UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – CÂMPUS SOROCABA

MÁRIO CARVALHO NETO

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

SOROCABA/SP

2021

MÁRIO CARVALHO NETO

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho apresentado à Universidade Federal de São Carlos como sendo um requisito parcial para que se possa obter o título de licenciado em Matemática sob a orientação do prof. Dr. Sadao Massago.

SOROCABA/SP

2021

Neto, Mário Carvalho

A construção dos Números Naturais no Ensino Fundamental / Mário Carvalho Neto -- 2021.
50f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Sadao Massago
Banca Examinadora: Antônio Luís Venezuela, Paulo César de Oliveira
Bibliografia

1. Números Naturais . 2. Ensino Fundamental. I. Neto, Mário Carvalho. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 3/2021/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MÁRIO CARVALHO NETO

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 29 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientador	Prof. Dr. Sadao Massago
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Paulo César Oliveira

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Antonio Luis Venezuela**, **Docente**, em 15/12/2021, às 10:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago**, **Docente**, em 15/12/2021, às 22:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira**, **Docente**, em 16/12/2021, às 07:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0534545** e o código CRC **DFC64B69**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Santíssima Trindade, pois sem as Bênçãos do Pai, sem a Misericórdia do Filho e sem o Dom da Sabedoria do Espírito Santo, não seria capaz de soprar nem sequer uma palavra para a escrita deste.

Agradeço também à minha mãezinha do céu pela intercessão e coragem de recomeçar todos os dias.

Por fim, agradeço à minha família, em especial a minha querida esposa Michele, aos meus sogros Aparecida Neusi e Joselito e a minha cunhada Graziele, pela confiança atribuída a mim de lutar diariamente para uma educação de qualidade, e a minha avó Therezinha de Jesus (*in memorian*) pelos ensinamentos deixados e que estarão sempre gravados em meu coração.

RESUMO

Observa-se que a construção dos números está sendo trabalhada desde o ensino básico, dos números naturais aos reais. Portanto, o presente estudo teve por objetivo realizar reflexões referentes as metodologias de construção do conjunto dos números naturais, bem como recomendar propostas referentes ao procedimento de ensino e de aprendizagem dos números naturais no Ensino Fundamental. A metodologia aplicada para o desenvolvimento do presente estudo foi a revisão bibliográfica. Como a construção do sistema numérico ocorre através das relações desenvolvidas pelo sujeito, é recomendável ajudar sugerindo atividades, brincadeiras, jogos etc., que possam vir a beneficiar o estabelecimento destas relações, e, de tal modo, estar-se-ia desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático dos educandos por meio de uma abstração reflexiva.

Palavras-Chave: Construção; Ensino Fundamental; Números Naturais.

ABSTRACT

It is observed that the construction of natural numbers are worked since elementary school, from natural to real numbers. Therefore, this study aimed to reflect on the methodologies for the construction of natural numbers sets, as well as to recommend proposals regarding the procedure for teaching and learning natural numbers in Elementary School. The methodology applied for the development of this study was the literature review. As the construction of the numerical system occurs through the relationships developed by the subject, it is recomended to help by suggesting activities, games, etc., which may benefit the establishment of these relationships, and, in such a way, I was developing the logical-mathematical reasoning of the students through a reflective abstraction.

Keywords: Construction; Elementary School; Natural Numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Inicialmente, compete aqui dizer que a noção de número, que segundo Tracanella e Mestre (2016) "Número é a noção de quantidade que idealizamos ao contar, ordenar e/ou medir e numeral é a representação dessa ideia por símbolos (gráfico ou não)", bem como suas generalizações, se encontra fortemente ligada com a história da humanidade. E a própria vida se encontra cercada pela Matemática. Boa parte das comparações que o ser humano formula, bem como gestos e atitudes diárias, referem-se – conscientemente ou não – a juízos aritméticos e propriedades geométricas. Além do mais, não se pode deixar de lado o fato de que a ciência, a indústria e o comércio, põem todos em constante contato com a Matemática.

Assim, pode-se dizer que, em todas os momentos da evolução humana, mesmo nas mais obsoletas, encontra-se no ser humano o sentido do número. Essa capacidade lhe admite reconhecer que algo modifica em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto tenha sido retirado ou adicionado.

Nesse sentido, tem-se que muitos educandos do Ensino Fundamental – e até mesmo do Ensino Superior – apresentam dificuldade em trabalhar e compreender os números irracionais. Talvez, tal problema ocorra em razão de a abordagem utilizada nas salas de aula, em muitos casos, seja superficial e, por vezes, até equivocada. Sendo assim, questiona-se: como o docente de Matemática no Ensino Fundamental anos iniciais pode trabalhar para que haja uma melhor compreensão dos seus educandos sobre os números naturais?

Portanto, o presente estudo teve por objetivo realizar reflexões referentes as metodologias de construção do conjunto dos números naturais, bem como propor propostas referentes ao ensino e aprendizagem dos números naturais no Ensino Fundamental.

Como justificativa para o desenvolvimento do presente estudo, nota-se que o campo da Educação e da Educação Matemática, hoje em dia, vem realizando pesquisas sobre os procedimentos de ensino e de aprendizagem na formação do docente de Matemática. Muito tem se controvertido acerca da adequação da teoria idealizada na formação inicial à prática docente dos educadores de Matemática, sobretudo na Educação Básica. Portanto, torna-se conveniente abordar tal temática, com vistas a ampliar a literatura acerca do tema.

Para tanto, a metodologia aplicada para o desenvolvimento do presente estudo foi a revisão bibliográfica. Tal método foi aplicado por meio de obtenção e análise de artigos científicos, dissertações, teses e publicações. Todo o material foi obtido por meio de *sites* de busca eletrônica e bibliotecas virtuais, tais como *Google* Acadêmico e *Scientific Electronic Library Online* (SciELO). Após a fase de levantamento bibliográfico, foi realizada uma triagem de todo o material que aborda em específico o assunto aqui estudado.

CAPÍTULO 01

REVISÃO DA LITERATURA

Nesse capítulo, iremos apresentar uma revisão da literatura a fim de situar o leitor sobre conceitos atrelados ao ensino de matemática na educação básica, a fim de subsidiar as propostas didáticas para o ensino de números naturais.

1.1 O Conhecimento Transmitido Através da Linguagem

Na teoria proposta por Vygotsky (1998, p. 62), "a linguagem desempenha uma função essencial no desenvolvimento intelectual da criança, pois, este depende de seu domínio dos meios sociais e do pensamento, isto é, da linguagem". Ainda conforme Vygotsky (1998, p. 63), "[...] o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos linguísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança".

O indivíduo em influência mútua com o meio o transforma e muda a si mesmo. Assim, o instrumento que mediatiza o indivíduo e o meio social é denominado de signo, que pode ser a linguagem, os diversos sistemas de contagem, os sistemas de símbolos algébricos, mapas, diagramas, desenhos, e todo o tipo de signos consagrados (MOYSÉS, 2006).

Compreende-se que a obtenção da linguagem ocorre, primeiramente, com a influência mútua com os outros, tendo-se uma função interpessoal e desenvolvendo a linguagem socializada. Na ocasião em que a linguagem é interiorizada, a criança procura solução para os seus problemas por si própria, enquanto que, primeiramente, buscava outras pessoas (MALTA, 2004).

Desta maneira, pode-se dizer que a linguagem advém a ter uma função intrapessoal. Neste contexto, a linguagem trata-se de uma ferramenta essencial na construção do pensamento e nas relações sociais, marcando assim uma fusão entre as funções comunicativas e representativas (LA ROSA, 2006).

Sendo assim, a maior transformação que ocorre na aptidão da criança, quando ela advém a utilizar a linguagem para solucionar problemas, incide quando ela internaliza a fala socializada, aquela que primeiramente era usada para dirigir-se a um adulto. Nesta fase, ao oposto de buscar um adulto para solucionar o problema, procura em si própria uma solução (MALTA, 2004).

A internalização deste sistema de linguagem – signo – e das regras que conduzem este sistema, ocorre por meio de um processo de modificação e não de transferência. Desta maneira, a passagem do plano externo para o plano interno não ocorre como uma simples cópia, ao oposto, esta passagem transforma o próprio processo e altera sua estrutura e funções. Ela ocorre inicialmente da influência mútua social, de maneira que o processo de internalização começa com uma atividade externa, sendo reconstruída pelo sujeito (LA ROSA, 2006).

Bem como o processo de internalização, outro ponto dos estudos de Vygotsky (1998) que esclarece tal situação, é a zona de desenvolvimento proximal, que foi deliberada por ele como a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento proximal, sendo o primeiro a competência da criança de resolver um problema sem auxílio. Já o segundo, trata-se da capacidade de resolução deste problema com o auxílio de um adulto ou em cooperação de outros mais capazes (MOYSÉS, 2006).

Desta maneira, com o exposto até aqui, observa-se que são essenciais a intervenção e a mediação do docente, bem como também é essencial oportunizar atividades em pares ou em grupos. Moysés (2006, p. 34) esclarece este ponto de vista alegando que:

> Os estudos de Vygotsky, bem como as dos seus colaboradores, igualmente os induziram a notar que aquilo que uma criança não consegue aprender sozinha, pode vir a desempenhá-la com o auxílio de um adulto (ou de alguém mais desenvolvido do que ela). Com isto, perguntas-guia, exemplos e demonstrações compõem a essência deste auxílio.

Sendo assim, a concepção de conceitos coloca-se nos estudos de Vygotsky como uma expansão das suas próprias pesquisas acerca do processo de internalização. Assim, propõe-se a diferenciação entre conceitos naturais e científicos, considerando os primeiros, aqueles que a criança aprende no seu cotidiano, brotados do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos etc. E os últimos como sendo aqueles sistematizados, os que são prestados de propósito, que são por excelência, os conceitos que se aprendem na escola (VYGOTSKY, 1998).

Para Vygotsky (1998, p. 104), “há uma influência mútua entre os dois tipos de conceitos e elos que os vinculam em um sistema total de conceitos em meio ao desenvolvimento intelectual da criança". Assim, tratando da concepção de conceitos, Vygotsky (1998, p. 105) diz ainda que:

> [...] a definição é bem mais que do que uma somatória de determinadas conexões associativas compostas pela memória, sendo bem mais do que um mero costume mental; trata-se de uma ação autêntica e implexa do pensamento que não pode ser instruído através de treinamento, apenas podendo ser concretizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver alcançado o grau imprescindível.

Os conceitos científicos são aqueles preparados de modo intencional, ao oposto do conceito natural, e por trás de qualquer conceito científico, sempre há um sistema hierarquizado do qual ele faz parte. Para que o aluno edifique este tipo de conceito, o principal trabalho do docente é a de levá-lo a constituir um laço indireto com o objeto através de abstraimentos em volta de suas propriedades e do entendimento das relações que ele conserva com um conhecimento mais extenso (LA ROSA, 2006).

O ambiente escolar é favorável à cognição deste tipo de conceito. A apreensão deste determina que seja, de modo intencional, trabalhado em um processo de influência mútua entre docente e aluno. Mais uma vez, conforme o que é um ensino direcionado para o entendimento indicado por Vygotsky, nota-se a importância das atividades indicadas pelo docente, bem como as interferências e questionamentos que realiza, para que verdadeiramente ocorra a constituição do conhecimento (VYGOTSKY, 1998).

Com o entendimento de que aprender não está associado a uma mera difusão de conhecimentos, e sim à produção de significações que o aluno consegue concretizar de distintas circunstâncias – e que se desponta por meio da linguagem –, as teorias de Vygotsky dão apoio a estas reflexões sobre o aprendizado e desenvolvimento como processo sociocultural, já que, para ele, o ensino direto de conceitos não é eficiente. Portanto, o docente que tenta atuar desta maneira, não consegue mais do que reprodução de palavras (MALTA, 2004).

1.2 Linguagem Matemática

A Matemática apresenta uma universalidade em sua linguagem, que é muito peculiar, e que essa desenvolveu-se de forma sintética com o objetivo de facilitar a comunicação da mesma entre sujeitos. Esta simbologia, que se pode dizer que é de aspecto universal, tem formalismos que acabam apartando o aluno, com uma ideia que compete apenas ao Mundo dos matemáticos, e, o que é pior, tornando-se um instrumento de exclusão (KLÜSENER, 2001).

Malta (2004, p. 131) elucida está discussão quando afirma que, “Individualmente, nas últimas cinco décadas, a linguagem Matemática passou a ser bastante rica que, nem mesmo os matemáticos podem familiarizar-se com toda esta riqueza”.

Além de a linguagem Matemática ser muito rica e formal, observa-se que – por diversas vezes – acentua-se as dificuldades com o seu simbolismo quando não se preocupa em trabalhar o entendimento dos símbolos e de esclarecer seus significados. Assim, acaba-se abusando do seu uso e, por conseguinte, dificulta-se o processo de aprendizagem (KLÜSENER, 2001).

Escrever e se comunicar através da linguagem Matemática, bem como ler e compreender, é exibir-se portador destas capacidades. Pode-se afirmar que, comunicar-se em Matemática, trata-se de comunicar-se em outra maneira de linguagem que não à materna. Diferente da língua materna, que se trata de uma linguagem natural, a linguagem Matemática é uma linguagem arquitetada. E, bem como a linguagem materna, a Matemática é uma maneira de comunicação (MALTA, 2004).

Atualmente, os indivíduos reconhecem o quanto valoroso é o conhecimento matemático para que se possa entender uma série de coisas, já que essa ciência faz parte do cotidiano das pessoas, embora toda esta rigidez que se encontra penetrado na linguagem Matemática, todavia, pode ser vista como uma ferramenta competente para o entendimento de inúmeras circunstâncias (LA ROSA, 2006).

É por meio dela que se representa e resolve-se uma série de problemas da vida real. Pode ser que falte aos docentes o pensamento de se colocar no lugar dos alunos, lembrar que, por diversas vezes, não se aprende – não por motivo de falta de empenho ou ambição, mas sim, porque, por diversas vezes, aquilo que é manifesto para o docente não é visto da mesma maneira pelo aluno. Klüsener (2001, p. 177) ressalta que:

> Estudar Matemática é, maiormente, aprender e usar suas distintas linguagens – aritmética, geometria, álgebra, gráfica, dentre outras. Hoje, as linguagens matemáticas se encontram presentes em quase todos os campos do conhecimento. Por conta disto, o fato de dominá-las advém a compor-se em um saber imprescindível, levando em consideração a conjuntura do cotidiano.

Para Malta (2004, 44), diversas das dificuldades localizadas no estudo da Matemática, "estão fortemente associadas à deficiência da utilização da linguagem escrita, pois, parte da pressuposição de que expressar de maneira clara o raciocínio, é análogo à capacidade de compreender os resultados".

Malta (2004, 45) ainda vai muito além, afirmando que "o desenvolvimento da competência de expressar o seu próprio raciocínio poderá promover o desenvolvimento da competência de compreensão da Matemática". Neste contexto, Malta (2004, 46) completa dizendo que:

> Não havendo o desenvolvimento do domínio da linguagem imprescindível para a assimilação dos conceitos abstratos (e, deste modo, amplamente dependentes da linguagem que os arquiteta) nos seus vários níveis, não pode se ter o desenvolvimento do pensamento matemático (igualmente em seus distintos níveis).

Todavia, o fato de atualmente se empregar uma linguagem Matemática formal, como já dito antes, foi para resumir a comunicação. Fazer com que o aluno tenha ciência disto, e de que a Matemática nem sempre aproveitou uma simbologia tão formal, quem sabe o faça compreender que teve uma necessidade para que isto ocorresse, pois, como linguagem universal, precisa buscar estar livre de interpretações. Assim, oportunizar este momento de reflexão pode fazer com que o aluno compreenda o motivo deste processo e, por que não, se preocupar com ele (MALTA, 2004).

1.3 Os Problemas Comuns Encontrados no Ensino Fundamental

A Matemática vem sendo vista, por inúmeras ocasiões, como um campo de conhecimento inflexível e exato, que precisa ser assimilado pelo indivíduo. Todavia, ela pode ser entendida como uma ciência viva tanto no dia a dia das pessoas como nos centros de pesquisas, ou também de produção de novos conhecimentos, onde vem se compondo em ferramentas úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos em dessemelhantes campos do conhecimento (GARCIA, 1999).

Deste modo, pelo fato de ser tão abarcante, ela não pode restringir-se a uma mera memorização de normas, metodologias e ao conhecimento formal de definições, pois, ensinar não se trata apenas de transferir conhecimento, porém sim, de criar probabilidades para sua própria produção ou sua construção (VAN DE WALLE, 2009).

Assim, no campo da educação, o ensino da Matemática é tido como uma linguagem apropriada de manifestar a realidade e constituir suas diferenças. A aplicação em conjunturas distintas daquelas onde foram obtidas, demanda bem mais do que a mera decoração ou a solução mecânica de exercício, a exemplo de: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, competência de análise e abstração. Tais capacidades são imprescindíveis em todos os campos de estudo (PEREIRA, 2012).

Portanto, basear o ensino na dimensão social do aluno constitui, dentre outras coisas, acatar as suas probabilidades de raciocínio e organizar circunstâncias que adequem o aprimoramento deste raciocínio, constitui estabelecer relações entre conteúdo, metodologia e processos cognitivos. Todavia, diante disto, o docente acaba se deparando com alguns problemas. Segundo Pereira (2012, p. 63), tal procedimento:

> Demanda do docente um pleno domínio da matéria de estudo, a concretização do mapeamento conceitual do conteúdo (reconhecimento dos conceitos fundamentais do assunto estudado e das relações que se formam entre eles). Demanda igualmente a identificação das modalidades de recursos cognitivos, bem como os conceitos cujo domínio os educandos despontam em suas atividades.

Diante de tal problema, compete ao docente planejar circunstâncias que tenham significado para os alunos e optar por materiais que convenham de apoio para o trabalho que eles irão fazer nas aulas. Atividades estas que promovam a sua manifestação acerca de informações disponíveis e soluções plausíveis para os problemas que promovam suas atividades intelectuais (VAN DE WALLE, 2009).

No Ensino Fundamental, diante das circunstâncias direcionadas para o saber matemático, percebe-se que o educando é, por muitas vezes, convidado a pensar – realizar o que observa, a formular hipóteses –; não, basicamente, a encontrar uma resposta certa. Então, apenas é admissível manifestar ideias matemáticas na cabeça de alguém, se este alguém é posto frente a uma circunstância envolvente que lhe provoque e desafie, e, do mesmo modo, que seja apropriado de instigar a aprendizagem (SADOVSKY, 2007).

Para Pereira (2012, p. 64), "não se trata de uma circunstância lida em livros, e não se trata também de uma circunstância somente explicada de forma descrita ou divulgada pelo educador". Precisa ser uma circunstância que instigue o educando, fazendo com que ele possa aprender de forma plena.

Assim sendo, a Matemática oferecida dentro da sala de aula apenas será compreendida quando essa apresentar um significado para o educando. A acepção trata-se de uma função da realidade do indivíduo de conhecimento. Prontamente, o docente, enquanto articulador da construção deste conhecimento, precisa conhecer a realidade em que atua, e isto constitui que, primeiramente, ele precise aprender com seus educandos (SADOVSKY, 2007).

Nota-se que todos os embasamentos da aprendizagem expressiva e de ensino construtivista chegam a um ponto comum: assim, é impraticável que o docente ensine seus educandos sem resgatar os saberes e valores que esses trazem de casa. E, para que essa ação se consolide, é imprescindível que o docente escute seus educandos, e é imprescindível que o educando fale com o educador, bem como os seus colegas (VISEU, 2009).

No entanto, infelizmente, o ensino da Matemática, em diversas escolas – e por diversos docentes –, ainda se encontra voltado para operar como uma ferramenta disciplinadora e de exclusão. Segundo Viseu (2009, p. 79), "uma ampla quantidade de docentes possui como excepcional finalidade ensinar Matemática sem se preocupar em retransmitir para o educando um conhecimento expressivo".

Até porque, ainda conforme Viseu (2009, p. 80), sentem bastante dificuldade em relacionar o conteúdo exibido teoricamente com a prática educativa, aceito que os programas de formação, em boa parte, "não agrupam circunstâncias práticas em meio a todo o procedimento de formação, deixando uma ampla lacuna na formação do docente".

Neste contexto, as críticas sobre os resultados negativos do ensino da Matemática induzem docentes comprometidos com a educação da Matemática a buscarem por diferentes caminhos para resolver tais problemas, procurando assim por novas estratégias didáticas que sejam verdadeiramente educativas (VAN DE WALLE, 2009).

Portanto, a Matemática é vista e entendida no Ensino Fundamental como um campo de conhecimento inflexível e exato, que necessita ser assimilado pelo indivíduo.

1.4 Os Desafios de Ensinar Matemática Diante de um Novo Currículo

A implementação de currículos de Matemática orientados para reformas tem sido o foco (direto ou indiretamente) de muitos estudos sobre professores de Matemática. Uma influência significativa sobre isso, é a perspectiva de que os professores são fundamentais para a forma como o currículo é interpretado e vivido em sala de aula. Dentro dessa perspectiva, estão os desafios para a formação de professores (MOLINA, 2014).

Por exemplo: que conhecimento os professores devem ter para ensinar de acordo com um currículo orientado para a reforma? Quais abordagens efetivamente facilitarão o desenvolvimento desse conhecimento e sua aplicação na sala de aula? Qual é a natureza do pensamento dos professores (por exemplo, crenças, atitude) ou identidade em relação ao currículo e a relação com o aprendizado e o ensino? (MOLINA, 2014).

De tal modo, é provável que as crenças e atitudes dos professores de Matemática em relação a um novo currículo estejam diretamente relacionadas às suas crenças e atitudes em relação à sua aprendizagem e ensino. Por exemplo, se as crenças dos professores não estiverem em harmonia com as que enquadram o currículo, isso pode afetar o nível de participação e o sucesso em atividades para ajudá-los a entender e implementar o currículo como pretendido (NUNES, 2009).

Em geral, as crenças e atitudes dos professores podem desempenhar um papel facilitador ou inibidor na aprendizagem do novo currículo. Por exemplo, se os professores tiverem crenças compatíveis com o novo currículo, é mais provável que o aprendizado e a implementação ocorram independentemente da abordagem para ajudá-los a conseguir isso (MOLINA, 2014).

No entanto, se eles tiverem crenças conflitantes ou perceberem barreiras na implementação e na promulgação do currículo, ajudá-los a aprender provavelmente representará maiores desafios tanto para eles quanto para os educadores de professores, e dificultarão sua aplicação (GARNICA, 2008).

Da mesma forma, se eles tiverem atitudes positivas em relação ao currículo, provavelmente mostrarão uma atitude positiva para aprendê-lo e implementá-lo, enquanto atitudes negativas provavelmente dificultarão o engajamento deles na aprendizagem e na implementação. Em geral, então, as crenças compatíveis e as atitudes positivas dos professores para o novo currículo poderiam facilitar um envolvimento mais positivo em aprendê-lo (MOLINA, 2014).

Isto sugere que questões como as seguintes são importantes para se abordar na formação de professores: qual é a natureza das crenças e atitudes dos professores em relação à implementação de um novo currículo de Matemática e as implicações para o desenvolvimento profissional? O que afeta as atitudes dos professores quando confrontados com um novo currículo em educação Matemática? Quais são as atitudes dos professores em relação ao currículo, em geral, e em relação a grupos específicos de alunos, em particular? (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

Com base em um estudo para investigar as crenças e atitudes dos professores de Matemática na implementação de um novo currículo de Matemática do Ensino Fundamental baseado em projetos, Nunes (2009, p. 64) destaca brevemente a natureza dessas crenças: “este currículo enfatiza a aplicação e a relevância da Matemática na vida cotidiana”. Assim, destina-se a alunos que provavelmente não frequentam uma universidade ou cursam uma área acadêmica na universidade que exige a disciplina de Matemática.

Os participantes eram professores experientes no início do segundo ano de implementação do currículo. Três dos temas emergentes dos dados envolviam suas crenças comuns sobre a natureza dos projetos, o aprendizado de pequenos grupos e o apoio à implementação. As crenças dos professores sobre a natureza dos projetos, centraram-se na utilidade da Matemática e relevância para os alunos. Eles viam a Matemática como significativa para esses alunos apenas quando está relacionada a aplicativos que eram relevantes para eles (LOPES; TREVISOL; PEREIRA, 2011).

Assim, eles acreditavam que o conteúdo do currículo era mais relevante e significativo para os alunos devido ao foco em situações do mundo real. Isso apoiou sua atitude positiva em implementar o currículo. No entanto, suas crenças permitiram que eles colocassem mais ênfase no uso dos projetos para motivar os alunos, mas, limitavam o escopo e a profundidade Matemática em que implementavam o currículo (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

Os professores acreditavam que ensinar e aprender através de projetos era a maneira de ensinar Matemática e resultaria em uma maneira mais interessante de aprender para os alunos, mas, eles não usaram essa abordagem em seu ensino anterior, em particular, o uso de investigações e grupos. Os projetos foram criados como investigações em pequenos grupos, o que desafiou as crenças dos professores sobre o uso de grupos na sala de aula de Matemática (MOLINA, 2014).

Eles consideraram os grupos como desnecessários no aprendizado da Matemática. Assim, o foco no trabalho em grupo não foi considerado um ativo. Por exemplo, um professor explicou: “não vejo o motivo pelo qual tem-se que trabalhar em grupos. Os projetos poderiam ter sido bons para fazer individualmente”. Outro professor achou que isso estava mudando uma parte única da instrução em Matemática (FIORENTINI; NACARATO, 2005).

Finalmente, os professores acreditavam que a melhor forma de apoio para a implementação do currículo era de dentro de suas escolas. Enquanto valorizavam as oficinas que frequentavam no sistema escolar, consideravam o apoio interno mais importante. Eles também acreditavam que ter tempo para ler o livro de texto, planejar as lições e fazer perguntas, eram mais importantes do que as oficinas do sistema escolar. Eles não sabiam como isso limitava a implementação ao que eles próprios entendiam, o que pode não representar o currículo em si (LOPES; TREVISOL; PEREIRA, 2011).

Portanto, as crenças e atitudes dos professores podem exercer um papel facilitador ou inibidor na aprendizagem do novo currículo. No entanto, se eles tiverem crenças conflitantes ou perceberem barreiras na implementação e na promulgação do currículo, ajudá-los a aprender provavelmente representará maiores desafios tanto para eles quanto para os educadores de professores, e dificultarão sua aplicação.

Nota-se que um dos desafios contemporâneos para ampliar as bases da formação de docentes para o Ensino Fundamental, é o de suplantar a distância que há entre as práticas vivenciadas pelos alunos de cursos de licenciatura e as práticas docentes a serem implantadas na área da educação escolar. Entre estas duas instituições, universidade e escola, se encontram as práticas dirigidas pelos educadores universitários responsáveis pela direção da formação dos futuros docentes (CAMPOS, 2007).

Diante disto, tem-se uma sensação, nada confortável, em uma visão educativa e política, de que há uma espécie de camuflagem da necessidade de discutir tal questão. Assim, articular as práticas dirigidas por quatro personagens: educando do Ensino Fundamental, estudante de licenciatura, educador da educação básica e docente universitário, parece ser uma ação que induz a pensar em termos da especificidade da atividade Matemática (CARVALHO, 2011).

Teve-se somente um progresso tímido nas últimas duas décadas para suplantar, no contexto profissional, a distância existente entre estas práticas. Questão essa que põe em evidência as relações entre as instituições formadoras e as práticas causadas pelos educadores que atuam na Ensino Fundamental (PONTES, 2013).

No estudo de Pontes (2013, p. 48), foi observado que “é preciso mais do que recomendações e declarações curriculares para mudar a prática na educação infantil”. Neste contexto, é provável que o ensino da Matemática advenha a ser mediado por outros fatores relacionados, por exemplo, contexto, conhecimento do professor e índices adulto-criança.

Lara (2011, p. 67), em seu estudo, com uma pesquisa na qual seu trabalho foi baseado, buscou investigar até que ponto o ensino da Matemática nas aulas do Ensino Fundamental era coerente com as recomendações internacionais atuais. As descobertas relatadas no estudo se concentram especificamente identificando “aspectos do ensino da Matemática precoce que os professores entendem particularmente como difícil e desafiador”.

Toledo e Toledo (2009, p. 60), mencionando uma pesquisa de campo, mostra que mais da metade dos professores não relataram dificuldades com a integração da Matemática “com outros aspectos do currículo; tornando a Matemática significativa para crianças jovens; proporcionando aprendizagem Matemática baseada em atividades; e baseando o ensino nas experiências prévias da escola das crianças”.

1.5 A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Neste tópico faremos uma apresentação formal da construção dos números naturais, a partir dos axiomas de Peano, bem como suas propriedades de adição, multiplicação e relação de ordem. Lembrando que tal construção não é similar ao estudado no Ensino Fundamental, e está sendo apresentado apenas para se ter ideia de como seria uma construção formal. A formalização apresentada nessa seção é baseada em Ferreira, J. (2011)

1.5.1 Conceitos de uma relação de ordem

Definição 1: Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma relação R está definida em A se $R \subseteq A \times A$.

As relações de ordem definidas em um conjunto A podem ser:

1) **Reflexiva:** Se para todo $x \in A$, tem-se $(x, x) \in R$.

Exemplo: Considere $A = \{a, b, c\}$.

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a)\}$ é uma relação reflexiva.

2) **Simétrica:** Se para quaisquer $x, y \in A$, tem-se $(x, y) \in R$ se, e somente se, $(y, x) \in R$.

Exemplo: Considere $A = \{a, b, c\}$.

$R = \{(a, b), (b, a)\}$ é uma relação simétrica.

3) **Transitiva:** Se para quaisquer $x, y, z \in A$, tem-se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$.

Exemplo: Considere $A = \{a, b, c\}$.

$R = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ é uma relação transitiva.

4) **Antissimétrica:** Se para quaisquer $x, y \in A$ com $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, ocorre apenas se $x = y$.

Exemplo: Considere $A = \{a, b, c\}$.

$R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ é uma relação antissimétrica.

Seja R uma relação em um conjunto não vazio A e x, y, z elementos quaisquer de A. Dizemos que R é uma *relação de ordem* em A se a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Dizemos ainda que um conjunto não vazio A munido de uma relação de ordem R é chamado de conjunto *ordenado*.

1.5.2 Axiomas de Peano

Os números naturais parecem os números mais simples. Eles parecem ser os blocos fundamentais da Matemática. Mas, eles não são. Quase todas as teorias matemáticas são baseadas na teoria dos conjuntos. Nessas teorias, todos os objetos matemáticos são conjuntos. A maneira como eles interagem é então definida pelos axiomas da teoria. Nesse contexto, os números naturais existem apenas se esses axiomas permitem a construção de conjuntos que correspondem perfeitamente ao que se espera dos números naturais (PASQUINI, 2007), assim, iremos construir o conjunto dos números naturais de maneira axiomática.

Axioma 1 (Axiomas de Peano): Existe um conjunto A e uma função $s: A \to A$ tal que

(i) s é injetora
(ii) Existe um elemento $0 \in A$, que chamaremos de zero, tal que $0 \notin Im(s)$.
(iii) Se um subconjunto X de A satisfaz
  - $0 \in X$;
  - Se $k \in X$, então $s(k) \in X$;

  então $X = A$.

A função s é chamada de *função sucessor*, ou seja, se $a \in A$, então $s(a)$ é chamado de sucessor de a.

O terceiro axioma de Peano é conhecido como *Princípio de Indução Finita* e ele é utilizado na demonstração de muitas propriedades.

1.5.3 Adição em A.

Vamos definir a operação de adição, que será denotado por “$+$”, que é a mesma apresentada no ensino fundamental, porém definida de forma diferente.

Definição 2: Dado $m \in A$, definimos recursivamente:
- $m + 0 = m$;
- $m + s(n) = s(m + n)$.

Veja que desta definição temos:

$$m + s(0) = s(m + 0) = s(m),$$
$$m + s\big(s(0)\big) = s\big(m + s(0)\big) = s\big(s(m)\big),$$

e assim por diante, o que nos diz que podemos induzir que a soma $m+n$ está bem definida para todo $m, n \in A$. Introduziremos agora a seguinte notação:

Definição 3: O sucessor de 0, que é $1 = s(0)$, será chamado de "um".

Proposição 1: Para todo $m \in A$, tem-se $s(m) = m + 1$ e $s(m) = 1 + m$, ou seja, $m + 1 = 1 + m$.

Demonstração: Veja que
$$m + 1 = m + s(0) = s(m + 0) = s(m),$$
ou seja, $s(m) = m + 1$.

Agora, considere o conjunto $B = \{m \in A; s(m) = 1 + m\}$. Mostraremos por indução que $B = A$.

- $1 + 0 = 1 = s(0)$, e assim $0 \in B$.
- Seja $m \in B$, ou seja, $s(m) = 1 + m$. Portanto,
  $$s\big(s(m)\big) = s(1 + m) = 1 + s(m).$$
  Logo, $s(m) \in B$. Pelo princípio de indução finita, temos que $B = A$.

  Portanto, $s(m) = m + 1$ e $s(m) = 1 + m$, ou seja, $m + 1 = 1 + m$.

$\blacksquare$

Note que denotamos por 0 o elemento de A, que não é sucessor de nenhum outro elemento de A e denotamos por 1 o sucessor de 0. Continuando este raciocínio, definimos:

$s(1) = 2\ (dois), s(2) = 3\ (três), s(3) = 4\ (quatro),$ e assim por diante.

Esta é a notação indo-arábica na base dez para os elementos de A. Dessa forma, A é da forma
$$\left\{0, s(0), s\big(s(0)\big), s\Big(s\big(s(0)\big)\Big), s\bigg(s\Big(s\big(s(0)\big)\Big)\bigg), \ldots\right\} = \{0,1,2,3,4, \ldots\}.$$

já que o sucessor de um elemento em A também pertence a A.

Definição 4: O conjunto A será denotado por $\mathbb{N}$ e será chamado de *conjunto dos números naturais*.

Assim, a adição em $\mathbb{N}$ é definida da seguinte forma:

- $1 + 1 = 1 + s(0) = s(1 + 0) = s(1) = 2;$
- $1 + 2 = 1 + s(1) = s(1 + 1) = s(2) = 3$
- $1 + 3 = 1 + s(2) = s(1 + 2) = s(3) = 4$

  e assim por diante.

  Vejamos as seguintes propriedades da adição de números naturais.

Teorema 1: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$;
2. Existência de elemento neutro: $m + 0 = 0 + m = m$, isto é, 0 é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{N}$.
3. Comutatividade: $m + n = n + m$;
4. Lei do cancelamento: $m + p = n + p \;\Rightarrow\; m = n$.

Demonstração:
1. Considere o conjunto

$$B = \{p \in \mathbb{N}; m + (n + p) = (m + n) + p\}.$$

Provaremos pelo Princípio de Indução Finita que $B = \mathbb{N}$.

- Veja que $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$, assim $0 \in B$.
- Seja $k \in B$, ou seja, $m + (n + k) = (m + n) + k$. Queremos provar que $s(k) \in B$.
  $(m + n) + s(k) = s\big((m + n) + k\big)$, por definição da função sucessor,
  $s\big((m + n) + k\big) = s\big(m + (n + k)\big)$, por hipótese,
  $s\big(m + (n + k)\big) = m + s(n + k)$, pela definição da função sucessor,
  $m + s(n + k) = m + (n + s(k))$, novamente pela definição da função sucessor.
  Logo, $(m + n) + s(k) = m + \big(n + s(k)\big)$, ou seja, $s(k) \in B$.
  Portanto, $B = \mathbb{N}$ e assim $m + (n + p) = (m + n) + p$ para quaisquer $m, n, p \in \mathbb{N}$.

2. Pela Definição 2 sabemos que $m + 0 = m$. Provemos agora que $0 + m = m$. Considere o conjunto $C = \{m \in \mathbb{N}; 0 + m = m\}$. Mostremos que $C = \mathbb{N}$.

- Por definição $0 + 0 = 0$, assim $0 \in C$.
- Seja $k \in C$, ou seja, $0 + k = k$. Mostremos que $s(k) \in C$. Veja que
  $$0 + s(k) = s(0 + k) = s(k),$$
  ou seja, $s(k) \in C$. Portanto $C = \mathbb{N}$, e assim $m + 0 = 0 + m = m$.

3. Considere o conjunto

$$D = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m\},$$

para $n \in \mathbb{N}$ fixado. Provemos que $D = \mathbb{N}$.

- Pelo item 2. sabemos que $0 + n = n + 0 = n$, assim $0 \in D$.
- Seja $k \in D$, ou seja, $k + n = n + k$. Queremos mostrar que $s(k) \in D$. Note que
  $$n + s(k) = s(n + k) = s(k + n) = (k + n) + 1.$$

  Pelo item 1. Sabemos que $(k + n) + 1 = k + (n + 1)$, daí

$n + s(k) = k + (n + 1) = k + (1 + n)$, pela Proposição 1.

Novamente pelo item 1. Podemos concluir que

$$n + s(k) = k + (1 + n) = (k + 1) + n = s(k) + n,$$

ou seja, $n + s(k) = s(k) + n$, e assim, $s(k) \in D$. Portanto, $D = \mathbb{N}$.

4. Considere o conjunto

$$E = \left\{p \in \mathbb{N}; m + p = n + p \ \Rightarrow \ m = n\right\}.$$

Provemos que $E = \mathbb{N}$.

- $m = m + 0$ e $n = n + 0$. Assim, se $m + 0 = n + 0$, então $m = n$, ou seja, $0 \in E$.
- Seja $k \in E$, ou seja, $m + k = n + k \ \Rightarrow \ m = n$. Mostremos que $s(k) \in E$. Veja que

$$\begin{aligned} m + s(k) = n + s(k) \ &\Rightarrow \ s(m + k) = s(n + k) \\ &\Rightarrow \ m + k = n + k \ \text{ pela injetividade de S} \\ &\Rightarrow m = n \text{ pela hipótese da indução} \end{aligned}$$

Logo, $m + s(k) = n + s(k) \ \Rightarrow \ m = n$, ou seja, $s(k) \in E$.

Portanto, $E = \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

1.5.4 Multiplicação em ℕ

Vamos definir agora a operação de multiplicação, que será denotado por “·”, que também é a mesma apresentada no ensino fundamental, porém definida de forma diferente.

Definição 5: Dado $m \in \mathbb{N}$, definimos recursivamente:

- $m \cdot 0 = 0$;
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Para representarmos a multiplicação $m \cdot n$, usaremos a notação de justaposição mn.

Proposição 2: Para qualquer $m \in \mathbb{N}$, temos $0 \cdot m = 0$.

Demonstração: Consideremos o conjunto $B = \{m \in \mathbb{N}; 0 \cdot m = 0\}$. Mostremos que $B = \mathbb{N}$.

- $0 \cdot 0 = 0$, por definição, assim $0 \in B$.
- Seja $k \in B$, ou seja, $0 \cdot k = 0$. Queremos provar que $s(k) \in B$. Note que

$$0 \cdot s(k) = 0 \cdot (k+1) = 0 \cdot k + 0 = 0 \cdot k = 0.$$

Logo, $s(k) \in B$ e assim, $B = \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Vejamos as seguintes propriedades da multiplicação de números naturais.

Teorema 2: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Existência do elemento unidade: $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$;
2. Distributiva da multiplicação em relação à adição: $m(n+p) = mn + mp$;
3. Associatividade: $m(np) = (mn)p$;
4. Comutatividade: $mn = nm$.

Demonstração:

1. Veja que $m \cdot 1 = m \cdot (0+1) = m \cdot 0 + m = m$. Mostremos agora que $1 \cdot m = m$.

   Considere o conjunto $B = \{m \in \mathbb{N}; 1 \cdot m = m\}$. Mostremos que $B = \mathbb{N}$.

   - $1 \cdot 0 = 0$, por definição, e assim $0 \in B$.
   - Seja $k \in B$, ou seja, $1 \cdot k = k$. Queremos provar que $s(k) \in B$.

   $$1 \cdot s(k) = 1 \cdot (k+1) = 1 \cdot k + 1 = k + 1 = s(k).$$

   Logo, $s(k) \in B$ e assim $B = \mathbb{N}$.

2. Considere o conjunto

   $$C = \{p \in \mathbb{N}; m(n+p) = mn + mp\},$$

   com $m, n \in \mathbb{N}$ fixos. Queremos mostrar que $C = \mathbb{N}$.

   - $m(n+0) = mn$ e $mn + m \cdot 0 = mn$, assim $m(n+0) = mn + m \cdot 0$, ou seja, $0 \in C$.
   - Seja $k \in C$, ou seja, $m(n+k) = mn + mk$. Queremos mostrar que $s(k) \in C$.

   $$\begin{aligned} m\big(n + s(k)\big) &= m\big(n + (k+1)\big) \\ &= m\big((n+k)+1\big) \\ &= m(n+k) + m \cdot 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (mn + mk) + m \cdot 1 \\
&= mn + (mk + m) \cdot 1 \\
&= mn + m(k + 1) \\
&= mn + ms(k)
\end{aligned}
$$

Logo $s(k) \in C$ e assim $C = \mathbb{N}$.

3. Considere o conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{N}; m(np) = (mn)p\},$$

com $m, n \in \mathbb{N}$ fixos. Queremos mostrar que $D = \mathbb{N}$.

- $m(n \cdot 0) = m \cdot 0 = 0$ e $(mn) \cdot 0 = 0$, assim, $m(n \cdot 0) = (mn) \cdot 0$, ou seja, $0 \in D$.
- Seja $k \in D$, ou seja, $m(nk) = (mn)k$. Queremos mostrar que $s(k) \in D$.

$$
\begin{aligned}
m\big(n \cdot s(k)\big) &= m\big(n \cdot (k + 1)\big) \\
&= m(nk + n) \\
&= m(nk) + mn \\
&= (mn)k + mn \\
&= (mn)(k + 1) \\
&= (mn) \cdot s(k)
\end{aligned}
$$

Logo, $s(k) \in D$ e assim $D = \mathbb{N}$.

4. Considere o conjunto

$$E = \{n \in \mathbb{N}; mn = nm\},$$

com $m \in \mathbb{N}$ fixo. Queremos mostrar que $E = \mathbb{N}$.

- Por definição $m \cdot 0 = 0$ e pela Proposição 2 temos também que $0 \cdot m = 0$. Logo $m \cdot 0 = 0 \cdot m$, ou seja, $0 \in E$.
- Seja $k \in E$, ou seja, $mk = km$. Mostremos que $s(k) \in E$.

$$
\begin{aligned}
m \cdot s(k) &= m(k + 1) \\
&= mk + m \cdot 1 \\
&= km + 1 \cdot m \\
&= (k + 1)m \\
&= s(k) \cdot m
\end{aligned}
$$

Logo, $s(k) \in E$ e assim $E = \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

1.5.3 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

A ideia que temos no ensino fundamental é que 0 é menor que 1, que por sua vez é menor que 2, e assim por diante. Essa relação de ordem existe no conjunto dos números naturais e é possível formalizar esta ideia intuitiva.

Vejamos relação de ordem que torna o conjunto dos números naturais um conjunto ordenado.

Definição 5: Considere a relação R em $\mathbb{N}$ é definida por $(m, n) \in R$ se, e somente se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Proposição 3: A relação R da Definição 5 é uma relação de ordem.

Demonstração:

1. Reflexiva: Dado $m \in \mathbb{N}$, existe $p = 0 \in \mathbb{N}$ tal que $m = m + 0$. Logo $(m, m) \in R$.

2. Antissimétrica: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $(m, n) \in R$ e $(n, m) \in R$. Queremos provar que $m = n$.

   - $(m, n) \in R$ implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. *(1)*
   - $(n, m) \in R$ implica que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + q$. *(2)*

   Substituindo *(1)* em *(2)*, temos

   $$m = (m + p) + q \;\Rightarrow\; m = m + (p + q) \;\Rightarrow\; p + q = 0.$$

   Mostremos que $p = q = 0$. Suponhamos que $p \neq 0$. Então p é sucessor de algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $p = s(n) = n + 1$.
   Portanto,

   $$0 = p + q = (n + 1) + q = (1 + n) + q = 1 + (n + q) = s(n + q),$$

o que é um absurdo, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural. Substituindo $p = 0$ em (1) vemos que $m = n$.

3. Transitiva: Sejam $m, n, l \in \mathbb{N}$ com $(m, n) \in R$ e $(n, l) \in R$. Queremos provar que $(m, l) \in R$.

- $(m, n) \in R$ implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. (3)
- $(n, l) \in R$ implica que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $l = n + q$. (4)

Substituindo (3) em (4) vemos que

$$l = (m + p) + q = m + (p + q).$$

Como $p + q = r \in \mathbb{N}$, reescrevendo a igualdade acima temos:

$$l = m + r$$

com $r \in \mathbb{N}$, ou seja, $(m, l) \in R$.

$\blacksquare$

Definição 6: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e R a relação de ordem da Definição 5. Se $(m, n) \in R$, diremos que m é menor ou igual a n e passaremos a escrever

$$m \leq n.$$

Observação: Se $m \leq n$ mas $m \neq n$ diremos que m é menor que n e denotaremos por $m < n$.

Enunciaremos, sem demonstração, a Lei da Tricotomia dos números naturais: O interessado pode consultar o Machado, G. M. (2014)

Teorema 3 (Tricotomia): Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ temos que uma, e somente uma, das relações seguintes ocorre:

1. $m < n$;
2. $m = n$;
3. $n < m$.

A ordem é coerente com as operações de soma e produto no seguinte sentido.

Proposição 4: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes propriedades:

1. $m \leq n \Leftrightarrow m + p \leq n + p$;
2. $m \leq n \Leftrightarrow mp \leq np$, com $p \neq 0$.

O interessado na demonstração da proposição anterior, pode consultar o Machado, G. M. (2014)

Munido deste resultado, agora podemos provar a Lei do cancelamento para a multiplicação de números naturais.

Teorema 4: Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ com $p \neq 0$ tais que $mp = np$, então $m = n$.

Demonstração: Suponhamos que $m \neq n$. Pela Tricotomia, devemos ter $m < n$ ou $n < m$. Em qualquer um dos dois casos, pelo item 2. da Proposição 4 teríamos que $mp < np$ ou $np < mp$, o que contradiz a hipótese de que $mp = np$. Portanto devemos ter $m = n$.

$\blacksquare$

Definição 7: Dado um conjunto ordenado A, dizemos que $a \in A$ é um menor elemento de A se $a \leq x$, para todo $x \in A$.

Proposição 5: Dado um conjunto ordenado A que possui um menor elemento, então este menor elemento é único e chamado de elemento mínimo de A, que será denotado por $\min A$.

Demonstração: Sejam a e b os menores elementos de A. Como a é um menor elemento de A, então $a \leq x$, para todo $x \in A$, em particular para $x = b$, ou seja,

$$a \leq b.$$

Agora, como b é um menor elemento de A, então $b \leq x$, para todo $x \in A$, em particular para $x = a$, ou seja,

$$b \leq a$$

Como R é uma relação de ordem, e assim antissimétrica, devemos ter $a = b$, portanto o menor elemento quando existe é único.

Finalmente, agora podemos enunciar e provar o Princípio da Boa Ordem do conjunto dos números naturais.

Teorema 5 (Princípio da Boa Ordem em $\mathbb{N}$): Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Demonstração: Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e considere

$$M = \{n \in \mathbb{N}; n \leq x, \forall x \in S\}.$$

Claramente $0 \in M$. Como $S \neq \emptyset$, seja $s \in S$. Veja que $s + 1 \notin M$, pois $s + 1$ não é menor ou igual a s. Como $s + 1 \in \mathbb{N}$, vemos que $M \neq \mathbb{N}$ e assim deve existir $k \in M$ de forma que $k + 1 \notin M$, pois caso contrário deveríamos ter $M = \mathbb{N}$ pelo Princípio de Indução Finita.

Afirmação: k é o menor elemento de S.

De fato, como $k \in M$, então $k \leq x$, para todo $x \in S$. Para mostrarmos que k é o menor elemento de S, nos resta então mostrar que $k \in S$.

Suponhamos que $k \notin S$, assim devemos ter que $k + 1 \leq x$, $\forall x \in S$, o que implicaria que $k + 1 \in M$, o que é um absurdo, pela escolha de k.

Portanto, $k \in S$ e assim mostramos que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

. $\blacksquare$

CAPÍTULO 02:

PROPOSTAS DE CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL, ANOS INICIAIS, USANDO A SEQUÊNCIA DE FEDATHI

As atividades apresentadas aqui são para os alunos do Ensino Fundamental anos iniciais, abrangendo turmas do segundo ao quarto ano, cada aula da sequência possui cerca de trinta a quarenta minutos de duração, uma vez que depende da turma em que se for trabalhar.

Assim, levando em consideração a importância para o desenvolvimento dos conceitos sobre a construção do número natural, notadamente o conceito de correspondência, recomenda-se aos docentes, antes de começar as atividades sugeridas por essa sequência didática, que eles trabalhem com a criança de maneira mais sólida.

Logo, o docente pode vir a incitar as crianças a concretizarem correspondências em meio as brincadeiras e em meio as atividades, por exemplo, recomendando que entreguem um lápis para cada criança. Estas atividades incitam a utilização da correspondência em circunstâncias legítimas de sala de aula, incialmente do corpo e dos objetos sólidos do que fazem parte do dia a dia das crianças.

Para tanto, o docente necessita entender que, conforme Piaget (1975), a correspondência termo a termo, ou igualmente versada como correspondência biunívoca, trata-se de um procedimento em que cada elemento do primeiro conjunto irá corresponder a um elemento do segundo conjunto. Um exemplo clássico de correspondência termo a termo, trata-se do ato de colocar uma meia em cada pé. Assim, em síntese, conforme Mott (2011, p.135):

> [...] corresponder constitui pautar objetos de duas ou mais coleções, fazendo assim corresponder a cada objeto de uma coleção com outro objeto de outra coleção como se almeje, ou cada objeto de uma coleção a diversos objetos de outra coleção, ou também, diversos objetos de uma coleção a um único objeto de outra coleção como se almeje.

Deste modo, nota-se que a correspondência é de suma importância para a construção do conceito de número, visto que a criança necessita entender que, ao falar que tem cinco dedos na mão, por exemplo, está correspondendo o numeral cinco a uma quantidade representada em seus dedos.

Portanto, almeja-se nas sequências didáticas dessa unidade, beneficiar a utilização da correspondência entre quantidade e numeral, além de oferecer as crianças períodos de reflexão, com a finalidade de oportunizar as crianças a assimilação do conceito de correspondência. Também, recomenda-se ao docente, oportunizar as crianças períodos aos quais os próprios possam fazer a construção dos materiais de atividades, como os jogos, por exemplo.

Assim, irão se familiarizar com as características dos materiais, e também poderão utilizá-los em casa e com outros amigos. Os objetivos se aludem aqui a: construir a noção de correspondência; explorar o conceito de classificação; ampliar o pensamento lógico; resolver situações problemas; trabalhar com quantidades; favorecer o uso da contagem. Já os conteúdos, estes se aludem a: correspondência; classificação; quantidade; contagem; ordem lógica.

Para isso, iremos utilizar a Teoria Fedathi desenvolvida pelo grupo *Fedathi* da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, que incide em uma proposta metodológica direcionada para o ensino da Matemática, trata-se de um procedimento em que o docente concretiza seu trabalho com fundamento na estruturação de um preceptorado, e esse, por sua vez, trata-se de um conjunto de todas as relações admissíveis que podem ajudar na prática docente. E isto acontece ainda na elaboração da aula pelo docente (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

Ramos (2009, p. 57) sugere que, “dentro da Teoria de *Fedathi*, estas relações são compartilhadas, quando na aula se aproveitam de materiais didáticos, ou ideias entre docentes e educandos, e até mesmo pela interação dos ambientes”. Mesmo em uma circunstância em que existam diversos educandos, as relações entre o docente e o grupo partem de momentos únicos entre o docente e um educando de cada vez.

Assim, na Sequência *Fedathi*, o docente é quem desenvolve o preceptorado, de maneira que possa atender ao grupo e às diferenças de cada educando. Aqui, o ensino incide na realização do preceptorado. Com isto, o docente precisa planejar a aula de tal forma que o que se ambiciona instruir seja verdadeiramente aprendido. Pois, o docente precisa assegurar que todos os educandos compreendam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no transcorrer da tarefa (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008). Assim sendo, a prática docente na percepção da Teoria de *Fedathi* desenvolve-se no planejamento da aula, e não em sua realização.

Na Teoria de *Fedathi*, encontra-se a Sequência *Fedathi*. Essa, por sua vez, incide em uma sequência didática direcionada para o ensino da Matemática, estando fundamentada em Lakatos, bem como no entendimento intuicionista de Brouwer. Sua ideia básica trata-se de admitir que o educando desenvolva atividades com maior liberdade, de maneira que o docente intervenha em certas ocasiões para que a proposta da atividade não seja deixada de lado. A Sequência *Fedathi* exibe quatro fases, como pode ser visto a seguir (CAMARGO, 2008).

1ª Fase – Apresentação ou tomada de posição: em cada oficina, exibe-se problemas inicialmente da transposição didática para cada grupo dos indivíduos abrangidos na pesquisa. A circunstância proposta deve ser relacionada com o saber a ser instruído. As regras da aula e as atividades igualmente são definidas nesta fase, despontando assim o contrato didático consolidado (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

De acordo com Ramos (2009, p. 103), "este contrato didático supracitado se alude às regras que conduzem a quase totalidade do funcionamento da educação escolar, em seus mais diferentes níveis". Em uma conjuntura de sala de aula, esse contrato constitui condições que precisam ser consideradas pelo docente e pelos educandos.

2ª Fase – Debruçamento ou maturação: aqui, os indivíduos envolvidos com a pesquisa desenvolvem atividades sem a interferência docente. Nesta etapa, os docentes expõem seus argumentos e raciocínios. A finalidade aqui trata-se fazer com que aos próprios pensem, tentem, errem e trabalhem de maneira cooperativa (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

Assim, de acordo com Ramos (2009, p. 104), "tendo sido garantida, perante o primeiro momento, o entendimento dos discípulos sobre as atividades que irá concretizar, o docente advém a cumprir uma função mais de retaguarda". Portanto, compete-lhe buscar entender de que maneira o trabalho dos educandos ocorre, bem como oferecer o apoio que for sendo imprescindível. No caso ao qual os educandos atuam em grupo, as interações que se geram entre eles se mostram definitivas na direção que a investigação irá tomar.

No momento em que se propõe um trabalho de investigação, acredita-se que os educandos possam, de uma forma mais ou menos consistente, aproveitar os diversos procedimentos que distinguem a atividade investigativa em Matemática. Como já se sabe, alguns destes procedimentos são: a exploração e reformulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, também, a justificação de suposições e avaliação do trabalho (SMOLE; DINIZ, CÂNDIDO, 2008)

3ª Fase – Solução: ocorre posteriormente a atividade feita e as ideias formalizadas e confrontadas. A finalidade aqui constituída trata-se da sistematização e a organização do conteúdo. Este momento é tido como relevante no sentido de que as respostas possam ser colacionadas, admitindo os grupos confrontar as ideias adaptando aceitação ou desacordo dos resultados adquiridos em cada um deles. Portanto, busca-se aqui despontar na construção do conhecimento os erros e os acertos, valorizando assim todas as respostas, involuntariamente de estarem certas ou erradas (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

Isso porque, o sucesso de uma investigação depende igualmente, tal como de qualquer outra proposta do docente, do ambiente da aprendizagem que se estabelece dentro da sala de aula. Portanto, torna-se importante que o educando se sinta à vontade e lhe seja oferecido tempo para expor questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao docente quanto aos seus colegas. Também, o educando precisa sentir que as suas ideias são valorizadas e que se espera que as controverta com os colegas, não sendo imprescindível a validação frequente por parte do docente (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

4ª Fase – Prova: nesta última fase da mediação pedagógica, as ideias propostas são revisadas e formalizadas. Dentro da Teoria de *Fedathi*, o ato de ensinar se encontra conexo com a concepção de condições e probabilidades de aprendizagem através da sequência didática apropriadamente transposta. Sendo assim, a função que o docente desempenha demanda que esse entenda plenamente a didática do conteúdo em questão, gerando assim uma aula de caráter mais investigativo (TOLEDO; TOLEDO, 2009).

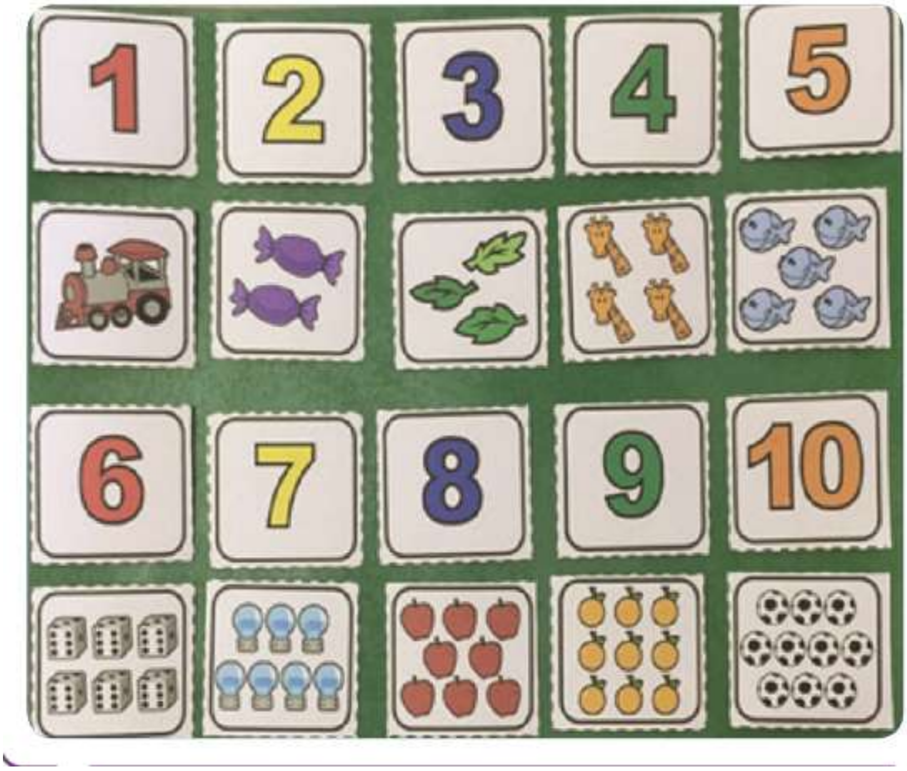
Seguindo os pressupostos descritos acima, abaixo iremos propor algumas atividades que são baseadas nas 4 etapas da sequência de Fedathi, o que poderá contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos sobre os números naturais.

2.1 Jogo da Memória de Números

Esta sequência didática é fundamentada nos relatórios das atividades concretizadas em meio as duas primeiras edições do projeto de extensão, com o título de “A Matemática na Educação Infantil”. Assim, procura-se nessa sequência trabalhar com o conceito de correspondência um a um, classificação, comparação visual e ordem lógica, através de um jogo da memória de numerais (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Esse jogo possui como finalidade corresponder as cartas que possuem a representação do algarismo com a carta que possui representação da quantidade de objetos reminiscente aquele algarismo. Por exemplo, a carta com o algarismo “um” irá se corresponder com a carta que tem a figura do trem, como mostra a Figura 1 (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Figura 1 - Jogo da Memória de Números



Fonte: Berton e Itacarambi (2009)

Para a composição do jogo, torna-se imprescindível os seguintes materiais: jogo da memória de números; papel cartão; cola; tesoura. Inicialmente dos materiais mencionados para elaborar o jogo, é necessário seguir os seguintes procedimentos: colar sobre o papel cartão a cartela do jogo da memória de números; recortar cada cartela do jogo da memória de numerais. Para começar o jogo, pode-se solicitar que os alunos criem duplas, e também solicitar aos mesmos que definam quem começará a jogada (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

1ª Etapa

Posteriormente ao posicionamento das crianças, o docente pode vir a colocar sobre a mesa as cartas do jogo da memória todas viradas para cima e embaralhadas, e pode também realizar perguntas aos alunos referentes as figuras. Estas perguntas possuem por finalidade despertar nos alunos a probabilidade de juntar cartas de algarismo com carta de quantidades (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Caso os alunos não entendam, o docente pode recomendar para ele fazer a contagem das girafas. Mesmo assim, caso a criança não consiga entender a correspondência entre as cartas de algarismos com as cartas de quantidade, não será admissível aplicar a atividade, mas, caso ela compreenda, então o docente pode prosseguir (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

2ª Etapa

Nessa etapa, o docente pode explicar as regras do jogo aos seus alunos (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

- Cada criança apenas poderá virar duas cartas em cada jogada;
- Apenas formará um par, caso a carta que representa o algarismo se corresponder com a carta que representa a quantidade de objetos reminiscente aquele algarismo, por exemplo, a carta com o algarismo um irá se corresponder com a carta que tem a figura do trem;
- Caso as cartas não se correspondam, a criança precisará deixá-las viradas para baixo no mesmo local;
- Caso forme um par, o aluno precisará retirar as cartas da mesa e guardá-las para si;
- O jogo acaba quando não restar cartas sobre a mesa;
- Ganhará a partida o aluno que tiver o maior número de pares.

3ª Etapa

Nesta etapa, o docente pode vir a colocar todas as cartas sobre a mesa viradas para baixo, solicitando aos seus alunos que comecem a jogada. Nessa exata ocasião, o docente precisa ter atenção e questionar os seus alunos sobre suas opções. Assim, o docente pode observar se os alunos conseguem fazer a correspondência entre as cartas, ou se estão somente fazendo por tentativa e erro (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

2.2 Bingo Dos Números

Esta sequência didática é fundamentada nos relatórios das atividades feitas em meio as duas primeiras edições do projeto de extensão denominado de “A Matemática na Educação Infantil.” Para tanto, procura-se nessa sequência trabalhar o conceito de correspondência um a um, através de um jogo de bingo de numerais, como mostra a Figura 2 (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Figura 2 - Bingo Dos Números

Fonte: Berton e Itacarambi (2009)

Para a elaboração e desenvolvimento deste jogo, torna-se imprescindível que se possua os seguintes materiais: cartelas do jogo; fichas com números de um a nove;

papel cartão; marcadores (podendo ser tampa de garrafa descartáveis); cola e tesoura (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Inicialmente dos materiais mencionados para confeccionar o jogo, são imprescindíveis acompanhar os seguintes procedimentos: colar sobre o papel cartão a cartela do jogo; recortar cada cartela; recortar as fichas dos numerais. Para principiar a partida, recomenda-se solicitar que os alunos continuem em suas mesas (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

1ª Etapa

Posteriormente ao posicionamento dos alunos, o docente deve colocar sobre a mesa as cartelas do bingo de numerais, podendo ainda questionar os alunos sobre o que elas podem dizer sobre as cartelas. Tal questionamento pode auxiliar na averiguação de que se as crianças conseguem notar que nas cartelas estão representando alguns números, e as concernentes quantidades que eles representam. Caso os alunos não entendam a cartela, o docente pode vir a explicar, por exemplo, que tem a imagem de três trens, e, abaixo dela, o algarismo três, e assim por diante (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Caso o aluno não consiga entender a correspondência entre os algarismos com as quantidades, o docente pode requerer que ele faça a contagem das figuras sobre a cartela. Assim, realizadas estas considerações, o docente pode vir a explicar as regras do jogo (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

- Cada criança receberá uma cartela contendo uma sequência de números dessemelhantes;
- O docente irá sortear um número entre um e nove, caso o aluno tenha esse número em sua cartela, ele precisará colocar um marcador sobre esse número;
- Caso o aluno não tenha esse número, ele não irá realizar a marcação;
- O jogo acaba quando um aluno vir a concluir completamente a sua cartela.

Referente a segunda regra supracitada, ressalta-se que o docente pode escolher por exibir o número sorteado, ao somente falar.

2ª Etapa

Nessa etapa, o docente pode vir a fazer o sorteio do primeiro número, sendo imprescindível que se repita o número diversas vezes caso o docente escolha somente falar. Caso o docente almeje exibir o número, recomenda-se que faça o número no tamanho de uma folha A4, pois, isto facilita a visualização para os alunos. Logo, o docente pode vir a questionar por qual objeto a quantidade é representada (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Do mesmo modo, o docente pode vir a repetir essa etapa até que algum aluno consiga concluir toda a cartela. Nos sorteios, o docente pode analisar quais alunos conseguem encontrar os números, quais metodologias eles usam para isto, por exemplo, se usam a contagem, se realizam comparações entre o número que se exibiu em referente aos números contidos na cartela que elas têm. Além disto, pode-se examinar aqueles alunos que conseguem identificar o número somente através da oralidade (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

2.3 Jogo Das Argolas

Esta sequência didática aqui apresentada é fundamentada nos relatórios das atividades feitas em meio as duas primeiras edições do projeto de extensão chamado de “A Matemática na Educação Infantil”. Assim, procura-se nessa sequência trabalhar com o conceito de correspondência um a um, o desenvolvimento da coordenação motora, as noções de cores, bem como a classificação através de um jogo de argolas, como mostra a Figura 3 (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Figura 3 - Jogo Das Argolas

Fonte: Berton e Itacarambi (2009)

Esse jogo incide em lançar uma argola sobre as garrafas e remover a quantidade de fichas na cor que corresponde da garrafa. Para a elaboração do jogo, torna-se imprescindível o uso dos seguintes materiais: dez garrafas descartáveis; pedrinhas de decoração para vasos de plantas ou areia; números de 1 a 10; papel dupla face de cores distintas; fichas coloridas para contagem; tesoura; fita adesiva (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Assim, inicialmente dos materiais supracitados para a elaboração do jogo, são imprescindíveis seguir os seguintes passos: colocar uma quantidade pequena de pedras ou areia dentro das garrafas descartáveis, para assim evitar que as garrafas caiam; colocar sobre a dupla face com a cor de preferência o molde que corresponde ao número um, por exemplo, riscar com um lápis e em seguida recortar; colar com fita adesiva um número desigual sobre a superfície de cada garrafa descartável, cada um com uma cor dessemelhante; recortar cerca de quinze fichas do tamanho de um quadrado de 3 cm de cada cor (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Para começar o jogo, pode-se solicitar que os alunos montem uma fila, uma posteriormente a outra, atrás de uma marca de saída pré-determinada pelo docente, tendo-se uma distância de três metros da marca de lançamento. Recomenda-se ao docente colocar as garrafas agrupadas a uma distância de 40 cm da marca de lançamento (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

1ª Etapa

Antes de se dar início a partida, o docente precisa explicar as regras do jogo (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

- O aluno pode vir a sair da marca de saída e ir andando até a marca de lançamento, não podendo ele extrapolar essa marca;
- Ao chegar à marca de lançamento, o aluno pode vir a lançar uma argola sobre as garrafas;
- Cada aluno tem direito a três lançamentos por jogada, caso acerte uma garrafa, precisa pegar a quantidade de fichas na cor que se encontra representada pelo número que se encontra na superfície da garrafa;
- Caso o aluno erre, ele deverá voltar para o fim da fila para tentar outra vez;
- Ganha o jogo o aluno que obter o maior número de acertos em três rodadas.

Referente a esta última regra supracitada, o docente pode estabelecer outros critérios, dependendo do envolvimento dos alunos, e do nível de dificuldade que os alunos exibem na realização da atividade (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

2ª Etapa

Nessa etapa, o docente pode vir a requerer dos alunos, que um de cada vez, se dirijam até a marca de lançamento para jogar a argola sobre as garrafas. O docente pode vir a deixar antecipadamente as fichas sobre uma mesa divididas por cor. Caso o aluno acerte a garrafa, o docente então deve solicitar que o mesmo vá até a mesa e pegue a quantidade de fichas na cor que está representada pelo número que se localiza na superfície da garrafa (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2008)

Caso o aluno tenha realizado somente a correspondência entre o número e a quantidade, portanto, não notou a cor que estava representada no número sobre a garrafa, o docente pode questionar se as fichas têm a mesma cor do número que está sobre a garrafa, e como o aluno sabe.

Em meio aos lançamentos, o docente pode vir a analisar quais alunos conseguem acertar as garrafas, e quais metodologias eles empregam para isto. Igualmente, é admissível notar quais alunos já conseguem fazer a correspondência entre algarismo e quantidade, além de identificar quais números os alunos exibem maior dificuldade para corresponder suas quantidades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve como objetivo realizar reflexões referentes as metodologias de construção do conjunto dos números naturais, bem como propor propostas referentes ao ensino e aprendizagem dos mesmos no Ensino Fundamental, para tal fizemos um percurso onde apresentamos o conceito de números naturais formalmente, embora seja diferente do usado no ensino fundamental, e em seguida utilizamos a sequência de Fedathi para propor as atividades visando o ensino do mesmo.

As atividades aqui propostas pretendem auxiliar o professor na construção do conceito de número natural no ensino fundamental anos iniciais, uma vez que, nessa faixa etária os estudantes estão em construção do pensamento matemático, assim utilizando-se de jogos e atividades lúdicas pode contribuir para esse desenvolvimento de forma efetiva, o que fará com que ele compreenda o conceito de número natural.

Portanto, o docente necessita saber, de forma clara e manifesta, que esse trabalho precisa ser começado ainda no ensino fundamental anos iniciais, prolongando-se por todo o Ensino Fundamental, já que que os educandos apenas conseguem compreender o sistema posicional depois dos dez anos, e, por isto, torna-se de suma importância lembrar que o docente necessita possuir uma formação em educação Matemática, para assim estar ciente desses fatos e fazer o melhor por esses educandos.

Assim, as propostas aqui apresentadas são apenas algumas de várias outras atividades que podem contribuir para a construção do conceito de número natural e espera-se que esse trabalho possa contribuir para que outras pessoas possam desenvolver atividades com esse cunho, auxiliando os estudantes nesse propósito.

REFERÊNCIAS

BERTON, I. da C. B; ITACARAMBI, R. R. **Números, brincadeiras e jogos.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

CAMARGO, M. **As centopeias e seus sapatinhos.** 21ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPOS, E. G. J. **As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros de alunos do Ensino Fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos 5221 professores.** Dissertação de Mestrado em Educação - Universidade Católica Dom Bosco. Campo Grande, 2007.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do ensino da Matemática.** São Paulo, SP: Cortez, 2011.

FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora da Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

FIORENTINI, D; OLIVEIRA, A. T. C. C. **O lugar das Matemáticas na licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas.** Bolema, vol. 27, nº 47, 2013.

GARCIA, C. M. **Formação de professores: para uma mudança educativa.** Porto: Porto Editora, 1999.

GARNICA, A. V. M. **Um ensaio sobre as concepções de professores de Matemática: possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa.** Educação e Pesquisa, vol. 34, nº 3, 2008.

KLÜSENER, R. **Ler e Escrever: Compromisso de todas as áreas.** Porto Alegre: Editora da Universidade, 2001.

LA ROSA, J. de. **Psicologia e Educação: O significado de aprender.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2006.

LARA, I. C. M. **Jogando com a matemática: na educação infantil e nos anos iniciais.** 2ª ed. São Paulo-SP: Rêspel, 2011.

LOPES, A. R. L. V; TREVISOL, M. T. C; PEREIRA, P. S. (Org.) **Formação de professores em diferentes espaços e contextos**. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2011.

MACHADO, G. M. **A construção dos números.** Trabalho de Conclusão de Curso – UFSCar, 2014.

MALTA, I. **Sobre um Método não Tradicional para Aprender Cálculo.** In: **História e Tecnologia no Ensino de Matemática.** Vol. 01. Rio de Janeiro: IME - UERJ, 2004.

MOLINA, M. C. **Análises de Práticas contra-hegemônicas na formação de Educadores: reflexões a partir do Curso de Licenciatura em Educação do Campo.** 2014.

MOTT, O. de B. **A revolta dos números.** 11ª ed. São Paulo: Paulinas, 2011.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vigotsky a Educação Matemática.** 7ª ed. São Paulo, Ed. Papirus. 2006.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.** Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

PEREIRA, C. C. M. **A formação matemática de professores polivalentes em início de carreira nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação - Universidade São Francisco. Itatiba, 2012.

PIAGET, J. A. **A gênese do número na criança.** Rio de Janeiro. Zahar, 1975.

PONTES. E. A. S. **Refletindo a Educação frente aos desafios da contemporaneidade.** Maceió: IFAL, 2013.

RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações: uma proposta criativa para o ensino da Matemática nos primeiros anos.** São Paulo: Ática, 2009.

SADOVSKY, P. **Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática.** Revista Nova Escola. São Paulo. Ed. Abril, 2007.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I; CÂNDIDO, P. **Cadernos do Mathema: jogos de matemática de 1º a 5º ano.** Ensino Fundamental. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TOLEDO, M. B. de A; TOLEDO, M. de A. **Teoria e prática de matemática: como dois e dois.** Volume único. São Paulo: FTD, 2009.

VISEU, F. **A formação do professor de Matemática, apoiado por um dispositivo de intervenção virtual no estágio pedagógico.** Braga: CIEd. Universidade do Minho, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1998.