UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PPGECE

JOÃO ARCI JUNIOR

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

SOROCABA

NOVEMBRO DE 2021

João Arci Junior

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: uma aplicação da modelagem matemática no ensino

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Rogério Fernando Pires.

Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientador: Rogério Fernando Pires

Sorocaba

Novembro de 2021

Arci Junior, João

O princípio da casa dos pombos: uma aplicação da modelagem matemática no ensino / João Arci Junior -- 2021.
109f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
Banca Examinadora: Prof. Dr. Rogério Fernando Pires (UFU), Profa. Dra. Zulma Elizabete de Freitas Madruga (UFRB), Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)
Bibliografia

1. Modelagem Matemática.. 2. Pensamento Matemático Avançado.. 3. Princípio da Casa dos Pombos.. I. Arci Junior, João. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato João Arci Junior, realizada em 30/11/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Rogerio Fernando Pires (UFU)

Profa. Dra. Zulma Elizabete de Freitas Madruga (UFRB)

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

DEDICATÓRIA

Ao eterno Prof. Francisco Arci (*in memoriam*), a quem eu tive o privilégio de chamar de avô.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, meu refúgio e minha fortaleza.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Pires, que, além das indispensáveis sugestões e apontamentos, com sua atenção e cuidado conseguiu transformar minha escrita escolar em texto acadêmico. Sem sua orientação, este trabalho seria raso e desconexo.

À minha esposa, amiga e conselheira Kátia, a mulher da minha vida. E Lay, por me considerar como pai.

Ao meu pai, “Seu” João (*in memoriam*), e minha querida mãe, “Dona” Iracy, que dedicaram suas vidas para que eu, meu irmão e minha irmã tivéssemos a oportunidade de estudar, em paz e bem alimentados. Somos privilegiados.

Aos meus professores do curso de Mestrado da UFSCar, por compartilharem seus saberes com tanta dedicação e carinho. E aos meus queridos colegas de curso, por compartilharem tanta amizade e parceria.

Finalmente, um agradecimento especial aos meus amados alunos e alunas, meus “matematiquinhos” e “matematiquinhas”. Mais do que objetivos do meu trabalho, mais do que companheiros na fantástica jornada do aprendizado da Matemática, levam-me, dia após dia, a acreditar que eu tenho a melhor profissão do mundo.

“Um dia é preciso parar de sonhar e, de algum modo, partir”.

(Amyr Klink)

RESUMO

Esta pesquisa objetivou investigar as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Este princípio, embora de simples enunciado, permite a resolução de vários tipos de situações de Análise Combinatória e, por consequência, de Probabilidade, que são áreas da Matemática nas quais é notável a dificuldade enfrentada por alunos e professores. Na fase de experimentação desta pesquisa foi utilizada a Modelagem Matemática como método de ensino (Modelação Matemática), com o respaldo da teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA). Para fundamentar essa prática, foi feita uma revisão bibliográfica e uma pesquisa sobre Modelagem, PMA e sobre o próprio PCP. No decorrer da prática, os alunos criaram em grupo uma apresentação de *slides* sobre o tema "Jogos de Mesa" e fizeram artesanalmente tabuleiros para jogos de Mancala. Durante a reflexão sobre as regras e estratégias para vencer esse jogo, os alunos desenvolveram um modelo matemático representativo de conceitos de contagem e combinatória, e, principalmente, do PCP. Foram, ao final, apresentados ao conceito formal desse princípio e o associaram ao modelo que criaram. Todo o processo de modelação foi documentado e analisado, e foi observado que os alunos, ao lidar com um tema de interesse, sentiram-se incentivados a pesquisar. As atividades propostas desenvolveram a criatividade e permitiram a modelagem do conceito matemático desejado. Notou-se também a formação ou aperfeiçoamento da imagem conceitual do PCP e posteriormente a compreensão do conceito formal objetivado, de uma maneira geral no grupo participante.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Princípio da Casa dos Pombos.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the implications of applying a teaching sequence about the Pigeonhole Principle (PP) in the learning of 8th grade students. This principle, although simple, allows the resolution of several types of situations of Combinatorial Analysis and, consequently, of Probability, which are areas of Mathematics in which the difficulty faced by students and teachers is remarkable. At the stage of the experimentation of this research, Mathematical Modeling was used as a method for teaching, supported by the theory of Advanced Mathematical Thinking (AMT). To support this practice, a literature review and research on Modeling, AMT and on the PP itself. During the practice, the students created, in a group, a slideshow on the theme “Table Games” and handcrafted boards for Mancala games. During the reflection on the rules and strategies to win this game, students developed a mathematical model representative of counting concepts and combinatory, and, mainly, of the PP. They were, in the end, introduced to the formal concept of this principle and associated it with the model they created. The entire modeling process has been documented and analyzed, and it was observed that the students, when dealing with a topic of interest, felt encouraged to research. The proposed activities developed creativity and allowed the modeling of the desired mathematical concept. It was also noted the creation or improvement of a conceptual image of the PP and later the understanding of the formal concept aimed at, generally in the participating group.

Keywords: Mathematical Modeling. Theory of Advanced Mathematical Thought. Pigeonhole Principle.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
MME	Modelagem Matemática no Ensino
PCP	Princípio da Casa dos Pombos
PMA	Pensamento Matemático Avançado
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este capítulo introdutório inicia o relatório sobre o trabalho de pesquisa realizado, apresentando os fatores que motivaram a realização do estudo, problemática, justificativa, objetivo e descreve, ao final, a composição de cada capítulo desta dissertação.

Desde muito pequeno, desenvolvi um grande gosto pelos jogos e esportes, de todos os tipos. Particularmente, era um pequeno colecionador e, até mesmo, um pequeno pesquisador sobre o tema dos jogos de mesa. Colecionar times de botões de futebol de mesa, criar regras para jogos com dados, fazer contagem de tipos de carros que passavam na rua em frente de casa para simular bolsa de valores e muitas outras invenções de jogos eram minhas maiores formas de entretenimento nas horas vagas. Cheguei a organizar simulações de jogos olímpicos com lápis e papel, inclusive registrando recordes de diversas modalidades. Naquela época não havia computadores pessoais nem muito menos Internet, então eu tinha duas opções: criava meus jogos artesanalmente em casa ou gastava minhas poucas moedas indo a fliperamas cheirando a cigarro e frituras (que, por incrível que pareça, ainda hoje me trazem certa nostalgia agradável).

No ano de 1979, a Editora Abril lançou uma fantástica coleção chamada "Todos os Jogos"[1], composta por fascículos semanais que traziam, a cada exemplar, jogos clássicos, peças para jogar, recursos e tabuleiros. Foram publicados regras e histórias de mais de 600 jogos de tabuleiro e de cartas, entre os principais jogos do mundo. A confecção dessa primorosa obra teve o gerenciamento, pesquisa e testagem lúdica do secretário-editorial Carlos Seabra e pesquisa de Fernando Moraes Fonseca Jr., entre outros.

Eu tinha entre 13 e 14 anos de idade, estava prestes a começar o colegial (Ensino Médio), e, como entusiasta de jogos, não poderia deixar de colecionar e saborear cada fascículo. Contando com a grande ajuda de meu saudoso pai, frequentador de bancas de jornais (leitor assíduo de quadrinhos, jornais e palavras cruzadas), pressionamos o jornaleiro para não perder nenhum fascículo. Assim conseguimos completar essa extensa coleção, que ainda contava com uma bela caixa com recipientes para peças, livros e tabuleiros. Infelizmente, com o tempo e mudanças de casa, acabamos por perder essa verdadeira relíquia.

Foi nessa coleção que conheci o jogo Mancala, de origem ancestral africana, que serviu

---
1 Mais informações em: <https://jogos.oficina.com.br/post/8885326748/todos-os-jogos>

muito bem para o propósito deste trabalho, como está descrito nos capítulos a seguir.

Mais do que isso, as atividades de colecionar, pesquisar, aprender e, principalmente, criar e desenvolver jogos, me propiciaram a motivação para escolher posteriormente a computação como campo de trabalho, o pensamento lúdico com relação às teorias e conceitos científicos, lógicos e matemáticos, e aceitar, depois da casa dos 40 anos de idade, o desafio de trabalhar e pesquisar na área da Educação Matemática. Isso porque sempre encontrei muita relação entre os jogos, no tocante a regras e estratégias, e o desenvolvimento do pensamento matemático. A compreensão das definições e propriedades são como regras de um jogo. E as resoluções de situações-problema precisam de estratégias de jogo, dentro do âmbito dessas regras.

Sendo assim, após trabalhar vários anos na área de computação, já aos 44 anos de idade, decidi aceitar um chamado interior e voltar minha vida profissional para a área da docência em Matemática, carreira na qual meu avô, o também muito saudoso professor Francisco Arci, dedicou sua vida inteira e trouxe provisionamento material e cultural para seus filhos e netos.

Iniciei ensinando Matemática em classes do Ensino Médio de escolas estaduais, mas, após um ano neste trabalho, em 2012 recebi um convite para lecionar em uma escola particular na cidade de São Roque, interior de São Paulo. O que, de início, me deixou hesitante, foi o fato de que esse convite era para as classes do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º anos. Eu não tinha experiências com alunos dessa faixa de idade, dos 11 aos 15 anos, com seus exageros de comportamento e agitação natural. Incerto de poder lidar com a falta de concentração, indisciplina e, muitas vezes, falta de interesse em Matemática desses adolescentes novatos, resolvi aceitar o desafio. Mesmo porque essas características também estavam presentes, em mais ou menos intensidade, nos alunos que eu havia trabalhado anteriormente, os adolescentes mais velhos do Ensino Médio.

Em pouco tempo de trabalho notei que havia tomado uma decisão correta para minha vida profissional e pessoal. Embora fisicamente desgastante, lecionar nos anos finais do Ensino Fundamental me trouxe uma percepção intrigante na observação do desenvolvimento do pensamento matemático das crianças-adolescentes. Nota-se nitidamente a transformação dos conceitos primários aprendidos quando criança, em definições mais coerentes, e o amadurecimento da matemática de cada pequeno indivíduo, aula após aula. Como não poderia deixar de ser, pelas minhas experiências com os jogos quando tinha a idade deles, adotei uma postura em aula bastante lúdica. Isso trouxe, e ainda tem proporcionado, várias experiências de aprendizado em Matemática relativamente bem sucedidas.

Após alguns anos como professor do Ensino Fundamental, aos 50 anos de idade estava apaixonado pela área e ávido por aprender mais. Então optei por me aprofundar no estudo da Educação Matemática, e decidi fazer um curso de Mestrado. Nesse curso, ao qual o presente trabalho faz parte, tomei conhecimento pela primeira vez do Princípio da Casa dos Pombos (PCP). Chamou-me a atenção o fato de sua simplicidade e, não obstante, por ser uma ferramenta que pode ser utilizada para demonstrações e resoluções de situações complexas.

A minha experiência na adolescência com a criação de jogos associada com a característica lúdica do PCP, fez surgir a ideia de experimentar o processo da modelagem matemática nessa situação, aplicando-o no ensino e buscando análises no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

O PCP é aplicado em situações de Análise Combinatória. De todas as áreas da Matemática, esta é uma das que traz maiores desafios para os professores e estudantes.

Segundo Melo (2018, p. 21),

> As pesquisas em formação docente, apontaram que há professores que não trabalham com seus alunos o conteúdo de Análise Combinatória, pois têm dificuldades de compreensão e na diferenciação dos problemas de arranjo e combinação, com isso, relegando a segundo plano o seu ensino e, quando ensinam, valorizam o uso de fórmulas nos problemas de contagem, mas não sabem justificar a origem e a validade das mesmas.

Ou seja, quando um aluno recebe uma lista de fórmulas que, para ele, não têm sentido prático, tende a não compreender em que caso aplicá-las, ou qual das fórmulas aplicar em determinado caso. Com o tempo, essas fórmulas vão sendo esquecidas e o assunto perde relevância.

Na tese de Pinheiro (2015) encontramos destacadas algumas dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem da Análise Combinatória:

- Os alunos não conseguem interpretar corretamente um problema de contagem;
- Os alunos confundem problemas de combinação com problemas de arranjos;
- Os alunos desconhecem o uso da árvore de possibilidade como técnica para resolver determinados problemas;
- Os alunos não conseguem resolver problemas de contagem com mais de uma operação combinatória;

- Os alunos realizam operações aritméticas erradas utilizando as informações numéricas descritas no texto do problema;
- Os professores se apresentam com muita fragilidade em relação ao domínio dos saberes do conteúdo da Análise Combinatória.

Observamos então a importância de encontrar meios para que os alunos compreendam melhor os mecanismos mais complexos de contagem e, posteriormente, de probabilidade. Além disso, construir estratégias que os ajudem a entender que conteúdos teóricos de Matemática e fórmulas são na verdade **modelos** de situações reais da vida cotidiana.

A probabilidade e a combinatória dizem respeito a conjuntos finitos, por isso, a importância do aprendizado destes para as Ciências Humanas e para a sociedade de um modo geral. Oliveira conclui que

> O conhecimento probabilístico é imprescindível para que o indivíduo seja capaz de organizar estas informações e tirar suas conclusões, além de prever possíveis acontecimentos e prováveis soluções, possibilitando assim fazer inferências e contribuir para a melhoria da sociedade (OLIVEIRA, 2018, p. 41).

Em uma situação cotidiana, numa primeira instância, a pessoa precisa ter conhecimento de todas as suas opções para depois tomar uma decisão. Por exemplo, na escolha de um destino de viagem de férias, de uma profissão, de um emprego, de um assunto para uma pesquisa científica e assim por diante. Até mesmo em assuntos mais pessoais, como relacionamentos afetivos ou escolha de vestuário.

Essa primeira instância constitui um problema de contagem, assunto motivador para a Análise Combinatória e um dos primeiros problemas que a humanidade enfrentou em seu desenvolvimento.

Em segunda instância, essa contagem será usada para a tomada de decisão, o que envolve o cálculo de probabilidades, além de relações de benefício e custo. No caso do planejamento de uma viagem, por exemplo, ao verificar e elencar todas as opções de destino, meios de transporte, acomodação e demais variáveis envolvidas, tenta-se calcular qual das opções tem a maior probabilidade de resultar num melhor aproveitamento. E, se possível, até mesmo em termos numéricos, percentuais. Tomamos decisões diariamente, durante todo o tempo.

Em resumo, na Análise Combinatória estudam-se regras de **contagem do número de modos** de ocorrência de certo acontecimento. Na teoria da Probabilidade, procura-se quantificar numericamente **a chance** de que tal acontecimento ocorra de determinada maneira (MACHADO, 1986). Teoria da Probabilidade que, inclusive, foi criada a partir dos jogos de azar, e foi desenvolvida nos últimos três séculos, sendo a base sobre a qual se assenta toda a teoria Estatística.

Compreendendo essa relevância da Análise Combinatória, não só na Matemática como em tantas áreas das Ciências e do cotidiano, eu frequentemente me deparei com a necessidade de buscar ferramentas e estratégias para o aprendizado e para o ensino dos seus tópicos.

No início do ano de 2020, prestes a participar das últimas disciplinas do curso de Mestrado, eu estava também à frente de uma classe de 8º ano com vários alunos e alunas especialmente interessados em Matemática. Assim a minha ideia de experimentar o processo da modelagem matemática nessa situação amadureceu, e surgiu a seguinte questão de pesquisa: "**quais as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental**"?

Busquei a orientação do Prof. Dr. Rogério Fernando Pires, do qual fui aluno da disciplina de "Resolução de Problemas" do curso de Mestrado, e cuja didática e fala são muito claras e objetivas. Percebi que sua experiência, pesquisa e conhecimento na área da Educação Matemática seria essencial para o desenvolvimento desta pesquisa e que sua postura em sala de aula era totalmente compatível com minhas ideias. Ele gentilmente aceitou o convite para desenvolver essa orientação e, assim, para a elaboração deste trabalho, escolhemos como método de ensino a Modelação Matemática. Como suporte teórico a esse processo, segundo a ótima sugestão do Prof. Rogério, usamos a teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA). Ambos os conceitos e detalhamento dos processos estão descritos em capítulos posteriores.

O presente trabalho foi composto pelos seguintes capítulos:

1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: breve análise de textos anteriormente publicados sobre os assuntos de modelagem matemática, teoria do PMA e Princípio da Casa dos Pombos (PCP).

2. OBJETO MATEMÁTICO: histórico e descrição do PCP e sua localização na Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: pesquisa e descrição do conceito de Modelação Matemática e da teoria do PMA, e destaque para a associação entre essas duas abordagens.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA: relatório descritivo sobre como a pesquisa foi elaborada, sua natureza, universo e descrição dos instrumentos de coleta de dados.

5. ANÁLISE DOS DADOS: relato sobre as participações dos alunos e alunas, suas produções, resultados, deduções e análise dessas informações, descrevendo as implicações da aplicação da sequência de ensino na aprendizagem dos estudantes.

Esses capítulos estão apresentados a seguir nesta dissertação.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na tentativa de conhecer o que vem sendo discutido a respeito da temática que envolve esta pesquisa, decidimos escrever este capítulo, o que nos ajudou a compreender melhor a relevância da pesquisa e entender qual é o lugar dela em meio às demais pesquisas correlatas. Assim, decidimos fazer uma busca nos “Catálogo de Teses e Dissertações”[1] da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e no site “*Google* Acadêmico”[2].

Usando a frase “Princípio da Casa dos Pombos” (entre aspas) foi possível encontrar 7 trabalhos na CAPES e 170 trabalhos no *Google* Acadêmico. Com a frase “Modelagem Matemática” (também entre aspas), foram listados 4.689 trabalhos na CAPES e 55.500 no *Google*. Finalmente, com a frase “Imagem de Conceito”, 20 trabalhos foram apresentados na CAPES e 161 no *Google*. Para especificar essa última busca, experimentamos a frase “Teoria do Pensamento Matemático Avançado”, o que resultou em 3 trabalhos na CAPES e 40 no *Google*.

Combinando duas e três frases, fazendo uma filtragem mais rigorosa e após ler os resumos das obras, chegamos ao número de 5 trabalhos, que estão dispostos no quadro a seguir:

[1] Disponível em http://catalogodeteses.capes.gov.br
[2] Disponível em https://scholar.google.com.br

Quadro 1 – Alguns artigos e trabalhos próximos aos temas abordados nesta pesquisa

	Categoria	Título	Autoria	PCP[3]	MME[4]	PMA[5]
01	Artigo	Imagem de Conceito e definição de Conceito: Um Olhar Sobre o Ensino de Geometria Analítica no Ensino Superior	Leide M. Leão Lopes	-	-	Sim
02	Artigo	Modelagem Matemática na Licenciatura em Matemática: Análise de Assuntos em Estudo e Trabalhos a Realizar por Meio dos Conceitos de Classificação e Enquadramento	Amanda Caroline Fagundes Campos e Marilaine de Fraga Sant'ana	-	Sim	-
03	Dissertação	A Modelagem Matemática como Metodologia para o estudo de Análise Combinatória	Cleuza Eunice Pereira Brumano	Análise Combinatória	Sim	-
04	Dissertação	O Princípio das Gavetas de Dirichlet: Uma Proposta de Tarefas de Investigação Matemática	Helen Bossa dos Santos Placidina	Sim	-	-
05	TCC	A Imagem do Conceito de Princípios Combinatórios em Diferentes Públicos	Giuliana Gagg	Princípios Aditivo e Multiplicativo	-	Sim

Fonte: Elaborado pelo autor.

Descrevemos a seguir cada um dos trabalhos destacados, dando ênfase ao objetivo, fundamentação, metodologia, principais resultados e destacamos as aproximações e distanciamentos das pesquisas analisadas com o presente trabalho.

[3] Princípio da Casa dos Pombos
[4] Modelagem Matemática no Ensino
[5] Teoria do Pensamento Matemático Avançado

Artigo: "Imagem de Conceito e definição de Conceito: Um Olhar Sobre o Ensino de Geometria Analítica no Ensino Superior"

Este artigo (LOPES, 2017), escrito por Leide Maria Leão Lopes, da Universidade Federal de Juiz de Fora, foi apresentado no XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, em 2017, em Pelotas, RS.

- Objetivo: investigar as possibilidades que a Teoria do Pensamento Matemático Avançado, fundamentada na noção de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, oferece para o ensino de Geometria Analítica no curso superior.
- Fundamentação teórica: o trabalho apoia-se em um quadro teórico do Pensamento Matemático Avançado, desenvolvido por David Tall, e propõe-se caracterizar os níveis de complexidade das imagem e definições de conceito identificados a partir dos dados empíricos e atividades pré-elaboradas recolhidos junto dos sujeitos da pesquisa.
- Metodologia: A pesquisa, de cunho qualitativo, se enquadra na modalidade de experimento de ensino e, para tanto, foram desenvolvidas atividades que versam sobre Geometria Analítica para analisar-se a compreensão sobre as imagens e definições produzidas.
- Principais resultados: A pesquisadora conclui que é urgente equacionar as formas de ensino para que a prioridade seja estabelecer espaços de aprendizagens, nos quais os estudantes não tenham que recorrer à memorização, por não conseguirem dar significado a teoria formal que lhes é apresentada. Nesse sentido, acredita que uma proposta de ensino de Geometria Analítica, baseada na teoria de imagem de conceito e definição de conceito propostas por Tall e Vinner, possa contribuir para a formação de indivíduos críticos e reflexivos no curso de Matemática.

Este artigo aborda a teoria do PMA, assim como a nossa pesquisa, mas não utiliza a Modelagem Matemática, como nós utilizamos. Além disso, a prática e o objetivo foram centrados em alunos do Ensino Superior, e com um objeto matemático diferente do nosso, a Geometria Analítica.

Artigo: "Modelagem Matemática na Licenciatura em Matemática: Análise de Assuntos em Estudo e Trabalhos a Realizar por Meio dos Conceitos de Classificação e Enquadramento"

Este artigo (CAMPOS, 2020), que é parte da pesquisa desenvolvida por Amanda Caroline Fagundes Campos e orientada por Marilaine de Fraga Sant'ana, foi publicado no ano de 2020 na Revista Eletrônica Vidya, ligada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, em Santa Maria, RS, em seu volume 40, número 1.

- Objetivo: analisar a Modelagem Matemática na formação inicial de professores, especificamente em duas disciplinas obrigatórias.
- Fundamentação teórica: Foram escolhidos os conceitos de classificação e enquadramento porque, segundo a autora, foram elaborados como uma linguagem especial que permite analisar e descrever (nas práticas pedagógicas) as relações de poder e controle, as formas de comunicação e de interação e as mudanças que ocorrem nessas relações.
- Metodologia: Foram analisados assuntos em estudo e trabalhos a realizar em aulas que envolveram Modelagem Matemática em duas disciplinas da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).
- Principais resultados: A autora concorda que o docente, ao ter experiências com Modelagem na posição de aprendiz, pode projetá-las de alguma maneira para seu trabalho.

O artigo, portanto, salienta que a Modelagem Matemática, que abordamos em nossa pesquisa, deve ser apresentada como experiência nos cursos de licenciatura para que ela possa ser aplicada pelos futuros professores. Não há menção neste artigo, no entanto, do objeto matemático abordado em nosso trabalho (PCP) nem do PMA.

Dissertação: "A Modelagem Matemática como Metodologia para o estudo de Análise Combinatória"

Esta dissertação (BRUMANO, 2014) foi apresentada por Cleuza Eunice Pereira Brumano em 2014, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

- Objetivo: O trabalho objetiva analisar a aplicação da estratégia de utilizar a modelagem matemática como alternativa de ensino de Análise Combinatória, permitindo ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes.

- Fundamentação teórica: Como fundamentação teórica, apresenta o conceito de modelo, modelagem e modelação matemática. Também discorre sobre o ensino da Análise Combinatória, sua história na Educação Brasileira e sua situação no currículo nacional.

- Metodologia: A pesquisa foi do tipo qualitativa com alunos do 2º ano do Ensino Médio. O tema, sugerido pelos alunos, foi "O restaurante self service". Os alunos encontraram então um modelo para determinar o número de possibilidades diferentes de se servirem, de acordo com seu poder aquisitivo e paladar.

- Principais resultados: A pesquisa de campo demonstrou que a Modelagem Matemática pode contribuir positivamente para o trabalho do professor. No entanto, foi constatado que, na Modelagem Matemática, os conteúdos surgem à medida que o trabalho vai se desenvolvendo e que isso pode dificultar a ação dos educadores, pois não se pode prever o que vai acontecer e nem que conteúdos poderão emergir a partir de temas escolhidos a partir da realidade dos alunos envolvidos. Não obstante, a pesquisa, segundo a pesquisadora, foi capaz de confirmar aos alunos a presença da matemática em um restaurante, bem como a possibilidade de relacionar a experiência a situações de sala de aula.

Embora o objeto matemático seja o Princípio Fundamental da Contagem, diferentemente do que utilizamos em nosso trabalho, a pesquisadora se aproxima da nossa pesquisa no sentido de utilizar a Modelagem Matemática ao ensino da Análise Combinatória. Nosso trabalho, no entanto, tem uma abordagem teórica respaldada na teoria do PMA.

Dissertação: "O Princípio das Gavetas de Dirichlet: Uma Proposta de Tarefas de Investigação Matemática"

Esta dissertação (PLACIDINA, 2017) foi apresentada por Helen Bossa dos Santos Placidina em 2017, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina.

- Objetivo: responder à seguinte questão: como desenvolver, por meio de tarefas de Investigação Matemática, as ideias do Princípio das Gavetas de Dirichlet na Educação Básica?
- Fundamentação teórica: o trabalho apresenta um breve histórico do PCP e em seguida enuncia o princípio formalmente e em profundidade, com teoremas e suas respectivas demonstrações, intercalando exemplos práticos de aplicações, com diferentes escalas de dificuldade.
- Metodologia: a Investigação Matemática é a metodologia de ensino escolhida para desenvolver o trabalho. São descritos, em um capítulo, todos os momentos na realização de uma Investigação. Segundo a autora, a Investigação se relaciona, de muito perto, com a Resolução de Problemas, mas, ainda segundo ela, são metodologias distintas.
- Principais resultados: foram propostas 6 tarefas que utilizam como Metodologia de Ensino-Aprendizagem a Investigação Matemática, usando como ensejo o Princípio das Gavetas de Dirichlet no currículo da Educação Básica.

Esta dissertação aproxima-se do nosso trabalho, no sentido de abordar o mesmo conceito matemático (o PCP) e pela intenção de abordá-lo na Educação Básica, como apoio no estudo da Análise Combinatória. Uma grande diferença com nossa pesquisa, no entanto, é a utilização da Investigação Matemática, pois usamos a Modelagem Matemática. Além disso, em nosso presente trabalho, abordamos o PMA.

TCC: "A Imagem do Conceito de Princípios Combinatórios em Diferentes Públicos"

Este Trabalho de Conclusão de Curso (GAGG, 2018) foi escrito em 2018 por Giuliana Gagg, pelo Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre.

- Objetivo: estudar o processo de formação e manifestação da imagem do conceito dos princípios aditivo e multiplicativo da análise combinatória.
- Fundamentação teórica: são apresentados os conceitos de análise combinatória que foram utilizados para a pesquisa e, em seguida, as ideias de David Tall e Shlomo Vinner sobre imagem e definição do conceito. Depois é apresentado o método de Resolução de Problemas de Lourdes Onuchic e Norma Allevato.
- Metodologia: a pesquisa se caracteriza como qualitativa, e a metodologia utilizada foi a de Resolução de Problemas em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental e em uma turma de alunos de graduação em Licenciatura em Matemática.
- Principais resultados: concluiu-se que quanto maior o número de experiências com o conceito, para ambos os públicos, mais rica é a imagem do conceito de cada um. A resolução de problemas auxiliou os alunos do ensino fundamental a formarem suas imagens dos conceitos; para os alunos do ensino superior, percebeu-se que o convite à escrita de seus pensamentos auxilia na análise da fundamentação da imagem do conceito do aluno em relação à análise combinatória.

Este trabalho talvez seja o que mais se aproxima do nosso, embora não objetive o ensino do PCP (apesar de abordar conceitos da Análise Combinatória) e não utilize a Modelagem Matemática, mas a Resolução de Problemas. A aproximação é devida ao uso da teoria do PMA, considerada fortemente em nossa pesquisa, e à experiência com uma turma do Ensino Fundamental, como nós praticamos.

Ao concluir esta revisão, não foi encontrado, nas bases de dados nas quais foram realizadas o levantamento, nenhum estudo mencionando o Princípio da Casa dos Pombos

(PCP), a Modelagem Matemática e a teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em um mesmo contexto. Mesmo abrangendo o espectro da busca, não foram encontradas pesquisas em Modelagem Matemática com uma aproximação à teoria do PMA, independentemente do objeto matemático abordado.

2 OBJETO MATEMÁTICO

Optamos por utilizar como objeto matemático o Princípio da Casa dos Pombos (PCP), aplicado para resolução de problemas e demonstrações de teoremas sobre Análise Combinatória. Discorreremos a seguir sobre as primeiras ocorrências do PCP na história da Matemática; uma breve biografia do matemático alemão Johann Dirichlet, considerado o primeiro a enunciar formalmente o princípio; descreveremos o enunciado formal do princípio com alguns exemplos de aplicação e, finalmente, faremos uma breve discussão sobre a inserção do PCP no currículo de Matemática

2.1 História do Princípio da Casa dos Pombos

O PCP aparece em uma obra de Johann Dirichlet no ano de 1842. No entanto, há menções indiretas ao princípio em livros bem anteriores a Dirichlet. Segundo Sousa e Silva (2020), no livro datado de 1622, *Selectæ Propositiones*, do jesuíta francês Jean Leurechon, lê-se "É, duas pessoas têm o mesmo número de cabelos, como moedas de ouro".

Dois anos depois, também segundo Sousa e Silva (2020), em 1624, no livro *Récréation Mathematicque*, de Jean Appier Hanzelet, encontra-se a afirmação "Que é absolutamente necessário que dois homens tenham tantos cabelos ou pistolas quanto o outro”. Para justificar essa afirmação argumenta-se que é certo que há mais homens no mundo do que o número de cabelos ou pistolas do homem mais rico.

Essas afirmações utilizam a ideia do PCP, mas aparentemente o princípio não foi formalizado até que, em 1842, Johann Dirichlet o fez. Por essa razão, ele leva o crédito de tê-lo enunciado, e, em algumas publicações, o princípio também é chamado de "Princípio das Gavetas de Dirichlet".

O matemático Johann Peter Gustav “Lejeune” Dirichlet nasceu em 1805 na cidade de Düren, Alemanha, bem próxima da Bélgica. Por essa razão, Dirichlet era fluente em alemão e francês (daí o apelido “Lejeune”, em francês “o jovem”). Assim, Dirichlet serviu como um elo importante entre a matemática e os matemáticos alemães e franceses na época.

Casou-se em 1832 com Rebecca Mendelssohn, irmã do célebre compositor, pianista e maestro alemão Felix Mendelssohn.

Foi aluno e grande admirador de Carl Friedrich Gauss. Por essa razão, Dirichlet esperava poder terminar os trabalhos incompletos de Gauss, objetivo que não conseguiu cumprir. A descrição que se faz de Dirichlet é a de um homem nobre, sincero, humano e modesto, como pode-se notar no relato de Eves (2011):

> Conta-se uma história tocante envolvendo Dirichlet e seu grande mestre Gauss. Em 16 de julho de 1849, decorridos exatamente 50 anos do doutorado de Gauss, houve uma celebração em Göttingen. Como parte da festa, a certa altura, Gauss deveria acender seu cachimbo com uma parte dos originais das *Disquisitiones arithmeticae*[1]. Dirichlet, que estava presente, se horrorizou com o que lhe parecia um sacrilégio. No último momento, ele corajosamente salvou o trabalho das mãos de Gauss e guardou aquela relíquia pelo resto da vida; seus editores acharam-na entre seus papéis depois de sua morte. (EVES, 2011, p. 538)

Em 1842, Dirichlet escreveu um artigo intitulado "Generalização de uma frase da doutrina das frações contínuas, juntamente com algumas aplicações para a teoria dos números", continuação de estudos sobre somas gaussianas. Talvez inspirado pelo fato de seu pai ter sido chefe dos correios na sua cidade natal (SOUSA; SILVA, 2020), em determinado ponto do artigo, Dirichlet elabora a seguinte questão: "Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto". Por essa razão, o PCP é também chamado de Princípio das Gavetas de Dirichlet. Note-se que, mais adiante em nosso trabalho, enunciamos do Princípio considerando as gavetas como casas e os objetos como pombos.

Dirichlet é considerado o fundador da teoria das séries de Fourier. Bernhard Riemann, que foi um estudante de Dirichlet, escreveu na introdução de sua tese de habilitação nas séries de Fourier que foi Dirichlet quem escreveu o primeiro trabalho sobre este assunto (MACTUTOR, 2021). Talvez esta tenha sido a realização mais celebrada de Dirichlet, pois a análise que fez da convergência das séries de Fourier o levou a generalizar o conceito moderno de função (EVES, 2011, p. 537).

Segundo o banco de dados MacTutor (2021), Helmut Koch escreveu sobre Dirichlet, no livro *Mathematics in Berlin*, de 1998, que

> (...) importantes partes da matemática foram influenciadas por Dirichlet. Suas demonstrações caracteristicamente começavam com observações

[1] *Disquisitiones Arithmeticae* é um livro sobre teoria dos números escrito em latim por Carl Friedrich Gauss em 1798, quando Gauss tinha 21 anos de idade, e publicado pela primeira vez em 1801. Neste livro Gauss reuniu resultados em teoria dos números obtidos pelos matemáticos Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange e Adrien-Marie Legendre, adicionando aos mesmos diversos resultados de sua autoria.

> surpreendentemente simples, seguidas de análises extremamente acuradas do problema remanescente. Com Dirichlet começou a era de ouro dos matemáticos em Berlin. (MACTUTOR, 2021, tradução nossa)

Dirichlet recebeu em 1855 o título de Membro da *Royal Society*, de Londres, por substanciais contribuições ao crescimento do conhecimento científico.

Johann Dirichlet faleceu em 1859, em Göttingen, região central da Alemanha. Seu cérebro, como o de Gauss, encontra-se preservado no departamento de fisiologia da Universidade de Göttingen. Em 1970, a *International Astronomical Union* (IAU) o homenageou dando seu nome a uma cratera lunar.

2.2 O Princípio da Casa dos Pombos

O Princípio da Casa dos Pombos (PCP) foi usado por Dirichlet para resolver problemas na Teoria dos Números, entretanto ele possui um grande número de aplicações em diversos ramos da Matemática como Combinatória e Geometria. A seguir, o enunciado da forma mais simples do PCP (OLIVEIRA; CORCHO, 2010, p.143):

Proposição 1 (PCP - Versão Simples)**.** *Se distribuímos $N+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.*

Demonstração. Suponhamos que em cada casa não existe mais do que um pombo, então contando todos os pombos contidos nas N casas não teremos mais do que N pombos, contradizendo a hipótese de termos $N+1$ pombos, distribuídos nas N casas. ∎

Vejamos exemplos de aplicação do PCP:

Exemplo 1. *Numa floresta crescem 1.000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos (OLIVEIRA; CORCHO, 2010, p.145).*

Demonstração. Temos 1.000 jaqueiras, representando os pombos, e 601 casas identificadas pelos números 0, 1, 2, 3, ..., 600. O número k associado a cada casa significa que nela serão colocadas jaqueiras que têm exatamente k frutos. Como $1000 > 602 = 601 + 1$, o PCP nos garante que existem duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos. ∎

Exemplo 2. *Quantas pessoas são necessárias para que se tenha a certeza de que duas delas farão aniversário no mesmo mês?*

Resolução. Se representarmos os meses como sendo as casas de pombos, teremos 12 casas. Então, pelo PCP, é necessário que haja 13 pombos para que, em pelo menos uma casa, haja dois pombos. Portanto, se associarmos os pombos às pessoas, 13 pessoas serão suficientes. ■

Podemos enunciar o PCP de uma maneira mais geral, como encontramos em Oliveira e Corcho (2010, p. 146):

Proposição 2 (PCP - Versão Geral)**.** *Se distribuímos $N \cdot k + 1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém pelo menos $k + 1$ pombos.*

Demonstração. Com efeito, suponhamos pelo contrário que em cada casa não existe mais do que k pombos, então contando todos os pombos contidos nas N casas não teremos mais do que $N \cdot k$ pombos, contradizendo isto a hipóteses de termos $N \cdot k + 1$ pombos distribuídos nas N casas. ■

Notemos que se $k = 1$, esta versão mais geral coincide com a versão mais simples.

Exemplo 3. *(OLIVEIRA; CORCHO, 2010, p. 147) Num colégio com 16 salas são distribuídas canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala recebe canetas da mesma cor então prove que existem pelo menos 6 salas que receberam canetas da mesma cor.*

Demonstração. Fazendo a divisão com resto de 16 por 3 temos que $3 \cdot 5 + 1$. Consideramos as 16 salas como sendo os pombos e as três cores, preto, azul e vermelho como sendo as casas. Logo, podemos "colocar"cada sala em uma das três cores. Assim, o PCP com $N = 3$ e $k = 5$ nos dá que existe uma casa com pelo menos 6 pombos, ou seja, existem no mínimo 6 salas que receberam canetas da mesma cor. ■

2.3 O PCP na BNCC

A Constituição Federal de 1988, no Artigo 210, reconhece que “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação **básica comum** e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” (BRASIL, 1988, grifo nosso).

Com base nesse marco constitucional, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da educação nacional, no Inciso IV de seu Artigo 9º, afirma que cabe à União assegurar formação básica comum.

Nesta mesma LDB, encontramos uma determinação mais acurada do que é "básico-comum", no Artigo 26:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter **base nacional comum**, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996, grifo nosso).

Por fim, a Lei nº 13.415/2017 inclui na LDB, entre outros, o Artigo 35 que define a nomenclatura:

> A **Base Nacional Comum Curricular** definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas seguintes áreas do conhecimento: I - linguagens e suas tecnologias; II - matemática e suas tecnologias; III - ciências da natureza e suas tecnologias; IV - ciências humanas e sociais aplicadas (BRASIL, 2017a, grifo nosso).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2017b).

Na BNCC encontram-se competências gerais a serem atingidas na Educação Básica[2] dentro do território brasileiro. Por competência, a BNCC define como sendo a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2017b, p. 8)

O texto da BNCC organiza as aprendizagens em cada etapa da Educação Básica identificando as habilidades com códigos alfanuméricos da seguinte maneira:

AAXXBBYY

Onde:

[2] Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

- **AA**: Par de letras que indica a etapa da Educação Básica, a saber: EI (Educação Infantil), EF (Ensino Fundamental) ou EM (Ensino Médio).

- **XX**: Par de números que indica o grupo por faixa etária, no caso da EI, o ano (01 a 09) no caso do EF ou, no caso do EM, o número "13" indicando que a habilidade descrita pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio (da 1ª à 3ª série), conforme definição dos currículos.

- **BB**: Par de letras que indica o campo de experiências na EI, o componente curricular na EF ou, no caso do EM, pode ter três letras indicando a área.

- **YY**: Par de números que indica a numeração sequencial da habilidade (ou trio de números no caso do EM).

Por exemplo: o código **EF06MA30** representa a habilidade em Matemática (MA), de número 30, correspondente ao 6º ano do Ensino Fundamental.

A BNCC propõe para o Ensino Fundamental e Ensino Médio, cinco **unidades temáticas** de Matemática, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo de determinada etapa: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. O PCP não faz parte explicitamente da BNCC. No entanto, seu aprendizado pode ser utilizado no auxílio do desenvolvimento de diversas habilidades, presentes na BNCC (BRASIL, 2017b):

Quadro 2 – Habilidades na BNCC em que o PCP pode auxiliar

Unidade Temática	**Habilidade**
Números	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Probabilidade e estatística	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Fonte: Brasil (2017b, p. 313,319, e 537).

Destacamos a habilidade de código **EF08MA03** pois, primeiramente, é sugerida para ser trabalhada no 8º ano do Ensino Fundamental, ano em que optamos por efetuar a pesquisa. Em segundo lugar, porque a apresentação do PCP no contexto desta habilidade vem enriquecer sua proposta, no sentido de ampliar o conjunto de estratégias dos alunos para além do princípio multiplicativo de contagem.

Notamos também, na descrição desta mesma habilidade, a menção de resolver e **elaborar** problemas. Há de se destacar a importância de incentivar os alunos a elaborar problemas sobre determinado conceito, pois para tanto é necessário ter uma boa aprendizagem sobre o tema.

A simplicidade do enunciado do PCP e sua característica lúdica permitem ao aluno a possibilidade de se interessar em desenvolver suas próprias conclusões e deduções lógicas a partir do PCP e do próprio princípio multiplicativo.

Assim, a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, o aluno pode familiarizar-se com problemas de Análise Combinatória, até que venha a encontrar situações mais complexas no Ensino Médio. E então, nesta etapa, o aluno pode apropriar-se com mais facilidade da habilidade **EM13MAT310**, da BNCC, descrita no Quadro 2 na página 33.

Há de se concordar que o conteúdo de Matemática atualmente contemplado na Educação Básica já é bastante extenso, permitindo pouca margem para o professor ou professora incluir novos tópicos ou mesmo enriquecer os já existentes. No entanto, verificamos, na experiência executada neste trabalho, que com uma ou duas intervenções práticas o PCP pode ser apresentado e compreendido com facilidade.

Sendo assim, concluímos que a inclusão do PCP no planejamento curricular de Matemática, já no Ensino Fundamental, seria bastante interessante no ensino de Análise Combinatória.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Modelagem Matemática tem sua origem na matemática aplicada, como metodologia de pesquisa. No entanto, ela também serve como ferramenta metodológica para o ensino de Matemática desde a Educação Básica até a pós-graduação.

Ao desenvolver um modelo matemático de uma situação prática, o aluno estará associando conteúdos matemáticos à representação de fenômenos de diversas áreas do conhecimento humano, como esportes, atividades de lazer, cotidiano, vida social, geografia, entre outras, sem citar as áreas das ciências exatas, como física, química, engenharia e afins, onde a Matemática é mais explicitamente aplicada.

Associar a Matemática a situações práticas é fundamental para que o estudante compreenda a importância de seu aprendizado. O método da Modelagem Matemática tem "a intenção de estimular alunos e professores de Matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores" (BASSANEZI, 2002, p. 25).

Concomitantemente ao processo de modelagem, em nossa experiência prática, observamos, nos dizeres e procedimentos dos alunos e alunas, diferenças e semelhanças entre a imagem de conceitos matemáticos que eles possuem e os conceitos formais propriamente ditos. Isso nos levou a trazer neste trabalho, além das ideias que envolvem a Modelagem Matemática, também um estudo sobre a teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Discorreremos então sobre o método da Modelagem Matemática e, em seguida, sobre o PMA.

3.1 Modelagem e Modelação Matemática

Um dos principais desafios no Ensino da Matemática é tentar ajudar o aluno a conectar a teoria ensinada à realidade, aos fenômenos que ele ou ela vivencia e experimenta. É justamente nesta tentativa de conexão que a modelagem matemática pode atuar. "Pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir"(BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p. 13)

A Matemática é uma forma de linguagem, e, como tal, procura representar as situações que vivemos e as leis que regem o universo. Segundo Biembengut (2016, p.60),

> A linguagem matemática, sob certo olhar, é a tradução de uma situação-problema (real ou não) por meio de símbolos e ordem lógica (estrutura) que permite formular, resolver questões das mais diversas áreas do conhecimento e da própria matemática.

Isso significa que, para traduzir uma situação real (ou mesmo fictícia) para a linguagem matemática, como pré-requisitos, o indivíduo precisa conhecer os símbolos matemáticos e ter a habilidade de organizá-los logicamente em uma estrutura funcional.

Portanto, esse processo de tradução não é necessariamente natural. Algumas pessoas têm facilidade e interesse nato em conhecer a simbologia matemática e construir estruturas lógicas, já outras pessoas não. Daí surgem dificuldades, obstáculos e consequente desinteresse pelas situações propostas e até pela Matemática como um todo.

Ao invés de buscar símbolos e estruturas matemáticas, nosso pensamento natural segue um processo de busca e adaptação a um modelo de estrutura de pensamento que já possuímos ou a criação de um novo, para uma situação que observamos no cotidiano.

> Quando ouvimos o som ou o nome de uma pessoa conhecida, ou ainda quando sentimos um aroma de algo conhecido, a nossa mente busca verificar se já dispomos desse conhecimento, relacionando com o existente e fazendo emergir uma imagem, um significado, um **modelo** (BIEMBENGUT, 2016, p. 77 - grifo nosso).

Ou seja, qualquer entrada de informações recebida por nossos sentidos[1] dispara um procedimento de busca por um modelo existente em nossa estrutura cognitiva, nossa organização mental de ideias, que possa explicar, definir, contextualizar a informação recebida.

Caso não seja encontrado um modelo a ser comparado, nossa mente tenta formar um novo modelo para entender e explicar a situação. Se a informação ou situação é relevante, ou mais, se temos a percepção de que nos será importante no futuro, conservamos o modelo para uso posterior. Caso contrário, ele é descartado, esquecido.

Pressupomos que um professor ou professora de Matemática é, antes de tudo, uma pessoa que admira muito a Matemática, e assim, deseja que todas as pessoas conheçam os conceitos, as nuances, a beleza da disciplina. No entanto, é preciso que haja um entendimento, até de certa forma libertador, de que há pessoas que não conhecerão, não desejarão conhecer e,

[1] Qualquer sentido: visão, olfato, paladar, tato ou audição. De qualquer forma são informações de entrada.

principalmente, não precisarão compreender toda a Matemática para que alcancem seus objetivos pessoais e profissionais.

Assim, é muito importante discutir e refletir sobre a relevância das informações que o professor deseja transmitir aos alunos. Essa relevância é relativa, é de cunho pessoal.

Para um adolescente que vive no centro de São Paulo, é importante saber como funcionam as linhas de metrô, horários e medidas de segurança. Mas não há relevância no conhecimento das espécies de peixes que vivem no rio Amazonas. Por outro lado, para um adolescente que vive da pesca neste rio, a situação é diametralmente oposta.

Em um sistema educacional baseado em conteúdos, principalmente no caso da Matemática, a missão do professor passa a ser "tornar um assunto relevante ao aluno", um procedimento que muitas vezes é artificial. Certa vez um professor, para destacar a importância de resolver equações de segundo grau, disse à classe que essas equações eram usadas para construir uma asa de avião, delineando sua curvatura, e, caso houvesse um erro, o avião cairia. Além de ser uma observação vaga e incorreta, pode causar desinteresse do aluno ao assunto em questão, uma situação oposta ao que o professor desejava no início.

Em um plano ideal, a missão do professor é a de buscar artifícios que façam o aluno perceber a relevância de cada conteúdo matemático. Isso pode ser feito por meio de conversas, reuniões, debates e até com passeios externos com a turma. E então, desenvolver atividades, situações, roteiros de estudos que despertem a atenção e o interesse, e permitam que o aluno busque formar modelos que ele provavelmente irá utilizar no futuro. Assim, esses modelos não serão descartados, farão parte da estrutura cognitiva do indivíduo. Sejam modelos de uso geral ou, no caso aqui estudado, modelos matemáticos, específicos para o uso do desenvolvimento posterior de conceitos matemáticos mais avançados.

Os professores ou professoras precisam então concentrar-se no desenvolvimento de ações que possibilitem a Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática possui diversos conceitos, definições e procedimentos na literatura. Uma delas é a seguinte: "a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual"(BASSANEZI, 2002, p. 24). Essa definição classifica a modelagem como **arte**, que é, segundo Fernandes, Luft e Guimarães (1996), "um conjunto de regras para fazer ou dizer alguma coisa com perfeição; artifício; habilidade". Ainda utilizando a definição de Bassanezi, entendemos que não adianta apenas resolver os problemas matemáticos, resultados da transformação de uma situação, mas é necessário, ao final, interpretar as resoluções na linguagem usual, que é caracterizada pela informalidade, coloquial, ou seja, verificar se as conclusões encontradas, a partir do modelo produzido, são condizentes com a realidade que originou a situação. O professor, então, passa a ser o artista mais experiente e habilidoso que vai propor caminhos e regras para que seus discípulos alcancem a habilidade na modelagem matemática e possam eventualmente aperfeiçoar-se nesta arte. Um artista, seja ele de qualquer área, dispõe de dois pilares estruturais: talento e técnica.

Talento desenvolve-se com a experiência. É preciso tempo, persistência, prática, erros e acertos. Portanto, o desenvolvimento do talento é pessoal e particular. Técnica adquire-se com estudo. Leitura, pesquisa, cursos. Vamos então, neste momento, discorrer sobre as técnicas da arte da modelagem.

Biembengut (2016, p. 103) descreve os procedimentos da modelagem em três fases, subdivididas em sub fases. Mais adiante, em seu texto, Biembengut (2016, p. 191) diferencia a Modelagem Matemática geral da Modelagem na Educação, que ela denomina **Modelação Matemática**, e utiliza o termo "etapa"no lugar de "fase". Assim iremos definir a Modelação Matemática em suas etapas:

Etapa 1. Percepção e Apreensão

- Percepção $\rightarrow$ no reconhecimento e delimitação da situação-problema;
- Apreensão $\rightarrow$ na familiarização do assunto - referencial teórico.

Etapa 2. Compreensão e Explicitação

- Compreensão $\rightarrow$ na formulação do problema, da questão e da hipótese;
- Explicitação $\rightarrow$ na formulação de um modelo;
- Explicitação $\rightarrow$ na resolução do problema a partir do modelo.

Etapa 3. Significação e Expressão

- Significação $\rightarrow$ na interpretação da solução;
- Significação $\rightarrow$ na avaliação e validação do modelo;
- Expressão $\rightarrow$ do processo e do resultado $\rightarrow$ modelo.

Na etapa 1, o aluno ou a aluna percebe o assunto, reconhece o contexto, situa-se em um campo familiar a ele ou a ela. Estamos falando de culinária? Gestão de empresas? Matemática pura? Técnicas de pesca? Entretenimento? Economia doméstica? Desenvolvimento pessoal?

Na etapa 2, a pessoa enuncia o problema que surge dentro do assunto tratado. Enunciar, pressupõe compreender o problema, sistematizá-lo, formulá-lo ou até mesmo formalizá-lo. Então, cria-se um modelo para resolver o problema ou para lidar com a situação proposta. Esse modelo será intuitivamente [2] genérico, no sentido de não ser útil apenas para a situação-problema em discussão, mas para outras similares que eventualmente surgirão. Um modelo apenas para misturar os componentes da massa de um bolo de cenoura, por exemplo, será estendido para qualquer bolo, ou para qualquer receita que precise de massa. Um modelo desenvolvido para economizar papel no escritório do departamento pessoal de uma determinada empresa será um modelo utilizado posteriormente para qualquer departamento, em qualquer empresa. E assim por diante.

Finalmente, a etapa 3 é posterior à criação de um modelo. Interpreta-se a solução encontrada e esta é avaliada. Discute-se se é um modelo correto, se é eficiente, prático, viável e, principalmente, se é válido. De todo o procedimento executado e diante do resultado obtido, o modelo é então aceito e o indivíduo apropria-se dele em sua estrutura cognitiva. Caso haja relevância para o estudante, este modelo não será esquecido ou descartado.

Ao final, a modelação pode despertar o senso crítico do estudante, no sentido dele ou dela reconhecer e compreender aplicações de conceitos matemáticos à realidade, e assim, poder tomar decisões com mais segurança e objetividade em situações futuras.

Percebemos então que o processo de modelação não é rápido nem direto. Para o professor, a utilização da modelagem no ensino irá levar tempo, esforço físico e mental, e muito planejamento. Além disso, os resultados não são completamente previsíveis, há muita subjetividade envolvida e a experiência é bastante individual, peculiar para cada turma e para cada aluno ou aluna. Tudo isso traz compreensível insegurança ao professor ou professora. No entanto, se considerarmos o ponto de vista do estudante, a modelação, quando contextualizada e bem orientada, é um processo intuitivo e fluente. E os resultados são concretos, permanentes e úteis. Além disso, o processo de modelagem é, por sua natureza, bastante lúdico, ou seja, é uma

[2] Escrevemos aqui "intuitivamente"pois é uma capacidade inerente do ser humano, a busca da mente em sintetizar processos e economizar recursos. Com a síntese e eficiência, memorizamos melhor os procedimentos e otimizamos os raciocínios.

atividade que distrai e diverte. Assim, pode ser muito útil em despertar o gosto do estudante por resolver problemas.

Cabe, enfim, ao professor, pesar pessoalmente a relação benefício/custo. Mais ainda, cabe esforçar-se para dispor de tempo e espaço necessários para o desenvolvimento de todo o processo de modelação.

Sistematizando os procedimentos discutidos até o momento, para utilizar a modelação em seu trabalho de ensino, o professor ou a professora precisa:

1. Buscar informações e conceitos relevantes aos alunos, relativos à realidade da turma;
2. Planejar as atividades, dispondo tempo e espaço necessários;
3. Tornar-se um tutor na arte da modelagem e propor, durante o processo, caminhos e regras para auxiliar os alunos a criarem seus próprios modelos;
4. Juntamente com a turma, avaliar e validar os modelos criados.

Além de tudo o que foi exposto até aqui, neste trabalho, devemos notar que, ao utilizar a modelação matemática, estamos diante de uma ótima perspectiva no sentido de possibilitar, aos estudantes, o gosto pela Matemática por ela mesma. Concordamos com o que escreve Bassanezi (2002, p. 16): "A matemática não deve ser considerada importante simplesmente por alguma definição arbitrária ou porque mais tarde ela poderá ser aplicada. Sua importância deve residir no fato de poder ser tão agradável quanto interessante". O argumento de que o aluno deve aprender determinado conteúdo porque ele vai "cair no vestibular" ou mesmo "cair na prova" pode trazer peso, ansiedade e até remorso ao estudante. Não irá despertar a vontade em prosseguir e aprofundar-se no estudo da Matemática. Por outro lado, ao ter experiências práticas e lúdicas como a modelagem matemática, o estudante poderá perceber que a Matemática pode ser agradável e interessante por si só.

3.2 Teoria do Pensamento Matemático Avançado

Comparada com outros ramos da ciência, a Matemática é normalmente considerada de grande precisão, com conceitos definidos acuradamente. No entanto, antes de um conceito ser definido formalmente, ele existe na complexa estrutura cognitiva de um ou mais indivíduos.

E, ademais, quando um determinado conceito é evocado, produz uma variedade de imagens mentais personalizadas, individuais. Por exemplo, para algumas pessoas, a ideia de fração logo traz a imagem de um círculo dividido em seções, como uma pizza. Para outras, traz a imagem de uma barra de chocolate dividida em retângulos. Para outras ainda, o conceito de fração pode produzir a imagem de um numerador acima de um denominador, que é mais formal.

O cérebro humano está longe de ser uma entidade puramente lógica. Nem sempre a lógica nos dá *insights*[3] e, por outro lado, nem sempre cometemos erros por puro acaso.

Para entender como esses processos ocorrem, tanto positivamente como erroneamente, é necessário formular a diferença entre o conceito matemático formal e os processos cognitivos pelos quais esse conceito é concebido. Ou seja, diferenciar a **definição** do conceito e a **imagem** deste conceito.

Segundo Tall e Vinner (1981), **imagem conceitual** é toda a estrutura cognitiva na mente de um indivíduo que é associada a um certo conceito. Isso pode ter aspectos bem diferentes da **definição formal deste conceito**.

Enquanto a **definição** de um conceito matemático é estática, formalizada, construída de maneira técnica e precisa com a escrita matemática e seus símbolos, a **imagem** que um indivíduo tem deste conceito é dinâmica, construída através dos anos por experiências de todos os tipos, alterando-se e amadurecendo conforme o indivíduo encontra novos estímulos. É nesse sentido que o conceito pessoal pode diferenciar do conceito formal.

Quando parte de uma imagem conceitual pode conflitar com parte de outra imagem conceitual, Tall e Vinner (1981, p. 153) a definem como sendo um "**fator potencial de conflito**". Por exemplo, a definição de um número complexo $x+iy$ como um par ordenado de números reais (x,y) e a identificação de $x+i0=(x,0)$ como o número real x é um fator potencial de conflito no conceito de número complexo. Isto porque há um potencial conflito com a noção, na teoria dos conjuntos, de que o elemento x é distinto de um par ordenado $(x,0)$.

Apenas quando essas partes de imagens de conceitos são evocadas simultaneamente é que ocorre realmente um conflito cognitivo. Neste caso, os fatores deixam de ser potenciais e tornam-se **fatores de conflito cognitivo**.

Os fatores de conflito cognitivos podem ser evocados inconscientemente, provocando

[3] Conhecimento repentino e intuitivo sobre algo ou situação.

uma sensação de mal-estar. Em alguns casos, pode causar sentimento de que há alguma coisa errada na situação, no problema ou na pesquisa, sensação que apenas será resolvida quando a razão do conflito for conscientemente compreendida.

Um tipo mais sério de conflito é quando uma parte de imagem conceitual não está em divergência com outra parte de imagem conceitual, mas sim com a **definição formal** do conceito em si. Tall e Vinner (1981) alertam para esta situação:

> Tais fatores podem impedir seriamente o aprendizado de uma teoria formal, pois não podem se tornar fatores de conflito cognitivo reais, a menos que a definição formal do conceito desenvolva uma imagem conceitual que possa então gerar um conflito cognitivo. Os alunos que têm esse fator de conflito potencial em sua imagem conceitual podem estar seguros em suas próprias interpretações das noções em questão e simplesmente considerar a teoria formal inoperante e supérflua (TALL; VINNER, 1981, p. 154, tradução nossa).

Por exemplo, suponhamos um aluno que não tem uma imagem completa do conceito de adição de frações, mas aprende corretamente o processo de multiplicação de frações. Após efetuar várias operações de multiplicação com sucesso, multiplicando os numeradores e, em seguida, os denominadores, ganha segurança e cria sua imagem conceitual de operar com frações. Quando precisa efetuar uma adição de frações, pode achar supérfluo o processo de encontrar frações equivalentes para, somente depois, efetuar a adição dos numeradores (e inclusive de manter o denominador comum). Encontramos algumas vezes, em nosso trabalho como professor, expressões escritas por alunos do tipo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Assim, conhecendo de antemão um fator potencial de conflito, o professor pode, antes de apresentar o conceito formal, dar subsídios para que o aluno possa ampliar sua imagem do conceito em questão. No exemplo citado, pode-se investir um tempo maior na experimentação sobre adição de frações com denominadores iguais e diferentes, para somente depois apresentar o conceito de multiplicação de frações e consequentemente seus processos.

Ao diferenciarmos imagem conceitual de conceito formal, compreendermos suas conexões e disrupções, e detectarmos os fatores potenciais de conflito, nos deparamos defronte a um estudo a considerar: a Teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Percebemos que há duas disciplinas envolvidas neste estudo, a Psicologia e a Matemática. Segundo David Tall,

> Os expositores das duas disciplinas tendem a ver o assunto de maneiras diferentes - o psicólogo estende as teorias psicológicas aos processos de pensamento em um domínio de conhecimento mais complexo - o matemático busca insights sobre o processo de pensamento criativo, talvez com a esperança de melhorar a qualidade de ensino ou pesquisa (TALL, 1991, p. 1, tradução nossa).

A maneira do pensar matemático não é única. Ao se estudar a psicologia do pensamento matemático há de se considerar o amplo contexto da mente e das atividades culturais do indivíduo.

Então, a imagem conceitual que um indivíduo tem sobre determinado assunto matemático pode ser bastante diferente da imagem que outro indivíduo tem, por mais próximo que este seja. Por exemplo, ambos sendo participantes de uma mesma sala de aula. Ou mesmo dentro de um pequeno grupo de estudo.

Há muitas variáveis envolvidas na criação mental de uma imagem conceitual, e o produto desta imagem conceitual formada é o que Tall (1991, p. 10) chama de **intuição**.

Quanto mais o indivíduo é educado no pensamento lógico, mais seu imaginário conceitual irá ressoar com respostas lógicas. Os estudantes passam de uma intuição inicial, baseada em suas matemáticas pré formais, para intuições formais conforme tornam-se mais experientes.

As intuições primárias crescem de maneira natural, desenvolvendo-se no ser humano conforme suas experiências. "Um quadrado é um desenho com todos os lados iguais".

As intuições secundárias são desenvolvidas por meio de treino intelectual sistemático. "Um quadrado é um desenho reto que tem quatro lados com a mesma medida".

Mesmo assim, a intuição, por mais sofisticada que seja, ainda é produto da imagem conceitual. Não é o mesmo que rigor matemático. "Quadrado é uma figura geométrica plana poligonal e convexa que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos também congruentes e retos".

Pode-se notar a dicotomia[4] entre intuição e rigor como aquela entre o pensamento holístico[5] e visual do hemisfério direito do cérebro e o pensamento sequencial lógico do esquerdo.

> Assim, aspectos da lógica também podem ser aprimorados para se tornarem mais "intuitivos"para a mente matemática. O desenvolvimento dessa intuição lógica refinada deveria ser um dos principais objetivos de uma educação matemática mais avançada (TALL, 1991, p. 11, tradução nossa).

[4] Partição de um todo em apenas duas partes.

[5] Entendimento global dos fenômenos, oposto ao procedimento analítico em que seus componentes são analisados ou tomados isoladamente.

Um educador matemático frequentemente tenta simplificar uma ideia complexa "quebrando-a" em pequenos componentes, para então os ensinar, peça a peça, em uma sequência lógica. Mas o estudante pode ver estes componentes como peças isoladas, sem conexão, de um quebra-cabeça que não sabem qual é a imagem final.

O propósito do educador, diferentemente, poderia ser desenvolver uma abordagem adequada para "o uso dos dois hemisférios do cérebro". Complementar a abordagem numérica e algébrica de um determinado assunto (concepção lógica) com a apreciação de um gráfico gerado por computador (visão global), por exemplo.

De uma maneira geral, pode ser possível usar o poder da visualização para dar uma visão global de um conceito matemático, mostrando seus pontos fortes e fracos, suas propriedades e não propriedades, de forma que, após essa abordagem, se torna uma necessidade lógica, totalmente aceitável, e até desejável, formular o conceito claramente, rigorosamente, formalmente. E então, de acordo com Tall (1991, p. 12), quando a formalização ocorre, o aluno já possui uma estrutura global dentro da qual pode desenvolver as deduções formais.

Concluindo, ao trabalhar a psicologia do pensamento matemático, o professor ou professora precisa considerar quatro pontos:

1. A diferença entre as definições de imagem conceitual e conceito formal;
2. O amplo contexto da mente e das atividades culturais do indivíduo;
3. Os fatores potenciais de conflitos entre duas imagens conceituais diferentes e, principalmente, entre a imagem conceitual e o conceito formal correspondente;
4. Partir da intuição matemática individual, apresentando o pensamento holístico de uma visão global sobre determinado assunto até que seja necessário e desejável formular o conceito com o rigor adequado, permitindo aos alunos desenvolverem suas deduções formais.

Ou seja, o professor faz seu planejamento, definindo o caminho curricular e delineando-o com os conceitos matemáticos que deseja abordar no curso, mas precisa, quando a didática estiver em andamento, partir do contexto da mente dos estudantes, investigar e levar em consideração as imagens conceituais que eles já possuem. Assim, pode apresentar inicialmente uma visão global do assunto a ser tratado e permitir que os estudantes trabalhem suas ideias e conceitos, aparem arestas, ou até mesmo construam novas imagens conceituais para, só então, apresentar o conceito matemático formal.

3.3 Aplicação da Modelação Matemática à luz do PMA

Como podemos observar nas seções anteriores, há amplas conexões e concordâncias entre o uso da Modelação Matemática e a teoria do Pensamento Matemático Avançado.

No processo didático-pedagógico, o professor ou professora dispõe da modelagem matemática para ajudar o estudante a construir a imagem conceitual ou lapidar a que já possui sobre determinado assunto.

De fato, vamos revisar as etapas da modelação, mas agora a partir da teoria do PMA.

Etapa 1, Percepção e Apreensão. É aqui que o professor apresenta a visão global do assunto, permitindo que os estudantes utilizem o pensamento holístico e visual, característica do hemisfério direito do cérebro. O estudante pode reconhecer e delimitar a situação ou o problema, real ou fictício, e pode descobrir familiaridade com o assunto. Também habilita ao estudante a busca por qualquer referencial teórico que, eventualmente, já possua. No decorrer desta etapa, o professor pode investigar e analisar as imagens conceituais que os estudantes já possuem sobre o assunto. Assim, na próxima etapa haverá a possibilidade da construção de um modelo que seja ajustado, ou melhor, que permita o aperfeiçoamento da imagem conceitual. Caso contrário, se os estudantes não possuírem uma imagem conceitual prévia, o professor disporá então de uma "página em branco", pronta para ser preenchida com o auxílio do modelo matemático a ser desenvolvido.

Etapa 2, Compreensão e Explicitação. É nesta etapa que o modelo matemático será construído pelos estudantes. Pela capacidade inerente do ser humano em sintetizar processos e economizar recursos, espera-se que o modelo seja construído de forma a resolver o problema genericamente ou representar de maneira ampla a situação apresentada. Neste processo, o professor precisa estar atento aos fatores potenciais de conflitos, já preparando a apresentação do conceito formal. Aliás, alguma formalização eventualmente pode acontecer logo na elaboração do modelo, até mesmo vinda dos próprios estudantes. Isto, em geral, é um grande facilitador na aprendizagem da Matemática, e torna o passo seguinte mais aceitável e até desejável por parte dos alunos.

Etapa 3, Significação e Expressão. Enfim, com o modelo construído e explicitado, o professor e os estudantes analisam todo o processo e avaliam o modelo criado, validando-o (ou não) de acordo com a situação inicial proposta. Com o uso do pensamento sequencial lógico, característica do hemisfério esquerdo do cérebro, sendo o modelo matemático validado, espera-se aqui a apropriação de uma nova imagem conceitual ou a lapidação de uma imagem existente por parte dos estudantes e mesmo por parte do próprio professor.

Então é a hora da apresentação do conceito matemático formal. O modelo matemático não apenas irá ajudar na construção da imagem conceitual, mas irá também moldá-la à definição do conceito.

É importante notar que, mesmo que haja alunos que terão suas necessidades e desejos práticos atendidos sem muito aprofundamento na teoria matemática, há também aqueles que são despertados pelo interesse pela Matemática pura, desejando aprender os conceitos com fins puramente matemáticos. Assim, é extremamente conveniente, como educadores, planejar e disponibilizar condições para que os estudantes eventualmente aprofundem-se nesses conceitos formais, teoremas e definições. Lembramos aqui a resposta do alpinista britânico George Mallory (1886-1924) quando perguntado insistentemente do porquê escalar o monte Everest: “Porque ele está lá”.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa prática realizada neste trabalho teve a aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa da UFSCar sob a matrícula CAAE: 38487520.8.0000.5504. Sua pormenorização está descrita nas seções a seguir.

4.1 Natureza da Pesquisa

Como o objetivo deste trabalho foi analisar implicações da aplicação de uma sequência de ensino, acrescido ao fato de utilizarmos o processo da Modelagem Matemática, optamos por desenvolver uma pesquisa de cunho qualitativo. Podemos observar que, segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa possui cinco características principais:

1. A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando;
5. O significado é de vital importância para uma abordagem qualitativa.

De fato, nesta pesquisa, as intervenções, orientações e mediações do professor foram os instrumentos principais de coleta de dados, feita em reuniões com os alunos. Esses dados foram obtidos na forma de comentários dos alunos, suas conclusões e deduções a respeito dos jogos de mesa e, posteriormente, sobre os procedimentos de contagem envolvidos no processo das atividades. Além disso, analisou-se o significado do que foi desenvolvido para o cotidiano dos alunos e para a aprendizagem de cada um dos conteúdos da Matemática.

Nesse sentido, tomamos um cuidado especial para que as interações entre o professor e os alunos fossem feitas de forma neutra, de maneira que fosse analisado melhor o ponto de vista dos alunos:

> Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes serem abordados por aqueles de uma forma neutra (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Realmente, a condução da pesquisa foi estabelecida efetivamente através de diálogos entre o professor e os alunos, com questões abertas e muitas vezes por caminhos informais e de forma bastante coloquial, sem, no entanto, perder a trilha da investigação científica, que "implica um escrutínio empírico e sistemático que se baseia em dados" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 64), ou seja, necessita uma coleta sistemática e experimental de informações.

Após o procedimento de pesquisa, a análise do material acumulado buscou destacar as principais conclusões e apontar efeitos da modelagem matemática na aprendizagem dos alunos, assim como detectar possíveis indicativos sobre as diferenças e conexões entre imagem conceitual e conceito formal.

4.2 Universo da pesquisa

No ano de 2020, os alunos do 8º ano de uma escola particular na cidade de São Roque, no interior do estado de São Paulo, foram convidados[1] a participar da atividade como voluntários.

A escola, que serve alunos oriundos da classe média e média-alta da cidade, investe consideravelmente em suas instalações físicas e em tecnologia. Antes mesmo da pandemia da Covid-19, a escola já havia firmado uma parceria com o sistema *Google for Education*, visando utilizar as ferramentas tecnológicas que esse sistema dispõe.

[1] Os detalhes e condições de aceite de participação estão no Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE, Anexo C, p. 97) e no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE, Anexo D, p. 98), sendo o primeiro para o aluno e o segundo para os pais ou responsáveis.

Com a ocasião da pandemia, visando mitigar suas consequências, em março de 2020 a escola optou por realizar aulas *on-line*, utilizando as ferramentas que já estavam sendo implantadas. O processo, de rápida aplicação, foi abrupto, causando grande ansiedade aos alunos e demandando esforço redobrado aos professores, no sentido de adaptar o planejamento do início do ano e gravar aulas assíncronas, em um primeiro momento, e síncronas, via videoconferência, algumas semanas depois.

Na ocasião, esta pesquisa já havia sido planejada e estava sendo organizada. Para não ocorrer a perda de um ano ou até mais, com tantas incertezas que vieram com a crise sanitária, optamos por também executar os encontros remotamente.

A turma do 8º ano da escola era uma turma de 30 alunos, bastante participativa, e que tinha obtido bons resultados na aprendizagem da Matemática, principalmente em Álgebra. Os alunos e alunas foram convidados a participar dos encontros, como voluntários, e um grupo de 9 estudantes foi formado. Com o intuito de preservar o anonimato dos estudantes, os nomes reais foram suprimidos e serão, neste trabalho, identificados por nomes fictícios: Arnaldo, Breno, Manoel, Haroldo, Helen, Sofia, Luciana, Mariana e Wilson.

Destes, duas alunas tinham desempenho não muito constante em Matemática, alternando ótimas notas com notas não tão altas: Sofia e Mariana. Helen tinha boa performance, mesmo não sendo franca admiradora da Matemática. Os demais, Arnaldo, Breno, Manoel, Haroldo, Luciana e Wilson tinham clara aptidão e facilidade com a disciplina.

4.3 Apresentação e descrição dos instrumentos de coleta de dados

Os instrumentos que foram utilizados nesta pesquisa foram exclusivamente digitais, e estão descritos a seguir com mais detalhes. As ferramentas utilizadas foram:

- ***Google Meet***: Programa de videoconferência que permitiu os encontros à distância em tempo real (síncronos), nos quais o professor explicou aos alunos os procedimentos da pesquisa, a temática, atividades e atendeu eventuais dúvidas. Todos os encontros foram gravados: imagens, áudios e textos digitados como interação. Essas gravações compõem o rol de material analisado na pesquisa.

- **Editor de textos e Apresentações *Google***: Os alunos deixaram seus registros na forma de uma apresentação de *slides* (“Uma História dos Jogos de Mesa”) e de um documento de texto ("Regras do Wacala"), de acordo com o direcionamento da pesquisa. O objetivo dessas atividades era o de registrar as ideias e comentários feitos nas reuniões, de forma lúdica e criativa.

- ***Google* Sala de Aula**: ambiente virtual em que foram reunidos materiais de apoio, solicitação e postagem de atividades e comentários em geral do professor e dos alunos.

A pesquisa pode ser dividida em três grandes etapas, detalhadas a seguir.

I. **Preparação**

Nessa etapa foram elaboradas as seguintes análises, já relatadas nos capítulos anteriores deste trabalho:

- Levantamento de pesquisas já feitas sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP), Modelagem Matemática e sobre a teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA) - vide Capítulo 1;
- Aspectos históricos do PCP, sua enunciação e abordagem escolar - vide Capítulo 2;
- Estudo de Fundamentação Teórica: Modelagem Matemática e PMA - vide Capítulo 3.

II. **Experimentação**

O processo experimental foi concebido e executado da seguinte maneira:

- Criação e configuração de uma Sala de Aula virtual no sistema do *Google* e registro dos alunos participantes.
- **Reunião 1**: Em videoconferência, o professor esclareceu do que se tratava a Pesquisa, qual a finalidade e como seria feita. Neste momento, abriu-se uma discussão sobre uma temática que gere situações que possam ser compreendidas, mesmo que implicitamente, a partir do PCP. De acordo com o desenvolvimento da discussão, o professor solicitou ao grupo a execução de uma pesquisa sobre o tema "Jogos de Mesa", na forma de uma apresentação de *slides*. O intuito desta pesquisa era o de envolver os estudantes nas atividades, sondar suas experiências com relação ao tema dos jogos e apresentar a família

de jogos Mancala, orientando assim as ações para os próximos passos. A reunião foi encerrada e os alunos tiveram uma semana para concluir a pesquisa.

- **Reunião 2**: Discussões sobre o resultado da pesquisa elaborada pelos alunos, problematização e apresentação da família de jogos de mesa denominada "Mancala", que possui estratégias que aplicam o PCP e remetem a raciocínios de Análise Combinatória, de maneira implícita. Foi direcionado para que os estudantes criassem artesanalmente um tabuleiro de Mancala, com materiais diversos como caixas de ovos ou similares. O objetivo dessa atividade era fortalecer o engajamento dos estudantes na pesquisa e familiarizá-los com os jogos de Mancala. Uma semana foi estabelecida como prazo para que os participantes fizessem a atividade.
- **Reunião 3**: Exibição dos tabuleiros de Mancala construídos pelos alunos e alunas e discussão sobre a elaboração de regras para criar um jogo desse tipo. A proposta da elaboração de regras foi realizada para os alunos de modo que eles redigissem e editassem um documento de texto, colaborativamente. Um prazo de duas semanas foi estabelecido para a finalização dos tabuleiros, elaboração de regras e familiarização com o jogo.
- **Reunião 4**: Realização de uma partida completa do jogo criado, de maneira online, por videoconferência. As regras foram postas em prática e percebeu-se a dinâmica do jogo. Houve então, pelo professor, a apresentação e formalização do Princípio da Casa dos Pombos (PCP), comparando-o à atividade elaborada pelos estudantes. Alguns alunos manifestaram o desejo de saber mais sobre o princípio matemático, e foi combinada uma reunião extra, especificamente sobre o conteúdo matemático.
- **Reunião 5** (extra): Aprofundamento no conteúdo. Foram apresentadas sugestões de situações similares que puderam ser compreendidas pelo PCP.

III. **Validação**

A validação da pesquisa, feita pela análise dos dados obtidos, será descrita na próxima seção e detalhada no próximo capítulo.

4.4 Descrição das estratégias de análise de dados

A análise dos dados coletados, detalhada no próximo capítulo, foi dividida em três partes, cada uma relativa a uma etapa da modelagem. Em todo o processo da modelagem foram observadas características e objetos da Teoria do Pensamento Matemático Avançado, como o contexto da mente e das atividades culturais do indivíduo (etapa 1), imagem conceitual pré-existente (etapa 2) e a definição formal do conceito (etapa 3).

Etapa 1. Percepção e Apreensão: diálogos iniciais sobre os jogos de mesa, hábitos e experiências dos estudantes com relação a essa forma de lazer, confecção da apresentação de *slides* sobre o tema, confecção do tabuleiro de Mancala.

Etapa 2. Compreensão e Explicitação: diálogos sobre as regras dos jogos de Mancala, detecção das possíveis imagens conceituais existentes relativas ao PCP e consequente modelagem matemática.

Etapa 3. Significação e Expressão: diálogos finais, comentários e discussão sobre a apresentação da definição formal do PCP.

Os vídeos gravados das cinco reuniões em videoconferência foram revistos e analisados, tomando como referência as três etapas citadas. Também foi feita uma análise geral sobre a apresentação de *slides* e o texto das regras do jogo criados em conjunto e sobre o tabuleiro manufaturado individualmente.

5 ANÁLISE DOS DADOS

A coleta de dados deste trabalho foi planejada contemplando quatro reuniões virtuais utilizando a plataforma *Google Meet*. No entanto, como será descrito adiante, os estudantes solicitaram uma quinta reunião para maior aprofundamento. Cada uma das quatro reuniões teve a duração de uma hora e meia, com intervalos de cinco minutos a cada meia hora. A quinta reunião foi mais curta, com 45 minutos.

As reuniões foram estabelecidas da seguinte maneira:

1. **Reunião 1 - 04/11/2020 - Introdução**

   (a) Esclarecimentos sobre a Pesquisa, sua finalidade e como seria feita.

   (b) Discussão sobre a temática do entretenimento por meio de jogos, especificamente sobre os jogos de mesa.

   (c) Sugestão de atividade: elaboração em conjunto de uma apresentação de *slides*, utilizando o *Google* Apresentações, sobre o tema “Uma História dos Jogos de Mesa”, incluindo-se ao final uma família específica de jogos, o Mancala.

2. **Reunião 2 - 12/11/2020 - Mancala**

   (a) Discussão sobre a apresentação de *slides* feita pelos estudantes.

   (b) Discussão específica sobre o Mancala, história e características dos jogos.

   (c) Sugestão de atividade: criação artesanal e individual de um tabuleiro de Mancala, utilizando materiais diversos como caixas de ovos ou similares.

3. **Reunião 3 - 18/11/2020 - Regras do Jogo**

   (a) Exibição dos tabuleiros de Mancala construídos pelos estudantes.

   (b) Sugestão de atividade: elaboração de regras para um jogo do tipo Mancala, colaborativamente por meio do *Google* Documentos, aproveitando o tabuleiro e as peças criadas pelos estudantes.

4. **Reunião 4 - 08/12/2020 - O Princípio da Casa dos Pombos**

   (a) Realização de uma partida completa do jogo criado, entre o professor e um aluno.

   (b) Apresentação e formalização do Princípio da Casa dos Pombos (PCP), com a comparação deste com a dinâmica das estratégias do jogo criado.

5. **Reunião 5 - 19/12/2020 - Aprofundamento e conclusão**

   (a) Discussão sobre situações-problema que poderiam ser resolvidas por meio do PCP.

   (b) Conclusão.

O elenco de estudantes que participaram da atividade, com seus nomes aqui apresentados de forma fictícia, foi: Arnaldo, Breno, Manoel, Haroldo, Helen, Sofia, Luciana, Mariana e Wilson. Com nove participantes, foi atendido um alerta feito por Biembengut (2016, p. 212), que afirma que, se o número de estudantes for maior que 20, os resultados podem não ser satisfatórios.

Analisaremos a seguir os dados recolhidos nessas reuniões por meio dos diálogos entre o professor e os estudantes, entre os próprios estudantes e pelos trabalhos feitos por eles. Esta análise foi dividida em três etapas, referentes às etapas da modelação sugeridas por Biembengut (2016, p. 103 e 191). Estas etapas constituíram as nossas categorias de análise.

5.1 Etapa 1 - Percepção e Apreensão

Abrindo a **Reunião 1**, após a leitura em voz alta do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE, Anexo C, p. 97) feita pelo professor e posterior confirmação individual, também em voz alta, pelos estudantes, o professor teceu agradecimentos pela participação do grupo e apresentou os objetivos e os motivos da Pesquisa.

Após uma conversa introdutória, o professor iniciou uma discussão contando sua experiência com a criação de jogos, primeiramente em como extrapolou o futebol de mesa (ou de botão) para outros esportes, como basquete, vôlei, atletismo e até natação (usando formas de bolos com água), tudo com botões. Nesse meio tempo, Wilson fez uma busca no *Youtube*, espontaneamente, e encontrou vídeos sobre basquete de mesa. O professor então exibiu um vídeo encontrado por Wilson para todos da reunião.

Observamos aqui alguns pontos muito importantes. Os estudantes ficaram interessados na conversa, foram engajados e focaram sua atenção na reunião, logo de início. Presenciamos a subfase da "Apreensão" dos alunos, uma das características desejadas nesta etapa da modelagem, segundo Biembengut (2016), pois tinham familiaridade no assunto.

Observamos também a agilidade na utilização da tecnologia pelos estudantes, quando há interesse, fazendo buscas em tempo real. Esta é uma característica atual, muito usada por todos, mas principalmente pelas crianças e adolescentes. Se há conexão com Internet, há busca sobre algo que eles realmente se interessam. Destacamos também que o professor deve ser flexível ao utilizar as perguntas e as informações obtidas pelos alunos, inserindo-as na conversa. Amplia-se assim ainda mais o engajamento dos estudantes, incentivando-os a perguntar mais e a levantar mais informações a respeito.

Em seguida, o professor perguntou aos estudantes: “Que tipo de jogos vocês gostam e quais jogam atualmente"? Jogos em geral, não apenas videogames ou aplicativos em celular ou esportes. Iniciou-se aqui uma longa discussão, com o professor orientando e dando palavra a cada um dos participantes.

Houveram comentários bastante técnicos sobre os tipos de jogos, com os alunos parecendo verdadeiros *connaisseurs*[1], *experts* sobre o assunto. Isso demonstra o quanto os jogos fazem parte do cotidiano e da realidade de todos eles. Este foi o ponto de partida utilizado pelo professor para os próximos passos.

Na teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA), começamos a identificar a visão global sobre o assunto que será abordado (o Princípio da Casa dos Pombos, PCP), ainda que, neste momento, bastante inicial. Mas o pensamento holístico e visual, característica do hemisfério direito do cérebro, está sendo motivado. Com respeito à modelagem matemática, o professor neste momento estava obtendo informações relevantes aos alunos, primeiro item a ser observado no processo da modelação.

A discussão continuou, e em determinado momento, o aluno Breno disse que gostava de jogar alguns tipos de jogos “só quando tem bastante gente”. Neste ponto houve uma breve discussão sobre o fato de ser “mais legal quando se tem bastante gente”.

O contexto atual da vida dos estudantes não deve ser deixado de lado. Comentar sobre um assunto atual, às vezes polêmico, pode gerar uma discussão que pode subtrair grandemente o tempo disponível para uma atividade pedagógica, por isso deve ser moderado com muita atenção pelo professor. Mas não se deve negar acontecimentos ou tolher comentários totalmente. Foi o caso aqui, quando o tema sensível do isolamento social foi mencionado. Houve uma rápida conversa, um comentário do moderador buscando um consenso geral e o foco da atividade foi

[1] Pessoa especialista, crítica, esclarecida em um determinado campo

logo retomado.

Segundo Biembengut (2016), a subfase da "Percepção" trata do reconhecimento e delimitação da situação-problema. Essa delimitação precisa do auxílio do professor, no caso de haver um objetivo previamente planejado, como uma sequência didática. No momento, em que a discussão ia tomando outro rumo, o professor delimitou a conversa à discussão sobre os jogos.

Esta discussão continuou, no rumo desejado, e em um momento a aluna Helen disse que gostava de um jogo de tabuleiro chamado Lince e de jogar Banco Imobiliário. Ao ser mencionado esse jogo conhecido, houve diversas manifestações sobre estes e outros jogos de mesa. Os alunos e o professor comentaram que "jogos de tabuleiro" são ótimos, e foram listados vários títulos desse tipo de jogo.

Nesse momento entrou em pauta o assunto que era o objetivo do professor, os jogos de tabuleiro. O professor poderia então propor a atividade planejada, sobre este assunto, mas ainda havia outros alunos para serem questionados, e provavelmente com vontade de participar. Claramente os alunos Arnaldo, Luciana, Manoel e Haroldo eram os mais participativos, comentando a todo o instante. Porém, o professor, em sua prática de mediação, precisa ter um olhar amplo e dar condições para outros alunos participarem da conversa e trazerem suas contribuições. Não apenas pela própria pedagogia, ou pelo respeito pelo indivíduo, mas porque nunca se sabe quantas e quão ricas podem ser as experiências de uma pessoa. Como propõe Tall (1991), ao se estudar a psicologia do pensamento matemático há de se considerar o amplo contexto da mente e das atividades culturais do indivíduo. Em um grande número de alunos isso pode ser um problema para o professor, mas neste caso o grupo era pequeno. Então o professor, antes de passar em definitivo para o assunto principal, retomou a conversa com a aluna e com os outros que ainda faltavam se manifestar.

Após uma pausa de cinco minutos (a segunda da reunião), o professor lançou a sugestão de atividade: a confecção de uma apresentação de *slides*, no *Google*, com o seguinte assunto e título: "Uma História dos Jogos de Mesa". Ele então comentou que o trabalho iria ser feito em grupo, e não individualmente. Passou a explicar como trabalhar em um mesmo arquivo, de modo compartilhado. Todos os alunos e alunas acessaram o endereço disponibilizado pelo professor e prontamente foram editando simultaneamente a apresentação de *slides*. Ensinando alguns (poucos) comandos, o professor conseguiu alguma velocidade na confecção da apresentação.

Então, enquanto os alunos já editavam o arquivo, escrevendo piadinhas e inserindo imagens engraçadas, o professor foi orientando como seria a apresentação. Primeiramente, que eles não deveriam inserir textos longos. Ele delimitou um pouco o trabalho, com algumas observações. O enunciado da atividade foi o seguinte, escrito no *Google* Sala de Aulas:

Quadro 3 – Proposta da Atividade 1

ATIVIDADE 1
Vamos trabalhar juntos! Façam suas buscas em *sites* que possuam informações confiáveis e que possam ser comprovadas em outros locais.
Nossa apresentação deve conter:

- Uma breve introdução.
- Um *slide* para cada tipo de jogo de mesa considerado relevante na história. Por exemplo: xadrez, damas, gamão, alguns jogos de cartas e assim por diante.
- Uma seção especial para os jogos de "Mancala", incluindo regras de um dos jogos deste tipo.

Cada *slide* não deve conter mais do que 40 palavras. O total não deve ultrapassar 30 *slides*.
Bom trabalho!!

Fonte: o autor.

Após alguns comentários, o professor enfatizou a seção que ele gostaria de ter no final da apresentação, dedicada à família de jogos chamada de Mancala. Esses jogos, segundo o planejamento, serviriam de caminho para o próximo passo do processo de modelagem. Ele comentou que o Mancala, de origem africana, era um dos mais antigos tipos de jogos da história. A seção da apresentação deveria ter 3 ou 4 *slides* sobre este tipo de jogo.

O professor então agradeceu novamente a participação de todos e concluiu a reunião, encerrando a videoconferência.

Durante a semana que se seguiu, os alunos produziram, juntamente com o professor, a apresentação de *slides* que está reproduzida no Anexo A, p. 99. Há algumas animações que obviamente não puderam ser representadas neste documento, mas não trazem nenhuma informação ou representação relevante. Optamos por deixar a apresentação exatamente como foi elaborada, então poderão ser vistos vários problemas de formatação de texto e de *layout*, assim como *slides* que faltaram, mas é a representação fiel do que foi produzido (e será analisado pelos participantes na segunda reunião, descrita a seguir).

5.2 Etapa 2 - Compreensão e Explicitação

Abrindo a **Reunião 2**, o professor teceu comentários sobre a apresentação de *slides*, agradecendo o envolvimento, inclusive comentando que, mesmo sem valer nota, eles estavam participando bem. O professor, mostrando os *slides* para todos, deu várias instruções sobre a edição dos *slides* em uma apresentação, com o objetivo de melhorar e ensinar os estudantes a usar o editor do *Google*.

Após todos os comentários (o que levou dois terços da reunião), o professor apresentou a família de jogos chamada de Mancala. Ele já havia solicitado que os estudantes fizessem uma pesquisa sobre esse tipo de jogo, inclusive para colocarem *slides* no final da apresentação, mas não houve adesão deles nesse sentido. Então, no momento da reunião, o professor teve que discorrer sobre o Mancala, inclusive sobre as regras dos jogos (Apêndice A, p. 92), que, segundo o planejamento do professor, iria disparar o processo de modelagem matemática desejado.

A explicação das regras clássicas dos jogos de Mancala constituía a subfase "Compreensão", que, segundo Biembengut (2016), é parte da Etapa 2 da modelação, e representa a formulação do problema, da questão e da hipótese. A formulação do problema, neste caso, é o conjunto de regras, movimentos possíveis e objetivo do jogo. A questão é como criar uma ou várias estratégias que permitam vantagem ao jogador para, ao final, vencer a partida. Como observamos na Etapa 1, a prática dos jogos era familiar e de interesse dos participantes, assim a formulação do problema foi compreendida com facilidade e a questão a ser resolvida (estratégias para jogar) surgiu sem que fosse necessária a explicitação do professor.

Após apresentar o Mancala, e discutir sobre as diversas opções de regras, o professor propôs a segunda atividade. O enunciado da atividade foi o seguinte, escrito no *Google* Sala de Aulas:

Quadro 4 – Proposta da Atividade 2

ATIVIDADE 2 Faça você mesmo(a) seu tabuleiro de Mancala! Com 12 casas (6 de cada lado) e mais 2 reservatórios. Pode ser com caixa de ovos, por exemplo. Não se esqueça das peças, que podem ser peças de outro jogo, grãos de milho ou feijão, etc. Use sua criatividade!!

Fonte: o autor.

O objetivo principal dessa atividade era de permitir a todos os alunos a prática da manipulação material, concreta. De posse de um tabuleiro de Mancala, o aluno poderia experimentar os movimentos de "semear" nas casas, e inclusive de arriscar jogar partidas com outras pessoas, usando as regras mais básicas. Assim, pensando na construção das regras e nas estratégias, o processo de modelagem poderia ser facilitado.

Neste ponto é interessante observar o que dizem Biembengut e Hein (2018) sobre o que se espera por meio da modelagem, e comparar o que foi desenvolvido até agora na sequência pedagógica:

- incentivar a pesquisa (principalmente na primeira reunião isso foi verificado);
- lidar com tema de interesse (atingido plenamente);
- desenvolver a criatividade (o que se espera, principalmente, com esta a segunda atividade, da construção do tabuleiro);

Há ainda apenas dois itens, na lista elencada por Biembengut e Hein (2018) a serem cumpridos pela sequência:

- promover a habilidade em formular e resolver problemas;
- aplicar o conteúdo matemático.

Estes dois itens foram contemplados nas reuniões seguintes.

Portanto, desenvolver a criatividade é um dos objetivos da modelação. Recortar papelão, cortar madeira, usar tintas, escolher cores, usar régua, compasso e transferidor, todos os processos artísticos não devem ser deixados apenas para as etapas iniciais da Educação Fundamental. Precisam ser estendidos para as etapas finais e inclusive para o Ensino Médio, com ênfase e importância. Assim, o uso mais amplo do nosso cérebro é potencializado, e dessa maneira, conforme Tall (1991), pode ser possível usar o poder da visualização para dar uma visão global de um conceito matemático. Possuindo uma estrutura global, o aluno poderá desenvolver as deduções formais.

Após discutir sobre a atividade e mostrar exemplos de tabuleiros, o professor tirou várias dúvidas. Os alunos e alunas envolvidos na reunião, ao tentarem compreender a dinâmica dos jogos de Mancala estavam buscando mentalmente modelos pré-existentes, que pudessem se adequar à situação apresentada. Entendemos isso nos comentários de Arnaldo: “então é tipo o capturar bandeira”, ou o de Haroldo “é como escravos de Jó”.

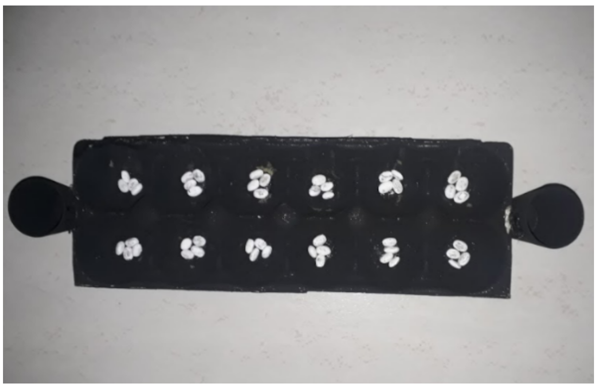
Essa busca por modelos pré-existentes está presente na Etapa 2 da modelação, segundo Biembengut (2016), que contém a “Compreensão” da situação. Também é confirmada pela busca de imagens conceituais pré-existentes, segundo Tall (1991). A partir dessa busca inicial, o indivíduo vai buscar construir um modelo que permita o aperfeiçoamento da imagem conceitual existente. Caso não encontre referências anteriores, um modelo totalmente novo será criado, e consequentemente, será assimilado um novo conceito, com uma nova imagem mental relacionada.

Um comentário bastante interessante de Haroldo foi: “nosso jogo pode ser com 24 peças”? Ou seja, já pensando nas regras do jogo, principalmente na dinâmica de “semear”, Haroldo pensou em um número que tivesse vários divisores, no caso o número 24 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24).

Importante notar que, durante o diálogo entre o professor e os estudantes, a formulação de um modelo, que faz parte da subfase “Explicitação”, segundo Biembengut (2016), já estava em processo. Não se faz necessária uma demarcação verbal para que se tenha início o processo de modelagem, ele inicia naturalmente e evolui da mesma forma. Haroldo claramente estava preparando regras para desenvolver estratégias posteriormente quando mencionou um número fácil de dividir, ou seja, estava desenvolvendo o modelo matemático. Outros participantes também estavam elaborando este desenvolvimento, de formas diferentes, e o processo estava em andamento com todos participantes que estavam engajados na atividade.

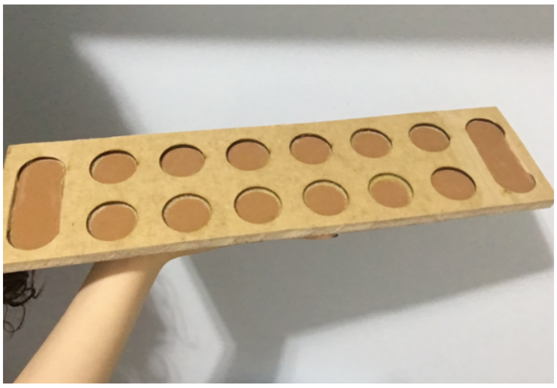
A segunda reunião foi encerrada. Durante a semana, alguns estudantes fizeram tabuleiros de Mancala, as fotos estão a seguir.

Figura 1 – Tabuleiro de Mancala feito pelo aluno Wilson



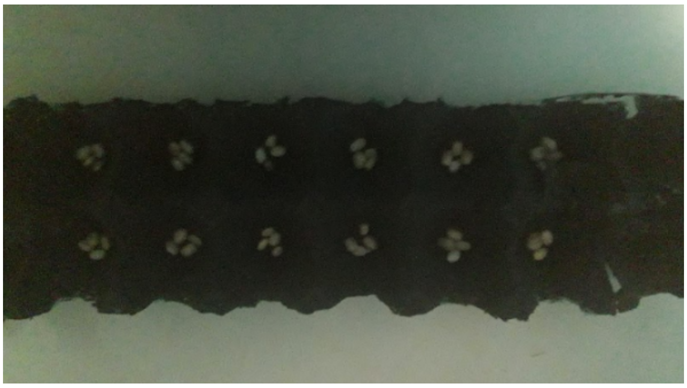
Fonte: o autor.

Figura 2 – Tabuleiro de Mancala feito pela aluna Helen



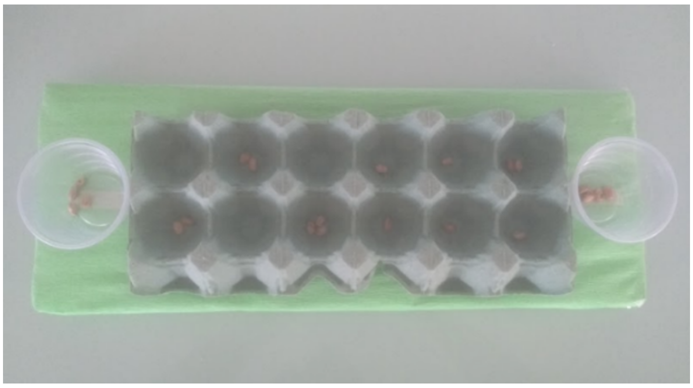
Fonte: o autor.

Figura 3 – Tabuleiro de Mancala feito pelo aluno Manoel



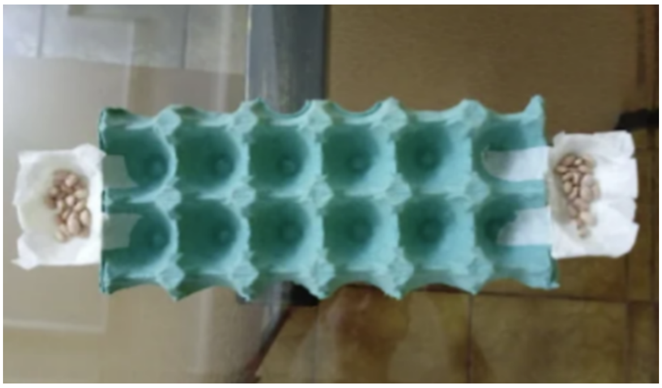
Fonte: o autor.

Figura 4 – Tabuleiro de Mancala feito pelo aluno Breno



Fonte: o autor.

Figura 5 – Tabuleiro de Mancala feito pelo aluno Haroldo



Fonte: o autor.

Figura 6 – Tabuleiro de Mancala feito pela aluna Sofia

Fonte: o autor.

A **Reunião 3** começou com os participantes mostrando os tabuleiros confeccionados. Em seguida, o professor orientou os participantes no sentido de fazer uma regra para um jogo de Mancala. A atividade foi criada da seguinte maneira:

Quadro 5 – Proposta da Atividade 3

ATIVIDADE 3 Criar, em grupo, um conjunto de regras para um jogo do tipo Mancala. As regras serão escritas em um Documento texto do *Google*.

Fonte: o autor.

Essa atividade é a proposta de formulação do problema, subfase de "Compreensão" da Etapa 2 da modelação, segundo Biembengut (2016). Na verdade, foi disponibilizada pelo professor uma forma de os alunos registrarem o problema, pois este já estava formulado verbalmente, e fora compreendido pelos alunos.

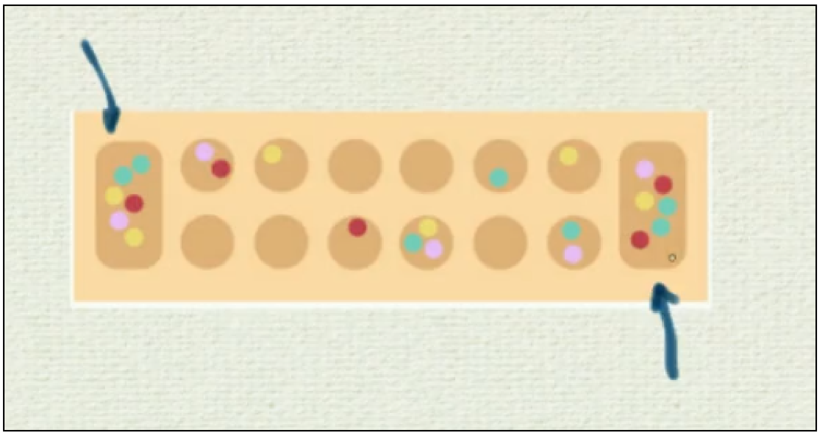
O documento *Google* foi disponibilizado a todos para uma edição em conjunto. O aluno Breno já tinha se antecipado e, após pesquisar as regras clássicas do jogo, entrou na aula com um conjunto de regras pronto.

No entanto, antes de solicitar a Breno que mostrasse as regras, o professor detalhou a todos o movimento padrão da família de jogos Mancala, a "semeadura" das peças. Esse movimento está associado ao objeto matemático em questão, o PCP. Assim, antes de qualquer outra atividade, o professor orientou qual seria a abordagem das regras. Como veremos a seguir pelas regras previamente preparadas por Breno, neste ponto os alunos ainda não entendiam o mecanismo dos jogos de Mancala, então as regras poderiam ser criadas de qualquer maneira, e poderiam ficar distantes do objeto matemático em questão, o PCP. Então esta explicação do movimento de "semear" foi essencial para delimitar o desenvolvimento desejado das regras, e por consequência, do modelo matemático.

Luciana, após a explicação do professor sobre o movimento da semeadura, comentou que esse movimento poderia representar "uma forma de comunismo", pois as peças estão em um só lugar e então são distribuídas igualmente para as outras casas, "dividindo para todo o mundo". Mais uma vez, presenciamos a busca de um modelo (e de uma imagem conceitual) pré-existente. Isso também representa a influência da cultura e da realidade do indivíduo, descrita por Tall (1991), aplicada na situação a ser modelada.

Depois de breves comentários, o professor compartilhou, na tela da videoconferência, uma lousa virtual, na qual pôde explicar melhor as regras clássicas.

Figura 7 – Lousa virtual, onde o professor desenhou e explicou os movimentos principais do jogo de Mancala.



Fonte: o autor.

Durante a explicação, os participantes Manoel, Breno e Haroldo começaram a tentar encontrar estratégias para fazer bons movimentos. Manoel, ainda na fase das regras básicas, disse que aparentemente o melhor seria sempre escolher a casa que tivesse mais sementes. Wilson comentou uma regra antes do professor, indicando que também já tinha pesquisado o jogo antes da reunião: caso a última semente caísse no reservatório do jogador, este poderia fazer uma nova jogada. Então Manoel percebeu e comentou que poderia haver outras estratégias, como "escolher uma casa com apenas três sementes para que a última caísse no reservatório, para poder jogar de novo e escolher casa com mais sementes". Luciana também deu sugestões de estratégias. Aqui vemos o processo da obtenção de um modelo em pleno andamento. Verificamos que não há tentativas de se "encontrar uma fórmula para resolver o problema", ou uma "regrinha para se decorar". Há sim, na verdade, um processo artístico, como definem Biembengut e Hein (2018):

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e, também, ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

A última frase citada acima pode ser interpretada literalmente no caso da atividade do jogo de Mancala. O conteúdo matemático (PCP) ainda está um pouco distante de ser explicitado e definido, ou melhor, o conceito formal do PCP ainda não foi atingido, mas o caminho está sendo trilhado graças à intuição e criatividade dos participantes.

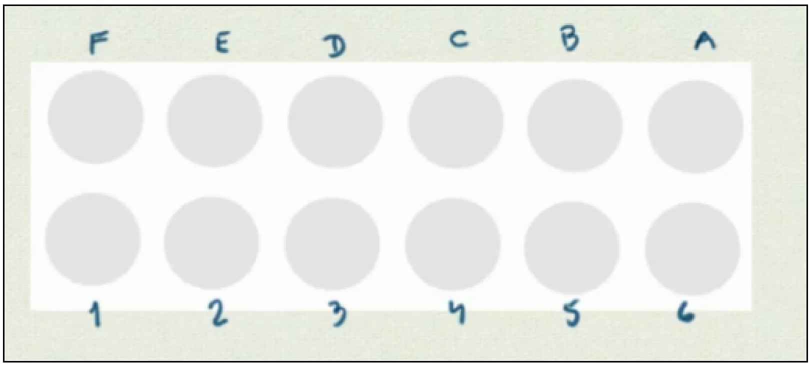
Breno levantou uma dúvida sobre o fluxo do jogo, se a semeadura poderia ser feita em qualquer ciclo. O professor explicou que a semeadura deve ser feita obrigatoriamente por todo o tabuleiro, e sempre no sentido anti-horário. Mesmo comentando que essa norma era apenas uma das tradicionais do jogo, e que poderia ser mudada caso os participantes desejassem, essa e as outras regras básicas foram adotadas no decorrer da criação do jogo. Wilson explicou mais uma regra, de captura: caso a última semente da semeadura caia em uma casa vazia do oponente, todas as sementes da casa oposta, no caso do próprio jogador, vão para seu reservatório, inclusive a última que ficaria em uma casa vazia. Essa regra desencadeou uma série de hipóteses pelos estudantes. Várias estratégias foram então discutidas por Luciana, Haroldo, Bruno e Manoel. Este comentou que estava pensando em fazer uma jogada de início para que, logo na abertura do jogo, pudesse levar o máximo de peças de uma só vez, e disse que o jogo "estava lembrando muito o xadrez, por algum motivo". A subfase da "Explicitação", presente na Etapa 2 da modelação, segundo Biembengut (2016), estava neste ponto claramente sendo desenvolvida. Foi disparada uma sequência de criações de hipóteses e, consequente, discussão. Como, também, define Biembengut (2016, p. 101), "a modelagem dá-se por meio de várias interações em processo cíclico, cada uma aperfeiçoando a precedente até chegar a outra aceitável". A cada comentário de um participante e do professor o modelo ia sendo "lapidado" e se tornando mais e mais concreto e definido na mente dos participantes.

Com relação à imagem conceitual relacionada ao PCP de cada estudante antes do início das atividades, podemos supor que era bastante variada, pois, segundo Tall e Vinner (1981), a imagem conceitual que um indivíduo tem de um conceito é dinâmica, construída através dos anos por experiências de todos os tipos. No entanto, ainda segundo estes autores, essa imagem altera-se e amadurece conforme o indivíduo encontra novos estímulos. O desenvolvimento de regras e estratégias para o jogo foi o estímulo proposto pela atividade. Assim, pensamos, em nosso planejamento, utilizar a proposta do processo de modelação para permitir o aprimoramento da imagem conceitual de cada participante, e então, no final, apresentar a definição do conceito formal do PCP.

Após uma pausa de cinco minutos, os participantes comentaram o quanto é diferente jogar com um jogo feito de modo artesanal e um de maneira comercial. O aluno Breno, que havia pensado nas regras antes da reunião, comentou que tinha escolhido o nome do jogo como *Wakanda*, em referência ao filme "Pantera Negra". Esse é o nome do país fictício que vive o herói do filme. O motivo da escolha foi de que esse país ficaria no continente africano, origem dos jogos de Mancala (novamente presente aqui as referências culturais do indivíduo na modelagem). Breno continuou definindo que cada jogador começaria com 12 peças, pensando na sugestão de 24 peças no total, feita por Haroldo na reunião anterior. Essas 12 peças seriam distribuídas nas 6 casas do jogador.

O professor então sugeriu, para melhor entendimento de todos, que eles criassem uma notação para as casas. Manoel sugeriu que seis casas fossem numeradas de 1 a 6 e as outras seis seriam representadas por letras, de A a F. Essa foi a notação escolhida, como vemos na figura a seguir:

Figura 8 – Notação escolhida para representar as casas



Fonte: o autor.

Breno continuou sua explicação, dizendo que, em seu jogo, o objetivo seria conquistar as seis casas do adversário, mantendo as suas seis casas. Cada jogador, segundo ele, poderia conquistar a casa do adversário de uma entre duas formas a ser escolhida: jogando dados ou respondendo perguntas matemáticas em 20 segundos. Luciana notou que, se fossem jogados dados, o mecanismo do jogo seria parecido com o do jogo de tabuleiro *War*.

Vejamos aqui que, se as regras forem deixadas totalmente em aberto, o jogo pode distanciar-se muito do objetivo desejado. Após essas sugestões de Breno, o professor notou que precisaria utilizar-se, pelo menos inicialmente, das regras tradicionais e básicas dos jogos de Mancala.

O jogador Manoel sugeriu que as peças fossem chamadas de "grãos", ao supor uma regra em que, caso o número de grãos em uma casa fosse igual ao da casa oposta, o jogador capturasse esses grãos para seu reservatório. Também pensou que, além de ser um número igual de peças, poderia ser um múltiplo da outra casa, por exemplo, 9 grãos em uma casa e 3 grãos na casa oposta. O professor interveio afirmando que, no caso dos múltiplos, o fluxo do jogo poderia ser dificultado.

Esses momentos de intervenção do professor são necessários, pois, como alerta Biembengut (2016, p. 199), devemos tomar o "cuidado para não nos distanciar demais do tema-guia em questão e 'fragilizar' o interesse dos estudantes". Essa regra, de observar os múltiplos, iria dificultar a dinâmica do jogo e "deformar" o modelo que estava sendo criado. Assim como a utilização de dados de jogar, pois estes dados incluíam no jogo um fator de aleatoriedade, o que não aconteceria se fosse adotado o movimento de semeadura.

Mas, ao mesmo tempo, o professor concordou que foi muito satisfatório chamar as peças de “grãos”, remetendo à imagem do jogo ancestral, e que a regra de número de grãos iguais poderia certamente ser a primeira regra de captura do novo jogo. Essa primeira regra foi então discutida por Haroldo e Luciana, que pensaram em estratégias para se beneficiar da situação de jogo.

Breno então teve a percepção de misturar o nome do país fictício Wakanda com o nome do jogo Mancala, criando então o nome do novo jogo: “Wacala”. Foi feito um intervalo de cinco minutos, e durante esse intervalo a aluna Luciana já foi editar o texto das regras, iniciando os trabalhos nesse sentido.

Após um diálogo sobre as tarefas que foram propostas, novas regras foram discutidas. Em um momento da conversa, o professor perguntou “se, no início do jogo, eu puder colocar os grãos nas minhas 6 casas iniciais, distribuídos da maneira que eu quiser, quantos grãos eu precisaria, no mínimo, para ter certeza de que, em pelo menos uma das casas, eu tivesse mais do que um grão”?

Esta pergunta remete ao PCP e o professor, assim, usou o modelo do jogo e suas regras para representar o princípio que ele desejava apresentar, pensando em encaminhar o fechamento do modelo matemático, para, na reunião seguinte, passar para a Etapa 3 da modelação. Nota-se que este problema sugerido surgiu a partir do jogo, ou seja, estava contextualizado. Esta formulação de questão deve estar presente, segundo Biembengut e Hein (2018), nessa etapa central da modelação, etapa que eles também chamam de “matematização”. As respostas, ainda segundo eles, abrirão caminhos para atingir as metas propostas. Segundo os mesmos autores, aqui o professor poderia inclusive interromper a exposição e desenvolver a matemática, caso fosse necessário, mas observando atentamente não perder de vista a motivação.

Então, após a pergunta de quantos grãos seriam necessários para se ter certeza de que, em pelo menos uma das 6 casas, houvesse mais do que um grão, as primeiras respostas foram 6 grãos, de Manoel e Haroldo. Depois, rapidamente Manoel corrigiu, e respondeu 7 grãos. Haroldo de pronto concordou. Manoel corrigiu-se novamente, dizendo que na verdade seriam 8 grãos. Haroldo perguntou por que 8. Breno disse que seriam 13. Essas respostas foram rápidas, mas então Manoel voltou no raciocínio e tentou esclarecer a situação, e afirmou corretamente: “se for da maneira que eu quiser, só preciso de 2 grãos”.

O professor concordou e refez a pergunta, desta vez mais acurada: “**eu devo escolher um número mínimo de grãos e dar para o meu adversário colocar, como ele quiser, nas**

minhas 6 casas, de modo que eu tenha certeza de que vai haver pelo menos uma casa com mais de um grão".

Então, Haroldo falou que não daria para ter certeza, mas Breno respondeu 7 grãos, no que Manoel concordou prontamente. Luciana concordou com os 7 grãos. Manoel ainda justificou, afirmando que, mesmo que o adversário colocasse apenas um grão em cada casa, iria sobrar um grão que ele teria que colocar em algum lugar. Neste momento ele usou claramente a ideia do Princípio da Casa dos Pombos, sem ter conhecimento formal do conceito. O modelo estava criado, e o objetivo cumprido com este aluno. Classificamos esta situação como sendo a subfase "Explicitação", da Etapa 2 da modelação, segundo Biembengut (2016). É a resolução de um problema a partir do modelo. E, de acordo com as definições de Tall e Vinner (1981), vemos formada uma imagem conceitual bem precisa em relação ao conceito formal, no caso, o PCP. Para a maioria dos participantes, a segunda etapa da modelação estava bem cumprida.

Haroldo contestou, dizendo que o adversário poderia colocar os 7 grãos em um lugar só, no que Manoel afirmou que assim estaria obedecendo a condição de que deveria haver uma casa com mais de um grão. O professor confirmou e aguardou os participantes seguirem este raciocínio e assimilarem o modelo que foi criado. A primeira afirmação de Haroldo demonstra que ele ainda não havia compreendido totalmente a questão proposta pelo professor. Não há equívoco, mas sim falta de compreensão. Vemos aqui a grande importância desta subfase, "Compreensão", presente, segundo Biembengut (2016), na Etapa 2 da modelação, que consiste na formulação do problema, da questão e da hipótese. Antes de resolver o problema, o indivíduo precisa compreender totalmente este problema. Em seguida, estar consciente de todas as hipóteses e variáveis envolvidas. Quanto melhor a compreensão, melhor será a resolução.

Outro ponto a se registrar é a orientação que foi feita a Haroldo. Não partiu do professor, mas do colega Manoel. Essa é uma situação a ser muito desejada, pois no diálogo entre os pares há muito mais empatia e facilidade de comunicação. Por isso, verificamos a importância de praticar a modelagem matemática em situações de grupo.

Para encaminhar o final da reunião, como ainda havia alguns minutos, o professor retomou a sugestão de nomes para os reservatórios dos jogadores. Entre outras sugestões, buraco, "wacalandas", nomes próprios, mansões, caixas, formigueiros, sacos, potes, fazendas, estábulos, e finalmente, celeiros. Encontramos, nestes momentos de relaxamento, respaldo em Biembengut e Hein (2018), que argumentam que a descontração e a criatividade permitem resultados satisfatórios em relação ao aprendizado de Matemática. O nome escolhido foi o último, "celeiros", Compondo então o conjunto do jogo "Wacala": grãos, casas e celeiros. Wilson fez outra pesquisa, desta vez usando o *Google* Tradutor, e disse que "Wacala" (o nome do jogo inventado), na língua zulu significa "começou".

Encerrando a reunião, o professor novamente sugeriu que os participantes trabalhassem mais na apresentação dos *slides* e que testassem jogar "Wacala" usando as regras criadas durante a semana, em seus próprios tabuleiros.

5.3 Etapa 3 - Significação e Expressão

A **Reunião 4** estava planejada para ser a última da sequência. O professor iniciou relembrando as atividades feitas nas três reuniões passadas. Resumiu os principais pontos e experiências vividas anteriormente, como a utilização das Apresentações do *Google* (simplicidade de uso, versatilidade e praticidade), a manipulação de materiais diversos, como caixas de ovos, feijões, madeira e papelão (criatividade, expressão artística e artesanato) e a criação do conjunto de regras (explicitando a formulação do modelo matemático desejado).

Ao perguntar se os estudantes tinham jogado o "Wacala", apenas Breno disse que tinha jogado, mas com as regras convencionais. O professor então sugeriu que eles fizessem uma partida em tempo real para testar as regras, e desafiou o aluno Breno. Eles chamaram a partida de "primeira decisão de campeonato mundial de Wacala". A partida foi feita pela videoconferência, usando a notação das letras e números que eles tinham combinado anteriormente. Em determinado momento, o professor teve que usar a lousa virtual e ir desenhando os movimentos para todos acompanharem os lances.

Durante a partida, o professor lamentou não poder jogar com eles presencialmente, pois isso daria uma outra dinâmica, com partidas simultâneas entre todos e com o uso dos tabuleiros manufaturados. A partida *online*, embora tenha permitido que todos pudessem observar as jogadas com clareza, não foi muito prática e levou bastante tempo para terminar.

Jogar uma partida, segundo as regras criadas e pensando nas estratégias, foi a forma de "significar o modelo", interpretando a solução. Esta é uma subfase da Etapa 3 da modelação, segundo Biembengut (2016). Discutindo e analisando as estratégias, os participantes estavam, de fato, discutindo a eficiência do modelo e, por consequência, avaliando este modelo.

As regras do jogo não são o modelo. Nem tampouco, o conjunto de estratégias é o modelo. As regras e estratégias formam a expressão do modelo matemático criado. Como a autora citada afirma, é o processo e o resultado que validam o modelo, que, neste caso, é a estrutura de pensamento estratégico que representa o princípio matemático que foi explicitado em seguida, o PCP. Naturalmente tinham elaborado uma imagem do conceito que o professor queria abordar pela aplicação da sequência didática. Faltava apenas a formalização do conceito.

Ainda segundo Biembengut (2016), de todo o procedimento executado e diante do resultado obtido, o modelo é então aceito e o indivíduo apropria-se dele em sua estrutura cognitiva. Caso haja relevância para o estudante, este modelo não será descartado. Um jogo de tabuleiro como o Mancala pode não parecer relevante, mas como os jogos de maneira geral faziam parte do cotidiano daqueles estudantes, o modelo pôde ser aceito e assimilado pelas estruturas mentais dos alunos envolvidos.

Wilson compartilhou, durante a partida, um *link* para um aplicativo para jogar Mancala em celular, com regras parecidas com o que foi criado pelos participantes. Arnaldo aproveita e diz que encontrou um jogo chamado "*Town of Salem*", que segue o padrão do *party game* (jogo social, em pequenas festas ou reuniões) "A Cidade Dorme", comentado por eles fora das videoconferências. Essas duas intervenções provam o interesse dos alunos pelo assunto de jogos, e, por consequência, um engajamento com a sequência de reuniões, mesmo durante os dias que as separaram.

A partida *online* continuou após os comentários. Ao final, o aluno Breno venceu a partida.

A sequência da modelagem matemática foi finalizada. Neste ponto, entendemos que os estudantes elaboraram um modelo matemático concreto, praticado na dinâmica do jogo de Mancala. Enfatizamos aqui: o modelo mental que foi criado foi expresso pelas regras e estratégias do jogo. Como veremos adiante, este modelo será relacionado ao PCP, conteúdo matemático alvo da sequência de atividades. Visando seguir os estudos de Tall (1991), o professor partiu da intuição matemática individual, apresentando o pensamento holístico de uma visão global sobre o assunto até que foi necessário e desejável formular o conceito do PCP com o rigor adequado, permitindo aos alunos desenvolverem suas deduções formais.

Após o intervalo de cinco minutos, o professor entrou para a apresentação do conceito formal do PCP, e iniciou sugerindo uma situação: "imaginem que uma pessoa acorda de manhã, e deve pegar em sua gaveta, sem acender a luz, um par de meias de mesma cor. Nessa gaveta há 5 pares de meias pretas e 5 pares de meias brancas. Quantas meias essa pessoa deve tirar, no mínimo, para ter certeza de que vai ter um par de meias da mesma cor?"

Esta provocação feita pelo professor representa uma tentativa de validação do modelo, e, ainda sem a conscientização dos alunos, buscou-se a "Significação", subfase da Etapa 3 da modelação, segundo Biembengut (2016).

Haroldo falou 10, em tom de brincadeira. O professor ressaltou a condição "no mínimo". Luciana pediu para repetir a fala. Após a repetição, Breno respondeu 3 meias. Haroldo perguntou "por que 3?" Luciana tentou explicar. Wilson e Arnaldo compreenderam em parte. O professor explicou que, pegando 3 meias, a pessoa poderia pegar 3 da mesma cor, o que seria mais do que necessário. Ou, 2 meias de uma cor e uma de outra, o que também resolveria o problema. Wilson perguntou se eram 3 pares, o que fez com que o professor ressaltasse que seriam 3 meias. Luciana disse que, quando o professor começou a narrar a situação, ela pensou que seria o início de um RPG. Notamos nessa sequência de falas, que não durou mais do que um minuto, que a ansiedade de vários alunos fez com que eles não conseguissem focar na fala do professor, ouvindo "meias" mas entendendo "pares", assimilando o geral, mas não o problema em questão, e assim pedindo para repetir.

A situação da gaveta de meias foi escolhida propositalmente pela sua simplicidade. Abrindo uma explanação com uma situação simples, a intenção do professor era fazer um "aquecimento", trazer o foco dos estudantes para sua explicação e acalmar os ânimos da volta de um intervalo. Ao contrário de Wilson, Haroldo, Arnaldo e Luciana, o aluno Breno estava mais concentrado, e sua única intervenção foi dizer "três", que era exatamente a resposta correta, mantendo-se, após a fala, novamente em estado de observação.

O professor então abriu na tela para todos uma apresentação de *slides* (Apêndice B, p. 93), sobre o PCP. Ele explicou que o tipo de raciocínio que foi feito na situação da gaveta de meias está muito relacionado com o jogo de Mancala que eles haviam preparado e jogado. Ele comentou que, quando temos um modelo matemático, não temos necessariamente uma série de regras e procedimentos. Temos, ao contrário, "uma estrutura intuitiva que nos ajuda a representar situações". Então o professor, usando a apresentação, mostrou rapidamente quem foi Johann Dirichlet e finalmente apresentou o conceito formal do PCP, em sua forma simples:

"Se distribuímos N+1 pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos".

Mostrou então um exemplo: 5 pombos e 4 casas. Manoel comentou “mas isso todo mundo já não sabe, pela lógica”? O modelo matemático e a imagem conceitual do PCP estavam tão bem construídos por este aluno que, para ele, a definição do conceito pareceu óbvia.

O professor respondeu: “Sim, por isso nem é preciso provar, é um princípio e não um Teorema”. Então Manoel refletiu “Dá pra saber outra coisa daí, professor: se você souber que uma casa tem mais de dois pombos, você tem certeza de que uma das casas está vazia”.

Em pouco tempo, Manoel estava desenvolvendo suas próprias deduções formais, o que, segundo Tall (1991), precisa ser considerado ao trabalhar o pensamento matemático avançado.

O professor disse que as consequências do PCP nós vamos entendendo conforme refletimos e aplicamos nas situações. E perguntou “o que isso tem a ver com o nosso jogo de Mancala?”, logo em seguida supondo que as casas dos pombos fossem as casas do jogo, e os pombos fossem os grãos. Ou seja, enquanto jogavam o Mancala, estavam aprendendo, utilizando e desenvolvendo o PCP internamente e intuitivamente.

O professor voltou à situação dos pares de meia, e explicou: “as cores das meias podem ser representadas pelas casas, e as meias pelos pombos. Teremos duas casas, então precisamos de pelo menos 2+1 pombos, ou seja, três meias”. Haroldo comentou que agora tinha entendido. Breno fez uma pergunta interessante: “o Mancala foi inspirado no princípio ou o princípio foi inspirado no Mancala”? Isso demonstra que Breno havia feito definitivamente a relação do modelo criado com relação ao objeto matemático em questão.

Em seguida foi apresentada a definição geral do PCP, com o objetivo de provocar os estudantes para buscarem um maior aprofundamento após a reunião:

“Se distribuímos $N \cdot k + 1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém pelo menos $k + 1$ pombos”.

O professor terminou a apresentação desejando que, quando os estudantes chegarem no momento de aprender Análise Combinatória, tenham este e outros modelos matemáticos disponíveis em suas estruturas cognitivas que possam facilitar o aprendizado dos conceitos e a resolução das situações por vezes bastante complexas desta área da Matemática.

No entanto, Arnaldo pediu que o professor voltasse ao *slide* da versão geral, e Manoel fez perguntas para tentar compreender o enunciado, ambos cedendo à provocação. Não havia mais tempo na reunião. Então o professor se colocou à disposição para quem quisesse, fazer uma quinta reunião, na qual poderia explicar com calma essa versão geral e trazer problemas matemáticos que poderiam ser resolvidos usando o PCP. Arnaldo, Manoel e Luciana confirmaram muito o interesse (Arnaldo não compareceu depois, mas os outros dois estavam presentes), Haroldo e Sofia disseram que precisariam pensar (não voltaram). Dos demais, que não comentaram nada, apenas Breno voltou para a reunião final. O professor agradeceu a participação de todos e todas, e encerrou a reunião.

Na semana seguinte, aconteceu a **Reunião 5**, a pedido dos estudantes. O professor percebeu que, por hábito da escola, os alunos esperavam uma aula convencional sobre o assunto, e optou por fazê-lo. No entanto, a aula não partiu do zero, mas foi apoiada no processo todo de modelagem matemática desenvolvido nas quatro reuniões anteriores. Presentes na videoconferência estavam Breno, Luciana e Manoel.

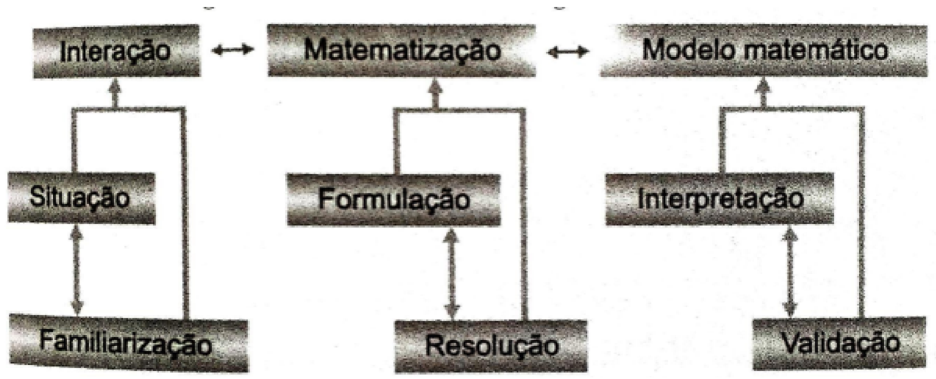
O professor iniciou então a aula, explicando que o raciocínio lógico-matemático, desenvolvido com a prática do jogo de Mancala, é o que de mais importante deve ficar de toda a experiência, e é o que vai servir de base para os dois problemas que ele irá apresentar.

Antes de começar, o professor deu a palavra ao aluno Breno, que disse haver pensado, durante os dias da semana que passou, em uma boa estratégia de abertura para o jogo criado. A ideia seria começar o jogo na casa 4, que, por conta da regra de captura inventada por eles, faria com que o último grão caísse na casa A, deixando-a com 5 grãos. A casa 6 também estaria com 5 grãos, o que daria o direito ao jogador de capturar, no primeiro lance, 10 grãos.

O processo de "lapidação" de um modelo não é feito necessariamente no momento da aula, ou mesmo apenas nos dias seguintes a ela. O modelo é associado à imagem que um indivíduo tem de um conceito, que, como citado anteriormente neste trabalho e segundo Tall e Vinner (1981), é dinâmica, construída através dos anos por experiências de todos os tipos, alterando-se e amadurecendo conforme o indivíduo encontra novos estímulos. A experiência da modelagem, no caso do aluno Breno, reverberou durante a semana e, certamente, não deixou de ressoar em sua mente.

Depois de estudar a jogada em um tabuleiro desenhado na tela, para todos verem, eles comprovaram a eficácia da estratégia. Manoel falou que isso favorece muito quem começa o jogo, e questionou se isso seria justo. Breno disse que a pessoa que iria jogar em seguida poderia fazer o mesmo, jogando a casa D (capturando 10 grãos das casas F e 1). O professor concluiu que a regra da captura que eles criaram, que não é uma regra tradicional de Mancala, acabou por desequilibrar o jogo. Os alunos estavam elaborando hipóteses e fazendo a verificação do modelo que foi criado. É o que deve ser verificado, segundo Biembengut (2016), na Etapa 3 da modelação, a "Expressão" do processo e do resultado. Ainda segundo esta autora, se por acaso o modelo não for validado, pode-se retornar à Etapa 2 e aperfeiçoá-lo. Analisemos o esboço do processo:

Figura 9 – Dinâmica da modelagem matemática



Fonte: (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p. 15).

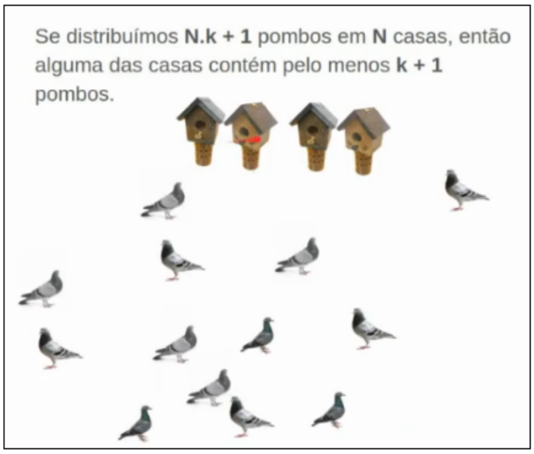
Notam-se as setas nos nomes das Etapas de 1 a 3 (neste caso chamadas de "Interação", "Matematização" e "Modelo matemático"). São setas de duas direções, ou seja, pode haver um retorno a uma etapa anterior ou até mesmo ao início do processo. No caso da experiência em nosso trabalho, após o modelo construído, houve breves voltas à "Matematização", mas com mudanças sutis.

Depois de alguns comentários, a aula começou. O professor abriu a todos uma apresentação de *slides* (em anexo) e foi revista a definição formal do PCP, em sua versão simples. Logo em seguida, o professor fez a explicação da versão geral, que não havia sido compreendida pelos estudantes na reunião anterior:

"Se distribuímos $N \cdot k+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém pelo menos $k+1$ pombos".

Assim que esse enunciado apareceu na tela, Luciana perguntou "o que seria esse k"? Breno quis confirmar se "aquele ponto então é multiplicação", e Manoel disse que "o k é o número de pombos". As três interrupções foram feitas imediatamente uma após a outra. Isso demonstra a característica impaciência e a falta de comportamento protocolar durante uma explanação (que, na verdade, nem havia iniciado ainda), muito comum nessa faixa de idade. No entanto, o professor não poderia se ater a isso. Compreendeu que esses alunos estavam ávidos e ansiosos por compreender o enunciado, o que é extremamente positivo e desejável em um processo de aprendizagem. Então, no *slide*, exibiu um exemplo numérico:

Figura 10 – Imagem presente na apresentação sobre o PCP



Fonte: o autor.

Neste exemplo, $N = 4$, e 13 pombos. Então perguntou "quanto vale o k"? Manoel disse rapidamente 3. Luciana concordou, distraidamente. Explicando o rápido raciocínio de Manoel, o professor concordou e concluiu que, se $k = 3$, então o PCP em sua versão geral nos afirma que haverá ao menos 4 pombos em alguma das casas. Manoel disse que "é a mesma regra aplicada em uma escala maior". Precisamos ressaltar que, nesta reunião, contamos com apenas 3 estudantes. Mas, embora tenham sido três alunos igualmente interessados em Matemática, foi muito interessante perceber três personalidades diferentes, e com normalmente três diferentes abordagens em cada situação. Manoel, mais pragmático, compreendeu rapidamente, neste caso, a generalização do princípio, e assim ampliou o uso do modelo mental desenvolvido para outras situações. Segundo Biembengut e Hein (2018, p. 21), ao ampliar o leque de aplicações matemáticas valida-se, de certa forma, a importância da teoria matemática em questão.

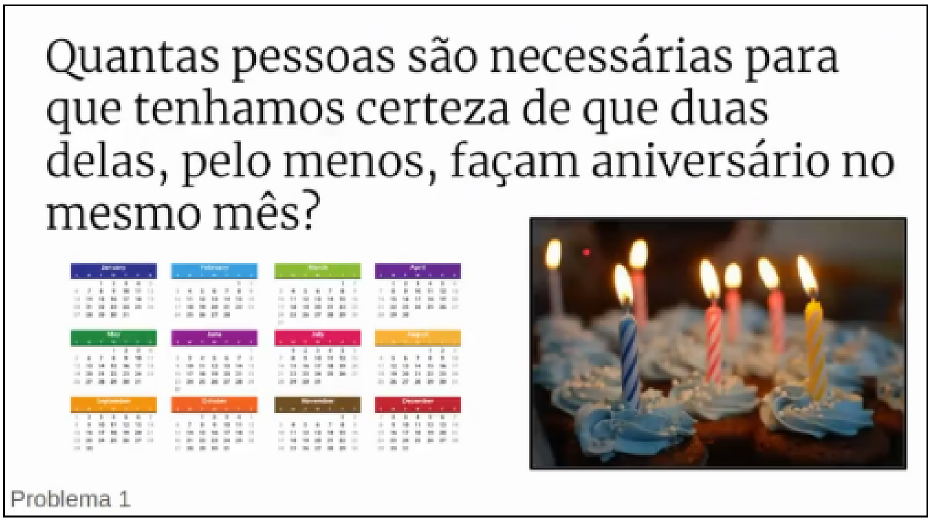
Satisfeito com a compreensão dos alunos, o professor comentou que o desafio, no caso de uma situação-problema, seria identificar o que seriam as "casas" e o que seriam os "pombos".

Breno interrompeu perguntando se "esse jeito, do N vezes k, era um pouco mais complexo". O professor explicou que esse enunciado era mais geral do que o simples.

Essa diferenciação entre complexidade e generalidade é muito interessante de ser observada durante uma aula expositiva. É importante evitar que os alunos sintam que o assunto ficou mais complexo, quando na verdade houve apenas uma generalização. A compreensão de um enunciado genérico tende a ser mais complexa, mas o conteúdo, o assunto, ainda é o mesmo do apresentado no caso específico estudado anteriormente.

Então o professor apresentou a primeira situação:

Figura 11 – Problema 1, da apresentação sobre o PCP



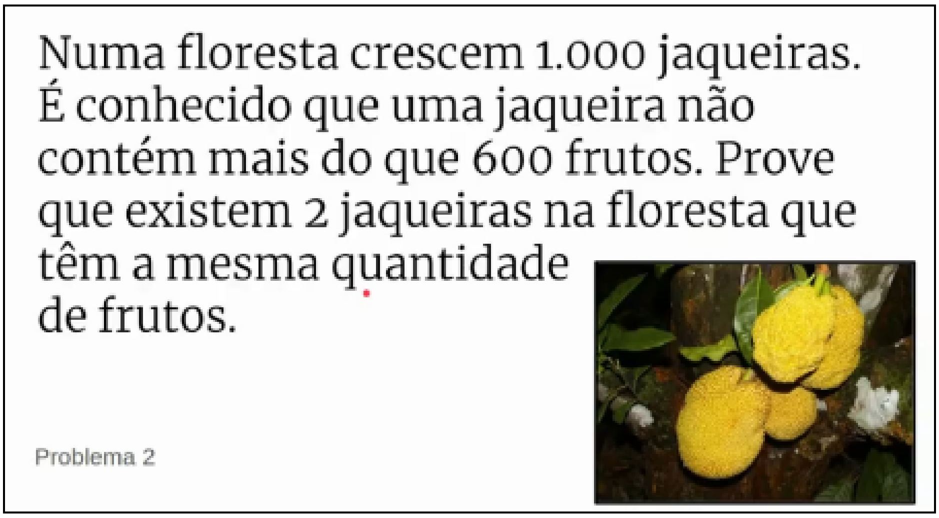
Fonte: o autor.

O professor esperou que os alunos respondessem, e instruiu que eles pensassem da maneira que quisessem. Enquanto Manoel estava pensando nos dias do ano (respondendo 366 pessoas), e Breno estava preocupado com o fato de que cada mês tem quantidade de dias diferentes, Luciana respondeu 12, logo em seguida corrigindo para 13. O pragmatismo de Manoel o traiu dessa vez, confirmando a hipótese de Tall e Vinner (1981) de que nem sempre a lógica nos dá *insights*. Breno era o mais teórico dos três, e exatamente por esse motivo não desenvolveu rapidamente uma resposta. Luciana era a mais impulsiva, mas desenvolveu, à sua maneira e em seu ritmo, uma imagem conceitual adequada do PCP.

O professor confirmou a resposta 13, e sugeriu que eles pensassem de acordo com as casas e grãos do Mancala. Seriam 12 casas e, portanto, necessários ao menos 13 grãos para que uma das casas tenham pelo menos 2 grãos. Sugeriu então que eles pensassem no PCP. As casas seriam os meses e os pombos seriam as pessoas. Então, de acordo com a versão simples, seriam necessários $12+1=13$ pombos.

Em seguida apresentou uma segunda situação, mais complexa:

Figura 12 – Problema 2, da apresentação sobre o PCP



Fonte: o autor.

Manoel pediu a oportunidade de tentar resolver. Perguntou se em cada uma das árvores havia então 600 jacas, o que foi corrigido pelo professor, afirmando que esse era o número máximo de jacas em cada uma, ou seja, poderia haver uma árvore com 3 jacas, a outra com 152 e assim por diante. Então, Manoel construiu um raciocínio: "se tomarmos 600 árvores, esse seria o máximo em que poderia não haver repetição, ou seja, uma, duas, três jacas e assim por diante, até 600 jacas. Então, com 601 árvores você teria certeza de que algum par de árvores teria a mesma quantidade de jacas". Ao ser perguntado então se a resposta seria 601, Manoel corrigiu "não, talvez 602, pois poderia haver uma árvore sem nenhuma jaca".

Esta é uma prova do que afirma Biembengut (2016), quando enfatiza que nosso pensamento natural segue um processo de busca e adaptação a um modelo de estrutura de pensamento que já possuímos. No caso, o modelo desenvolvido na estratégia do jogo de Mancala, dentre outras estruturas que Manoel já possuía anteriormente. Segundo a teoria do PMA, também verificamos a diferente "velocidade" que cada indivíduo possui na construção de uma determinada imagem conceitual. Segundo Tall e Vinner (1981), esta construção (e o aprimoramento desta) vai depender, dentre outras coisas, dos estímulos que cada indivíduo percebe. Manoel sentiu-se estimulado pelo novo desafio proposto, e partiu logo para a tentativa de resolução.

Ao raciocinar juntamente com os alunos a proposta de Manoel, o professor então concluiu que, como há 1000 árvores na floresta, que é mais do que as 602 necessárias, eles tinham provado que certamente há pelo menos duas árvores com a mesma quantidade de jacas. Luciana disse que "iria chutar algo assim", e o professor comentou que esse "chutar" é fruto de algo que já está presente na mente dela, é uma forma de intuição matemática, que foi criada pelos modelos e imagens conceituais que ela adquiriu durante sua experiência de vida até aquele ponto.

Ao contrário de Manoel, Luciana não se atentou em organizar suas ideias antes de responder. Talvez por ansiedade, talvez porque Manoel verbalizou seu raciocínio mais rapidamente. Não tendo tempo ou paciência em refletir sobre a situação, Luciana usou do produto de uma imagem conceitual formada por muitas variáveis envolvidas na busca de um modelo mental de raciocínio, o que Tall (1991) chama de "intuição".

Breno, mais teórico, interveio dizendo que não tinha "entendido muito bem esse problema". E tentou associar o problema ao enunciado da versão geral: "é como se o N fosse 1000, o k fosse 600"? Essa é uma postura criada pelas aulas convencionais. Costuma-se apresentar a teoria e, em seguida, situações que usem as "fórmulas" ou "regras" apresentadas na teoria. Contrariando o pensamento natural, Breno não buscou um modelo mental que pudesse representar e ajustar seu raciocínio para o problema em questão. Ao contrário, buscou primeiramente traduzir a situação por meio da linguagem matemática.

Sistematizando, tivemos, nessa oportunidade, a felicidade de encontrar três tipos de abordagem diferentes, com exatamente três pessoas:

1. Manoel: pragmático. Utilizou-se do modelo matemático e da imagem conceitual.
2. Luciana: impulsiva. Buscou sua "intuição", em um conjunto de imagens conceituais.
3. Breno: teórico. Tentou parametrizar a situação dentro do conceito formal.

Nessa situação, das jaqueiras, a mais bem sucedida estratégia foi a de Manoel, o que não significa necessariamente que sempre é assim, mas nos dá um ótimo exemplo de como a modelagem pode ser eficiente e produzir resultados rápidos quando bem desenvolvida. O processo de modelagem ajudou o desenvolvimento das imagens conceituais dos estudantes, mas cada um deles as utilizaram de diferentes maneiras e em diferentes intensidades.

O professor então tentou ajudar Breno, que desejava aplicar a versão geral do PCP na situação das jaqueiras (de fato, seria possível aplicar a versão simples, se fossem bem escolhidos os símbolos das casas e dos pombos). Primeiramente, o professor organizou a situação afirmando que, se nomearmos as árvores como casas e as jacas como pombos, o que foi pensado inicialmente por Breno, não daria certo.

Manoel juntou-se à tentativa e não conseguiu inicialmente definir os parâmetros. Nota-se que ele já havia solucionado o problema, usando o modelo matemático desenvolvido, mas teve dificuldades em parametrizá-lo de acordo com o conceito formal do PCP. O professor, percebendo isso, sugeriu a todos uma reflexão: "o que é mais difícil: colocar a situação em termos do PCP ou pensar diretamente na resolução"? Generalizando a questão, a reflexão seria colocada em termos de avaliar, em uma situação-problema, se temos facilidade em aplicar um conceito formal para resolver ou, ainda em uma situação particular, utilizarmos as imagens conceituais que possuímos em nossa mente.

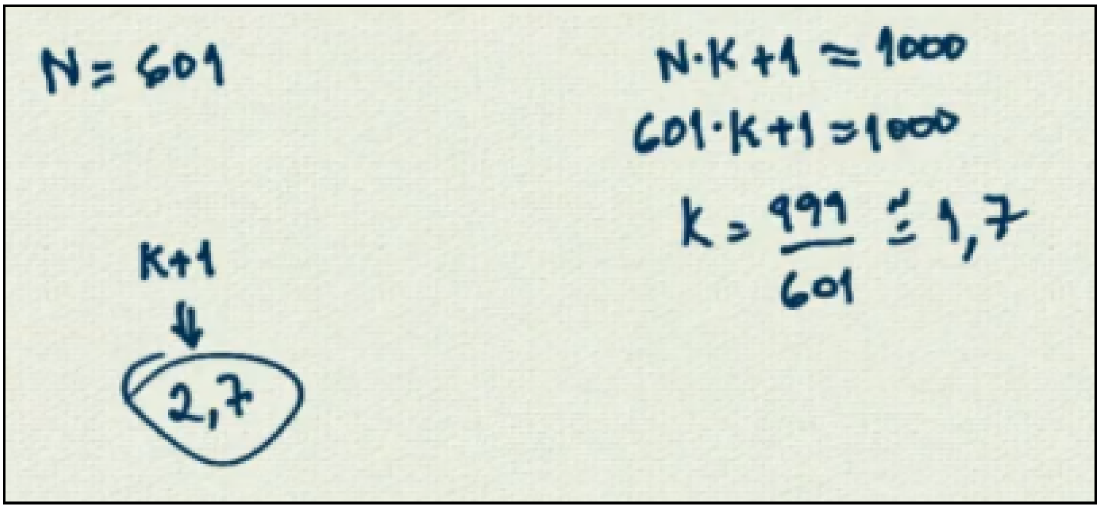
Voltando à tentativa de parametrizar a situação das jaqueiras, o professor sugeriu que eles admitissem, contrariamente ao pensamento mais comum, que as árvores fossem os pombos, e que o número de frutos que há em uma árvore fossem as casas. Luciana prontamente perguntou, indignada: "Por que"? Antes do professor explicar, Breno disse que havia agora entendido o início, e concluiu que "precisa então de 602 árvores".

Mesmo assim, o professor explicou o raciocínio. Haveria então 1000 pombos, e 601 casas numeradas de 0 a 600. Se há 601 casas, precisamos de 602 pombos, pela versão simples do PCP. Se há 1000 pombos, está satisfeita a necessidade.

Luciana então disse que imaginou as árvores "andando" para a casa delas, por exemplo, "eu sou uma árvore que tem 0 jacas, vou entrar na casa zero, e assim por diante". O professor confirmou o raciocínio, dando mais exemplos numéricos, e conclui que, no pior caso, até 601 árvores cada uma teria entrado em uma casa diferente. A 602ª árvore teria, obrigatoriamente, que entrar em uma casa em que já haveria uma árvore dentro. Isso corrobora com Tall (1991), quando afirma que quanto mais o indivíduo é educado no pensamento lógico, mais seu imaginário conceitual irá ressoar com respostas lógicas. Luciana dispunha de boa imaginação, e aliou isso ao raciocínio lógico, auxiliada pela construção do modelo matemático. Ao imaginar "árvores andando", Luciana contextualizou, em sua mente, o raciocínio e assim, pôde compreender a resolução do problema. Faltava apenas satisfazer Breno.

Breno então insistiu em determinar quanto seria o N e quanto seria o k, tentando ainda parametrizar a situação das jaqueiras em termos da versão geral do PCP. Perguntou: "então, 601 seria o N ou o k"? O professor lembrou que N é o número de casas. Resolveu exibir a lousa virtual e, de maneira convencional, determinou numericamente as variáveis.

Figura 13 – Anotação em lousa virtual do professor durante a aula



Fonte: o autor.

O PCP versão geral diz que há, com certeza, $k+1$ pombos em alguma casa, ou seja, $2,7$ pombos, que é maior do que 2, necessidade da hipótese.

Assim, o professor concluiu que não conseguiríamos, por exemplo, provar que há 3 árvores na floresta com o mesmo número de frutos. Houve então um momento de certa dúvida com os participantes. Os alunos deste 8º ano não tinham contato ainda com muitas demonstrações. O professor já havia comentado, em aula, o que era uma demonstração matemática e lógica, mas não havia, no planejamento pedagógico do sistema de ensino adotado pela escola em questão, a previsão da abordagem desta habilidade até essa série. Então, as dúvidas surgidas na apresentação da situação apresentada eram esperadas.

Breno continuou expressando suas dúvidas "eu poderia provar que há 200 jaqueiras que não tem o mesmo número de jacas"? O professor negou. Manoel comentou que "a quantidade de zero frutos sumiu quando foi perguntado para provar que havia pelo menos 3 jacas em cada uma". O professor teve então que explicar novamente a situação: provar que há pelo menos 3 árvores que têm a mesma quantidade de jacas. Usou o jogo de Mancala para exemplificar: um tabuleiro muito grande, com 601 casas, e 1000 grãos. Manoel compreendeu, e ficou tranquilo pelo fato de que eles haviam acertado na primeira vez.

O professor resumiu para os estudantes o que havia acontecido: Manoel resolveu em poucos segundos, Luciana compreendeu a resolução, e Breno tentou primeiramente parametrizar a situação em termos da versão geral do PCP, o que trouxe dificuldades. Explicou, para esses três alunos, que a proposta da modelagem matemática é essa, ser uma estratégia mais intuitiva, e até às vezes subjetiva, de estruturar nosso raciocínio no sentido de compreender e analisar uma situação real, eventualmente resolvendo problemas.

Após vários comentários dos alunos, o professor despediu-se agradecendo novamente a participação de todos e todas, e encerrou a última reunião.

As sete horas de gravação que resultaram das cinco reuniões foram separadas para análise posterior. Esta análise, encerrada neste capítulo, foi feita durante o ano de 2021.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. A sequência foi planejada utilizando-se, como metodologia de ensino, a Modelação Matemática, seguindo parâmetros e sugestões apresentados em textos de Biembengut (2016 e 2018). Também utilizamos conceitos de modelagem estudados por Bassanezi (2002). Para um maior aprofundamento no estudo da psicologia do pensamento matemático, e consequente análise mais acurada das implicações da aplicação da sequência na aprendizagem dos participantes, foi utilizada a abordagem da teoria do Pensamento Matemático Avançado (PMA), presentes nas obras de Tall e Vinner (1981), e na sequência desses estudos, feita por Tall (1991).

Os resultados de avaliações, de algumas pesquisas e a nossa própria experiência como docentes no Ensino Fundamental e Médio, já evidenciavam as dificuldades enfrentadas pelos alunos (e por professores) em situações e problemas referentes à Análise Combinatória. Não apenas em casos de permutações e arranjos, mas mesmo em problemas de contagem, essenciais para o desenvolvimento de outros processos, como o estudo de Probabilidades.

Assim, foi escolhido um conteúdo matemático de Análise Combinatória que não está previsto explicitamente na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), embora esteja contemplado em algumas habilidades de maneira implícita, para ser usado neste estudo, permitindo que houvesse a certeza de que os alunos desconheciam o conceito formal desejado, no caso, o PCP.

O resultado da aplicação da sequência de ensino, baseada em Modelação Matemática, foi analisado e descrito no capítulo 5.

A pesquisa foi iniciada fazendo-se uma breve revisão bibliográfica, na qual foram analisados alguns artigos e dissertações sobre o tema do PMA, da modelagem matemática e sobre o próprio PCP. Não foram encontrados, em nossa busca, trabalhos que unissem os três temas concomitantemente, mas os textos analisados nos auxiliaram na observação do panorama das pesquisas elaboradas nesta área e como sugestões de análise dos dados obtidos. Em seguida foi feita uma pesquisa sobre o objeto matemático, o PCP, com sua história (e a importante participação do matemático Johann Dirichlet), seu enunciado e sua presença na BNCC, de maneira indireta como citado anteriormente. A partir daí, este trabalho apresentou a fundamentação teórica em que foi apoiado, em um estudo sobre a Modelagem Matemática, mais especificamente a Modelação (modelagem em educação) Matemática. Outro breve estudo foi feito sobre a teoria do PMA, necessário para o aprofundamento da análise. Ao estudarmos as duas abordagens, percebemos muitas conexões entre elas. Decidimos fazer então uma revisão das etapas da modelação matemática a partir do PMA, o que foi apresentado na seção 3.3 deste trabalho. A coleta de dados foi então feita com alunos do 8º ano, integrantes do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de São Roque, interior de São Paulo, aplicando-se uma sequência de ensino realizada em cinco reuniões, que tiveram que ser feitas por videoconferência em decorrência da pandemia de covid-19, no ano de 2020. A sequência, em resumo, foi a seguinte:

1. Discussão sobre um tema de interesse dos alunos: jogos de maneira geral, como jogos eletrônicos, esportes, passatempos etc.

2. Dentro deste tema foi delimitado um assunto específico: os jogos de mesa. Uma apresentação de *slides* foi elaborada em grupo pelos alunos sobre esses tipos de jogos.

3. Foi apresentado, dentre os jogos de mesa, o Mancala, antiga família de jogos que tem características adequadas para a abordagem do conceito matemático desejado, o PCP. Os alunos elaboraram artesanalmente, de forma individual, um tabuleiro para jogos de Mancala.

4. De posse deste tabuleiro, os participantes elaboraram regras e estratégias para jogar um jogo de Mancala. Assim puderam desenvolver um modelo matemático e criar (ou aperfeiçoar) uma imagem mental do conceito a ser ensinado.

5. O PCP foi então apresentado formalmente e algumas situações-problema foram discutidas e resolvidas usando esse princípio matemático.

O processo de análise de sete horas de dados colhidos nas reuniões é a resposta à questão de pesquisa, ou seja, a análise das implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o PCP na aprendizagem dos participantes da pesquisa.

Esta análise revelou vários tópicos importantes. Logo de início os estudantes ficaram envolvidos e interessados nas reuniões, pois havia familiaridade no assunto. Os jogos são parte do cotidiano dos estudantes, e tomam grande tempo da vida deles. Este envolvimento foi utilizado para engajá-los nas atividades subsequentes.

Também pudemos observar a agilidade dos alunos em utilizar recursos tecnológicos, e a receptividade por parte deles em elaborar as pesquisas sugeridas, utilizando desses recursos quando possível.

O envolvimento e a receptividade dos alunos formaram o combustível para a satisfatória realização das atividades propostas pelo professor.

A discussão inicial e a primeira atividade (os *slides*) fizeram parte da etapa 1 da modelação matemática, da apreensão e percepção sobre o assunto. A familiarização, a contextualização do assunto na vida dos envolvidos e suas interações sobre o tema. De acordo com a teoria do PMA, é a visão global, holística do tema, e que precisa ser motivada inicialmente.

O jogo de Mancala, que foi apresentado durante a primeira atividade, é um tópico específico do tema geral dos jogos. Encontramos, dentre os inúmeros tipos de jogos, um tipo que pudesse ser base para a construção do modelo matemático que desejávamos que os alunos construíssem. Essa é uma diferença entre a modelagem matemática geral e a modelação matemática: neste caso há um modelo a ser objetivado, um rumo a ser tomado.

A proposta da segunda atividade, a construção artesanal de um tabuleiro de Mancala, fez parte da etapa 2 da modelação matemática, a da compreensão e explicitação. Com a possibilidade de manipular as peças em seus próprios tabuleiros, de maneira física e orgânica, os estudantes puderam pensar e formular regras e estratégias para o jogo. A dinâmica desse tipo de jogo é muito matemática, requer princípios de contagem e distribuição combinatória. Assim, houve uma matematização de forma lúdica e natural.

Ainda nessa etapa, vimos o uso do poder da visualização, citado no PMA, para completar a visão global, iniciada na etapa anterior. De posse dessa estrutura global, os alunos puderam desenvolver suas deduções.

Esses alunos, ao tentarem compreender o jogo de Mancala, buscaram modelos mentais anteriores, o que é previsto pelo processo de modelagem matemática. Correspondentemente, segundo a teoria do PMA, buscaram pelas imagens conceituais pré-existentes.

Cada indivíduo tem sua história, sua cultura, suas experiências. Assim, mesmo em um grupo relativamente homogêneo como o que estava presente nesta prática, encontramos pessoas com modelos já bem definidos anteriormente e outras nem tanto. Indivíduos com imagens conceituais claras e próximas à definição do conceito desejado ou, pelo contrário, nenhuma imagem do conceito. E ainda nuances intermediárias, modelos parciais e imagens primitivas de um conceito, a serem aperfeiçoadas e lapidadas. Tudo isso, enfatizamos, em meio a um grupo pequeno de estudantes.

Após encontrarem suas referências, os participantes foram construindo um modelo matemático do PCP, que é essencialmente único devido às interações entre eles. A imagem deste conceito que cada um tinha foi sendo mais elaborada e aperfeiçoada a cada discussão sobre as regras e estratégias do jogo de Mancala. Até o ponto em que o professor, percebendo o amadurecimento das ideias, lançou uma situação chave: "eu devo escolher um número mínimo de grãos e dar para o meu adversário colocar, como ele quiser, nas minhas 6 casas, de modo que eu tenha certeza de que vai haver pelo menos uma casa com mais de um grão". Este foi o principal problema a ser resolvido pelo modelo matemático criado. A partir das respostas pudemos confirmar a existência do modelo do PCP nas estruturas cognitivas dos estudantes, assim como a precisão da imagem conceitual que cada um tinha naquele momento.

A partir daí a formalização do conceito do PCP foi viabilizada. Na verdade, foi até desejada pelos alunos e alunas participantes, que, em alguns casos, se interessaram bastante em resolver outros problemas utilizando o princípio aprendido. A etapa 3 da modelação estava em andamento nesse momento, a significação e expressão do modelo matemático criado. Os alunos interpretaram o modelo em relação ao PCP, e o validaram nas estratégias de jogo do Mancala e na resolução de outros problemas apresentados.

Ao final, os alunos e alunas, assim como o professor, puderam ter bons momentos de socialização, em várias ocasiões bastante descontraídos e divertidos. Um modelo matemático foi desenvolvido por eles, modelo este que pode representar corretamente o conceito do PCP e servir de suporte para a criação de outros modelos mentais mais complexos sobre outros assuntos de Análise Combinatória e Probabilidade. Além disso, tomaram conhecimento, de maneira natural e orgânica, do conceito formal do PCP, incluindo algumas aplicações na resolução de problemas.

Desejamos, ao final deste trabalho, deixar aqui algumas considerações:

- O fato de fazer a prática de maneira remota, em videoconferências, trouxe a vantagem de facilitar a coleta de dados no sentido de gravar todas as falas dos participantes e do professor. Também viabilizou os encontros fora do horário das aulas, compatibilizando as agendas de todos, e não tomando tempo em deslocamentos físicos. No entanto, gostaríamos de ter tido a experiência de jogar Mancala presencialmente, nos tabuleiros e peças artesanais, e ver as estratégias sendo desenvolvidas durante os jogos, por todos os participantes.

- Na elaboração das regras do jogo (atividade 3), percebemos (felizmente a tempo) que é importante disponibilizar de início as regras clássicas e básicas deste tipo de jogo (Apêndice A, p. 92). Principalmente a dinâmica de "semear" as peças, as capturas e o fluxo de jogadas. O modelo matemático pode ser criado com mais eficiência e rapidez no desenvolvimento das estratégias para adquirir vantagem no jogo, e não na própria criação das regras.

- O tema dos jogos de mesa pode ser mantido para elaborar muitas outras sequências de ensino. O Mancala, neste caso, serviu como base para a Análise Combinatória. Outros jogos poderão servir para áreas diversas da Matemática. Além dos jogos clássicos conhecidos no ocidente como xadrez, damas e ludo, há os clássicos do oriente como gamão, go e outros. Mas a variedade dos jogos de mesa é muito maior, e continua sendo ampliada com a criação de novos jogos. Há verdadeiras simulações de matemática financeira, de estratégia logística, dentre inúmeras possibilidades. Além dos jogos de tabuleiro, há os jogos de cartas, que vão muito além do baralho comum de quatro naipes. Todo esse universo de entretenimento e lazer pode ser usado para modelação matemática, e traz como bônus a socialização saudável tão importante para todos, e ainda mais para as crianças e adolescentes.

Além dessas considerações, baseados na experiência deste trabalho, gostaríamos de sugerir um resumo do processo de modelação matemática, conjugado à teoria do PMA, sob o ponto de vista do professor, moderador ou pesquisador:

Etapa 1: Visão global

- Orientação:

  - Discussão sobre um tema geral, abrangente, que seja de interesse e que haja familiaridade entre os participantes.
  - Obtenção de informações relevantes aos participantes.
  - Incentivo à pesquisa sobre o tema.

- Resultados esperados:

  - Uso da característica do hemisfério direito do cérebro, o pensamento holístico.
  - Interação e familiarização com o assunto, resultando em engajamento nas atividades propostas.

Etapa 2: Construção

- Orientação:

  - Atividade prática. Artes, laboratório, esportes, passeios, o que houver interesse e engajamento por parte dos alunos.
  - Auxiliar os participantes na formulação de um problema ou de uma situação a ser resolvida pelo modelo matemático.

- Resultados esperados:

  - Procura por imagens conceituais pré-existentes.
  - Criação ou desenvolvimento de um modelo matemático.
  - Desenvolvimento da criatividade.
  - Promoção da habilidade em formular e resolver problemas.
  - Ampliação da "intuição matemática".

Etapa 3: Validação

- Orientação:

  - Apresentação do conceito formal.
  - Avaliação do modelo matemático criado com relação ao conceito apresentado.

  - Situações ou problemas que podem ser resolvidos usando o modelo e o conceito matemático.

- Resultados esperados:

  - Uso da característica do hemisfério esquerdo do cérebro, o pensamento sequencial lógico.
  - Associação da imagem conceitual com a definição formal do conceito.
  - Apropriação do modelo desenvolvido, mediante a verificação da relevância deste.
  - Interpretação do modelo diante do conceito matemático.
  - Aplicação do conteúdo matemático.

Finalizando, queremos crer que este trabalho foi mais um passo no estudo da psicologia do pensamento matemático e no estudo da prática da modelação matemática. Acreditamos, no entanto, que ainda há muito a caminhar nesse sentido. Argumentos foram confirmados pela análise dos dados e pelas reflexões realizadas ao longo deste estudo, mas temos a consciência e o desejo de que outros estudos possam ser desenvolvidos para ampliar e sistematizar as abordagens aqui utilizadas. Assim, outras pesquisas a partir dessa temática podem ser realizadas, como por exemplo:

- Replicação da parte prática deste trabalho, aplicando-se ou não a Atividade 1 (*slides* sobre os jogos de mesa), mas experimentando a interação presencial dos estudantes jogando Mancala após a confecção artesanal do tabuleiro (Atividade 2).

- Utilização de outro jogo de mesa, após a Atividade 1, objetivando objetos matemáticos diversos, como por exemplo tópicos de matemática financeira e porcentagem utilizando-se o jogo "Banco Imobiliário", probabilidade jogando "*War*", inclusive com uma abordagem interdisciplinar com geografia e história, plano cartesiano na notação de um tabuleiro de damas, operações aritméticas usando o jogo de cartas "Supertrunfo" e assim por diante.

- Um trabalho sobre o PMA sendo estudado na compreensão da lógica, aplicando-se a confecção manual de cartas colecionáveis ("*cardgames*") sobre um tema escolhido pelos alunos, onde cada carta possui características quantitativas e com regras de aplicação de efeitos diferentes e condicionadas a determinadas hipóteses.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática.** 3ª. ed. São Paulo: Contexto, 2002. 386 p. ISBN 85-7244-207-3. Citado 3 vezes nas páginas 35, 37 e 40.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. 367 p. ISBN 978-85-7861-401-0. Citado 22 vezes nas páginas 36, 38, 54, 56, 58, 60, 62, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 74 e 77.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018. 127 p. ISBN 978-85-7244-136-0. Citado 8 vezes nas páginas 35, 59, 64, 67, 68, 74 e 75.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994. 335 p. ISBN 972-0-34112-2. Citado 3 vezes nas páginas 47 e 48.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado na página 31.

____. **Lei Nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996 (LDB)**. Brasília, DF, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado na página 32.

____. **Lei Nº 13.415, de 16 de Fevereiro de 2017 (Altera a LDB)**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm>. Acesso em: 23 mar. 2021. Citado na página 32.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **BNCC**: Base Nacional Curricular Comum. Brasil, 2017. 600 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 2 mai. 2020. Citado 4 vezes nas páginas 32 e 33.

BRUMANO, Cleuza Eunice Pereira. **A Modelagem Matemática como Metodologia para o Estudo de Análise Combinatória**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Outubro 2014. Citado na página 24.

CAMPOS, Amanda Caroline Fagundes. Modelagem matemática na licenciatura em matemática: Análise de assuntos em estudo e trabalhos a realizar por meio dos conceitos de classificação e enquadramento. **Revista Vidya**, v. 40, n. 1, p. 63–80, Jan/Jun 2020. ISSN 2176-4603. Citado na página 23.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. ISBN 85-268-0657-2. Citado na página 29.

FERNANDES, Francisco; LUFT, Celso Pedro; GUIMARÃES, F Marques. **Dicionário Brasileiro Globo**. 44ª. ed. São Paulo: Globo, 1996. 678 p. ISBN 85-250-0298-4. Citado na página 37.

GAGG, Giuliana. **A Imagem do Conceito de Princípios Combinatórios em Diferentes Públicos**. 2018. Monografia (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS. Citado na página 26.

LOPES, Leide Maria Leão. Imagem de conceito e definição de conceito: um olhar sobre o ensino de geometria analítica no ensino superior. **XXI EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, Novembro 2017. Citado na página 22.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Sistemas Lineares e Combinatória**. 1ª. ed. São Paulo: Atual Editora, 1986. v. 3. 230 p. (Matemática - Temas e Metas, v. 3). Citado na página 18.

MACTUTOR History of Mathematics Archive. 2021. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet/>. Acesso em: 6 mar. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 29 e 30.

MELO, Marcos André Pereira de. **Ecologia do Saber**: O caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica. 2018. 205 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2018. Citado na página 16.

OLIVEIRA, Gildo Gouveia de. **Análise Combinatória e Probabilidade**: Atividades pautadas com foco nos pcns e no currículo da rede estadual. 2018. 60 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Itabaiana, 2018. Citado na página 17.

OLIVEIRA, Krerley; CORCHO, Adán J. **Iniciação à Matemática**. Maceió: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. 327 p. (PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Citado 4 vezes nas páginas 30 e 31.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **Análise Combinatória**: Organizações matemáticas e didáticas nos livros escolares brasileiros no período entre 1895-2009. 2015. 145 f. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2015. Citado na página 16.

PLACIDINA, Helen Bossa dos Santos. **O Princípio das Gavetas de Dirichlet: Uma Proposta de Tarefas de Investigação Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2017. Citado na página 25.

SOUSA, Giselle Costa de; SILVA, Alison Luan Ferreira da. O princípio do buraco dos pombos foi desenvolvido por Dirichlet? Apresentando Dirichlet e seus trabalhos. In: SILVA, Américo Junior Nunes da; VIEIRA, André Ricardo Lucas (Org.). **Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas**. Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2020. v. 3, cap. 17, p. 151–163. ISBN 978-65-5706-357-6. Citado 3 vezes nas páginas 28 e 29.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: ____. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, Nederland: Springer, 1991. (Mathematics Education Library, v. 11), p. 3–21. ISBN 978-0-7923-1456-1. Citado 12 vezes nas páginas 43, 44, 56, 59, 60, 63, 70, 72, 78 e 79.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v. 12, p. 151–169, 1981. Citado 9 vezes nas páginas 41, 42, 65, 68, 73, 76 e 77.

APÊNDICE A – REGRAS DE MANCALA

Há centenas de variações de jogos de Mancala, alguns com regras muito simples, outros com certa complexidade. Todas derivam de regras básicas, que passamos a descrever neste texto[1].

1. O tabuleiro é feito de 12 casas menores, 6 em cada campo (o lado do jogador), e dois reservatórios maiores, um de cada lado das casas.

2. Inicialmente, cada jogador distribui 24 sementes nas casas do seu campo, 4 sementes em cada casa.

3. **Movimento de semear**: Em sua vez de mover, o jogador escolhe uma das casas do seu campo, pega todas as sementes dela e as distribui, uma a uma, nas casas seguintes, caminhando no sentido anti-horário.

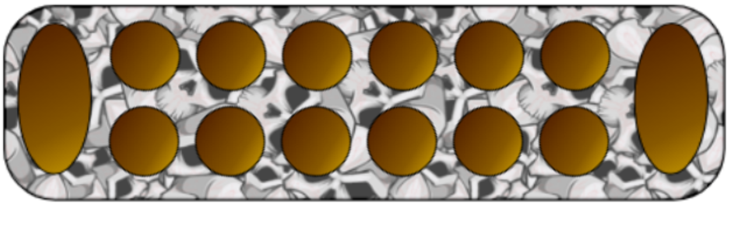
4. Se passar pelo próprio reservatório, o jogador deixa a semente nele e segue colocando as demais no campo adversário, mas nunca no reservatório de lá.

5. Se a última semente cair no próprio reservatório, ele pode fazer outra jogada.

6. **Regra de captura**: Se a última semente cair em uma casa vazia, ele pode adicionar ao seu reservatório todas as sementes da casa seguinte.

7. Quando as sementes se reduzirem a ponto de não ser mais possível semear o campo adversário, os jogadores recolhem suas sobras, juntam ao seu reservatório e contam. Quem tiver mais, ganha a partida.

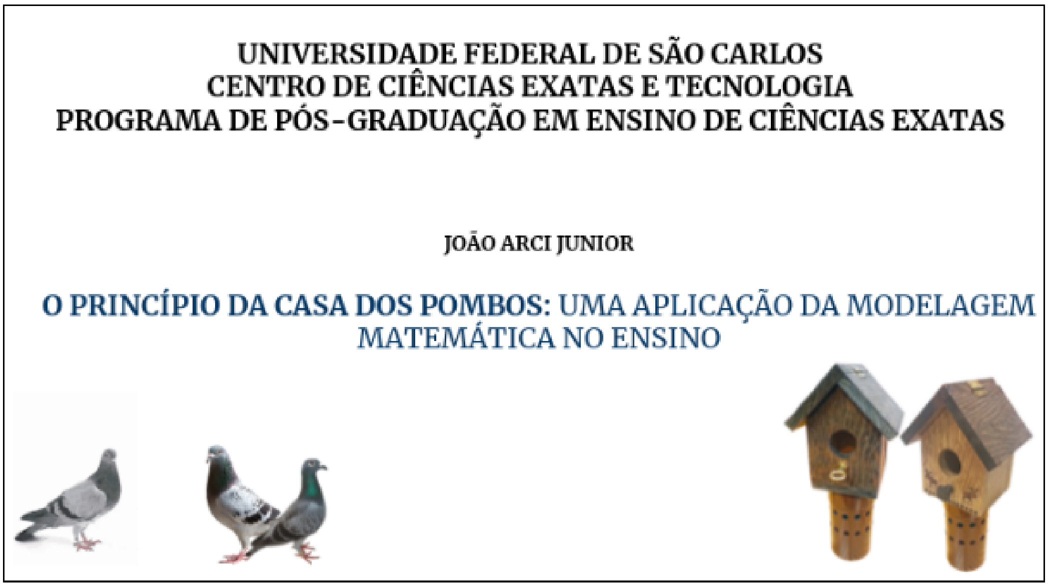
Figura 14 – Tabuleiro de Mancala

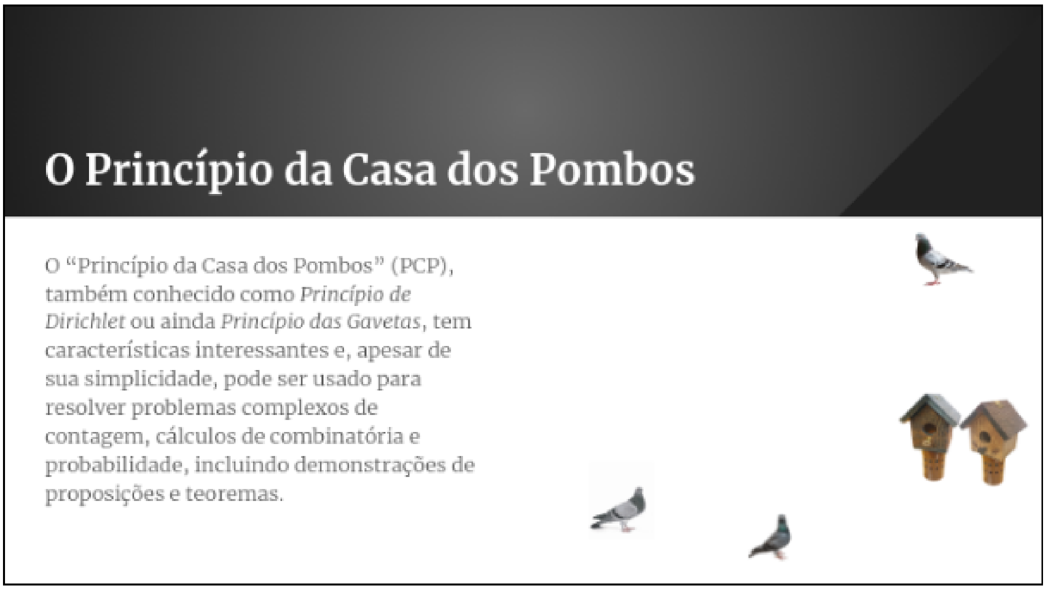


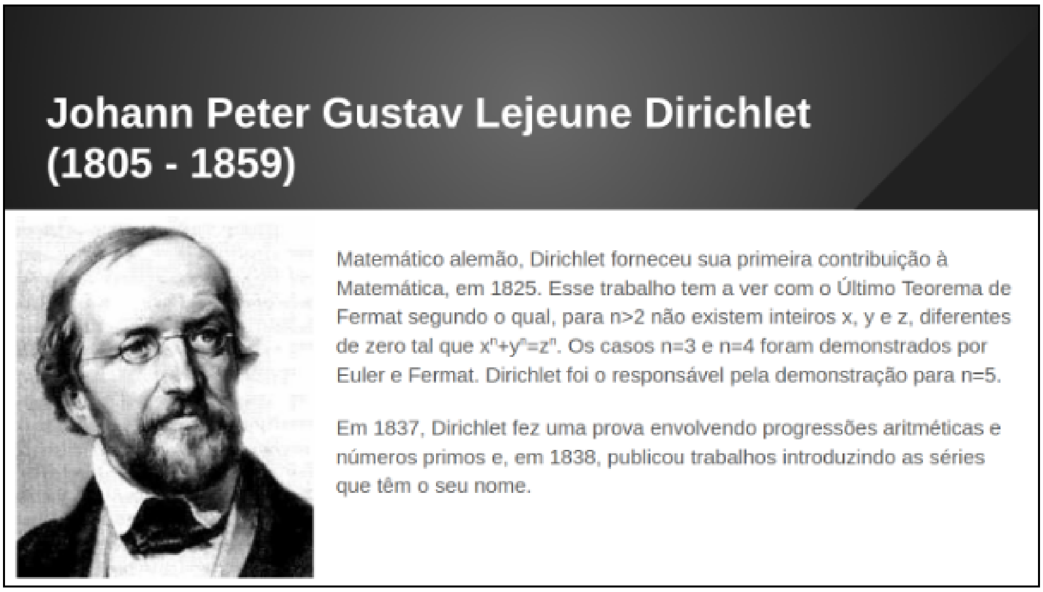
Fonte: o autor.

[1] Adaptado do *website* Nova Escola, em <https://novaescola.org.br/conteudo/18554/aprenda-a-jogar-mancala-e-faca-o-download-do-tabuleiro>, acessado em 05.Out.2021

APÊNDICE B – APRESENTAÇÃO DE *SLIDES*: "O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO"






Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805 - 1859)
Matemático alemão, Dirichlet forneceu sua primeira contribuição à Matemática, em 1825. Esse trabalho tem a ver com o Último Teorema de Fermat segundo o qual, para n>2 não existem inteiros x, y e z, diferentes de zero tal que $x^n+y^n=z^n$. Os casos n=3 e n=4 foram demonstrados por Euler e Fermat. Dirichlet foi o responsável pela demonstração para n=5.
Em 1837, Dirichlet fez uma prova envolvendo progressões aritméticas e números primos e, em 1838, publicou trabalhos introduzindo as séries que têm o seu nome.


Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805 - 1859)
Em sua única obra a respeito da Teoria Algébrica dos Números, ele deu uma definição moderna de função.
A partir de 1839, na mecânica, investigou sistemas em equilíbrio e a teoria potencial. Aplicou técnicas para avaliar integrais múltiplas no problema da atração gravitacional.
Em 1852 estudou o problema de uma esfera submersa em um fluido, sendo o primeiro a obter equações precisas sobre a hidrodinâmica.
Também fez estudos a respeito das condições de convergência de séries trigonométricas e utilizou séries para representar funções arbitrárias. Tais séries foram usadas por Fourier na resolução de equações diferenciais.


PCP
Versão Simples
Se distribuímos N + 1 pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.

Exemplo 1

Uma pessoa acordou e precisa pegar meias para ir ao trabalho. No entanto, não pode acender a luz do quarto onde está a gaveta de meias. Ela sabe que há 5 pares de meias pretas e 5 pares de meias brancas.

Qual o número mínimo de meias a se retirar no escuro para garantir que as meias retiradas contenham um par da mesma cor?

PCP
Versão Geral

Se distribuímos **N.k + 1** pombos em **N** casas, então alguma das casas contém pelo menos **k + 1** pombos.

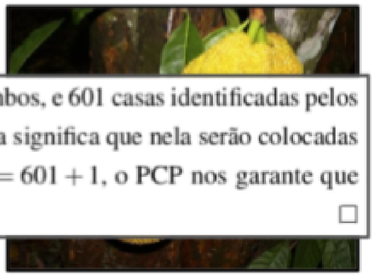
Quantas pessoas são necessárias para que tenhamos certeza de que duas delas, pelo menos, façam aniversário no mesmo mês?

Problema 1

Numa floresta crescem 1.000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

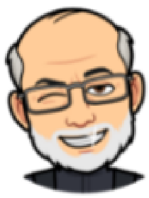
Problema 2

Numa floresta crescem 1.000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não contém mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.



Demonstração. Temos 1.000 jaqueiras, representando os pombos, e 601 casas identificadas pelos números $0, 1, 2, 3, \ldots, 600$. O número k associado a cada casa significa que nela serão colocadas jaqueiras que têm exatamente k frutos. Como $1000 > 602 = 601 + 1$, o PCP nos garante que existem duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos. □

Referências



E-CÁLCULO Website. 2012. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/dirichlet.htm> . Acesso em: 5 mai. 2020.

OLIVEIRA, Krerley; CORCHO, Adán J. **Iniciação à Matemática**. Maceió: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. 327 p. (PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO / ESTUDANTES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – CAMPUS SOROCABA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

<u>TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE)</u>

(Resolução 466/2012 do CNS)

(LEITURA NA ÍNTEGRA)

Eu, João Arci Junior, estudante do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exata da Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR, o(a) convido a participar da pesquisa "O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO", orientado pelo Prof. Dr. Rogério Fernando Pires.

Você foi selecionado(a) por ser aluno(a) do Ensino Fundamental de uma escola particular do município de São Roque do estado de São Paulo, pertencente ao público ao qual esta pesquisa está voltada. Entre outras atividades, na presença virtual do pesquisador e a partir do consentimento de seus pais e/ou responsável e de seu assentimento, você participará de algumas entrevistas online (por videoconferência) para a investigação de informações que servirão para analisar as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre um determinado conteúdo da Matemática. Sua participação é voluntária e não haverá qualquer tipo de remuneração ou qualquer tipo de indenização pela sua participação. A qualquer momento você poderá desistir e retirar seu assentimento sem nenhum ônus.

A sua participação poderá te deixar inibido(a), entediado(a) ou cansado(a) por participar de atividades em tempo real de forma online durante um tempo considerável. Para amenizar a ocorrência desses fenômenos, o professor pesquisador irá conduzir as reuniões de maneira lúdica e descontraída, além de efetuar pausas de 5 minutos a cada 30 minutos de reunião para que você possa se levantar e alongar a musculatura. Caso haja problemas de conexão que impeçam ou dificultem os encontros síncronos, as conclusões ou discussões mais relevantes que possam ter surgido nas reuniões serão disponibilizadas em texto ou imagens no ambiente digital em que o grupo fará os trabalhos, para seu posterior acesso.

Eu, ____, aceito participar da pesquisa "O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO". Autorizo a gravar em vídeo minha imagem e depoimentos para fins didáticos, de pesquisa e divulgação de conhecimento científico sem quaisquer ônus e restrições.

Entendi que posso dizer "sim" e participar, após leitura na íntegra deste documento em voz alta e pausada feita pelo pesquisador, mas que a qualquer momento, posso dizer "não" e desistir da pesquisa sem ônus para qualquer parte. O pesquisador tirou minhas dúvidas e meus pais e/ou responsáveis autorizaram minha participação. Desse modo, concordo em participar da pesquisa.

____
Assinatura do Aluno(a)

Impressão Digital

Local e data: ________________ ____________________________

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar o pesquisador João Arci Junior no endereço eletrônico abaixo: joaoarci65@gmail.com

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO / RESPONSÁVEIS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/RESPONSÁVEIS

O(A) aluno(a)____, sob sua responsabilidade, está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS: UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO". O motivo que nos leva a realizar esta pesquisa é de analisar a aplicação de uma sequência de ensino utilizando o conceito de Modelagem Matemática, propiciando a ele(a) uma aprendizagem significativa de um conteúdo presente na área da Análise Combinatória, que em geral traz dificuldades aos alunos, tanto no Ensino Fundamental como, principalmente, no Ensino Médio. Como desfecho da pesquisa, pretendemos mostrar a ele(a) que ele(a) pode ser protagonista da construção de seu próprio conhecimento.

Caso você concorde, a participação de seu filho(a) nesta pesquisa consistirá em algumas entrevistas à distância, por meio de videoconferências e a realização, também por meios digitais, de algumas atividades dirigidas. Esta pesquisa não acarretará risco nenhum ao aluno(a).

Para participar desta pesquisa, o aluno(a) sob sua responsabilidade e você não receberão qualquer valor monetário ou terão nenhuma vantagem financeira. Sua recusa não trará nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador, com o professor responsável ou com a instituição. Ele(a) terá todas as informações que quiser sobre esta pesquisa e estará livre para participar ou recusar-se a participar. Você como responsável pelo aluno(a) poderá retirar seu consentimento ou interromper a participação dele a qualquer momento. Mesmo que você queira deixá-lo participar agora, você pode voltar atrás e parar a participação a qualquer momento. A participação dele(a) é voluntária e o fato em não deixá-lo participar não vai trazer qualquer penalidade ou mudança na forma em que ele(a) é atendido. Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada. O nome ou o material que indique a participação do aluno(a) não será liberado sem a sua permissão. O aluno(a) não será identificado(a) em nenhuma publicação.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pelo pesquisador responsável e a outra será fornecida a você. Os dados coletados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 (cinco) anos, e após esse tempo serão destruídos. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Declaro que concordo em deixá-lo(a) participar da pesquisa e que me foi dada à oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas com os pesquisadores Prof. Dr. Rogério Fernando Pires e Prof. João Arci Junior.

____
Prof. João Arci Junior

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires

____
Assinatura do (a) Responsável

São Roque, ____ de _____________ de 20___.

O pesquisador me informou que o projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UFSCar que funciona na Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Federal de São Carlos, localizada na Rodovia Washington Luiz, Km. 235 - Caixa Postal 676 - CEP 13.565-905 - São Carlos - SP – Brasil. Fone (16) 3351-8110.

ANEXO A – APRESENTAÇÃO DE *SLIDES*: "UMA HISTÓRIA DOS JOGOS DE MESA"

Introdução

Jogo de mesa é um termo genérico para designar jogos normalmente disputados sobre uma mesa ou outra superfície plana.

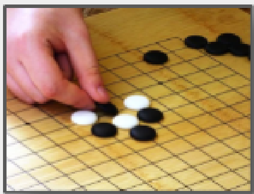
Este termo é usado para diferenciar estes jogos dos esportes e dos jogos eletrônicos.

Jogos de mesa não são apenas uma alternativa de lazer. Sua prática incentiva a capacidade de memória e ajudam a desenvolver o raciocínio lógico e abstrato.

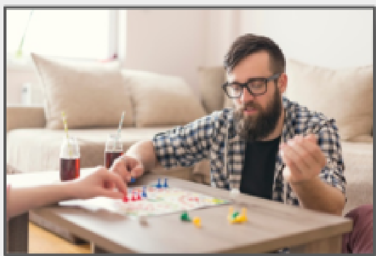
Regras e estratégias

As regras podem variar desde o simples (por exemplo, jogo-da-velha), para aquelas que descrevem um universo de jogos em grande detalhe (por exemplo, *Dungeons & Dragons*).

O tempo necessário para aprender a jogar ou dominar um jogo varia muito de jogo para jogo. Tempo não está necessariamente relacionado com o número ou a complexidade das regras de aprendizagem; alguns jogos com estratégias profundas (por exemplo, *Xadrez* ou *Go*) possuem conjuntos de regras relativamente simples.



Alguns tipos de jogos de mesa



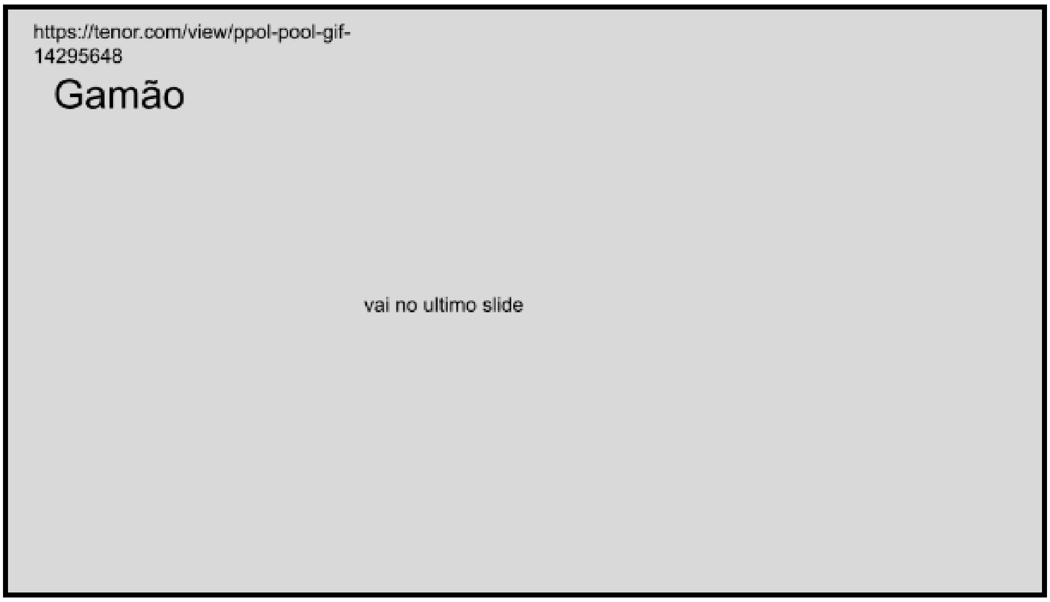
Existem muitos tipos de jogos de tabuleiro. Sua representação pode variar de situações da vida real a jogos abstratos sem nenhum tema (por exemplo, damas).

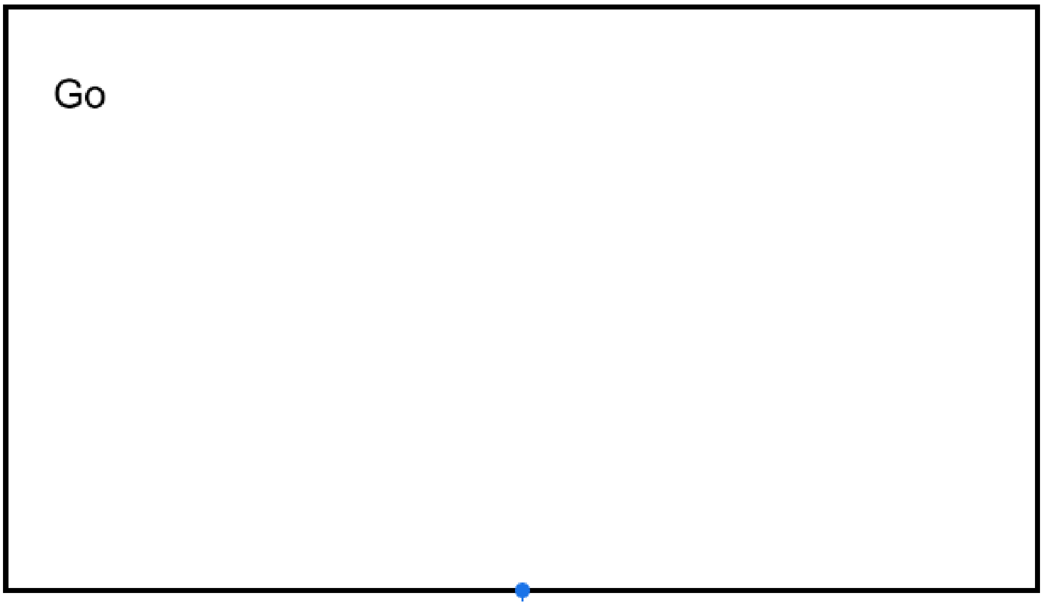
Alguns tipos de jogos:

- Jogos de tabuleiro
- Jogos de cartas (colecionáveis ou não)
- Jogos de sociedade ou de festa
- RPGs
- Jogos de miniaturas

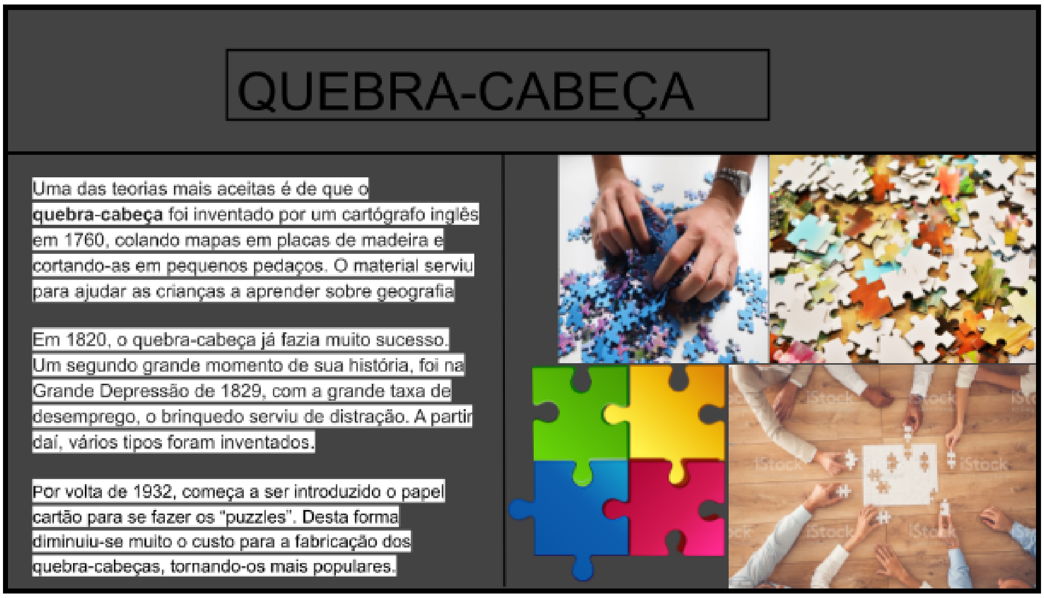

Jogos de
tabuleiro


Xadrez
O xadrez é um jogo de tabuleiro com 16 peças, sendo representadas por peões, torres, cavalos, bispos,um rei e uma rainha. O jogo é disputado por duas pessoas.
Ele tem como objetivo dar o "mate" no rei do jogador adversário. Este acontece nas seguintes situações:
- O rei não conseguir se movimentar para nenhuma casa (estão todas na linha de ataque das peças do adversário);
- Nenhuma peça consegue se colocar á frente e proteger o Rei;
- A peça que está a atacar não poder ser capturada.


https://tenor.com/view/ppol-pool-gif-14295648
Gamão
vai no ultimo slide


Go


em:
MMORPG, RPG, Games, Fantasia
Dungeons and Dragons
DUNGEONS & DRAGONS
Dungeons & Dragons (abreviado como D&D ou DnD) é um RPG de fantasia medieval desenvolvido originalmente por Gary Gygax e Dave Arneson, e publicado pela primeira vez em 1974 nos EUA pela TSR, empresa de Gary Gygax. Hoje o jogo é publicado pela Wizards of the Coast. Suas origens são os wargames de miniaturas (principalmente o Chainmail). A publicação do D&D é considerada como a origem dos RPGs modernos e foi lançada no Brasil pela Grow.
DdJogadores de D&D criam personagens que embarcam em aventuras imaginárias em que eles enfrentam monstros, reúnem tesouros, interagem entre si e ganham pontos de experiência para se tornarem incrivelmente poderosos à medida que o jogo avança. O D&D se destaca dos wargames tradicionais por permitir que cada jogador controle um personagem específico, ao invés de um exército
MONSTER MANUAL
TSR PRESENTS
DEITIES & DEMIGODS


QUEBRA-CABEÇA
Uma das teorias mais aceitas é de que o quebra-cabeça foi inventado por um cartógrafo inglês em 1760, colando mapas em placas de madeira e cortando-as em pequenos pedaços. O material serviu para ajudar as crianças a aprender sobre geografia
Em 1820, o quebra-cabeça já fazia muito sucesso. Um segundo grande momento de sua história, foi na Grande Depressão de 1829, com a grande taxa de desemprego, o brinquedo serviu de distração. A partir daí, vários tipos foram inventados.
Por volta de 1932, começa a ser introduzido o papel cartão para se fazer os “puzzles”. Desta forma diminuiu-se muito o custo para a fabricação dos quebra-cabeças, tornando-os mais populares.

História do Jogo de Dama

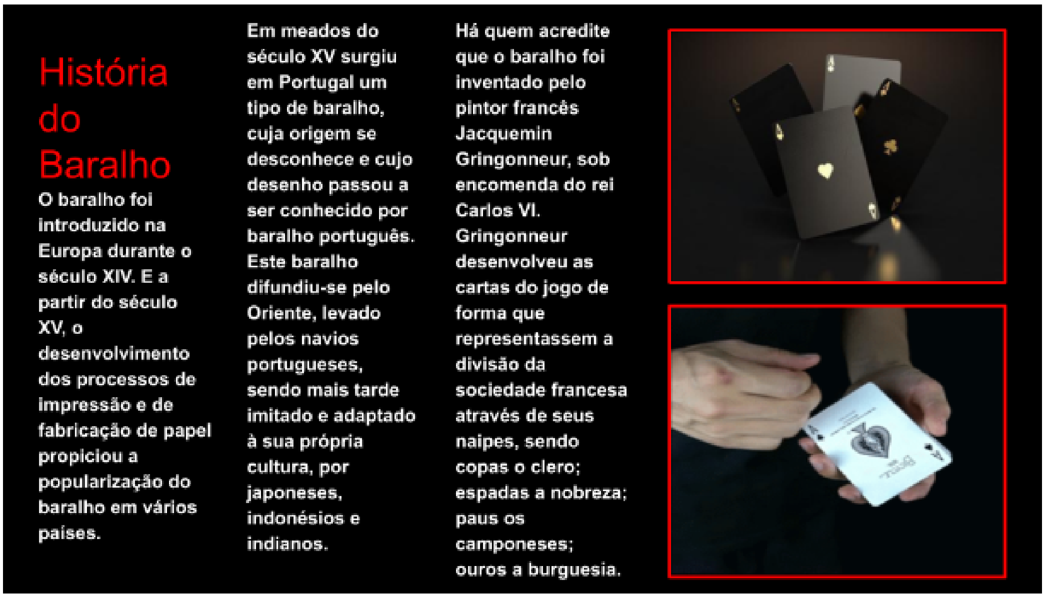
O jogo consiste em um tabuleiro (quadrado) de 64 casas com 24 peças, com cores variadas, depende do país o jogo muda. O objetivo do jogo é capturar/imobilizar as peças do inimigo, o competidor que capturar todas as peças do adversário vence a partida.

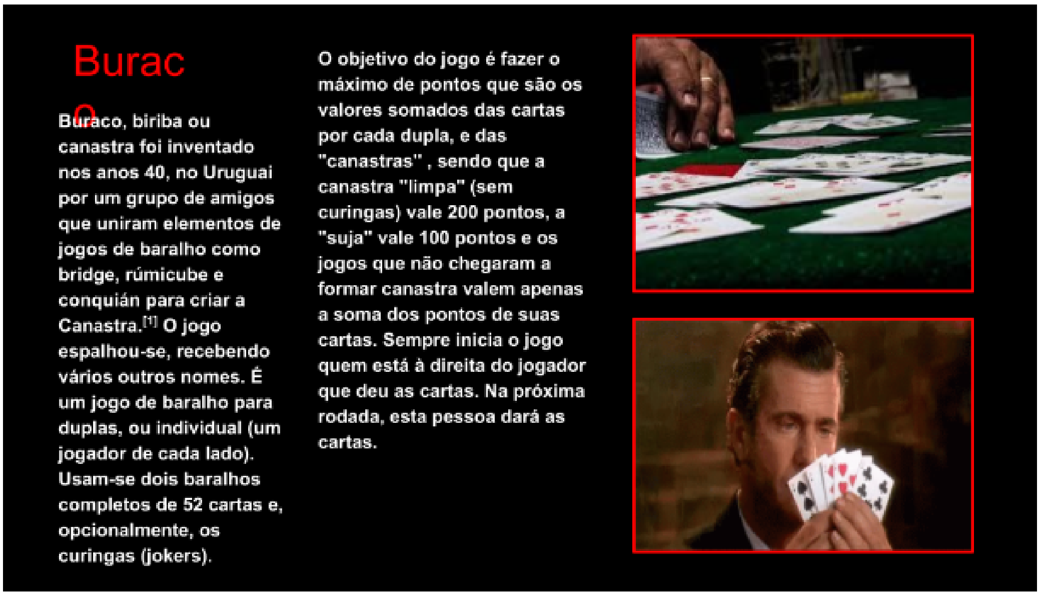
O jogo foi criado entre 2000 e 1500 A.C. Sobre o país que surgiu, não achei um país exato, mas eu achei três países em destaques: Egito, Grécia e França. Ao que parece um francês inventou de jogar o que hoje chamamos de damas no tabuleiro de xadrez.

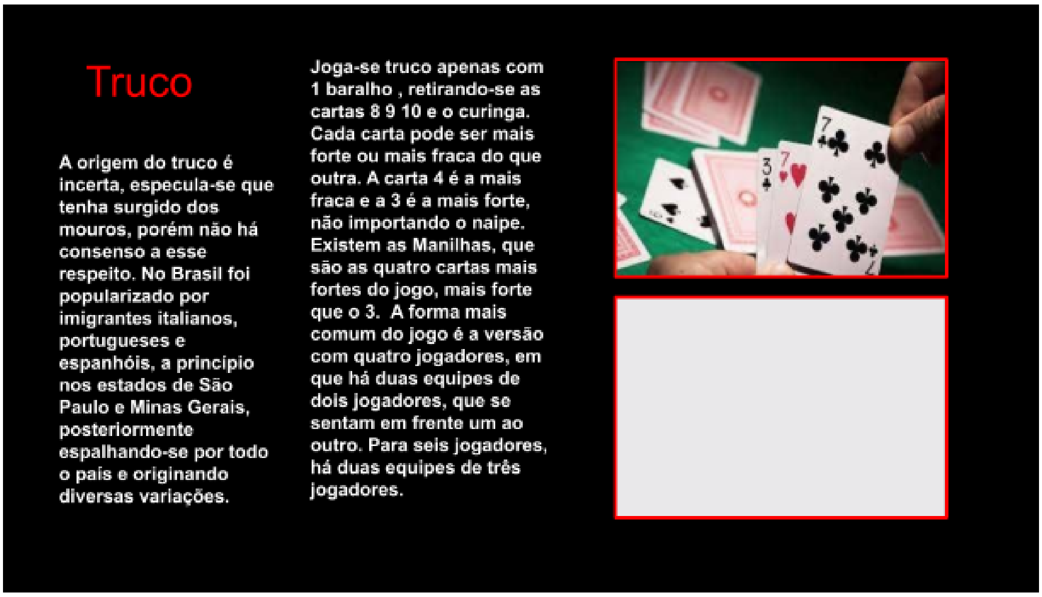
COMBATE

COMBATE é um jogo de estratégia e de sorte jogado por duas pessoas. O objetivo desse jogo é resgatar o prisioneiro capturado pelo exército inimigo.

Cada jogador tem 40 peças, que representam diversas patentes do exército, minas terrestres e o prisioneiro inimigo.


História do Baralho
O baralho foi introduzido na Europa durante o século XIV. E a partir do século XV, o desenvolvimento dos processos de impressão e de fabricação de papel propiciou a popularização do baralho em vários países.
Em meados do século XV surgiu em Portugal um tipo de baralho, cuja origem se desconhece e cujo desenho passou a ser conhecido por baralho português. Este baralho difundiu-se pelo Oriente, levado pelos navios portugueses, sendo mais tarde imitado e adaptado à sua própria cultura, por japoneses, indonésios e indianos.
Há quem acredite que o baralho foi inventado pelo pintor francês Jacquemin Gringonneur, sob encomenda do rei Carlos VI. Gringonneur desenvolveu as cartas do jogo de forma que representassem a divisão da sociedade francesa através de seus naipes, sendo copas o clero; espadas a nobreza; paus os camponeses; ouros a burguesia.


Burac
o
Buraco, biriba ou canastra foi inventado nos anos 40, no Uruguai por um grupo de amigos que uniram elementos de jogos de baralho como bridge, rúmicube e conquián para criar a Canastra.[1] O jogo espalhou-se, recebendo vários outros nomes. É um jogo de baralho para duplas, ou individual (um jogador de cada lado). Usam-se dois baralhos completos de 52 cartas e, opcionalmente, os curingas (jokers).
O objetivo do jogo é fazer o máximo de pontos que são os valores somados das cartas por cada dupla, e das "canastras" , sendo que a canastra "limpa" (sem curingas) vale 200 pontos, a "suja" vale 100 pontos e os jogos que não chegaram a formar canastra valem apenas a soma dos pontos de suas cartas. Sempre inicia o jogo quem está à direita do jogador que deu as cartas. Na próxima rodada, esta pessoa dará as cartas.


Truco
A origem do truco é incerta, especula-se que tenha surgido dos mouros, porém não há consenso a esse respeito. No Brasil foi popularizado por imigrantes italianos, portugueses e espanhóis, a principio nos estados de São Paulo e Minas Gerais, posteriormente espalhando-se por todo o país e originando diversas variações.
Joga-se truco apenas com 1 baralho , retirando-se as cartas 8 9 10 e o curinga. Cada carta pode ser mais forte ou mais fraca do que outra. A carta 4 é a mais fraca e a 3 é a mais forte, não importando o naipe. Existem as Manilhas, que são as quatro cartas mais fortes do jogo, mais forte que o 3. A forma mais comum do jogo é a versão com quatro jogadores, em que há duas equipes de dois jogadores, que se sentam em frente um ao outro. Para seis jogadores, há duas equipes de três jogadores.


Paciêcia
Esse é um jogo para se jogar para se jogar sozinho, utiliza-se um baralho com 52 cartas,o objetivo do jogo


WELCOME
TO Fabulous
LAS VEGAS
NEVADA
Jogos de azar


Poker
O Poker pode ser jogado com dois estilos e em cada um deles tem várias formas o Poker aberto pode-se jogar com 5 ou 7 cartas e também há o Poker fechado.
Não se sabe ao certo a origem do Poker alguns dizem que teve início na China no século X outros que se originou de um jogo persa outros dizem que veio da França e foi levado aos EUA.

Roleta

WAR

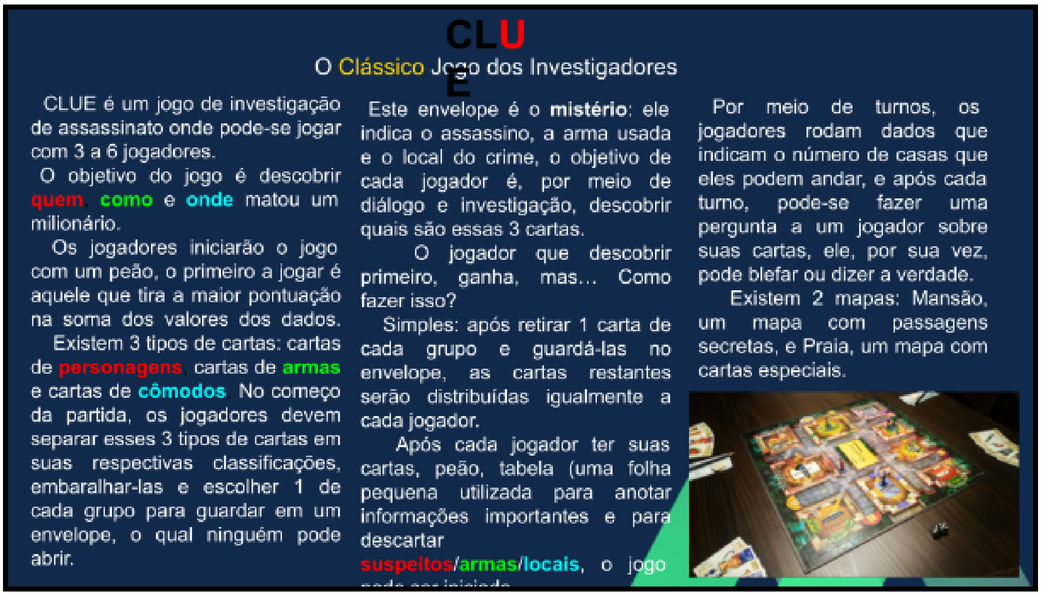
WAR é um jogo de estratégia e sorte onde o jogador precisa conquistar territórios para alcançar o objetivo que foi sorteado por ele.

A conquista de territórios acontece por meio de uma disputa de dados entre quem ataca um território e quem o defende. Pode-se jogar de 3 a 6 participantes.

WAR é um dos jogos de estratégia mais famosos, tendo até uma versão que trata sobre Deuses.


Imagem & Ação
O jogo "Imagem e Ação" foi criado nos Estados Unidos em 1986 pelo designer Rob Angel e logo tornou-se sensação mundial.
A ideia inicial do jogo foi colocada em prática por Angel em 1981. Durante festas, ele esboçava ilustrações baseadas em palavras que escolhia aleatoriamente no dicionário.
Angel passou a divulgar sua invenção de porta em porta, lhe rendendo muitas vendas e popularidade
O principal objetivo do jogo é o de realmente aguçar a imaginação e a criatividade dos participantes e não o de explorar a habilidade ou técnica de desenhar.
IMAGEM&AÇÃO 2
O jogo que desafia a sua imaginação!
IMAGEM&AÇÃO 1
O jogo que desafia a sua imaginação!
PiCtioNaRy


Luana Ortega
The Resistance
De 5 a 10 jogadores atuam como Operantes da Resistência ou como Espiões do Império. De três a cinco rodadas, eles dependem uns dos outros para executar e concluir missões contra o Império. Ao mesmo tempo, eles devem tentar descobrir as identidades secretas dos outros jogadores e conquistar sua confiança.
Cada rodada começa com uma discussão, o Líder da vez reúne o grupo nos porões da Resistência e escolhe certo número de jogadores (incluindo ele próprio) para executarem a missão. Todos os jogadores então votam se Aprovam ou Rejeitam a equipe selecionada...Uma vez que a equipe foi escolhida e aprovada, os jogadores dentro da missão secretamente escolhem se a missão será bem sucedida ou se falhará. Baseado nos resultados, a missão tem Sucesso (vitória da Resistência) ou Fracasso (vitória do Império). Quando um time ganha três missões, ele vence o jogo!


CLUE
O Clássico Jogo dos Investigadores
CLUE é um jogo de investigação de assassinato onde pode-se jogar com 3 a 6 jogadores.
O objetivo do jogo é descobrir quem, como e onde matou um milionário.
Os jogadores iniciarão o jogo com um peão, o primeiro a jogar é aquele que tira a maior pontuação na soma dos valores dos dados.
Existem 3 tipos de cartas: cartas de personagens, cartas de armas e cartas de cômodos. No começo da partida, os jogadores devem separar esses 3 tipos de cartas em suas respectivas classificações, embaralhar-las e escolher 1 de cada grupo para guardar em um envelope, o qual ninguém pode abrir.
Este envelope é o mistério: ele indica o assassino, a arma usada e o local do crime, o objetivo de cada jogador é, por meio de diálogo e investigação, descobrir quais são essas 3 cartas.
O jogador que descobrir primeiro, ganha, mas... Como fazer isso?
Simples: após retirar 1 carta de cada grupo e guardá-las no envelope, as cartas restantes serão distribuídas igualmente a cada jogador.
Após cada jogador ter suas cartas, peão, tabela (uma folha pequena utilizada para anotar informações importantes e para descartar suspeitos/armas/locais, o jogo
Por meio de turnos, os jogadores rodam dados que indicam o número de casas que eles podem andar, e após cada turno, pode-se fazer uma pergunta a um jogador sobre suas cartas, ele, por sua vez, pode blefar ou dizer a verdade.
Existem 2 mapas: Mansão, um mapa com passagens secretas, e Praia, um mapa com cartas especiais.


Mancala

ÍNDICE