



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



LARISSA LOIOLA DO NASCIMENTO

LADRILHAMENTOS REGULARES E SEMIRREGULARES DO PLANO

SÃO CARLOS  
2021

LARISSA LOIOLA DO NASCIMENTO

LADRILHAMENTOS REGULARES E SEMIRREGULARES DO PLANO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS  
2021

Loiola do Nascimento, Larissa

Ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano /  
Larissa Loiola do Nascimento -- 2021.  
43f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio

Banca Examinadora: João Carlos Vieira Sampaio,  
Luciene Nogueira Bertoncello, Wladimir Seixas

Bibliografia

1. Polígonos regulares. 2. Ladrilhamentos do plano. 3.  
Ladrilhamentos semirregulares. I. Loiola do Nascimento,  
Larissa. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET**  
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905  
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 35/2021/CCM/CCET

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso****Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)****FOLHA DE APROVAÇÃO****LARISSA LOIOLA DO NASCIMENTO****LADRILHAMENTOS REGULARES E SEMIRREGULARES DO PLANO****Trabalho de Conclusão de Curso****Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 24 de novembro de 2021

**ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	João Carlos Vieira Sampaio
Membro da Banca 1	Luciene Nogueira Bertoncello
Membro da Banca 2	Wladimir Seixas



Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/12/2021, às 21:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio, Professor(a) do Magistério Superior**, em 02/12/2021, às 21:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciene Nogueira Bertoncello, Professor(a) do Magistério Superior**, em 03/12/2021, às 16:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0549861** e o código CRC **D2A97DD1**.

**Referência:** Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.022998/2021-74

SEI nº 0549861

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

## RESUMO

A técnica de ladrilhamento consiste em preencher o plano com figuras geométricas sem superposição ou espaços vazios. Apesar dessa técnica ser bem antiga, a ciência é recente e contém aspectos que ainda não foram desenvolvidos (SALLUM, 2007). Nessa perspectiva, o intuito deste trabalho é fazer estudos teóricos sobre conceituação e classificação de ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano. Como resultado, foi possível verificar que existem onze ladrilhamentos bem-comportados do plano, sendo que três deles são regulares e oito são semirregulares.

**Palavras-chave:** Polígonos regulares. Ladrilhamentos do plano. Ladrilhamentos semirregulares.

## ABSTRACT

The tiling technique consists of filling the plane with geometric figures without overlapping or empty spaces. Although this technique is quite old, the science is recent and contains aspects that have not yet been developed (SALLUM, 2007). From this perspective, the purpose of this work is to carry out theoretical studies on the conceptualization and classification of regular and semi-regular tilings on a plane. As a result, it was possible to verify that there are eleven well-behaved floor tiles, three of which are regular and eight are semi-regular.

**Keywords:** Regular polygons. Plane tilings. Semi-regular tilings.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplos de linhas poligonais	10
Figura 2.2 – Polígono convexo e não convexo	11
Figura 2.3 – Quadrilátero dividido em dois triângulos	13
Figura 2.4 – Pentágono dividido em três triângulos	14
Figura 2.5 – Polígono convexo de $n$ lados dividido em $n - 2$ triângulos	15
Figura 2.6 – Exemplo de ladrilhamento bem-comportado	17
Figura 2.7 – Exemplo de ladrilhamento que não atende a condição (ii) de bom comportamento	17
Figura 2.8 – Exemplo de ladrilhamento que não atende nenhuma condição de bom comportamento	18
Figura 2.9 – Classificação do vértice 8.4.8, percorrendo os polígonos em torno de um vértice (em vermelho) no sentido horário a partir de um octógono; e classificação do vértice 8.8.4, percorrendo os polígonos em torno de um vértice (em azul) no sentido anti-horário a partir de um octógono	19
Figura 2.10 – Vértices de tipos 3.4.6.4 e 3.6.4.4	19
Figura 2.11 – Vértice rodeado por três pentágonos regulares	21
Figura 2.12 – Caso que não define um ladrilhamento bem-comportado do plano	21
Figura 3.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão $k.l.m$ , em que $k$ representa todos os polígonos formados por um número ímpar de lados	23
Figura 3.2 – Ladrilhamento de padrão 3.12.12	25
Figura 3.3 – Ladrilhamento de padrão 4.6.12	27
Figura 3.4 – Ladrilhamento de padrão 4.8.8	28
Figura 3.5 – Ladrilhamento de padrão 6.6.6	29
Figura 4.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão $3.l.m.n$	31
Figura 4.2 – Ladrilhamento de padrão 3.6.3.6	32
Figura 4.3 – Ladrilhamento de padrão 3.4.6.4	33
Figura 4.4 – Ladrilhamento de padrão 4.4.4.4	34
Figura 5.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão $3.l.m.n.p$	35
Figura 5.2 – Ladrilhamento de padrão 3.4.3.3.4	36
Figura 5.3 – Ladrilhamento de padrão 3.3.4.4.3	37
Figura 5.4 – Ladrilhamento de padrão 3.3.3.6.3	38
Figura 6.1 – Ladrilhamento de padrão 3.3.3.3.3.3	39

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Nomenclatura de alguns polígonos	12
Tabela 2.2 – Medida dos ângulos internos de alguns polígonos regulares	16
Tabela 3.1 – Ladrilhamentos de padrão $4.l.m$	27
Tabela 3.2 – Ladrilhamentos de padrão $6.l.m$	29



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>CONDIÇÕES PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
2.1	POLÍGONO	10
2.2	CLASSIFICAÇÃO DE UM POLÍGONO	11
2.3	SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO	12
2.4	LADRILHAMENTOS DO PLANO	16
<b>3</b>	<b>LADRILHAMENTOS DE PADRÃO <math>k.l.m</math></b>	<b>23</b>
3.1	CASO EM QUE PELO MENOS UM DOS VALORES $k, l$ OU $m$ É ÍMPAR	23
3.2	CASO EM QUE $k, l$ E $m$ SÃO TODOS PARES	25
<b>4</b>	<b>LADRILHAMENTOS DE PADRÃO <math>k.l.m.n</math></b>	<b>31</b>
4.1	LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n$ QUE POSSUEM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS	31
4.2	LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n$ QUE NÃO POSSUEM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS	33
<b>5</b>	<b>LADRILHAMENTOS DE PADRÃO <math>k.l.m.n.p</math></b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>LADRILHAMENTOS DE PADRÃO <math>k.l.m.n.p.q</math></b>	<b>39</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>40</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>41</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A arte de ladrilhar consiste em preencher o plano com figuras geométricas sem superposição ou espaços vazios. Essa arte é antiga. Os árabes, por exemplo, usavam figuras geométricas para ladrilhar suas construções. Uma dessas construções é Alhambra, um conjunto de palácios localizados em Granada (Espanha), construído nos séculos XIII, XIV e XV (DIAS; SAMPAIO, 2013; SALLUM, 2007).

Atualmente, a arte de ladrilhar é usada pelo ser humano em: papeis de parede, pisos, tapeçarias, tabuleiro de xadrez e estamparia de tecidos. Apesar dessa arte ser bem antiga, a ciência é recente e possui aspectos que ainda não foram desenvolvidos (SALLUM, 2007).

Nessa perspectiva, esse estudo tem como objetivo fazer a caracterização e a classificação de ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano. Veremos que existem onze tipos de ladrilhamentos do plano que usam apenas polígonos regulares, satisfazendo condições de *bom comportamento*, sendo que três desses ladrilhamentos são regulares e oito são semirregulares.

No Capítulo 2, para uma melhor compreensão deste estudo, serão abordados alguns conceitos básicos sobre polígonos e ladrilhamentos do plano.

No Capítulo 3, estudaremos os ladrilhamentos com três polígonos ao redor de cada vértice. O estudo desse ladrilhamento será dividido em dois casos: o caso em que pelo menos um dos polígonos tem um número ímpar de lados e o caso em que todos os polígonos possuem um número par de lados.

No Capítulo 4, estudaremos os ladrilhamentos com quatro polígonos ao redor de cada vértice. Esse estudo também será dividido em dois casos: o caso em que o ladrilhamento possui triângulos equiláteros e o caso em que não possui.

No Capítulo 5, estudaremos os ladrilhamentos com cinco polígonos ao redor de cada vértice. Começaremos analisando o número mínimo de triângulos equiláteros que devem compor uma combinação de cinco polígonos em torno de um vértice.

Por fim, no Capítulo 6, estudaremos os ladrilhamentos com seis polígonos distribuídos ao redor de cada vértice.

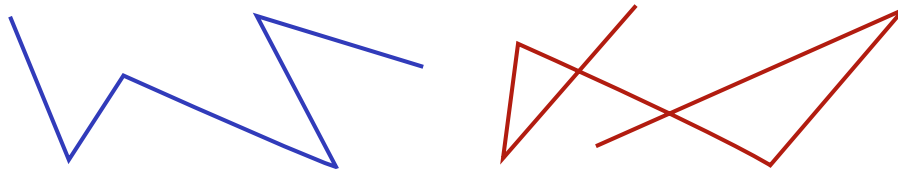
## 2 CONDIÇÕES PRELIMINARES

Neste estudo, faremos a caracterização e a classificação de ladrilhamentos que usam apenas polígonos regulares. Portanto, é fundamental ter uma boa compreensão sobre polígonos. Sendo assim, neste capítulo serão abordados alguns conceitos básicos sobre essa figura geométrica e, também, sobre ladrilhamentos do plano. Para isso, usou-se como referências [Alves e Dalcin \(1999\)](#), [Kinsey e Moore \(2006\)](#), [Sallum \(2007\)](#), [Rezende e Queiroz \(2008\)](#), [Paterlini \(2010\)](#), [Dias e Sampaio \(2013\)](#), e [Araújo et al. \(2019\)](#).

### 2.1 POLÍGONO

**Definição 2.1** (linha poligonal). Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) uma sequência de  $n$  pontos distintos do plano, tais que três pontos consecutivos não são colineares. A reunião de segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$  é uma *linha poligonal*. Os pontos  $A_i$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ , são os vértices da linha poligonal.

Figura 2.1 – Exemplos de linhas poligonais



Fonte: (PATERLINI, 2010, p.225)

**Definição 2.2** (polígono). Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ,  $n$  pontos distintos do plano, com  $n \geq 3$ . Suponhamos que os segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$  satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) Se dois destes segmentos se interseccionam, o fazem apenas em uma extremidade comum.
- (ii) Dois segmentos com extremidade comum não estão contidos na mesma reta.

A união desses segmentos chama-se *polígono de  $n$  lados*, denotado por  $A_1A_2A_3\dots A_n$ . Os pontos  $A_i$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ , são os vértices do polígono e os segmentos que o definem são seus lados. Um segmento que liga vértices não consecutivos de um polígono é denominado *diagonal*.

Em outras palavras, podemos dizer que os polígonos são linhas poligonais fechadas ( $A_{n+1} = A_1$ ) e sem autointerseções.

## 2.2 CLASSIFICAÇÃO DE UM POLÍGONO

Um polígono pode ser classificado segundo sua convexidade, número de lados ou, ainda, com base na congruência entre seus lados e entre seus ângulos internos.

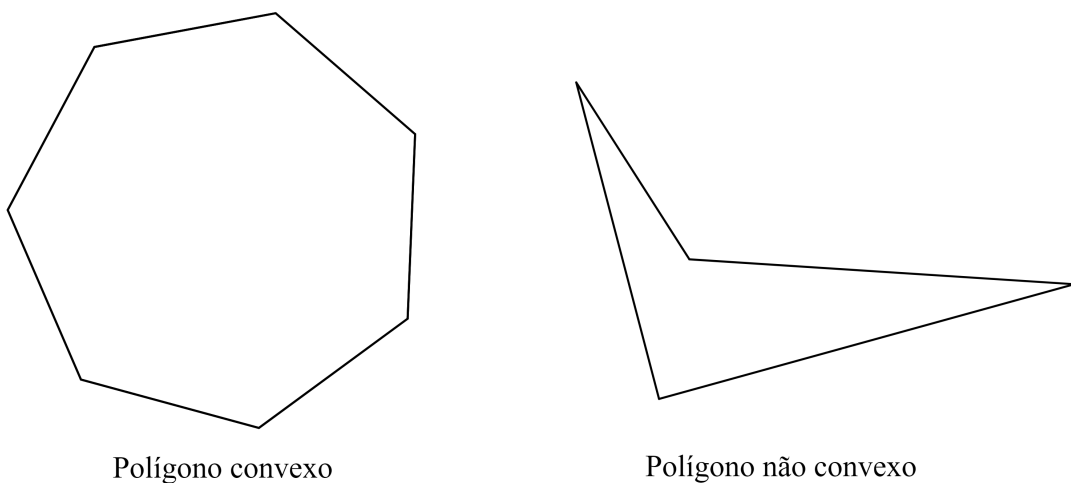
Assumiremos intuitivamente que um polígono delimita uma região do plano, chamada região poligonal associada ao polígono (ou delimitada pelo polígono). Um conjunto  $\mathcal{A}$  de pontos no plano é *convexo* se para quaisquer dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $\mathcal{A}$ , o segmento  $\overline{PQ}$  também está contido em  $\mathcal{A}$ .

Para o estudo de ladrilhamentos (ou mosaicos) do plano consideraremos cada polígono como constituído pelo conjunto dos segmentos que o define e também pela região poligonal plana associada ao polígono.

**Definição 2.3** (polígono convexo). Um polígono  $\mathcal{P}$  é dito *convexo* se a região poligonal delimitada por  $\mathcal{P}$  é um conjunto convexo.

A Figura 2.2 ilustra dois polígonos, um convexo e outro não convexo.

Figura 2.2 – Polígono convexo e não convexo



Polígono convexo

Polígono não convexo

Fonte: Elaborado pela autora

Cada polígono é nomeado de acordo com sua quantidade de lados. O polígono de três lados é comumente chamado de triângulo e o de quatro lados, de quadrilátero. Os nomes dos outros polígonos são formados por prefixos numéricos gregos seguido de -gono. A Tabela 2.1 contém a denominação de alguns polígonos com base em [Kinsey e Moore \(2006\)](#) e [Dias e Sampaio \(2013\)](#).

Tabela 2.1 – Nomenclatura de alguns polígonos

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Fonte: Elaborado pela autora

Chamamos um polígono de  $n$  lados por  $n$ -ágono.

**Definição 2.4.** Os ângulos internos de um polígono convexo  $A_1A_2A_3\dots A_n$  são os ângulos  $\widehat{A_1A_2A_3}$ ,  $\widehat{A_2A_3A_4}$ , ...,  $\widehat{A_{n-1}A_nA_1}$  e  $\widehat{A_nA_1A_2}$ , com medidas entre 0 e  $180^\circ$ .

**Definição 2.5** (polígonos congruentes). Dois polígonos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre vértices do primeiro e do segundo de modo que lados e ângulos correspondentes são congruentes. Isto é, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices do primeiro que correspondem a vértices  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  do segundo então, (i) se  $\overline{AB}$  é um lado do primeiro então  $\overline{A'B'}$  é um lado do segundo e  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ; (ii) se  $\widehat{ABC}$  é um ângulo interno do primeiro então  $\widehat{A'B'C'}$  é um ângulo interno do segundo e  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$

**Definição 2.6** (polígono regular). Um *polígono regular* é um polígono convexo com todos os seus lados congruentes, assim como seus ângulos internos.

## 2.3 SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO

A soma dos ângulos internos de um polígono varia de acordo com a sua quantidade de lados. Para obter uma expressão que nos forneça essa soma, usaremos um resultado conhecido da Geometria Plana:

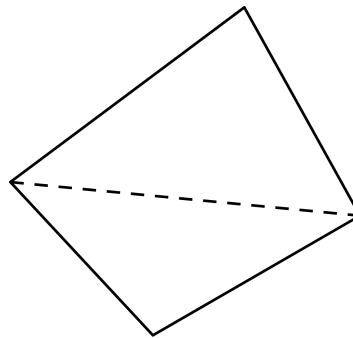
**Teorema 2.1.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a  $180^\circ$ .*

*Demonstração.* Este é um teorema clássico da Geometria Euclidiana Plana, equivalente ao postulado das paralelas. Ver (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.40) para uma demonstração intuitiva ou (PATERLINI, 2010, p.144) para uma demonstração formal. □

O resultado do Teorema 2.1 tem diversas aplicações. Uma delas é que num triângulo isósceles basta saber a medida de um ângulo para deduzir a medida dos demais. No caso de um triângulo equilátero qualquer, cada ângulo mede  $60^\circ$ , pois todos os seus ângulos internos têm mesma medida e, sendo  $\alpha$  essa medida,  $3 \cdot \alpha = 180^\circ$ , ou seja,  $\alpha = 60^\circ$  (PATERLINI, 2010).

Ademais, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é  $180^\circ$ , é possível deduzir uma expressão que nos forneça a soma dos ângulos internos de outros polígonos convexos. Para isso, basta repartir o polígono em triângulos.

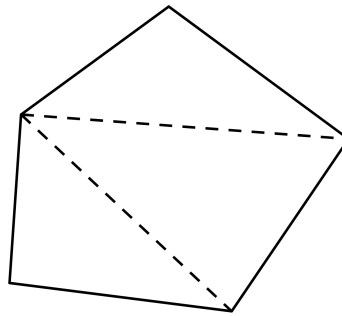
Figura 2.3 – Quadrilátero dividido em dois triângulos



Fonte: Elaborado pela autora

Em um quadrilátero, podemos traçar uma diagonal a partir de um vértice qualquer, decompondo-o em dois triângulos. Desse modo, a soma dos ângulos internos do quadrilátero será igual a soma dos ângulos internos dos dois triângulos que o compõe, ou seja,  $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ .

Figura 2.4 – Pentágono dividido em três triângulos



Fonte: Elaborado pela autora

Em um pentágono podemos traçar duas diagonais a partir de um vértice qualquer, dividindo-o em três triângulos. Assim, a soma dos ângulos internos do pentágono será  $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ .

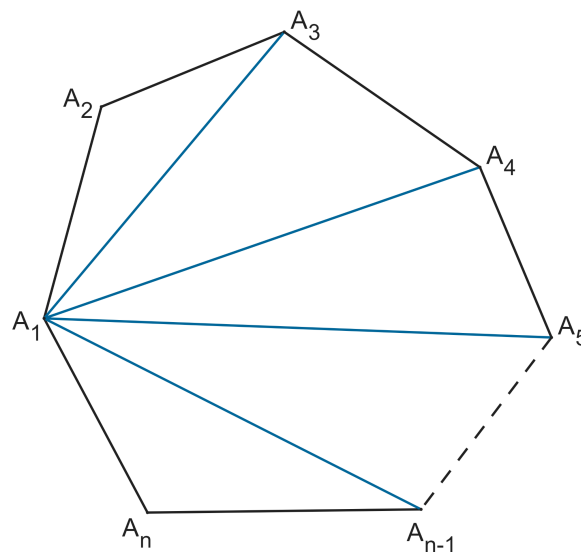
Esse recurso pode ser usado para um polígono convexo de  $n$  lados, como veremos a seguir.

**Teorema 2.2.** *A soma dos ângulos internos de um  $n$ -ágono convexo é:*

$$(n - 2) \cdot 180^\circ \tag{2.1}$$

*Demonstração.* Seja  $A_1A_2A_3\dots A_n$  um polígono convexo com  $n$  lados. Por um vértice qualquer do polígono podemos traçar  $n - 3$  diagonais. As diagonais traçadas subdividem o polígono em  $n - 2$  triângulos. Logo, a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos dos  $n - 2$  triângulos formados. Usando o Teorema 2.1, obtemos a expressão (2.1).  $\square$

Figura 2.5 – Polígono convexo de  $n$  lados dividido em  $n - 2$  triângulos



Fonte: Elaborado pela autora

Como resultado disso, temos o seguinte Teorema:

**Teorema 2.3.** *A medida  $\alpha_n$  de cada ângulo interno de um  $n$ -ângono regular é:*

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Se  $\mathcal{P}$  é um polígono regular com  $n$  lados, então  $\mathcal{P}$  terá  $n$  ângulos internos congruentes entre si. Pelo Teorema 2.2, a soma desses ângulos é igual a  $(n-2) \cdot 180^\circ$ . Logo, cada ângulo interno de  $\mathcal{P}$  será dado pela equação (2.2)  $\square$

A Tabela 2.2 lista as medidas dos ângulos internos de alguns polígonos regulares.



Tabela 2.2 – Medida dos ângulos internos de alguns polígonos regulares

Polígono regular	Número de lados	Medida dos ângulos internos
Triângulo	3	$60^\circ$
Quadrado	4	$90^\circ$
Pentágono	5	$108^\circ$
Hexágono	6	$120^\circ$
Heptágono	7	$\approx 128,57^\circ$
Octógono	8	$135^\circ$
Eneágono	9	$140^\circ$
Decágono	10	$144^\circ$
Undecágono	11	$\approx 147,27^\circ$
Dodecágono	12	$150^\circ$
Pentadecágono	15	$156^\circ$
Icoságono	20	$162^\circ$

Fonte: adaptado de (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.46)

## 2.4 LADRILHAMENTOS DO PLANO

**Definição 2.7** (ladrilhamento do plano). O processo de cobrir o plano com figuras geométricas, chamadas de *ladrilhos*, sem superposição ou espaços vazios entre elas chama-se *ladrilhamento do plano*.

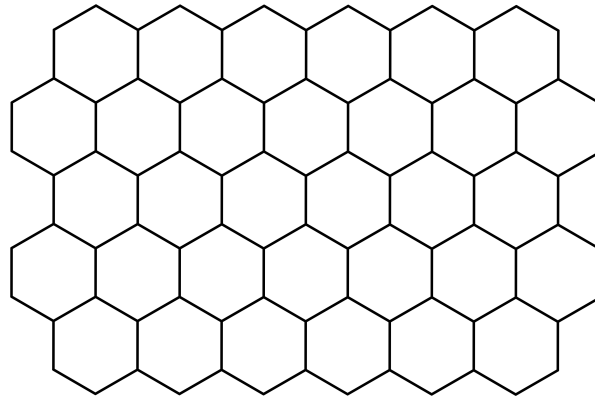
Os ladrilhamentos do plano que estudaremos aqui serão os ladrilhamentos bem-comportados.

**Definição 2.8** (ladrilhamento bem-comportado). Um *ladrilhamento bem-comportado* é aquele que satisfaz as seguintes condições:

- (i) Os ladrilhos são polígonos regulares.
- (ii) A interseção de dois ladrilhos quaisquer é um lado inteiro ou um vértice ou vazia.
- (iii) A configuração ou disposição cíclica de ladrilhos, em torno de cada vértice, é sempre a mesma.

**Exemplo 2.1.** O ladrilhamento ilustrado na Figura 2.6 é um ladrilhamento bem-comportado, pois é formado por hexágonos regulares, a interseção de dois ladrilhos vizinhos é sempre um lado inteiro e ao redor de cada vértice temos sempre três hexágonos.

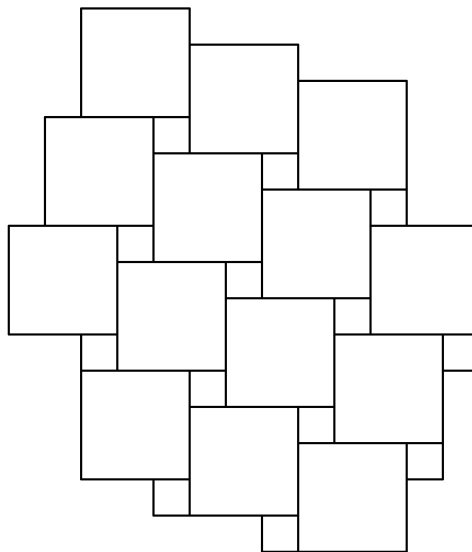
Figura 2.6 – Exemplo de ladrilhamento bem-comportado



Fonte: Elaborado pela autora

**Exemplo 2.2.** A Figura 2.7 ilustra um ladrilhamento que atende as condições (i) e (iii) da Definição 2.8, pois os ladrilhos são polígonos regulares e ao redor de cada vértice temos sempre três quadrados. Contudo, o ladrilhamento não é bem-comportado, pois ladrilhos vizinhos não compartilham um lado inteiro.

Figura 2.7 – Exemplo de ladrilhamento que não atende a condição (ii) de bom comportamento

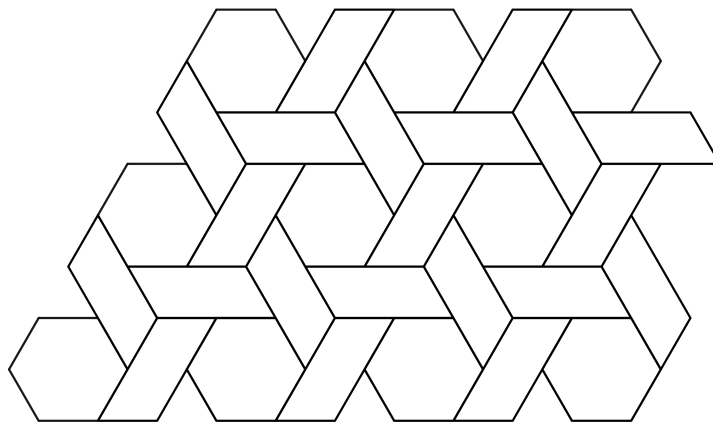


Fonte: Elaborado pela autora

**Exemplo 2.3.** O ladrilhamento ilustrado na Figura 2.8 não é bem-comportado, pois os quadriláte-

ros do ladrilhamento não são regulares, dois ladrilhos vizinhos não compartilham um lado inteiro e o ladrilhamento possui distribuições diferentes de ladrilhos ao redor dos seus vértices.

Figura 2.8 – Exemplo de ladrilhamento que não atende nenhuma condição de bom comportamento

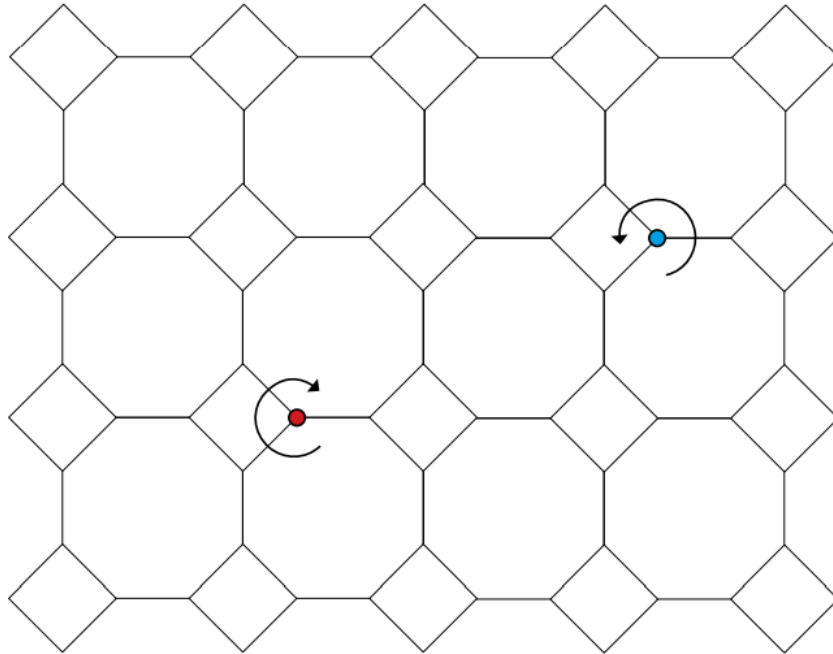


Fonte: Elaborado pela autora

Para classificar o tipo de um vértice de um ladrilhamento, cujos ladrilhos são polígonos regulares, damos uma volta, no sentido horário ou anti-horário, ao redor deste vértice e anotamos sequencialmente o número de lados dos polígonos que se distribuem em torno dele.

**Exemplo 2.4.** Um vértice do tipo 4.8.8 (também denotado por  $4.8^2$ ) é um vértice que contém um quadrado e dois octógonos regulares em torno de si. Dependendo do sentido de percurso em torno do vértice (horário ou anti-horário) ou de qual polígono iniciamos o percurso, o vértice pode ser classificado como tipo 8.4.8 ou 8.8.4.

Figura 2.9 – Classificação do vértice 8.4.8, percorrendo os polígonos em torno de um vértice (em vermelho) no sentido horário a partir de um octógono; e classificação do vértice 8.8.4, percorrendo os polígonos em torno de um vértice (em azul) no sentido anti-horário a partir de um octógono

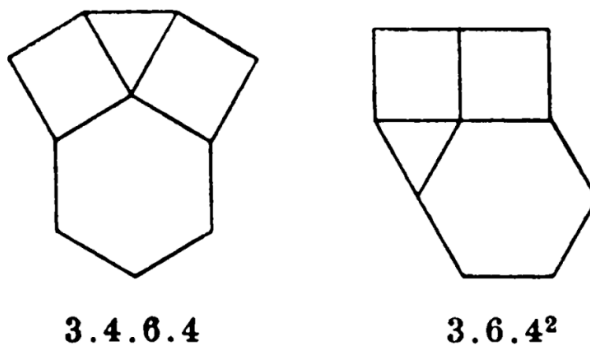


Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.30)

Observe que vértices que possuem os mesmos polígonos regulares ao redor podem ser classificados como tipos diferentes, dependendo da sequência cíclica em que encontramos esses polígonos.

**Exemplo 2.5.** Vértices distintos que possuem um triângulo equilátero, dois quadrados e um hexágono regular ao redor:

Figura 2.10 – Vértices de tipos 3.4.6.4 e 3.6.4.4



Fonte: (CUNDY, 1961, p.61)

**Definição 2.9** (padrão de um ladrilhamento). Quando os vértices de um ladrilhamento são de um mesmo tipo, dizemos que o padrão do ladrilhamento é o tipo de cada vértice.

**Exemplo 2.6.** A Figura 2.6 ilustra um ladrilhamento de padrão 6.6.6, pois todos seus vértices são de tipo 6.6.6; e a Figura 2.9 ilustra um ladrilhamento de padrão 4.8.8, pois todos seus vértices são de tipo 4.8.8.

Pela condição (iii) da Definição 2.8, todos os vértices de um ladrilhamento bem-comportado são de um mesmo tipo. Sendo assim, podemos classificar um ladrilhamento bem-comportado pelo seu padrão.

Neste estudo, iremos catalogar os padrões de ladrilhamentos bem-comportados do plano. Ao longo disso, veremos dois tipos de ladrilhamentos bem-comportados: os ladrilhamentos regulares e os semirregulares.

**Definição 2.10** (ladrilhamento regular). Chamamos de *ladrilhamento regular* um ladrilhamento bem-comportado formado por ladrilhos congruentes entre si.

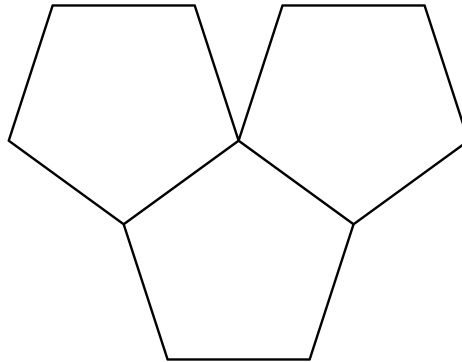
**Definição 2.11** (ladrilhamento semirregular). Um *ladrilhamento semirregular* é um ladrilhamento bem-comportado formado por mais de um tipo de ladrilho (no que diz respeito ao número de lados).

**Exemplo 2.7.** O ladrilhamento de padrão 6.6.6 é um ladrilhamento regular, pois, além de bem-comportado, é formado por um único tipo de ladrilho (hexágonos regulares). Já o ladrilhamento de padrão 4.8.8 é semirregular, pois é um ladrilhamento bem-comportado formado por mais de um tipo de ladrilho (quadrados e octógonos regulares).

Em qualquer ladrilhamento regular e semirregular do plano, a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser igual  $360^\circ$ . Isso garante que não haja lacunas ou sobreposições entre os ladrilhos.

**Exemplo 2.8.** Não é possível construir um ladrilhamento regular usando pentágonos regulares, pois se distribuirmos apenas três pentágonos regulares ao redor de um vértice, sobrar um espaço vazio entre eles (pois a soma dos ângulos internos dos três pentágonos é igual a  $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$ ) e se colocarmos mais de três pentágonos regulares ao redor do vértice, eles irão se sobrepor.

Figura 2.11 – Vértice rodeado por três pentágonos regulares

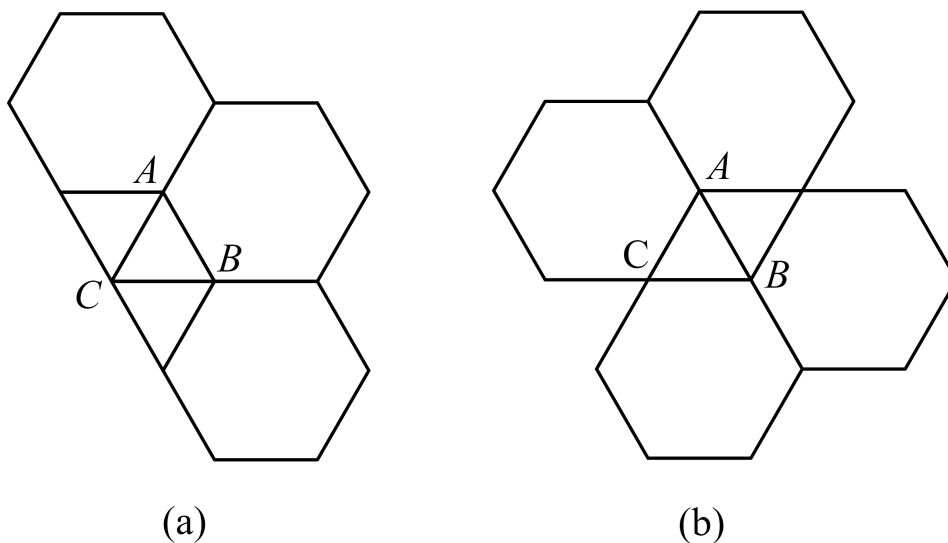


Fonte: Elaborado pela autora

Existem 21 combinações de polígonos regulares que podem ser distribuídos ao redor de um vértice de modo que não haja sobreposições, nem espaços vazios (ALVES; DALCIN, 1999; SALLUM, 2007). No entanto, nem todas elas definem um ladrilhamento bem-comportado.

**Exemplo 2.9.** Seja  $A$ ,  $B$  e  $C$  vértices de um triângulo. Se  $A$  e  $B$  são ambos de tipo 3.3.6.6, então  $C$  deverá ser de tipo ...3.3.3..., como mostra a Figura 2.12a, ou de tipo ...6.3.6..., como mostra a Figura 2.12b. Como os vértices de um ladrilhamento bem-comportado devem ser de um mesmo tipo, então não é possível construir um ladrilhamento bem-comportado de padrão 3.3.6.6.

Figura 2.12 – Caso que não define um ladrilhamento bem-comportado do plano



Fonte: Elaborado pela autora

Antes de começar a catalogar os ladrilhamentos bem-comportados, é preciso delimitar o número de polígonos ao redor de cada vértice.

**Teorema 2.4.** *Todo ladrilhamento bem-comportado possui pelo menos três polígonos e não mais do que seis em torno de cada vértice.*

*Demonstração.* Sabemos que o triângulo equilátero é o polígono regular com menor ângulo interno, sendo que este mede  $60^\circ$ , então, em um ladrilhamento bem-comportado, o maior número de polígonos ao redor de cada vértice é  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ . Por outro lado, o menor número de polígonos ao redor de cada vértice é 3, pois os ângulos internos de um polígono convexo são menores do que  $180^\circ$ , o que torna impossível um ladrilhamento com apenas dois polígonos regulares ao redor de cada vértice.

□

De acordo com o Teorema 2.4, um ladrilhamento bem-comportado pode ser de padrão  $k.l.m$ ,  $k.l.m.n$ ,  $k.l.m.n.p$  ou  $k.l.m.n.p.q$ . Nos próximos capítulos, descobriremos os polígonos que compõem esses padrões. Estudaremos, a princípio, o ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ .

### 3 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m$

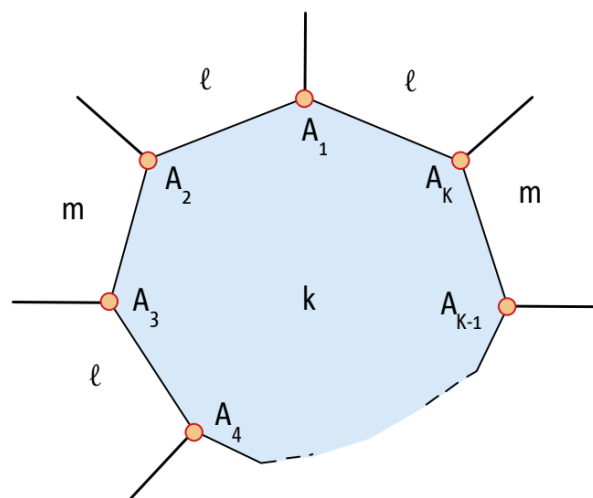
O estudo dos ladrilhamentos de padrão  $k.l.m$  será dividido em dois casos: o caso em que pelo menos um dos valores  $k$ ,  $l$  ou  $m$  é ímpar e o caso em que  $k$ ,  $l$  e  $m$  são todos pares. Para a classificação desses ladrilhamentos, usou-se como referências [Kinsey e Moore \(2006\)](#) e [Dias e Sampaio \(2013\)](#).

#### 3.1 CASO EM QUE PELO MENOS UM DOS VALORES $k$ , $l$ OU $m$ É ÍMPAR

**Teorema 3.1.** *Se um ladrilhamento tem um padrão  $k.l.m$ , e um dos valores  $k$ ,  $l$  ou  $m$  é ímpar, então os outros dois valores são iguais.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que  $k$  é um inteiro ímpar com  $k \geq 3$ . Seja  $A_1A_2\dots A_k$  um  $k$ -ágono regular, em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ . Se um  $l$ -ágono compartilha o lado  $\overline{A_1A_2}$ ; então um  $m$ -ágono compartilha o lado  $\overline{A_2A_3}$ ; um  $l$ -ágono, o lado  $\overline{A_3A_4}$ ; e assim por diante.

Figura 3.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , em que  $k$  representa todos os polígonos formados por um número ímpar de lados



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.61)

Como  $k$  é número ímpar maior que 3, então  $k = 2n + 1$  para algum natural  $n \neq 0$ , ou seja,  $k$  deixa resto 1 na divisão por 2. Logo, o polígono que compartilha o lado  $\overline{A_kA_1}$  é o mesmo polígono que compartilha o lado  $\overline{A_1A_2}$ . Sendo assim, o vértice  $A_1$  deverá ser do tipo  $k.l.l$  e, como o ladrilhamento é de padrão  $k.l.m$ , pelo item (iii) da Definição 2.8 podemos concluir que  $l = m$ .

□



**Teorema 3.2.** *O único ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$  ímpar, é o ladrilhamento de padrão 3.12.12.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1, em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$  ímpar,  $l = m$ . Logo, temos que definir os polígonos que vão compor o ladrilhamento de padrão  $k.m.m$ , em que  $k$  é um inteiro ímpar.

Sabemos que a soma dos ângulos internos dos polígonos que compõem um vértice deve ser  $360^\circ$ . Logo, devemos ter:

$$\alpha_k + 2\alpha_m = 360^\circ \quad (3.1)$$

Usando a expressão (2.2) na equação (3.1), obtemos:

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdot 180^\circ + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

Logo,

$$\left(1 - \frac{2}{k}\right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 2$$

Manipulando essa última expressão, obtemos:

$$k = \frac{2m}{m-4} \quad (3.2)$$

Como  $k$  e  $m$  são números inteiros positivos, devemos ter  $m - 4 > 0$ .

Agora,

$$k = \frac{2m}{m-4} = \frac{2(m-4) + 8}{m-4} = 2 + \frac{8}{m-4}$$

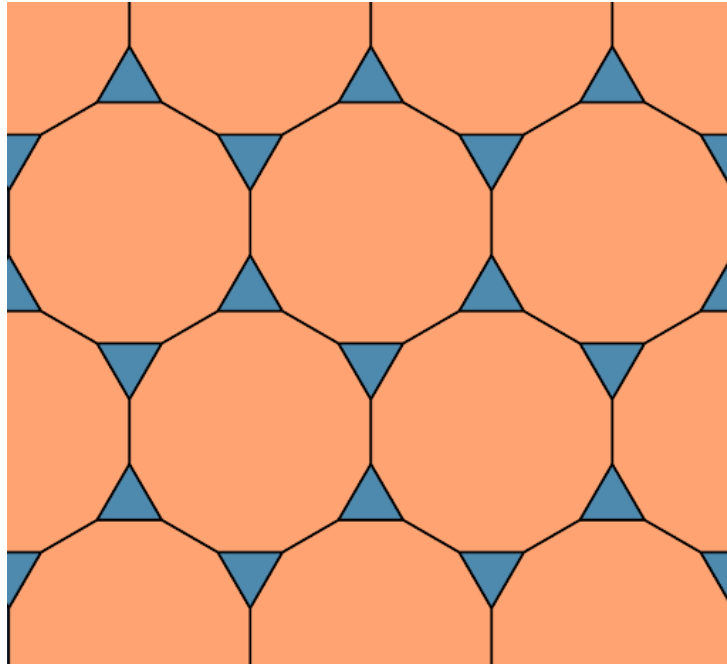
Sendo  $m - 4 \geq 1$ , então  $\frac{8}{m-4} \leq 8$  e  $k = 2 + \frac{8}{m-4} \leq 2 + 8 = 10$

Portanto,  $k$  é um número ímpar tal que  $3 \leq k \leq 10$ . Isolando  $m$  na expressão (3.2), obtemos  $m = \frac{4k}{k-2}$ .

Se  $k = 3$ , então  $m = 12$  e temos um ladrilhamento de padrão 3.12.12.

Se  $k$  é igual a 5, 7 ou 9, então  $m$  não é um número inteiro e, portanto, não é possível ter um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$  com  $k$  ímpar e  $k \geq 5$ . Portanto, o único ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$  ímpar, é o ladrilhamento de padrão 3.12.12.  $\square$

Figura 3.2 – Ladrilhamento de padrão 3.12.12



Fonte: Elaborado pela autora

### 3.2 CASO EM QUE $k$ , $l$ E $m$ SÃO TODOS PARES

**Teorema 3.3.** *Não existe nenhum ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  todos pares, que não faça uso de quadrados e nem de hexágonos regulares.*

*Demonstração.* Se um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  todos pares, não fizer uso de pelo menos um quadrado ou pelo menos um hexágono regular, então os polígonos que o compõem deverão ter pelo menos 8 lados. Como o ângulo interno de um octógono regular mede  $135^\circ$ , a soma dos ângulos em torno de cada vértice deverá ser, no mínimo,  $3 \cdot 135^\circ = 405^\circ$ , ou seja, essa soma será maior do que  $360^\circ$ . Portanto, um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  todos pares, não é possível se não fizer uso de ao menos um quadrado ou hexágono regular.  $\square$

**Teorema 3.4.** *Os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrão  $k.l.m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  pares, que fazem uso de quadrados, são os ladrilhamentos de padrões 4.6.12 e 4.8.8.*

*Demonstração.* Suponhamos, sem perda de generalidade, que em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ ,  $k = 4$ . Note que em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ , em que  $k$  é um número par, podemos ter  $l \neq m$ . Em particular, quando  $k = 4$  podemos ter um quadrado, um  $l$ -ágono e um  $m$ -ágono ao redor de cada vértice de modo que  $l \neq m$ .

Dito isso, devemos encontrar os possíveis valores de  $l$  e  $m$  em um ladrilhamento de padrão  $4.l.m$ , tais que  $l$  e  $m$  sejam números pares. Para encontrar esse valores, usaremos outra vez que a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser igual a  $360^\circ$ . Logo, em um ladrilhamento de padrão  $4.l.m$ , devemos ter:

$$\alpha_4 + \alpha_l + \alpha_m = 360^\circ \quad (3.3)$$

Substituindo  $\alpha_4 = 90^\circ$  na equação (3.3), obtemos:

$$\alpha_l + \alpha_m = 270^\circ \quad (3.4)$$

Usando a expressão (2.2) em (3.4), a equação fica do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{l}\right) \cdot 180^\circ + \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot 180^\circ &= 270^\circ \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{l}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Manipulando essa expressão, obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{2}{l} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

Como  $l$  e  $m$  são inteiros pares, então  $l = 2r$  e  $m = 2s$ , para certos inteiros  $r$  e  $s$ . Substituindo esses valores em (3.5), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$$

Isolando  $r$ , chegamos a

$$r = \frac{2s}{s-2} \quad (3.6)$$

Como  $l$  é um inteiro positivo, então  $r$  deve ser positivo, logo,  $s - 2 > 0$ , isto é,  $s \geq 3$ .

Ademais,

$$r = \frac{2s}{s-2} = \frac{2(s-2) + 4}{s-2} = 2 + \frac{4}{s-2}$$

Como  $r$  é um número inteiro,  $s - 2$  deve ser divisor de 4, então,  $s$  atinge seu valor máximo quando  $s - 2 = 4$ , ou seja, quando  $s = 6$ . Sendo assim,  $3 \leq s \leq 6$ .

Usando a igualdade (3.6), podemos construir a seguinte tabela:

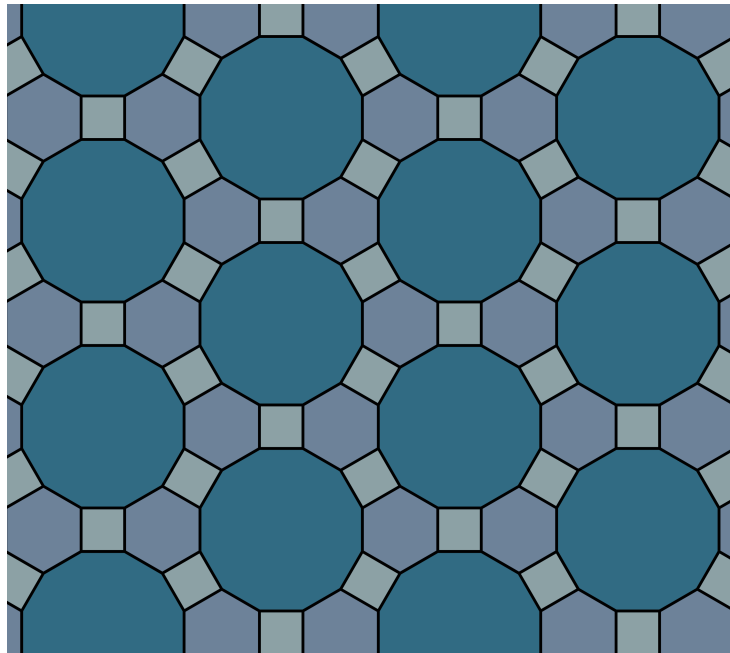
Tabela 3.1 – Ladrilhamentos de padrão 4.l.m

$s$	$r$	$l = 2r$	$m = 2s$	Padrão de ladrilhamento: 4.l.m
3	6	12	6	4.12.6
4	4	8	8	4.8.8
5	10/3	20/3	10	Não é possível
6	3	6	12	4.6.12

Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.66)

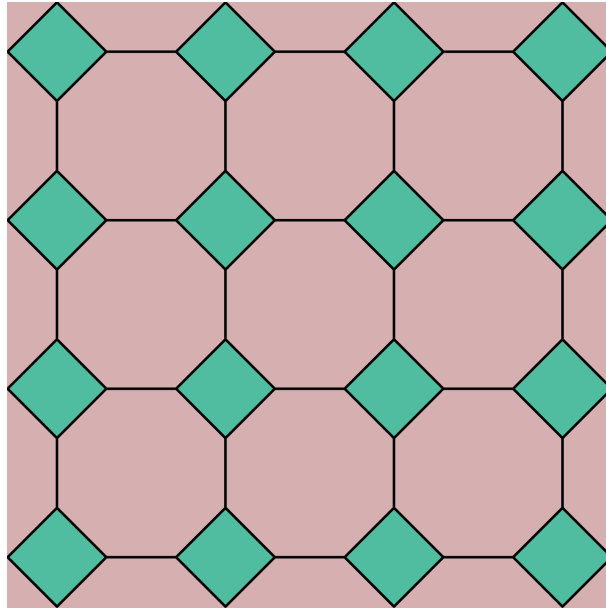
Como o padrão 4.12.6 é equivalente ao padrão 4.6.12, os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrão 4.l.m são os de padrões 4.6.12 e 4.8.8.  $\square$

Figura 3.3 – Ladrilhamento de padrão 4.6.12



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.4 – Ladrilhamento de padrão 4.8.8



Fonte: Elaborado pela autora

**Teorema 3.5.** *Os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrão  $k.l.m$ , com  $k$ ,  $l$  e  $m$  pares, que fazem uso de hexágonos regulares, são os ladrilhamentos de padrões 6.4.12 e 6.6.6.*

*Demonstração.* Suponhamos que em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m$ ,  $k = 6$ . Como a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser igual a  $360^\circ$ , devemos ter  $\alpha_6 + \alpha_l + \alpha_m = 360^\circ$ . Como  $\alpha_6 = 120^\circ$ , então

$$\alpha_l + \alpha_m = 240^\circ \quad (3.7)$$

Usando a expressão (2.2) em (3.7) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \quad (3.8)$$

Como  $l$  e  $m$  são inteiros pares, então  $l = 2r$  e  $m = 2s$ , para certos inteiros  $r$  e  $s$ . Substituindo esses valores em (3.8), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{2s} = \frac{1}{3}$$

Isolando  $r$ , ficamos com a equação:

$$r = \frac{3s}{2s - 3} \quad (3.9)$$

Como  $l$  é um inteiro positivo, então  $r$  deve ser positivo, logo,  $s \geq 2$ .

Ainda,  $r \geq 2$  já que devemos ter  $l \geq 3$ , uma vez que não existe polígono com dois lados.

Da desigualdade,  $\frac{3s}{2s-3} \geq 2$ , obtemos  $s \leq 6$ .

Usando a igualdade (3.9), podemos construir a seguinte tabela:

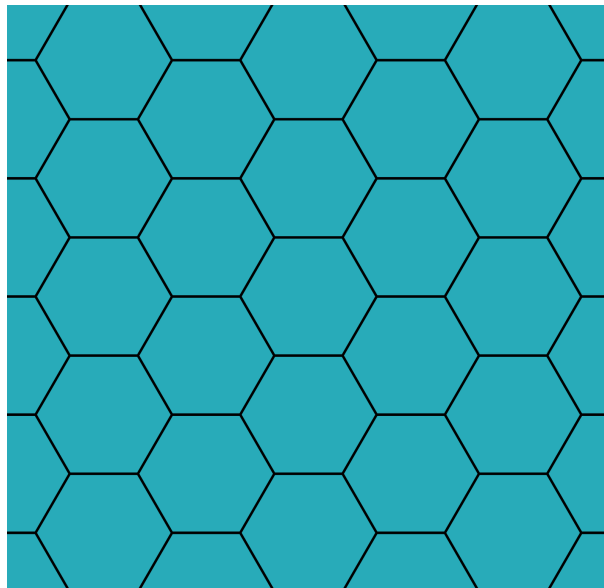
Tabela 3.2 – Ladrilhamentos de padrão 6.l.m

$s$	$r$	$l = 2r$	$m = 2s$	Padrão de ladrilhamento: 6.l.m
2	6	12	4	6.12.4
3	3	6	6	6.6.6
4	12/5	24/5	8	Não é possível
5	15/7	30/7	10	Não é possível
6	2	4	12	6.4.12

Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.68)

Como o padrão 6.12.4 é equivalente ao padrão 6.4.12, os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrão 6.l.m são os de padrões 6.4.12 e 6.6.6. □

Figura 3.5 – Ladrilhamento de padrão 6.6.6



Fonte: Elaborado pela autora

Ao longo deste capítulo, vimos quais são os ladrilhamentos bem-comportados de padrão  $k.l.m$ : o ladrilhamento regular 6.6.6 e os semirregulares 3.12.12, 4.8.8 e 4.6.12. No próximo capítulo veremos quais são os ladrilhamentos de padrão  $k.l.m.n$  que satisfazem as condições de bom comportamento.

## 4 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n$

Neste capítulo, estudaremos os ladrilhamentos de padrão  $k.l.m.n$ . Para isso, o estudo será dividido em dois casos: o caso em que o ladrilhamento possui triângulos equiláteros e o caso em que não possui. Outra vez, usaremos como referências [Kinsey e Moore \(2006\)](#) e [Dias e Sampaio \(2013\)](#).

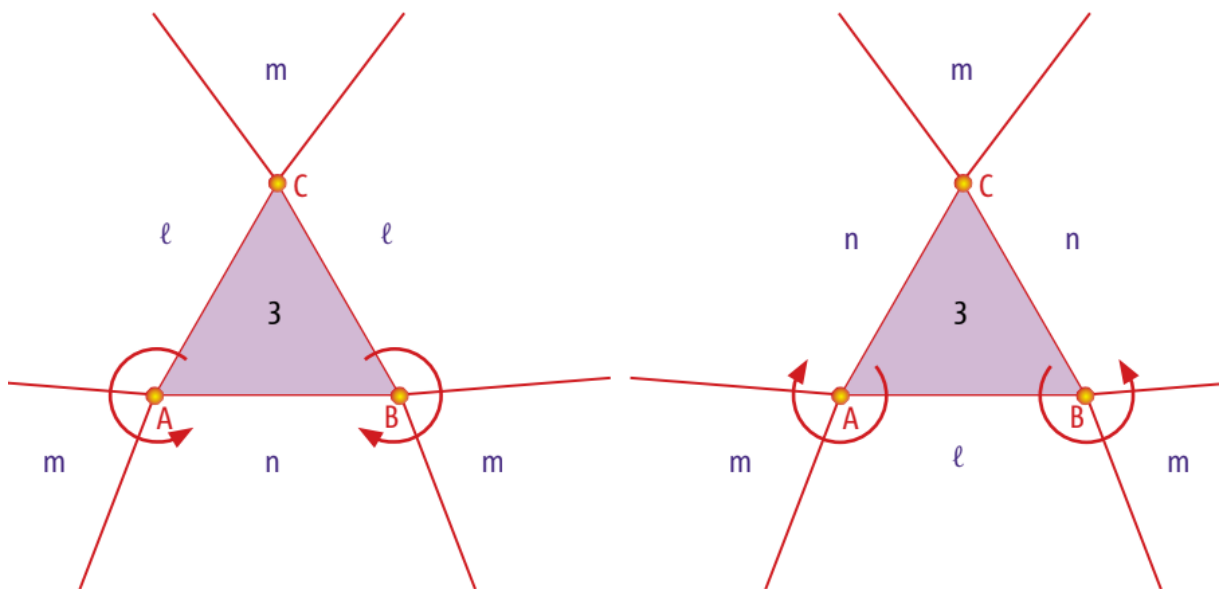
### 4.1 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n$ QUE POSSUEM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

**Teorema 4.1.** *Se um ladrilhamento tem um padrão  $3.l.m.n$ , então  $l = n$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices do triângulo equilátero que compõe o ladrilhamento. Se  $A$  e  $B$  são ambos de tipo  $3.l.m.n$ , então  $C$  pode ser do tipo  $3.l.m.l$  ou  $3.n.m.n$  (Ver Figura 4.1). Portanto, pela condição (iii) da Definição 2.8, podemos concluir que  $l = n$ .

□

Figura 4.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão  $3.l.m.n$



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.71)

**Teorema 4.2.** *Os únicos ladrilhamentos bem-comportados de padrão  $k.l.m.n$ , que fazem uso de triângulos equiláteros, são os de padrões  $3.4.6.4$  e  $3.6.3.6$ .*



*Demonstração.* Suponhamos que  $k = 3$ . Pelo Teorema 4.1, em um ladrilhamento de padrão 3. $l$ . $m$ . $n$ ,  $l = n$ . Logo, precisamos definir os polígonos regulares, de  $n$  e  $m$  lados, que compõem o ladrilhamento de padrão 3. $n$ . $m$ . $n$ .

Sabemos que a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve satisfazer a seguinte equação:  $\alpha_3 + 2 \cdot \alpha_n + \alpha_m = 360^\circ$ , ou seja,  $2 \cdot \alpha_n + \alpha_m = 300^\circ$

Se  $n = 3$ , então  $\alpha_n = 60^\circ$  e  $\alpha_m = 300^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ , mas pela definição de polígono convexo, isso não é possível.

Se  $n = 4$ , então  $\alpha_n = 90^\circ$  e  $\alpha_m = 300^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 120^\circ$ . Logo,  $m = 6$  e o ladrilhamento será de padrão 3.4.6.4.

Se  $n = 5$ , então  $\alpha_n = 108^\circ$  e  $\alpha_m = 300^\circ - 2 \cdot 108^\circ = 84^\circ$ , mas não existe polígono regular com ângulos internos medindo  $84^\circ$

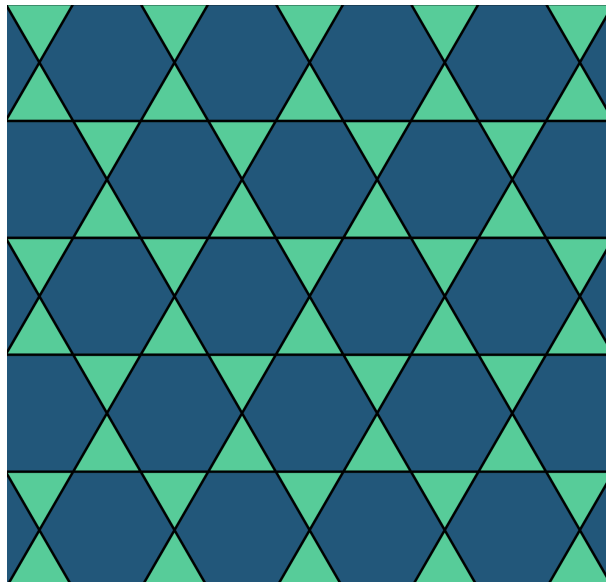
Se  $n = 6$ , então  $\alpha_n = 120^\circ$  e  $\alpha_m = 300^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 60^\circ$ . Logo,  $m = 3$  e ladrilhamento será de padrão 3.6.3.6.

Se  $n \geq 7$ , então  $\alpha_n \geq 120^\circ$  e  $\alpha_m \leq 60^\circ$ , mas não existe polígono regular com ângulos internos menores que  $60^\circ$ .

Portanto, os únicos ladrilhamentos de padrão  $k.l.m.n$ , que fazem uso de triângulos equiláteros, são os de padrões 3.4.6.4 e 3.6.3.6.

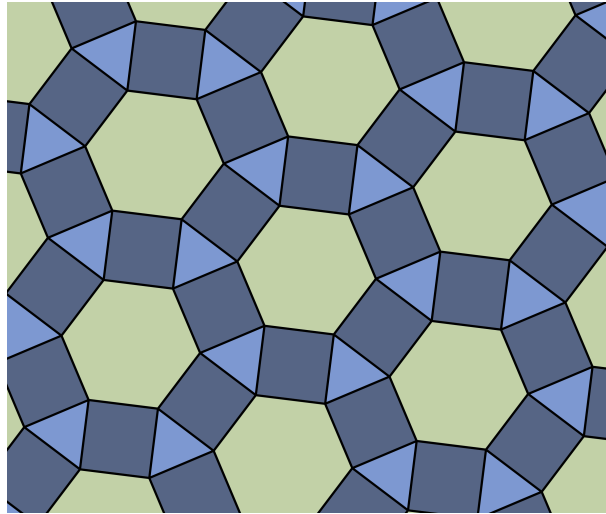
□

Figura 4.2 – Ladrilhamento de padrão 3.6.3.6



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 4.3 – Ladrilhamento de padrão 3.4.6.4



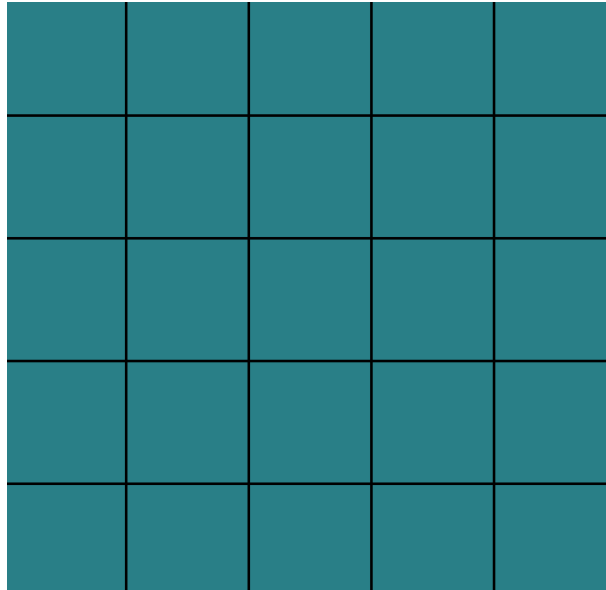
Fonte: Elaborado pela autora

## 4.2 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n$ QUE NÃO POSSUEM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

**Teorema 4.3.** *O único ladrilhamento bem-comportado de padrão  $k.l.m.n$ , que não faz uso de triângulos equiláteros, é o ladrilhamento de padrão 4.4.4.4.*

*Demonstração.* Se um ladrilhamento bem-comportado de padrão  $k.l.m.n$  não fizer uso de triângulos equiláteros, então o polígono de menor número de lados que pode compor esse ladrilhamento é o quadrado. Sabemos que em um ladrilhamento bem-comportado, a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser  $360^\circ$ . Se usarmos apenas quadrados, teremos  $\alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ , ou seja, essa condição é atendida. Se substituirmos apenas um quadrado por um polígono com número maior de lados, então a soma dos ângulos internos dos polígonos adjacentes ao vértice será maior que  $360^\circ$ . Portanto, o único ladrilhamento bem-comportado de padrão  $k.l.m.n$ , que não faz uso de triângulos equiláteros, é o ladrilhamento de padrão 4.4.4.4.  $\square$

Figura 4.4 – Ladrilhamento de padrão 4.4.4.4



Fonte: Elaborado pela autora

Encerramos este capítulo com mais três ladrilhamentos novos: o ladrilhamento regular 4.4.4.4 e os semirregulares 3.4.6.4 e 3.6.3.6. Veremos, no próximo capítulo, ainda mais ladrilhamentos bem-comportados do plano, desta vez com cinco polígonos regulares ao redor de cada vértice.

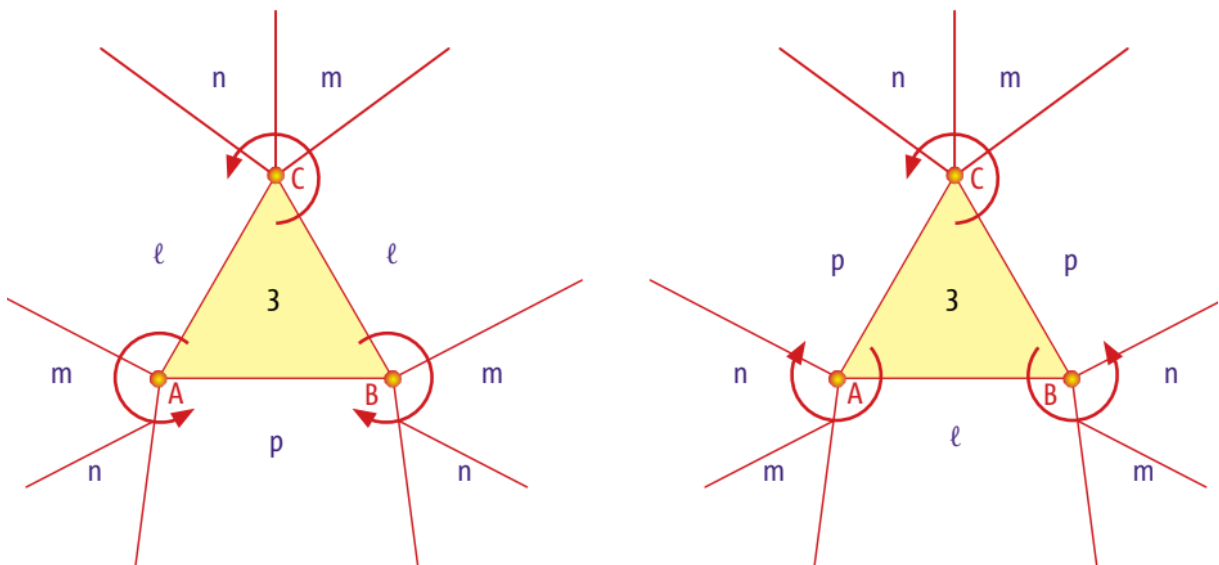
## 5 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n.p$

Estudaremos agora os ladrilhamentos bem-comportados com cinco polígonos em torno de cada vértice, sendo a base para este estudo [Dias e Sampaio \(2013\)](#)

**Teorema 5.1.** *Se um ladrilhamento tem padrão  $3.l.m.n.p$ , então  $l = p$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os vértices do triângulo equilátero que compõe o ladrilhamento. Se  $A$  e  $B$  são ambos de tipo  $3.l.m.n.p$ , então  $C$  deve ser do tipo  $3.l.m.n.l$  ou  $3.p.m.n.p$  (Ver Figura 5.1). Então, pela condição (iii) da Definição 2.8, concluímos que  $l = p$ .  $\square$

Figura 5.1 – Representação de um ladrilhamento de padrão  $3.l.m.n.p$



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.74)

**Teorema 5.2.** *Não existe ladrilhamento de padrão  $k.l.m.n.p$  que não faça uso de ao menos três triângulos equiláteros em torno de cada vértice.*

*Demonstração.* Sabemos que em um ladrilhamento bem-comportado, a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice deve ser igual a  $360^\circ$ . Se um ladrilhamento de padrão  $k.l.m.n.p$  fizer uso de apenas dois triângulos equiláteros, então a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de cada vértice será, no mínimo, igual a  $\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 390^\circ$ , ou seja, essa condição não será atendida. Se o ladrilhamento fizer uso de apenas um triângulo equilátero ou nenhum, então a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice será, no mínimo,  $420^\circ$  e  $450^\circ$ , respectivamente, e como esses valores são maiores que  $360^\circ$ , concluímos que não é possível construir esses ladrilhamentos. Já quando temos

três triângulos equiláteros a soma é no mínimo  $360^\circ$ . Portanto, em um ladrilhamento de padrão  $k.l.m.n.p$ , o número mínimo de triângulos equiláteros ao redor de cada vértice é 3.

□

**Teorema 5.3.** *Os únicos ladrilhamentos bem-comportados com cinco polígonos ao redor de cada vértice são os de padrões 3.4.3.3.4, 3.3.4.4.3 e 3.3.3.6.3.*

*Demonstração.* Pelos Teoremas 5.1 e 5.2, um ladrilhamento bem-comportado com cinco polígonos ao redor de cada vértice deve ter os seguintes padrões: 3.3. $m$ . $n$ .3 ou 3. $p$ .3.3. $p$ .

No caso do padrão 3. $p$ .3.3. $p$ , devemos ter

$$3 \cdot \alpha_3 + 2 \cdot \alpha_p = 360^\circ$$

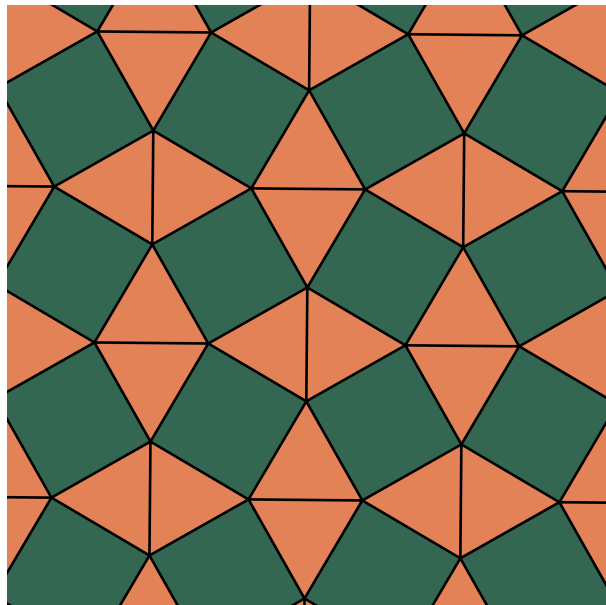
$$\Rightarrow 3 \cdot 60^\circ + 2 \cdot \alpha_p = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha_p = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_p = 90^\circ$$

Neste caso, teremos o ladrilhamento de padrão 3.4.3.3.4.

Figura 5.2 – Ladrilhamento de padrão 3.4.3.3.4



Fonte: Elaborado pela autora

Já no caso do padrão 3.3. $m$ . $n$ .3, teremos

$$3 \cdot \alpha_3 + \alpha_m + \alpha_n = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 60^\circ + \alpha_m + \alpha_n = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_m + \alpha_n = 180^\circ$$

Se  $m = 3$ , então  $\alpha_m = 60^\circ$  e  $\alpha_n = 120^\circ$ . Logo,  $n = 6$  e o ladrilhamento será de padrão 3.3.3.6.3.

Se  $m = 4$ , então  $\alpha_m = 90^\circ$  e  $\alpha_n = 90^\circ$ . Logo,  $n = 4$  e o ladrilhamento será de padrão 3.3.4.4.3.

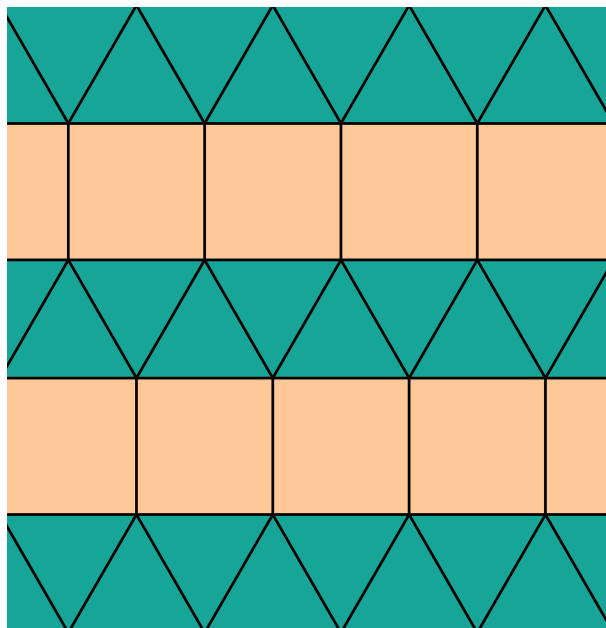
Se  $m = 5$ , então  $\alpha_m = 108^\circ$  e  $\alpha_n = 72^\circ$ , mas não existe polígono regular com ângulos internos medindo  $72^\circ$ .

Se  $m = 6$ , então  $\alpha_m = 120^\circ$  e  $\alpha_n = 60^\circ$ . Logo,  $n = 3$  e ladrilhamento obtido será equivalente ao de padrão 3.3.3.6.3.

Se  $m \geq 6$ , então  $\alpha_m \geq 120^\circ$  e  $\alpha_n \leq 60^\circ$ , mas não existe polígono regular com ângulos inteiros menores que  $60^\circ$ .

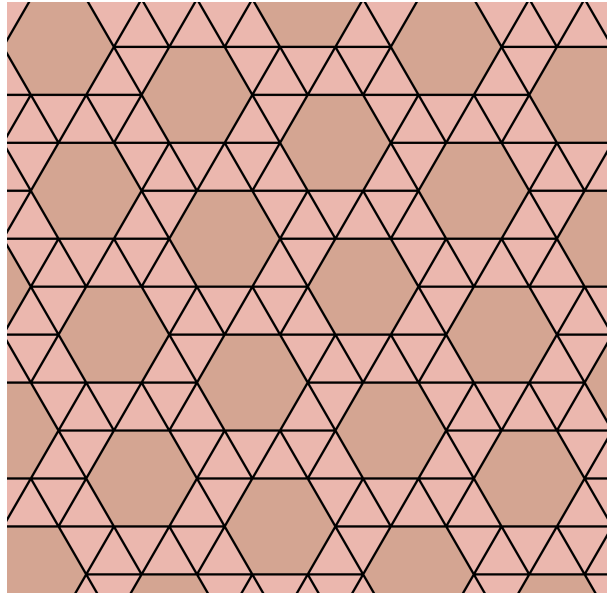
Portanto, os únicos ladrilhamentos bem-comportados com cinco polígonos ao redor de cada vértice são os de padrões 3.4.3.3.4, 3.3.4.4.3 e 3.3.3.6.3.  $\square$

Figura 5.3 – Ladrilhamento de padrão 3.3.4.4.3



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.4 – Ladrilhamento de padrão 3.3.3.6.3



Fonte: Elaborado pela autora

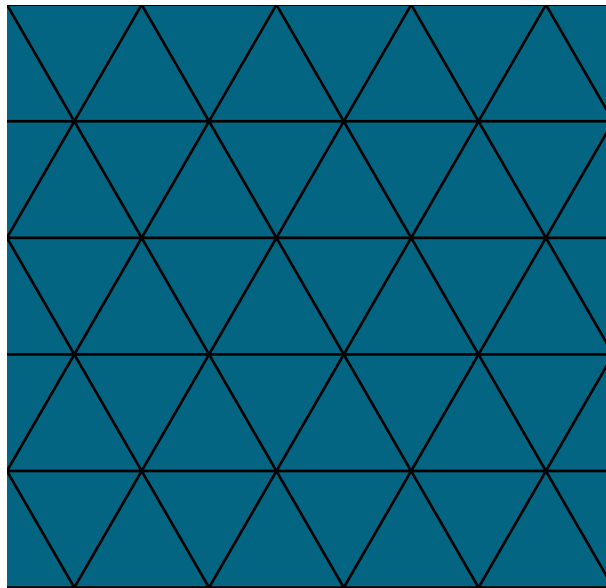
## 6 LADRILHAMENTOS DE PADRÃO $k.l.m.n.p.q$

Para encerrar este estudo, veremos, agora, quais são os ladrilhamentos bem-comportados do plano com seis polígonos ao redor de cada vértice.

**Teorema 6.1.** *O único ladrilhamento com seis polígonos em torno de cada vértice é o de padrão 3.3.3.3.3.3.*

*Demonstração.* Como o polígono regular com menor ângulo interno é o triângulo equilátero, se usarmos apenas esse polígono em um ladrilhamento bem-comportado de padrão  $k.l.m.n.p.q$ , a soma dos ângulos adjacentes a cada vértice será igual a  $6 \cdot \alpha_3 = 6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ , se usarmos pelo menos um polígono regular diferente, a soma será maior que  $360^\circ$ . Portanto, o único ladrilhamento de padrão  $k.l.m.n.p.q$  é o ladrilhamento regular 3.3.3.3.3.3.  $\square$

Figura 6.1 – Ladrilhamento de padrão 3.3.3.3.3.3



Fonte: Elaborado pela autora

Com este último ladrilhamento, completamos o catálogo de ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para classificar os ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano é necessário ter uma boa compreensão sobre polígonos regulares e seus ângulos internos. Além disso, é importante analisar as combinações de polígonos regulares que podem ser distribuídos ao redor de cada vértice de um ladrilhamento.

Nesse trabalho, foi possível verificar que existem onze ladrilhamentos bem-comportados do plano, sendo que três deles são regulares e oito são semirregulares.

A princípio, constatou-se que, em um ladrilhamento bem-comportado, o número mínimo de polígonos regulares ao redor de cada vértice é três e o número máximo é seis.

O estudo dos ladrilhamentos com três polígonos regulares em torno de cada vértice permitiu demonstrar que o único ladrilhamento, em que pelo menos um dos três polígonos possui um número de ímpar de lados, é o ladrilhamento com um triângulo equilátero e dois dodecágonos regulares ao redor de cada vértice. Além disso, foi possível inferir que se os três polígonos possuem um número par de lados, então o ladrilhamento deve fazer uso de quadrados ou hexágonos regulares e, a partir disso, encontrar outros três ladrilhamentos bem-comportados do plano.

Já no estudo dos ladrilhamentos com quatro polígonos regulares ao redor de cada vértice, foi possível deduzir que existem dois ladrilhamentos que fazem uso de triângulos equiláteros e que o único ladrilhamento que não faz uso desse polígono é o ladrilhamento formado por quadrados.

Enquanto no estudo dos ladrilhamentos com cinco polígonos regulares ao redor de cada vértice, foi possível constatar que pelo menos três desses polígonos devem ser triângulos equiláteros e, a partir disso, concluir que existem apenas três combinações de cinco polígonos que definem um ladrilhamento bem-comportado.

Por fim, no estudo dos ladrilhamentos com seis polígonos regulares ao redor de cada vértice, foi encontrado apenas um ladrilhamento (o ladrilhamento regular formado por triângulos equiláteros).

Tendo em vista tudo isso, esse estudo contribuiu para compreender e aplicar conceitos matemáticos relacionados aos ladrilhamentos do plano. Para um trabalho futuro, recomenda-se generalizar as técnicas usadas nesse estudo para classificar os poliedros regulares e semirregulares.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, S.; DALCIN, M. Mosaicos do plano. **Revista do Professor de Matemática**, v. 40, p. 3, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 21.
- ARAÚJO, E. C. V. d. et al. Aplicações geométricas utilizando ladrilhamento. Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Citado na página 10.
- CUNDY, H. M. **Mathematical models**. [S.l.]: Oxford University Press, 1961. Citado na página 19.
- DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. Desafio geométrico: módulo 1. **Cuiabá: Central de Texto**, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 9, 10, 11, 13, 16, 19, 23, 27, 29, 31 e 35.
- KINSEY, L. C.; MOORE, T. E. **Symmetry, Shape and Space: An Introduction to Mathematics Through Geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 10, 11, 23 e 31.
- PATERLINI, R. R. Geometria elementar, gênese e desenvolvimento. **São Carlos: Departamento de Matemática**, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 13.
- REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008. Citado na página 10.
- SALLUM, E. M. Ladrilhamentos. **Matemática IME-USP.**, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 4, 5, 9, 10 e 21.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como  
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

