UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RAFAELA FERNANDES GARCIA

O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES BASEADO NA TEORIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

SÃO CARLOS
2021

RAFAELA FERNANDES GARCIA

O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES BASEADO NA TEORIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS
2021

Garcia, Rafaela Fernandes

O ensino de sistemas lineares baseado na teoria de resolução de problemas de Polya / Rafaela Fernandes Garcia -- 2021.
40f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Adriana Ramos Pereira, Grazielle Feliciani Barbosa
Bibliografia

1. Resolução de problemas. 2. Sistemas lineares. 3. Proposta didática. I. Garcia, Rafaela Fernandes. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 27/2021/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

RAFAELA FERNANDES GARCIA

O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES BASEADO
NA TEORIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 26 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Wladimir Seixas
Membro da Banca 1	Adriana Ramos Pereira
Membro da Banca 2	Grazielle Feliciani Barbosa

Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/11/2021, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Adriana Ramos Pereira**, **Professor(a) Adjunto(a)**, em 30/11/2021, às 12:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Grazielle Feliciani Barbosa**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/12/2021, às 14:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0545818** e o código CRC **BAF05997**.

AGRADECIMENTOS

Para que este trabalho e toda a jornada do curso fossem concluídos, algumas pessoas foram essenciais em suas palavras de apoio e motivação.

Agradeço primeiramente à minha mãe, Rosângela, pelo acolhimento nos momentos difíceis, nos desafios e por toda confiança depositada em mim. Ao meu pai, Marcos, por me ensinar desde cedo o valor do esforço, trabalho e superação. Ao meu irmão, Ruan, por me ouvir sempre que precisei durante o processo e me animar.

Também agradeço ao meu namorado, Rafael, por estar do meu lado e me incentivar, por acreditar mais em mim do que eu mesma acreditei. Obrigada pela compreensão nos momentos de ausência e paciência.

Às minhas amigas, Beatriz e Mariana, que embora estivessem longe fisicamente, foram essenciais em tantos momentos que seria difícil pontuar todos eles.

A todos os amigos que me acompanharam, sendo em sala de aula ou fora dela, pela rede de apoio que criamos e o sentimento de grupo, que me permitiu ir longe e acreditar que era possível.

À toda a minha família que sempre, direta ou indiretamente, estiveram lá para me apoiar e me levantar.

Agradeço ao meu orientador Wladimir, pelo vasto conhecimento compartilhado, conselhos, dicas e orientações ao longo do ano. Muito obrigada pela troca de experiências que tivemos e por todo o apoio.

Agradeço finalmente à todos os meus professores da UFSCar, que de certa forma me deram instrumentos para a conclusão do curso e foram fonte de inspiração por todo esse tempo e continuarão sendo por muitos outros anos que virão. Vocês impactam e mudam vidas diariamente através do lindo ofício que é ser professor.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar os materiais didáticos de Dante e Viana (2008) e Iezzi e Hazzan (2019), indicados para o Ensino Básico pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com auxílio da metodologia de fichamento. A partir dessa análise, sob a ótica das habilidades encontradas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), [EM13MAT301] E [EM13MAT315] e no método de resolução de problemas, desenvolvido por Polya (1995), elaboramos uma sequência didática, como a proposta de auxiliar e guiar professores do Ensino Médio no conteúdo de sistemas lineares com aplicações na economia e na interpretação geométrica. O material poderá ser utilizado no ensino tanto para os anos finais da Educação Básica quanto para alunos de Olimpíadas Matemáticas e cursos superiores com base matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Sistemas Lineares. Proposta Didática.

ABSTRACT

The aim of this work is to analyze the teaching materials of Dante e Viana (2008) and Iezzi e Hazzan (2019), indicated for Basic Education by the National Textbook Program (PNLD), with the help of the filing methodology. From this analysis, from the perspective of the skills found in the Common National Curriculum Base (BNCC), [EM13MAT305] and [EM13MAT315] and in the problem solving method developed by Polya (1995), we elaborated a didactic sequence with the proposal to help and guide high school teachers in the content of linear systems with applications in economics and geometric interpretation. The material can be used in teaching both for the final years of Basic Education and for students from the Mathematics Olympics and higher courses with a mathematical basis.

Keywords: Problem Solving. Linear Systems. Didactic Proposal.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A partir de minha experiência nos estágios realizados ao longo do curso e programas de extensão, tive a oportunidade de observar a falta de sentido na matemática apresentada nos livros didáticos comuns. Sempre com muitos erros de grafia, notações, contexto, entre outros. Estes, por si só, já seriam um grande impedimento para que os estudantes criem conexão com a disciplina e entendam seu intuito principal, porém vemos também aplicações muito falhas, repetitivas em excesso e com pouca relação e usabilidade no mundo real.

É claro, a matemática não deve ser vista apenas como uma ferramenta que possibilita a resolução de grandes questões humanas. Durante o curso de gradução em Matemática, aprendemos rapidamente a enxergá-la como pura arte, tamanho os fenômenos que ela descreve e possibilita. Porém, é necessário deixar claro aos estudantes o seu uso prático, de forma a cativá-los para algo importante e cheio de significado. A matemática de fato soluciona problemas cotidianos nos mais variados níveis, sejam biológicos, físicos, economicos ou apenas, humanos.

Observando variadas falhas nos materiais didáticos e tendo como base duas competências extraídas da Base Nacional Curricular Comum dentro do campo de ensino de sistemas lineares, surgiu a proposta de elaborar uma sequência didática cobrindo as principais falhas encontradas e usufruindo dos pontos fortes das obras de Dante e Viana (2008) e Iezzi e Hazzan (2019). Para isso, foi utilizado o fichamento dos dois materiais referentes aos capítulos de sistemas lineares e ensino de matrizes.

Usando o método de resolução de problemas de Polya (1995), foi possível propor um material para auxilixar professores no ensino do tema e servir como inspiração para exercícios fora dos usualmente apresentados pelos materiais, que na maioria não despertam a curiosidade da sala de aula. Com uma atividade dentro do contexto econômico e um no contexto geométrico, possibilitando o uso de software Geogebra no computador ou aplicativo de celular dos próprios estudantes, o interesse aparece com mais facilidade.

As atividades serão dividias em cinco, onde as duas primeiras serão mais introdutórias, retomando o conceito de sistemas lineareas e suas particularidades. Toda a estrutura, componentes, objetivos, classificações dos sistemas e resolução de exercícios para fixação serão vistos nesse primeiro momento.

Na terceira e quarta, fazemos uso da Teoria de Resolução de Polya para auxiliar na definicação da solução dos exercícios, ensinando o aluno a pensar dentro do passo a passo da Teoria. Por último a atividade cinco é voltada para a resolução com a turma, avaliando as percepções deles e guiando para a resposta correta.

Esta monografia está dividida em cinco capítulos: introdução, fundamentação teórica, pesquisa documental e fichamento, proposta de sequência didática e considerações finais.

2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Este trabalho se baseará em partes das habilidades e competências definidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Neste sentido, vamos aprofundar os conhecimentos sobre a própria Base e também sobre duas habilidades , EM13MAT301 e EM13MAT315.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento normativo, o qual define as aprendizagens básicas que devem ser alcançadas pelos alunos ao longo de todas as etapas da Educação Básica. Ou seja, considerando a fase do desenvolvimento e momento escolar, a BNCC rege e direciona o aprendizado para que as competências gerais sejam desenvolvidas.

Ao todo, temos dez competências mais abrangentes, as quais se inter-relacionam e promovem a construção do conhecimento e formação de valores essenciais previstos na Lei de Diretrizes e Base (LDB). Por competência, a partir da definição segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 8), entendemos

> [...] como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Tendo em vista o foco de estudo deste trabalho, é válido entender a estrutura da BNCC para o Ensino Médio, visto que as estruturas e objetivos diferem da Educação Infantil e do Ensino Fundamental (embora também contem com suas competências e habilidades). A divisão das grandes áreas do conhecimento para essa etapa se define por: Matemática e suas Tecnologias; Linguagens e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Para cada grande área, competências específicas de área são definidas. Para cada competência específica, surge um novo conjunto de habilidades para assegurar que aquela competência será alcançada. Veremos agora o “destrinchar” da Matemática, percorrendo as competências específicas e posteriormente afunilar para nosso enfoque nas competências escolhidas e habilidades EM13MAT301 e EM13MAT315.

Dentre as competências específicas, temos:

a) Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

b) Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

c) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

d) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

e) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

As habilidades EM13MAT301 e EM13MAT315 se encontram na competência específica 3 (ou "c"), a qual trata da “interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.” (BRASIL, 2017, p. 353). Estas, são definidas por:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Segundo a BNCC,

> [...] os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida - por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. (BRASIL, 2017, p. 535)]

A partir da escolha das habilidades podemos nos apoiar nesses dois pilares e, tendo os sistemas lineares como nosso objeto de estudo, propor uma sequência didática voltada para a resolução de problemas.

3 PESQUISA DOCUMENTAL: LIVROS PNLD

Vamos ao longo deste capítulo, para fins de embasamento, estudar dois livros os quais são referência em ensino de sistemas lineares e matrizes. Estes, que já fizeram parte das indicações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), contribuíram com o estudo do tema em todos os níveis da educação básica: do Ensino Fundamental ao Ensino Médio.

"Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas" de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan (IEZZI; HAZZAN, 2019) e *"Matemática - Contexto e Aplicações: Manual do Professor"* de Luiz Roberto Dante (DANTE; VIANA, 2008), trazem diferentes formas de abordagem ao tema. Desde níveis de complexidade na linguagem, profundidade e até objetivo dos exercícios, podemos perceber discrepâncias após análise dos capítulos referentes apenas aos sistemas lineares em ambas as obras.

Também contaremos com os fundamentos para análise de livros didáticos, segundo o livro *"Exame de Textos - Análise de livros de matemática para o ensino médio"*, os quais são: conceituação, manipulação e aplicação. O livro conta com comentários de 8 analistas dessa área de pesquisa, entre eles, Elon Lages Lima (LIMA, 2001).

Definindo os pontos de comparação-chave como "Linguagem e escrita matemática", "Conteúdo abordado", "Objetivo dos exercícios e quantidade' e considerando também os fundamentos básicos para análise, conseguimos guiar nosso estudo de maneira mais teórica, embora as percepções aqui mencionadas reflitam também um parecer pessoal da autora do trabalho.

Abaixo, segue fichamento de cada obra, material produzido para facilitar a análise posterior, com a comparação entre o conteúdo abordado no geral.

Tabela 3.1 – Análise de conteúdo Dante e Viana (2008).

Página	Tópico	Resumo e considerações
95	O método chinês	O autor retoma o livros chines e o método utilizado para resolver o problema dos barris. O método é chamado de "tentativa e erro".
96	Sistemas lineares 2x2	Retomada de resolução de sistemas 2x2, por qualquer metodologia (adição, subtração, comparação)
96	Equações lineares	Exemplos de equações lineares e o que define uma equação linear. Ressaltamos as comparações feitas pelo autor com equações que não são lineares. Introduz conceito de solução de uma equação linear. Interpretação geométrica de uma solução (no plano e no espaço). 6 exercícios
98	Sistemas de equações lineares	Definição de sistema linear e solução de sistema. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR - Exercício para verificar se o par ordenado é solução do sistema dado. CLASSIFICAÇÃO - Classificação do sistema (P.D., P.I e I.) - Interpretações geométricas com ilustrações- Utilização de esquema para classificação. MATRIZES, SISTEMAS E DETERMINANTES - Explica a relação dos determinantes e das soluções que encontramos - 4 exercícios em equipe. ESCALONAMENTO DE SISTEMAS - Classificação e resolução de sistemas escalonados com exemplos. SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES - Definição e 4 exercícios
105	Sistemas de equações lineares	PROCESSO PARA ESCALONAMENTO - Exemplos com comentários
107	Sistemas de equações lineares	Exemplo passo a passo pelo método de POLYA (Compreensão do problema, planejamento, execução, solução e ampliação). 14 exercícios, dos mais simples aos mais complexos dentro de variadas áreas
110	Sistemas de equações lineares	DISCUSSÃO DE SISTEMAS 2×2 - Discussão sobre as possiblidades e análise de soluções, com 3 exercícios resolvidos
111	Sistemas de equações lineares	DISCUSSÃO DE SISTEMAS $n \times n$, COM $n > 2$. Apresentação de dois procedimentos - Exercício resolvido de ambas as maneiras - 4 exercícios
112	Outros contextos	Programação linear e a otimização de funções
114	Pensando no ENEM	2 Exercícios extraídos do ENEM: - Um sobre matriz GUT - Produto de matrizes como reflexão do ponto

Tabela 3.2 – Análise de conteúdo Iezzi e Hazzan (2019).

(continua)

Página	Tópico	Resumo e considerações
133	Leitura introdutória	Sistemas lineares e determinante: Origens e desenvolvimento
135	Equação Linear	Definição e exemplos simples. Diferenças entre equações que não são lineares
136	Solução de uma equação linear	Definição e 3 exemplos (traz o formato matricial da equação)
137	Sistema Linear	Definição e 3 exemplos (traz o formato matricial da equação)
138	Solução de um sistema linear	Definição e 2 exemplos
139	Sistema possível, sistema impossível	Definição curta (3 linhas)
139	Sistema linear homogêneo	Definição e 2 exemplos
140	Matrizes de um sistema	Definição, conceito de matriz completa e imcompleta. 2 exemplos
140	Exercícios	Teorema de Cramer (para descobrir se matrquadrada possui solução e é unica). Definição, demonstração e um exemplo
145	Sistema possível e determinado	"Os sistemas lineares que têm solução única são chamados possíveis e determinados". 10 execícios para aplicar Regra de Cramer e uma solução. Exercícios mais complexos que envolvem mais conceitos matemáticos em comparação com Dante
149	Sistemas escalonados	Definição e 3 exemplos
149	Resolução de um sistema na forma escalonada	2 tipos de sistemas escalonados: - n de equações menor que numero de incógnitas (introduz conceito de variável livre e de grau de indeterminação) - n de equações = n de incógnitas (regra de cramer pode ser aplicada) - 3 exercícios
154	Sistemas equivalentes – Escalonamento de um sistema	Definição e apresentação de 2 recursos para transformar um sistema em outro equivalente Teorema 1: Multiplicar uma ou mais equações por um K=/=0, com demonstração. Teorema 2: Substituir equação pela soma dela com outra, membro a membro Escalonamento de um sistema: seguir os passos baseados nos teoremoas 1 e 2. Passo a passo em 4 etapas.4 exemplos com passo a passo de escalonamento bem detalhado - Observações do que pode ocorrer: caso em que 0x1+0x2..+0xn=0 e 0x1+0x2..+0xn=b - 44 exercícios com algumas soluções

Tabela 3.2 – Análise de conteúdo Iezzi e Hazzan (2019).

(continuação)

174	Sistema linea homogêneo	Definição e conceito de solução trivial (ou imprópria). 2 exercícios e outros 19 exercícios com algumas soluções
180	Característica de uma matriz. Teorema de Rouché-Capelli	Definição de matriz escalonada - Conceito de matrizes linha-equivalentes:definição e 1 exemplo detalhado usando escalonamento. Conceito de característica da matriz: *n* de linhas não nulas e 3 exemplos. 7 exercícios. Teorema de Rouche-Capelli: definição e demonstração. 15 exercícios, alguns com solução passo a passo
255	Questões de vestibulares	90 apenas de sistemas.

Fonte: Elaborada pela autora.

3.1 LINGUAGEM E ESCRITA MATEMÁTICA

O primeiro quesito a ser analisado foi a linguagem usada ao enunciar os conceitos e exercícios. É nítido a diferença entre as duas abordagens, embora estejamos avaliando o ensino do mesmo assunto. Após o fichamento de ambos os livros, nota-se uma linguagem mais "suave" e didática no texto apresentado por Dante e Viana (2008) e uma linguagem mais direta e robusta com Iezzi e Hazzan (2019).

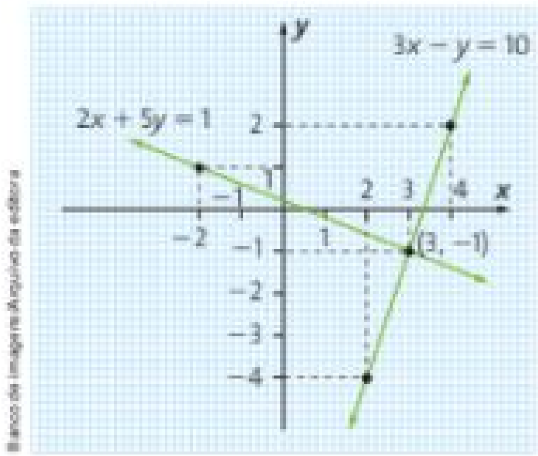
Vale destacar aqui que não é nosso objetivo avaliar de forma a exaltar um ou outro autor, apenas pontuar as características de ambos, as quais são igualmente válidas e importantes para diferentes métodos de ensino de sistemas lineares.

Em "Matemática - Contexto e Aplicações" de Dante e Viana (2008), por se tratar de um volume como Manual do Professor, já era esperado uma introdução ao tema com comentários extras e pontos que façam o aluno refletir antes de se iniciar o próximo assunto mais complexo. Porém, mesmo no texto corrido e desconsiderando as observações voltadas ao professor, temos ilustrações, passo a passos mais detalhados e um desenvolvimento que caminha com o aluno até a resolução dos exercícios.

Como exemplo, temos os trechos abaixo. Note que, no exercício extraído da obra de Dante e Viana (2008), temos uma representação geométrica. Dessa maneira, ele conduz o aluno a encontrar mais um sentido para a solução de um sistema que não o sentido abstrato.

Figura 3.1 – Trecho de exercício Dante e Viana (2008).

Traçando o gráfico dessas duas retas no mesmo plano cartesiano, temos:



Fonte:(DANTE; VIANA, 2008, p. 99)

Logo em seguida, um segundo exemplo proposto pelo livro traz o passo a passo da resolução de outro sistema, reescrevendo primeiro o resultado da multiplicação da primeira equação por -2 e utilizando riscos em cima dos termos a serem excluídos na soma do sistema.

Figura 3.2 – Trecho de exercício proposto por Dante e Viana (2008).

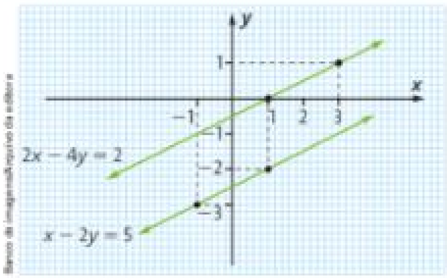
$$\text{b)}\ \begin{cases} x - 2y = 5 \quad \cdot(-2) \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} + 4y = -10 \\ \underline{\cancel{2x} - 4y = \quad 2} \\ \qquad 0y = -8 \end{cases}$$

Fonte:(DANTE; VIANA, 2008, p. 99)

Após explicar o conceito de sistema impossível e da primeira implicação abstrata de que o sistema não tem solução, o autor traz novamente a interpretação geométrica. Afinal, o que significa um sistema não ter solução para fins geométricos?

Figura 3.3 – Trecho de exercício proposto por Dante e Viana (2008).

Interpretação geométrica: Veja a representação gráfica desse sistema: $\begin{cases} x - 2y = 5 \rightarrow y = \dfrac{x-5}{2} \\ 2x - 4y = 2 \rightarrow y = \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$



Fique atento!

$\begin{cases} x-2y=5 \rightarrow (1,-2), (-1,-3), \dots \\ 2x-4y=2 \rightarrow (1,0), (3,1), \dots \end{cases}$

As retas paralelas e distintas indicam que não existe par ordenado que seja solução do sistema (sistema impossível).

Fonte:(DANTE; VIANA, 2008, p. 100)

Dessa maneira, dado que as equações se traduzem como retas no meio geométrico e o sistema não tem solução, fica claro a inexistência de um ponto em comum, definindo, neste caso, o comportamento das retas paralelas.

Comparando com o capítulo de mesmo conteúdo em “Fundamentos de Matemática Elementar” de Iezzi e Hazzan (2019), em que pela primeira vez é citado a possibilidade de o sistema ser impossível, temos uma abordagem mais objetiva e sem interpretações geométricas.

Figura 3.4 – Trecho de exercício proposto por Iezzi e Hazzan (2019).

2º) O sistema linear

$$S \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - \ \ y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 6 \end{cases}$$

não admite solução, pois a última equação não é satisfeita por nenhuma tripla (α_1, α_2, α_3).

92. Sistema possível. Sistema impossível

Se um sistema linear S tiver **pelo menos uma solução**, diremos que ele é **possível** ou **compatível** (é o caso do 1º exemplo); caso não tenha nenhuma solução, diremos que S é **impossível ou incompatível** (é o caso do 2º exemplo).

Fonte:(IEZZI; HAZZAN, 2019, p. 139).

Estes são apenas alguns dos exemplos presentes nos dois livros abordados, porém a linguagem usada mantém o padrão no decorrer de todo o capítulo.

3.2 CONTEÚDO

Nesta seção iremos considerar a quantidade de conteúdo abordado e analisar as diferenças entre a profundidade e totalidade dos tópicos apresentados pelos dois autores.

Na obra de Dante e Viana (2008), em conjunto com uma abordagem mais detalhada, temos uma menor quantidade de conteúdo abordado. Talvez o autor tenha optado por caminhar de maneira mais lenta e consequentemente excluir alguns conceitos não-introdutórios sobre sistemas lineares de maneira geral. Por exemplo, o Teorema de Rouché-Capelli não é citado no texto. Também não encontramos nada referente ao conceito de grau de indeterminação que se faria presente ao introduzir sistemas possíveis e indeterminados. Vale destacar também que, embora o Teorema de Cramer não tenha sido citado, o autor ensina e faz uso em resolução de sistemas 2×2.

Sobre o uso do Teorema de Cramer para resolver sistemas 2×2, percebemos uma aplicação desnecessária pois o estudante tem um trabalho maior utilizando o Teorema nesse caso (que implica encontrar 3 determinantes) do que se usasse apenas a lógica e escalonamento simples. Uma análise mais completa pode ser encontrada em (LIMA, 2001, p. 267-312).

Na leitura de Iezzi e Hazzan (2019), além de encontrarmos os teoremas citados anteriormente e suas respectivas demonstrações, temos também o conceito de grau de indeterminação. Isso pode ser visto no trecho que os autores comentam "um tal sistema é dito possível e indeterminado. Chama-se grau de indeterminação o número de variáveis livres do sistema, isto é, n - m" (IEZZI; HAZZAN, 2019, p. 151). Por outro lado, não temos exercícios propostos para fixação do grau de indeterminação, assunto que será melhor discutidoo na próxima seção.

Ainda dentro do tema "conteúdo", podemos destacar o fundamento conceituação para análise. Sob esse aspecto, consideraremos diversas variáveis: erros provenientes de desatenção, erros de raciocínio, erros de definição, erros resultantes de conceitos mal formulados e vagos, excesso de formalismo, linguagem inadequada, imprecição, obscuridade e confusão de conceitos.

Com relação aos erros gerais, nos exercícios e formulações analisadas (não foram resolvidos todos os exercícios para análise profunda, pois são muitos), nada foi encontrado. No quesito "excesso de formalismo", talvez (IEZZI; HAZZAN, 2019) seja robuscado demais em alguns pontos, como por exemplo na demonstração de um dos teoremas para sistemas equivalentes, onde faz uso de índices e muitas letras que podem confundir o estudante desnecessariamente.

3.3 OBJETIVO DOS EXERCÍCIOS

Como apontado na seção anterior, aqui evidenciaremos os principais intuitos dos exercícios nas obras de maneira geral. É trivial afirmar que, em ambas as obras, encontraremos exercícios tanto com foco na pura manipulação e fixação de conceitos quanto exercícios que contam com uma maior aplicação em situações reais do cotidiano. Porém, o objetivo desta seção será analisar de maneira geral o real intuito dos autores com os exercícios propostos.

Segundo Lima (2001, p. 3), a “habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementais, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes”.

Analisando o livro de Dante e Viana (2008) nos deparamos com poucos exercícios por capítulo, estes sempre com indicações se devem ser feitos individualmente, em dupla ou por um grupo de alunos (embora a maioria tenha indicação de resolução individual). Os exercícios são diretos e objetivos e não contam com muitos itens. São propostos em média 5 exercícios por capítulo com uso prático do conteúdo abordado anteriormente, com exceção do capítulo “Processo de escalonamento de um sistema linear” (DANTE; VIANA, 2008, p. 105), onde vemos os primeiros exercícios extraídos de vestibulares e aplicações na biologia, engenharia e química.

Outro destaque está para o capítulo extra contendo apenas um exercício considerado também de aplicação, porém na esfera de programação linear e otimização de funções (DANTE; VIANA, 2008, p. 112). Segundo Lima (2001, p. 291), com esse exercício temos um verdadeiro exemplo de contextualização, onde é utilizado um conceito considerado simples pela Matemática para resolver um problema relevante.

Visando outro objetivo, verificamos que Iezzi e Hazzan (2019) apresentam um número bem maior de exercícios por capítulo - com uma média de 10 - muitas vezes com vários itens em cada um, para fixação e prática na manipulação dos conceitos, métodos e teoremas ensinados. Fica claro, em termos de comparação, que o objetivo aqui é a preparação e treino de resolução exaustiva de exercícios. De acordo com a orientação em Lima (2001, p. 4), “exercícios de manipulação devem ser comedidos, simples, elegantes e , sempre que possível, úteis para emprego posterior”.

O problema desse intuito, embora seja também válida pela demanda dos estudantes em vestibulares, é que se passa a impressão equivocada e muito difundida de que a Matemática é, em si, a pura técnica de manipulação. Isso exclui todos os outros contextos os quais a Matemática pode e deve ser inserida.

Por outro lado, nos deparamos também com uma maior exploração da matemática dentro da manipulação. Iezzi e Hazzan (2019) trazem exemplos variados e preparam o aluno para lidar com as mais diferentes formas de expressões, como no trecho extraído abaixo onde vemos conceitos trigonométricos dentro de um sistema linear.

Figura 3.5 – Trecho de exercício proposto por Iezzi e Hazzan (2019).

348. Escreva na forma matricial os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y + 4z - t = 8 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ -x - 2y + z - 3t = 1 \\ -5x - y + 6t = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ -mx + ny = e \\ abx - b^2y + mz = f \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y + 2z = 7 \\ + 7y - z = 0 \\ 4x + \sqrt{3}y + 2z = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -x + 4y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax - by + 2z = 1 \\ a^2x - by + z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - z = 3 - t \\ -x - y - 2z = 1 - 3t \\ 5x + 3z = 7 + t \end{cases}$

h) $\begin{cases} (\text{sen } a)\, x - (\text{sen } b)\; y = 1 \\ (\cos b)\, x + (2 \cos a)\, y = -1 \\ (\text{sen } b)\, x - (3 \cos a)\, y = -2 \end{cases}$ em que *a*, *b* são constantes dadas.

Fonte:(IEZZI; HAZZAN, 2019, p. 141).

Podemos perceber que, em ambas obras, as abordagens e finalidades são válidas e expressam diferentes necessidades dentro da matemática. Em Dante e Viana (2008) é notório a presença de uma aplicação maior e uma preocupação com a contextualização do problema de certa forma. Enquanto em Iezzi e Hazzan (2019), embora não tenhamos nenhum exercício extraído de vestibulares, percebemos a excessiva quantidade de problemas para treino da manipulação rápida e fixação de conceitos.

Um último ponto interessante na comparação dos exercícios apresentados é o fato de que todos os autores dos livros estudados fizeram uso do método de resolução de problemas de Polya (POLYA, 1995). Em vários momentos no decorrer da resolução dos exercícios podemos ver os traços da metodologia para compreensão total do que precisamos encontrar e como encontrar. Essa metodologia será abordada no Capítulo 4.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - POLYA

Para o referencial teórico, iremos fazer uso das reflexões de Polya (1995) e Pompeu Junior (2012 apud MEDEIROS, 2014), a partir de materiais encontrados com pesquisa na internet e em bilbiotecas virtuais e acervos acadêmicos.

George Polya[1], é um dos grandes nomes da vertente de Resolução de Problemas, será nosso guia para a resolução dos problemas propostos na sequência didática, nos capítulos posteriores.

No século XX, a matemática servia à um propósito, assim como as várias matemáticas que criamos e ressignificamos com o passar dos séculos. Seu objetivo naquele tempo era instruir e disciplinar basicamente, operários. Era necessário saber memorizar e repetir, sem nunca precisar questionar o restante da linha de produção. O método de fato foi eficaz para as necessidades daquela época e para a população em geral, porém novos tempos vieram.

No final do século XX, já se notavam as consequências da técnica utilizada: os alunos não aprendiam. Vale aqui a reflexão de Freire (2001, p. 259)

> É que não existe ensinar sem aprender e com isto eu quero dizer mais do que diria se dissesse que o ato de ensinar exige a existência de quem ensina e de quem aprende. Quero dizer que ensinar e aprender se vão dando de tal maneira que quem ensina aprende, de um lado, porque reconhece um conhecimento antes aprendido e, de outro, porque, observado a maneira como a curiosidade do aluno aprendiz trabalha para apreender o ensinando-se, sem o que não o aprende, o ensinante se ajuda a descobrir incertezas, acertos, equívocos.

Ou seja, se não havia o aprendizado, também não havia o ensino. A comunidade matemática passou a pensar em como desenvolver a compreensão dos alunos e o ensino efetivo. Foi a partir daí que surgiu a resolução de problemas como método, pois foi observado que era um bom meio de se aprender matemática e entendê-la de fato. Ao destrinchar cada etapa, desde a interpretação até a validação da solução final para um problema aleatório, destacou-se a necessidade de compreender vários processos matemáticos simultâneos.

Embora o método tenha sido criado com um objetivo complexo, o que vemos hoje em dia é o uso para resolver problemas considerados automáticos, padronizados e repetitivos. O método dá embasamento também para exercícios com essa finalidade, porém precisamos ser críticos e fazer uso de toda a potencialidade que temos em mãos. Com o passo a passo detalhado posteriormente, os alunos conseguem resolver problemas muito mais complexos e ricos de informações, algo que não vemos acontecer com frequência no Ensino Básico e nos materiais didáticos.

Para iniciar nossas percepções, é preciso ressaltar a importância de escolher o problema correto e apropriado para cada turma. De acordo com Pompeu Junior (2012 apud MEDEIROS, 2014),

[1] Matemático búlgaro; Budapeste, 13 de dezembro de 1887 — Palo Alto, 7 de setembro de 1985.

> O problema deve ser bem escolhido, nem muito fácil nem muito difícil, natural e interessante. As partes principais do problema devem estar em condições de serem identificadas, isto é, o que se solicita, os dados e as condicionantes.

Uma vez que verificamos essa condição, da escolha ideal do problema, conseguimos avançar mantendo a motivação dos alunos e vontade de solucionar o que foi proposto. No caso do problema não se adequar, perceberemos a desatenção natural, ou por ser um problema muito fácil ou por ser interpretado como impossível de resolver pela turma.

Segundo Polya (1995), podemos fazer uso de quatro etapas para resolução de qualquer problema apresentado, desde que adequado e suficientemente interessante. Em cada uma das etapas, vamos nos perguntar:

a) Por onde começar?

b) O que posso fazer?

c) Qual a vantagem em assim proceder?

Essas reflexões nos guiarão para a resolução.

4.1 COMPREENDER O PROBLEMA

Com o problema enunciado, conseguimos interpretá-lo? Quais dados nós temos? Eles são suficientes? O que consta no enunciado da questão? Devemos ler o enunciado quantas vezes forem necessárias para que tenhamos a interpretação correta. Sem isso, podemos nos distanciar do objetivo no decorrer da resolução.

Podemos ainda dentro dessa etapa, pensar em como aperfeiçoar a compreensão. Verificando as principais partes, os principais dados, conseguimos caminhar para a ideia de elaboração de um plano.

4.2 ESTABELECER UM PLANO

A partir dos principais dados, vamos considerar o problema sob diferentes pontos de vistas (por isso, é interessante juntar duplas na resolução de problemas menos imediatos, assim os alunos podem discutir mais de um plano e considerar diferentes ideias).

Devemos recordar dos exercícios que já fizemos ao longo da vida e tentar relacionar com o problema à nossa frente. Já precisamos encontrar uma incógnita parecida? Com mesmo número de váriavéis? Ou quem sabe um enunciado minimanente parecido? Todas as ideias são bem vindas, pois estes planos iniciais, embora nem sempre sejam de imediato o que soluciona totalmente o problema, podem ser aperfeiçoados até o plano (ou estratégia) ideal.

Nesta etapa, precisamos ser pacientes e lembrar que cada nova ideia é interessante, mesmo que não seja perfeita. Segundo Polya (1995, p. 26), a ideia incompleta “se parecer vantajosa, deve examiná-la mais demoradamente. Se parecer confiável, deve verificar até onde ela o leva a reconsiderar a situação". Com o tempo, temos um plano cada vez mais coerente e adequado, o qual respeita e responde todas as nuances do problema, ou pelo menos partes dele.

4.3 EXECUÇÃO DO PLANO

Iniciamos a execução apenas quando estivermos certo das etapas anteriores, quando tivermos considerado todas as variantes e entraves. Assim, obteremos confiança no plano elaborado.

Realizmaos o plano de forma detalhada, avaliando as respostas e as conexões formadas durante o processo. Revisitamos as respostas de cada pequeno detalhe, desde os operacionais (podem surgir pequenos erros ao realizar contas básicas por exemplo, por simples desatenção) até os contextuais, onde deve se valer a coerência e intuição. Os resultados fazem sentido? Avaliamos sempre que executarmos uma ação.

Por fim, devemos ter uma resolução detalhada e correta, uma vez que foram verificados os macros e micros dentro do problema. Conseguimos partir para a última etapa.

4.4 RETROSPECTO E VALIDAÇÃO

Avaliamos nossa própra resolução. Visitamos cada conclusão novamente, tentando simplificar, abreviar, e até cortar etapas desnecessárias. Muitas vezes, percebemos um passo aqui e ali que não era necessário, às vezes ele já estava implícito, como no caso de algumas demonstrações que a própria hipótese garante respostas.

Ganhamos no final do processo uma nova resolução, seja ela mais simples ou mais rebuscada, quando na análise percebemos também a falta de algum comentário. De qualquer forma, será ainda melhor que a primeira versão de resolução que criamos.

Tendo em mente esse método de resolução, vamos aplicá-lo nas atividades propostas pela sequência didática, onde usamos as quatro etapas na resolução de exercícios mais complexos sobre economia e na aplicação em geometria.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Na sequência didática proposta, buscamos extrair o melhor das obras analisadas e aperfeiçoar os pontos necessários para uma aprendizagem mais completa, sem lacunas. Ao tentar equilibrar a didática e aplicação geométrica de Dante e Viana (2008) com a praticidade e complexidade de Iezzi e Hazzan (2019), conseguimos estruturar um material base com uma proposta que mescla a qualidades dos dois tratamentos.

Utilizaremos inicialmente um exercício voltado para economia (aproveitando para explicar economia aberta e economia fechada) e também um com aplicação geométrica (avaliar comportamento de retas no espaço através de sistemas lineares) este fazendo uso do Geogebra.

É importante ressaltarmos que o intuito da sequência não é “engessar” a aula que será dada, mas sim que sirva como um apoio. Qualquer um que tenha estado em uma sala de aula sabe que o ambiente é vivo e necessita de improvisações, conforme a discussão é guiada pelos próprios estudantes.

5.1 ATIVIDADE 1: INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS BÁSICOS

Objetivo principal: Os estudantes precisam ser capazes de identificar e nomear todas as partes de um sistema linear, além de conseguirem diferenciar as equações gerais de equações lineares. Saber resolver com pelo menos um método e classificar os sistemas.

Objetivo secundário: Despertar o interesse pelo processo, fazer com que entendam a finalidade e usabilidade do conceito para além da esfera vestibular e concursos.

Tempo de aplicação: 100 minutos (40 minutos para retomada do conceito e nomenclaturas; 20 minutos para resolução de dois exercícios; 40 minutos correção dos dois usando os 3 métodos diferentes)

Descrição: Deixar claro aos estudantes que começaremos a aprender um método matemático que é usado no mundo todo para resolver diversos problemas em nossa sociedade, e que ao final de nosso estudo poderemos resolver dois deles: um no campo da economia e um no campo da engenharia. Tornar nosso objetivo final interessante e despertar a curiosidade.

Também comentar que aprenderemos não apenas sobre matemática nas próximas aulas, mas também sobre economia, conversão do real para outras moedas e uso de um software com muitas possibilidades a serem exploradas.

Para que isso seja possível daqui algumas semanas, vamos retomar o conceitos de sistemas lineares que já vimos no Ensino Fundamental e aprofundar lentamente.

Explicar o conceito de equação linear e como identificar.

Como exercício pedir para que classifiquem como equação linear ou não cada uma das equações abaixo (DANTE; VIANA, 2008, p. 97).

a) $5x - 2y = 6$

b) $x + 4y - z = 0$

c) $x + y - z - t = 0$

d) $x^2 + y = 10$

e) $3xy = 10$

f) $x + y = z - 2$

g) $2x - y + xy = 8$

h) $2x + y + 5z = 15$

i) $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

Explicar o conceito de sistema linear, usando exercícios da preferência do docente. O conteúdo deve englobar os pontos abaixo para que os estudantes tenham a base necessária para próximas aulas.

a) Estrutura do sistema linear e nomear os componentes;

b) Explicação sobre conceito de solução;

c) Possibilidades (determinado, indeterminado e impossível);

d) Matrizes e determinantes;

Técnicas de resolução a serem apresentadas:

a) Método da soma de equações (ou subtração);

b) Método da substituição;

c) Teorema de Cramer;

d) Escalonamento.

Exercícios usando a técnica que preferir. Escolher 4 exercícios, dois mais óbvios para explicar que também podemos usar um pouco de lógica e observação em alguns casos, (sem necessidade de métodos) e dois que exijam o uso de uma das técnicas necessariamente. Solicitar também a classificação de cada um.

Pontuar que devemos ser críticos quanto ao método escolhido. Se o sistema é 2×2 e pode ser resolvido com certa observação, por que utilizar o método de Cramer, calculando vários determinantes? Por outro lado, para sistemas maiores, identificar se este já está no formato aproximado para escalonamento ou não, pode ser útil.

Nos exemplos, embora tenhamos que usar o método da soma ou qualquer outro para resolver, os estudantes são capazes de solucionar fazendo cálculos mentais.

Exercício 1 - Resolver (retirado do canal Demóclis Rocha no Youtube[1])

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

[1] <https://www.youtube.com/watch?v=ej9UWZAI8Zg&ab_channel=Matem%C3%A1ticacomDem%C3%B3clisRocha>. Acesso em: 10 nov. 2021.

Exercício 2 - Resolvendo

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$$

Substituindo $x = 6$ em uma das equações:

$$x + y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 6 + y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = 10 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4.$$

A solução é dada por $S = (6, 4)$.

Os exemplos seguintes podem ter a tentativa de resolução apenas observando, para demonstrar a dificuldade. Após isso, deixamos os estudantes resolverem com o método que preferir. Abaixo, exemplo de sistema possivel indeterminado.

Exercício 3 - Resolver:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}.$$

A seguir, um exemplo de sistema impossível (IEZZI; HAZZAN, 2019, p. 161).

Exercício 4 - Resolver:

$$\begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}.$$

Observação dos primeiros problemas que são mais diretos, devemos analisar com alunos se eles enxergam algum padrão nas equações, se conseguimos extrair alguma resposta sem uso do papel, apenas pensando. Após mostrar a solução, resolvemos com algum método.

No segundo e no quarto exercício, devemos resolver por dois métodos para completar a explicação dos 4.

5.2 ATIVIDADE 2: INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS BÁSICOS

Levando em consideração uma familiaridade prévia dos alunos com sistemas lineares, por conta do Ensino Fundamental, continuamos para a segunda parte dos conceitos iniciais.

Objetivo principal: O principal objetivo é que sejam propostos mais exercícios para que todos possam aprender todos os métodos, forçando-os a não usar a estratégia que usaram na última aula.

Tempo de aplicação: 100 minutos.

Descrição: Os exercícios ficam à critério do docente. Uma sugestão é utilizar exercícios sortidos do livro de Iezzi e Hazzan (2019), explorando o uso de incógnitas fora do padrão.

Introduzir o conceito de grau de indeterminação (quantidade de variáveis livres, $n - m$) e também dois exemplos de aplicação geométrica.

5.3 ATIVIDADE 3: APROFUNDAMENTO DOS CONCEITOS COM EXERCÍCIO SOBRE ECONOMIA

Objetivo principal: Introduzir conceito de economia simplificado, fornecendo condições para que os estudantes entendam de maneira geral e saibam interpretar o exercício proposto. É esperado que nesse momento os estudantes já tenham familiaridade com os conceitos matemáticos abstratos de resolução de sistemas, pois a proposta para essa aula vai além do operacional.

Tempo de aplicação: 100 minutos.

Descrição: Explicar conceitos introdutórios de economia. Deixar claro que será uma simplificação do mundo real, para que entendamos o conceito[2]: "Economia é o conjunto de atividades desenvolvidas pelos homens visando a produção, distribuição e o consumo de bens e serviços necessários à sobrevivência e à qualidade de vida"

Vamos considerar que a economia é composta por três setores: serviços, eletricidade e petróleo. Cada setor produz apenas um produto (que pode ser um bem ou serviço) e a receita é gerada a partir da venda desses produtos. Cada setor compra produtos das outras e de si mesma. Nenhum produto é comprado de fora da região ou vendido. Ou seja, a economia é fechada.

Para cada setor, vamos supor que a receita é igual às despesas. Esta é uma economia fechada em equilíbrio.

[2] <https://www.fea.usp.br/economia/graduacao/o-que-e-economia>. Acesso em: 31 out. 2021.

Tabela 5.1 – Consumo e produção para três setores da economia.

		Produção de		
		Serviços	Eletricidade	Petróleo
Consumo de	Serviços	1/4	1/3	1/2
	Eletricidade	1/4	1/3	1/4
	Petróleo	1/2	1/3	1/4

Fonte: Tabela 2.4 de Poole (2016, p. 107).

Observamos que, como comentado anteriormente, um setor não se sustenta sozinho. Ele precisa de produtos ou serviços de outros setores, além dele próprio. Interpretando, temos que o setor de serviços consome $\frac{1}{4}$ da própria produção, $\frac{1}{3}$ da produção de eletricidade e $\frac{1}{2}$ da produção de óleo. A análise é análoga para o restante dos setores.

Observamos também que a soma dos elementos de cada coluna sempre resulta em 1, indicando que toda produção é consumida, de cada uma das 3 indústrias.

Pergunta: Qual deve ser a razão entre as receitas para que o sistema se mantenha em equilíbrio?

Anotar com os alunos as reflexões em folha separada, em cada etapa. A quais conclusões chegamos com cada indagação?

Passo 1: Compreender o problema. Quais dados nós temos? O que queremos descobrir? Esses dados são suficientes?

Passo 2: Traçar uma estratégia. Já conhecemos algum problema similar? Será que conseguimos transformá-lo para que seja mais fácil de solucioná-lo? Qual será nosso plano para resolvê-lo?

Passo 3: Executar. Vamos considerar x_1, x_2 e x_3 as receitas em milhões de reais das indústrias de serviço, eletricidade e petróleo, respectivamente. Assim, temos que as equações abaixo satisfazem nossos critérios:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1 \longrightarrow \text{Serviços} \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_2 \longrightarrow \text{Eletricidade} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = x_3 \longrightarrow \text{Petróleo} \end{cases}$$

Desenvolver o exercício e apresentar conceito de sistema homogêneo.

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{3}{4}x_3 = 0 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema será dada por

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Após o escalonamento obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $m < n$ (o número de linhas não nulas é menor que o número de linhas da matriz associada ao sistema) temos um sistema indeterminado. Portanto, várias soluções. Isso demonstra um viés de proporção. A solução geral é da forma $S = t, t, 3t/4, t \in \mathbb{R}$.

Passo 4: Avaliar o resultado. Ele satisfaz os critérios dados pelo problema? Respeita todas as condições? Podemos usar a proporção e testar com algum valor fixo para t, validando a resposta?

Na segunda metade da aula, deixar que tentem resolver em duplas. Fazer a leitura com os alunos e esperar 30 minutos até resolução com resposta. Pontuar que façam uso das quatro etapas que fizemos no último exercício: compreensão, estabelecimento de plano, execução e retrospecto.

O objetivo da resolução em dupla é que compartilhem e discutam todos os dados disponíveis, por mais de um ponto de vista. Pedir para que anotem todas as conclusões da dupla em cada uma das etapas, com detalhes do raciocínio, independente se conseguiram chegar no resultado correto ou não. Estes serão analisados depois para avaliar.

Exercício proposto (Exercício 24 de Poole (2016, p. 116)) adaptado pela autora. Suponha que os setores do carvão e do aço formem uma economia fechada. Cada R$1 produzido pela indústria do carvão, usa R$0,30 de carvão e R$0,70 de aço. Cada R$1 produzido de aço requer R$0,80 de carvão e R$0,20 de aço. Encontre a produção anual (saída) de carvão e de aço, se a produção anual total é de 20 milhões de reais.

Recolher as respostas primeiro e depois solucionar usando o passo a passo, pedindo ajuda dos alunos para levantar as dúvidas e conclusões.

Solução:

Passo 1: Compreender o problema Temos todos os dados? Estes são suficientes? O que queremos descobrir?

O exercício nos pede como solução a produção anual de carvão e a produção anual de aço. Estas são nossas incógnitas, portanto vamos nomeá-las de x e y as quantidades produzidas de carvão e aço, respectivamente.

Passo 2: Traçar uma estratégia Qual estratégia vamos utilizar? Como vamos usar as informações que temos?

Tabela 5.2 – Dados do exercício proposto.

		Produção de	
		carvão	aço
Consumo de	carvão	0,3	0,8
	aço	0,7	0,2

Fonte: Elaborada pela autora.

Primeiro, vamos reunir todas as informações. Sabemos que a soma das produções de cada uma é igual a R$20 milhões. Podemos interpretar os valores da tabela 5.2 como uma porcentagem, pois a cada R$1 produzido de carvão, 30% (R$0,30) é consumo de carvão e 70% (R$0,70) é consumo de aço. Da mesma forma, a cada R$1 de aço, 80% (R%0,80) é consumo de carvão e 20% (R$0,20) é de aço.

No exemplo anterior, como a economia estava em equílibrio, podiamos considerar que a produção era igual ao consumo, ou seja, não haviam lucros. Neste caso, o problema não nos dá essa informação, portanto vamos supor que está e discutir o outro caso.

Passo 3: Execução Considerando que a economia está em equilíbrio temos a relação:

$$\begin{cases} x.(\frac{3}{10}) + y(\frac{7}{10}) = x \\ x.(\frac{8}{10}) + y.(\frac{2}{10}) = y \end{cases} \tag{5.1}$$

Uma vez que 30% da produção anual de carvão somado à 70% da produção anual de aço é igual ao consumo total de carvão, que é igual nesse caso à produção de carvão. Analogamente para a segunda equação.

Organizando o sistema na forma matricial temos que:

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{7}{10} & 0 \\ \frac{8}{10} & -\frac{8}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

É imediato que $x = y$ é a solução do sistema linear homogêneo. O sistema admite infinitas soluções. Impondo a condição do problema de que produção anual total é de 20 milhões de reais, concluimos que a solução é dada por $S = \{x = 10, y = 10\}$.

Passo 4: Conseguimos validar essa informação? E se a economia não estiver em equilíbrio, é possível resolver o problema?

Vamos substituir a solução no sistema. De fato,

$$\begin{cases} x.(3/10) + y(7/10) = x \\ x.(8/10) + y.(2/10) = y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 10.(3/10) + 10.(7/10) = 10 \\ 10.(8/10) + 10.(2/10) = 10 \end{cases}$$

Portanto, a produção anual de cada uma precisa ser de 10 milhões de dólares para que os critérios sejam satisfeitos.

Se a economia não estiver em equilíbrio, não temos ideia da relação entre o consumo e o uso. Assim, não podemos usar a relação em (5.1), pois a produção anual pode ser maior ou menor que o consumo anual, trazendo uma desigualdade que foge das equações lineares. O problema torna-se impossível de resolver por falta de dados.

5.4 ATIVIDADE 4: CONSOLIDAÇÃO DA TEORIA COM EXERCÍCIOS COM O USO DO GEOGEBRA

Objetivo principal: Os estudantes precisam ser capazes de fazer uso das principais soluções do software e construir o exercício apresentado. Também precisam entender os casos em que o software irá aparentar uma solução, porém equivocada, deixando claro o quanto precisamos ser críticos com relação à essas resoluções rápidas dadas por programas computacionais.

Tempo de aplicação: 100 minutos.

Materiais necessários: Folha de papel, caneta, 1 computador com acesso à internet para cada dupla (ou com aplicativo do Geogebra baixado previamente).

Descrição: Nesta aula, usaremos os mesmo conhecimentos das atividdes anteriors, porém agora com aplicação geométrica. Vimos que resolver o problema dentro da economia nos permite encontrar valores ideias e fixos para que a economia se mantenha em equilíbrio e até proporções com incógnitas variáveis entre elas para que se mantenham estáveis.

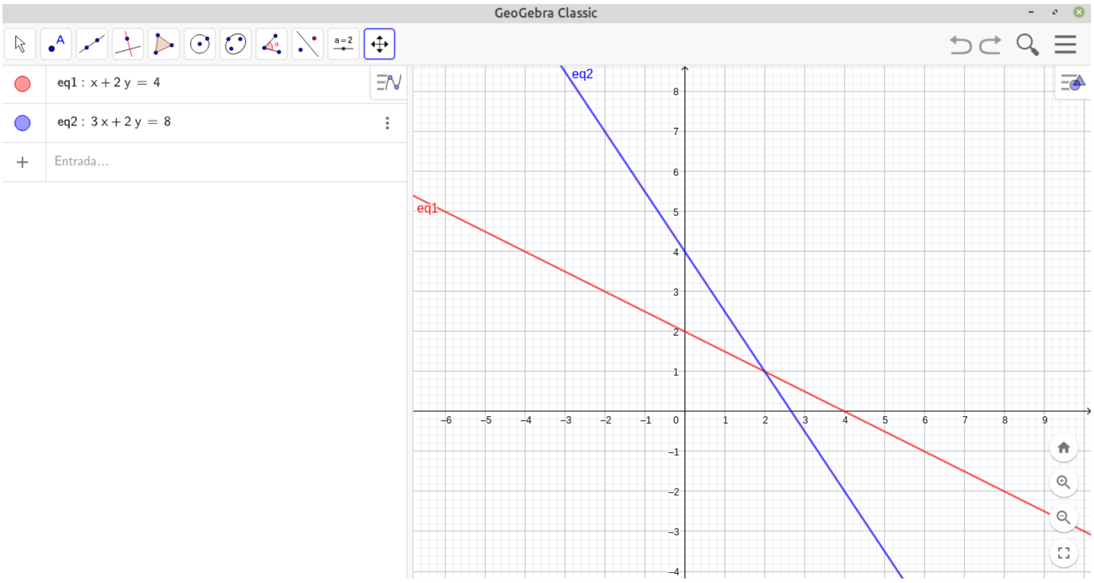
No campo geométrico, conseguimos usar as soluções e não soluções dadas pela resolução de sistemas para estudar o comportamento das figuras geométricas, sejam elas pontos, retas, planos e mais. Já vimos como isso acontece na Atividade 2.

Exercício proposto por Dante e Viana (2008, p. 99). Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}.$$

Vamos primeiro inserir o sistema linear dado pelo exercício dentro do software Geogebra, e analisar seu comportamento quando interpretado geometricamente. As equações abaixo, quando apresentadas de forma separadas, são interpretadas pelo programa como duas retas.

Figura 5.1 – Ambiente do Geogebra para inserção do sistema linear.



Fonte: Elaborada pela autora.

Como já foi discutido que a solução de um sistema composto por equações de duas incógnitas irá nos gerar um ponto em comum entre as retas, vários pontos ou nenhum, no caso do sistema ser impossível. No exemplo acima, conseguimos classificar o sistema sem resolvê-lo, apenas observando a interpretação? Qual a classificação do sistema?

Vamos anotar todos os passos para conclusão do problema. As reflexões dos alunos serão analisados posteriormente como avaliação.

Passo 1: Compreender o problema Temos todos os dados? Já resolvemos algum exercício parecido antes? Qual a incógnita? O que queremos descobrir?

Temos as equações, que podem ser representadas por duas retas no plano. Já sabemos resolver sistemas, portanto podemos compor um sistema com essas equações, partindo de algo que já sabemos fazer.

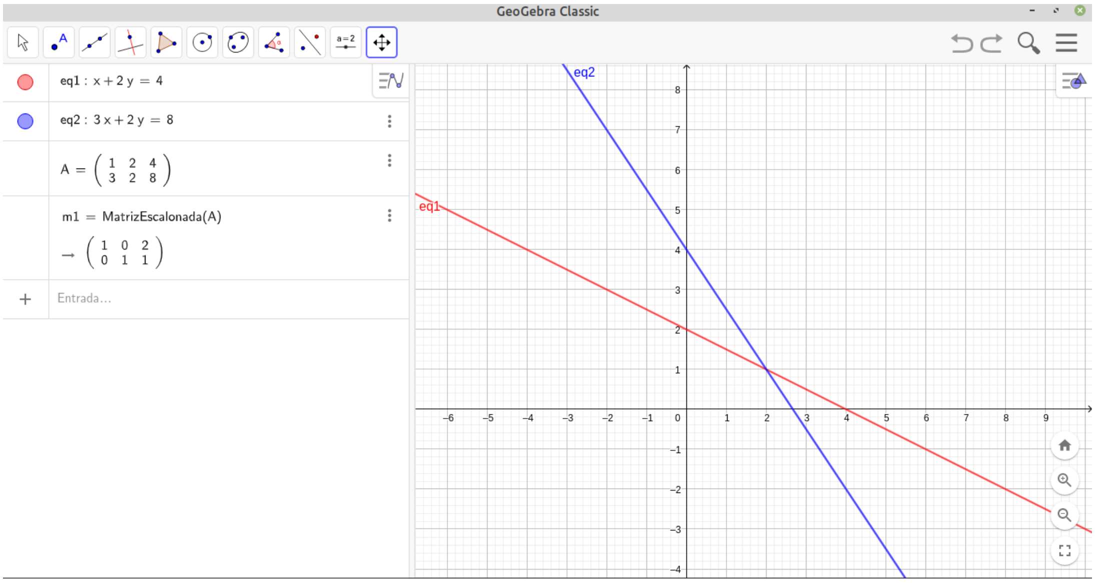
Passo 2: Traçar uma estratégia Qual nosso plano para resolver o problema e encontrar a resposta para o que foi pedido?

A estratégia será definir (construir) o sistema de equações, resolvê-lo e identificar se de fato a solução sugere o mesmo que o observado, de que o problema tem uma solução determinada.

Passo 3: Execução Podemos utilizar software Geogebra para resolver o sistema, se transformarmos ele em uma matriz.

Usando o comando abaixo e inserindo a letra maiúscula que corresponde a matriz que criamos em <Matriz> , o programa nos dá seu formato ideal e escalonado para que façamos a análise.

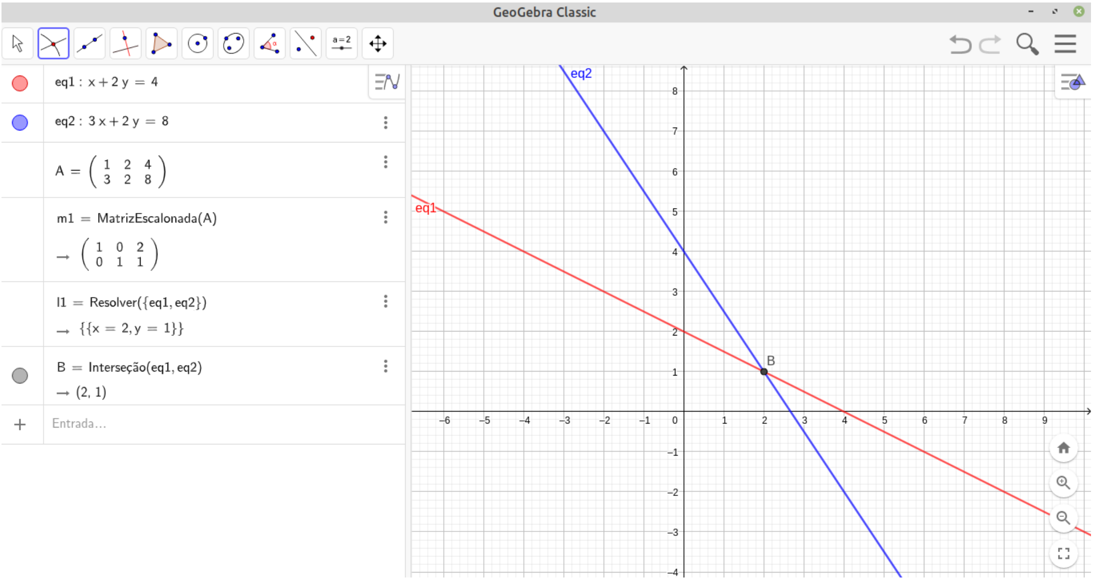
Figura 5.2 – Ambiente do Geogebra para o escalonamento de uma matriz.



Fonte: Elaborada pela autora.

Passo 4: Vamos analisar a resposta e ver se a hipótese criada foi validada. O sistema de fato nos dá uma solução determinada, exatamente o ponto de intersecção das retas. Verificamos isso através do comando <Resolver>. Podemos validar novamente usando o comando na barra de ferramentas exibida no canto superior esquerdo, em “Ponto” → “Intersecção de Dois Objetos”.

Figura 5.3 – Ambiente do Geogebra para determinar a interseção entre objetos.



Fonte: Elaborada pela autora.

O resultado novamente será o ponto que encontramos no escalonamento do sistema.

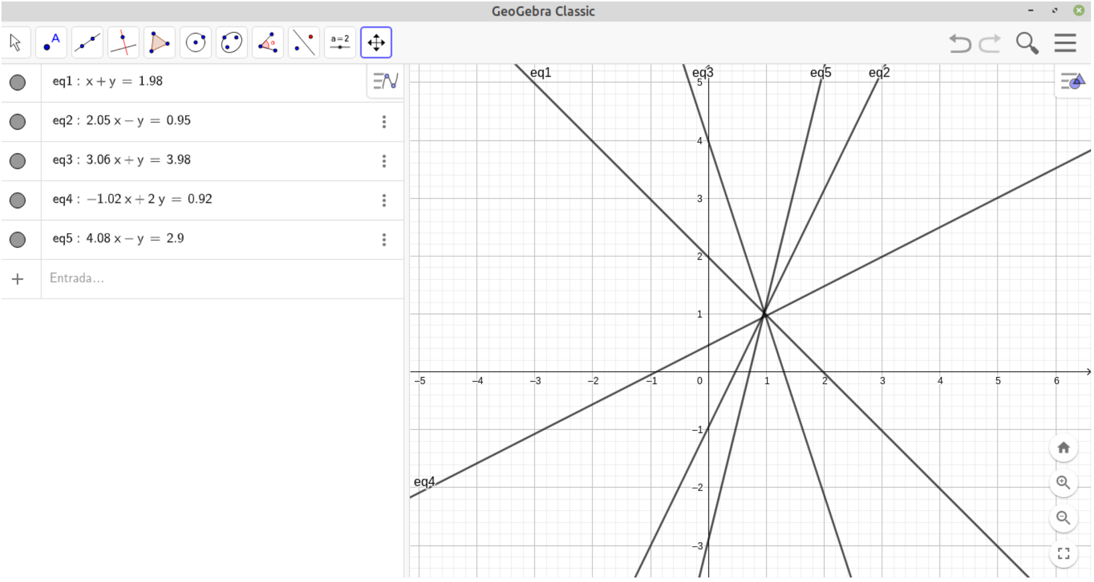
Exemplo proposto por Lindfield e Penny (2012, p. 106).Adaptado pela autora Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1,98 \\ 2,05x - y = 0,95 \\ 3,06x + y = 3,98 \\ -1,02x + 2y = 0,92 \\ 4,08x - y = 2,9 \end{cases} .$$

Neste exercício, iremos definir o problema, definindo as retas para depois analisar. Vamos manter esse último exercício em uma aba, para fins de consulta, e criar um novo arquivo ou aba para este exercício novo.

Na <Entrada>, vamos definir as cinco retas

Figura 5.4 – Visualização geométrica do sistema linear do exercício proposto.



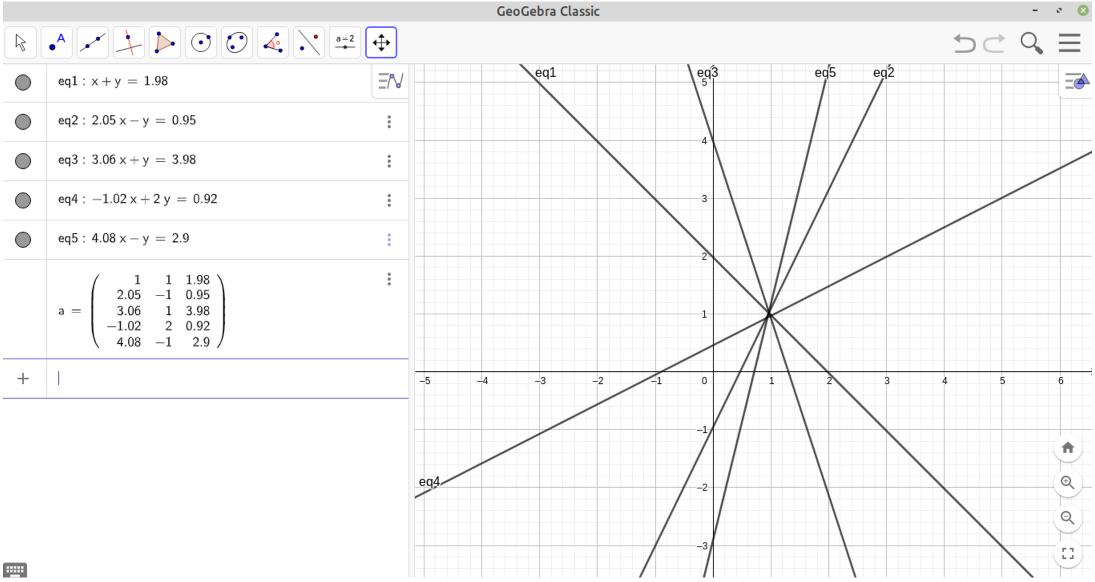
Fonte: Elaborada pela autora.

É possível classificar o sistema que será composto por essas cinco equações apenas observando a interpretação geométrica?

Passo 1: Compreender o problema Novamente temos as equações bem definidas, nossas incógnitas estão claras. É possível classificar o sistema apenas observando a interpretação geométrica? Aparentemente, o sistema será possível e determinado, visto que parece haver um ponto em comum entre as retas.

Passo 2: Traçar uma estratégia Como já resolvemos algo parecido, vamos utilizar o mesmo processo, transformando o sistema em uma matriz:

Figura 5.5 – Associando a matriz do sistema linear no Geogebra.

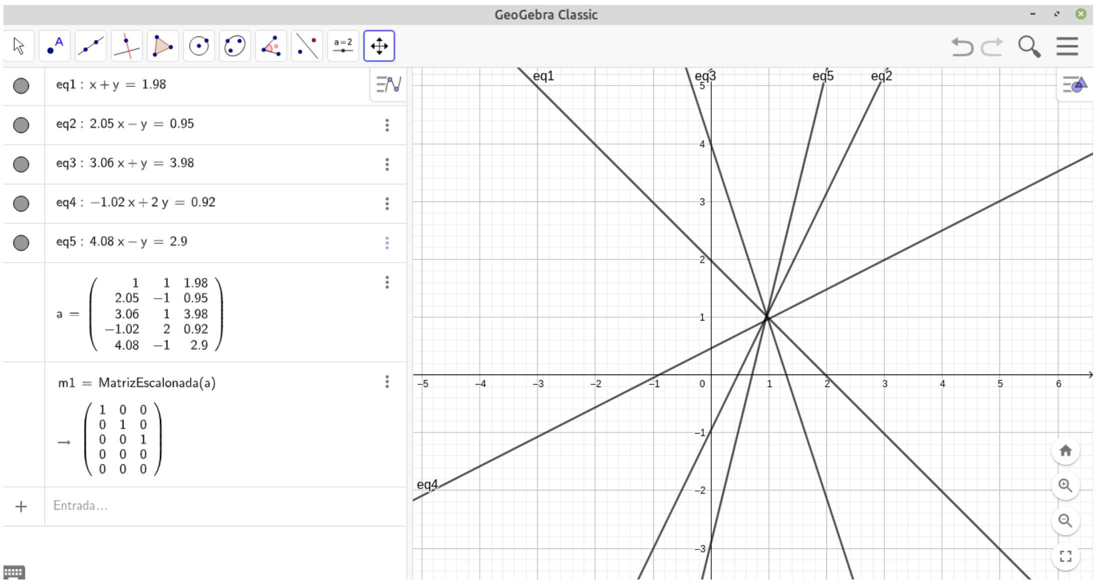


Fonte: Elaborada pela autora.

Utilizando o software Geogebra vamos determinar a matriz escalonada, para depois interpretar e tirar conclusões.

Passo 3: Execução Colocando o plano em ação, vamos criar a matriz e usar o comando <MatrizEscalonada> .

Figura 5.6 – Escalonando uma matriz no Geogebra



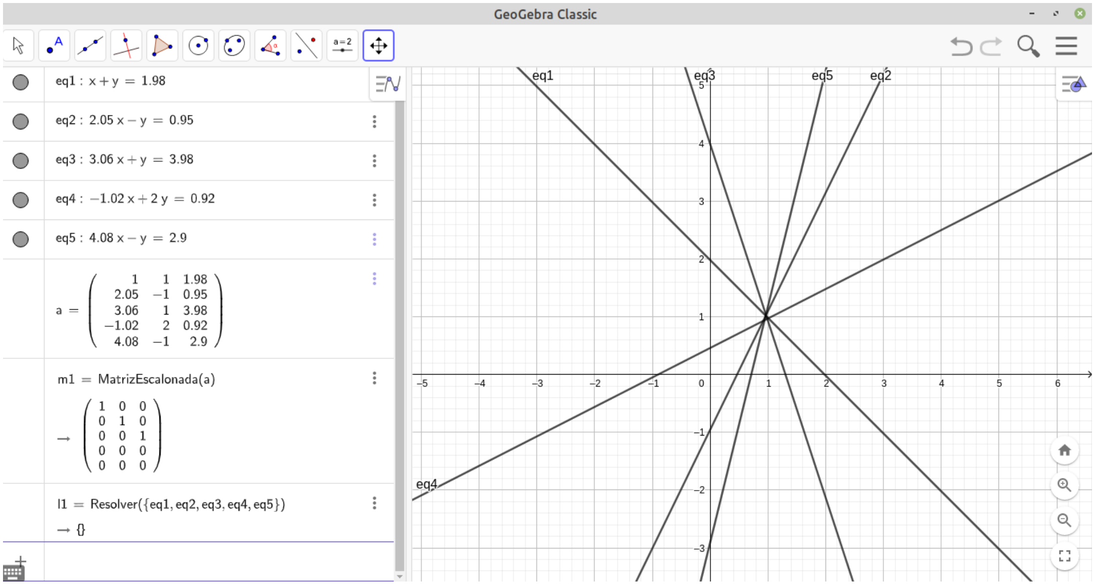
Fonte: Elaborada pela autora.

Passo 4: Qual foi o resultado que encontramos? Podemos validá-lo usando a ferramenta <Intersecção entre Dois Objetos>? Como vamos usar, sendo que temos cinco objetos para análise?

Verificamos que não obtivemos a solução. A matriz escalonada nos fornece a informação que o sistema linear é impossível, ou seja, não tem solução. Mas como pode ser isso? Geometricamente não determinamos um único ponto de interseção?

Usando a ferramenta para achar o ponto em comum, duas retas por vez, e aproximando o zoom da origem do plano cartesiano, vemos que elas na verdade não existe um ponto em comum entre as cinco retas, validando o resultado de que o sistema é impossível.

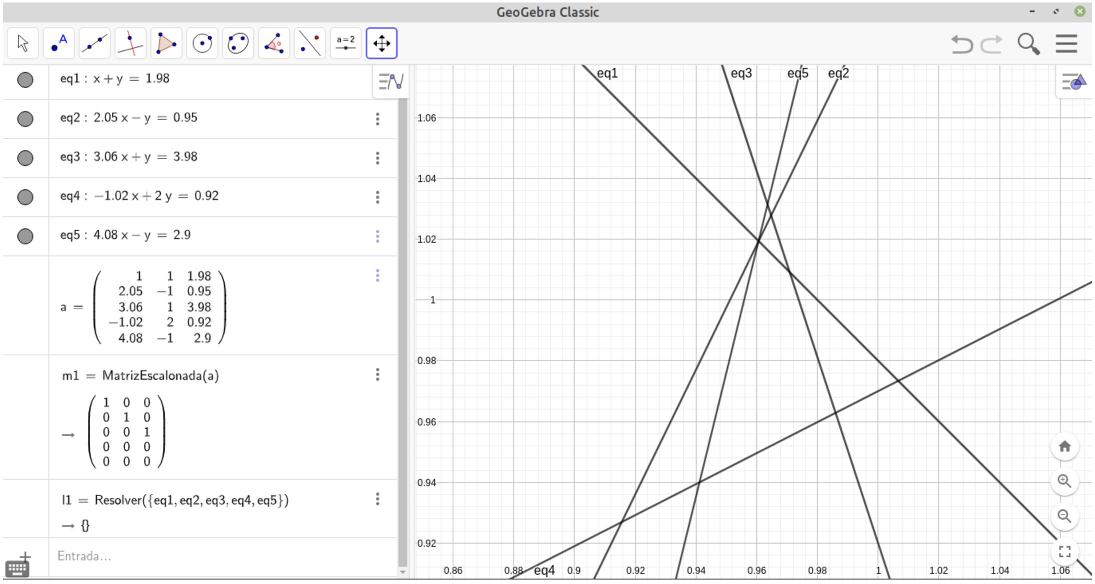
Figura 5.7 – Resolvendo um sistema linear no Geogebra



Fonte: Elaborada pela autora.

Mostrar aos alunos que não é possível classificar apenas com observação, pois podem acontecer coisas do tipo. Visualmente precisamos fazer um zoom da região que supostamente contém o ponto comum à cinco retas.

Figura 5.8 – Ampliação da região das interseções das retas.



Fonte: Elaborada pela autora.

Verificamos que, em uma visualização "mais próxima" as retas realmente não possuem um ponto em comum.

5.5 ATIVIDADE 5: CONCLUSÃO, AVALIAÇÃO E FEEDBACK

Esta aula deve ser ministrada em ambiente com computadores divididos em duplas, pois vamos resolver os exercícios propostos de avaliação.

Pela complexidade dos problemas e introdução de muitos conceitos diferentes, é válido observar mais do que a solução final. Olhar e avaliar o todo. Os conceitos de economia ficaram claros? Em qual ponto tiveram dificuldade? Onde ocorreram os principais erros? No Geogebra, os alunos fizeram o uso correto das ferramentas disponíveis?

Nesta aula, devemos resolver os exercícios com os alunos, destacando as reflexões mais interessantes e plausíveis.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredito que conseguimos atingir o objetivo, o qual era apresentar uma sequência didática como material base para outros docentes, analisando e fazendo uso dos pontos fortes de cada um dos dois materiais iniciais. A escolha dos livros, os quais inicialmente não pareciam se complementar de nenhum modo, se mostraram essenciais em diferentes esferas do conhecimento.

Por outro lado, só conseguiríamos identificar se o material proposto de fato cumpriu com o prometido, o qual é ensinar aos alunos o método de resolução, após aplicação das atividades em sala de aula e avaliação do feedback dos próprios alunos e de suas respostas. Pela inviabilidade de aplicação pela situação pandêmica, não conseguimos afirmar com certeza se o material irá atender às expectativas criadas, embora acreditemos que sim.

O embasamento em Polya (1995) se mostrou necessário dada a complexidade dos exercícios propostos. Por existir a proposta de problemas mais "úteis" ao cotidiano e com mais aplicações, o passo a passo da interpretação e verificação dos resultados foi indispensável.

Após a estruturação e escolha dos exercícios usados na sequência didática e pensando na viabilidade dos recursos que temos hoje nas salas de aulas padrão no Brasil podemos levantar algumas críticas e dúvidas.

Primeiramente, onde utilizamos o software Geogebra, pode ser inviável para a maioria das escolas públicas e até particulares, pela necessidade dos equipamentos em boas condições para todos. Segundo, alguns exercícios podem ser pensados em uma escala ainda menor, com duas indústrias fictícias iniciais com dependência direta. Acredito que a abordagem seria mais suave e à passos mais lentos, ideal para a introdução de um conceito tão novo.

Essa avaliação constante da proposta é importante para que possamos adequar e aprimorar na transmissão do conhecimento.

Apesar disso, espero que a proposta seja muito explorada e repensada muitas vezes por especialistas e profissinais com mais experiência em campo, adaptando às necessidades e capacidades de cada turma. Uma sugestão é o uso em ambientes mais controlados e com nível de conhecimento maior sobre o tema, como em cursos preparatórios para as Olímpiadas de Matemática e para os anos iniciais de cursos superiores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática - Contexto e Aplicações: Manual do Professor**. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2008. Citado 16 vezes nas páginas 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25 e 32.

FREIRE, P. Carta de paulo freire aos professores. Estudos Avançados 15, v. 42, p. 259–268, Ago 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-40142001000200013>. Citado na página 21.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. 8. ed. [S.l.]: Atual, 2019. Citado 15 vezes nas páginas 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 24, 26 e 27.

LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de textos - Análise de livros de matemática para o ensino médio**. Rio de Janeiro: VITAE, IMPA e SBM, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 12, 18 e 19.

LINDFIELD, G.; PENNY, J. **Numerical Methods using MATLAB**. 3. ed. Oxford: Academic Press, 2012. Citado na página 34.

MEDEIROS, M. R. de. **O ensino de áreas e volumes com o uso de objetos manipulativos**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - UFSCar, Sorocaba, 2014. Citado na página 21.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 4, 5, 9, 20, 21, 22 e 39.

POMPEU JUNIOR, G. **Notas de aula da disciplina O Ensino de Ciências e Matemática através da Resolução de Problemas**. Sorocaba: [s.n.], 2012. Citado na página 21.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. 4. ed. São Paulo: Cengage, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.