  $n$ -trança e considere  $AB$  um segmento de uma corda  $b_i$ . Seja  $C$  um ponto em  $M \times [0, 1]$  tal que o triângulo  $ABC$  em  $M \times [0, 1]$  não intersecta outras cordas e  $\Delta ABC \cap b_i = AB$ . Além disso, suponha que  $AC \cup CB$  intersecta qualquer superfície de nível  $M \times \{t\}$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , em exatamente um ponto. Neste caso, podemos substituir  $AB$  por  $AC \cup CB$  e esta operação é denotada por  $\Omega$ .

A operação inversa de  $\Omega$  está bem definida se  $AC \cup CB$  é a união de dois segmentos em uma corda  $b_i$  tal que  $\Delta ABC \cap b_j = \emptyset$ , para todo  $j \neq i$ . Assim, podemos substituir  $AC \cup CB$  por  $AB$  e denotaremos essa operação por  $\Omega^{-1}$ .

As operações  $\Omega$  e  $\Omega^{-1}$  são chamadas movimentos elementares em uma trança.

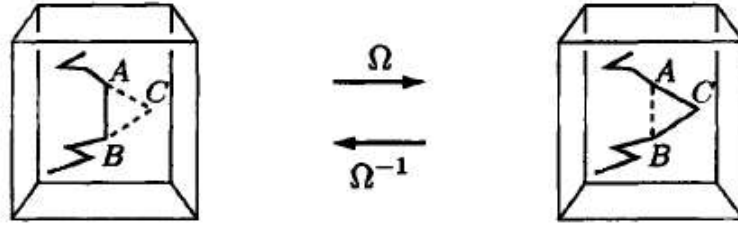


Figura 2.3: Movimentos elementares  $\Omega$  e  $\Omega^{-1}$  (retirado de [27]).

Neste contexto, apresentamos a

**Definição 2.3.** Dizemos que uma  $n$ -trança  $\beta$  é equivalente a uma  $n$ -trança  $\beta'$  quando existe uma sequência finita de movimentos elementares em  $M \times [0, 1]$  que deforma  $\beta$  em  $\beta'$ , a saber

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \cdots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta',$$

onde para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , temos que  $\beta_i$  é obtida de  $\beta_{i-1}$  aplicando  $\Omega$  ou  $\Omega^{-1}$ .

O conceito dado acima produz uma relação de equivalência no conjunto de todas as  $n$ -tranças. Assim, se  $\beta$  e  $\beta'$  são equivalentes, denotamos  $\beta \sim \beta'$ .

**Exemplo 2.4.** As 3-tranças na Figura 2.4 são equivalentes.

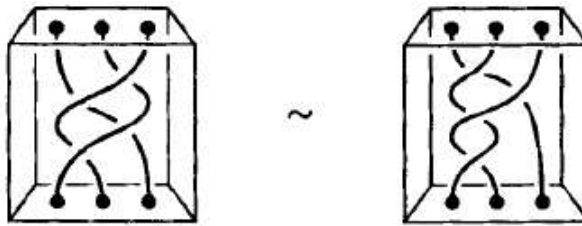


Figura 2.4: Tranças equivalentes (retirado de [35]).

**Exemplo 2.5.** Uma  $n$ -trança  $\beta$  não pode ser equivalente a uma  $m$ -trança  $\beta'$ , se  $m \neq n$ .

Em [35], Murasugi explora várias interpretações da noção de equivalência de tranças. Uma delas<sup>1</sup> está expressa no

**Teorema 2.6** (Murasugi, [35]). *Duas  $n$ -tranças de  $M$ ,  $\beta$  e  $\beta'$ , são equivalentes se, e somente se, existe um homeomorfismo  $\varphi: M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$  tal que  $\varphi|_{\partial(M \times [0, 1])} = \text{Id}$  e  $\varphi(\beta) = \beta'$ .*

<sup>1</sup>Este resultado, em específico, é o Corolário 3.6 (Capítulo 6) de [35]. Observamos que o enunciado é feito para  $M = \mathbb{D}^2$ , porém, a demonstração não utiliza o fato de que a superfície é o disco.

Geralmente, mostrar que dois objetos matemáticos são equivalentes é mais complicado do que provar que eles são “distintos” e isto motiva o estudo de invariantes. No nosso contexto, um invariante de trança é uma aplicação  $f: B_n \rightarrow A$  bem definida, sendo  $A$  um conjunto qualquer. Ou seja,

$$\beta \sim \beta' \Rightarrow f(\beta) = f(\beta').$$

Pela contra-positiva, se  $f(\beta) \neq f(\beta')$ , então  $\beta \not\sim \beta'$ .

Salientamos que a recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, caso duas tranças apresentem a mesma imagem por um invariante, elas não necessariamente são equivalentes. Veremos esta afirmação através do Exemplo 2.9.

**Definição 2.7.** Seja  $\beta$  uma  $n$ -trança de  $M$ , com  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Vimos que a  $i$ -ésima corda  $b_i$  liga  $A_i$  até  $B_j$ , onde  $j = j(i)$ . Considere a aplicação  $\pi: \mathcal{B}_n(M) \rightarrow \mathcal{S}_n$ , sendo  $\mathcal{S}_n$  o conjunto de todas as permutações de  $n$  letras, definida por

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix}.$$

A função  $\pi$  é um invariante de trança e a imagem de  $\beta$  por  $\pi$  é chamada permutação de uma trança.

**Exemplo 2.8.** Considere as tranças  $\beta_1$  e  $\beta_2$  como na Figura 2.5, respectivamente.

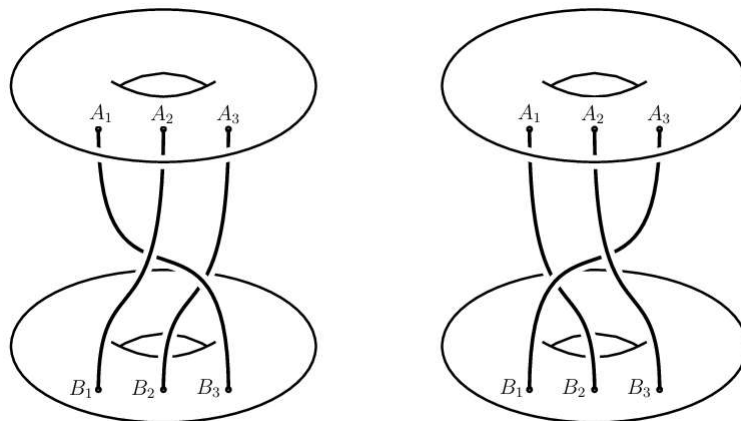


Figura 2.5: Duas 3-tranças do toro (retirado de [18]).

Então,

$$\pi(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \pi(\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.9.** Na Figura 2.6, temos duas tranças com permutação igual à identidade. Porém, elas não são equivalentes.

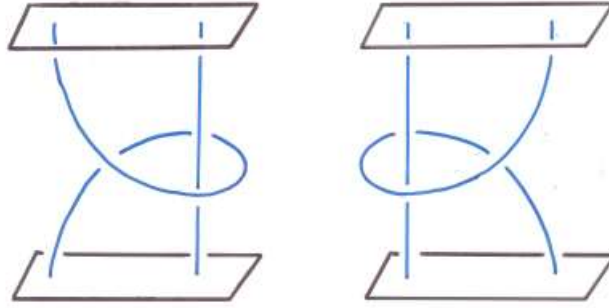


Figura 2.6: 2-tranças do quadrado unitário (retirado de [27]).

Agora, considere  $\Pi_M: M \times [0, 1] \rightarrow M$  a projeção na primeira coordenada. Dada uma  $n$ -trança  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , denotamos por  $\Pi_M(\beta) := (\Pi_M \circ b_1, \Pi_M \circ b_2, \dots, \Pi_M \circ b_n)$  a  $n$ -upla de caminhos na superfície  $M$ .

**Definição 2.10.** Sejam  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  e  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  duas tranças em  $\mathcal{B}_n(M)$ . Considere a  $n$ -trança  $\alpha\beta := ((ab)_1, \dots, (ab)_n)$ , sendo

$$(ab)_i: [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$$

$$t \mapsto ((\Pi_M \circ a_i) * (\Pi_M \circ b_{\pi(\alpha)(i)})(t), t),$$

para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , onde  $\pi(\alpha)(i) = j(i)$ , como consta na Definição 2.7, e  $*$  denota a concatenação (justaposição) de caminhos.

A trança  $\alpha\beta$  é denominada **produto da trança  $\alpha$  com a trança  $\beta$** .

Uma ideia geométrica do produto de duas tranças pode ser vista na Figura 2.7. Salientamos que, na figura mencionada, a superfície em questão é o quadrado unitário, porém, a visualização pode ser aplicada para qualquer outra superfície.

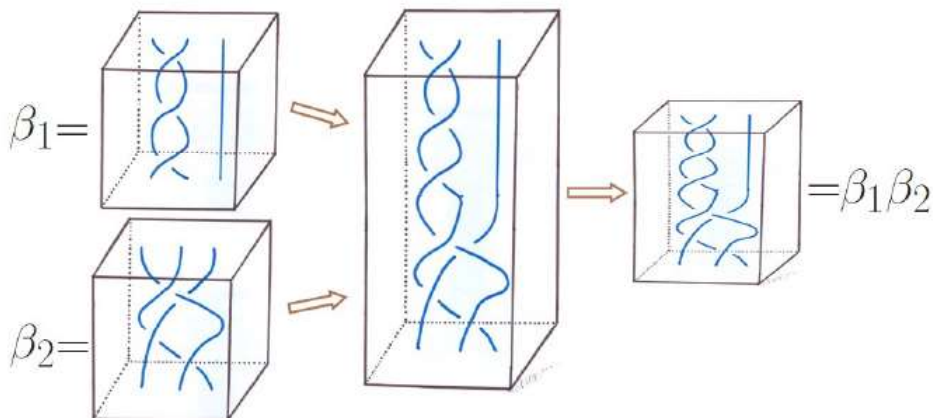


Figura 2.7: Produto de tranças (retirado de [27]).

O produto de tranças aqui definido não concede ao conjunto  $\mathcal{B}_n(M)$  a estrutura de grupo, pois, além de não ser uma operação associativa, ele não possui um elemento neutro bem definido. Contudo, a Definição 2.10, induz uma operação no quociente  $\mathcal{B}_n(M)/\sim$

com boas propriedades. Denotaremos por  $B_n(M)$  o conjunto  $\mathcal{B}_n(M)$  munido de  $\sim$ , isto é, o conjunto das classes de equivalência de  $n$ -tranças. A partir deste momento, faremos distinção entre uma trança e a sua classe de equivalência apenas quando for necessário.

**Teorema 2.11.** *O conjunto  $B_n(M) = \{[\beta]; \beta \in \mathcal{B}_n(M)\}$ , munido da operação induzida pelo produto de tranças, é um grupo, intitulado grupo de  $n$ -tranças de  $M$  ou grupo de tranças com  $n$  cordas de  $M$ .*

A demonstração deste teorema é análoga à prova de que o conjunto das classes de homotopia de laços com ponto base fixado de um espaço topológico, munido da operação induzida pela concatenação de laços, é um grupo. Indicamos [28] como referência e [35] para uma justificativa diagramática de que a operação definida no Teorema 2.11 satisfaz as condições necessárias para fornecer a  $B_n(M)$  estrutura de grupo, isto é, ela é associativa, admite elemento neutro e todo elemento possui inverso.

*Observação 2.12.* O elemento neutro de  $B_n(M)$  é a classe de equivalência da  $n$ -trança  $1 := (k_1, \dots, k_n)$ , com  $k_i(t) = (P_i, t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Mais ainda, se  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  é uma  $n$ -trança de  $M$ , então a trança  $\beta^{-1} = (b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1})$ , sendo

$$\begin{aligned} b_i^{-1}: [0, 1] &\longrightarrow M \times [0, 1] \\ t &\longmapsto (\Pi_M \circ b_{\pi(\beta)^{-1}(i)}(1-t), t) \end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq n$ , satisfaz  $[\beta^{-1}] = [\beta]^{-1}$ .

Sabendo que  $B_n(M)$  é um grupo, resgatamos a aplicação permutação introduzida na Definição 2.7 e observamos que ela induz um homomorfismo  $\bar{\pi}: B_n(M) \rightarrow \mathcal{S}_n$ , dado por  $\bar{\pi}([\beta]) = \pi(\beta)$ . Por simplicidade, denotaremos  $\bar{\pi}$  por  $\pi$ . Observe que  $\pi$  está bem definida, pois tranças equivalentes possuem a mesma permutação, e é um homomorfismo devido à definição da operação em  $B_n(M)$ . Além disso, é fácil ver que  $\pi$  é sobrejetor. Dessa maneira, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.13.** *A sequência*

$$1 \longrightarrow \text{Ker}(\pi) \hookrightarrow B_n(M) \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_n \longrightarrow 1$$

*é uma sequência exata curta.*

**Definição 2.14.** O núcleo do homomorfismo  $\pi$  é chamado grupo de  $n$ -tranças puras de  $M$  e denotado por  $P_n(M)$ .

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, temos o

**Corolário 2.15.**  *$B_n(M)/P_n(M)$  é isomorfo a  $\mathcal{S}_n$ .*

Na maioria das vezes, descrever  $B_n(M)$  explicitamente, por meio de uma apresentação, é uma tarefa muito trabalhosa e depende fortemente da superfície escolhida. Contudo, conseguimos caracterizar tal grupo para  $n = 1$ .



**Proposição 2.16.** *Seja  $B_n(M)$  o grupo de  $n$ -tranças como descrito anteriormente. Então,*

$$B_1(M) \cong \pi_1(M, P_1).$$

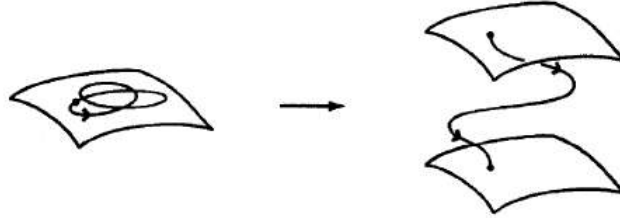


Figura 2.8: Ideia geométrica da Proposição 2.16 (retirado de [35]).

*Demonstração.* Seja  $p: M \times [0, 1] \rightarrow M \times \{0\}$ , dada por  $p(x, t) = (x, 0)$ , a projeção natural na primeira coordenada. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} p_*: B_1(M) &\longrightarrow \pi_1(M, P_1) \\ \beta &\longmapsto p(\beta). \end{aligned}$$

Seja  $\beta$  uma 1-trança de  $M$ . Como  $A_1 = P_1 \times \{1\}$  e  $B_1 = P_1 \times \{0\}$ , segue que  $p(A_1) = B_1$ . Então,  $p_*(\beta)$  é uma curva fechada em  $M$  com ponto base  $B_1$ . Assim,  $p_*(\beta)$  é um laço de  $M$ . Mais ainda, dadas  $\beta_1, \beta_2 \in B_1(M)$  equivalentes, temos que  $p_*(\beta_1) = p_*(\beta_2)$ , pois conseguimos projetar em  $M \times \{0\}$  o homeomorfismo descrito no Teorema 2.6. Portanto,  $p_*$  é um bem definido homomorfismo.

Veremos que  $p_*$  é um isomorfismo.

Seja  $f: [0, 1] \rightarrow M$  um laço em  $M$  com ponto base  $P_1$ , isto é,  $f(0) = f(1) = P_1$ . Tome  $\beta$  uma 1-trança de  $M$  de modo que  $\beta(t) = (f(t), t)$ , para  $t \in [0, 1]$ . Assim,

$$p_*(\beta) = p_*(\beta(t)) = p_*(f(t), t) = f(t).$$

Logo,  $p_*$  é sobrejetor

Agora, considere  $\beta \in B_1(M)$  tal que  $p_*(\beta)$  é trivial em  $\pi_1(M, P_1)$ , ou seja,  $p_*(\beta)$  é um laço contrátil na superfície  $M$ . Então, existe uma homotopia

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M \times \{0\}$$

que satisfaz:

- i)  $H(s, 0) = H(s, 1) = H(0, t) = P_1$ , para  $0 \leq t \leq 1$ ;
- ii)  $H(1, t) = p_*(\beta)$ .

Para cada  $(s, t)$  em  $[0, 1] \times [0, 1]$ , temos que  $\gamma_s := (H(s, t), t) \in M \times [0, 1]$  é uma 1-trança de  $M$ . Note que

$$\gamma_0 = (H(0, t), t) = (P_1, t) \text{ e } \gamma_1 = (H(1, t), t) = (p_*(\beta), t).$$

Ou seja,  $\gamma_0$  é a trança trivial enquanto  $\gamma_1 = \beta$ . Isto quer dizer que a aplicação  $(H(s, t), t)$  descreve uma quantidade finita (por compacidade de  $[0, 1]$ ) de movimentos elementares que deformam  $\gamma_0$  em  $\gamma_1$ . Logo,  $\beta$  é equivalente à trança trivial e obtemos a injetividade de  $p_*$ .

Portanto, concluímos que  $p_*$  é um isomorfismo, de onde segue que  $B_1(M) \cong \pi_1(M, P_1)$ .  $\square$

Como consequência deste resultado, podemos listar os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.17.**  $B_1(\mathbb{D}^2) \cong \pi_1(\mathbb{D}^2) = \{1\}$ .

**Exemplo 2.18.**  $B_1(\mathbb{S}^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2) = \{1\}$ .

**Exemplo 2.19.**  $B_1(\mathbb{T}^2) \cong \pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , sendo  $\mathbb{T}^2$  o toro.

**Exemplo 2.20.**  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ .

## 2.2 Grupos de Tranças e Espaços de Configuração

Esta seção visa descrever os grupos de tranças de uma superfície utilizando espaços de configuração. Para isso, primeiro vamos relembrar a definição de uma ação livre de um grupo em um conjunto.

**Definição 2.21.** Uma ação de um grupo  $G$  em um conjunto  $S$  é uma função  $G \times S \rightarrow S$ , usualmente denotada por  $(g, x) \mapsto gx$ , que satisfaz

i)  $ex = x$ , para todo  $x \in S$ , sendo  $e$  o elemento neutro do grupo  $G$ ;

ii)  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ , para quaisquer  $g_1, g_2 \in G$  e para todo  $x \in S$ .

Quando tal ação é dada, dizemos que **o grupo  $G$  age no conjunto  $S$** . Como um grupo  $G$  pode agir em um conjunto  $S$  de diversas maneiras, a notação  $gx$  é ambígua. Porém, a depender do contexto, isto não deve causar confusão.

**Exemplo 2.22.** Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ . Uma ação do grupo  $H$  no conjunto  $G$  é dada por  $(h, x) \mapsto h x h^{-1}$ . Neste caso, para evitarmos confundir a operação em  $G$  com a ação, denotamos o resultado da ação sempre por  $h x h^{-1}$  e não por  $hx$ . Tal ação de  $h \in H$  em  $G$  é chamada de **conjugação** por  $h$ .

**Proposição 2.23.** *Seja  $G$  um grupo que age em um conjunto  $S$ . Então,*

i) *A relação em  $S$  definida por  $x \sim x' \Leftrightarrow x' = gx$ , para algum  $g \in G$ , é uma relação de equivalência.*

ii) Para todo  $x \in S$ ,  $G_x := \{g \in G; gx = x\}$  é um subgrupo de  $G$ .

*Demonstração.* i) Vamos mostrar que  $\sim$  é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Dado  $x \in S$ , tome  $e \in G$  e note que  $ex = x$ , por definição de ação. Logo,  $x \sim x$  e obtemos que  $\sim$  é reflexiva.

Sejam  $x, x' \in S$  tais que  $x \sim x'$ . Então, existe  $g \in G$  tal que  $x' = gx$ . Logo,

$$g^{-1}x' = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x,$$

por definição de ação. Então, podemos escrever que  $g^{-1}x' = x$ . Portanto,  $x' \sim x$ , de onde segue que a relação dada é simétrica.

Resta-nos verificar a transitividade. Sejam  $x_1, x_2, x_3 \in S$  tais que  $x_1 \sim x_2$  e  $x_2 \sim x_3$ . Então, existem  $g, \bar{g}$  satisfazendo  $x_1 = gx_2$  e  $x_2 = \bar{g}x_3$ . Note que  $g\bar{g} \in G$  e  $(g\bar{g})x_3 = g(\bar{g}x_3) = gx_2 = x_1$ . Daí,  $x_3 \sim x_1$  e, por simetria, obtemos que  $x_1 \sim x_3$ , como queríamos.

Assim, segue que  $\sim$  é uma relação de equivalência.

ii) Seja  $x \in S$  e considere  $G_x = \{g \in G; gx = x\}$ .

Note que  $ex = x$  e, portanto,  $e \in G_x$ . Então,  $G_x$  é não-vazio.

Sejam  $a, b \in G_x$ . Assim,  $ax = x$  e  $bx = x$ . Temos ainda que

$$b^{-1}x = b^{-1}(bx) = (b^{-1}b)x = ex = x,$$

por definição de ação. Logo,  $b^{-1} \in G_x$ .

Portanto,  $(ab^{-1})x = a(b^{-1}x) = ax = x$ , de onde segue que  $ab^{-1} \in G_x$ . Dessa maneira,  $G_x$  é subgrupo de  $G$ .  $\square$

As classes de equivalência geradas pela relação definida na Proposição 2.23 são chamadas **órbitas** de  $G$  em  $S$  e a órbita de um elemento  $x \in S$  é denotada por  $\bar{x}$ . Explicitamente,

$$\bar{x} = \{y \in S; \exists g \in G \text{ tal que } x = gy\} = Gx.$$

O subgrupo  $G_x$  é chamado **estabilizador** ou **grupo de isotropia** de  $x$ .

**Definição 2.24.** Uma ação de um grupo  $G$  em um conjunto  $S$  é dita livre quando  $G_x = \{e\}$  para todo  $x \in S$ .

Observamos que, se uma ação é livre e existe  $g \in G$  tal que  $gx = x$ , para todo  $x \in X$ , devemos ter  $g = e$ .

Relembre que, pela Definição 1.30, dado  $M$  uma superfície, o seu  $n$ -ésimo espaço de configuração é o conjunto  $F_n(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \times X \times \dots \times X; x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$ . Em seguida, vamos relacionar os conceitos explorados nesta seção com os espaços de configuração.

**Proposição 2.25.** A função  $\mu: \mathcal{S}_n \times F_n(M) \longrightarrow F_n(M)$  definida por

$$\mu(s, x_1, \dots, x_n) = (x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$$

é uma ação livre.

*Demonstração.* Dado  $(x_1, \dots, x_n) \in F_n(M)$ , temos que

$$\mu(\text{id}, x_1, \dots, x_n) = (x_{\text{id}(1)}, \dots, x_{\text{id}(n)}) = (x_1, \dots, x_n),$$

sendo  $\text{id}$  a permutação identidade em  $\mathcal{S}_n$ .

Note ainda que, dados  $s, u \in \mathcal{S}_n$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \mu(s \circ u, x_1, \dots, x_n) &= (x_{(s \circ u)(1)}, \dots, x_{(s \circ u)(n)}) \\ &= \mu(s, x_{u(1)}, \dots, x_{u(n)}) \\ &= \mu(s, \mu(u, x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Portanto,  $\mu$  é uma ação de  $\mathcal{S}_n$  em  $F_n(M)$ .

Além disso, se existe  $s \in \mathcal{S}_n$  tal que  $\mu(s, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ , então  $(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) = (x_1, \dots, x_n)$ , de onde segue que  $s(i) = i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo, a permutação  $s$  é o elemento identidade em  $\mathcal{S}_n$  e obtemos que  $\mu$  é uma ação livre.  $\square$

A ação  $\mu$  dada acima produz uma relação de equivalência, digamos  $\sim$ , como na Proposição 2.23. Então,  $D_n(M) := F_n(M)/\sim$  é conjunto das órbitas de  $\mathcal{S}_n$  em  $F_n(M)$ . Também denotaremos este quociente por  $F_n(M)/\mathcal{S}_n$ , para que fiquem explícitos tanto o conjunto quanto o grupo envolvidos na definição da ação.

**Definição 2.26.** O espaço  $D_n(M)$ , munido da topologia quociente, é chamado espaço de configuração de  $n$  pontos não ordenados de  $M$  ou  $n$ -ésimo espaço de configuração permutado de  $M$ .

Utilizando esta notação, vamos enunciar uma consequência direta da Proposição 2.25.

**Corolário 2.27.** A projeção canônica  $p: F_n(M) \rightarrow D_n(M)$  é um recobrimento regular de  $n!$ -folhas.

A seguir, apresentamos uma série de resultados que dão uma nova interpretação aos grupos de tranças de uma superfície. Não apresentaremos as demonstrações dos teoremas abaixo e recomendamos [14] e [23] para consulta.

**Teorema 2.28.** Seja  $[x^0] = [(x_1^0, \dots, x_n^0)]$  um elemento de  $D_n(M)$ . Então, os grupos  $\pi_1(D_n(M), [x^0])$  e  $B_n(M)$  são isomorfos, sendo  $B_n(M)$  o grupo de tranças com  $n$  cordas de  $M$  construído com base nos pontos  $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ .

**Corolário 2.29.** Sejam  $B_n(M)$  e  $B'_n(M)$  grupos de  $n$ -tranças de  $M$  baseados em  $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$  e  $\{x_1^1, \dots, x_n^1\}$ , respectivamente. Então,  $B_n(M)$  e  $B'_n(M)$  são isomorfos.

*Demonstração.* Sejam  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  e  $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$  elementos de  $F_n(M)$ . Pelo Teorema 2.28, os grupos  $\pi_1(D_n(M), [x^0])$  e  $\pi_1(D_n(M), [x^1])$  são isomorfos a  $B_n(M)$  e  $B'_n(M)$ , respectivamente. No entanto,  $D_n(M)$  é conexo por caminhos, visto que  $M$  o é. Dessa forma, o grupo fundamental de  $D_n(M)$  independe da escolha do ponto base e segue que  $\pi_1(D_n(M), [x^0])$  é isomorfo a  $\pi_1(D_n(M), [x^1])$ . Portanto,  $B_n(M)$  e  $B'_n(M)$  são isomorfos.  $\square$

**Teorema 2.30.** *O grupo de  $n$ -tranças puras de  $M$  baseado em  $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$  é isomorfo a  $\pi_1(F_n(M), x^0)$ , sendo  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ .*

**Corolário 2.31.** *O quociente  $\pi_1(D_n(M), [x^0])/p_{\#}(\pi_1(F_n(M), x^0))$  é isomorfo a  $\mathcal{S}_n$ , sendo  $p_{\#}$  o homomorfismo induzido no grupo fundamental da aplicação de recobrimento  $p: F_n(M) \rightarrow D_n(M)$ .*

*Demonstração.* Como  $p$  é uma aplicação de recobrimento,  $p_{\#}$  é um monomorfismo. Então,  $p_{\#}(\pi_1(F_n(M), x^0)) \cong \pi_1(F_n(M), x^0)$ . Pelo Teorema 2.30,  $\pi_1(F_n(M), x^0)$  e  $P_n(M)$  são isomorfos, enquanto  $\pi_1(D_n(M), [x^0]) \cong B_n(M)$ , pelo Teorema 2.28. Do Corolário 2.15, obtemos que

$$\pi_1(D_n(M), [x^0])/p_{\#}(\pi_1(F_n(M), x^0)) \cong \mathcal{S}_n.$$

$\square$

*Observação 2.32.* Com os teoremas apresentados nesta seção, podemos dar uma prova alternativa (e curta) à Proposição 2.16. Basta observar que o grupo de 1-tranças de  $M$  é isomorfo a  $\pi_1(F_1(M)) = \pi_1(M)$ , pois  $F_1(M) = M$ .

Em conclusão, devido aos resultados vistos nesta seção, fica evidente que existem vantagens em olhar para os grupos de tranças de uma superfície como sendo o grupo fundamental de um determinado espaço de configuração, pois esta interpretação nos possibilita utilizar ferramentas da teoria de grupo fundamental e dos espaços de recobrimento.

## 2.3 Grupos de Tranças e *Mapping Class Groups*

A seguir, vamos expor brevemente a relação entre os grupos de tranças de uma superfície e o seu *mapping class group*. Faremos isso utilizando fibrados e sequência exata longa de homotopia.

**Lema 2.33.** *Seja  $M$  uma superfície compacta e fixe  $x_0 \in M$ . Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} F: \text{Homeo}(M) &\longrightarrow M \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x_0) \end{aligned}$$

*é um fibrado com fibra típica  $\text{Homeo}(M, x_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $y_0 \in M$ . Então,

$$F^{-1}(y_0) = \{\psi \in \text{Homeo}(M); \psi(x_0) = y_0\} \cong \{\psi \in \text{Homeo}(M); \psi(x_0) = x_0\}.$$

Daí,  $F^{-1}(y_0) \cong \text{Homeo}(M, x_0)$ .

Agora, veremos que  $\text{Homeo}(M)$  é localmente homeomorfo a um espaço produto. Mais precisamente, mostraremos que existem  $U \subset M$  vizinhança de  $x_0$  e um homeomorfismo  $\Theta: U \times \text{Homeo}(M, x_0) \longrightarrow F^{-1}(U)$  que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} U \times \text{Homeo}(M, x_0) & \xrightarrow{\Theta} & F^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_U & \downarrow F \\ & & U \end{array}$$

Seja  $U$  vizinhança aberta de  $x_0 \in M$  homeomorfa a um disco aberto tal que  $\partial U \approx \mathbb{S}^1$ . Dado  $u \in U$ , considere  $\phi_u \in \text{Homeo}^+(\bar{U}, \partial U)$  de modo que  $\phi_u(x_0) = u$  e a aplicação  $\phi: U \rightarrow \text{Homeo}^+(\bar{U}, \partial U)$  seja contínua.

Note que podemos estender  $\phi_u$  a um homeomorfismo de  $M$ . De fato, seja

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_u: M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \begin{cases} \phi_u(x), & \text{se } x \in \bar{U} \\ x, & \text{se } x \in M \setminus U. \end{cases} \end{aligned}$$

e observe que tal aplicação está bem definida, pois  $\phi_u(x) = x$  para  $x \in \partial U$ . Além disso, ela é um homeomorfismo de  $M$  que preserva orientação, pelo Lema da Colagem.

Agora, considere  $\Theta: U \times \text{Homeo}(M, x_0) \longrightarrow F^{-1}(U)$  dada por  $\Theta(u, \psi) = \bar{\phi}_u \circ \psi$ , sendo  $(u, \psi) \in U \times \text{Homeo}(M, x_0)$ . Como

$$F(\bar{\phi}_u \circ \psi) = (\bar{\phi}_u \circ \psi)(x_0) = \bar{\phi}_u(x_0) = \phi_u(x_0) = u \in U,$$

a aplicação  $\Theta$  está bem definida. Além disso, ela é contínua, visto que  $\phi$  e  $\psi$  o são.

Considere também a função  $\eta: F^{-1}(U) \longrightarrow U \times \text{Homeo}(M, x_0)$  definida por  $\eta(\psi) = (\psi(x_0), (\bar{\phi}_{\psi(x_0)})^{-1} \circ \psi)$ , sendo  $\psi \in F^{-1}(U)$ . Note que  $F(\psi) = \psi(x_0) \in U$  e  $(\bar{\phi}_{\psi(x_0)})^{-1} \circ \psi$  é um homeomorfismo de  $M$  que fixa  $x_0$ . Com efeito, por definição, temos

$$\phi_{\psi(x_0)}(x_0) = \psi(x_0) \in U \therefore \bar{\phi}_{\psi(x_0)}(x_0) = \psi(x_0) \therefore x_0 = ((\bar{\phi}_{\psi(x_0)})^{-1} \circ \psi)(x_0).$$

Assim, obtemos que a função  $\eta$  está bem definida. Sua continuidade segue do fato de que cada uma de suas funções componentes é contínua.

Observe que, para  $(u, \psi) \in U \times \text{Homeo}(M, x_0)$ , podemos escrever que

$$(\eta \circ \Theta)(u, \psi) = \eta(\bar{\phi}_u \circ \psi) = (u, ((\bar{\phi}_u)^{-1} \circ \bar{\phi}_u) \circ \psi) = (u, \psi),$$

pois  $(\bar{\phi}_u \circ \psi)(x_0) = u$ .

Temos também que

$$(\Theta \circ \eta)(\psi) = \Theta(\psi(x_0), (\bar{\phi}_{\psi(x_0)})^{-1} \circ \psi) = (\bar{\phi}_{\psi(x_0)} \circ (\bar{\phi}_{\psi(x_0)})^{-1}) \circ \psi = \psi.$$

Logo,  $\eta = \Theta^{-1}$  e  $\Theta$  é um homeomorfismo.

Resta-nos verificar a comutatividade do diagrama acima.

Seja  $(u, \psi) \in U \times \text{Homeo}(M, x_0)$  e note que

$$(F \circ \Theta)(u, \psi) = F(\bar{\phi}_u \circ \psi) = (\bar{\phi}_u \circ \psi)(x_0) = u = \pi_U(u, \psi).$$

Portanto,  $F$  é um fibrado com fibra típica  $\text{Homeo}(M, x_0)$ . □

Com a notação do lema anterior, escreveremos

$$\text{Homeo}(M, x_0) \hookrightarrow \text{Homeo}(M) \rightarrow M$$

para indicar que a aplicação  $\text{Homeo}(M) \rightarrow M$  é um fibrado com fibra típica  $\text{Homeo}(M, x_0)$ .

*Observação 2.34.* O fibrado definido no Lema 2.33 induz uma sequência exata longa nos grupos de homotopia, dada por

$$\cdots \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(M)) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(M, x_0)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(M)) \rightarrow \pi_0(M).$$

**Teorema 2.35** (Birman, [5]). *Seja  $M$  uma superfície tal que  $\pi_1(\text{Homeo}(M, \partial M)) = 1$  e considere  $X_n$  um conjunto de  $n$  pontos distintos em  $M$ . Então, a seguinte sequência é exata:*

$$1 \rightarrow \pi_1(D_n(M), X_n) \rightarrow \mathcal{MCG}(M, \partial M \cup X_n) \rightarrow \mathcal{MCG}(M, \partial M) \rightarrow 1.$$

A prova do Teorema 2.35 baseia-se numa generalização do Lema 2.33, na Observação 2.34 e em propriedades básicas dos espaços de configuração.

*Observação 2.36.* Ainda no contexto do teorema anterior, salientamos que, se  $n = 1$ , o Lema 2.33 nos garante a existência da sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(M, \partial M \cup X_n)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(M, \partial M)) \rightarrow 1,$$

pois  $\pi_1(\text{Homeo}(M, \partial M))$  é trivial, por hipótese, e  $M$  é um espaço topológico conexo por caminhos.

Pela Proposição 1.38, podemos escrever

$$1 \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathcal{MCG}(M, \partial M \cup X_n) \rightarrow \mathcal{MCG}(M, \partial M) \rightarrow 1,$$

com  $\pi_1(M) \cong \pi_1(D_1(M))$ , pois o primeiro espaço de configuração permutado de  $M$  é isomorfo a  $M$ .

Em seguida, apresentamos um exemplo em que consideramos  $M = \mathbb{D}^2$ .

**Exemplo 2.37.** Pelo Exemplo 1.40, o espaço  $\text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2)$  é contrátil. Logo,  $\pi_1(\text{Homeo}^+(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2))$  é trivial e  $\mathbb{D}^2$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.35. Portanto, obtemos a sequência exata curta:

$$1 \rightarrow \pi_1(D_n(\mathbb{D}^2), X_n) \rightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{D}^2, X_n) \rightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{D}^2) \rightarrow 1.$$

Como  $\mathcal{MCG}(\mathbb{D}^2)$  é trivial, segue que  $\pi_1(D_n(\mathbb{D}^2), X_n) \cong \mathcal{MCG}(\mathbb{D}^2, X_n)$ . Logo, o grupo de  $n$ -tranças de  $\mathbb{D}^2$  baseadas em  $X_n$  é isomorfo a  $\mathcal{MCG}(\mathbb{D}^2, X_n)$ .

Por último, ressaltamos que, apesar de nem todas as superfícies satisfazerem às hipóteses do Teorema 2.35 (um caso especial é quando a superfície tem característica de Euler negativa), a sequência exata longa obtida na Observação 2.34 é de grande utilidade.



## Capítulo 3

# Grupos de Tranças de Superfícies

No capítulo anterior, fizemos um estudo dos grupos de tranças de uma superfície compacta, conexa e sem bordo. A seguir, vamos considerar três superfícies específicas e discutir seus aspectos principais, como seus geradores e relações, algumas propriedades algébricas a respeito de sua cardinalidade e sua relação com os *mapping class groups*.

### 3.1 Grupos de Tranças do Disco

Nesta seção, vamos estudar os grupos de  $n$ -tranças do disco fechado. Como este disco e um quadrado fechado são homeomorfos, em vários momentos desta seção trataremos as  $n$ -tranças de  $\mathbb{D}^2$  como sendo tranças com  $n$  cordas de um quadrado fechado.

#### 3.1.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{D}^2)$

Representar  $n$ -tranças do disco fechado (ou de qualquer outra superfície) no espaço tridimensional pode se tornar um trabalho complexo, a depender da trança em questão. Por isso, introduziremos uma outra maneira de visualizar tranças com  $n$  cordas do disco.

Seja  $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in B_n(\mathbb{D}^2)$ . O primeiro passo é projetar a  $n$ -trança no plano  $yz$  em  $\mathbb{R}^3$ . Como  $b_i(t) \neq b_j(t)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ , é interessante que nossa representação preserve o fato de que as cordas de  $\beta$  não se intersectam e, mais ainda, que fique evidente de que forma elas interagem. Dessa maneira, vamos identificar na projeção qual corda passa “pela frente” da outra, como realizado na Figura 3.1. Assim, obtemos o que é intitulado **diagrama de uma trança**.

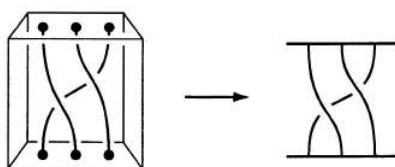


Figura 3.1: Diagrama de uma 3-trança do disco (retirado de [35]).

Dada uma  $n$ -trança qualquer, por meio da representação exibida acima e realizando movimentos elementares, caso necessário, vamos isolar os cruzamentos presentes nesta trança. Entendemos por cruzamentos os momentos em que uma corda passa pela frente de uma outra, enquanto as restantes descem verticalmente. Veremos dois exemplos abaixo, sendo o primeiro com a 3-trança da Figura 3.1.

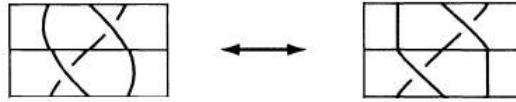


Figura 3.2: Cruzamentos de uma 3-trança (retirado de [35]).

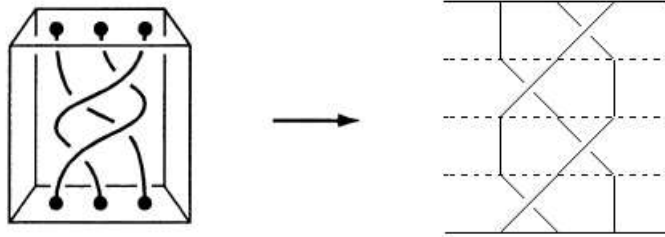


Figura 3.3: Cruzamentos de uma 3-trança (retirado de [35]).

Após esse procedimento, dada uma  $n$ -trança qualquer, é razoável suspeitar que podemos escrevê-la como um produto de tranças similares às que aparecem compreendidas entre dois planos consecutivos nas figuras acima, isto é, tranças tais que a  $i$ -ésima corda liga  $A_i$  até  $B_{i+1}$ , a  $(i + 1)$ -ésima corda conecta  $A_{i+1}$  até  $B_i$  e as demais ligam  $A_j$  até  $B_j$  por meio de segmentos de reta.

**Definição 3.1.** As  $n$ -tranças  $\sigma_i$  e  $\sigma_i^{-1}$ , com  $1 \leq i \leq n - 1$ , descritas na Figura 3.4, são chamadas  $i$ -ésimas tranças de Artin ou, simplesmente, tranças de Artin.

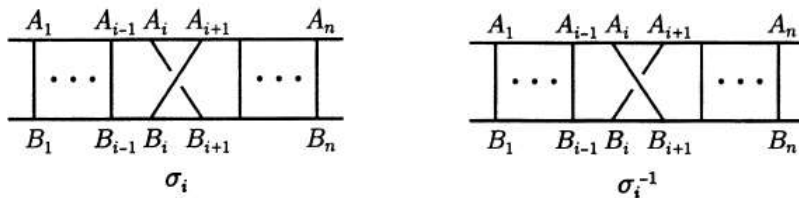


Figura 3.4: Tranças de Artin  $\sigma_i$  e  $\sigma_i^{-1}$  (retirado de [35]).

Claramente, a  $n$ -trança  $\sigma_i^{-1}$  é tal que  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$ , sendo 1 a  $n$ -trança trivial de  $B_n(\mathbb{D}^2)$ .

**Exemplo 3.2.** A 3-trança da Figura 3.1 pode ser escrita como  $\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ .

**Exemplo 3.3.** Em termos das tranças de Artin, podemos escrever que a 3-trança da Figura 3.3 é o produto  $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ .

Em 1925, por meio de uma abordagem geométrica, E. Artin mostrou que o conjunto  $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$  gera o grupo de tranças de  $n$ -cordas do disco e explicitou como tais geradores se relacionam. Salientamos também que uma demonstração algébrica deste fato foi dada em 1947 por F. Bohnenblust [6]. No presente texto, vamos explicitar a apresentação de  $B_n(\mathbb{D}^2)$  e estudar a natureza geométrica de suas relações.

**Teorema 3.4** (Artin, [1]). *Seja  $n \geq 1$ . Então, uma apresentação do grupo  $B_n(\mathbb{D}^2)$  é dada por*

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ se } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ se } i = 1, 2, \dots, n - 2 \end{array} \right\rangle.$$

Observe na figura abaixo que a condição  $|i - j| \geq 2$  garante que há “espaço” para que a deformação seja feita.

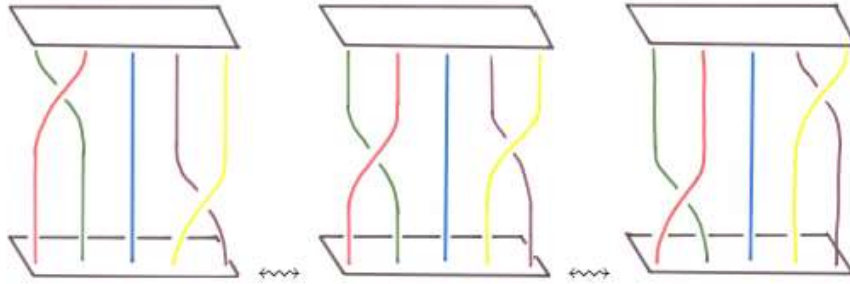


Figura 3.5: Relação  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  (retirado de [27]).

Já na Figura 3.6, podemos visualizar como ocorre a deformação da trança  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$  no produto  $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

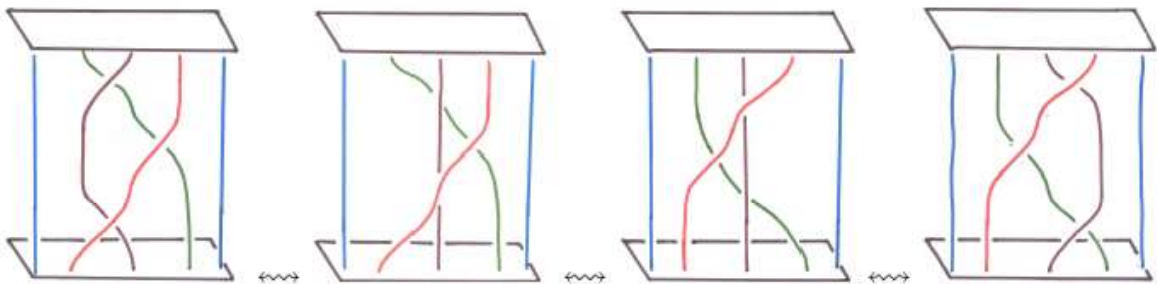


Figura 3.6: Relação  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  (retirado de [27]).

*Observação 3.5.* Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $1 \leq m \leq n$ . Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi: B_m(\mathbb{D}^2) &\longrightarrow B_n(\mathbb{D}^2) \\ \sigma_i &\longmapsto \sigma_i \end{aligned}$$

é um monomorfismo, sendo  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ . Conseqüentemente,  $B_m(\mathbb{D}^2)$  pode ser considerado como subgrupo de  $B_n(\mathbb{D}^2)$ .

Antes de demonstrarmos, observe que  $\psi(\sigma_i)$  é a  $n$ -trança obtida de  $\sigma_i$  de modo que suas últimas  $n - m$  cordas são segmentos de reta que ligam  $A_j$  até  $B_j$ , para  $m + 1 \leq j \leq n$ .

*Demonstração.* Para verificar que  $\psi$  é um homomorfismo, basta utilizar o Teorema 3.4 para escrever apresentações para  $B_m(\mathbb{D}^2)$  e  $B_n(\mathbb{D}^2)$ . Não é difícil ver que a aplicação  $\varphi$  satisfaz as relações do grupo de  $m$ -tranças do disco e, portanto, pode ser estendido para um homomorfismo de grupos.

Agora, considere  $\beta \in B_m(\mathbb{D}^2)$  tal que  $\psi(\beta) = 1_{B_n(\mathbb{D}^2)}$ .

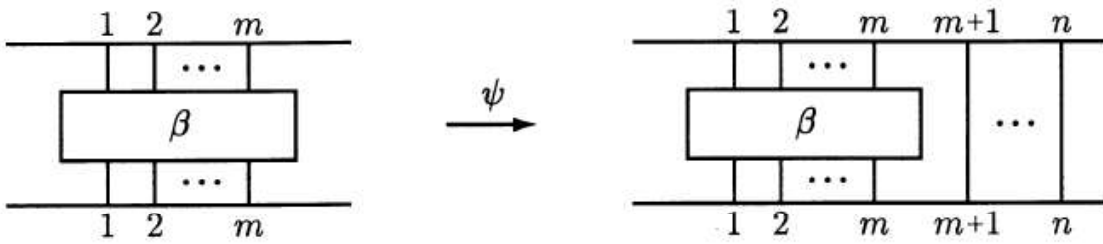


Figura 3.7: Definição da aplicação  $\psi$  (retirado de [35]).

Sendo  $\psi(\beta)$  a  $n$ -trança trivial, ao retirarmos suas últimas  $n - m$  cordas, a  $m$ -trança resultante também deve ser trivial. Porém, pela definição de  $\psi$ , a trança resultante é igual a  $\beta$ . Logo,  $\beta = 1_{B_m(\mathbb{D}^2)}$ , de onde obtemos que  $\psi$  é um monomorfismo.  $\square$

Para finalizar esta subseção, veremos duas propriedades básicas dos grupos de  $n$ -tranças do disco.

**Proposição 3.6.** Para  $n \geq 3$ , o grupo de tranças com  $n$  cordas do disco é não abeliano.

*Demonstração.* Pela Observação 3.5, basta mostrar que existem dois elementos em  $B_3(\mathbb{D}^2)$  que não comutam. Considere  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  as duas 3-tranças de Artin. Então,

$$\pi(\sigma_1\sigma_2) = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3\ 2) \text{ e } \pi(\sigma_2\sigma_1) = (2\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3),$$

sendo  $\pi: B_3(\mathbb{D}^2) \rightarrow \mathcal{S}_3$  o homomorfismo permutação.

Daí,  $\pi(\sigma_1\sigma_2) \neq \pi(\sigma_2\sigma_1)$ , de onde segue que  $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$ .  $\square$

**Proposição 3.7.** O grupo de  $n$ -tranças do disco é infinito para  $n \geq 2$ .

*Demonstração.* Novamente pela Observação 3.5, verificaremos apenas que  $B_2(\mathbb{D}^2)$  é infinito. De fato, pelo Teorema 3.4, o grupo  $B_2(\mathbb{D}^2)$  é isomorfo ao grupo livre gerado por  $\sigma_1$ , ou seja,  $\langle \sigma_1 \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Logo,  $B_2(\mathbb{D}^2)$  é infinito e, portanto,  $B_n(\mathbb{D}^2)$  também o é.  $\square$

### 3.1.2 Apresentação de $P_n(\mathbb{D}^2)$

Nesta subseção, vamos estudar o núcleo do homomorfismo permutação. O nosso objetivo é apresentar seus geradores e relações, bem como justificar geometricamente a validade da apresentação encontrada.

Sejam  $n \geq 2$  e  $i, j$  números naturais tais que  $1 \leq i < j \leq n$ . Em  $P_n(\mathbb{D}^2)$ , considere as seguintes tranças

$$A_{i,j} = (\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1})\sigma_i^2(\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}).$$

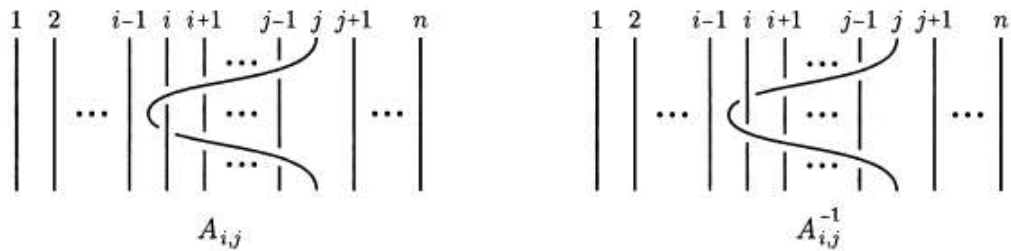


Figura 3.8: Trança  $A_{i,j}$  e seu inverso (retirado de [35]).

Em [2], E. Artin mostrou que o conjunto  $\{A_{i,j}\}$ , com  $1 \leq i < j \leq n$ , gera o grupo de tranças puras com  $n$  cordas do disco. Mais ainda, ele provou que tais  $n$ -tranças estão sujeitas às seguintes relações, onde o símbolo  $\rightleftharpoons$  significa que os elementos comutam:

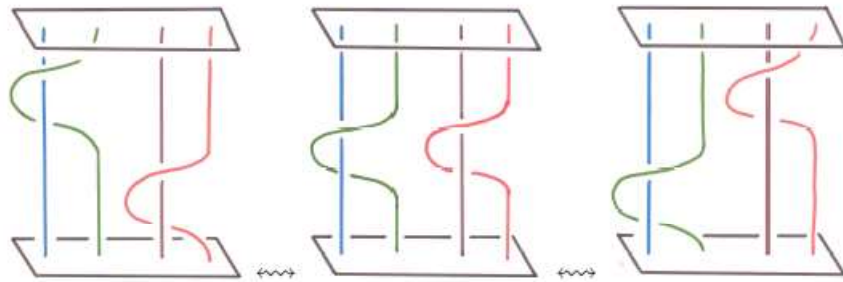


Figura 3.9:  $A_{r,s} \rightleftharpoons A_{i,j}$ , com  $1 \leq r < s < i < j \leq n$  (retirado de [27]).

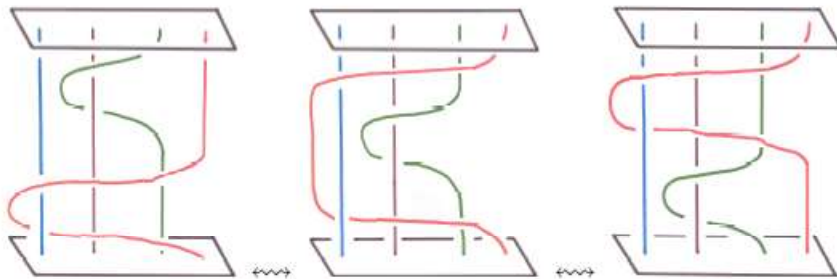


Figura 3.10:  $A_{r,s} \rightleftharpoons A_{i,j}$ , com  $1 \leq r < i < j < s \leq n$  (retirado de [27]).

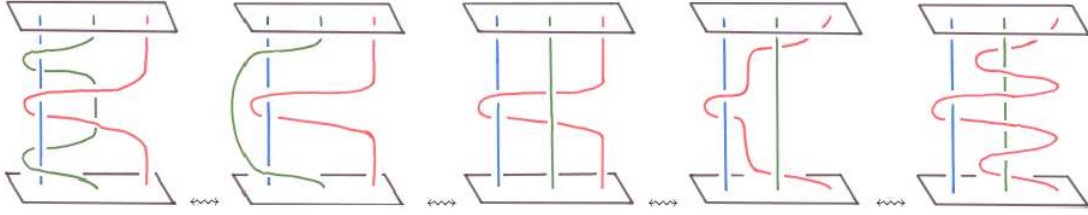


Figura 3.11:  $A_{r,s}A_{r,j}A_{r,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{r,j}A_{s,j}$ , com  $1 \leq r < s < j \leq n$  (retirado de [27]).

Temos ainda que valem:

- i.  $A_{r,s}A_{s,j}A_{r,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}$ , com  $1 \leq r < s < j \leq n$ ;
- ii.  $A_{i,j}^{-1}A_{s,j}A_{i,j} = A_{r,i}$ , com  $1 \leq r < s < i < j \leq n$ .

Além disso, também em [2], o autor mostra que as cinco identidades citadas acima formam um sistema completo de relações para  $P_n(\mathbb{D}^2)$ , ou seja, qualquer outra relação existente provém destas. Assim, temos a seguinte apresentação para o grupo de  $n$ -tranças puras do disco:

**Teorema 3.8** (Artin, [2]). *O grupo  $P_n(\mathbb{D}^2)$  é gerado pelo conjunto das  $n$ -tranças puras  $\{A_{i,j}\}$ , com  $1 \leq i < j \leq n$ , e satisfaz as seguintes relações:*

- (1)  $A_{r,s} = A_{i,j}$ , se  $1 \leq r < s < i < j \leq n$  ou  $1 \leq r < i < j < s \leq n$ ;
- (2)  $A_{r,s}A_{r,j}A_{r,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{r,j}A_{s,j}$ , se  $1 \leq r < s < j \leq n$ ;
- (3)  $A_{r,s}A_{s,j}A_{r,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}$ , se  $1 \leq r < s < j \leq n$ ;
- (4)  $A_{i,j}^{-1}A_{s,j}A_{i,j} = A_{r,i}$ , se  $1 \leq r < s < i < j \leq n$ .

A seguir, vamos dar uma ideia geométrica de como uma  $n$ -trança pura do disco pode ser escrita como produto das tranças  $A_{i,j}$ , presentes no Teorema 3.8, e seus inversos. O procedimento que será explicitado é intitulado **Penteamento de uma Trança** e, para uma prova de sua validade, indicamos [35].

Considere uma  $n$ -trança pura  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ . Remova sua última corda,  $b_n$ , e a substitua por um segmento de reta que liga o ponto  $A_n$  até  $B_n$ . Denote esta nova  $n$ -trança por  $\gamma_1$ . Realize o produto de  $\beta$  por  $\gamma_1^{-1}$  e o denote por  $\alpha_1$ . Ou seja,

$$\alpha_1 = \beta\gamma_1^{-1} \therefore \beta = \alpha_1\gamma_1.$$

Agora, remova a  $(n-1)$ -ésima corda da  $n$ -trança  $\gamma_1$  e a substitua por um segmento de reta que conecta  $A_{n-1}$  ao ponto  $B_{n-1}$ . Denote a  $n$ -trança resultante por  $\gamma_2$  e considere  $\alpha_2 = \gamma_1\gamma_2^{-1}$ . Então,  $\beta = \alpha_1\alpha_2\gamma_2$ . Ao final do procedimento, por construção, obteremos que

$$\beta = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1},$$

onde cada  $\alpha_i$  é uma  $n$ -trança do disco que se transforma na  $(n - 1)$ -trança trivial ao removermos sua  $(n - i)$ -ésima corda.

As tranças  $\alpha_i$  são chamadas **tranças penteadas** e a trança resultante é chamada de **penteamento** de  $\beta$ .

Na Figura 3.12, ilustramos alguns passos do procedimento descrito acima, sendo  $\beta$  uma 4-trança pura do disco.

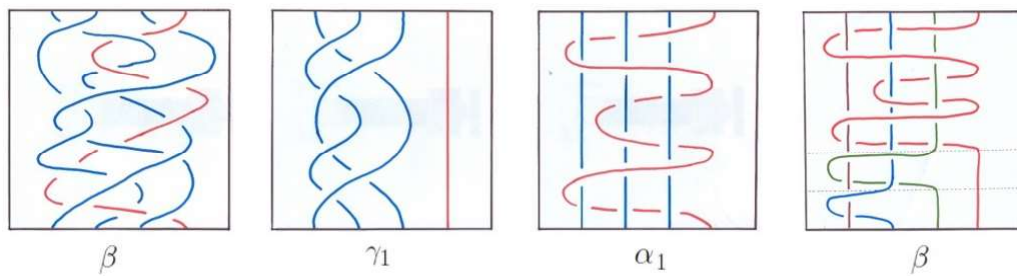


Figura 3.12: Processos do penteamento de uma trança (retirado de [27]).

Resta-nos observar apenas que cada trança penteada  $\alpha_i$  pode ser escrita como produto dos geradores de  $P_n(\mathbb{D}^2)$  e isto é feito na Figura 3.13.

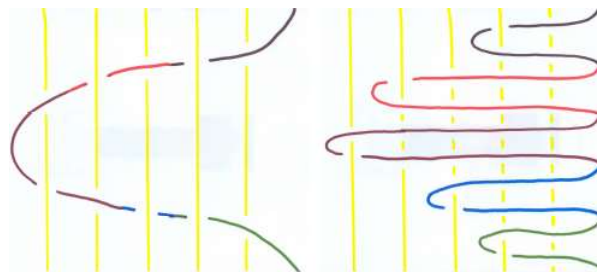


Figura 3.13: Uma trança penteada como produto de  $A_{i,j}$  (concedido pelo autor de [27]).

## 3.2 Grupos de Tranças da Esfera

Iniciamos este estudo observando que existem 3 maneiras de representar as tranças de  $\mathbb{S}^2$ , são elas:

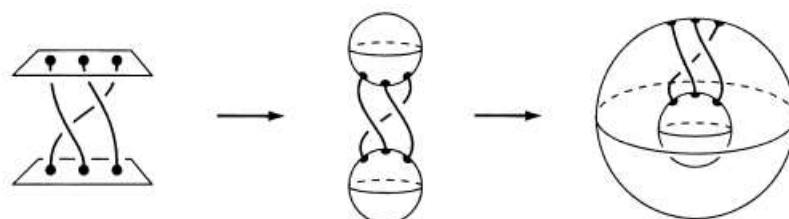


Figura 3.14: Representações do mesmo elemento de  $B_3(\mathbb{S}^2)$  (retirado de [35]).

Na primeira representação, tomamos os pontos iniciais de cada corda da trança em um quadrado fechado, digamos  $Q \times \{1\}$ , e permitimos que as cordas se movimentem por  $\mathbb{R}^3 \setminus (Q \times \{0\}) \cup (Q \times \{1\})$ , desde que seus extremos permaneçam fixados. A segunda imagem da Figura 3.14 advém da definição geométrica de uma trança dada na Seção 2.1 e podemos movimentar as cordas em  $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{B}_1^3 \cup \mathbb{B}_0^3)$ , onde  $\mathbb{B}_1^3$  é a bola fechada em que os pontos iniciais da trança estão localizados e  $\mathbb{B}_0^3$  contém seus pontos finais. Sinalizamos que os extremos das cordas devem permanecer fixos durante a movimentação e eles pertencem a  $\mathbb{S}_1^2$  e  $\mathbb{S}_0^2$ , isto é, as fronteiras de  $\mathbb{B}_1^3$  e  $\mathbb{B}_0^3$ , respectivamente. A visualização considerada mais comum de uma trança da esfera é a terceira. Para compreendê-la, considere  $\mathbb{S}^3$  como a compactificação do espaço euclidiano tridimensional e observe que  $\mathbb{S}^3 \setminus (\mathbb{B}_1^3 \cup \mathbb{B}_0^3)$  é homeomorfo ao espaço compreendido entre duas esferas em  $\mathbb{R}^3$  e ao espaço topológico  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ .

Os grupos de  $n$ -tranças da esfera possuem características muito similares aos grupos de tranças de  $n$  cordas do disco, vistos na seção anterior. No entanto, para ressaltar as diferenças que encontraremos em seu estudo, vamos observar o que ocorre com a 3-trança  $\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$ :

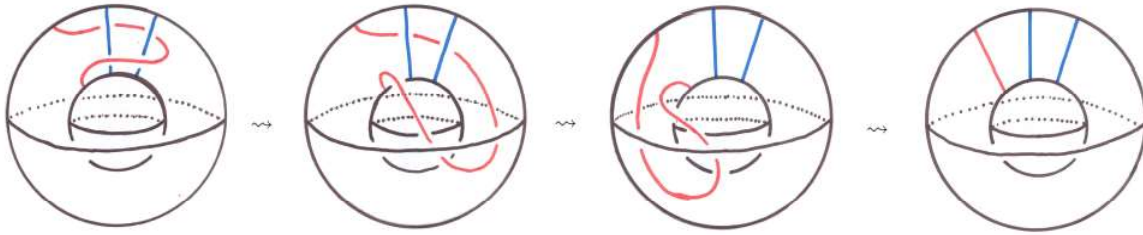


Figura 3.15: Deformações de uma 3-trança de  $\mathbb{S}^2$  (retirado de [27]).

Enquanto em  $B_3(\mathbb{D}^2)$  temos que  $\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$  é não-trivial, a trança dada pelo mesmo produto dos geradores de Artin é trivial em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ .

### 3.2.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{S}^2)$

As  $n$ -tranças da esfera  $\mathbb{S}^2$  podem escritas como produto das tranças de Artin vistas na seção anterior, ou seja, os geradores de Artin  $\sigma_i \in B_n(\mathbb{D}^2)$  também geram  $B_n(\mathbb{S}^2)$ . Além disso, as relações de  $B_n(\mathbb{D}^2)$  permanecem válidas em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , a saber

- i.  $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ , se  $|i - j| \geq 2$ ;
- ii.  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

As relações mencionadas em i. e ii. são chamadas **movimentos convencionais**. Em adição a elas, os geradores de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  satisfazem a relação descrita geometricamente na Figura 3.16.

Algebricamente, podemos escrever que



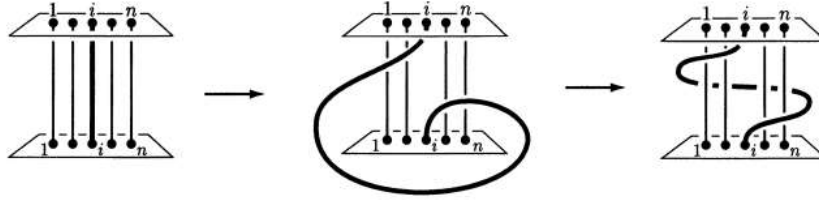


Figura 3.16: Relação extra de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  (retirado de [35]).

$$(\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_{i-1}\sigma_i) = 1,$$

para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Vamos reescrever tal igualdade de uma maneira mais simples. Note que

$$\begin{aligned} & (\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i) = 1 \\ \Leftrightarrow & (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i) = (\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1)^{-1} \\ \Leftrightarrow & (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1) = 1 \\ \Leftrightarrow & (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1) = 1 \\ \Leftrightarrow & \sigma_1\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_1 = 1 \end{aligned}$$

Em 1962, Fadell e Van Buskirk mostraram que, de fato, uma apresentação para o grupo  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é composta pelos mesmos geradores de  $B_n(\mathbb{D}^2)$  e suas relações são os movimentos convencionais e a relação extra citada acima.

**Teorema 3.9** (Fadell e Van Buskirk, [12]). *Seja  $n \geq 1$ . Então,  $B_n(\mathbb{S}^2)$  tem a apresentação*

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \text{ se } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \text{ se } i = 1, 2, \dots, n - 2 \\ \sigma_1\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_1 = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Vejam alguns casos particulares:

**Exemplo 3.10.** Para  $n = 2$ , temos que  $B_2(\mathbb{S}^2) = \langle \sigma_1 \mid \sigma_1^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ . Portanto,  $B_2(\mathbb{S}^2)$  é um grupo finito de ordem 2.

**Exemplo 3.11.** Para  $n = 3$ , obtemos  $B_3(\mathbb{S}^2) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = 1 \rangle$ .

Dispondo deste resultado, nas seções subsequentes, vamos explorar alguns aspectos geométricos e algébricos dos grupos de tranças da esfera.

### 3.2.2 Problema de Dirac

Considere uma trança trivial em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ . Rotacione  $Q \times \{0\}$  duas vezes ao redor do eixo que conecta o centro de  $Q \times \{0\}$  com o centro de  $Q \times \{1\}$ , totalizando uma rotação de  $360^\circ$ , como mostra a Figura 3.17. Neste contexto, rotacionar  $180^\circ$  é dito realizar um *twist*.

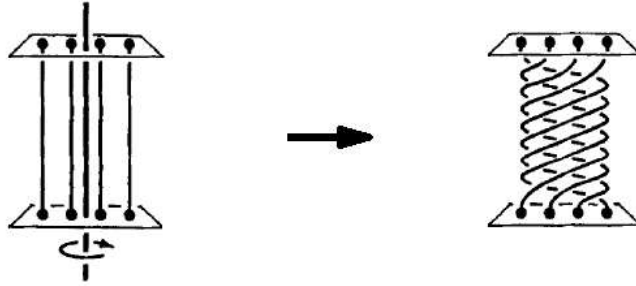


Figura 3.17: Relação extra de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  (retirado de [35]).

A trança resultante é chamada trança **full twist** ou trança duplo twist.

Denote tal 4-trança por  $\beta_4$  e note que, em termos dos geradores de Artin, ela pode ser escrita como  $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^8$ . Se considerada como uma 4-trança do disco  $\mathbb{D}^2$ , os movimentos elementares, que são realizados no interior do cilindro  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ , não são suficientes para deformar a trança  $\beta_4$  no elemento trivial. Vamos analisar cuidadosamente o que acontece com este tipo de trança, digamos  $\beta_n$ , em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , começando por alguns casos particulares.

Em  $B_2(\mathbb{S}^2)$ , a 2-trança obtida após dois twists é  $\sigma_1^4$ . Veja na Figura 3.18 que é possível deformá-la na trança trivial:

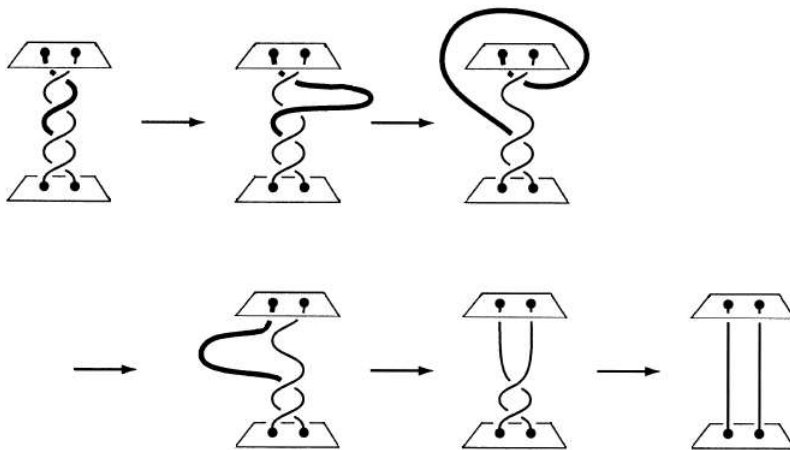


Figura 3.18: Deformação da 2-trança  $\sigma_1^4$  (retirado de [35]).

Pelos movimentos realizados na Figura 3.18, obtemos uma justificativa geométrica da necessidade de acrescentar à apresentação de  $B_2(\mathbb{S}^2)$  a relação  $\sigma_1^4 = \sigma_1^2 = 1$ .

De uma maneira similar, porém um pouco mais trabalhosa, obtemos que a 3-trança duplo twist, dada por  $(\sigma_1\sigma_2)^6$ , também pode ser transformada no elemento trivial de  $B_3(\mathbb{S}^2)$ .

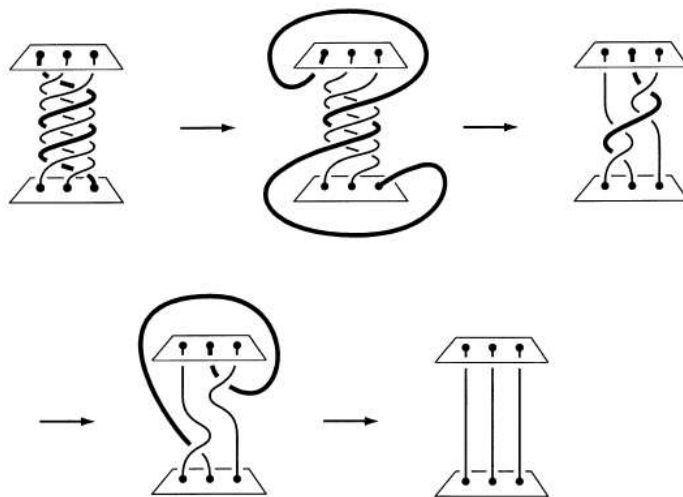


Figura 3.19: Deformação da 3-trança  $(\sigma_1\sigma_2)^6$  (retirado de [35]).

Com um processo análogo, mostra-se que a 4-trança  $\beta_4$ , dada no início desta seção, pode ser deformada na trança trivial de  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .

Dessa maneira, nos parece natural suspeitar que uma trança duplo twist sempre pode ser deformada na trivial em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ . Esta investigação foi proposta pelo físico-matemático Paul Dirac e sua resposta foi dada por Newman em 1942. Dirac também questionou o que ocorreria se, invés de realizar dois twists, fizéssemos somente um.

Para o caso  $n = 2$ , a resposta é afirmativa e uma justificativa pode ser observada na Figura 3.18. Porém, como podemos ver na Figura 3.20, isto não acontece de maneira geral.

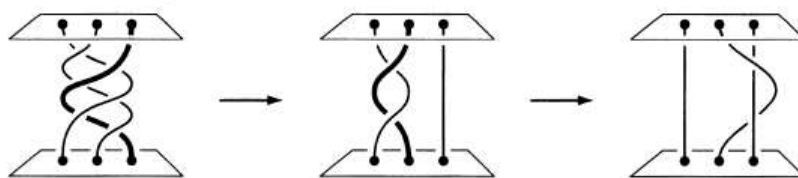


Figura 3.20: Deformação da 3-trança  $(\sigma_1\sigma_2)^3$  (retirado de [35]).

A trança obtida após a realização de um twist é chamada trança **half twist**.

A resolução do Problema de Dirac não é extensa e dedicaremos o resto desta subseção para o seu estudo. Começaremos introduzindo um novo invariante de tranças.

**Lema 3.12.** *Seja  $\beta$  uma  $n$ -trança da esfera. Se  $\beta$  é escrita em termos dos geradores de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  como  $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , então*

$$\exp(\beta) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k \pmod{2(n-1)}$$

*é um invariante de  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , chamado **exponencial de uma trança**.*

*Demonstração.* Para garantir a tese do lema, basta mostrarmos que a aplicação

$$\begin{aligned} \exp: B_n(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow \mathbb{Z}_{2(n-1)} \\ \sigma_i^{\varepsilon_i} &\longmapsto \varepsilon_i \pmod{2(n-1)} \end{aligned}$$

preserva as relações do grupo de  $n$ -tranças da esfera.

Dado  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ , temos que

$$\exp(\sigma_i) + \exp(\sigma_{i+1}) + \exp(\sigma_i) = 3 = \exp(\sigma_{i+1}) + \exp(\sigma_i) + \exp(\sigma_{i+1}).$$

Para  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$  tais que  $|i-j| \geq 2$ , podemos escrever que

$$\exp(\sigma_i) + \exp(\sigma_j) = 2 = \exp(\sigma_j) + \exp(\sigma_i).$$

Observe também que

$$\begin{aligned} \exp(\sigma_1) + \dots + \exp(\sigma_{n-2}) + \exp(\sigma_{n-1}^2) + \exp(\sigma_{n-2}) + \dots + \exp(\sigma_1) &= n-2 + 2 + n-2 \\ &= 2(n-1) \\ &\equiv 0 \pmod{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\exp$  se estende a um homomorfismo de grupos.  $\square$

*Observação 3.13.* Devido ao resultado anterior, se  $\beta$  e  $\beta'$  são duas  $n$ -tranças equivalentes da esfera, então  $\exp(\beta) \equiv \exp(\beta') \pmod{2(n-1)}$ . Dessa maneira, se  $\beta$  é equivalente a  $n$ -trança trivial de  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , devemos ter  $\exp(\beta) \equiv 0 \pmod{2(n-1)}$ .

Veremos que a exponencial de uma trança não é um invariante completo. A seguir, apresentamos um exemplo de duas tranças não equivalentes que possuem a mesma imagem por este invariante.

**Exemplo 3.14.** Considere  $\sigma_1^6 \in B_4(\mathbb{S}^2)$ . Então,  $\exp(\sigma_1^6) = 6 \equiv 0 \pmod{6}$ . Ao retirarmos sua última corda, obtemos a 3-trança  $\sigma_1^6$ , que não é trivial em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ . De fato,

$$\exp(\sigma_1^6) = 6 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Logo,  $\sigma_1^6$  não é equivalente à trança trivial em  $B_3(\mathbb{S}^2)$  e, conseqüentemente, não é equivalente ao elemento trivial de  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .

Este invariante também nos permite destacar uma importante diferença entre os grupos de  $n$ -tranças do disco e os da esfera. Sabemos que uma  $m$ -trança trivial em  $B_m(\mathbb{D}^2)$  também é trivial como uma  $n$ -trança em  $B_n(\mathbb{D}^2)$ , para  $m \leq n$ . O mesmo não ocorre para  $B_n(\mathbb{S}^2)$ .

**Exemplo 3.15.** A 3-trança  $\sigma_1^4$  é trivial em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ , mas não é trivial em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .

Pelo Teorema 3.9, em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e

$$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-2}. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), podemos escrever

$$\sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-2} \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sigma_1^4 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_2^2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Já em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ , temos  $\exp(\sigma_1^4) = 4 \not\equiv 0 \pmod{6}$ . Logo,  $\sigma_1^4$  não pode ser deformada na trança trivial em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .

Agora, vamos apresentar a resolução do Problema de Dirac.

**Teorema 3.16** (Teorema de Newman). *Seja  $n > 2$ . Em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , a **trança de Dirac**  $\delta = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^{k,n}$  é equivalente à trança trivial se, e somente se,  $k$  é par.*

*Demonstração.* Se  $k$  é par, a trança de Dirac pode ser transformada no elemento trivial de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  por uma série de deformações contínuas similares às feitas no começo desta subseção.

Se  $\delta = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^{k,n}$  é equivalente à trança trivial, queremos mostrar que  $k$  é par. Faremos isto pela contra-positiva.

Suponha que  $k$  é ímpar, ou seja,  $k = 2m + 1$  para algum  $m \geq 1$ . Prosseguiremos a demonstração dividindo em casos referentes à paridade do número de cordas.

Se  $n$  é ímpar, então existe  $q \geq 1$  tal que  $n = 2q + 1$ . Note que  $2(n - 1) = 4q$ . Daí,

$$\begin{aligned} \exp(\delta) &= kn(n - 1) \\ &= (2m + 1)(2q + 1)2q \\ &= (4mq + 2m + 2q + 1)2q \\ &= 4q(2mq) + 4qm + 4q^2 + 2q \\ &= 4q(2mq + m + q) + 2q \\ &\equiv 2q \pmod{4q}. \end{aligned}$$

Como  $q \geq 1$ , temos que  $\exp(\delta) \not\equiv 0 \pmod{4q}$  e, portanto,  $\delta$  não é equivalente a trança trivial.

Agora, analisaremos o caso  $n$  par, com  $n \geq 4$ . Removendo a última corda de  $\delta$ , obtemos a  $(n - 1)$ -trança  $\hat{\delta} = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{k(n-1)}$ . Como  $n - 1$  é ímpar, pelo caso anterior, a trança  $\hat{\delta}$  não é equivalente ao elemento trivial de  $B_{n-1}(\mathbb{S}^2)$ . Assim,  $\delta$  não é equivalente à trança trivial em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ .  $\square$

### 3.2.3 Propriedades Algébricas

Nesta subsecção, vamos mostrar que  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é um grupo finito apenas para  $n = 1, 2, 3$ . Pelo que foi discutido anteriormente, resta-nos provar que  $B_3(\mathbb{S}^2)$  é finito e  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é infinito para todo  $n \geq 4$ .

**Lema 3.17.** *O grupo  $B_3(\mathbb{S}^2)$  pode ser apresentado como  $\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ .*

*Demonstração.* Por meio de (longas) manipulações algébricas envolvendo a apresentação de  $B_3(\mathbb{S}^2)$  e utilizando o fato de que  $\sigma_1^4 = 1$ , observado no Exemplo 3.15, obtemos que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 \rangle &\longrightarrow B_3(\mathbb{S}^2) \\ a &\longmapsto \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ b &\longmapsto \sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

é um bem definido homomorfismo e a função

$$\begin{aligned} \psi: \quad B_3(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 \rangle \\ \sigma_1 &\longmapsto b^{-1}a \\ \sigma_2 &\longmapsto a^{-1}b^2 \end{aligned}$$

é seu homomorfismo inverso. □

**Proposição 3.18.**  $B_3(\mathbb{S}^2) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 \rangle$  é um grupo finito de ordem 12.

*Demonstração.* Seja  $\overline{\langle a^2 \rangle}$  o fecho normal do subgrupo gerado por  $a^2$ . Então,

$$\overline{\langle a^2 \rangle} = \langle aa^2a^{-1}, ba^2b^{-1} \rangle = \langle a^2, b(b^3)b^{-1} \rangle = \langle a^2, b^3 \rangle = \langle a^2 \rangle.$$

Daí,  $\langle a^2 \rangle$  é um subgrupo normal de  $B_3(\mathbb{S}^2)$ .

Veremos que tal grupo tem ordem 2. Note que

$$a^4 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^4 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_1^2(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_1^4 = 1,$$

pela apresentação do grupo de 3-tranças da esfera, explicitada no Exemplo 3.11, e pelo Exemplo 3.15, que nos garante que  $\sigma_1^4$  é uma trança trivial em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ .

Temos também que

$$a^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_1^2.$$

Portanto,  $\exp(a^2) = \exp(\sigma_1^2) = 2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Então,  $\exp(a^2) \not\equiv 0 \pmod{4}$ , de onde segue que  $a^2 \neq 1$ .

Dessa forma, obtemos que  $\langle a^2 \rangle = \{1, a^2\}$ . Como  $\langle a^2 \rangle \triangleleft B_3(\mathbb{S}^2)$ , podemos realizar o quociente  $B_3(\mathbb{S}^2)/\langle a^2 \rangle$ , que pode ser apresentado por

$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^2 = 1 \rangle = T(2, 3, 2).$$

Pela Seção A.2 do Apêndice A, o grupo  $T(2, 3, 2)$  tem ordem 6. Assim, o Teorema de Lagrange nos garante que

$$|B_3(S^2)| = |N| [B_3(S^2) : N] = 2 \times 6 = 12,$$

como queríamos mostrar.  $\square$

Além da ordem do grupo de 3-tranças da esfera, vamos calcular a ordem de cada um dos seus geradores.

**Lema 3.19.** *Em  $B_3(\mathbb{S}^2)$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  possuem ordem 4.*

*Demonstração.* Referente à ordem de  $\sigma_1$ , como  $\sigma_1^4 = 1$ , obtemos que  $|\sigma_1| = 1, 2$  ou 4. Porém,

$$\exp(\sigma_1) = 1 \not\equiv 0 \pmod{4} \text{ e } \exp(\sigma_1^2) = 2 \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

Daí, a ordem de  $\sigma_1$  é 4.

Em relação à ordem de  $\sigma_2$ , temos que  $\sigma_1^2 = \sigma_2^{-2}$  e, portanto,  $\sigma_2^4 = \sigma_1^{-4} = 1$ . Por uma análise análoga a que foi feita acima, concluimos que  $|\sigma_2| = 4$ .  $\square$

Veremos a seguir que o grupo de 4-tranças da esfera é infinito e, com este resultado, teremos as ferramentas necessárias para mostrar que  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é infinito para todo  $n \geq 4$ .

**Teorema 3.20.** *O grupo de 4-tranças da esfera é infinito.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.9, uma apresentação para o grupo  $B_4(\mathbb{S}^2)$  é dada por

$$\left\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \left| \begin{array}{l} \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3^3\sigma_2\sigma_1 = 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Seja  $N = \overline{\langle \sigma_1\sigma_3^{-1} \rangle}$  fecho normal do subgrupo gerado pelo elemento  $\sigma_1\sigma_3^{-1}$  e considere  $B_3(\mathbb{S}^2)/N$ . Uma apresentação para tal quociente, que denotaremos por  $G$ , pode ser obtida acrescentando a relação  $\sigma_1\sigma_3^{-1} = 1$  à apresentação do grupo de 4-tranças da esfera. Reescrevendo as relações de  $G$  que envolvem  $\sigma_3$ , observamos que tal grupo também pode ser apresentado por

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, (\sigma_1\sigma_2)^3 = 1 \rangle. \quad (3.3)$$

Agora, considere a função

$$\begin{aligned} \varphi: \quad G &\longrightarrow \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle \\ \sigma_1 &\longmapsto b^{-1}a \\ \sigma_2 &\longmapsto a^{-1}b^2. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que  $\varphi$  é um bem definido homomorfismo e a aplicação dada por

$$\begin{aligned} \psi: \quad \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ b &\longmapsto \sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

é seu homomorfismo inverso. Assim,  $G \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$ .

Por último, considere  $\overline{\langle (ab)^7 \rangle}$  o fecho normal do subgrupo gerado por  $(ab)^7$ . Então,  $G/\overline{\langle (ab)^7 \rangle} := \hat{G}$  possui a seguinte apresentação:

$$\hat{G} \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^7 = 1 \rangle = T(2, 3, 7).$$

Pelo Teorema A.14 do Apêndice A,

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - 1 = \frac{-1}{42} < 0$$

implica que o grupo  $T(2, 3, 7)$  é infinito. Portanto,  $\hat{G}$  é infinito e, conseqüentemente,  $G$  e  $B_4(\mathbb{S}^2)$  também são.  $\square$

A seguir, veremos que o elemento  $ab^2$  não é conjugado de  $a$ ,  $b$  ou  $ab$ , de onde seguirá que  $ab^2$  tem ordem infinita em  $\hat{G}$ , devido ao Teorema A.15. Por conta dos isomorfismos  $\varphi$  e  $\psi$  exibidos na demonstração do Teorema 3.20, tomaremos a liberdade de escrever que  $a = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$  e  $b = \sigma_1\sigma_2$ .

**Lema 3.21.** *Os geradores de Artin de  $B_4(\mathbb{S}^2)$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , são de ordem infinita.*

*Demonstração.* Primeiramente, veremos que  $\sigma_2$  é de ordem infinita. Note que

$$ab^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_2(\sigma_1\sigma_2)^3 = \sigma_2,$$

pelas relações presentes em (3.3).

O elemento  $ab^2$  não é conjugado de  $a$ . De fato, se existe  $x \in \hat{G}$  tal que  $ab^2 = xax^{-1}$ . Então,

$$\exp(ab^2) = \exp(xax^{-1}) = \exp(x) + \exp(a) - \exp(x) = \exp(a),$$

o que é um absurdo, visto que  $\exp(ab^2) = \exp(\sigma_2) = 1 \equiv 1 \pmod{6}$ , enquanto  $\exp(a) = \exp(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = 3 \equiv 3 \pmod{6}$ .

O elemento  $ab^2$  também não é conjugado de  $b$ . Suponha, por absurdo, que existe  $x \in \hat{G}$  tal que  $ab^2 = xbx^{-1}$ . Então,  $\exp(ab^2) = \exp(b)$ . Porém,

$$\exp(ab^2) = 1 \equiv 1 \pmod{6} \text{ e } \exp(b) = \exp(\sigma_1\sigma_2) = 2 \equiv 2 \pmod{6}.$$

Por fim, afirmamos que  $ab^2$  não é conjugado de  $ab$ . Suponhamos, por absurdo, que existe  $x \in \hat{G}$  tal que  $ab^2 = x(ab)x^{-1}$ . Daí, obtemos que  $\exp(ab^2) = \exp(ab)$ , o que é um absurdo, pois

$$\exp(ab^2) = 1 \equiv 1 \pmod{6} \text{ e } \exp(ab) = \exp(\sigma_1^{-1}) = -1 \equiv 5 \pmod{6}.$$



Concluimos assim, pelo Teorema A.15, que  $ab^2 = \sigma_2$  tem ordem infinita em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .

Como  $\exp(\sigma_1) = \exp(\sigma_2)$ , fazendo uma análise análoga, também podemos afirmar que  $b^{-1}a = \sigma_1$  tem ordem infinita em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ .  $\square$

**Corolário 3.22.**  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é um grupo infinito para  $n \geq 4$

*Demonstração.* Considere  $\sigma_1 \in B_n(\mathbb{S}^2)$ . Suponha, por absurdo, que  $\sigma_1$  tem ordem finita. Então, existe  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tal que  $\sigma_1^k = 1$ . Ao retirarmos as últimas  $n - 4$  cordas, a 4-trança resultante  $\sigma_1^k$  também é equivalente ao elemento trivial de  $B_4(\mathbb{S}^2)$ . Porém,  $\sigma_1$  tem ordem infinita em  $B_4(\mathbb{S}^2)$ , pelo Lema 3.21. Logo,  $k = 0$ , o que é um absurdo.

Dessa maneira,  $\sigma_1$  é uma  $n$ -trança da esfera de ordem infinita. Portanto, se  $n \geq 4$ ,  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é um grupo infinito.  $\square$

O último comentário que faremos nesta subseção refere-se aos subgrupos finitos maximais do grupo de  $n$ -tranças da esfera. Em 2007, Gonçalves e Guaschi [16] os classificaram e, mais ainda, deram realizações algébricas para os subgrupos finitos maximais cíclico e dicíclicos citados no resultado abaixo:

**Teorema 3.23** (Gonçalves e Guaschi, [16]). *Seja  $n \geq 3$ . Os subgrupos finitos maximais de  $B_n(\mathbb{S}^2)$  são:*

- (a)  $\mathbb{Z}_{2(n-1)}$ , se  $n \geq 5$ ;
- (b)  $Dic_{4n}$ ;
- (c)  $Dic_{4(n-2)}$ , se  $n = 5$  ou  $n \geq 7$ ;
- (d)  $T^*$ , se  $n \equiv 4 \pmod{6}$ ;
- (e)  $O^*$ , se  $n \equiv 0, 2 \pmod{6}$ ;
- (f)  $F^*$ , se  $n \equiv 0, 2, 12, 20 \pmod{30}$ .

Salientamos que, ainda em [16], os autores apresentaram várias realizações algébricas e geométricas de subgrupos finitos do grupo de  $n$ -tranças da esfera.

### 3.2.4 Diferenças entre $B_n(\mathbb{D}^2)$ e $B_n(\mathbb{S}^2)$

Esta breve subseção encerrará a nossa discussão referente aos grupos de tranças de  $n$  cordas da esfera. Nela, ressaltaremos algumas diferenças que existem entre os grupos  $B_n(\mathbb{D}^2)$  e  $B_n(\mathbb{S}^2)$ , além das várias que foram observadas nas subseções anteriores.

Já vimos que o grupo  $B_n(\mathbb{S}^2)$  é finito somente para  $n = 1, 2$  e  $3$ , enquanto  $B_n(\mathbb{D}^2)$  é finito apenas quando  $n = 1$ . Porém, a diferença mais significativa entre tais grupos é a seguinte:

*Observação 3.24.* O grupo  $B_n(\mathbb{D}^2)$  pode ser considerado um subgrupo de  $B_{n+1}(\mathbb{D}^2)$ , porém,  $B_n(\mathbb{S}^2)$  não pode ser considerado um subgrupo de  $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$  de maneira natural, ou seja, através da inclusão.

De fato, para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , a função

$$\begin{aligned} \varphi : B_n(\mathbb{D}^2) &\longrightarrow B_{n+1}(\mathbb{D}^2) \\ \sigma_i &\longmapsto \sigma_i \end{aligned}$$

é um monomorfismo. Então,  $B_n(\mathbb{D}^2) \cong \varphi(B_n(\mathbb{D}^2))$  é um subgrupo de  $B_{n+1}(\mathbb{D}^2)$ .

Agora, considere

$$\begin{aligned} \psi : B_n(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow B_{n+1}(\mathbb{S}^2) \\ \sigma_i &\longmapsto \sigma_i \end{aligned}.$$

Note que  $\psi$  não necessariamente satisfaz todas as relações de  $B_n(\mathbb{S}^2)$ . Por exemplo, para  $n > 1$ , temos que  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_2\sigma_1 = 1$  é uma relação em  $B_n(\mathbb{S}^2)$ . Porém,

$$\exp(\sigma_1\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_1) = 2n - 2 \not\equiv 0 \pmod{2n},$$

onde  $\exp$  é considerado como um invariante de  $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$ . Logo,  $B_n(\mathbb{S}^2)$  não pode ser incluído, de maneira natural, em  $B_{n+1}(\mathbb{S}^2)$ .

### 3.3 Grupos de Tranças do Plano Projetivo Real

O plano projetivo real,  $\mathbb{R}P^2$ , pode ser visto de duas maneiras:

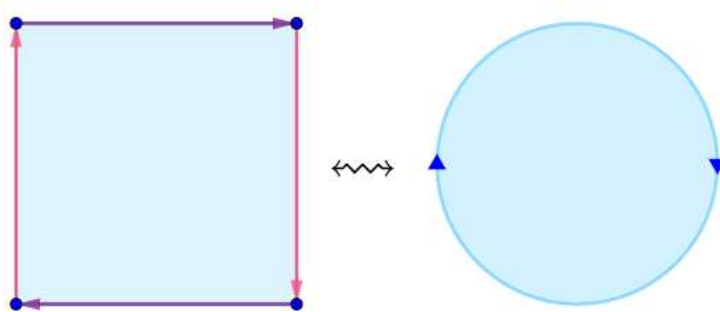


Figura 3.21: Plano projetivo real.

Uma delas é escrevendo  $\mathbb{R}P^2 \approx ([0, 1] \times [0, 1])/\sim$ , onde, para  $0 \leq x, y \leq 1$ , definimos

$$(1-x, 0) \sim (x, 1) \text{ e } (0, 1-y) \sim (1, y).$$

A outra é considerar  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; ||z|| \leq 1\}$  e escrever  $\mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{D}^2/\sim'$ , sendo que

$$x \sim' y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y, \text{ para } x, y \in \partial\mathbb{D}^2.$$

Para introduzir os grupos de tranças do plano projetivo real, vamos visualizar  $\mathbb{R}P^2$  como sendo o disco  $\mathbb{D}^2$  munido pela relação de equivalência que identifica pontos antípodos do bordo, salvo quando for mencionada outra descrição.

No Exemplo 2.20, vimos que  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ . A seguir, vamos exibir o gerador deste grupo.

Primeiramente, considere  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ . Ligue o ponto  $A_1$ , localizado no disco do topo do cilindro, ao ponto  $P$ , localizado na fronteira de um **disco de nível**  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$ , por um arco  $\alpha_1$ . Em seguida, em  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ , marque o ponto  $P'$  de modo que  $P$  e  $P'$  sejam simétricos com respeito ao centro do disco de nível  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$ . Finalmente, conecte o ponto  $P'$  ao ponto  $B_1$ , localizado no disco da base do cilindro, por meio de um arco  $\alpha'_1$ .

Após identificarmos a fronteira de  $\mathbb{D}^2$  para obter  $\mathbb{R}P^2$ , os pontos  $P$  e  $P'$  passam a ser o mesmo. Assim,  $\rho_1 = \alpha_1 \cup \alpha'_1$  é um arco que liga  $A_1$  a  $B_1$  em  $\mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$ .

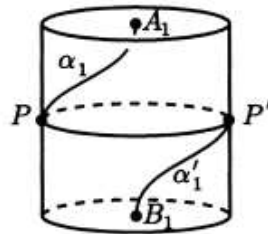


Figura 3.22: Trança  $\rho_1 = \alpha_1 \cup \alpha'_1$  em  $B_1(\mathbb{R}P^2)$  (retirado de [35]).

*Observação 3.25.* O arco  $\rho_1 = \alpha_1 \cup \alpha'_1$  não é a trança trivial em  $B_1(\mathbb{R}P^2)$ .

De fato, pela demonstração da Proposição 2.16,  $p_*: B_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2)$  é um isomorfismo, sendo  $p_*(\beta) = p(\beta)$ , onde  $p$  é a projeção em  $\mathbb{R}P^2 \times \{0\}$ . Note que  $p_*(\rho_1) = p(\rho_1)$  é o gerador de  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ , como podemos observar na Figura 3.23.

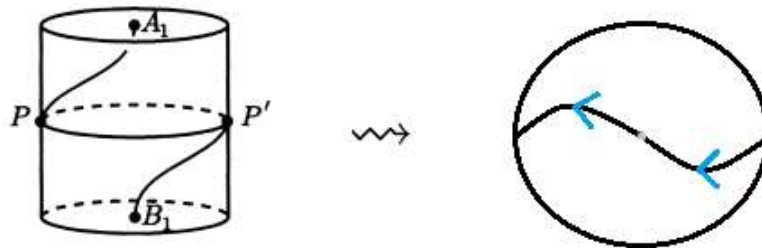


Figura 3.23: Projeção da 1-trança  $\rho_1$  em  $\mathbb{R}P^2 \times \{0\}$ .

Logo,  $\rho_1$  é um gerador não-trivial de  $B_1(\mathbb{R}P^2)$ .

Geometricamente, também podemos constatar que a ordem de  $\rho_1$  é 2, como mostra a Figura 3.24:

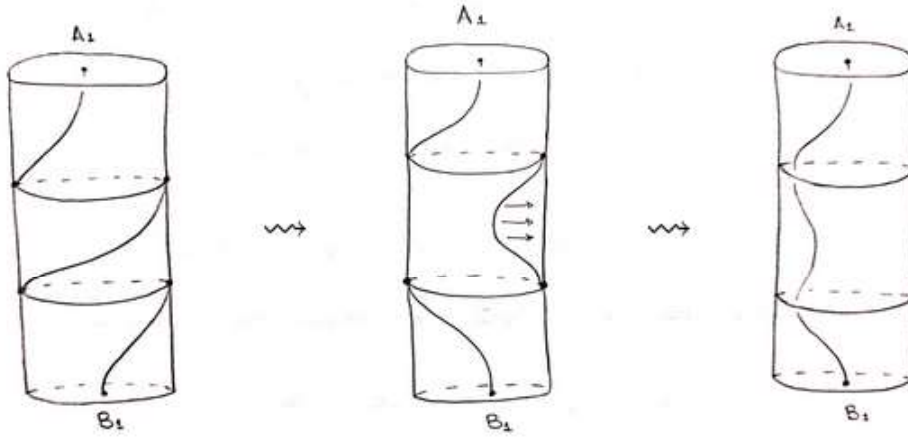


Figura 3.24: Ordem de  $\rho_1$  (autoria própria).

### 3.3.1 Apresentação de $B_n(\mathbb{R}P^2)$

A maneira como construímos  $\rho_1$  pode ser estendida para criar geradores adicionais ao grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real. No total, existem  $n$  geradores deste tipo,  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ , e eles são da forma:

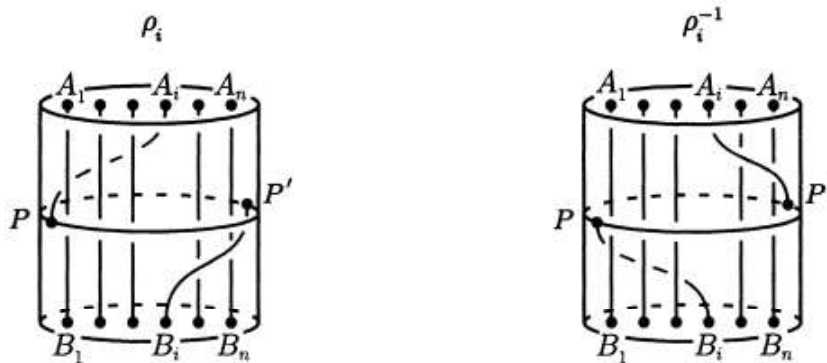


Figura 3.25: Geradores de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  (retirado de [35]).

Além dos geradores descritos acima, o grupo de  $n$ -tranças do  $\mathbb{R}P^2$  também conta com os geradores de Artin. Em conjunto com as duas relações usuais envolvendo os geradores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , este grupo tem mais 4 relações. Mais precisamente, em 1966, J. Van Buskirk demonstrou que  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  pode ser apresentado como descreve o

**Teorema 3.26** (Van Buskirk, [40]). *O grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real possui a seguinte apresentação:*

**Geradores:**  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ .

**Relações:** (1)  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ;

(2)  $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ , para  $|i - k| \geq 2$  e  $i, k = 1, 2, \dots, n - 1$ ;

(3)  $\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i$ , se  $j \neq i, i + 1$  e  $1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n$ ;

(4)  $\rho_i = \sigma_i \rho_{i+1} \sigma_i$ , se  $1 \leq i \leq n - 1$ ;

(5)  $\rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_i^2$ , se  $1 \leq i \leq n - 1$ ;

$$(6) \rho_1^2 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1.$$

Agora, vamos explorar a natureza geométrica das novas relações, isto é, de (3) a (6).

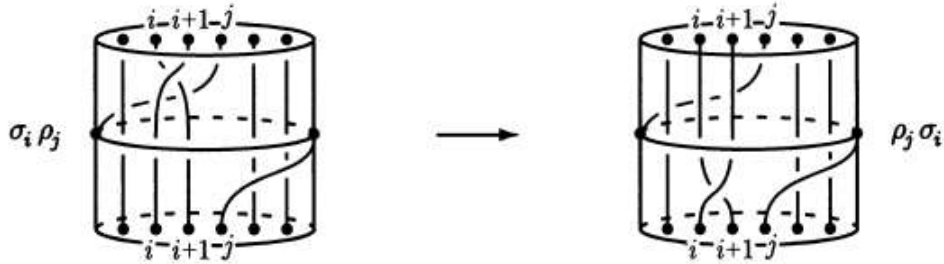


Figura 3.26: Relação (3) (retirado de [35]).

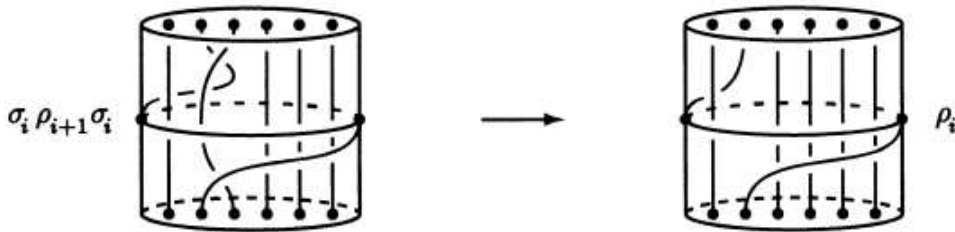


Figura 3.27: Relação (4) (retirado de [35]).

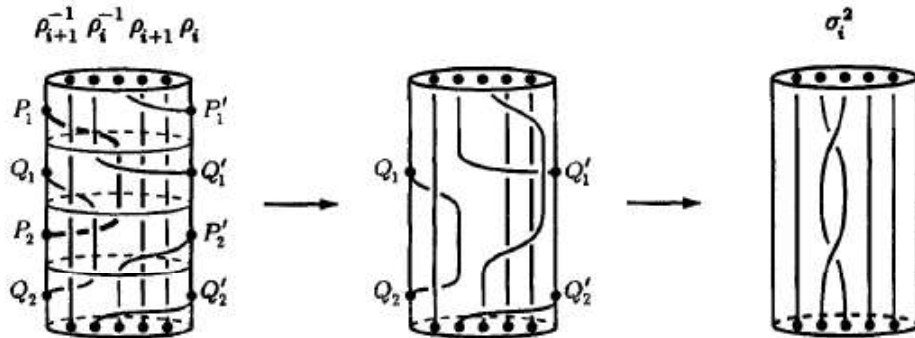


Figura 3.28: Relação (5) (retirado de [35]).

Referente à Figura 3.28, observamos que, primeiramente, o arco  $P_1 P_2$  em  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  é deformado no arco  $P_1 P_2$  em  $\partial \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ . Posteriormente, identificamos este último com  $P'_1 P'_2$  em  $\partial \mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  e depois puxamos a corda para o interior do cilindro. Aplicando o mesmo movimento a  $Q_1 Q_2$ , obtemos  $\sigma_i^2$ .

Na Figura 3.29, primeiro movemos  $P_2$  (e, simultaneamente,  $P'_2$ ) em sentido anti-horário pelo bordo do disco de nível  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$  em que tais pontos estão localizados, até que eles estejam na posição antipodal à qual se encontravam inicialmente. Aplicando o argumento feito no parágrafo anterior ao arco  $P'_1 P_2$ , obtemos que a trança resultante é  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1$ .

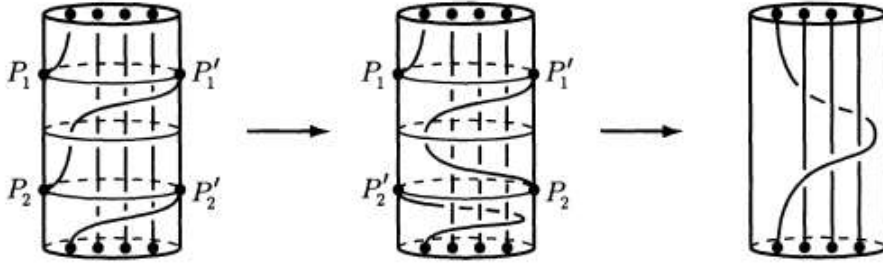


Figura 3.29: Relação (6) (retirado de [35]).

### 3.3.2 Propriedades Algébricas

Através da apresentação de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , conseguimos estudar propriedades algébricas de tal grupo. Veremos que o grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real é finito somente para  $n = 1, 2$ .

**Proposição 3.27.**  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  é um grupo finito de ordem 16.

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.26,  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  tem a apresentação

$$\langle \sigma_1, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_1 = \sigma_1 \rho_2 \sigma_1; \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1 = \sigma_1^2; \rho_1^2 = \sigma_1^2 \rangle.$$

Podemos substituir a expressão de  $\rho_1$  nas outras relações, obtendo

$$\rho_2^{-1} (\sigma_1 \rho_2 \sigma_1)^{-1} \rho_2 (\sigma_1 \rho_2 \sigma_1) = \sigma_1^2 \therefore (\rho_2 \sigma_1)^2 = (\sigma_1 \rho_2 \sigma_1) \rho_2 \sigma_1^2 = \sigma_1 (\rho_2 \sigma_1)^2 \sigma_1$$

e

$$\rho_1^2 = \sigma_1^2 \therefore (\sigma_1 \rho_2 \sigma_1)^2 = \sigma_1^2 \therefore \sigma_1 (\rho_2 \sigma_1^2 \rho_2) \sigma_1 = \sigma_1^2 \therefore \rho_2 \sigma_1^2 \rho_2 = 1 \therefore \sigma_1^2 = \rho_2^{-2} \therefore \rho_2^2 = \sigma_1^{-2}.$$

Daí,  $(\rho_2 \sigma_1)^2 = \sigma_1 (\rho_2 \sigma_1)^2 \sigma_1$  e  $\rho_2^2 = \sigma_1^{-2}$ .

Denotando  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  por  $G$ ,  $\sigma_1$  por  $\sigma$  e  $\rho_2$  por  $\rho$ , podemos escrever

$$G = \langle \sigma, \rho \mid (\rho \sigma)^2 = \sigma (\rho \sigma)^2 \sigma; \rho^2 = \sigma^{-2} \rangle,$$

que é uma apresentação do grupo de 2-tranças do  $\mathbb{R}P^2$  equivalente à citada no início da demonstração, devido às manipulações algébricas feitas.

Agora, considere  $H = \overline{\langle \sigma \rangle}$  fecho normal de  $\sigma$  em  $G$ . Portanto, o quociente  $G/H$  pode ser apresentado por

$$\langle \sigma, \rho \mid (\rho \sigma)^2 = \sigma (\rho \sigma)^2 \sigma; \rho^2 = \sigma^{-2}; \sigma = 1 \rangle \cong \langle \rho \mid \rho^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

Assim, um conjunto de representantes das classes laterais à direita de  $H$  em  $G$  é dado por  $\{1, \rho\}$ . Aplicando o método de Reidemeister-Schreier<sup>1</sup>, encontramos uma apresentação para  $H$ .

Considerando  $M = \{1, \rho\}$  conjunto de Schreier, os geradores não-triviais de  $H$  são  $\sigma, \rho \sigma \rho^{-1}$  e  $\rho^2$ .

Já no processo de reescrita das relações de  $G$ , obtemos as seguintes relações para  $H$ :

<sup>1</sup>Para mais informações sobre este método, recomendamos [31].

- I)  $(\sigma\rho)^3\rho^{-2}\sigma^{-1}\rho^{-1} = 1$ ;  
 II)  $\rho^2\sigma^2 = 1$ ;  
 III)  $(\rho\sigma)^3\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-2} = 1$ ;  
 IV)  $\rho^3\sigma^2\rho^{-1} = 1$ .

Escreva  $a := \sigma$ ,  $b := \rho\sigma\rho^{-1}$  e  $c := \rho^2$ . Note que II)  $\rho^2\sigma^2 = 1 \Leftrightarrow ca^2 = 1 \Leftrightarrow c = a^{-2}$ . Temos também que II)  $\Leftrightarrow$  IV)  $\Leftrightarrow a^2 = b^2$ . Por último, observe que I)  $\Leftrightarrow$  III)  $\Leftrightarrow (ab)^2 = a^2$ .

Dessa maneira, podemos reescrever a apresentação de  $H$  como

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle,$$

que é isomorfo ao grupo dicíclico de ordem 8.

Pelo Teorema de Lagrange, segue que

$$|B_2(\mathbb{R}P^2)| = |G| = [G : H] |H| = 2 \times 8 = 16,$$

visto que  $[G : H]$  é igual à cardinalidade do conjunto  $\{1, \rho\}$ .

Portanto,  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  é um grupo finito de ordem 16.  $\square$

Sabendo que o grupo de 2-tranças do  $\mathbb{R}P^2$  tem ordem 16, é factível listar os elementos deste grupo e determinar quais deles são tranças puras. Por outro lado, podemos considerar o homomorfismo permutação

$$\pi: B_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{S}_2$$

e constatar que o núcleo de  $\pi$  é o subgrupo gerado pelos elementos  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Mais precisamente,  $\text{Ker}(\pi) = \langle \rho_1, \rho_2 \mid \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_2\rho_1)^2 \rangle \cong \mathcal{Q}_8$ . Desta maneira, podemos enunciar a

**Proposição 3.28.** *O grupo de 2-tranças puras do  $\mathbb{R}P^2$  é isomorfo ao grupo dos quatérnios de ordem 8.*

Para uma demonstração detalhada, deixamos [40] como referência. Citamos também [15] (Proposição 6) para uma prova alternativa utilizando fibrados e sequência exata longa de homotopia.

**Teorema 3.29** (Van Buskirk, [40]). *O grupo  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  é infinito para  $n \geq 3$ .*

Uma forma de demonstrar este teorema é considerar o grupo gerado pelos elementos  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \rho_n$ , sendo

$$a_j = (\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_{j+1})\sigma_j^2(\sigma_{j+1}^{-1}\dots\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1})$$

para  $j = 1, 2, \dots, n-1$  e observar que o grupo resultante é um grupo livre de rank  $n-1$ . O texto de Van Burkirk apresenta uma abordagem bem similar e, tanto na ideia aqui delineada quanto no argumento presente em [40], o método de Reidemeister-Schreier é utilizado. Devido à extensão das contas, omitiremos a prova do Teorema 3.29.

### 3.3.3 Tranças Half Twist e Full Twist em $B_n(\mathbb{R}P^2)$

Nesta subsecção, estudaremos um pouco mais o conjunto  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ , responsável por gerar o grupo  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Além disso, assim como fizemos para os grupos de tranças com  $n$  cordas da esfera, vamos introduzir as tranças *half twist* e *full twist* do plano projetivo real. Neste contexto, estas duas tranças desempenham um importante papel, principalmente na realização dos subgrupos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , como veremos no Capítulo 4.

A seguir, veremos duas identidades envolvendo os geradores do grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real.

**Lema 3.30.** *Em termos da apresentação dada no Teorema 3.26, temos*

$$(a) \quad \rho_j = \sigma_{j-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}, \text{ para } j = 2, \dots, n;$$

$$(b) \quad \rho_n^{-2} = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}.$$

*Demonstração.* (a) Basta aplicar a relação (4) recursivamente.

(b) Utilizando a relação (4) nas duas primeiras igualdades e a (6) na quarta igualdade, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_n^2 &= (\sigma_{n-1}^{-1} \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1})(\sigma_{n-1}^{-1} \rho_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1}) \\ &= (\sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1})(\sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1}) \\ &= \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 (\sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-2} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1}) \rho_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 \rho_1^{-2} \rho_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-2} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, tomando o inverso de ambos os lados da equação, obtemos

$$\rho_n^{-2} = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}.$$

□

Vamos introduzir abaixo a  $n$ -trança que gera o centro do grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo.

**Definição 3.31** (Gonçalves e Guaschi, [17]). Seja  $n \geq 2$ . Em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , a  $n$ -trança

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

é chamada trança *half twist*, enquanto a  $n$ -trança dada por

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1})^n,$$

é denominada trança *full twist*.



Por convenção, para  $n = 1$ , as tranças half twist e full twist do plano projetivo real são definidas como sendo a trança trivial.

Salientamos que a  $n$ -trança full twist do plano projetivo pode ser obtida geometricamente da mesma maneira que fizemos para a  $n$ -trança full twist da esfera. Assim, neste contexto,  $\Delta_n^2$  corresponde à  $n$ -trança de Dirac apresentada no Teorema 3.16 para  $k = 1$ .

*Observação 3.32.* Uma trança  $\alpha \in B_n(\mathbb{R}P^2)$  é dita uma  **$k$ -ésima raiz da  $n$ -trança full twist** quando  $\alpha^k = \Delta_n^2$  e  $\alpha_j \neq \Delta_n^2$  para todo  $1 \leq j < k$ . Geometricamente, mostra-se que a trança half twist é uma raiz quadrada do elemento  $\Delta_n^2$ . Para um estudo aprofundado das raízes do full twist em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  e em  $P_n(\mathbb{R}P^2)$ , indicamos [15].

Em 1982, Murasugi enunciou e provou o seguinte resultado:

**Proposição 3.33** (Murasugi, [34]). *O centro de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  é o grupo cíclico de ordem 2 gerado por  $\Delta_n^2$ , para  $n \geq 3$ .*

A demonstração deste fato é feita por indução sobre o número de cordas. Primeiramente, é observado que a  $n$ -trança  $\Delta_n^2$  é não-trivial e mostra-se que ela comuta com os geradores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  e  $\rho_1$ . Observe que isto é suficiente para obter que  $\Delta_n^2$  pertence ao centro do grupo de tranças do  $\mathbb{R}P^2$ , devido ao Lema 3.30 (a). Em sequência, utilizando o homomorfismo permutação, Murasugi prova que o centro de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  é um grupo cíclico de ordem 2.

Em seguida, vamos apresentar uma igualdade que nos permitirá relacionar a  $n$ -trança half twist com os geradores de Artin.

**Lema 3.34.** *Seja  $n \geq 2$ . Em  $B_n(\mathbb{D}^2)$ , temos*

$$[(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1]^{-1} \sigma_i [(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1] = \sigma_{n-i},$$

para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

*Demonstração.* Faremos a prova apenas para  $n = 4$ , pois os argumentos se generalizam para o caso  $n$  qualquer.

Denote a 4-trança do disco  $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$  por  $\alpha$ . Utilizando as relações presentes na apresentação de  $B_3(\mathbb{D}^2)$ , vamos verificar que a igualdade

$$\alpha^{-1} \sigma_i \alpha = \sigma_{4-i} \tag{3.4}$$

é válida para  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Se  $i = 1$ , temos que

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sigma_1\alpha &= [(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1]^{-1}\sigma_1[(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1] \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2(\sigma_3\sigma_1)\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_2)\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1})\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}(\sigma_2\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_2)\sigma_3\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}(\sigma_3\sigma_1) \\
&= (\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_3 \\
&= \sigma_3.
\end{aligned}$$

Para  $i = 2$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sigma_2\alpha &= [(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1]^{-1}\sigma_2[(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1] \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2)\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}(\sigma_1\sigma_3)\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_1)\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) \\
&= (\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1)\sigma_2 \\
&= \sigma_2.
\end{aligned}$$

Por último, se  $i = 3$ , temos

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}\sigma_3\alpha &= [(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1]^{-1}\sigma_3[(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1] \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_3\sigma_1)\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(\sigma_3\sigma_2\sigma_3)\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_3)\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\
&= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 \\
&= (\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_1 \\
&= \sigma_1.
\end{aligned}$$

Logo, a equação (3.4) é verdadeira para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ . □

Agora, considere a inclusão natural

$$\begin{aligned}
i: B_n(\mathbb{D}^2) &\longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \\
\sigma_i &\longmapsto \sigma_i
\end{aligned}$$

definida nos geradores do grupo de  $n$ -tranças do disco. Devido às apresentações de cada grupo, é fácil ver que tal aplicação estende-se a um homomorfismo.

*Observação 3.35.* Pelo comentário feito acima, a equação provada no Lema 3.34 continua sendo verdadeira em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Ou seja,  $\Delta_n^{-1}\sigma_i\Delta_n = \sigma_{n-i}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Dispondo dessa observação, podemos relacionar  $\Delta_n$  com o gerador  $\rho_i$ .

**Lema 3.36** (Gonçalves e Gauschi, [17]). *Para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos  $\Delta_n^{-1}\rho_i\Delta_n = \rho_{n+1-i}^{-1}$ .*

*Demonstração.* Faremos a prova por indução sobre  $i$ .

Para  $i = 1$ , pela definição de  $\Delta_n$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-1}\rho_1\Delta_n &= [(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \dots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1]^{-1}\rho_1[(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \dots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1] \\ &= \sigma_1^{-1} \dots (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^{-1}\rho_1[(\sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{-1}(\sigma_{n-1} \dots \sigma_1)](\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \dots \sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1} \dots [(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^{-1}\rho_1(\sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{-1}][\sigma_{n-1} \dots \sigma_1^2 \dots \sigma_{n-1}] \dots \sigma_1 \\ &= \sigma_1^{-1} \dots (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{-1}\rho_n\rho_n^{-2}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots \sigma_1, \end{aligned}$$

pelo Lema 3.30, itens (a) e (b), respectivamente.

Assim,

$$\Delta_n^{-1}\rho_1\Delta_n = \sigma_1^{-1} \dots (\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})^{-1}\rho_n^{-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \dots \sigma_1 = \rho_n^{-1},$$

pois  $\sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i$ , para todo  $j \neq i, i+1$ .

Agora, suponha que  $\Delta_n^{-1}\rho_i\Delta_n = \rho_{n+1-i}^{-1}$ , para  $1 \leq i \leq n-1$ . Mostremos que a equação também é válida para  $i+1$ .

Note que

$$\begin{aligned} \Delta_n^{-1}\rho_{i+1}\Delta_n &= \Delta_n^{-1}(\sigma_i^{-1}\rho_i\sigma_i^{-1})\Delta_n \\ &= \Delta_n^{-1}\sigma_i^{-1}(\Delta_n\Delta_n^{-1})\rho_i(\Delta_n\Delta_n^{-1})\sigma_i^{-1}\Delta_n \\ &= (\Delta_n^{-1}\sigma_i^{-1}\Delta_n)(\Delta_n^{-1}\rho_i\Delta_n)(\Delta_n^{-1}\sigma_i^{-1}\Delta_n) \\ &= \sigma_{n-i}^{-1}\rho_{n+1-i}^{-1}\sigma_{n-i}^{-1}, \end{aligned}$$

pela relação (4) do Teorema 3.26, pela Observação 3.35 e pela hipótese de indução.

Por fim, utilizando novamente a relação (4), temos que  $\rho_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\rho_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}$ , sempre que  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Daí,

$$\Delta_n^{-1}\rho_{i+1}\Delta_n = \sigma_{n-i}^{-1}\rho_{(n-i)+1}^{-1}\sigma_{n-i}^{-1} = \rho_{n-i}^{-1}.$$

Portanto, concluímos que  $\Delta_n^{-1}\rho_i\Delta_n = \rho_{n+1-i}^{-1}$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ . □

As últimas considerações que faremos nesta seção tratam dos elementos de ordem finita do grupo  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Em [34], Murasugi os caracterizou, porém, suas ordens não estão explícitas nem para os elementos de  $P_n(\mathbb{R}P^2)$ . Para estudar as possíveis torções do grupo de  $n$ -tranças puras do plano projetivo real, apresentamos o seguinte resultado:

**Lema 3.37** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *Seja*

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{g} G \xrightarrow{f} H \longrightarrow 1$$

uma seqüência exata curta de grupos, sendo  $f, g$  homomorfismos e  $K$  livre de torção. Se  $x \in G$  é um elemento de torção de ordem  $l$ , então  $f(x) \in H$  também é de ordem  $l$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in G$  como no enunciado. Então,  $f(x)^l = f(x^l) = f(e_G) = e_H$ , pois  $f$  é um homomorfismo de grupos. Então, a ordem de  $f(x)$ , digamos  $k$ , divide  $l$ . Considere  $x^k$  e observe que  $f(x^k) = f(x)^k = e_H$ . Logo,  $x^k \in \text{Ker}(f) = \text{Im}(g) \cong K$ , pois temos uma seqüência exata curta. Como  $(x^k)^{\frac{l}{k}}$  é trivial e  $K$  é livre de torção, segue que  $x^k = e_G$ . Portanto,  $k = l$ .  $\square$

**Proposição 3.38** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *Seja  $n \geq 1$ . Então, a possível torção de  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  é 2 ou 4.*

*Demonstração.* Se  $n = 1$ , temos  $P_1(\mathbb{R}P^2) = B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$  e sua torção é igual a 2.

Para  $n = 2$ , pela Proposição 3.28, o grupo de tranças puras com 2 cordas do plano projetivo real é isomorfo a  $\mathcal{Q}_8$ . Como o grupo dos quatérnios não possui elementos de ordem 8, segue que a torção de  $P_2(\mathbb{R}P^2)$  é 2 ou 4.

Se  $n \geq 3$ , considere a aplicação

$$\begin{aligned} p: \quad F_n(\mathbb{R}P^2) &\longrightarrow F_2(\mathbb{R}P^2) \\ (z_1, z_2, \dots, z_n) &\longmapsto (z_1, z_2). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.31,  $p$  é um fibrado com fibra típica  $F_{2,n-2}(\mathbb{R}P^2) = F_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})$ , sendo  $x_1$  e  $x_2$  pontos distintos de  $\mathbb{R}P^2$ . Ou seja, podemos escrever

$$F_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\}) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow F_2(\mathbb{R}P^2).$$

Dessa maneira, o fibrado  $p$  induz uma seqüência exata longa nos grupos de homotopia, dada por

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_2(F_2(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \pi_1(F_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})) \rightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \pi_1(F_2(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \\ \pi_0(F_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\}$  é um espaço topológico conexo por caminhos, temos que o conjunto  $\pi_0(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})$  é trivial. Consequentemente,  $\pi_0(F_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})) = 1$ . Mais ainda, por [40]<sup>2</sup>, obtemos que  $\pi_2(F_2(\mathbb{R}P^2))$  também é trivial. Logo, obtemos a seguinte seqüência exata curta:

$$1 \rightarrow P_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\}) \rightarrow P_n(\mathbb{R}P^2) \rightarrow P_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow 1.$$

Por [11], o grupo  $P_{n-2}(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_1, x_2\})$  é livre de torção. Pelo Lema 3.37, as possibilidades de torção para  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  são as torções de  $P_2(\mathbb{R}P^2)$ , que, como vimos, são 2 ou 4.  $\square$

<sup>2</sup>O resultado presente em [40] afirma que  $\pi_2(F_q(\mathbb{R}P^2)) = 1$ , para todo  $q \geq 2$ .

De maneira conclusiva, em [15], Gonçalves e Guaschi afirmam que 2 e 4 são, de fato, as torções não triviais do grupo de  $n$ -tranças puras do plano projetivo real. Mais precisamente, eles provam o seguinte resultado:

**Proposição 3.39** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *Seja  $n \geq 2$ . Então, valem*

- (a)  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  tem um elemento de ordem  $l$  se, e somente se,  $l$  divide  $4n$  ou  $4(n-1)$ ;
- (b) A torção não trivial de  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  é 2 e 4;
- (c) A trança full twist,  $\Delta_n^2$ , é o único elemento de ordem 2 de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

Finalmente, apresentamos um resultado que relaciona o *mapping class group* do plano projetivo real com o subgrupo gerado pelo *half twist*.

**Teorema 3.40** (Scott, [38]). *Para  $n \geq 2$ , fixe  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}P^2$  subconjunto de  $n$  pontos distintos do plano projetivo real. Então, a sequência*

$$1 \longrightarrow \langle \Delta_n^2 \rangle \longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, X) \longrightarrow 1$$

*é uma sequência exata curta.*

*Demonstração.* Considere  $(x_1, \dots, x_n) \in D_n(\mathbb{R}P^2)$  e defina a aplicação

$$\begin{aligned} F: \text{Homeo}(\mathbb{R}P^2) &\longrightarrow D_n(\mathbb{R}P^2) \\ \varphi &\longmapsto [(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))]. \end{aligned}$$

Por uma prova semelhante à feita para o Lema 2.33, mostra-se que  $F$  é um fibrado com fibra típica  $\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X)$ . Portanto,  $F$  induz uma sequência exata longa nos grupos de homotopia dos espaços envolvidos, isto é,

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \pi_1(D_n(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \\ \pi_0(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Nos artigos [21] e [22], M. E. Hamstrom mostrou que o grupo  $\pi_1(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X))$  é trivial, enquanto  $\pi_1(\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2)) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ . Note ainda que, pelo Teorema 2.28, o grupo fundamental do  $n$ -ésimo espaço de configuração permutado do plano projetivo real é isomorfo ao grupo de  $n$ -tranças desta superfície. Assim, utilizando também a Proposição 1.38 e o Exemplo 1.44, podemos escrever

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, X) \longrightarrow 1.$$

Como  $\Delta_n^2$  é o único elemento de ordem 2 de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , obtemos a sequência exata curta desejada.  $\square$



## Capítulo 4

# Grupos de Tranças de Superfícies e Recobrimentos

Seja  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  um aplicação de recobrimento de  $d$  folhas. No capítulo final desta dissertação, estudaremos a existência de um mergulho do grupo de  $n$ -tranças do espaço base  $M$  no grupo de tranças com  $dn$  cordas do espaço total  $\tilde{M}$ , bem como suas consequências.

Em todo este capítulo, consideraremos  $M$  uma superfície conexa, compacta, possivelmente com bordo e possivelmente com pontos removidos de seu interior.

### 4.1 Mergulhos dos grupos de tranças de espaços de recobrimento

Sejam  $d$  e  $n$  números naturais e considere  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento com  $d$  folhas. Nesta seção, vamos mostrar que  $p$  induz um mergulho do grupo de tranças com  $n$  cordas de  $M$  no grupo de tranças com  $dn$  cordas de  $\tilde{M}$ .

Considere  $n$  pontos fixados, denotados por  $z_1, z_2, \dots, z_n$  em um pequeno disco<sup>1</sup> da superfície  $M$ . Observe que, dado um subconjunto finito  $A$  composto por  $n$  pontos distintos e não ordenados de  $M$ , sua imagem inversa pela aplicação  $p$ , isto é,  $p^{-1}(A)$ , é um subconjunto de  $\tilde{M}$  constituído por  $dn$  pontos distintos não ordenados, visto que  $p$  é um recobrimento de  $d$  folhas. Em outras palavras, dado  $(x_1, \dots, x_n) \in D_n(M)$ , temos que  $p^{-1}(x_1, \dots, x_n) \in D_{dn}(\tilde{M})$ , pois  $p^{-1}(\{x_i\}) \in \tilde{M}$  e a cardinalidade da fibra  $p^{-1}(\{x_i\})$  é igual a  $d$ . Dessa maneira, a função

$$\begin{aligned} \psi_n: \quad D_n(M) &\longrightarrow D_{dn}(\tilde{M}) \\ [(x_1, \dots, x_n)] &\longmapsto [(p^{-1}(\{x_1\}), \dots, p^{-1}(\{x_n\}))] \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Salientamos que fixar tais  $n$  pontos em um disco suficientemente pequeno da superfície garante que a construção feita nesta seção será realizada localmente. Dessa maneira, a construção independe de  $M$  possuir bordo e/ou ter uma quantidade finita de pontos removidos do seu interior.

está bem definida. Além disso,  $\psi_n$  é contínua, devido ao fato de  $p$  ser um homeomorfismo local.

Fixe  $[(z_1, \dots, z_n)]$  em  $D_n(M)$  e  $[(p^{-1}(\{z_1\}), \dots, p^{-1}(\{z_n\}))] \in D_{dn}(\tilde{M})$ . Para todo  $q \in \mathbb{N}$ , a aplicação  $\psi_n$  induz um homomorfismo nos respectivos grupos de homotopia de dimensão  $q$  dos espaços de configuração permutados citados.

Se  $q = 1$ , denotamos o homomorfismo induzido nos grupos fundamentais, tomando como ponto base os elementos fixados no começo deste parágrafo, por

$$(\psi_n)_\# : B_n(M) \longrightarrow B_{dn}(\tilde{M}).$$

Para  $q \geq 2$ , denotaremos por  $(\psi_n)_{q*}$  o homomorfismo induzido por  $\psi_n$  nos grupos de homotopia de dimensão  $q$ .

Mostraremos a seguir, por indução sobre  $n$ , que  $(\psi_n)_\#$  é um monomorfismo. Veremos primeiro o caso base, isto é,  $n = 1$ .

**Lema 4.1** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *O homomorfismo  $(\psi_1)_\# : B_1(M) \rightarrow B_d(\tilde{M})$  é injetor.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in \text{Ker}(\psi_1)_\#$  e seja  $c : [0, 1] \rightarrow M$  o laço com ponto base  $z_1$  tal que  $[c] = \alpha \in B_1(M) = \pi_1(M, z_1)$ . Seja  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  o levantamento do laço  $c$  tal que  $\tilde{c}(0) := \tilde{z}_1$ . Como  $\alpha \in \text{Ker}(\psi_1)_\#$ , temos que

$$(\psi_1)_\#(\alpha) = (\psi_1)_\#([c]) = [\psi_1 \circ c]$$

é o elemento identidade de  $B_d(\tilde{M})$ . Então, a classe de homotopia da imagem inversa de  $c$  por  $p$  é trivial. Assim,  $\tilde{c}$  é um laço com ponto base  $\tilde{z}_1$  homotópico ao caminho constante. Visto que  $p_\# : \pi_1(\tilde{M}, \tilde{z}_1) \rightarrow \pi_1(M, z_1)$  é um homomorfismo,

$$p_\#(\tilde{c}) = [p \circ \tilde{c}] = [c] = \alpha$$

é trivial. Logo,  $\text{Ker}(\psi_1)_\# = \{1\}$ , de onde segue que  $(\psi_1)_\#$  é um monomorfismo.  $\square$

**Lema 4.2** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $q \geq 2$ . Então, o homomorfismo*

$$(\psi_1)_{q*} : \pi_q(M) \longrightarrow \pi_q(D_d(\tilde{M}))$$

*induzido por  $\psi_1 : D_1(M) \rightarrow D_d(\tilde{M})$  é bijetor. Em particular,  $(\psi_1)_{q*}$  é um epimorfismo.*

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em três casos, analisando separadamente os casos da esfera e do plano projetivo real.

Se  $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2$ , então  $M$  é um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\pi, 1)$ . Ou seja,  $\pi_q(M) = \{1\}$  para todo  $q \geq 2$ . Temos também que o mesmo acontece para  $D_d(\tilde{M})$ . Logo, neste caso, obtemos que  $(\psi_1)_{q*}$  é um isomorfismo.

Se  $M = \mathbb{S}^2$ , como a esfera é simplesmente conexa e  $p$  é uma aplicação de recobrimento, temos que  $d = 1$  e  $\tilde{M} = \mathbb{S}^2$ . Daí, sendo  $D_1(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$ , temos que  $(\psi_1)_{q*} : \pi_q(\mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_q(\mathbb{S}^2)$  é um isomorfismo, pois  $p$  é um homeomorfismo global.



Agora, suponha que  $M = \mathbb{R}P^2$ . Pela fórmula de Riemann-Hurwitz<sup>2</sup> [36], temos duas possibilidades:

i.  $d = 1$  e  $\tilde{M} = \mathbb{R}P^2$  ou ii.  $d = 2$  e  $\tilde{M} = \mathbb{S}^2$ .

i. Se  $d = 1$  e  $\tilde{M} = \mathbb{R}P^2$ , a tese segue pelo fato de  $p$  ser um homeomorfismo global.

ii. Vejamos o que ocorre se  $d = 2$  e  $\tilde{M} = \mathbb{S}^2$ .

Seja  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  e considere a aplicação

$$\begin{aligned} p_1: F_2(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.31,  $p_1$  é um fibrado com fibra típica  $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\}$ . Então, a sequência

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\} \hookrightarrow F_2(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

induz a seguinte sequência exata longa nos grupos de homotopia correspondentes:

$$\cdots \rightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\}) \rightarrow \pi_2(F_2(\mathbb{S}^2)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\}) \rightarrow \pi_1(F_2(\mathbb{S}^2)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \dots$$

Como  $\mathbb{S}^2 \setminus \{x_0\}$  é contrátil, obtemos que  $\pi_m(F_2(\mathbb{S}^2)) \cong \pi_m(\mathbb{S}^2)$ , para todo  $m \geq 1$ . Então,  $p_1$  induz um isomorfismo entre os grupos de homotopia dos espaços  $F_2(\mathbb{S}^2)$  e  $\mathbb{S}^2$ .

Além disso,  $p_1$  é uma equivalência homotópica. De fato, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{S}^2 &\longrightarrow F_2(\mathbb{S}^2) \\ x &\longmapsto (x, -x). \end{aligned}$$

Ela está bem definida, pois  $x \neq -x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Mais ainda, para  $x \in \mathbb{S}^2$ , temos que

$$(p_1 \circ \varphi_1)(x) = p_1(x, -x) = x = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}(x).$$

Já para  $(x, y) \in F_2(\mathbb{S}^2)$ , podemos escrever que

$$(\varphi \circ p_1)(x, y) = \varphi_1(x) = (x, -x)$$

e, portanto,  $(\varphi \circ p_1)$  é homotópica a função identidade de  $F_2(\mathbb{S}^2)$ .

O restante da prova é dedicado a mostrar que  $D_2(\mathbb{S}^2)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}P^2$  e faremos isto utilizando a equivalência homotópica  $\varphi_1$ .

Considere as funções

$$\begin{aligned} \theta_{-1}: \mathbb{Z} \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 & \text{e} & \theta_{\mathcal{S}_2}: \mathcal{S}_2 \times F_2(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow F_2(\mathbb{S}^2) \\ (-1, x) &\longmapsto -x & & (s, (x_1, x_2)) &\longmapsto (x_2, x_1) \end{aligned}$$

Por uma prova semelhante à feita na Proposição 2.25, mostra-se que  $\theta_{-1}$  e  $\theta_{\mathcal{S}_2}$  são ações livres.

A seguir, veremos que  $\varphi_1$  é uma aplicação  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante com respeito às ações citadas acima. Para isto, basta mostrarmos que o diagrama abaixo é comutativo.

<sup>2</sup>Em linhas gerais, a fórmula de Riemann-Hurwitz expressa como a característica de Euler de uma superfície se relaciona com aplicações de recobrimento deste espaço topológico.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\theta_{-1}} & \mathbb{S}^2 \\
\varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\
F_2(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\theta_{\mathbb{S}^2}} & F_2(\mathbb{S}^2)
\end{array}$$

Com efeito, dado  $x \in \mathbb{S}^2$ , temos

$$(\varphi_1 \circ \theta_{-1})(x) = \varphi_1(-x) = (-x, x) = \theta_{\mathbb{S}^2}(x, -x) = (\theta_{\mathbb{S}^2} \circ \varphi_1)(x).$$

Dessa maneira,  $\varphi_1$  induz uma aplicação nos espaços quocientes  $\mathbb{R}P^2$  e  $D_2(\mathbb{S}^2)$ . Tal função, que denotaremos por  $\tilde{\varphi}_1$ , satisfaz  $\tilde{\varphi}_1([x]) = [\varphi_1(x)] = [(x, -x)]$ , para todo  $[x] \in \mathbb{R}P^2$ . Daí,  $\tilde{\varphi}_1 = \psi_1$ .

Em suma, como  $\varphi_1$  é uma equivalência homotópica, ela induz isomorfismos nos grupos de homotopia dos espaços topológicos  $\mathbb{S}^2$  e  $F_2(\mathbb{S}^2)$ . Visto que  $\theta_{-1}$  e  $\theta_{\mathbb{S}^2}$  são ações livres que comutam com  $\varphi_1$ , obtemos que  $\tilde{\varphi}_1 = \psi_1$  induz isomorfismos nos grupos de homotopia de  $\mathbb{R}P^2$  e  $D_2(\mathbb{S}^2)$ , como queríamos.  $\square$

A seguir, vamos introduzir um quociente parcial do  $dn$ -ésimo espaço de configuração de  $\tilde{M}$ .

Defina

$$D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}) := \frac{F_{dn}(\tilde{M})}{\mathcal{S}_d \times \dots \times \mathcal{S}_d},$$

onde, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , a  $i$ -ésima cópia de  $\mathcal{S}_d$  é o grupo de permutações das letras  $d(i-1) + 1, d(i-1) + 2, \dots, d(i-1) + d$ . Defina também

$$B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}) := \pi_1(D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})).$$

*Observação 4.3.* Se  $d = 1$ , o recobrimento  $p$  é de uma folha. Portanto,

$$D_{1,1,\dots,1}(\tilde{M}) = \frac{F_n(\tilde{M})}{\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_1} = F_n(\tilde{M}),$$

pois  $\mathcal{S}_1$  é o grupo simétrico que consiste apenas da permutação identidade. Assim,  $B_{1,1,\dots,1}(\tilde{M}) = \pi_1(F_n(\tilde{M})) = P_n(\tilde{M})$ .

*Observação 4.4.* Se  $n = 1$ , então  $D_d(\tilde{M}) = F_d(\tilde{M})/\mathcal{S}_d$ . Consequentemente, temos que  $B_d(\tilde{M}) = \pi_1(D_d(\tilde{M}))$ . Ou seja, para  $n = 1$ , não há distinção entre realizar o quociente parcial (quocientando por  $\mathcal{S}_d \times \dots \times \mathcal{S}_d$ ) e o total (quocientando por  $\mathcal{S}_{dn}$ ).

Observe que  $D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})$  é um recobrimento intermediário entre  $F_{dn}(\tilde{M})$  e  $D_{dn}(\tilde{M})$ , visto que

$$\frac{F_{dn}(\tilde{M})}{\mathcal{S}_{dn}} = D_{dn}(\tilde{M}) \text{ e } \frac{F_{dn}(\tilde{M})}{\mathcal{S}_d \times \dots \times \mathcal{S}_d} = D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}).$$

*Observação 4.5.*  $B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})$  é um subgrupo de  $B_{dn}(\tilde{M})$  que contém  $P_{dn}(\tilde{M})$ .

De fato, como  $\mathcal{S}_d \times \cdots \times \mathcal{S}_d$  é um subgrupo de  $\mathcal{S}_{dn}$ , podemos considerar as projeções canônicas

$$\begin{aligned} p_1: \quad F_{dn}(\tilde{M}) &\longrightarrow F_{dn}(\tilde{M})/(\mathcal{S}_d \times \cdots \times \mathcal{S}_d) \\ (x_1, \dots, x_{dn}) &\longmapsto [(x_1, \dots, x_{dn})] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_2: \quad F_{dn}(\tilde{M})/(\mathcal{S}_d \times \cdots \times \mathcal{S}_d) &\longrightarrow F_{dn}(\tilde{M})/\mathcal{S}_{dn} \\ [(x_1, \dots, x_{dn})] &\longmapsto [[(x_1, \dots, x_{dn})]]. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que tais funções são aplicações de recobrimento. Então, ao considerarmos os seus respectivos homomorfismos induzidos no grupo fundamental, obtemos que  $(p_1)_\#: \pi_1(F_{dn}(\tilde{M})) \longrightarrow \pi_1(D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}))$  e  $(p_2)_\#: \pi_1(D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})) \longrightarrow \pi_1(D_{dn}(\tilde{M}))$  são homomorfismos. Assim, a menos de isomorfismo, podemos escrever que

$$\pi_1(F_{dn}(\tilde{M})) < \pi_1(D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})) < \pi_1(D_{dn}(\tilde{M})),$$

onde o símbolo  $<$  representa que o conjunto à esquerda do símbolo é subgrupo do grupo à sua direita.

Logo,  $B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})$  é um subgrupo do grupo de  $dn$ -tranças de  $\tilde{M}$  que contém  $P_{dn}(\tilde{M})$  e consiste das  $dn$ -tranças cujas permutações pertencem ao grupo  $\mathcal{S}_d \times \cdots \times \mathcal{S}_d$ .

Agora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n: \quad F_n(M) &\longrightarrow D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [(p^{-1}(x_1), \dots, p^{-1}(x_n))]. \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida e é contínua, pois  $p$  é um recobrimento (em particular, um homeomorfismo local) de  $d$  folhas. Então,  $\tilde{\psi}_n$  induz um homomorfismo nos respectivos grupos fundamentais, isto é,

$$(\tilde{\psi}_n)_\#: \pi_1(F_n(M)) \longrightarrow \pi_1(D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})).$$

*Observação 4.6.* Considere  $i: B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}) \longrightarrow B_{dn}(\tilde{M})$  a inclusão e lembre que  $(\psi_n)_\#: \pi_1(B_n(M)) \longrightarrow \pi_1(B_{dn}(\tilde{M}))$  é o homomorfismo induzido pela aplicação

$$\begin{aligned} \psi_n: \quad D_n(M) &\longrightarrow D_{dn}(\tilde{M}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [(p^{-1}(x_1), \dots, p^{-1}(x_n))]. \end{aligned}$$

Então,  $i \circ (\tilde{\psi}_n)_\# = (\psi_n)_\#|_{\pi_1(B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}))}$ .

Veremos agora que  $(\tilde{\psi}_n)_\#$  é um homomorfismo injetor.

**Proposição 4.7.** *Seja  $n \geq 1$ . Então, a aplicação*

$$(\tilde{\psi}_n)_\#: \pi_1(B_n(M)) \longrightarrow \pi_1(B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}))$$

é um monomorfismo.

*Demonstração.* Se  $d = 1$ , temos o recobrimento é de 1 folha e, portanto,  $p$  é um homeomorfismo global. Assim, segue a tese.

Se  $d \geq 2$ , então  $M \neq \mathbb{S}^2$ , pois a esfera  $\mathbb{S}^2$  é simplesmente conexa. Prosseguiremos a demonstração realizando indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos  $\tilde{\psi}_1 : F_1(M) \rightarrow D_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})$  dada por  $\tilde{\psi}_1(x) = p^{-1}(\{x\})$ . Como  $P_1(M) = B_1(M)$ , podemos escrever que  $\tilde{\psi}_1 = \psi_1$ , de onde segue que  $(\tilde{\psi}_1)_\#$  é injetiva, pelo Lema 4.1.

Mostraremos que a tese é válida para  $n = 2$ . Dividiremos a prova em dois casos:  $M \neq \mathbb{R}P^2$  ou  $M = \mathbb{R}P^2$ .

Se  $M \neq \mathbb{R}P^2$ , fixe  $x_0 \in M$ . Considere  $q : F_2(M) \rightarrow F_2(M)$  a aplicação que esquece a última coordenada. Pelo Teorema 1.31,  $q$  é um fibrado com fibra típica  $F_1(M \setminus \{x_0\})$ . Então, podemos escrever a sequência

$$F_1(M \setminus \{x_0\}) \hookrightarrow F_2(M) \xrightarrow{q} F_1(M).$$

Tal sequência se passa ao quociente e obtemos

$$D_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(x_0)) \hookrightarrow D_{d,d}(\tilde{M}) \xrightarrow{\tilde{q}} D_d(\tilde{M}),$$

sendo  $\tilde{q} : D_{d,d}(\tilde{M}) \rightarrow D_d(\tilde{M})$  a aplicação que esquece as últimas  $d$  coordenadas.

Observe agora que o seguinte diagrama de fibrados, denotado por (1) para futura referência, é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F_1(M \setminus \{x_0\}) & \hookrightarrow & F_2(M) & \xrightarrow{q} & F_1(M) \\ \tilde{\psi}_1|_{M \setminus \{x_0\}} \downarrow & & \tilde{\psi}_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{\psi}_1 \\ D_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_0\})) & \hookrightarrow & D_{d,d}(\tilde{M}) & \xrightarrow{\tilde{q}} & D_d(\tilde{M}) \end{array}$$

De fato, dado  $(x_1, x_2) \in F_2(M)$ , temos que

$$(\tilde{\psi}_1 \circ q)(x_1, x_2) = \tilde{\psi}_1(x_1) = [p^{-1}(\{x_1\})]$$

e

$$(\tilde{q} \circ \tilde{\psi}_2)(x_1, x_2) = \tilde{q}([p^{-1}(\{x_1\}), p^{-1}(\{x_2\})]) = [p^{-1}(\{x_1\})],$$

pela definição de  $\tilde{q}$  e pela forma como definimos o quociente  $D_{d,d}(\tilde{M})$ .

Pela Proposição 1.29 e pelo fato de  $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2$  ser um espaço Eilenberg-MacLane do tipo  $K(\pi, 1)$ , o diagrama acima induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & P_1(M \setminus \{x_0\}) & \longrightarrow & P_2(M) & \longrightarrow & P_1(M) & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow (\tilde{\psi}_1)_\#|_{P_1(M \setminus \{x_0\})} & & \downarrow (\tilde{\psi}_2)_\# & & \downarrow (\tilde{\psi}_1)_\# & & \\
1 & \longrightarrow & B_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_0\})) & \longrightarrow & B_{d,d}(\tilde{M}) & \longrightarrow & B_d(\tilde{M}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Como  $\tilde{\psi}_1 = \psi_1$ , segue que  $(\tilde{\psi}_1)_\# = (\psi_1)_\#$ . Pelo Lema 4.1, as aplicações  $(\tilde{\psi}_1)_\#|_{P_1(M \setminus \{x_0\})}$  e  $(\tilde{\psi}_1)_\#$  são monomorfismos. Pelo Lema dos Cinco<sup>3</sup>, obtemos que  $(\tilde{\psi}_2)_\#$  também é monomorfismo.

A seguir, veremos o que ocorre para  $M = \mathbb{R}P^2$ . Neste caso, o diagrama (1) continua sendo válido. Dessa maneira, a Proposição 1.29 e o fato de  $\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_0\}$  ser conexo por caminhos nos garante a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_2(\mathbb{R}P^2) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_0\}) & \longrightarrow & P_2(\mathbb{R}P^2) & \longrightarrow & P_1(\mathbb{R}P^2) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow (\tilde{\psi}_1)_{2*} & & \downarrow (\tilde{\psi}_1)_\#|_{\pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_0\})} & & \downarrow (\tilde{\psi}_2)_\# & & \downarrow (\tilde{\psi}_1)_\# & & \\
\pi_2(D_d(\mathbb{S}^2)) & \longrightarrow & B_d(\mathbb{S}^2 \setminus p^{-1}(\{x_0\})) & \longrightarrow & B_{d,d}(\mathbb{S}^2) & \longrightarrow & B_d(\mathbb{S}^2) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Pelo Lema 4.2, o homomorfismo  $(\tilde{\psi}_1)_{2*}$  é um epimorfismo. Já pelo Lema 4.1, as aplicações  $(\tilde{\psi}_1)_\#|_{\pi_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \{x_0\})}$  e  $(\tilde{\psi}_1)_\#$  são monomorfismos. Portanto, o Lema nos Cinco afirma que  $(\tilde{\psi}_2)_\#$  é um homomorfismo injetor.

Em suma, mostramos que a tese é válida para  $n = 1, 2$ . Agora, suponha que o homomorfismo

$$(\tilde{\psi}_n)_\#: P_n(M) \longrightarrow B_{d,\dots,d}(\tilde{M})$$

é injetor para algum  $n \geq 2$ .

Veremos que  $(\tilde{\psi}_{n+1})_\#: P_{n+1}(M) \longrightarrow B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M})$  também é um monomorfismo. De antemão, observamos que a argumentação feita nos parágrafos seguintes é muito similar ao que fizemos para o caso  $n = 2$  com  $M \neq \mathbb{R}P^2$ .

Fixe  $\{x_1, \dots, x_n\} \in M$ . Seja

$$\begin{aligned}
q: \quad F_{n+1}(M) & \longrightarrow F_n(M) \\
(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) & \longmapsto (z_1, z_2, \dots, z_n)
\end{aligned}$$

a aplicação projeção nas primeiras  $n$ -coordenadas e considere  $\tilde{q}: D_{d,\dots,d,d}(M) \rightarrow D_{d,\dots,d}(M)$  sua passagem ao quociente, isto é, a aplicação que esquece as últimas  $d$  coordenadas.

Pelo Teorema 1.31,  $q$  é um fibrado com fibra típica  $F_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$ . Consequentemente,  $\tilde{q}$  é um fibrado com fibra típica  $D_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\}))$ . Então, podemos escrever as sequências

$$F_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \hookrightarrow F_{n+1}(M) \xrightarrow{q} F_n(M)$$

<sup>3</sup>Vide Apêndice.

e

$$D_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})) \hookrightarrow D_{d, \dots, d}(\tilde{M}) \xrightarrow{\tilde{q}} D_{d, \dots, d}(\tilde{M}).$$

Além disso, dado  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in F_{n+1}(M)$ , note que

$$(\tilde{\psi}_n \circ q)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \tilde{\psi}_n(x_1, \dots, x_n) = [(p^{-1}(\{x_1\}), \dots, p^{-1}(\{x_n\}))]$$

e

$$\begin{aligned} (\tilde{q} \circ \tilde{\psi}_{n+1})(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \tilde{q}([(p^{-1}(\{x_1\}), \dots, p^{-1}(\{x_n\}), p^{-1}(\{x_{n+1}\}))]) \\ &= [(p^{-1}(\{x_1\}), \dots, p^{-1}(\{x_n\}))], \end{aligned}$$

pela definição da aplicação  $\tilde{q}$  e pelo modo como definimos o quociente  $D_{d, \dots, d}(\tilde{M})$ .

Logo, temos que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} F_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) & \hookrightarrow & F_{n+1}(M) & \xrightarrow{q} & F_n(M) \\ \tilde{\psi}_1|_{M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}} \downarrow & & \tilde{\psi}_{n+1} \downarrow & & \tilde{\psi}_n \downarrow \\ D_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})) & \hookrightarrow & D_{d, \dots, d}(\tilde{M}) & \xrightarrow{\tilde{q}} & D_{d, \dots, d}(\tilde{M}) \end{array}$$

Pela Proposição 1.29 e pelo fato de  $M \neq \mathbb{S}^2$ , o diagrama de fibrados acima induz o seguinte diagrama comutativo nos grupos de homotopia dos espaços correspondentes:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & P_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) & \longrightarrow & P_{n+1}(M) & \longrightarrow & P_n(M) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow (\tilde{\psi}_1)_\#|_{P_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})} & & \downarrow (\tilde{\psi}_{n+1})_\# & & \downarrow (\tilde{\psi}_n)_\# & & \\ 1 & \longrightarrow & B_d(\tilde{M} \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})) & \longrightarrow & B_{d, \dots, d}(\tilde{M}) & \longrightarrow & B_{d, \dots, d}(\tilde{M}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

As aplicações  $(\tilde{\psi}_1)_\#|_{P_1(M \setminus \{x_1, \dots, x_n\})}$  e  $(\tilde{\psi}_n)_\#$  são monomorfismo pelo Lema 4.1 e pela hipótese de indução, respectivamente. Pelo Lema dos Cinco, concluímos que  $(\tilde{\psi}_{n+1})_\#$  também é um homomorfismo injetor.

Portanto, segue que  $(\tilde{\psi}_n)_\#: P_n(M) \longrightarrow B_{d, d, \dots, d}(\tilde{M})$  é um monomorfismo para todo  $n \geq 1$ .  $\square$

A seguir, apresentamos o resultado mais significativo desta seção:

**Teorema 4.8** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *O homomorfismo*

$$(\psi_n)_\#: B_n(M) \longrightarrow B_{dn}(\tilde{M})$$

é injetivo.

*Demonstração.* Seja  $\beta$  uma  $n$ -trança da superfície  $M$  tal que  $\beta \in (\psi_n)_\#^{-1}(P_{dn}(\tilde{M}))$  e  $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , onde  $b_i: [0, 1] \rightarrow M$  é um caminho para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  que satisfaz  $b_i(0) = A_i$  e  $b_i(1) = B_{\pi(\beta)(i)}$ , sendo  $\pi: B_n(M) \rightarrow \mathcal{S}_n$  o homomorfismo permutação.

Agora, considere  $\tilde{b}_i: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  levantamento do caminho  $b_i$  pela aplicação de recobrimento  $p$ . Por construção, como  $p$  é um recobrimento de  $d$  folhas, a  $dn$ -trança  $(\psi_n)_\#(\beta)$  pode ser escrita como

$$(\psi_n)_\#(\beta) = (c_1, c_2, \dots, c_{dn}),$$

sendo que

- i.  $\tilde{b}_i = \bigcup_{k=1}^d c_{i+(k-1)n}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ ;
- ii.  $p(c_{i+(k-1)n}) = b_i$ , para todo  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq k \leq d$ ;
- iii.  $c_j(0) = \tilde{A}_j$  e  $c_j(1) = \tilde{B}_{\tilde{\pi}((\psi_n)_\#(\beta))(j)}$ , para  $1 \leq j \leq dn$ , com  $\tilde{\pi}: B_{dn}(\tilde{M}) \rightarrow \mathcal{S}_{dn}$  o homomorfismo permutação.

Como  $(\psi_n)_\#(\beta)$  é uma  $dn$ -trança pura de  $\tilde{M}$  e pelos itens acima, respectivamente, obtemos que

$$B_j = p(\tilde{B}_{\tilde{\pi}((\psi_n)_\#(\beta))(j)}) = B_{\pi(\beta)(j)}.$$

Logo, a permutação  $\pi(\beta)$  é o elemento identidade de  $\mathcal{S}_n$ . Assim, obtemos que  $\beta \in P_n(M)$ .

Em suma, mostramos que  $(\psi_n)_\#^{-1}(P_{dn}(\tilde{M})) \subset P_n(M)$ .

Agora, considere  $\alpha \in \text{Ker}((\psi_n)_\#)$ . Então,  $(\psi_n)_\#(\alpha)$  é a trança trivial de  $B_{dn}(\tilde{M})$ . Em particular,  $(\psi_n)_\#(\alpha) \in P_{dn}(\tilde{M})$ . Pela inclusão demonstrada acima, temos que

$$\alpha \in (\psi_n)_\#^{-1}(P_{dn}(\tilde{M})) \subset P_n(M).$$

Pela Proposição 4.7 e pela Observação 4.6, podemos escrever que a composição

$$P_n(M) \xrightarrow{(\psi_n)_\#} B_{d,d,\dots,d}(\tilde{M}) \xrightarrow{i} B_{dn}(\tilde{M}).$$

é injetiva, de onde segue que  $\alpha$  é a trança trivial de  $B_n(M)$ .

Portanto, a aplicação  $(\psi_n)_\#: B_n(M) \rightarrow B_{dn}(\tilde{M})$  é um monomorfismo.  $\square$

Em suma, mostramos o

**Teorema 4.9** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $M$  uma superfície compacta, conexa e possivelmente com um número finito de pontos removidos do seu interior. Sejam  $d, n \in \mathbb{N}$  e seja  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento de  $d$  folhas. Então,  $p$  induz um mergulho de  $B_n(M)$  em  $B_{dn}(\tilde{M})$ .*

Observamos que um aspecto importante do Teorema 4.9 é que ele nos permite relacionar os grupos de  $n$ -tranças de uma superfície não-orientável com os grupos de  $dn$ -tranças de seu recobrimento duplo orientado, por exemplo.

**Corolário 4.10.** *O grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real mergulha no grupo de  $2n$ -tranças da esfera.*

Nas seções subsequentes, discutiremos algumas consequências do Corolário 4.10.

## 4.2 Subgrupos finitos de $B_n(\mathbb{R}P^2)$ e $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$

Nesta seção, veremos a classificação dos subgrupos finitos do grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real e dos subgrupos finitos do grupo  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$ , sendo que este último é o grupo dos homeomorfismos de  $\mathbb{R}P^2$  que deixam um conjunto de  $n$  pontos distintos invariante módulo isotopia.

**Proposição 4.11** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $n \geq 3$  e seja  $H$  um subgrupo finito de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Então,  $H$  é isomorfo a um subgrupo de um dos grupos a seguir:*

$$\text{Dic}_{8n}, \text{Dic}_{8(n-1)}, \text{O}^* \text{ se } n \equiv 0, 1 \pmod{3} \text{ ou } \text{I}^* \text{ se } n \equiv 0, 1, 6, 10 \pmod{15}.$$

*Demonstração.* Considere  $(\psi_n)_\# : B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow B_{2n}(\mathbb{S}^2)$ , como no Teorema 4.8. Seja  $m$  a ordem de  $H$ . Então,  $(\psi_n)_\#(H)$  é um subgrupo de  $B_{2n}(\mathbb{S}^2)$  isomorfo a  $H$ , visto que  $(\psi_n)_\#$  é monomorfismo. Em particular,  $(\psi_n)_\#(H)$  é de ordem  $m$ .

Pelo Teorema 3.23, segue que  $H$  é isomorfo a um subgrupo de um dos grupos finitos maximais de  $B_{2n}(\mathbb{S}^2)$ , que são:

- (a)  $\mathbb{Z}_{2(2n-1)}$ , pois  $n \geq 3$ ;
- (b)  $\text{Dic}_{8n}$ ;
- (c)  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ , se  $n \geq 4$ ;
- (d)  $\text{T}^*$ , se  $2n \equiv 4 \pmod{6}$ , isto é,  $n \equiv 2 \pmod{3}$ ;
- (e)  $\text{O}^*$ , se  $2n \equiv 0, 2 \pmod{6}$ , isto é,  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ;
- (f)  $\text{I}^*$ , se  $2n \equiv 0, 2, 12, 20 \pmod{30}$ , isto é,  $n \equiv 0, 1, 6, 10 \pmod{15}$ .

Veremos que os casos (a) e (d) podem ser vistos como parte do caso (b), por exemplo.

Primeiramente, trataremos do caso (a). Se  $(\psi_n)_\#(H)$  é um subgrupo de  $\mathbb{Z}_{2(2n-1)}$ , então  $H$  é cíclico de ordem  $m$ . Daí,  $m$  divide  $2(2n-1)$ . Por outro lado,  $m$  divide a torção de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , que é  $4n$  e  $4(n-1)$ , pela Proposição 3.39 (a). Porém,

$$\text{mdc}(2n-1, 2n) = \text{mdc}(2n, 2(n-1)) = 1.$$



Assim,  $m = 1$  ou  $m = 2$ .

Se  $m = 1$ , então  $H$  é o subgrupo trivial e pode ser visto como subgrupo de  $\text{Dic}_{8n}$ , por exemplo. Se  $m = 2$ , considere

$$\text{Dic}_{8n} = \langle s, t \mid t^2 = s^{2n}, t^{-1}st = s^{-1} \rangle$$

e observe que  $\langle t^2 \rangle$  tem ordem 2. Dessa forma,  $H$  pode ser realizado como um subgrupo de  $\text{Dic}_{8n}$ .

A seguir, estudaremos o caso (d). Pelo Lema 1.10, sabemos que  $T^* \cong \mathcal{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_3$ . Suponha que  $n \equiv 2 \pmod{3}$  e que  $H$  é um subgrupo de  $T^*$  não contido no fator  $\mathcal{Q}_8$ . Então, existem elementos de ordem 3 em  $H$ . Dessa maneira, 3 divide a torção de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Daí, 3 divide  $4n$  ou 3 divide  $4(n-1)$ , devido à Proposição 3.39 (a). Como  $\text{mdc}(3, 4) = 1$ , segue que 3 divide  $n$  ou 3 divide  $n-1$ , o que contradiz o fato de que tomamos  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Logo,  $H$  é isomorfo a um subgrupo de  $\mathcal{Q}_8$ , que pode ser realizado como um subgrupo de  $\text{Dic}_{8n}$ , pelo 1.6.  $\square$

Em seguida, apresentamos uma prova de que os grupos listados na Proposição 4.11 são, de fato, realizados como subgrupos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

**Proposição 4.12** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Sejam  $n \geq 3$  e  $H$  um dos seguintes grupos:*

$$\text{Dic}_{8n}, \text{Dic}_{8(n-1)}, \text{O}^* \text{ se } n \equiv 0, 1 \pmod{3} \text{ ou } \text{I}^* \text{ se } n \equiv 0, 1, 6, 10 \pmod{15}.$$

*Então,  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  contém um subgrupo isomorfo a  $H$ .*

*Demonstração.* Seja  $X \subset \mathbb{R}P^2$  um conjunto consistindo de  $n$  elementos distintos e considere

$$\begin{aligned} p : \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}P^2 \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

a projeção canônica.

Seja  $H$  como no enunciado da proposição e considere  $G$  o quociente de  $H$  pelo seu subgrupo normal de ordem 2, como descrito nos Lemas 1.8, 1.12 e 1.14. Portanto,

$$G \cong \begin{cases} \text{Dih}_{2n}, & \text{se } H = \text{Dic}_{8n} \\ \text{Dih}_{2(n-1)}, & \text{se } H = \text{Dic}_{8(n-1)} \\ \mathcal{S}_4, & \text{se } H = \text{O}^* \\ \mathcal{A}_5, & \text{se } H = \text{I}^*. \end{cases}$$

Note que, pelas Observações 1.7 e 1.15,  $G$  pode ser realizado como subgrupo de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2, \tilde{X})$ . Assumiremos nesta prova, sem perda de generalidade, que os pontos de  $\tilde{X}$  estão simetricamente dispostos com respeito ao poliedro regular associado a  $G$ .

Considere  $\tau : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  a aplicação antipodal, isto é,  $\tau(x) = -x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Observe que  $\tau$  não preserva orientação. Mais ainda,  $\tau \in \text{Homeo}(\mathbb{S}^2, \tilde{X}) \setminus \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2, \tilde{X})$

e comuta com rotações. Em particular,  $\tau$  comuta com todos os elementos de  $G$ . Assim, o grupo  $G$  pode ser visto como subgrupo de

$$\Gamma = \{\gamma \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2, \tilde{X}); \gamma \circ \tau = \tau \circ \gamma\}.$$

Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , considere a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : \mathbb{R}P^2 &\longrightarrow \mathbb{R}P^2 \\ [y] &\longmapsto p(\gamma(x)), \end{aligned}$$

sendo  $x \in p^{-1}([y])$ . Observe que, como  $p^{-1}([y]) = \{y, -y\}$ , temos

$$p(\gamma(-y)) = p(\gamma(\tau(y))) = p(\tau(\gamma(y))) = p(-\gamma(y)) = p(\gamma(y)),$$

pois  $\gamma$  comuta com  $\tau$  e pela definição de  $p$ . Daí,  $\hat{\gamma}$  está bem definida. Além disso, como  $\gamma$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{S}^2$  que deixa  $\tilde{X} = p^{-1}(X)$  invariante, obtemos que  $\hat{\gamma}$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}P^2$  que deixa  $X$  invariante. Com efeito, dado  $y \in X$ , podemos escrever que  $\hat{\gamma}(y) = p(\gamma(x))$ , com  $x \in p^{-1}(y) \subset \tilde{X}$ . Logo,

$$\hat{\gamma}(y) = p(\gamma(x)) = p(z) \in X,$$

visto que  $\gamma \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^2, \tilde{X})$  e  $p(p^{-1}(X)) \subset X$ , sendo  $z \in \tilde{X}$  tal que  $\gamma(x) = z$ .

Como  $\hat{\gamma}$  é um homeomorfismo que deixa  $X$  invariante, fica bem definido o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma &\longrightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X) \\ \gamma &\longmapsto \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Veamos que  $\psi$  é um monomorfismo. Seja  $\gamma \in \text{Ker}(\psi)$ . Então,  $\psi(\gamma) = \text{Id}_{\mathbb{R}P^2}$  e podemos escrever o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{S}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{R}P^2}} & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Pela comutatividade do diagrama acima, dado  $x \in \mathbb{S}^2$ , temos

$$[\gamma(x)] = p(\gamma(x)) = (p \circ \gamma)(x) = (\text{Id}_{\mathbb{R}P^2} \circ p)(x) = p(x) = [x].$$

Daí,  $[\gamma(x)] = [x]$ . Assim,  $\gamma(x) = x$  ou  $\gamma(x) = -x$ . Pela arbitrariedade de  $x$ , segue que  $\gamma = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  ou  $\gamma = \tau$ . Como  $\tau$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{S}^2$  que não preserva orientação, concluímos que  $\gamma = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ . Portanto,  $\psi$  é um homomorfismo injetor. Assim,  $\psi(G) \cong G$  e  $G$  pode ser realizado como subgrupo de  $\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X)$ .

Lembre-se que queremos mostrar que o grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real contém um subgrupo isomorfo a  $H$ . Para isso, prosseguimos a demonstração utilizando

o *mapping class group* de  $\mathbb{R}P^2$  para relacionar o grupo  $\text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X)$  com  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Denote por  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, X)$  o *mapping class group* de  $\mathbb{R}P^2$  relativo a  $X$ .

Seja  $\varphi : \text{Homeo}(\mathbb{R}P^2, X) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, X)$  a projeção canônica de um homomorfismo de  $\mathbb{R}P^2$  que deixa  $X$  invariante em sua classe de isotopia. Veremos que a aplicação  $\varphi$  restrita ao conjunto  $\psi(G)$  é um monomorfismo.

Seja  $f \in \psi(G) \cap \text{Ker}(\varphi)$ . Então, existe  $g \in G$  tal que  $\psi(g) = f$ , sendo  $f : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$  homeomorfismo relativo a  $X$  que satisfaz  $\varphi(f) = [\text{Id}_{\mathbb{R}P^2}]$ . Como  $[f] = [\text{Id}_{\mathbb{R}P^2}]$ , existe  $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$  isotopia de  $\text{Id}_{\mathbb{R}P^2}$  até  $f$  relativo a  $X$ . Esta isotopia levanta-se a uma isotopia  $\{\tilde{f}_t\}_{t \in [0,1]}$  relativa a  $\tilde{X}$  de  $\text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  até  $\tilde{f}$ , sendo  $\tilde{f}$  um levantamento de  $f$ .

Visto que  $[\text{Id}(\mathbb{S}^2)] = [\tilde{f}]$  em  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^2, X)/\sim$ , sendo  $\sim$  a relação de isotopia, segue que  $\tilde{f} \in \Gamma$ . Dessa maneira,  $\psi(\tilde{f}) = f = \psi(g)$ . Por injetividade de  $\psi$ , obtemos que  $\tilde{f} = g$ . Como a isotopia  $\{\tilde{f}_t\}_{t \in [0,1]}$  deixa o conjunto  $\tilde{X}$  invariante,  $g \in G$  é um homeomorfismo de  $(\mathbb{S}^2, \tilde{X})$  que preserva orientação e possui ordem finita, já que o grupo  $G$  é finito. Por Eilenberg [10] e Von Kerékjártó [41], todo homeomorfismo de  $\mathbb{S}^2$  que preserva orientação e possui ordem finita é topologicamente conjugado a uma rotação rígida. Logo, como  $g$  possui pontos fixos por construção, segue que  $g = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$  e, conseqüentemente,  $f = \psi(g) = \text{Id}_{\mathbb{R}P^2}$ , pois  $\psi$  é um homomorfismo. Assim, provamos que  $\varphi$  restrita ao espaço  $\psi(G)$  é injetiva. Portanto,  $\varphi(\psi(G)) \cong \psi(G) \cong G$ . Ou seja, obtemos que existe um subgrupo de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, X)$  isomorfo a  $G$ .

Agora, considere a seqüência exata curta obtida no Teorema 3.40:

$$1 \longrightarrow \langle \Delta_n^2 \rangle \longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n) \longrightarrow 1.$$

Por [16] (Comentário 2.1), sendo  $B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$  um operador bordo e pelo Teorema 4.9,  $G$  se levanta a uma cópia isomorfa de  $H$  em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .  $\square$

As Proposições 4.11 e 4.12 nos permitem classificar os subgrupos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Assim, fica provado o

**Teorema 4.13** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $n \geq 2$ . Os subgrupos finitos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  são isomorfos a subgrupos dos seguintes grupos:*

- (a)  $\text{Dic}_{8n}$ ;
- (b)  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ ;
- (c)  $O^*$ , se  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ;
- (d)  $I^*$ , se  $n \equiv 0, 1, 6, 10 \pmod{15}$ .

Observe que o Teorema 4.13 implica que os grupos citados são maximais em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Utilizando este fato, os autores de [17] classificaram os subgrupos finitos de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$ , por meio de uma prova alternativa à feita por Bujalance, Cirre e Gamboa em [7].

**Teorema 4.14** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $n \geq 2$ . Os subgrupos finitos de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$  são isomorfos a subgrupos dos seguintes grupos:*

- (a)  $\text{Dih}_{2n}$ ;
- (b)  $\text{Dih}_{2(n-1)}$ , se  $n \geq 3$ ;
- (c)  $\mathcal{S}_4$ , se  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ ;
- (d)  $\mathcal{A}_5$ , se  $n \equiv 0, 1, 6, 10 \pmod{15}$ .

*Demonstração.* Por Gonçalves e Guaschi [16], podemos afirmar que a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \langle \Delta_n^2 \rangle \longrightarrow B_n(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n) \longrightarrow 1,$$

obtida no Teorema 3.40, induz uma bijeção entre os subgrupos finitos maximais de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  e os subgrupos finitos maximais de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$ . Lembre-se que os subgrupos finitos maximais de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  satisfazem

- i.  $\text{Dic}_{8(n-1)}/\langle y^2 \rangle \cong \text{Dih}_{2(n-1)}$ , se  $n \geq 3$ ;
- ii.  $O^*/\langle s^3 \rangle \cong \mathcal{S}_4$ ;
- iii.  $I^*/\langle s^3 \rangle \cong \mathcal{A}_5$ ,

sendo que os grupos  $\langle y^2 \rangle$ ,  $\langle s^3 \rangle$  e  $\langle s^3 \rangle$  são os únicos subgrupos normais de ordem 2 de  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ ,  $O^*$  e  $I^*$ , respectivamente, bem como  $\langle \Delta_n^2 \rangle$  é o único subgrupo de ordem 2 do grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real, pela Proposição 3.39 (c).

Neste contexto, [16] (Comentário 2.1) nos garante que os subgrupos finitos maximais de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$  são

$$\text{Dih}_{2(n-1)}, \text{ se } n \geq 3; \mathcal{S}_4 \text{ e } \mathcal{A}_5.$$

Finalizamos salientando que, como tomamos  $n \geq 2$  inicialmente,  $n + 1 \geq 3$  e, portanto,  $\text{Dih}_{2(n+1-1)} = \text{Dih}_{2n}$  é um subgrupo finito maximal de  $\mathcal{MCG}(\mathbb{R}P^2, n)$  para todo  $n \geq 2$ .  $\square$

### 4.3 Subgrupos finitos dicíclicos de $B_n(\mathbb{R}P^2)$

Nesta seção, mostraremos que os grupos  $\text{Dic}_{8n}$  e  $\text{Dic}_{8(n-1)}$  são realizados como subgrupos do grupo de  $n$ -tranças do plano projetivo real, para todo  $n \geq 2$ . Para isso, explicitaremos realizações algébricas de tais subgrupos.

Defina

$$a = \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1 \text{ e } b = \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1$$

elementos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , com  $n \geq 2$ . Em [15], Gonçalves e Guaschi mostraram que  $a$  e  $b$  possuem as seguintes propriedades:

**Proposição 4.15** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *A  $n$ -trança  $a$  é um elemento de ordem  $4n$ , enquanto a ordem de  $b$  é  $4(n-1)$ .*

A demonstração desta proposição segue de manipulações algébricas envolvendo identidades obtidas através da apresentação do grupo  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  e da forte relação que os elementos  $a$  e  $b$  têm com as tranças half twist e full twist. Vamos delinear as ideias contidas na prova. Primeiro, mostra-se que  $a^{2n} = \Delta_n^2$  a partir do fato de que  $a^{2n}$  é um elemento não trivial de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  que comuta com  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1$  e, conseqüentemente, com todos os geradores do grupo de tranças com  $n$  cordas do plano projetivo. Como o centro de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  é o subgrupo de ordem 2 gerado por  $\Delta_n^2$ , segue a igualdade desejada. Daí,  $a^{4n} = (a^{2n})^2 = (\Delta_n^2)^2 = 1$ . Salientamos que isto não é suficiente para afirmar que a ordem de  $a$  é  $4n$ . Por isso, os autores também mostram que  $2n$  divide a ordem do elemento  $a$  e, portanto,  $a$  tem ordem  $4n$ . Com este resultado, a verificação da ordem de  $b$  é realizada de uma maneira similar, porém, ligeiramente mais simples, visto que  $b = \sigma_{n-1}a$ .

Após a apresentação de uma série de igualdades envolvendo os geradores de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  e os elementos  $a$  e  $b$ , os autores de [15] sinalizam os seguintes resultados:

**Proposição 4.16** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *As  $n$ -tranças do plano projetivo real,  $a$  e  $b$ , satisfazem*

$$a^n = \rho_n \dots \rho_1 \text{ e } b^{n-1} = \rho_{n-1} \dots \rho_1.$$

**Proposição 4.17** (Gonçalves e Guaschi, [15]). *Os elementos  $a, b \in B_n(\mathbb{R}P^2)$  satisfazem:*

(a) *A conjugação por  $a^{-1}$  permuta ciclicamente os elementos:*

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, a^{-1}\sigma_{n-1}a, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}, a^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}a;$$

(b) *A conjugação por  $a^{-1}$  permuta ciclicamente os elementos:*

$$\rho_1, \dots, \rho_n, \rho_1^{-1}, \dots, \rho_n^{-1};$$

(c) *A conjugação por  $b^{-1}$  permuta ciclicamente os elementos:*

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}, b^{-1}\sigma_{n-2}b, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-2}^{-1}, b^{-1}\sigma_{n-2}^{-1}b.$$

Para que não haja ambigüidade em relação à ordem em que a conjugação é feita, faremos um exemplo.

**Exemplo 4.18.** Pela Proposição 4.17 (a), podemos escrever  $a^{-1}(a^{-1}\sigma_{n-1}a)a = \sigma_1^{-1}$ .

Em seguida, estudaremos a realização algébrica dos subgrupos cíclicos finitos maximais de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , bem como dos subgrupos dicíclicos citados no início desta seção.

*Observação 4.19.* Pela Proposição 3.39 (a), os subgrupos cíclicos finitos maximais do grupo de  $n$ -tranças de  $\mathbb{R}P^2$  são  $\mathbb{Z}_{4n}$  e  $\mathbb{Z}_{4(n-1)}$ . Mais ainda, como a ordem de  $a$  é  $4n$  e  $b$  é um elemento de ordem  $4(n-1)$ , temos que

$$\mathbb{Z}_{4n} \cong \langle a \rangle \text{ e } \mathbb{Z}_{4(n-1)} \cong \langle b \rangle.$$

Antes de prosseguirmos para a realização algébrica dos subgrupos  $\text{Dic}_{8n}$  e  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ , apresentaremos um lema.

**Lema 4.20.** *Seja  $n \geq 2$ . Então, em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , temos*

$$\Delta_n(\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1})\Delta_n^{-1} = \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1}.$$

*Demonstração.* Pela Observação 3.35, para  $1 \leq i \leq n-1$ , temos que  $\Delta_n \sigma_{n-i} \Delta_n^{-1} = \sigma_i$ . Então,  $\Delta_n \sigma_{n-i}^{-1} \Delta_n^{-1} = \sigma_i^{-1}$ . Utilizando esta última identidade, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \Delta_n(\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1})\Delta_n^{-1} &= \Delta_n \sigma_{n-1}^{-1} (\Delta_n^{-1} \Delta_n) \sigma_{n-2}^{-1} (\Delta_n^{-1} \Delta_n) \sigma_{n-3}^{-1} \dots \sigma_2^{-1} (\Delta_n^{-1} \Delta_n) \sigma_1^{-1} \Delta_n^{-1} \\ &= (\Delta_n \sigma_{n-1}^{-1} \Delta_n^{-1}) (\Delta_n \sigma_{n-2}^{-1} \Delta_n^{-1}) \dots (\Delta_n \sigma_2^{-1} \Delta_n^{-1}) (\Delta_n \sigma_1^{-1} \Delta_n^{-1}) \\ &= \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 4.21** (Gonçalves e Guaschi, [17]). *Seja  $n \geq 2$ . Então, valem os seguintes itens:*

(a)  $\langle a, \Delta_n \rangle \cong \text{Dic}_{8n}$ ;

(b)  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle \cong \text{Dic}_{8(n-1)}$ .

*Demonstração.* (a) Pela Proposição 4.15, o elemento  $a$  é de ordem  $4n$ . Então,  $a^{2n}$  tem ordem 2. Pela Proposição 3.39 (c),  $a^{2n} = \Delta_n^2$ , devido à unicidade do elemento de ordem 2 em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

Observe que

$$\begin{aligned} \Delta_n a \Delta_n^{-1} &= \Delta_n(\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1)\Delta_n^{-1} \\ &= \Delta_n(\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1})(\Delta_n^{-1} \rho_n^{-1} \Delta_n)\Delta_n^{-1}, \text{ pelo Lema 3.36 (para } i=1) \\ &= (\Delta_n \sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \Delta_n^{-1}) \rho_n^{-1} \\ &= \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1} \rho_n^{-1}, \text{ pelo Lema 4.20} \\ &= (\rho_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_1)^{-1} \\ &= (\sigma_{n-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \rho_1)^{-1}, \text{ pelo Lema 3.30 (a) (para } j=n) \\ &= a^{-1}. \end{aligned}$$

Daí,  $\Delta_n a \Delta_n^{-1} = a^{-1}$ . Assim,  $\Delta_n a^{-1} \Delta_n^{-1} = a$ , de onde segue que  $a^{-1} = \Delta_n^{-1} a \Delta_n$ .

Portanto, o grupo  $\langle a, \Delta_n \rangle$  satisfaz  $|a| = 4n$ ,  $|\Delta_n| = 4$ ,  $a^{2n} = \Delta_n^2$  e  $a^{-1} = \Delta_n^{-1} a \Delta_n$ . Como

$$\text{Dic}_{8n} \cong \langle s, t \mid t^2 = s^{2n}; t^{-1} s t = s^{-1} \rangle,$$

sendo  $t$  elemento de ordem 4 e  $s$  de ordem  $4n$ , pela correspondência natural  $a \mapsto s$  e  $\Delta_n \mapsto t$ , obtemos que  $\langle a, \Delta_n \rangle$  é isomorfo a algum quociente do grupo dicíclico de ordem  $8n$ .

Note agora que a trança half twist  $\Delta_n$  não é uma trança pura e tem ordem 4. Já os elementos de ordem 4 do subgrupo gerado por  $a$  são os elementos  $a^n$  e  $a^{3n}$ , sendo que ambos são tranças puras de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  pela descrição dada na Proposição 4.16. Dessa maneira,  $\Delta_n \notin \langle a \rangle$ . Assim, visto que  $|\langle a \rangle| = 4n$ , o subgrupo  $\langle a, \Delta_n \rangle$  tem, no mínimo,  $4n + 1$  elementos distintos. Pelo Teorema de Lagrange, a cardinalidade de  $\langle a, \Delta_n \rangle$  deve dividir  $8n$ , que é a ordem de  $\text{Dic}_{8n}$ . Portanto,  $\langle a, \Delta_n \rangle$  tem  $8n$  elementos e

$$\langle a, \Delta_n \rangle \cong \text{Dic}_{8n}.$$

(b) Pela Proposição 4.15, a ordem de  $b$  é  $4(n-1)$ . Do item mostrado acima, podemos escrever que

$$\langle a, \Delta_n \rangle \cong \langle a, \Delta_n \mid \Delta_n^2 = a^{2n}; \Delta_n^{-1} a \Delta_n = a^{-1} \rangle,$$

sendo que a ordem de  $a$  é  $4n$ , enquanto a ordem de  $\Delta_n$  é igual a 4.

Veremos que o elemento  $\Delta_n a^{-1}$  tem ordem 4.

Observe que

$$\begin{aligned} (\Delta_n a^{-1})^4 &= \Delta_n (a^{-1}) \Delta_n a^{-1} \Delta_n (a^{-1}) \Delta_n a^{-1} \\ &= \Delta_n (\Delta_n^{-1} a \Delta_n) \Delta_n a^{-1} \Delta_n (\Delta_n^{-1} a \Delta_n) \Delta_n a^{-1} \\ &= (\Delta_n \Delta_n^{-1}) a \Delta_n^2 (a^{-1} \Delta_n \Delta_n^{-1} a) \Delta_n^2 a^{-1} \\ &= a \Delta_n^2 \Delta_n^2 a^{-1} \\ &= a \Delta_n^4 a^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} (\Delta_n a^{-1})^2 &= \Delta_n (a^{-1}) \Delta_n a^{-1} \\ &= (\Delta_n \Delta_n^{-1}) a \Delta_n \Delta_n a^{-1} \\ &= a (\Delta_n^2) a^{-1} \\ &= a a^{2n} a^{-1} \\ &= a^{2n} \\ &\neq 1. \end{aligned}$$

Note ainda que, se tivéssemos  $\Delta_n a^{-1} = 1$ , então  $\Delta_n = a$ . Porém,  $a$  tem ordem  $4n$  e  $\Delta_n$  tem ordem 4. Como  $n \geq 2$ , segue que  $\Delta_n a^{-1} \neq 1$ .

Daí, concluímos que  $\Delta_n a^{-1}$  é tem ordem 4. Consequentemente,  $(\Delta_n a^{-1})^2$  é um elemento de ordem 2 em  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , assim como  $b^{2(n-1)}$ . Pela Proposição 3.39 (c), segue que

$$(\Delta_n a^{-1})^2 = \Delta_n^2 = b^{2(n-1)}.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} (\Delta_n a^{-1})b(\Delta_n a^{-1})^{-1} &= \Delta_n a^{-1}(b)a\Delta_n^{-1} \\ &= \Delta_n a^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}\rho_1 a\Delta_n^{-1} \\ &= \Delta_n a^{-1}\sigma_{n-2}^{-1}(aa^{-1})\sigma_{n-3}^{-1}(aa^{-1})\sigma_{n-4}^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}(aa^{-1})\sigma_1^{-1}(aa^{-1})\rho_1 a\Delta_n^{-1} \\ &= \Delta_n (a^{-1}\sigma_{n-2}^{-1}a)(a^{-1}\sigma_{n-3}^{-1}a) \cdots (a^{-1}\sigma_2^{-1}a)(a^{-1}\sigma_1^{-1}a)(a^{-1}\rho_1 a)\Delta_n^{-1} \\ &= \Delta_n \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(a^{-1}\rho_1 a)\Delta_n^{-1}, \text{ pela Proposição 4.17(a)} \\ &= \Delta_n \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\rho_2 \Delta_n^{-1}, \text{ pela Proposição 4.17(b)} \\ &= \Delta_n \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}(\Delta_n^{-1}\Delta_n)\rho_2 \Delta_n^{-1} \\ &= (\Delta_n \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\Delta_n^{-1})(\Delta_n \rho_2 \Delta_n^{-1}) \\ &= (\Delta_n \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\Delta_n^{-1})\rho_{n-1}^{-1}, \text{ pelo Lema 3.36 (para } i = n-1) \\ &= \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{n-2}^{-1}\rho_{n-1}^{-1}, \text{ pela demonstração do Lema 4.20} \\ &= (\rho_{n-1}\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^{-1} \\ &= (\sigma_{n-2}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}\rho_1)^{-1}, \text{ pelo Lema 3.30 (para } j = n-1) \\ &= b^{-1}. \end{aligned}$$

Daí,  $(\Delta_n a^{-1})b(\Delta_n a^{-1})^{-1} = b^{-1}$ . Então,  $(\Delta_n a^{-1})^{-1}b^{-1}(\Delta_n a^{-1}) = b$ , de onde segue que  $(\Delta_n a^{-1})^{-1}b(\Delta_n a^{-1}) = b^{-1}$ .

Logo, temos que  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle$  satisfaz  $|b| = 4(n-1)$ ,  $|\Delta_n a^{-1}| = 4$ ,  $b^{2(n-1)} = (\Delta_n a^{-1})^2$  e  $(\Delta_n a^{-1})^{-1}b(\Delta_n a^{-1}) = b^{-1}$ . Visto que

$$\text{Dic}_{8(n-1)} \cong \langle s, t \mid t^2 = s^{2(n-1)}; t^{-1}st = s^{-1} \rangle,$$

sendo  $t$  elemento de ordem 4 e  $s$  de ordem  $4(n-1)$ , realizando a correspondência dada por  $b \mapsto s$  e  $\Delta_n a^{-1} \mapsto t$ , obtemos que  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle$  é isomorfo a algum quociente do grupo dicíclico de ordem  $8(n-1)$ .

Por um argumento de cardinalidade, veremos que  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle \cong \text{Dic}_{8(n-1)}$ .

Faremos o caso  $n = 2$  separadamente. Recordemos que, pelo Teorema 3.26, uma apresentação para  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  é dada por

$$\langle \sigma_1, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_1 = \sigma_1 \rho_2 \sigma_1; \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1 = \sigma_1^2; \rho_1^2 = \sigma_1^2 \rangle.$$

Por definição,  $b = \rho_1$  e  $\Delta_2 a^{-1} = \sigma_1(\sigma_1^{-1}\rho_1)^{-1} = \sigma_1 \rho_1^{-1} \sigma_1$ . Então,



$$\begin{aligned}
(\Delta_2 a^{-1})^2 &= (\sigma_1 \rho_1^{-1} \sigma_1)^2 \\
&= \sigma_1 \rho_1^{-1} (\sigma_1^2) \rho_1^{-1} \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \rho_1^{-1} \rho_1^2 \rho_1^{-1} \sigma_1 \\
&= \sigma_1^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\Delta_2 a^{-1})^3 &= (\sigma_1 \rho_1^{-1} \sigma_1)^3 \\
&= \sigma_1 \rho_1^{-1} (\sigma_1^2) \rho_1^{-1} (\sigma_1^2) \rho_1^{-1} \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \rho_1^{-1} (\rho_1^2) \rho_1^{-1} (\rho_1^2) \rho_1^{-1} \sigma_1 \\
&= \sigma_1 (\rho_1^{-1} \rho_1^2 \rho_1^{-1}) \rho_1^2 \rho_1^{-1} \sigma_1 \\
&= \sigma_1 (\rho_1^2 \rho_1^{-1}) \sigma_1 \\
&= \sigma_1 \rho_1 \sigma_1.
\end{aligned}$$

Como  $\Delta_2 a^{-1}$  tem ordem 4, podemos escrever que  $\langle \Delta_2 a^{-1} \rangle = \{1, \sigma_1 \rho_1^{-1} \sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_1 \rho_1 \sigma_1\}$ . Logo,  $b = \rho_1 \notin \langle \Delta_2 a^{-1} \rangle$  e obtemos que  $\langle b, \Delta_2 a^{-1} \rangle$  tem, no mínimo, 5 elementos distintos. Pelo Teorema de Lagrange, a cardinalidade de  $\langle b, \Delta_2 a^{-1} \rangle$  deve dividir 8, que é a ordem do grupo dicíclico de ordem 8. Portanto,  $|\langle b, \Delta_2 a^{-1} \rangle| = 8$  e  $\langle b, \Delta_2 a^{-1} \rangle \cong \text{Dic}_8$ .

Para  $n \geq 3$ , por verificação direta, constata-se que  $\Delta_n a^{-1}$  não é uma trança pura. Vimos também que ela tem ordem 4. Os elementos do subgrupo gerado por  $b$  que possuem ordem 4 são  $b^{n-1}$  e  $b^{3(n-1)}$ , sendo que ambos são tranças puras. Dessa maneira, temos que  $\Delta_n a^{-1} \notin \langle b \rangle$ , de onde segue que a cardinalidade do grupo  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle$  é, no mínimo,  $4(n-1) + 1$ . Como a ordem de  $\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle$  deve dividir a ordem do grupo  $\text{Dic}_{8(n-1)}$ , concluímos que  $|\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle| = 8(n-1)$  e, portanto,

$$\langle b, \Delta_n a^{-1} \rangle \cong \text{Dic}_{8(n-1)}.$$

□



# Apêndice A

## Alguns Resultados de Álgebra

### A.1 Apresentação de Grupos

A finalidade desta seção é demonstrar que todo grupo admite uma apresentação, bem como provar que, dada uma aplicação definida apenas nos geradores de um grupo e que satisfaz suas relações, podemos estendê-la para um homomorfismo. Para isto, iniciaremos o nosso estudo introduzindo conceitos que nos permitirão apresentar a definição de grupo livre.

Em toda esta seção, salvo quando mencionado o contrário, considere  $X$  um conjunto não vazio. Defina  $X^{-1}$  um conjunto com a mesma cardinalidade de  $X$  e que satisfaz  $X \cap X^{-1} = \emptyset$ . Os elementos de  $X^{-1}$  serão denotados por  $x^{-1}$ . Considere também um conjunto disjunto de  $X \cup X^{-1}$  que possua apenas um elemento, denotado por 1.

**Definição A.1.** Uma palavra em  $X$  é uma sequência  $(a_1, a_2, \dots)$ , com  $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$  e  $i \in \mathbb{N}$ , tal que existe  $n \in \mathbb{N}$  que satisfaz  $a_k = 1$  para todo  $k \geq n$ .

A sequência constante  $(1, 1, \dots)$  é chamada de **palavra vazia** e será denotada por 1.

**Definição A.2.** Uma palavra  $(a_1, a_2, \dots)$  no conjunto  $X$  é dita ser reduzida quando

- i) Os elementos  $x$  e  $x^{-1}$  não são adjacentes, para todo  $x \in X$ ;
- ii)  $a_k = 1 \Rightarrow a_i = 1$  para todo  $i \geq k$ .

Em particular, a palavra vazia é reduzida.

Pelas duas definições dadas acima, toda palavra não-vazia reduzida de  $X$  é da forma

$$(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \dots),$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X$  e  $\lambda_i = \pm 1$ . Representaremos esta palavra por  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$  e denotaremos por  $F(X)$  o conjunto de todas as palavras reduzidas de  $X$ .

**Definição A.3.** Duas palavras reduzidas  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$  e  $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$  de  $X$  são ditas iguais quando ambas são a palavra vazia ou temos  $m = n$ ,  $x_i = y_i$  e  $\lambda_i = \delta_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Para que possamos fornecer ao conjunto  $F(X)$  uma estrutura algébrica, vamos muní-lo da operação justaposição seguida de simplificações, caso necessário. Mais precisamente, temos a

**Definição A.4.** Seja  $X$  um conjunto e  $F(X)$  o conjunto de palavras reduzidas de  $X$ . Considere  $1, w \in F(X)$  e defina  $1w = w1 = w$ . Agora, sejam  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$  e  $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$  elementos de  $F(X)$ . Primeiro, consideramos a palavra formada pela justaposição, isto é,

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}.$$

Se  $x_n^{\lambda_n} \neq y_1^{-\delta_1}$ , então definimos

$$(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n})(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}) := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}.$$

Caso contrário, precisaremos analisar dois casos.

- i. Se  $n \leq m$ , considere  $k$  o maior inteiro tal que  $x_n^{\lambda_n} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ , sendo  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Portanto,

$$(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n})(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}) := \begin{cases} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_{n-k}^{\lambda_{n-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} y_{k+2}^{\delta_{k+2}} \dots y_m^{\delta_m}, & \text{se } k < n \\ y_{n+1}^{\delta_{n+1}} y_{n+2}^{\delta_{n+2}} \dots y_m^{\delta_m}, & \text{se } k = n < m \\ 1, & \text{se } k = n = m. \end{cases}$$

- ii. Se  $m \leq n$ , considere  $k$  o maior inteiro tal que  $x_n^{\lambda_n} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}}$ , sendo  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Portanto,

$$(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n})(y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}) := \begin{cases} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_{n-k}^{\lambda_{n-k}} y_{k+1}^{\delta_{k+1}} y_{k+2}^{\delta_{k+2}} \dots y_m^{\delta_m}, & \text{se } k < m \\ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_{n-m}^{\lambda_{n-m}}, & \text{se } k = m < n \\ 1, & \text{se } k = n = m. \end{cases}$$

Dispondo definição acima, podemos enunciar o

**Teorema A.5.** *Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $F(X)$  o conjunto de todas as palavras reduzidas de  $X$ . Então, munido da operação binária apresentada na Definição A.4,  $F(X)$  é um grupo e  $F(X) = \langle X \rangle$ , sendo  $\langle X \rangle$  o menor subgrupo que contém  $X$ .*

O grupo  $F(X) = \langle X \rangle$  é chamado **grupo livre do conjunto  $X$** .

Ressaltamos aqui que, quando o conjunto  $X$  é vazio, convencionamos  $F(X)$  como sendo o grupo trivial, ou seja, composto apenas pela palavra vazia. Indicamos [25] para uma demonstração do Teorema A.5 e [31] para mais informações sobre grupos livres.

Agora, veremos a propriedade universal dos grupos livres e alguns de seus corolários imediatos.

**Teorema A.6** (Propriedade Universal dos Grupos Livres). *Sejam  $F(X)$  um grupo livre em um conjunto não-vazio  $X$  e  $i : X \rightarrow F(X)$  a inclusão. Dados um grupo  $G$  e uma função entre conjuntos  $f : X \rightarrow G$ , existe um único homomorfismo de grupos  $\bar{f} : F(X) \rightarrow G$  tal que  $\bar{f} \circ i = f$ .*

Isto quer dizer que existe  $\bar{f} : F(X) \rightarrow G$  único homomorfismo que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow i & \nearrow \bar{f} & \\ F(X) & & \end{array}$$

*Demonstração.* Defina

$$\begin{aligned} \bar{f} : \quad F(X) &\longrightarrow G \\ 1 &\longmapsto e_G \\ x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} &\longmapsto f(x_1)^{\delta_1} \dots f(x_n)^{\delta_n}, \end{aligned}$$

sendo  $e_G$  o elemento neutro do grupo  $G$ .

Note que  $\bar{f}$  está bem definida. Vejamos que  $\bar{f}$  é homomorfismo. Dadas duas palavras não-vazias reduzidas,  $w_1 = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$  e  $w_2 = y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m}$ , com  $x_i, y_i \in X$  e  $\delta_i, \lambda_i = \pm 1$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(w_1 w_2) &= \bar{f}(x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m}) \\ &= f(x_1)^{\delta_1} \dots f(x_n)^{\delta_n} f(y_1)^{\lambda_1} \dots f(y_m)^{\lambda_m} \\ &= [f(x_1)^{\delta_1} \dots f(x_n)^{\delta_n}] [f(y_1)^{\lambda_1} \dots f(y_m)^{\lambda_m}] \\ &= \bar{f}(x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}) \bar{f}(y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m}) \\ &= \bar{f}(w_1) \bar{f}(w_2). \end{aligned}$$

Observe agora que, dado  $x \in X$  qualquer, podemos escrever

$$(\bar{f} \circ i)(x) = \bar{f}(i(x)) = \bar{f}(x) = f(x).$$

Resta-nos mostrar apenas que  $\bar{f}$  é única.

Seja  $g : F(X) \rightarrow G$  um homomorfismo tal que  $g \circ i = f$ . Então, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & G \\
 \downarrow i & \nearrow \bar{f} & \nearrow g \\
 F(X) & & 
 \end{array}$$

Para  $w = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} \in F(X)$  palavra não-vazia reduzida qualquer, temos

$$\begin{aligned}
 g(w) &= g(x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}) \\
 &= [g(x_1)]^{\delta_1} \dots [g(x_n)]^{\delta_n} \\
 &= [g(i(x_1))]^{\delta_1} \dots [g(i(x_n))]^{\delta_n} \\
 &= [(g \circ i)(x_1)]^{\delta_1} \dots [(g \circ i)(x_n)]^{\delta_n} \\
 &= f(x_1)^{\delta_1} \dots f(x_n)^{\delta_n} \\
 &= \bar{f}(w).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{f} = g$ . □

Em seguida, veremos 3 consequências deste teorema.

**Corolário A.7.** *Sejam  $F(X)$  e  $G(X)$  grupos livres no conjunto  $X$ . Então,  $F(X)$  é isomorfo a  $G(X)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $i_F : X \rightarrow F(X)$  e  $i_G : X \rightarrow G(X)$  inclusões. Pela Propriedade Universal do Grupo Livre, existem  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  homomorfismos únicos que fazem os seguintes diagramas comutarem, respectivamente:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_G} & G(X) \\
 \downarrow i_F & \nearrow \bar{f} & \\
 F(X) & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_F} & F(X) \\
 \downarrow i_G & \nearrow \bar{g} & \\
 G(X) & & 
 \end{array}$$

Daí,  $i_G = \bar{f} \circ i_F$  e  $i_F = \bar{g} \circ i_G$ .

Agora, vamos aplicar a Propriedade Universal do Grupo Livre para o grupo  $F(X)$  e a inclusão  $i_F : X \rightarrow F(X)$ . Assim, existe um único homomorfismo  $\bar{h} : F(X) \rightarrow F(X)$  tal que  $\bar{h} \circ i_F = i_F$ .

Note também que  $\text{Id}_F$  satisfaz  $\text{Id}_F \circ i_F = i_F$  e

$$(\bar{g} \circ \bar{f}) \circ i_F = \bar{g} \circ (\bar{f} \circ i_F) = \bar{g} \circ i_G = i_F.$$

Pela unicidade de  $\bar{h}$ , segue que  $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{Id}_F$ . De maneira análoga, considerando  $i_G : X \rightarrow G(X)$ , obtemos que  $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{Id}_G$ . Portanto,  $F(X) \cong G(X)$ . □

**Corolário A.8.** *Todo grupo  $G$  é imagem homomorfa de um grupo livre.*

*Demonstração.* Seja  $X$  um conjunto de geradores do grupo  $G$  e considere  $F(X)$  o grupo livre em  $X$ . Considere também a inclusão  $i_G : X \rightarrow G$ . Então, existe um único homomorfismo  $\bar{f} : F(X) \rightarrow G$  tal que  $\bar{f} \circ i_F = i_G$ .

Vamos mostrar que  $\bar{f}$  é sobrejetora.

Dado  $g \in G$ , podemos escrever  $g = g_1^{\delta_1} \dots g_n^{\delta_n}$ , com  $g_i \in X$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\delta_i \in \mathbb{Z}$ , pois  $X$  é um conjunto de geradores. Portanto, visto que  $G$  é um grupo, podemos reescrever  $g$  (simplificando termos quando necessário e ajustando as potências) de maneira que ele seja um elemento de  $F(X)$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \bar{f}(g) &= \bar{f}(g_1^{\delta_1} \dots g_n^{\delta_n}) \\ &= \bar{f}(i(g_1)^{\delta_1} \dots i(g_n)^{\delta_n}) \\ &= [\bar{f} \circ i(g_1)]^{\delta_1} \dots [\bar{f} \circ i(g_n)]^{\delta_n} \\ &= [i_G(g_1)]^{\delta_1} \dots [i_G(g_n)]^{\delta_n} \\ &= g_1^{\delta_1} \dots g_n^{\delta_n} \\ &= g. \end{aligned}$$

Logo,  $\bar{f}$  é um epimorfismo, de onde segue que  $\bar{f}(F(X)) = G$ .  $\square$

**Corolário A.9.** *Todo grupo  $G$  é isomorfo a um grupo quociente  $F(X)/N$ , onde  $G = \langle X \rangle$ ,  $F(X)$  é o grupo livre em  $X$  e  $N$  é o núcleo do epimorfismo  $\bar{f} : F(X) \rightarrow G$  obtido no Corolário A.8.*

*Demonstração.* O homomorfismo  $\bar{f} : F(X) \rightarrow G$ , pelo 1º Teorema do Isomorfismo, induz um isomorfismo  $F(X)/\text{Ker}(\bar{f}) \rightarrow \text{Im}(\bar{f})$ . Pelo Corolário A.8,  $\text{Im}(\bar{f}) = G$ . Logo,  $G \cong F(X)/\text{Ker}(\bar{f})$ .  $\square$

Neste contexto, podemos escrever

$$G \cong F(X) / \overline{\langle \mathcal{R} \rangle},$$

sendo  $\mathcal{R}$  um conjunto de geradores para  $\text{Ker}(\bar{f})$  e  $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$  o fecho normal do subgrupo gerado por  $\mathcal{R}$ . Então,  $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} = \text{Ker}(\bar{f})$ . Podemos denotar tal quociente também por  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  e o chamamos de **apresentação do grupo  $G$** . Com esta notação, apresentamos o último teorema desta seção.

**Teorema A.10.** *Seja  $G$  um grupo dado pela apresentação  $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  e seja  $f : X \rightarrow H$  uma aplicação, com  $H$  um grupo qualquer. Então,  $f$  se estende a um homomorfismo de grupos  $F : G \rightarrow H$  quando  $f(\mathcal{R}) \subset H$  é trivial.*

*Demonstração.* Pela Propriedade Universal do Grupo Livre, existe um único homomorfismo  $g : F(X) \rightarrow H$  tal que  $g$  é uma extensão de  $f$  e  $g \circ i = f$ , com  $i : X \rightarrow F(X)$  a inclusão.

Observe que  $\langle \mathcal{R} \rangle \subset \text{Ker}(g)$ . De fato, dado  $r \in \mathcal{R}$ , temos  $g(r) = (g \circ i)(r) = f(r) = 1$ , pois  $f(\mathcal{R})$  é trivial. Como o núcleo de  $g$  é um subgrupo normal de  $H$ , obtemos que  $\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} \triangleleft \text{Ker}(g)$ . Dessa maneira,  $g$  se passa ao quociente e existe

$$F : F(X)/\overline{\langle \mathcal{R} \rangle} \longrightarrow H$$

homomorfismo que satisfaz  $F \circ \pi = g$ , onde  $\pi : F(X) \longrightarrow F(X)/\overline{\langle \mathcal{R} \rangle}$  é a projeção canônica que leva um elemento em sua classe.

Por fim, note que  $(F \circ \pi)|_x = g|_x = (g \circ i)|_x = f$ . □

## A.2 Grupos Triangulares Finitos

Uma apresentação do grupo  $\text{Dih}_n$  equivalente à dada na Seção 1.2 é

$$\text{Dih}_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 = 1 \rangle.$$

A estrutura dessa apresentação não é característica apenas ao grupo diedral. Ela representa uma classe mais geral de grupos, chamados **grupos triangulares**. Tais grupos mostram-se presentes (e bastante úteis) quando realizamos quocientes no estudo da Teoria de Tranças. Nesta seção, vamos estudá-lo brevemente com o objetivo de caracterizar os grupos triangulares finitos.

**Definição A.11.** Sejam  $l, m, n > 1$  inteiros. O grupo definido pela apresentação

$$\langle a, b \mid a^l = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$$

é chamado grupo triangular e denotado por  $T(l, m, n)$ .

Observamos que, se algum dos números inteiros é igual a 1, digamos  $l = 1$ , o grupo  $\langle a, b \mid a = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$  pode ser escrito de maneira que sua apresentação tenha somente um gerador e uma relação. Mais precisamente:

**Proposição A.12.** O grupo  $\langle a, b \mid a = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}/(d)$ , sendo  $d = \text{mdc}(m, n)$ .

*Demonstração.* Denote  $\langle a, b \mid a = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$  por  $G$  e defina a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathbb{Z}/(d) \\ a &\longmapsto \bar{0} \\ b &\longmapsto \bar{1} \end{aligned}$$

dada nos geradores de  $G$ .

Temos que  $\varphi$  estende-se a um bem definido homomorfismo, pois  $\varphi$  preserva as relações de  $G$ . De fato,  $\varphi(a) = \bar{0}$  e  $m\varphi(b) = m(\bar{1}) = \bar{m} = \bar{0}$ , visto que  $d$  divide  $m$ . Observe ainda que



$$n[\varphi(a) + \varphi(b)] = n(\bar{0} + \bar{1}) = n(\bar{1}) = \bar{n} = \bar{0},$$

pois  $d$  divide  $n$ .

Vejamos agora que  $\varphi$  é uma bijeção.

Seja  $\bar{z}$  elemento não nulo de  $\mathbb{Z}/(d)$ . Tome  $b^z \in G$  e note que  $\varphi(b^z) = z\varphi(b) = z(\bar{1}) = \bar{z}$ . Como também temos que  $\varphi(a) = \bar{0}$ , segue que  $\varphi$  é um epimorfismo.

Agora, considere  $x \in \text{Ker}\varphi$ . Então,  $\varphi(x) = \bar{0}$ . Como  $x \in G$ , existem  $i_p, j_p \in \mathbb{Z}$ , com  $1 \leq p \leq k$ , tais que  $x = a^{i_1}b^{j_1} \dots a^{i_k}b^{j_k}$ .

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= i_1\varphi(a) + j_1\varphi(b) + \dots + i_k\varphi(a) + j_k\varphi(b) \\ &= \bar{j}_1 + \bar{j}_2 + \dots + \bar{j}_k \\ &= j_1 + j_2 + \dots + j_k = \bar{0}. \end{aligned}$$

Portanto, existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $j_1 + \dots + j_k = qd$ . Pelo Teorema de Bézout, também existem  $u, v \in \mathbb{Z}$  tais que  $d = um + vn$ . Assim, utilizando as relações de  $G$ , podemos escrever que

$$x = 1^{i_1}b^{j_1} \dots 1^{i_k}b^{j_k} = b^{j_1+j_2+\dots+j_k} = b^{qd} = (b^d)^q = (b^{um+vn})^q = 1,$$

Logo,  $\varphi$  é um monomorfismo. Dessa forma, concluímos que  $G \cong \mathbb{Z}/(d)$ . □

Uma propriedade interessante do grupo triangular  $T(l, m, n)$  é que, a menos de isomorfismo, obtemos o mesmo grupo ao trocarmos a ordem dos inteiros  $l, m, n$ .

**Teorema A.13.** *Para qualquer permutação  $\{\lambda, \mu, \nu\}$  de  $l, m$  e  $n$ , temos que  $T(l, m, n)$  é isomorfo a  $T(\lambda, \mu, \nu)$ .*

*Demonstração.* As possibilidades de permutação do conjunto  $\{l, m, n\}$  são

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
$\lambda$	$l$	$l$	$m$	$m$	$n$	$n$
$\mu$	$m$	$n$	$l$	$n$	$l$	$m$
$\nu$	$n$	$m$	$n$	$l$	$m$	$l$

Como a quantidade de casos é pequena, podemos realizar essa demonstração mostrando que  $T(l, m, n)$  é isomorfo a  $T(\lambda, \mu, \nu)$  para cada possibilidade de permutação do conjunto de inteiros. Com um pouco de cuidado e atenção, observa-se que esta argumentação se resume a estudar dois casos, a saber  $T(l, m, n) \cong T(l, n, m)$  e  $T(l, m, n) \cong T(m, l, n)$ .

Primeiramente, veremos que  $T(l, m, n) \cong T(l, n, m)$ .

Por definição, temos  $T(l, m, n) = \langle a, b \mid a^l = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$  e  $T(l, n, m) = \langle x, y \mid x^l = y^n = (xy)^m = 1 \rangle$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_1 : T(l, m, n) &\longrightarrow T(l, n, m) \\ a &\longmapsto x \\ b &\longmapsto (xy)^{-1} \end{aligned}$$

estende-se a um bem definido homomorfismo de grupos e seu homomorfismo inverso é dado por

$$\begin{aligned} \psi_1 : T(l, n, m) &\longrightarrow T(l, m, n) \\ x &\longmapsto a \\ y &\longmapsto (ba)^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,  $T(l, m, n) \cong T(l, n, m)$ .

Agora, veremos que  $T(l, m, n) \cong T(m, l, n)$ .

Escreva  $T(l, m, n) = \langle a, b \mid a^l = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$  e  $T(m, l, n) = \langle x, y \mid x^m = y^l = (xy)^n = 1 \rangle$ . Considere a função

$$\begin{aligned} \varphi_2 : T(l, m, n) &\longrightarrow T(m, l, n) \\ a &\longmapsto y^{-1} \\ b &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

e note que ela se estende a um bem definido homomorfismo de grupos e seu homomorfismo inverso é a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_2 : T(m, l, n) &\longrightarrow T(l, m, n) \\ x &\longmapsto b^{-1} \\ y &\longmapsto a^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,  $T(l, m, n) \cong T(m, l, n)$ . □

O resultado seguinte nos dá uma caracterização dos grupos triangulares finitos envolvendo os inteiros  $l, m, n$ .

**Teorema A.14** (Murasugi, [35]). *O grupo triangular  $T(l, m, n)$  é finito, com  $l, m, n \geq 2$ , se, e somente se,*

$$\delta = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 > 0.$$

Desta desigualdade, obtemos que um dos inteiros deve ser igual a 2, digamos  $l$ . Com efeito, suponha que exista  $T(l, m, n)$  grupo triangular finito, com  $l, m, n > 2$ . Então,  $l, m, n \geq 3$ , de onde obtemos que  $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ . Daí,

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1}_{\delta} \leq 0.$$

Portanto,  $\delta \leq 0$ , o que contradiz o Teorema A.14. Assim, pelo Teorema A.13, podemos considerar  $l = 2$ .

Neste caso, a ordem do grupo triangular finito é

$$\frac{4mn}{4 - (m - 2)(n - 2)}.$$

Referente aos grupos triangulares infinitos, apresentamos o seguinte teorema:

**Teorema A.15.** *Seja  $T(l, m, n)$  grupo triangular com  $\delta < 0$ . Então, um elemento  $g$  em  $T(l, m, n)$  é de ordem finita se, e somente se,  $g$  for um conjugado de  $a, b$  ou  $ab$ .*

A prova dos Teoremas A.14 e A.15, e da ordem do grupo triangular finito envolvem ferramentas que fogem ao escopo deste texto. Porém, ressaltamos que o estudo dos grupos triangulares foi feito de maneira profunda por W. Magnus [30], utilizando geometria hiperbólica.

Em seguida, estudaremos as possibilidades para que o grupo triangular  $T(2, m, n)$  seja finito. Se  $\delta > 0$  e  $l = 2$ , então  $\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 > 0$ . Assim, devemos ter  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ . Analisemos alguns casos:

Se  $m = 2$ , então

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$

para qualquer  $n$ . Portanto, os grupos  $T(2, 2, n)$  são finitos para todo  $n \geq 2$ .

Para  $m = 3$ , temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{6}{n} > 3 \Leftrightarrow \frac{6}{n} > 1 \Leftrightarrow n < 6.$$

Daí, os grupos  $T(2, 3, 3), T(2, 3, 4)$  e  $T(2, 3, 5)$  são os únicos grupos triangulares finitos com  $m = 3$ .

Se  $m = 4$ , segue que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{n} > 2 \Leftrightarrow \frac{4}{n} > 1 \Leftrightarrow n < 4.$$

Como  $n \geq 2$ , temos 2 possibilidades:  $n = 2$  ou  $n = 3$ . Porém, devido ao Teorema A.13, podemos afirmar que os casos  $T(2, 4, 2)$  e  $T(2, 4, 3)$  já foram analisados.

Para  $m = 5$ , podemos escrever

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{10}{n} > 5 \Leftrightarrow \frac{10}{n} > 3 \Leftrightarrow n < \frac{10}{3}.$$

Novamente, como  $n \geq 2$ , temos 2 possibilidades:  $n = 2$  ou  $n = 3$ . No entanto, pelo Teorema A.13, os casos  $T(2, 5, 2)$  e  $T(2, 5, 3)$  já foram considerados anteriormente.

Por último, no caso em que  $m \geq 6$ , temos  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{6}$ . Dessa forma,

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{3} \Rightarrow n < 3.$$

Assim, devemos ter  $n = 2$  e tal caso já foi analisado.

Dessa maneira, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema A.16** (Magnus, [30]). *Os únicos tipos de grupos triangulares finitos são:*

- (a)  $T(2, 2, n)$ , com  $n \geq 2$  (grupo diedral de ordem  $2n$ );
- (b)  $T(2, 3, 3)$ , que tem ordem 12 (isomorfo a  $\mathcal{A}_4$ );
- (c)  $T(2, 3, 4)$ , que tem ordem 24 (isomorfo a  $\mathcal{S}_4$ );
- (d)  $T(2, 3, 5)$ , que tem ordem 60 (isomorfo a  $\mathcal{A}_5$ ).

### A.3 Lema dos Cinco

**Lema A.17** (Lema dos Cinco). *Considere o diagrama comutativo de grupos abaixo, sendo que suas sequências horizontais são exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\
 \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow \\
 F & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & I & \xrightarrow{i} & J
 \end{array}$$

Se  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  e  $\alpha_5$  são isomorfismos, então  $\alpha_3$  também o é. Mais detalhadamente,

- i) Se  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  são monomorfismos e  $\alpha_1$  é um epimorfismo, então  $\alpha_3$  é um monomorfismo.
- ii) Se  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  são epimorfismos e  $\alpha_5$  é um monomorfismo, então  $\alpha_3$  é um epimorfismo.

*Demonstração.* Na demonstração a seguir, denotaremos por  $e_X$  o elemento neutro do grupo  $X$ , podendo  $X$  ser qualquer um dos grupos presentes do diagrama.

i) Queremos mostrar que  $\text{Ker}(\alpha_3) = \{e_C\}$ .

Seja  $x \in \text{Ker}(\alpha_3)$ . Então,  $\alpha_3(x) = e_H \in \text{Ker}(h) = \text{Im}(g)$ , pois a sequência é exata. Daí, existe  $y \in G$  tal que  $g(y) = \alpha_3(x)$ . Assim,  $h \circ g(y) = h \circ \alpha_3(x)$ . Pela comutatividade do diagrama e a exatidão da sequência, temos  $\alpha_4 \circ c(x) = h \circ g(y) = e_I$ . Como  $\alpha_4$  é monomorfismo,  $c(x) = e_D$ . Dessa maneira,  $x \in \text{Ker}(c) = \text{Im}(b)$ . Então, existe  $z \in B$  tal que  $b(z) = x$ .

Daí, podemos escrever  $\alpha_3(b(z)) = \alpha_3(x) = e_H$ . Novamente pela comutatividade do diagrama,  $g \circ \alpha_2(z) = e_H$ . Assim,  $\alpha_2(z) \in \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$ . Portanto, existe  $w \in F$  tal que  $\alpha_2(z) = f(w)$ .

Como  $\alpha_1$  é epimorfismo, existe  $u \in A$  tal que  $\alpha_1(u) = w$ . Logo,  $\alpha_2(z) = f(w) = f(\alpha_1(u)) = \alpha_2(a(u))$ , pois o diagrama comuta. Visto que  $\alpha_2$  é monomorfismo, segue que  $z = a(u)$ . Assim,  $b(z) = b \circ a(u) = e_C$ , pois a sequência é exata.

Logo,  $x = e_C$ , de onde concluímos que  $\alpha_3$  é monomorfismo.

ii) Vamos mostrar que dado  $x \in H$ , existe  $v \in C$  tal que  $\alpha_3(v) = x$ .

Seja  $x \in H$ . Então,  $h(x) \in I$ . Como  $\alpha_4$  é epimorfismo, existe  $y \in D$  tal que  $\alpha_4(y) = h(x)$ . Daí,  $i \circ \alpha_4(y) = i \circ h(x)$ . Pela comutatividade do diagrama e pela sequência ser exata, obtemos que  $\alpha_5 \circ d(y) = e_J$ . Portanto,  $d(y) = e_E$ , pois  $\alpha_5$  é monomorfismo. Logo,  $y \in \text{Ker}(d) = \text{Im}(c)$ , o que nos garante a existência de  $z \in C$  tal que  $c(z) = y$ . Assim,  $\alpha_4 \circ c(z) = \alpha_4(y) = h(x)$ . Pela comutatividade do diagrama,  $h(\alpha_3(z)) = h(x)$ . Então,  $h(\alpha_3(z)x^{-1}) = e_I$ .

Portanto,  $\alpha_3(z)x^{-1} \in \text{Ker}(h) = \text{Im}(g)$ . Dessa maneira, existe  $w \in G$  tal que  $g(w) = \alpha_3(z)x^{-1}$ . Como  $w \in G$  e  $\alpha_2$  é epimorfismo, existe  $u \in B$  que satisfaz  $\alpha_2(u) = w$ .

Por último, podemos escrever  $\alpha_3(b(u)) = g(\alpha_2(u)) = \alpha_3(z)x^{-1}$ , o que implica que

$$\alpha_3(b(u)^{-1}z) = x.$$

Em suma, tomando  $v := b(u)^{-1}z \in C$ , temos  $\alpha_3(v) = x$ . Logo,  $x \in \text{Im}(\alpha_3)$ , de onde segue que  $\alpha_3$  é um epimorfismo.  $\square$



---

## Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität ar Hamburg 4, **1925**. 47 – 72.
- [2] E. Artin, *Theory of Braids*. Annals of Mathematics 48, **1947**. 101 – 126.
- [3] A. Adem and R. J. Milgram, *Cohomology of finite groups*. Springer, New York, Heidelberg, Berlin, **1994**.
- [4] Y. Bae, J. S. Carter and B. Kim, *Amusing Permutation Representations of Group Extensions*. Arxiv: Math. GT, **2019**. Eprint: arXiv:1812.08475
- [5] J. S. Birman, *Braids, links and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies 82, Princeton, **1974**.
- [6] F. Bohnenblust, *The Algebraical Braid Group*. The Annals of Mathematics, 48(1), **1947**. 127 – 136.
- [7] E. Bujalance, F. J. Cirre and J. M. Gamboa, *Automorphism groups of the real projective plane with holes and their conjugacy classes within its mapping class group*. Math. Ann. 332, **2005**. 253 – 275.
- [8] H. S. M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes*. Cambridge University Press, **1991**.
- [9] V. Das, *An Introduction to Mapping Class Groups of Surfaces (Thesis)*. Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal, **2019**.
- [10] S. Eilenberg, *Sur les transformations périodiques de la surface de la sphère*. Fund. Math. 22, **1934**. 28 – 41.
- [11] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*. Math. Scand. 10, **1962**.
- [12] E. Fadell and J. M. Van Buskirk. *The Braid Groups of  $E^2$  and  $S^2$* . Duke Math. J. 29, **1962**. 243 – 257.
- [13] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, **2011**.
- [14] R. H. Fox and L. Neuwirth, *The braid groups*. Math. Scand. 10, **1962**. 119 – 126.

- [15] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, *The braid groups of the projective plane*. *Algebr. Geom. Topol.* 4, **2004**. 757 – 780.
- [16] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, *The classification and the conjugacy classes of the finite subgroups of the sphere braid groups*. *Algebr. Geom. Topol.* 8, **2008**. 757 – 785.
- [17] D. L. Gonçalves and J. Guaschi, *Surface braid groups and coverings*. *J. London Math. Soc.* (2) 85, **2012**. 855 – 868.
- [18] J. Guaschi and D. Juan Pineda, *A survey of surface braid groups and the lower algebraic K-theory of their group rings*. L. Ji, A. Papadopoulos and S.-T. Yau. *Handbook of Group Actions, Volume II*, 32, International Press of Boston Inc., pp.23-76, **2015**, Advanced Lectures in Mathematics, 9781571463012. hal-00794539.
- [19] M. E. Hamstrom, *Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes*. *Duke Math. J.* 29, **1962**. 657 – 662.
- [20] M. E. Hamstrom, *The space of homeomorphisms on a torus*. *Illinois J. Math.* 9, **1965**. 59 – 65.
- [21] M. E. Hamstrom, *Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold*. *Illinois J. Math.* 10, **1966**. 563 – 573.
- [22] M. E. Hamstrom, *Homotopy properties of the space of homeomorphisms on  $P^2$  and the Klein bottle*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.120, **1965**. 37 – 45.
- [23] V. L. Hansen, *Braids and Coverings: selected topics*, London Mathematical Society Student Texts 18, Cambridge University Press, **1989**.
- [24] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, **2002**.
- [25] T. W. Hungerford, *Algebra*. Springer-Verlag, New York, **2003**. 46 – 52.
- [26] D. Husemoller, *Fibre bundles*. Graduate texts in Mathematics 20, Springer Verlag, **1994**.
- [27] V. C. Laass, *Grupos de tranças do espaço projetivo (Dissertação)*. Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo, **2011**.
- [28] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Projeto Euclides, **1998**.
- [29] S. MacLane, *Homology*. Springer-Verlag, **1975**.
- [30] W. Magnus, *Noneuclidean tessellations and their groups*. Academic Press, **1974**. 52 – 123.
- [31] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in terms of generators and relations*. Interscience Publishers, **1966**.



- 
- [32] Y. N. Minsky. *A brief introduction to mapping class groups (Lecture notes)*. Park City Mathematics Series, 20, **2011**.
- [33] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*. Ann. of Math (2), 72, **1960**. 521 – 554.
- [34] K. Murasugi, *Seifert fibre spaces and braid groups*. Proc. London Math. Soc. 44, **1982**. 71 – 84.
- [35] K. Murasugi and B. I. Kurpita, *A Study of Braids*. Mathematics and its Applications, 484, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, **1999**.
- [36] F. Oort, *The Riemann-Hurwitz Formula*. ALM 35, **2000**. 567 – 594.
- [37] L. Paris, *Mapping class groups of non-orientable surfaces for beginners*, **2014**. hal-01071328
- [38] G. P. Scott, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*. Proc. Camb. Phil. Soc. 68, **1970**. 605 – 617.
- [39] W. R. Scott, *Group Theory*. Prentice Hall, **1964**.
- [40] J. Van Buskirk, *Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order*. Trans. Amer. Math. Soc. 122, **1966**. 81 – 97.
- [41] B. Von Kerékjártó, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*. Math. Ann. 80, **1919**. 36 – 38.
- [42] O. Zariski, *The topological discriminant group of a Riemann surface of genus  $p$* , Amer. J. Math. 59, **1937**.

