Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Ações de Z_2^k com o conjunto de pontos fixos conexo e a propriedade CP

Renato Monteiro de Moraes

orientador: *Pedro Luiz Queiroz Pergher*

São Carlos
2021

Ações de Z_2^k com o conjunto de pontos fixos conexo e a propriedade CP

Renato Monteiro de Moraes

orientador: *Pedro Luiz Queiroz Pergher*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Renato Monteiro de Moraes, realizada em 27/10/2021.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar)

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos (UFSCar)

Prof. Dr. Dirk Toben (UFSCar)

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (USP)

Prof. Dr. Ketty Abaroa de Rezende (UNICAMP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À minha família.

"...Because it's all for a much larger purpose than any semblance of happiness that immediate gratification provides. Reaching your goal, well that's just pure bliss."

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos, por sempre me incentivarem.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFSCar que contribuíram para minha formação. Em especial ao Prof. Pedro Luiz Queiroz Pergher não só pela paciência, dedicação e seriedade com a qual conduziu este trabalho, mas também pelo professor excepcional que é, com suas aulas intuitivas e inspiradoras.

Aos meus amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Abstract

It is well known that if $\phi : G \times M^m \to M^m$ is a smooth action of a compact Lie group on a closed smooth manifold, then its fixed point set $F_\phi = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$ is a disjoint union of closed submanifolds of M^m, where F^i denotes the union of i-dimensional components of F_ϕ. In this way, given a compact Lie group G and a union of closed smooth manifolds $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, we can ask ourselves if exists such a G-action defined on a closed smooth manifold M^m whose fixed point set is F. In this work, we discuss this problem for the cases where $G = \mathbb{Z}_2$ with $F = P(m,n) \cup \{point\}$, here $P(m,n)$ denoting a Dold manifold (see 2.10) and $\{point\}$ is a unique point; and $G = \mathbb{Z}_2^k$ with $F = F^n$ or $F = F^n \cup F^{n-1}$ with F^n and F^{n-1} being connected. Here, $\mathbb{Z}_2^k$ is considered as the group generated by k commuting involutions $T_1, \ldots, T_k$.

Another question is concerning the CP property: more specifically, we say that a closed smooth manifold F^n satisfies the CP property (compatible with the point) if there exists an involution $T : M^m \to M^m$ whose fixed point set is $F^n \cup \{point\}$. In chapter 3 we prove that the Dold manifolds $P(2^t - 2, 1)$ and $P(2, 2^s - 1)$ satisfy the CP property for all $t, s > 1$. On the other hand, we will see that $P(m,n)$ do not satisfies CP for certain values of m and n (see the Introduction for details). This property was introduced in [3], where several correlated results were obtained.

In [7] Stong and Kosniowisky showed that if the fixed point set of an involution (M^m, T) has only n-dimensional components and $m > 2n$, then (M^m, T) bounds equivariantly. In the same work, they proved that, if $m = 2n$, then (M^m, T) is equivariantly cobordant to the twist involution $(F^n \times F^n, \tau)$ where $\tau(x,y) = (y,x)$. In [16] Pergher extended this result for $\mathbb{Z}_2^k$-actions (M^m, ϕ) whose fixed point set F^n is connected. More specifically, he showed that, under these fixed point set conditions, if $m > 2^k n$, then (M^m, ϕ) bounds equivariantly, and if $m = 2^k n$, then (M^m, ϕ) is equivariantly cobordant to the $\mathbb{Z}_2^k$-twist (see definition 2.101). In [24] Stong realized the classification of all cobordism classes of involutions (M^m, T) whose fixed point set has only n-dimensional components and $m = 2n - 1$. In [18] Pergher extended this result for $\mathbb{Z}_2^2$-actions (M^m, ϕ) whose fixed point set F^n is connected, with $m = 4n - 1$ and $m = 4n - 2$. In chapter 4 we extend this work of Pergher for $\mathbb{Z}_2^k$-actions by determining all possible cobordism class of $\mathbb{Z}_2^k$-actions whose fixed point set F^n is connected and $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$.

The fixed-data of a $\mathbb{Z}_2^k$-action (M^m, ϕ) fixing F, denoted by $(F, \{\xi_\rho\})$, is F with a list of

$2^k - 1$ vector bundles over F, where the vector bundles ξ_ρ are obtained by a decomposition of the normal bundle of F in M^m. In [6], P. Pergher and F. Figueira showed the following result: let (M^m, ϕ) be a $\mathbb{Z}_2^2$-action with fixed-data $(F^n; \xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}) \cup (F^{n-1}; \mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3})$, and suppose that there are at least two vector bundles in $\{\xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}\}$ that have dimension greater than n, and at least one μ_ρ has dimension greater than $n-1$. Then (M^m, ϕ) bounds equivariantly. In that paper, the authors proposed the following generalization for $\mathbb{Z}_2^k$-actions:

Conjecture: Let (M, ψ) be a smooth $\mathbb{Z}_2^k$-action with fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$. Suppose that at least 2^{k-1} $\xi_{\rho' s}$ over F^n have dimension greater than n and at least one μ_ρ has dimension greater than $n-1$. Then (M, ψ) bounds equivariantly.

This is the main result of chapter 5 of this thesis. But we achieved the following improvement of the above conjecture: the condition that at least one μ_ρ has dimension greater than $n-1$ can be removed.

Resumo

É conhecido o fato que se $\phi : G \times M^m \to M^m$ é uma ação suave de um grupo de Lie compacto em uma variedade suave e fechada, então seu conjunto de pontos fixos $F_\phi = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$ é uma união disjunta de subvariedades fechadas de M^m, em que F^i denota a união das componentes de dimensão i de F_ϕ. Com isso, fixados G e uma união de variedades fechadas $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, podemos perguntar se existe uma ação de G em uma variedade fechada M^m cujo conjunto de pontos fixos é F. Nesta tese, discutiremos este problema para os casos em que $G = \mathbb{Z}_2$ com $F = P(m,n) \cup \{ponto\}$, $P(m,n)$ denotando uma variedade de Dold (vide 2.10) e $\{ponto\}$ representa o espaço constituído por um único ponto; e $G = \mathbb{Z}_2^k$ com $F = F^n$ ou $F = F^n \cup F^{n-1}$ com F^n e F^{n-1} conexas. Neste contexto, $\mathbb{Z}_2^k$ é definido como o grupo gerado por k involuções comutantes $T_1, \ldots, T_k$, então sua ação em uma variedade fechada M^m equivale a ação de k involuções comutantes $T_1, \ldots, T_k : M^m \to M^m$; em particular, uma ação de $\mathbb{Z}_2$ em M^m se resume a uma única involução $T : M^m \to M^m$.

Outros tipos de questões que serão tratadas são relativas à propriedade CP. Especificamente, dizemos que uma variedade fechada F^n satisfaz a propriedade CP (compatível com o ponto) se existe uma involução $T : M^n \to M^n$ cujo conjunto de pontos fixos é $F^n \cup \{ponto\}$. Neste trabalho provaremos que as variedades de Dold $P(2^t - 2, 1)$ e $P(2, 2^s - 1)$ satisfazem a propriedade CP para quaisquer $t, s > 1$. Veremos também alguns casos em que $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade CP, para certos m e n; vide a Introdução desta tese para maiores detalhes. Tal conceito foi introduzido em [22], onde vários resultados correlatos foram obtidos.

Em [7], Stong e Kosniowisky provaram que se (M^m, T) é uma involução cujo conjunto de pontos fixos só possui componentes de dimensão n e $m > 2n$, então (M^m, T) borda equivariantemente. Além disso, nesse mesmo trabalho eles provaram que, se $m = 2n$, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante à involução twist $(F^n \times F^n, \tau)$, onde $\tau(x, y) = (y, x)$. Em [16], Pergher estendeu este resultado para ações de $\mathbb{Z}_2^k$, (M^m, ϕ), cujo conjunto de pontos fixos F^n é conexo e n dimensional, ao provar que, em tais condições, se $m > 2^k n$ então (M^m, ϕ) borda equivariantemente, e se $m = 2^k n$, então (M^m, ϕ) é equivariantemente cobordante a ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist (vide Definição 2.101). Em [24] Stong realizou a classificação das involuções (M^m, T) cujo conjunto de pontos fixos só possui componentes de dimensão n, e onde $m = 2n - 1$. Em [18], Pergher estendeu este resultado para $\mathbb{Z}_2^2$-

ações (M^m, ϕ) cujo conjunto de pontos fixos F^n é conexo, n-dimensional, com $m = 4n-1$ e $m = 4n-2$. Neste trabalho, estenderemos esse resultado de Pergher para $\mathbb{Z}_2^k$-ações; vamos classificar as ações de $\mathbb{Z}_2^k$ cujo conjunto de pontos fixos F^n é conexo, n dimensional, e $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$. Consideramos este o resultado mais importante desta tese.

O fixed-data de uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ (M^m, ϕ) fixando F é F munido de uma lista de $2^k - 1$ fibrados sobre F, denotado por $(F, \{\xi_\rho\})$, em que os fibrados ξ_ρ são obtidos por uma determinada decomposição do fibrado normal de F em M^m. Em [6] P. Pergher e F. Figueira provaram o seguinte resultado: seja (M^m, ϕ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data $(F^n; \xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}) \cup (F^{n-1}; \mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3})$, suponha que dois fibrados na lista $\{\xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}\}$ tenham dimensão maior que n e pelo menos um fibrado na lista $\{\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}\}$ tem dimensão maior que $n-1$. Então (M^m, ϕ) borda equivariantemente. No final do artigo, os autores propuseram a seguinte generalização deste resultado, para $\mathbb{Z}_2^k$-ações:

Conjectura: Seja (M, ψ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$. Suponha que 2^{k-1} fibrados sobre F^n tenham dimensão maior que n e exista um fibrado sobre F^{n-1} com dimensão maior que $n-1$. Então (M, ψ) borda equivariantemente.

Esta conjectura proposta por Pergher e Figueira será provada no capítulo 5, com a melhoria da mesma sendo obtida por remover a hipótese de existir pelo menos um fibrado sobre F^{n-1} que tenha dimensão maior que $n-1$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em qualquer categoria, um problema básico é classificar os objetos a menos de equivalências e determinar invariantes efetivos e computáveis para distinguir as classes de equivalência. No caso das variedades diferenciáveis, este problema não é solúvel porque, para qualquer grupo G com presentação finita, é possível construir uma variedade $M(G)$ de dimensão 4 cujo grupo fundamental é G, e de tal modo que $M(G)$ e $M(H)$ são difeomeomorfas se, e somente se, G e H são grupos isomorfos. Porém não é possível solucionar o problema da palavra, o qual consiste em determinar quando dois grupos finitamente presentados são isomorfos, portanto da mesma forma é impossível classificar essa parte das variedades de dimensão 4, e com mais razão todas as variedades de dimensão 4. A teoria de cobordismo consiste em introduzir, na categoria das variedades suaves, uma relação de equivalência mais fraca que a relação de difeomorfismo.

Dizemos que uma variedade M^m suave e fechada borda se existir uma variedade compacta W^{m+1} cujo bordo é difeomorfo a M^m, e neste caso escrevemos $\partial W^{m+1} = M^m$. Pode-se provar que duas variedades difeomorfas são sempre cobordantes, ou seja, sob a ótica da teoria de cobordismo, podemos tratar duas variedades difeomorfas como sendo iguais. O motivo de trabalharmos apenas com variedades compactas é bem simples: caso não pedíssemos a compacidade de W^{n+1} na definição acima, qualquer variedade suave M^m bordaria, com $\partial(M^m \times [0, +\infty)) = M^m$. Além disso, o bordo de uma variedade compacta é sempre uma variedade compacta e sem bordo, ou seja, uma variedade fechada. Em suma, as variedades mais naturais para se fazer uma teoria de cobordismo não trivial são as variedades fechadas, eventualmente munidas de objetos adicionais, por exemplo, G-ações em M^m com G um grupo de Lie compacto, fibrados sobre M^m ou aplicações contínuas de M^m num espaço topológico fixado X.

Um resultado bem conhecido é o seguinte: seja $\phi : G \times M^m \to M^m$ uma ação suave de um grupo de Lie G compacto em uma variedade suave e fechada M^m. Então seu conjunto de pontos fixos $F_\phi = \{x \in M^m | g \cdot x = x, \text{para todo } g \in G\}$ é uma união disjunta $F = F^0 \cup \ldots \cup F^n$ de subvariedades de M^m; aqui, F^i denota a união das componentes de dimensão i. Este resultado nos permite levantar a seguinte questão: fixado um grupo de

Lie compacto G e uma união disjunta de variedades suaves e fechadas $F = F^0 \cup \ldots \cup F^n$, existe uma G-ação (M^m, ϕ) em uma variedade suave e fechada M^m de modo que $F_\phi = F$? Em caso afirmativo, é possível classificar, a menos de cobordismo de G-ações, tais ações que fixam F? Dizemos que uma G-ação (M^m, ϕ) borda se existir uma variedade suave e compacta W^{m+1} com $\partial(W^{m+1}) = M^m$ e uma G-ação em W^{m+1} cuja restrição ao bordo é G-difeomorfa a (M^m, ϕ). Novamente, aqui pode-se provar que a classe de G-ações G-difeomorfas a (M^m, ϕ) está sempre contida em sua classe de cobordismo, o que nos permite, neste contexto, tratar duas G-ações G-difeomorfas como sendo iguais (nesse caso estamos dizendo que o difeomorfismo é equivariante com respeito a G). Em [2], Conner e Floyd estudaram extensivamente o caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, ou seja, os pares (M^m, T) em que M^m é uma variedade suave e fechada e $T : M^m \to M^m$ é uma involução suave, e obtiveram ferramentas para a abordagem desta questão. Podemos dizer que a principal delas é a chamada *sequência exata de Conner e Floyd*. Basicamente, Conner e Floyd provaram que uma involução (M^m, T) fixando F borda se, e somente se, o fibrado normal $\eta \to F$ de F em M^m, chamado fixed-data da involução, borda como fibrado. Além disso, um fibrado vetorial η sobre uma variedade fechada F é o fixed-data de alguma involução se, e somente se, seu fibrado linha associado $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$ borda (ou fibrado linha de Hopf). Esses fatos são consequências da sequência de Conner e Floyd. Dizemos que um fibrado $\eta^k \to F^n$ borda quando existe uma variedade suave e compacta W^{m+1} com $\partial(W^{m+1}) = M^m$ e um fibrado $\Psi \to W^{n+1}$ cuja restrição ao bordo $\Psi|_{M^m}$ é equivalente a η^k (podemos tratar tais fibrados como iguais). A vantagem disso é que a classe de cobordismo de um fibrado vetorial $\eta \to F$ é completamente determinada por seus números de Whitney, ou seja, o problema de mostrar que uma involução (M^m, T) fixando F borda transforma-se num problema de cálculo de números de Whitney. Além disso, juntando este fato ao conhecimento da K-teoria real de F, torna-se plausível o problema da classificação de todas as classes de cobordismo $[M^m, T]$ de involuções que fixam F. Com esta abordagem, vários trabalhos foram bem sucedidos nesta direção:

(R1) Em [2] Conner e Floyd provaram que se $F = S^n \cup \{ponto\}$ então só existem involuções fixando F nos casos em que $n = 1, 2, 4$ ou 8, e em cada caso a involução é única a menos de cobordismo equivariante.

(R2) Em [13] Pergher estendeu o resultado acima para involuções fixando F no caso em que F é a união de um ponto com um produto arbitrário de esferas, determinando quais tais produtos unidos com um ponto são fixados por alguma involução (a quantidade é infinita, mas com bastante restrições).

(R3) Em [7] Stong e Kosniowsky provaram uma generalização do famoso Teorema de Boardman, em que se (M^m, T) é uma involução fixando F e $\dim(M^m) > \dfrac{5}{2}\dim(F)$, então (M^m, T) borda. Aqui, $\dim(F)$ é a dimensão da maior componente de F.

(R4) Ainda em [7], Stong e Kosniowsky provaram que se o conjunto de pontos fixos F

tem dimensão constante igual a n e $m > 2n$ então (M^m, T) borda, e se $m = 2n$, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante a involução twist em $F^n \times F^n$, que leva (x, y) em (y, x).

(R5) em [24] Stong obteve a classificação das involuções (M^m, T) cujo conjunto de pontos fixos F^n só possui componentes n-dimensionais e $m = 2n - 1$.

Note que, motivado pelos itens R1 e R2, surge a seguinte questão, proposta recentemente em [3]: seja F^n uma variedade suave e fechada. Existe involução (M^m, T) fixando $F^n \cup \{ponto\}$? Em caso afirmativo, dizemos que F^n satisfaz a propriedade CP (compatível com o ponto). Com isso, por [2] concluímos que S^n satisfaz a propriedade CP se, e somente se, $n = 1, 2, 4, 8$. Conforme acima citado, Pergher determinou em [13] quais produtos cartesianos de esferas satisfazem CP. Por outro lado, $\mathbb{R}P^n$ satisfaz a propriedade CP para todo $n \geq 1$: considere a involução $T : \mathbb{R}P^{n+1} \to \mathbb{R}P^{n+1}$ definida por $T[x_0, \ldots, x_{n+1}] = [-x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$. O conjunto de pontos fixos de $(\mathbb{R}P^{n+1}, T)$ é $\mathbb{R}P^n \cup \{ponto\}$. O mesmo é válido para espaços projetivos complexos e quaternionicos.

Neste trabalho, continuaremos o estudo deste problema, iniciado em [3], para o caso em que F é uma variedade de Dold $P(m, n)$ (vide 2.10). Em [3], os seguintes resultados foram obtidos:

Teorema 1.1. *$P(m, n)$ não satisfaz a propriedade CP nos seguintes casos:*

- $m \equiv 0 \ (mod\ 4)$ *com n ímpar,*
- $m = 2$ *com n par,*
- $m > 6$ *com n ímpar e $m < n$.*

Teorema 1.2. *Seja F^n uma variedade suave e fechada de dimensão n=1,2,4 ou 8. Então F^n satisfaz a propriedade CP.*

Em particular, $P(6, 1)$, $P(4, 2)$, $P(2, 3)$ e $P(2, 1)$ satisfazem a propriedade CP. Os seguintes casos de variedades de Dold $P(m, n)$ foram deixados em aberto:

- $m \equiv 0$ (mod 4) com n par,
- $m = 2$ e n ímpar com exceção de $P(2, 1)$ e $P(2, 3)$,
- $m = 6$ e n qualquer, com exceção de $P(6, 1)$,
- $m \equiv 2$ (mod 4), com n ímpar, $m > 6$ e $n < m$,
- $m \equiv 2$ (mod 4), com $m > 6$ e n par.

Neste trabalho, inicialmente, provaremos que no caso em que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ (e portanto $m \equiv 2(\text{mod } 4)$), se $P(m, n)$ satisfaz CP, então $m = 2$ ou $m = 6$. Posteriormente, concluiremos o caso em que $m = 2$, mostrando que $P(2, n)$ satisfaz CP se, e somente se, $n = 2^s - 1$ para algum $s \geq 1$. Já o caso em que $m = 6$ e $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ será eliminado, pois provaremos que, nestas condições, $P(m, n)$ não satisfaz CP. Completaremos também o caso em que $n = 1$, provando que $P(m, 1)$ satisfaz CP se e somente se $m = 2^t - 2$ para algum $t \geq 1$. Note que existem portanto resultados positivos e negativos para esta questão, para diferentes valores de m e n. Com isso, restarão os seguintes casos em aberto:

- $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $m > 6$ e $1 < n < m$,
- $m \equiv 0 \pmod 4$ com n par,
- $m \equiv 2 \pmod 4$ com $m > 6$ e n par.

No contexto de ações de $\mathbb{Z}_2^k$, consideramos o grupo $\mathbb{Z}_2^k$ como o grupo gerado por k involuções comutantes $T_1, \ldots, T_k$. Dessa maneira, dar uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ (M^m, ϕ) em uma variedade suave e fechada M^m equivale a dar k involuções comutantes em M^m. Assim como no caso de involuções, existe uma técnica no que se refere à abordagem de problemas de classificação de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ com algum tipo de conjunto de pontos fixos pré-fixado. Dada uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ϕ) fixando $F = F^0 \cup \ldots \cup F^n$, podemos associá-la ao objeto $(F, \{\xi_\rho\}_\rho) = (F^0, \{\xi_\rho^{(0)}\}_\rho) \cup \ldots \cup (F^n, \{\xi_\rho^{(n)}\}_\rho)$, em que cada lista de fibrados $\{\xi_\rho^{(i)}\}_\rho$ sobre F^i é obtida via uma específica decomposição do fibrado normal de F^i em M^m. $(F, \{\xi_\rho\}_\rho)$ é denominado o fixed-data de (M^m, ϕ), indexada no conjunto $Hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, de tal sorte que (M^m, ϕ) borda se, e somente se, $(F, \{\xi_\rho\}_\rho)$ borda simultaneamente (vide [23]). Além disso, uma lista de fibrados borda simultaneamente se, e somente se, todos os seus números de Whitney são nulos. Com esses fatos em mãos, Pergher obteve vários resultados interessantes. Em [16], Pergher estendeu o resultado do ítem (R4) para ações de $\mathbb{Z}_2^k$ provando que se o conjunto de pontos fixos de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ϕ) é conexo e n-dimensional e $m > 2^k n$, então (M, ϕ) borda equivariantemente. Além disso, se $m = 2^k n$, então (M^m, ϕ) é equivariantemente cobordante a ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist em $F^{2^k n}$. Em [18], usando a classificação das classes de cobordismo de involuções (M^{2n-1}, T) fixando F^n feita por Stong em [24], Pergher obteve a classificação de todas as classes de cobordismo de $\mathbb{Z}_2^2$-ações fixando F^n em que $m = 4n - 1$ e $m = 4n - 2$. Quando comecei a trabalhar com Pergher, ele me disse que a anos ele tinha uma conjectura de como estender esse resultado para $\mathbb{Z}_2^k$-ações, com o seguinte propósito: classificar as ações (M^m, ϕ) de $\mathbb{Z}_2^k$ fixando F^n conexa e com $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$, que seria a extensão natural do caso $k = 2$ para k qualquer. Também me disse que até então não tinha sido bem sucedido nas tentativas de obter uma tal classificação. Neste trabalho, resolvemos esta questão, e consideramos, como atrás mencionado, este o resultado mais relevante desta tese. Isso será feito no capítulo 4. Aqui vale fazer a seguinte observação, já encontrada anteriormente em artigos de Pergher: o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (M^m, T_1, T_2) fixando F^n é uma lista $(F^n, \xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3})$, em que $Hom(\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_2) - \{1\} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. É possível provar que qualquer permutação do fixed-data ainda é o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação (M^m, T_1', T_2'), obtida de (M^m, T_1, T_2) via um automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ definindo $T_1' = \sigma(T_1)$ e $T_2' = \sigma(T_2)$. Já o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação fixando F^n é uma lista de $2^k - 1$ fibrados $(F^n, \{\xi_\rho\})$. Portanto se $k \geq 3$ o número de permutações dos fibrados no fixed-data é sempre maior que o número de automorfismos de $\mathbb{Z}_2^k$, e com isso nem toda permutação do fixed-data de (M^m, ϕ) é necessariamente o fixed-data de uma (M^m, ϕ) via um automorfismo de $\mathbb{Z}_2^k$. Este agravante técnico torna o problema mais sofisticado.

Por fim, em [6] P. Pergher e F. Figueira provaram o seguinte resultado: seja (M^m, ϕ) uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação com fixed-data $(F^n; \xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}) \cup (F^{n-1}; \mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3})$, e suponha que dois fibrados na lista $\{\xi_{\rho_1}, \xi_{\rho_2}, \xi_{\rho_3}\}$ tem dimensão maior que n e pelo menos um fibrado na lista $\{\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}\}$ tem dimensão maior que $n - 1$; então (M^m, ϕ) borda equivariantemente. No final do artigo, os autores propuseram a seguinte generalização deste resultado para $\mathbb{Z}_2^k$-ações:

Conjectura: Seja (M, ψ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$. Suponha que 2^{k-1} fibrados sobre F^n tenha dimensão maior que n e exista um fibrado sobre F^{n-1} com dimensão maior que $n - 1$. Então (M, ψ) borda equivariantemente.

Provaremos esta conjectura no capítulo 5, com a melhoria em relação ao resultado de Pergher e Figueira de retirar a hipótese de existir pelo menos um fibrado sobre F^{n-1} que tenha dimensão maior que $n - 1$.

Capítulo 2

Preliminares

Neste trabalho, todas as variedades, ações e fibrados são de classe C^∞. Iremos supor que o leitor tenha conhecimentos básicos das teorias de homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de Stiefel-Whitney. Denotaremos por M^n uma variedade n-dimensional, e usaremos a notação ∂M^n para indicar o bordo de M^n. Por simplicidade, trataremos variedades difeomorfas, fibrados equivalentes e G-ações G-equivariantes como sendo iguais. Usaremos a expressão "variedade fechada"para indicar uma variedade compacta e sem bordo.

2.1 Cobordismo de Variedades

Definição 2.1. Dizemos que uma variedade fechada M^n borda se existir variedade compacta W^{n+1} tal que $\partial W = M^n$. Duas variedades M^n e N^n são cobordantes se $M^n \sqcup N^n$ borda.

Observação 2.2. Note que, se não pedíssemos a compacidade de W^{n+1} na definição acima, qualquer variedade fechada $M^n \neq \emptyset$ bordaria com $\partial(M^n \times [0, \infty))$, então esta exigencia é fundamental para que tal conceito não seja redundante. Além disso, o bordo de uma variedade compacta com bordo sempre é uma variedade compacta e sem bordo, ou seja, uma variedade fechada.

Proposição 2.3. *A relação de cobordismo entre variedades é uma relação de equivalência no conjunto das classes de difeomorfismo de variedades. Denotaremos por $[M^n]$ a classe de cobordismo de M^n.*

Denote por $\mathscr{N}_n$ o conjunto das classes de cobordismo de variedades de dimensão n. Podemos definir em $\mathscr{N}_n$ a operação $+ : \mathscr{N}_n \times \mathscr{N}_n \to \mathscr{N}_n$ por $[M^n] + [N^n] = [M^n \sqcup N^n]$, que torna $\mathscr{N}_n$ um grupo abeliano em que o elemento neutro é a classe de cobordismo das variedades n-dimensionais que bordam, a qual pode ser representada por exemplo pela classe de cobordismo da esfera n-dimensional $[S^n]$. Em $\mathscr{N}_n$, todo elemento tem ordem 2, pois $M^n \sqcup M^n$ é bordo de $M^n \times [0, 1]$. Usando a operação $+$ de cada $\mathscr{N}_n$, podemos definir uma operação + em $\mathscr{N}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{N}_n$ em que a soma de dois elementos com dimensões distintas é, por definição, sua soma formal. Em $\mathscr{N}_*$ podemos também definir o seguinte produto: dadas $[M^m] \in \mathscr{N}_m$ e $[N^n] \in \mathscr{N}_n$, definimos $[M^m] \cdot [N^n] = [M^m \times N^n]$. Denote por $\{ponto\}$ a variedade 0-dimensional formado por um único ponto. Temos a:

Proposição 2.4. *$\mathscr{N}_*$ munido das operações + e $\cdot$ é um anel graduado, comutativo, com unidade, em que $1 = [\{ponto\}]$. $\mathscr{N}_*$ é chamado anel de cobordismo não-orientado de Thom.*

2.1.1 Os números característicos de uma Variedade fechada

Sejam M^n uma variedade fechada, $z \in H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ e $x \in H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$. Sabemos, da teoria de homologia e cohomologia singular, que z é representada por um homomorfismo $z : S_n(M^n, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ em que $S_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ é o $\mathbb{Z}_2$-módulo gerado por todas as aplicações contínuas $\sigma : \Delta_n \to M^n$; aqui, Δ_n é o simplexo padrão n-dimensional; como x representa um elemento de $S_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, podemos considerar a evaluação $z(x)$, que é um elemento de $\mathbb{Z}_2$, ou seja, é igual a 0 ou 1. Pode-se provar que tal evaluação independe dos representantes das classes de cohomologia e homologia envolvidos. Como $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ para qualquer variedade fechada M^n, podemos denotar por $[M^n]_2$ o gerador de $H_n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, a qual é chamada classe fundamental de homologia de M^n com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$. Além disso, dado $z \in H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, como $[M^n]_2 \neq 0$, segue que $z([M^n]_2) = 0$ se, e somente se, $z = 0$.

Denote por $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ a classe de Stiefel-Whitney de M^n (ou seja, a classe tangencial). Então, para cada lista de inteiros positivos $(i_1, \ldots, i_k)$, com $i_1 + \ldots + i_k = n$, podemos considerar o produto cup $w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}$, o qual é um elemento de $H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$, e então podemos efetuar a evaluação

$$w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}([M^n]_2) \in \mathbb{Z}_2.$$

Definição 2.5. Seja M^n uma variedade fechada e $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ sua classe tangencial. Os números de Stiefel-Whitney de M^n, também chamados de números característicos de M^n, são todos os números da forma

$$w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}([M^m]_2)$$

em que $(i_1, \ldots, i_k)$ é uma partição de n, ou seja, são inteiros positivos, não necessariamente distintos, cuja soma é n.

Teorema 2.6. *Se uma variedade M^n borda, então todos seus números de Stiefel-Whitney são nulos.*

Demonstração. Vide [19]. □

Teorema 2.7. *Se todos os números de Stiefel-Whitney de uma variedade M^n são nulos, então M^n borda.*

Demonstração. Vide [26]. □

Em outras palavras, uma variedade M^n borda se, e somente se, todos seus números de Stiefel-Whitney forem nulos.

Dizemos que duas variedades M^n e V^n, com classes tangenciais $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ e $W(V^n) = 1 + u_1 + \ldots + u_n$, possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney, se

$$w_{i_1} \cdots w_{i_k}[M^n]_2 = u_{i_1} \cdots u_{i_k}[V^n]_2$$

para qualquer partição $(i_1, \ldots, i_k)$ de n. Juntando os dois teoremas anteriores, obtemos o:

Corolário 2.8. *Duas variedades M^n e V^n são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney.*

Exemplo 2.9. Vamos provar que $\mathbb{R}P^n$ borda se, e somente se, n é ímpar. Sabemos que a classe tangencial de $\mathbb{R}P^n$ é:

$$\begin{aligned} W(\mathbb{R}P^n) &= (1+\alpha)^{n+1} \\ &= \left(1 + \binom{n+1}{1}\alpha + \ldots + \binom{n+1}{n+1}\alpha^{n+1}\right) \\ &= \left(1 + \binom{n+1}{1}\alpha + \ldots + \binom{n+1}{n}\alpha^{n}\right) \end{aligned}$$

onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$. Se n é ímpar, então $n+1$ é par e portanto, pelo Teorema 2.86 (Teorema de Lucas), as classes tangenciais de $\mathbb{R}P^n$ nas dimensões ímpares são nulas. Então, como qualquer produto de classes tangenciais com dimensão n impar tem ao menos um fator impar, todos tais produtos são nulos. Então $\mathbb{R}P^n$ borda.

Por outro lado, se n é par, então novamente pelo Teorema de Lucas concluímos que $\binom{n+1}{n} = 1$, e portanto

$$w_n[\mathbb{R}P^n]_2 = \alpha^n[\mathbb{R}P^n]_2 = 1$$

, pois $\alpha^n \neq 0$ é o gerador de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$. Segue que $\mathbb{R}P^n$ não borda.

Exemplo 2.10. Vamos definir as famosas variedades de Dold, denotadas por $P(m,n)$, as quais serão utilizadas no capítulo 3, quando falarmos sobre a propriedade CP. Dados dois inteiros $m, n \geq 0$ definimos a variedade de Dold $P(m,n)$ por

$$P(m,n) = \frac{S^m \times \mathbb{C}P^n}{A \times C},$$

onde $A \times C : S^m \times \mathbb{C}P^n \to S^m \times \mathbb{C}P^n$ é definida por $A \times C(z, [w]) = (-z, [\overline{w}])$; aqui, $\overline{w}$ representa o complexo conjugado de w (obtido tomando o conjugado de cada coordenada de w). É conhecido que o anel de cohomologia de $P(m,n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ é dado por

$$H^*(P(m,n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[c,d]$$

quocientado pelas relações $c^{m+1} = 0$ e $d^{n+1} = 0$, onde $c \in H^1(P(m,n),\mathbb{Z}_2)$ e $d \in H^2(P(m,n),\mathbb{Z}_2)$. Sua classe tangencial também é conhecida, a saber

$$W(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}.$$

Agora, vamos mostrar que se n é ímpar, então $P(m,n)$ borda. Como n é ímpar, então $n+1$ é par e portanto, em $W(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1}$ só ocorrem potências pares de d. Denote, por um momento, $W(P(m,n)) = 1 + w_1 + \ldots + w_{m+2n}$. Então, para que fosse possível exibirmos um número característico não nulo de $P(m,n)$, precisaríamos que um produto de classes $w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_s}$ fosse igual a $c^m d^n$, pois este é o único elemento não nulo em $H^{m+2n}(P(m,n),\mathbb{Z}_2)$; mas isso é impossível pois n é ímpar e em $w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_s}$ só ocorrem produtos de potências pares de d.

Note que, nos exemplos acima, o problema de construir explicitamente uma variedade compacta W^{n+1} cujo bordo é $\mathbb{R}P^n$ (ou $P(m,n)$) ou de mostrar que não existe nenhuma tal variedade W^{n+1} se resumiram a simples cálculos de números de Stiefel-Whitney. Isso ilustra a força dos Teoremas 2.6 e 2.7. Em outras palavras, todo elemento de $\mathscr{N}_*$ é completamente determinado por seus números de Stiefel-Whitney.

Em [26] Thom determinou a estrutura de $\mathscr{N}_*$, com o seguinte resultado:

Teorema 2.11. *$\mathscr{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador x_n em cada dimensão $n > 1$, onde n não é da forma $2^t - 1$.*

Ainda em [26], Thom mostrou que os geradores pares de $\mathscr{N}_*$ podem ser representados por espaços projetivos $\mathbb{R}P^n$. Posteriormente, em [5] Dold introduziu as variedades de Dold $P(m,n)$, e mostrou que para cada r ímpar, com $r \neq 2^j - 1$, existe uma variedade de Dold de dimensão $r = m+2n$ que representa um gerador de $\mathscr{N}_n$. Em outras palavras, qualquer variedade que não borda é cobordante a uma união disjunta de produtos cartesianos de espaços projetivos e variedades de Dold.

2.2 Cobordismo singular

O conceito de variedade singular é definido a partir de um espaço topológico X, portanto, nesta seção, X denotará um espaço topológico fixado e ficará subentendido que todas as variedades singulares estarão definidas com respeito a esse X fixado. Este conceito foi introduzido por Conner e Floyd em [2]; trata-se de uma extensão da teoria de cobordismo de Thom.

Definição 2.12. Uma variedade singular em X é um par (M^n, f), onde M^n é uma variedade suave e fechada e $f : M^n \to X$ é uma aplicação contínua.

Definição 2.13. Dizemos que uma variedade singular (M^n, f) borda se existir uma variedade compacta com bordo W^{n+1} e uma aplicação contínua $F : W^{n+1} \to X$ de modo que

1. $\partial W^{n+1} = M^n$

2. $F|_{M^n} = f$

Neste caso, escrevemos $\partial(W^{n+1}, F) = (M^n, f)$.

Definição 2.14. Dizemos que duas variedades singulares de mesma dimensão (M^m, f) e (N^m, g) são cobordantes, se sua união disjunta $(M^m \sqcup N^m, f \sqcup g)$ borda como variedade singular.

E, como já era de se esperar, temos a seguinte:

Proposição 2.15. *A relação de cobordismo singular é uma relação de equivalência na coleção das variedades singulares. A classe de cobordismo de (M^m, f) será denotada por $[M^m, f]$.*

Denote por $\mathscr{N}_n(X)$ a coleção de todas as classes de cobordismo de variedades singulares n-dimensionais (M^n, f) em X e defina $\mathscr{N}_*(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{N}_n(X)$. Podemos definir duas operações em $\mathscr{N}_*(X)$ da seguinte maneira: dadas duas variedades singulares $[M^m, f], [N^m, g]$ de mesma dimensão, definimos $[M^m, f] + [N^m, g] = [M^m \sqcup N^m, f \sqcup g]$, e a soma entre duas variedades singulares de dimensão distintas é, por definição, sua soma formal. Por outro lado, sejam $[V^n] \in \mathscr{N}_*$ e $[M^m, f] \in \mathscr{N}_m(X)$. Definimos $[V^n] \cdot [M^m, f] = [V^n \times M^m, F]$, onde $F : V^n \times M^m \to X$ é definida por $F(x, y) = f(y)$. Com isso, temos o

Teorema 2.16. *Se X é um CW complexo finito em cada dimensão, então $(\mathscr{N}_*(X), +, \cdot)$ é um $\mathscr{N}_*$-módulo livre graduado, isomorfo a $H_*(X, \mathbb{Z}_2) \otimes \mathscr{N}_*$.*

Demonstração. Vide [2] □

Exemplo 2.17. Seja M^m uma variedade fechada e $\{ponto\}$ o espaço topológico constituído de um único ponto. Então $f : M^m \to \{ponto\}$ borda se, e somente se M^m borda. Em outras palavras, se X é um ponto, então $(\mathscr{N}_*(X))$ se reduz a $\mathscr{N}_*$, justificando porque a teoria de Conner e Floyd é efetivamente uma extensão da teoria de Thom.

Os números de Whitney de uma variedade singular

Seja (M^n, f) uma variedade singular em um espaço topológico X. Sabemos, da teoria de cohomologia, que f induz um homomorfismo $f^* : H^*(X, \mathbb{Z}_2) \to H^*(M^n, \mathbb{Z}_2)$. Denote por $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ a classe tangencial de M^n.

Definição 2.18. Nas condições acima, definimos os números de Whitney de (M^n, f) como todas as evaluações da forma

$$w_{i_1} \cdots w_{i_k} \cdot f^*(h)[M^n]_2$$

onde $h_j \in H^j(X, \mathbb{Z}_2)$ e os inteiros $i_1, \ldots, i_k, j$ formam uma partição de n.

A relação entre os números de Whitney de uma variedade singular (M^n, f) e sua classe de cobordismo é dada pelo seguinte resultado, provado por Conner e Floyd em [2], estendendo o famoso teorema de R. Thom.

Teorema 2.19. *Se X é um CW-complexo finito em cada dimensão, então a variedade singular (M^n, f) borda se, e somente se, todos os seus números de Whitney são nulos.*

Sejam $(M^n, f), (V^n, g)$ duas variedades singulares e denote as classes tangenciais de M^n e V^n por $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ e $W(V^n) = 1 + u_1 + \ldots + u_n$. Dizemos que (M^n, f) e (V^n, g) possuem os mesmos números de Whitney se

$$w_{i_1} \cdots w_{i_k} \cdot f^*(h_j)[M^n]_2 = u_{i_1} \cdots u_{i_k} \cdot g^*(h_j)[V^n]_2$$

para quaisquer $i_1, \ldots, i_k, h_j$ com $h_j \in H^j(X, \mathbb{Z}_2)$, onde $(i_1, \ldots, i_k, j)$ é uma partição de n. Uma consequência imediata do Teorema 2.19 é o:

Corolário 2.20. *Duas variedades singulares $(M^n, f), (V^n, g)$, sobre um CW-complexo X finito em cada dimensão, são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de Whitney.*

Veremos agora um exemplo interessante que decorre facilmente dos resultados vistos nesta seção.

Exemplo 2.21. Considere $Id : S^{n-1} \to S^{n-1}$ a aplicação identidade na esfera euclidiana n-dimensional. Vamos mostrar que não existe extensão contínua de Id para o disco D^n (esse resultado na verdade garante a validade do famoso Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). Na verdade, provaremos algo mais geral: seja W^{n+1} uma variedade compacta cujo bordo é M^n e $Id : M^n \to M^n$ a aplicação identidade. Então não existe $f : W^{n+1} \to M^n$ contínua com $f|_{M^n} = Id$.

Pelos resultados acima, basta mostrar que o elemento $[M^n, Id] \in \mathscr{N}_n(M^n)$ é não nulo, e portanto não borda. De fato, denote $\alpha = Id^*([M^n]_2)$. Então $\alpha \in H^n(M^n, \mathbb{Z}_2)$ é não nulo e portanto $\alpha([M^n]_2) \neq 0$. Mas isto é um número de Whitney de (M^n, Id), o qual portanto não borda como variedade singular.

2.3 Cobordismo de Fibrados

Definição 2.22. Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial k-dimensional sobre uma variedade fechada M^n. Dizemos que $\eta^k \to M^n$ borda se existir um fibrado vetorial k-dimensional $\xi^k \to W^{n+1}$, onde W^{n+1} é uma variedade compacta cujo bordo é igual a M^n e $\xi^k|_{M^n} = \eta^k$; aqui, $\xi^k|_{M^n}$ denota o fibrado ξ^k restrito a M^n. Nesse caso, denotaremos $\partial(\xi^k \to W^{n+1}) = \eta^k \to M^n$ ou simplesmente $\partial(\xi^k) = \eta^k$.

Definição 2.23. Dois fibrados $\eta^k \to M^n, \nu^k \to N^n$ são cobordantes se o fibrado união disjunta $(\eta^k \to M^n) \sqcup (\nu^k \to N^n)$ borda como fibrado.

Lema 2.24. *A relação de cobordismo entre fibrados vetoriais de mesma dimensão, sobre variedades fechadas de mesma dimensão, é uma relação de equivalência. Denotaremos por* $[\eta^k \to M^n]$ *a classe de cobordismo do fibrado* $\eta^k \to M^n$ *e por* $\mathscr{N}_{k;n}$ *a coleção de todas as classes de equivalência de fibrados vetoriais k-dimensionais sobre variedades fechadas n-dimensionais.*

Defina $\mathscr{N}_{*,k} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{N}_{n;k}$. Podemos então definir operações em $\mathscr{N}_{*,k}$ da seguinte forma: dados $[\eta^k \to M^m], [\nu^k \to N^m] \in \mathscr{N}_{k;m}$ e $[V^n] \in \mathscr{N}_n$, definimos:

$$[\eta^k \to M^m] + [\nu^k \to N^m] = [\eta^k \sqcup \nu^k \to M^m \sqcup N^m]$$

$$[V^n] \cdot [\eta^k \to M^m] = [p_2!(\eta^k) \to V^n \times M^m]$$

onde $p_2 : V^n \times M^m \to M^m$ denota a projeção na segunda coordenada e $p_2!(\eta^k)$ denota o pullback de η^k via p_2. E assim temos o

Teorema 2.25. $\mathscr{N}_{*,k}$ *munido das duas operações* $+$ *e* $\cdot$ *acima definidas tem estrutura de* $\mathscr{N}_*$*-módulo graduado.*

Sabemos, da teoria de fibrados, que existe o fibrado universal k-dimensional $\omega^k \to BO(k)$, onde $BO(k)$ é um CW-complexo finito em cada dimensão, o qual é chamado de espaço classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais, e tem a seguinte propriedade: se $\eta^k \to X$ é um fibrado k-dimensional sobre um espaço topológico paracompacto X, então existe uma aplicação contínua $f : X \to BO(k)$, tal que $f!(\nu^k) = \eta^k$, onde $f!(\nu^k)$ denota o pullback de ν^k por f; f é única a menos de homotopia e é denominada uma aplicação classificante para o fibrado $\eta^k \to X$. Esse fato é usado para provar o seguinte

Teorema 2.26. $\mathscr{N}_{*;k}$ *é isomorfo a* $\mathscr{N}_*(BO(k))$ *como* $\mathscr{N}_*$*-módulos.*

Demonstração. Dado $[\eta^k \to M^m] \in \mathscr{N}_{*,k}$, tome uma aplicação classificante $f : M^m \to BO(k)$ de $\eta^k \to M^m$. Então pode-se provar que a associação $\psi([\eta^k \to M^m]) = [(M^m, f)]$ define um isomorfismo de $\mathscr{N}_*$-módulos entre $\mathscr{N}_{*,k}$ e $\mathscr{N}_*(BO(k))$. □

2.3.1 Os números de Whitney de um fibrado

Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial. Denote por $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ e $W(\eta^k) = 1 + u_1 + \ldots + u_k$ a classe tangencial de M^n e a classe de Stiefel-Whitney do fibrado η^k, respectivamente. Com tais notações temos a:

Definição 2.27. Os números de Whitney do fibrado $\eta^k \to M^n$ são todas as evaluações da forma

$$w_{i_1} \cdots w_{i_r} u_{j_1} \cdots u_{j_s} [M^n]_2,$$

onde $(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s)$ é uma partição de n.

Juntando os Teoremas 2.19 e 2.26, obtemos o:

Teorema 2.28. *Um fibrado $\eta^k \to M^n$ borda se, e somente se, todos os seus números de Whitney são nulos.*

Demonstração. Seja $f : M^n \to BO(k)$ uma aplicação classificante para $\eta^k \to M^n$ e lembre-se que, nesse caso, o isomorfismo $\psi : \mathscr{N}_{*;k} \to \mathscr{N}_*(BO(k))$, por definição, leva $[\eta^k \to M^n]$ em $[f : M^n \to BO(k)]$. Sabemos que $H^*(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ é uma álgebra polinomial com um gerador $v_i \in H^i(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ em cada dimensão $1 \leq i \leq k$, o que significa que podemos escrever qualquer monômio em $H^*(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ como um produto $v_{j_1} \cdots v_{j_t}$. Se $[\eta^k \to M^n]$ borda, então $\psi[\eta^k \to M^n] = [f : M^n \to BO(k)] = 0$, o que ocorre se, e somente se, $w_{i_1} \cdots w_{i_s} f^*(h)[M^n]_2 = 0$ para todos $i_1, \ldots, i_r, h$, onde $h \in H^j(BO(k), \mathbb{Z}_2)$ para algum $0 \leq j \leq n$. Pela aditividade de f^*, podemos considerar apenas os casos em que h é um monômio do tipo $v_{j_1} \cdots v_{j_t}$ com $j = j_1 + \ldots + j_t$. Como $f : M^n \to BO(k)$ é aplicação classificante de $\eta^k \to M^n$ segue, pela teoria de classes caracteristicas de fibrados vetoriais, que $f^*(v_i) = u_i$, para todo i. Então $f^*(h) = f^*(v_{j_1} \cdots v_{j_s}) = u_{j_1} \cdots u_{j_s}$, como queríamos. □

Dizemos que dois fibrados $\eta^k \to M^n$ e $\eta'^k \to M'^n$ tem os mesmos números de Whitney se

$$w_{i_1} \cdots w_{i_r} u_{j_1} \cdots u_{j_s}[M^n]_2 = w'_{i_1} \cdots w'_{i_r} u'_{j_1} \cdots u'_{j_s}[M'^n]_2$$

para qualquer partição de n, $(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s)$, onde $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$, $W(M'^n) = 1 + w'_1 + \ldots + w'_n$, $W(\eta^k) = 1 + u_1 + \ldots + u_k$ e $W(\eta'^k) = 1 + u'_1 + \ldots + u'_k$.

Corolário 2.29. *Dois fibrados $\eta^k \to M^n$ e $\eta'^k \to M'^n$ são cobordantes se, e somente se, tem os mesmos números de Whitney.*

Exemplo 2.30. Considere o fibrado linha canônico (ou fibrado de Hopf) $\xi^1 \to S^1$. Sabemos, da teoria de classes caracteristicas, que a classe de Stiefel-Whitney de ξ^1 é $W(\xi^1) = 1 + \alpha$, onde α é o gerador de $H^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$. Isso nos permite considerar o número $u_1[S_1]_2 = \alpha[S^1]_2 \neq 0$, e portanto $\xi^1 \to S^1$ não borda como fibrado, apesar de S^1 bordar como variedade.

Exemplo 2.31. Considere novamente $\xi^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico sobre S^1 e $p_1 : S^1 \times S^1 \to S^1$ a projeção na primeira coordenada. Podemos considerar o pullback $p_1!(\xi^1)$ do fibrado ξ^1 via p_1, e com isso sabemos pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney que $W(p_1!(\xi^1)) = p_1^*(W(\xi^1)) = 1 + p_1^*(\alpha) = 1 + (\alpha_1 \times 1)$, onde α_1 é o gerador de $H^1(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}_2)$ correspondente à primeira cópia de S^1 e $\times$ é o produto cross. Como $W(S^1 \times S^1) = 1$, o único número de Stiefel-Whitney do fibrado $p_1!(S^1 \times S^1) \to S^1 \times S^1$ que podemos considerar é $(\alpha_1 \times 1)^2[S_1 \times S^1]_2$, e pela distributividade do produto cup em relação ao produto cross obtemos

$$(\alpha_1 \times 1)^2[S_1 \times S^1]_2 = \alpha_1^2[S^1]_2 \times 1[S^1]_2 = 0.$$

Portanto $p_1!(\xi^1)$ borda. De modo análogo pode-se provar que $p_2!(\xi^1)$ borda, onde $p_2 : S^1 \times S^1 \to S^1$ é a projeção na segunda coordenada.

2.4 Cobordismo simultâneo

Nesta seção veremos a noção de cobordismo simultâneo. Os objetos estudados serão denotados por $(M^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ ou $(M^n; \{\eta_i\}_{i=1}^k)$ e consistem de uma variedade suave e fechada munida de uma lista de fibrados vetoriais sobre ela; tais objetos são denominados de *listas de fibrados.*

Definição 2.32. Seja $(M^n; \eta_1^{r_1}, \ldots, \eta_k^{r_k})$ uma lista de fibrados vetoriais sobre uma variedade fechada e suave M^n. Dizemos que tal objeto borda simultaneamente se existir uma lista de fibrados $(W^{n+1}; \nu_1^{r_1}, \ldots, \nu_k^{r_k})$, onde W^{n+1} é uma variedade compacta, com bordo, cujo bordo é $\partial W^{n+1} = M^n$, e cada ν_i restrito a ∂W^{n+1} é igual a η_i. Nesse caso, denotaremos $\partial(W^{n+1}; \nu_1^{r_1}, \ldots, \nu_k^{r_k}) = (M^n; \eta_1^{r_1}, \ldots, \eta_k^{r_k})$.

Definição 2.33. Duas listas de fibrados $(V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ e $(M^n; \nu_1, \ldots, \nu_k)$ são simultaneamente cobordantes se sua união disjunta $(V^n \sqcup M^n; \eta_1 \sqcup \nu_1, \ldots, \eta_k \sqcup \nu_k)$ borda simultaneamente.

Note que, se duas listas $(V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ e $(M^n; \nu_1, \ldots, \nu_k)$ bordam simultaneamente, então os fibrados η_i e ν_i são cobordantes para todo $1 \leq i \leq k$, porém a recíproca não é verdadeira, ou seja, pode ocorrer de η_i ser cobordante a ν_i, para todo i, sem que as listas $(V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ e $(M^n; \nu_1, \ldots, \nu_k)$ sejam simultaneamente cobordantes. Esse fato será ilustrado no exemplo 2.40. Veja que, no cobordismo simultâneo, é exigido que a variedade compacta W^{n+1} que realiza o cobordismo entre V^n e M^n seja a mesma para toda a lista de fibrados; este fato pode não ocorrer quando o cobordismo de η_i e ν_i é realizado separadamente, para cada i.

Proposição 2.34. *O cobordismo simultâneo é uma relação de equivalência.*

Denotaremos por $[V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k]$ a classe de cobordismo simultâneo de $(V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ e usaremos a notação $\mathcal{N}_{n;r_1,\ldots,r_k}$ para indicar o conjunto das classes de cobordismo simultâneo de listas de k fibrados sobre variedades fechadas de dimensão n em que o fibrado na posição i tem dimensão r_i, para todo $1 \leq i \leq k$. Defina $\mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_k} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_{*;r_1,\ldots,r_k}$. Podemos definir

$$I^n : \mathcal{N}_{n;r_1,\ldots,r_k} \to \mathcal{N}_n(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$$

a aplicação que associa a cada lista $[(V^n; \eta_1, \ldots, \eta_k)]$ a variedade singular $[(V^n, f)]$, onde $f : V^n \to BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k)$ é definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$; aqui, para cada i, f_i é uma aplicação classificante para o fibrado vetorial $\eta_i^{r_i} \to V^n$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.35. *A aplicação* $I^n : \mathscr{N}_{n;r_1,\ldots,r_k} \to \mathscr{N}_n(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$ *é bijetora, para todo* $n \geq 0$*. Podemos estender* I^n *para* $I^* : \mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k} \to \mathscr{N}_*(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$ *a qual também é bijetora e usá-la para definir uma estrutura de* $\mathscr{N}_*$*-módulo em* $\mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k}$*, de modo que* I^* *seja um isomorfismo.*

Demonstração. O primeiro passo é mostrar que I^n é bem definida. Considere $(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k) \in \mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k}$. Se f_i e f_i' são duas aplicações classificantes distintas para η_i, sabemos da teoria de fibrados vetoriais que f_i e f_i' são homotópicas, e com isso concluímos que $f = (f_1, \ldots, f_k)$ é homotópica a $f' = (f_1', \ldots, f_k')$. Portanto $[M^n, f] = [M^n, f']$. Por outro lado, considere duas listas de fibrados $(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ e $(V^n, \nu_1, \ldots, \nu_k)$ simultaneamente cobordantes, e sejam f_i e g_i aplicações classificantes para η_i e ν_i respectivamente. Como as duas listas são cobordantes, existe $(W^{n+1}, \Theta_1, \ldots, \Theta_k)$, onde W^{n+1} é uma variedade compacta cujo bordo $\partial W^{n+1} = M^n \sqcup V^n$, $\Theta_i|_{M^n} = \eta_i$ e $\Theta_i|_{V^n} = \nu_i$ para todo i. Para cada i, podemos tomar uma aplicação classificante $F_i : W^{n+1} \to BO(r_i)$ para o fibrado Θ_i. Como $\Theta_i|_{M^n} = \eta_i$ e $\Theta_i|_{V^n} = \nu_i$, segue que $F_i|_{M^n}$ e $F_i|_{V^n}$ são aplicações classificantes para η_i e ν_i, respectivamente, e portanto $F_i|_{M^n}$ e $F_i|_{M^n}$ são homotópicas a f_i e g_i respectivamente. Segue que $[M^n, f] = [M^n, F|_{M^n}] = [V^n, F|_{V^n}] = [V^n, g]$, onde $F|_{M^n} = (F_1|_{M^n}, \ldots, F_k|_{M^n})$ e $F|_{V^n} = (F_1|_{V^n}, \ldots, F_k|_{V^n})$. Agora mostremos que I^n é injetora: sejam $\alpha_1 = [M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k]$ e $\alpha_2 = [V^n, \nu_1, \ldots, \nu_k]$ elementos de $\mathscr{N}_{n,r_1,\ldots,r_k}$ tais que $I^n(\alpha_1) = I^n(\alpha_2)$, e escreva $I^n[\alpha_1] = [M^n, f]$ e $I^n[\alpha_2] = [V^n, g]$, onde $f = (f_1, \ldots, f_k)$ e $g = (g_1, \ldots, g_k)$. Como $[M^n, f] = [V^n, g]$, existe variedade singular $(W^{n+1}, F = (F_1, \ldots, F_k))$ em $BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k)$ tal que W^{n+1} é compacta e $\partial(W^{n+1}, F) = (M^n, f) \sqcup (V^n, g)$.
Denote, para cada i, por Θ_i o pullback do fibrado universal de dimensão r_i via a aplicação $F_i : W^{n+1} \to BO(r_i)$. Com isso

$$\begin{aligned} \partial(W^{n+1}, \Theta_1, \ldots, \Theta_k) &= (M^n, \Theta_1|_{M^n}, \ldots, \Theta_k|_{M^n}) \sqcup (V^n, \Theta_1|_{V^n}, \ldots, \Theta_k|_{V^n}) \\ &= [(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k)] \sqcup [(V^n, \nu_1, \ldots, \nu_k)] \end{aligned}$$

pois, para cada i, $F_i|_{M^n}$ e $F_i|_{V^n}$ são aplicações classificantes para η_i e ν_i, respectivamente. Agora provemos a sobrejetividade de I^n: dado $[M^n, f = (f_1, \ldots, f_k)] \in \mathscr{N}_n(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$, denote por η_i o pullback via f_i do fibrado universal de dimensão r_i sobre $BO(r_i)$. Então, por definição, concluímos que $I^n([M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k]) = [M^n, f]$. □

Observação 2.36. Vamos descrever as operações induzidas pela aplicação $I^* : \mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k} \to \mathscr{N}_*(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$, com o fito de definir uma estrutura de $\mathscr{N}_*$-módulo em $\mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k}$. Denote por J^* a inversa de I^*. Dados $[M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k], [V^m, \nu_1, \ldots, \nu_k] \in \mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k}$ temos:

$$\begin{aligned} [M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k] + [V^m, \nu_1, \ldots, \nu_k] &= J^*(I^*([M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k]) + I^*([V^m, \nu_1, \ldots, \nu_k])) \\ &= J^*([M^m, f] + [V^m, g]) \\ &= J^*([M^m \sqcup V^m, f \sqcup g]) \end{aligned}$$

e como $I^*([M^m \sqcup V^m, \eta_1 \sqcup \nu_1, \ldots, \eta_k \sqcup \nu_k]) = [M^m \sqcup V^m, f \sqcup g]$ segue que

$$[M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k] + [V^m, \nu_1, \ldots, \nu_k] = [M^m \sqcup V^m, \eta_1 \sqcup \nu_1, \ldots, \eta_k \sqcup \nu_k]$$

Por outro lado, em relação à estrutura de $\mathscr{N}_*$-módulo de $\mathscr{N}_{*,r_1,\ldots,r_k}$, temos:

$$\begin{aligned}
[W^n][M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k] &= J^*([W^n] I^*([M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k])) \\
&= J^*([W^n][M, f]) \\
&= J^*([W^n \times M^m, f \circ p_2]),
\end{aligned}$$

onde $p_2 : W^n \times M^m \to M^m$ é a projeção na segunda coordenada. Como

$$I^*([W^n \times M^m, p_2!(\eta_1), \ldots, p_2!(\eta_k)]) = [W^n \times M^m, f \circ p_2]$$

segue que

$$[W^n][M^m, \eta_1, \ldots, \eta_k] = [W^n \times M^m, p_2!(\eta_1), \ldots, p_2!(\eta_k)].$$

2.4.1 Os números de uma lista de fibrados

De modo similar ao que fizemos nas seções anteriores, vamos definir os números de Whitney de uma lista de fibrados e mostrar sua utilidade no contexto do cobordismo simultâneo. Seja $(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ uma lista de fibrados e denote $W(M^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ e $W(\eta_i) = 1 + u_1^i + \ldots + u_{r_i}^i$ a classe tangencial de M^n e a classe de Stiefel-Whitney de cada η_i, respectivamente.

Definição 2.37. Com as notações acima, definimos os números de Whitney da lista de fibrados $(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ como todas as evaluações da forma

$$w_{i_1} \cdots w_{i_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} u^j_{i^j_1} \cdots u^j_{i^j_{s_j}} [M^n]_2,$$

onde $i_1 + \ldots + i_k + \sum_{j=1}^{k} (i^j_1 + \ldots i^j_{s_j}) = n$.

Teorema 2.38. *A lista $(M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k)$ borda se, e somente se, todos os seus números de Whitney são nulos.*

Para provar o Teorema acima, precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 2.39 (de Künneth)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos e $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ e $\beta_1, \ldots, \beta_q$ bases aditivas para $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ e $H^*(Y, \mathbb{Z}_2)$. Então o conjunto $\{\alpha_i \times \beta_j | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ é base aditiva de $H^*(X \times Y, \mathbb{Z}_2)$, onde $\alpha_i \times \beta_j$ significa o produto cross entre α_i e β_j.*

Demonstração do Teorema 2.38. Usando o isomorfismo $I^* : \mathscr{N}_{*;r_1,\ldots,r_k} \to \mathscr{N}_*(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$, visto no Teorema 2.35, temos $I^*([M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k]) = [M^n, f = (f_1, \ldots, f_k)]$, onde, para cada i, f_i é uma aplicação classificante para o η_i. Portanto $[M^n, \eta_1, \ldots, \eta_k] = 0$ se, e somente se, $[M^n, f] = 0$. Pelo Teorema 2.38 sabemos que (M^n, f) borda se, e somente se, todos seus números de Whitney

$$w_{i_1} \cdots w_{i_l} f^*(h)[M^n]_2 = 0$$

são nulos, onde h pode ser considerado como um elemento homogêneo de $H^p(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$ com $p + i_1 + \ldots + i_l = n$. Sabemos que $H^*(BO(r_i), \mathbb{Z}_2)$ é uma álgebra polinomial com um gerador $v_j^{(i)}$ em cada dimensão $1 \leq j \leq r_i$. Então, usando o Teorema de Küneth, segue que qualquer elemento homogêneo de $H^p(BO(r_1) \times \ldots \times BO(r_k))$ tem a forma

$$(v^1_{j_1^{(1)}} \cdots v^1_{j_{s_1}^{(1)}}) \times \ldots \times (v^k_{j_1^{(k)}} \cdots v^k_{j_{s_k}^{(k)}}).$$

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= w_{i_1} \cdots w_{i_l} f^*(h)[M^n]_2 \\ &= w_{i_1} \cdots w_{i_l} f_1^*(v^{(1)}_{j_1^{(1)}} \cdots v^{(1)}_{j_{s_1}^{(1)}}) \times \ldots \times f_k^*(v^{(k)}_{j_1^{(k)}} \cdots v^{(k)}_{j_{s_k}^{(k)}})[M^n]_2 \\ &= w_{i_1} \cdots w_{i_l} u^{(1)}_{j_1^{(1)}} \cdots u^{(1)}_{j_{s_1}^{(1)}} \cdot \ldots \cdot u^{(k)}_{j_1^{(k)}} \cdots u^{(k)}_{j_{s_k}^{(k)}}[M^n]_2, \end{aligned}$$

onde $u_j^{(i)}$ denota a j-ésima classe de Stiefel-Whitney de η_i. Isto conclui o resultado. □

Exemplo 2.40. Considere $\xi^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico sobre S^1, $p_1!(\xi^1) \to S^1 \times S^1$ e $p_2!(\xi^1) \to S^1 \times S^1$ respectivamente os pullbacks de ξ^1 via as projeções na primeira e na segunda coordenada, p_1 e p_2. Considere a lista de fibrados $(S^1 \times S^1, p_1!(\xi^1), p_2!(\xi^1))$. Vimos no Exemplo 2.31 que os fibrados $p_1!(\xi^1)$ e $p_2!(\xi^1)$ bordam como fibrados. Denote

$$W(p_1!(\xi^1)) = p_1^*(W(\xi^1)) = 1 + p_1^*(\alpha) = 1 + (\alpha_1 \times 1)$$

$$W(p_2!(\xi^1)) = p_2^*(W(\xi^1)) = 1 + p_2^*(\alpha) = 1 + (1 \times \alpha_2).$$

Então

$$(\alpha_1 \times 1) \cdot (1 \times \alpha_2)[S^1 \times S^1]_2 = \alpha_1 \times \alpha_2[S^1 \times S^1]_2 \neq 0$$

o que implica que a lista $(S^1 \times S^1, p_1!(\xi^1), p_2!(\xi^1))$ não borda simultaneamente. É portanto um exemplo de uma lista de fibrados que não borda simultaneamente constituída por fibrados que bordam individualmente.

2.5 Cobordismo de ações

Nesta seção, definiremos a relação de cobordismo de ações para qualquer grupo de Lie compacto G atuando em uma variedade suave e fechada M^n, e enunciaremos alguns resultados correlatos.

Definição 2.41. Sejam G um grupo de Lie compacto, M^n uma variedade suave e fechada e denote por e o elemento neutro de G. Uma ação de G em M^n, que denotaremos por (M^n, ψ), é uma aplicação suave $\psi : G \times M^n \to M^n$ que satisfaz

i) $\psi(e, m) = m$ para todo $m \in M^n$

ii) $\psi(g_1, \psi(g_2, m)) = \psi(g_1 g_2, m)$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $m \in M^n$.

Denotaremos $\psi(g, m) = g \cdot m$ ou simplesmente $\psi(g, m) = gm$.

Definição 2.42. Seja $\psi : G \times M^n \to M^n$ uma ação de G em M^n. Dados $m \in M^n$ e $g \in G$ dizemos que m é fixado por g se $\psi(g, m) = m$. No caso em que $\psi(g, m) = m$ para todo $g \in G$ dizemos que m é um ponto fixo da ação ψ. Denotaremos por F_ψ o conjunto de todos os pontos fixos da ação ψ, ou seja:

$$F_\psi = \{m \in M^n | \psi(g, m) = m \text{ para todo } g \in G\}$$

Definição 2.43. Dizemos que um conjunto $A \subset M^n$ é invariante pela ação $\psi : G \times M^n \to M^n$ se $\psi(g, a) \in A$ para quaisquer $(g, a) \in G \times A$. Em outras palavras, se $\psi(G \times A) \subset A$.

Um resultado de suma importância neste contexto, a respeito do conjunto de pontos fixos, é o seguinte:

Teorema 2.44. *Seja $\psi : G \times M^n \to M^n$ uma ação suave de um grupo de Lie G compacto em uma variedade fechada M^n. Então o conjunto de pontos fixos é uma união disjunta de subvariedades fechadas de M^n, $F_\psi = F^0 \cup \ldots \cup F^n$, onde cada F^i denota a união das componentes i-dimensionais de F_ψ.*

Observação 2.45. Todas as ações consideradas neste trabalho, salvo menção contrária, estão subentendidas como sendo suaves.

2.5.1 Cobordismo irrestrito

Definição 2.46. Dizemos que uma ação de $\psi : G \times M^n \to M^n$ borda equivariantemente se existir variedade compacta W^{n+1} e uma ação $\Psi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\Psi|_{G \times \partial M^n} = \psi$.

Definição 2.47. Dizemos que duas ações $\psi : G \times M^n \to M^n$ e $\psi' : G \times M'^n \to M'^n$ são equivariantemente cobordantes se sua união disjunta $(M^n \sqcup M'^n, \psi \sqcup \psi')$ borda como G-ação.

De modo análogo ao que vimos até aqui, temos:

Proposição 2.48. *A relação de cobordismo equivariante é relação de equivalência na coleção das G-ações em variedades fechadas. Denotaremos a classe de cobordismo de uma G-ação (M^n, ψ) por $[M^n, \psi]$ e o conjunto de todas as classes de cobordismo de G-ações em variedades fechadas de dimensão n por $I_n(G)$.*

Em $I_n(G)$ podemos definir a operação $+ : I_n(G) \times I_n(G) \to I_n(G)$ fazendo $[M^n, \psi] + [M'^n, \psi'] = [M^n \sqcup M'^n, \psi \sqcup \psi']$, a qual torna $I_n(G)$ um grupo abeliano de ordem 2, cujo elemento neutro é a classe das G-ações que bordam equivariantemente; um representante do elemento neutro é, por exemplo, qualquer M^n que borda munida da ação trivial de G. Dados $[V^n] \in \mathscr{N}_*$ e $[M^m, \psi] \in I_m(G)$, podemos definir o produto $[V^n] \cdot [M^m, \psi] = [V^n \times M^m, \Psi]$, onde $\Psi : G \times (V^n \times M^m) \to V^n \times M^m$ é definida por $\Psi(g, v, m) = (v, \psi(g, m))$. Definindo $I_*(G) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(G)$, podemos usar a soma em cada dimensão para definirmos uma soma em $I_*(G)$, e com isso temos a seguinte

Proposição 2.49. *$I_*(G)$ munido das operações $+$ e $\cdot$ acima definidas tem estrutura de $\mathscr{N}_*$-módulo graduado e é denominado o grupo de G-bordismo irrestrito não-orientado.*

2.5.2 Cobordismo livre

Em algumas situações é conveniente restringirmos nossa atenção a dois tipos particulares de ações, a saber:

Definição 2.50. Dizemos que uma ação $\psi : G \times M^n \to M^n$ é efetiva se o único elemento de G que atua como identidade em M^n for o elemento neutro $e \in G$. Em outras palavras, se valer a condição: $\psi(g, m) = m$ para todo $m \in M^n \Longrightarrow g = e$.

Definição 2.51. Dizemos que uma ação $\psi : G \times M^n \to M^n$ é livre se valer a condição: se $\psi(g, m) = m$ para algum $m \in M^n$, então $g = e$.

Note que toda G-ação livre é efetiva.

Definição 2.52. Dizemos que uma ação livre $\psi : G \times M^n \to M^n$ borda livremente se existir uma variedade compacta W^{n+1} e uma ação livre $\Psi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\Psi|_{G \times M^n} = \psi$.

Note que é possível duas ações livres bordarem como elementos de $I^*(G)$ mas não bordarem livremente, pois na definição de bordar livremente pede-se que a ação $\Psi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ que realiza o cobordismo seja livre.

Definição 2.53. Dizemos que duas ações livres $\psi : G \times M^n \to M^n$ e $\psi' : G \times M'^n \to M'^n$ bordam livremente se sua união disjunta $(M^n \sqcup M'^n, \psi \sqcup \psi')$ borda livremente.

Como já é de se esperar, temos a:

Proposição 2.54. *A relação de cobordismo livre é uma relação de equivalência na coleção das ações livres sobre variedades fechadas. Denotaremos a classe de cobordismo livre de (M^n, ψ) por $[M^n, \psi]_L$ e o conjunto de todas as classes de cobordismo livre de G-ações livres em variedades fechadas de dimensão n por $\mathscr{N}_n(G)$.*

De maneira análoga ao que fizemos em $I_*(G)$, podemos definir em $\mathcal{N}_*(G)$ as operações $+$ e $\cdot$ fazendo $[M^n,\psi]_L+[M'^n,\psi']_L=[M^n\sqcup M'^n,\psi\sqcup\psi']_L$ e $[V^n]\cdot[M^m,\psi]_L=[V^n\times M^m,\Psi]_L$, onde Ψ é definida da mesma forma que no caso irrestrito, e é livre pois ψ o é. Com isso temos a:

Proposição 2.55. *$\mathcal{N}_*(G)$ munido das operações $+$ e $\cdot$ acima definidas tem estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado e é denominado o grupo de G-cobordismo principal não-orientado.*

2.6 Cobordismo de Involuções

Uma involução em uma variedade M^n é uma aplicação $T: M^n\to M^n$ que satisfaz $T\circ T = Id$, onde $Id: M^n\to M^n$ é a função identidade. Podemos identificar o grupo aditivo $\mathbb{Z}_2$ com $\{Id, T\}$ munido da operação de composição de funções. Com tal identificação, uma involução T em M^n define uma ação $\psi:\mathbb{Z}_2\times M^n\to M^n$ pondo $\psi(Id,m)=m$ e $\psi(T,m)=T(m)$. Por isso, identificaremos ações de $\mathbb{Z}_2$ com involuções, e portanto denotaremos elementos dos grupos $I_n(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ por $[M^n,T]$ e $[M^n,T]_L$, respectivamente.

Exemplo 2.56. [**Involução Twist:**] Seja F^n uma variedade fechada. A aplicação $\tau: F^n\times F^n\to F^n\times F^n$ definida por $\tau(x,y)=(y,x)$ é uma involução bem conhecida, chamada involução twist. Seu conjunto de pontos fixos é F^n.

Observação 2.57. Note que uma involução (M^n,T) é livre se, e somente se, seu conjunto de pontos fixos $F_T=\{x\in M^n|T(x)=x\}$ é vazio.

Definição 2.58. Seja (M^n,T) uma involução livre. Definimos o fibrado linha canônico associado a (M^n,T) (ou Hopf line bundle) como sendo o fibrado

$$\pi:\frac{M^n\times\mathbb{R}}{T\times A}\to\frac{M}{T},$$

onde $T\times A: M\times\mathbb{R}\to M\times\mathbb{R}$ leva (x,r) em $(T(x),-r)$, e cuja projeção π leva a classe de equivalência de (x,r) na classe de equivalência de x.

Teorema 2.59. *A aplicação $[M^n,T]\mapsto\left[\xi\to\frac{M}{T}\right]$ define um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$.*

Demonstração. Vide [2, p.74]. □

Usando o resultado acima e o Teorema 2.28 concluímos que (M,T) borda livremente se, e somente se, todos os números de seu fibrado linha canônico $\xi\to\frac{M}{T}$ são nulos. Isso motiva a seguinte:

Definição 2.60. Seja (M,T) uma involução sem pontos fixos. Definimos seus números de involução como sendo os números de Whitney de seu fibrado linha canônico $\xi\to$

$\dfrac{M}{T}$ associado. Denotamos $W(\xi) = 1 + c$, onde $c \in H^1\left(\dfrac{M}{T}, \mathbb{Z}_2\right)$ é chamada classe característica da involução (M, T).

Agora podemos reescrever a afirmação anterior da seguinte maneira:

Teorema 2.61. *Uma involução livre (M^n, T) borda se, e somente se, todos os seus números de involução são nulos.*

Exemplo 2.62. Considere $A : S^n \to S^n$ a involução antipodal na esfera euclidiana n-dimensional S^n. É conhecido que, nesse caso, seu fibrado linha canônico $\xi \to \mathbb{R}P^n$ é não trivial e $W(\xi) = 1 + \alpha$, onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$. Usando a estrutura do anel de cohomologia de $\mathbb{R}P^n$, sabemos que α^n é o gerador de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$. Segue que $\alpha^n[\mathbb{R}P^n]_2 \neq 0$ e portanto $[S^n, A]_L \neq 0$.

Usando o Corolário 2.29 obtemos:

Teorema 2.63. *Duas involuções sem pontos fixos são cobordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de involução.*

Agora, em relação a estrutura do $\mathcal{N}_*$-módulo $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ temos o seguinte

Teorema 2.64. *$\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo livre graduado, com um gerador em cada dimensão. Seja (M^n, T) uma involução livre e c sua classe característica. Se a evaluação $c^n\left[\dfrac{M}{T}\right]_2 \neq 0$, então (M^n, T) representa um gerador de $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$. Em particular, a família*

$$\{[S^n, A_n] | n \geq 0\}$$

é uma base para o $\mathcal{N}_*$-módulo livre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$, onde $A_n : S^n \to S^n$ é a involução antipodal.[2, p.74]

Observação 2.65. Dado $[M^n, T]_L \in \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$, o Teorema acima nos diz que existem variedades $V^0, \ldots, V^n$ tais que

$$[M^n, T] = [V^0][S^n, A_n] + [V^1][S^{n-1}, A_{n-1}] + \ldots + [V^n][S^0, A_0].$$

2.6.1 A sequência exata de Conner e Floyd

Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade suave e fechada M^n. Graças ao Teorema 5.10 em [12], podemos restringir o grupo $GL(k)$, do fibrado η^k, ao grupo das aplicações ortogonais $O(k)$ em $\mathbb{R}^k$. Isso nos permite considerar o fibrado em esferas $S(\eta^k) \to M^n$ cuja fibra é S^{k-1}. Por outro lado, a aplicação antipodal em S^{k-1} induz uma involução $A : S(\eta^k) \to S(\eta^k)$ que atua como antipodal em cada fibra de $S(\eta^k)$.

Definição 2.66. Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial. O par $(S(\eta^k), A)$ definido acima é chamado de fibrado involução associado ao fibrado vetorial $\eta^k \to M^n$.

Como a antipodal em S^{k-1} comuta com todo elemento de $O(n)$, podemos obter, a partir do fibrado em esferas $\pi : S(\eta^k) \to M^n$, o fibrado $\widetilde{\pi} : \mathbb{R}P(\eta^k) \to M^n$, cuja fibra é $\mathbb{R}P^{k-1}$ e cuja projeção $\widetilde{\pi}$ é obtida por π via passagem ao quociente pela aplicação $A : S(\eta^k) \to S(\eta^k)$.

Definição 2.67. O fibrado $\mathbb{R}P(\eta^k) \to M^n$ descrito acima é chamado fibrado projetivo associado ao fibrado vetorial $\eta^k \to M^n$.

Definição 2.68. O fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ associado a involução livre $(S(\eta^k), A)$ (vide Definição 2.58) é denominado fibrado linha associado a η^k.

Seja (M^n, T) uma involução cujo conjunto de pontos fixos F_T é não vazio. Sabemos pelo Teorema 2.44 que F_T é uma união disjunta de subvariedades fechadas de M^n, o qual pode ser denotado por $F_T = F^{i_1} \sqcup \ldots \sqcup F^{i_k}$ para certos $0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, assumindo que cada F^{i_j} é não vazia. Para cada j podemos considerar o fibrado normal de F^{i_j} em M^n, o qual denotaremos por $\eta^{n-i_j} \to F^{i_j}$. Denotaremos por $\eta \to F_T$ a união disjunta de fibrados $\eta^{n-i_1} \to F^i_1 \sqcup \ldots \sqcup \eta^{n-i_k} \to F^{i_k}$.

Definição 2.69. A união disjunta $\eta \to F_T$ (união de fibrados vetoriais) acima descrita é chamada de fixed-data da involução (M^n, T).

Pelo Teorema 2.26 podemos considerar cada classe $[\eta^{n-i} \to F^i]$ como um elemento de $\mathscr{N}_i(BO(n-i))$. Definimos $\mathscr{M}_n = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathscr{N}_i(BO(n-i))$ e $\mathscr{M}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$. Assim, denotando $[\eta \to F_T] = [\eta^{n-i_1} \to F^{i_1}] \sqcup \ldots \sqcup [\eta^{n-i_k} \to F^{i_k}]$ temos $[\eta \to F_T] \in \mathscr{M}_*$.

Proposição 2.70. *A aplicação $[M^n, T] \mapsto [\eta \to F_T]$ se $F_T \neq \emptyset$ e $[M^n, T] \mapsto 0$ se $F_T = \emptyset$ define um homomorfismo de $\mathscr{N}_*$-módulos, o qual denotaremos por $j_* : I_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathscr{M}_*$.*

Dado um elemento arbitrário $\eta \to F = \eta^{n-i_1} \to F^{i_1} \sqcup \ldots \sqcup \eta^{n-i_k} \to F^{i_k}$ em $\mathscr{M}_n$, podemos associá-lo, usando a Definição 2.66 para cada fibrado η^{n-i_j}, ao seu fibrado involução $(S(\eta), A) = (S(\eta^{n-i_1}), A_1) \cup \ldots \cup (S(\eta^{n-i_k}), A_k)$. Note que $S(\eta) = S(\eta^{n-i_1}) \cup \ldots \cup S(\eta^{n-i_k})$ é uma variedade fechada de dimensão $n-1$. Com isso temos a:

Proposição 2.71. *A aplicação $[\eta \to F] \mapsto [S(\eta), A]$ descrita acima define um homomorfismo de $\mathscr{N}$-módulos $\partial : \mathscr{M}_* \to \mathscr{N}_*(\mathbb{Z}_2)$.*

O próximo resultado relaciona as duas proposições anteriores e é a principal ferramenta para determinar a classe de cobordismo equivariante de uma involução (M^n, T) cujo conjunto de pontos fixos é não-vazio.

Teorema 2.72. *[Sequência exata de Conner e Floyd] A sequência*

$$0 \longrightarrow I_*(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathscr{M}_* \xrightarrow{\partial} \mathscr{N}_*(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Vide [2, p.88]. □

O Teorema acima nos fornece informações importantes que apresentaremos como corolários.

Corolário 2.73. *Uma involução borda se, e somente se, seu fixed-data borda.*

Corolário 2.74. *Duas involuções são cobordantes se, e somente se, seus fixed-datas são cobordantes.*

Corolário 2.75. *Uma união disjunta de fibrados $\eta \to F$ é um fixed-data se, e somente se, $\partial[\eta \to F] = 0$.*

Note que $\partial[\eta \to F] = 0$ equivale a dizer que $(S(\eta), A)$ borda livremente, o que, pelo Teorema 2.64, equivale a dizer que todos os seus números de involução são nulos. Com isso temos o:

Corolário 2.76. *Uma união disjunta de fibrados $\eta \to F$ é um fixed-data se, e somente se, todos os números de Whitney do fibrado linha canônico $\xi \to \mathbb{R}P(\eta)$ associado a $(S(\eta), A)$ são nulos.*

Corolário 2.77. *Se (M^n, T) é uma involução livre, então (M^n, T) borda como elemento de $I_n(\mathbb{Z}_2)$.*

Exemplo 2.78. Seja (M^n, T) uma involução em uma variedade suave e fechada M^n. Denote por F^n a união das componentes n-dimensionais do conjunto de pontos fixos de T. Então $[M^n, T] = [F^n, Id]$

Exemplo 2.79. Vamos mostrar que não existe involução (M^n, T) em uma variedade fechada M^n, com $n \geq 1$, fixando somente um ponto $\{ponto\}$. Suponha, por contradição, que exista uma tal involução (M^n, T). Logo, pela sequência de Conner e Floyd, teríamos $\partial j_*[M^n, T] = \partial[\mathbb{R}^n \to \{ponto\}] = 0$. Mas note que $\partial[\mathbb{R}^n \to \{ponto\}] = [\lambda \to \mathbb{R}P^{n-1}]$, onde $\lambda \to \mathbb{R}P^{n-1}$ é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^{n-1}$, cuja classe de Stiefel-Whitney é $W(\lambda) = 1 + \alpha$, sendo α o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$. Portanto, $\alpha^{n-1}[\mathbb{R}P^{n-1}]_2 \neq 0$, ou seja, $[\lambda \to \mathbb{R}P^{n-1}] \neq 0$, contradição.

Note que, tanto o Teorema 2.61 quanto o Corolário 2.75 transformam um problema de cobordismo de involuções em um problema de calcular números de Whitney de um fibrado linha $\xi \to \mathbb{R}P(\eta)$, sendo η uma união disjunta de fibrados. Então precisamos conhecer a estrutura do anel de cohomologia e a classe tangencial de $\mathbb{R}P(\eta)$. Esses ingredientes decorrem do

Teorema 2.80. *[Borel-Hirzebruch:] Sejam $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada M^n, e denote por $W(\xi) = 1 + c$ a classe característica do fibrado linha $\xi \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ associado a η^k, onde $c \in H^1(\mathbb{R}P(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$, e por $W(\eta^k) = 1 + u_1 + \ldots + u_k$*

a classe característica de η^k. *Então* $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$ *é um* $H^*(M^n, \mathbb{Z}_2)$*-módulo livre, graduado, com base* $\{1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}\}$ *sujeito a relação*

$$c^k + u_1 c^{k-1} + \ldots + u_k = 0.$$

A classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta^k)$ *é dada por:*

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(M^n) \cdot ((1+c)^k + u_1(1+c)^{k-1} + \ldots + u_k).$$

Na verdade, o formato dessa classe tangencial determina a relação acima.

Em suma, fixada uma união disjunta de variedades fechadas $F = \cup_{i=0}^m F^m$, usando o Corolário 2.76 obtemos uma ferramenta para investigar as possiveis classes de cobordismo de involuções (M^n, T) que fixam F. De fato, se $\cup_{i=0}^m \eta^{n-i} \to F^i$ é uma união disjunta de fibrados sobre F, o Corolário 2.76 nos diz que η é um fixed-data de alguma involução se, e somente se, todos os números

$$\sum_{i=0}^{m} p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-i})))[F^i]$$

são nulos, para cada $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-i}))$ polinômio homogêneo de grau $n-1$ nas classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta)$ e c. Podemos usar a igualdade acima selecionando polinômios específicos a fim de obtermos um número não nulo, concluindo que η não é um fixed-data. Se a K-teoria de F for conhecida, podemos usá-la na igualdade acima, em cada caso, a fim de classificar todas as involuções (M^n, T) cujo conjunto de pontos fixos é F. Esse é um problema bem estabelecido na literatura, e conforme anteriormente mencionado, existem vários tais resultados na literatura versando sobre tal tema, com a estratégia descrita. A seguir, veremos algumas técnicas que nos auxiliam no cálculo de tais números e que nos guiam para uma escolha adequada de tais polinomios especiais p.

2.6.2 Multiplicação por potências inteiras de (1+c)

Seja X um espaço topológico, e $Y \subset H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ a coleção de todos os elementos da forma

$$1 + w_1 + w_2 + \ldots$$

em que $w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X, \mathbb{Z}_2)$. Então Y é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto cup (vide [9]). Dado um elemento $w = 1 + w_1 + \ldots \in Y$, seu inverso multiplicativo (ou dual)

$$\overline{w} = \frac{1}{w} = 1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \ldots$$

pode ser construido indutivamente usando a relação $w\overline{w} = 1$, onde

$$1 = w\overline{w} = (1 + w_1 + w_2 + \ldots)(1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \ldots).$$

Com isso obtemos $\overline{w}_1 = w_1$ e a fórmula recursiva: $\overline{w}_n = w_n + w_{n-1}\overline{w}_1 + \ldots w_1\overline{w}_{n-1}$, onde $n \geq 2$.

Consideremos agora um fixed-data $\eta \to F = \cup_{k=1}^{k}(\eta^{n-i_j} \to F_j^i)$ de uma involução (M^n, T) com $0 \leq i_1 < \ldots < i_k < n$. O inverso multiplicativo de $1 + c \in H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ é dado por:

$$\frac{1}{1+c} = 1 + c + \ldots + c^{n-1}$$

lembrando que $c^t = 0$ se $t > n - 1$ pois $\mathbb{R}P(\eta) = \sqcup_{j=1}^{k}(\mathbb{R}P(\eta^{\eta^{n-i_j}}))$ é uma variedade fechada $n - 1$-dimensional.

De maneira geral, para qualquer inteiro d, $(1 + c)^d$ pode ser escrito na forma

$$(1 + c)^d = 1 + a_1c + \ldots a_{n-1}c^{n-1}$$

para certos $a_i \in \{0, 1\}$. Assim, para qualquer inteiro d, o produto $(1 + c)^d W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1+a_1c+\ldots+a_{n-1}c^{n-1})(1+w_1(\mathbb{R}P(\eta))+\ldots+w_{n-1}(\mathbb{R}P(\eta)))$ é tal que sua parte homogênea de grau i é um polinômio homogêneo de grau i nas classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta)$ e c. Logo, escrevendo $(1 + c)^d W(\mathbb{R}P(\eta^{n-i_j})) = 1 + w_{j,1} + \ldots + w_{j,n-1}$, onde $w_{j,s} \in H^s(\mathbb{R}P(\eta^{n-i_j}), \mathbb{Z}_2)$, temos que

$$\sum_{j=1}^{k} w_{j,l_1} \cdot \ldots \cdot w_{j,l_r} c^t [\mathbb{R}P(\eta^{n-i_j})]_2 = 0$$

para quaisquer $l_1, \ldots, l_r, t$ com $i_1 + \ldots + i_k + t = n - 1$.

Via de regra, as classes de $\mathbb{R}P(\eta)$ são algebricamente complicadas. A ideia por trás da técnica acima é multiplicá-las por potências inteiras de $(1 + c)$ a fim de tornar suas partes homogêneas mais simples, e com isso obter equações manipuláveis com tais números característicos. Veremos a seguir, como um exemplo de aplicação desta técnica, as classes $W[r]$ que utilizaremos nos capítulos 3 e 4.

Exemplo 2.81. Sejam $\eta^k \to F^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada F^n, e denote por c a classe característica do fibrado linha $\xi \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ associado a η^k e por $W(\eta^k) = 1 + u_1 + \ldots + u_k$ e $W(F^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$ as classes de Stiefel-Whitney de η^k e F^n, respectivamente. Então, pelo Teorema de Borel Hirzebruch, temos

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1 + w_1 + \ldots + w_n) \cdot ((1 + c)^k + u_1(1 + c)^{k-1} + \ldots + u_k).$$

Definimos as classes $W[r]$ da seguinte maneira:

$$W[r] = \frac{W(\mathbb{R}P(\eta^k))}{(1+c)^{k-r}}.$$

Então
$W[r] = (1 + w_1 + \ldots + w_n) \cdot ((1+c)^r + u_1(1+c)^{r-1} + \ldots + u_{r-1}(1+c) + u_r + \dfrac{u_{r+1}}{1+c} + \ldots + \dfrac{u_k}{(1+c)^{k-r}})$.
as quais possuem as seguintes propriedades:
$W[r]_{2r} = w_r c^r +$ termos com potências de c menores que r,
$W[r]_{2r+1} = (w_{r+1} + u_{r+1})e^r +$ termos com potências de c menores que r,
$W[r]_{2r+2} = u_{r+1}c^{r+1} +$ termos com potências de c menores que r+1.

Tais classes foram introduzidas por R. Stong e P. Pergher em [16].

2.6.3 Os quadrados de Steenrod

Sejam X e Y espaços topológicos arbitrários. As operações cohomológicas Sq^i são certos homomorfismos específicos conectando as cohomologias de X e de Y, conhecidas como *quadrados de Steenrod*. Tais operações são completamente caracterizadas pelas quatro seguintes propriedades:

1. Para quaisquer inteiros não-negativos n, i,

$$Sq^i : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X, \mathbb{Z}_2)$$

   define um homomorfismo aditivo.

2. (naturalidade) Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H^n(Y,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^i"] & H^n(X,\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "Sq^i"] \\ H^{n+i}(Y,\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "f^*"] & H^{n+i}(X,\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

3. Se $a \in H^n(X, \mathbb{Z}_2)$ então $Sq^0(a) = a, Sq^n(a) = a^2$ e $Sq^i(a) = 0$ para cada $i > n$.

4. (Fórmula de Cartan) Se a e b são elementos homogêneos de $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$ e ab denota o produto cup entre eles, então vale a identidade

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a) S^{i-j}(b)$$

A relação entre os homomorfismos Sq^i's e as classes de Stiefel-Whitney de um fibrado vetorial é dada pelo seguinte.

Teorema 2.82. *[Fórmula de Wu] Seja $\eta^k \to X$ um fibrado vetorial sobre um espaço topológico paracompacto e denote por $W(\eta^k) = 1 + v_1 + \ldots + v_k$ sua classe de Stiefel-Whitney. Então:*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{j-i-1+t}{t} w_{i-t}w_{j+t}.$$

Consideremos agora um fixed-data $\eta \to F$ e denote por $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$ seu fibrado-linha associado. Denote por $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))$ um polinômio homogêneo qualquer, de grau $t < n-1$ nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Usando as fórmulas de Cartan e Wu, lembrando que Sq^i é um homomorfismo aditivo, vemos que $Sq^{n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))$ é também um polinômio homogêneo, agora de grau $n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c, portanto

$$Sq^{n-1-t}(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta))))[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = 0$$

A principal utilidade dos quadrados de Steenrod, neste contexto, será mostrar que certos elementos simples de $H^*(\mathbb{R}P(\eta), \mathbb{Z}_2)$ são de fato polinômios nas classes tangenciais de $\mathbb{R}P(\eta)$ e c, o que poderia ser difícil de se mostrar diretamente. Essa técnica foi inicialmente introduzida por Adriana Ramos e P. Pergher na tese de doutorado de Adriana Ramos defendida em 2003 [20].

2.6.4 Fórmula de Conner

Considere $\eta^k \to F^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada F^n e denote sua classe de Stiefel-Whitney por $W(\eta^k) = 1+v_1+\ldots+v_k$. Pelo Teorema de Borel-Hirzebruch 2.80 sabemos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F^n, \mathbb{Z}_2)$-módulo livre graduado, com base $\{1, c, \ldots, c^{k-1}\}$, onde c é a classe característica do fibrado linha associado a η^k, sujeita a relação $c^k + v_1c^{k-1} + \ldots + v_k = 0$. Em particular, dado $a_n \in H^n(F^n, \mathbb{Z}_2)$, se $a_nc^{k-1} = 0$ então necessariamente $a_n = 0$. Como $H^n(F^n, \mathbb{Z}_2)$ e $H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(\eta^k), \mathbb{Z}_2)$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, temos

$$a_n[F^n]_2 = a_nc^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2.$$

Por outro lado, se $a_s \in H^s(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com $n < s \leq n+k-1$, então $a_sc^{n+k-1-s}[\mathbb{R}P(\eta)]_2 = 0$, pois $a_s = 0$. Por fim, para calcular $a_s \in H^s(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com $0 \leq s \leq n$ usamos o seguinte

Teorema 2.83 (Fórmula de Conner)**.** *Com as notações acima, dado $a_s \in H^s(F^n, \mathbb{Z}_2)$ com $0 \leq s \leq n$, vale*

$$a_sc^{n-s+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k)]_2 = a_s\overline{v}_{n-s}[F^n]_2$$

onde $\overline{v}_i$ denota o termo homogêneo de grau i do inverso de $W(\eta^k)$.

Demonstração. ver [1]. □

2.6.5 O Teorema de Lucas

Frequentemente, em cálculos envolvendo números de Stiefel-Whitney, nos deparamos com coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$. Então, como trabalhamos sempre com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, é fundamental dispormos de um resultado que determina com facilidade a paridade de um coeficiente binomial. Isso é exatamente a finalidade do famoso Teorema de Lucas.

Definição 2.84. Seja n um inteiro positivo. Definimos sua partição diádica por:

$$n = n_k 2^k + n_{k-1}2^{k-1} + \ldots + n_1 2 + n_0$$

em que $n_i \in \{0, 1\}$ para todo i. Nos casos em que $n_t = 1$ dizemos que 2^t participa da expansão diádica de n.

Definição 2.85. Sejam n, m dois inteiros positivos com $n \leq m$. Dizemos que a partição diádica de n está contida na partição diádica de m se toda potência de 2 que participa da partição de n também participa da partição diádica de m.

Teorema 2.86. *[Teorema de Lucas] Sejam m, n inteiros positivos com $n \leq m$. Então $\binom{m}{n}$ é ímpar se, e somente se, a partição diádica de n está contida na partição diádica de m.*

Exemplo 2.87. Como $81 = 2^6 + 2^4 + 1$ e $17 = 2^4 + 1$ segue que $\binom{81}{17}$ é ímpar.

Um corolário extremamente útil, que usaremos frequentemente nos capítulos seguintes, sem mencionar, é o seguinte

Corolário 2.88. *Seja M^n uma variedade suave e fechada e considere $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p$ um elemento de $H^*(M^n, \mathbb{Z}_2)$. Então*

$$(1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p)^{2^s} = 1 + \alpha_1^{2^s} + \ldots + \alpha_p^{2^s}.$$

Demonstração. Basta usar o Teorema de Lucas e indução em p. □

A seguir, um lema técnico que também será usado no capítulo seguinte.

Lema 2.89. $(1 + d + d^2 + \cdots + d^n)^b = \sum_{i=0}^{n} \binom{b-1+i}{i} d^i$.

Demonstração. Basta usar indução em n e o binômio de Newton. □

2.7 Cobordismo de ações de $\mathbb{Z}_2^k$

Nesta seção descreveremos os principais resultados básicos relativos à ações de $\mathbb{Z}_2^k$. Para maiores detalhes, vide [10, p.29-45].

Sejam $T_1, \ldots, T_k : M^n \to M^n$ k involuções comutantes definidas em uma variedade suave e fechada M^n. Podemos considerar o grupo $\mathbb{Z}_2^k$ como o grupo gerado pela base ordenada $\{T_1, \ldots, T_k\}$ munido da operação de composição, ou seja:

$$\mathbb{Z}_2^k = \{T_1, \ldots, T_k | T_i^2 = 1, T_i \circ T_j = T_j \circ T_i\}.$$

Dessa forma, qualquer elemento $g \in \mathbb{Z}_2^k$ pode ser escrito como $g = T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_s}$. Com isso, podemos definir uma ação $\psi : \mathbb{Z}_2^k \times M^n \to M^n$ fazendo $\psi(g, x) = (T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_s})(x)$. Neste caso, denotaremos a ação ψ por (M^n, ψ) ou $(M^n; T_1, \ldots, T_k)$. Veremos agora o principal conceito utilizado na investigação da classe de cobordismo $[M^n; T_1, \ldots, T_k] \in I_n(\mathbb{Z}_2^k)$.

2.7.1 O fixed-data de uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$

Para descrevermos o fixed-data de uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 2.90. *Sejam $T_1, \ldots, T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ k involuções lineares e comutantes, e considere o grupo $\mathbb{Z}_2^k = \{T_1, \ldots, T_k | T_i^2 = 1, T_i \circ T_j = T_j \circ T_i\}$. Escreva $\Omega = \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, onde $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ munido da multiplicação usual. Então*

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus\nolimits_{\rho \in \Omega} \xi_\rho$$

onde cada $\xi_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n | S_i(x) = \rho(S_i)x\}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Faremos a prova por indução em k. Note que, para $k = 1$, $\Omega = \{1, \rho\}$ onde $\rho(T_1) = -1$. Então $\xi_1 = \{u \in \mathbb{R}^n | T_1(u) = u\}$ e $\xi_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n | T_1(u) = -u\}$. É fácil ver que ξ_1 e ξ_ρ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e que $\xi_1 \cap \xi_\rho = \{0\}$. Para finalizar o caso $k = 1$ basta ver que, dado $u \in \mathbb{R}^n$, temos

$$u = \frac{u + T_1(u)}{2} + \frac{u - T_1(u)}{2}$$

onde $\dfrac{u + T_1(u)}{2} \in \xi_1$ e $\dfrac{u - T_1(u)}{2} \in \xi_\rho$.

Agora sejam $T_1, \ldots, T_{k+1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ k+1 involuções lineares e comutantes. Denote $\Omega_0 = \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ e $\Omega = \hom(\mathbb{Z}_2^{k+1}, \mathbb{Z}_2)$. Note que cada $\rho \in \Omega_0$ induz dois elementos $\rho', \rho'' \in \Omega$ definidos por $\rho'(T_i) = \rho''(T_i) = \rho(T_i)$ para cada $1 \le i \le k$ e $\rho'(T_{k+1}) = 1$, $\rho''(T_{k+1}) = -1$. Dessa forma, podemos escrever $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ onde

$$\Omega' = \{\rho \in \Omega | \rho(T_{k+1}) = 1\}$$
$$\Omega'' = \{\rho \in \Omega | \rho(T_{k+1}) = -1\}.$$

Pela hipótese de indução, considerando as involuções $T_1, \ldots, T_k$, temos

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\rho \in \Omega_0} \widetilde{\xi}_\rho,$$

em que $\widetilde{\xi}_\rho = \{u \in \mathbb{R}^n | S_i(u) = \rho(S_i) \cdot u \ 1 \le i \le k, \rho \in \Omega_0\}$. Agora mostraremos que, para cada $\rho \in \Omega_0$, T_{k+1} é invariante em $\widetilde{\xi}_\rho$ e que $\widetilde{\xi}_\rho = \xi_{\rho'} \oplus \xi_{\rho''}$, onde ρ' e ρ'' são os dois elementos de Ω induzidos por ρ. Dado $u \in \widetilde{\xi}_\rho$, temos, para cada $1 \le i \le k$,

$$T_i(T_{k+1}(u)) = T_{k+1} \circ T_i(u) = T_{k+1}(\rho(T_i)u) = \rho(T_i)T_{k+1}(u),$$

e portanto $T_{k+1}(u) \in \xi_\rho$. Além disso, para cada $u \in \xi_\rho$, podemos escrever

$$u = \frac{u + T_{k+1}(u)}{2} + \frac{u - T_{k+1}(u)}{2}$$

e é fácil ver que $\dfrac{u + T_{k+1}(u)}{2} \in \xi_{\rho'}$ e $\dfrac{u + T_{k+1}(u)}{2} \in \xi_{\rho''}$, o que conclui o resultado. $\square$

Seja $(M^n, \phi) = (M^n, T_1, \ldots, T_k)$ uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ e denote por F seu conjunto de pontos fixos, por $\eta \to F$ o fibrado normal de F em M^n e por $\tau(F)$ e $\tau(M^n)$ os fibrados tangentes a F e M^n, respectivamente. Indicaremos a diferencial de T_i num ponto x por $T_i'(x)$. Dado $x \in F$, temos, para cada i:

$$(T_i \circ T_i)'(x) = Id'_{M^n}(x) = Id_{\tau(M^n)_x}$$

onde

$$(T_i \circ T_i)'(x) = T_i'(T_i(x)) \circ T_i'(x) = T_i'(x) \circ T_i'(x).$$

Portanto

$$T_i'(x) \circ T_i'(x) = Id_{\tau(M^n)_x},$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} (T_i \circ T_j)'(x) &= T_i'(T_j(x)) \circ T_j'(x) = T_i'(x) \circ T_j'(x) \\ (T_j \circ T_i)'(x) &= T_j'(T_i(x)) \circ T_i'(x) = T_j'(x) \circ T_i'(x). \end{aligned}$$

Segue que

$$T_i'(x) \circ T_j'(x) = T_j'(x) \circ T_i'(x),$$

ou seja, para cada $x \in F$, as derivadas $T_1'(x), \ldots, T_k'(x)$ são involuções lineares e comutantes e portanto definem uma ação linear de $\mathbb{Z}_2^k$ em $\tau(M^n)_x$, a qual denotaremos por $(\tau(M^n)_x, \phi_x') = (\tau(M^n)_x, T_1'(x), \ldots, T_k'(x))$. Com isso, usando o Lema 2.90, para cada $x \in F$, obtemos

$$\tau(M^n)_x \simeq \bigoplus\nolimits_{\rho \in \Omega} \xi_\rho^{(x)},$$

em que $\Omega = \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ e $\xi_\rho^{(x)} = \{v \in \tau(M^n)_x | T_i'(x)(v) = \rho(T_i'(x))v\}$, onde

$$\tau(M^n)|_F \simeq \bigoplus\nolimits_{\rho \in \Omega} \xi_\rho$$

em que, para cada ρ, ξ_ρ é o fibrado sobre F cuja fibra sobre $x \in F$ é $\xi_\rho^{(x)}$. Por outro lado, sabemos que $\tau(M^n) \simeq \eta \oplus \tau(F)$, portanto

$$\eta \oplus \tau(F) \simeq \bigoplus\nolimits_{\rho \in \Omega} \xi_\rho$$

Sabemos também, vide [2, pg 73] que, para cada $x \in F$, existe um pequeno disco $D_\epsilon(0)_x$ contendo $0 \in \tau(M^n)_x$, invariante sob a ação de $\phi'_x = (T'_1(x), \ldots, T'_k(x))$, o qual é rebatido equivariantemente, via a aplicação exponencial, em um disco B_ϵ contendo x, invariante sob a ação de $\phi = (T_1, \ldots, T_k)$, ou seja, as ações obtidas via restrição de ϕ e ϕ', denotadas por $(B_\epsilon(x), \phi)$ e $(D_\epsilon(0)_x, \phi_x)$, são equivariantemente difeomorfas. Como, para todo $x \in F$, temos $\xi_1^{(x)} = \{v \in \tau(M^n)_x | T'_i(x)(v) = v\}$, concluímos que $D_\epsilon(0)_x \cap (\xi_1^{(x)})$ é rebatido pela exponencial em uma carta local de F em x, ou seja, $\xi_1^{(x)} = \tau(F)_x$. Juntando isso com $\eta \oplus \tau(F) \simeq \bigoplus_{\rho \in \Omega} \xi_\rho$ obtemos

$$\eta = \bigoplus_{\rho \neq 1} \xi_\rho$$

Além disso, usando o rebatimento exponencial que leva $(D_\epsilon(0)_x, \phi_x)$ em $(B_\epsilon(x), \phi)$, para cada $x \in F$, obtemos uma vizinhança tubular U de F, invariante sob a ação de ϕ, de modo que (V, ϕ) é equivariantemente difeomorfa a $(D(\eta), \phi')$, onde $D(\eta)$ é o fibrado em discos associado a η. Em resumo:

Proposição 2.91. *Seja (M^m, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ e denote por F seu conjunto de pontos fixos. Então existe uma vizinhança tubular $V \subset M^m$ de F de modo que (V, ϕ) e $(D(\eta), \phi')$ são equivariantemente difeomorfas (portanto podemos identificá-las).*

Definição 2.92. Nas notações da descrição acima, a lista de fibrados $(F, \{\xi_\rho\}_{\rho \neq 1})$ é denominado o fixed-data da ação $(M^n, T_1, \ldots, T_k)$. Usualmente o denotamos por $(F, \{\xi_\rho\})$ e fica subentendido que $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$.

Usando a identificação fornecida pela Proposição 2.91, podemos dizer que o fibrado ξ_ρ do fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M, ϕ) é o subfibrado de $\tau(M)|_F$ onde T_i atua como $\rho(T_i)$. A relação entre o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$ ação e seu fixed-data decorre do trabalho [23] feito por Robert Stong, no qual está provado o seguinte:

Teorema 2.93. *Uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ borda equivariantemente se, e somente se, seu fixed-data borda simultaneamente.*

Juntando o resultado acima ao Teorema 2.38 obtemos

Corolário 2.94. *Seja $(M^n, T_1, \ldots, T_k)$ uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ e denote por $(F, \{\xi_\rho\})$ seu fixed-data. Então $(M^n, T_1, \ldots, T_k)$ borda equivariantemente se, e somente se, todos os números de Whitney da lista de fibrados $(F, \{\xi_\rho\})$ são nulos.*

Veremos agora alguns resultados que nos dão informações sobre o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação. Seja $(F, \{\xi_\rho\}_\rho)$ o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M, \phi) = (M, T_1, \ldots, T_k)$ e tome $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ não nulo. Denote $H = \ker(\rho)$ e note que $\ker(\rho) \simeq \mathbb{Z}_2^{k-1}$. Com isso, podemos considerar a ação de H em M^n definida pela restrição de ϕ a $H \times M$. Denote tal ação por ϕ_H e seu conjunto de pontos fixos por F_H.

Teorema 2.95. *Seja ξ o fibrado normal de F em F_H. Então $\xi = \xi_\rho$.*

Demonstração. Basta provar que cada T_i atua em cada fibra ξ_x de ξ como $\rho(T_i)$. Se $T_i \in H$, então T_i atua como Id em F_H e portanto, usando a proposição 2.91, T_i atua como $\rho(T_i) = 1$ em ξ. Se $T_i \notin H$, então podemos escrever $\mathbb{Z}_2^k = H \oplus \mathbb{Z}_2[T_i]$, onde $\mathbb{Z}_2[T_i]$ representa uma cópia de $\mathbb{Z}_2$ gerada por T_i. Note que F_H é invariante por T_i; de fato, dados $x \in F_H$ e $S \in H$, temos $S(T_i(x)) = T_i(S(x)) = T_i(x)$ e portanto $T_i(x) \in F_H$. Assim, podemos considerar a involução (F_H, T_i). Denote por F_{T_i} o conjunto de pontos fixos dessa involução. Então

$$F_{T_i} = \{x \in F_H | T_i(x) = x\} = \{x \in M | S(x) = x \ \forall \ S \in H \text{ e } T_i(x) = x\} = F,$$

e a última igualdade ocorre pois $\mathbb{Z}_2^k = H \oplus \mathbb{Z}_2[T_i]$. Então, usando a Proposição 2.91 para a involução (F_H, T_i) (ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com $k = 1$) segue que T_i atua no fibrado normal de F em F_H como antipodal, ou seja, $T_i(v) = -v = \rho(T_i)(v)$ em cada fibra de ξ, o que conclui a demonstração. □

Note que, no meio da demonstração anterior, provamos o seguinte fato, que será usado na prova do principal resultado do capítulo 4.

Corolário 2.96. *Seja $(F^n, \{\xi_\rho\})$ o fixed data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ϕ) com F^n conexa. Dado $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, denote por $n_\rho = \dim(\xi_\rho)$. Então existe uma involução (W^{n+n_ρ}, T) definida em uma subvariedade W^{n+n_ρ} de M^m cujo fixed-data é $\xi_\rho \to F^n$.*

Ainda nas condições do Teorema anterior, denote $\Omega_0 = \hom(H, \mathbb{Z}_2)$, $\Omega = \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ e $(F_H, \{\eta_\rho\}_{1 \neq \rho \in \Omega_0})$ o fixed-data da ação restrição (M, ϕ_H). Fixe $T \in \mathbb{Z}_2^k - H$ e note que cada homomorfismo ρ em Ω_0 induz dois homomorfismos $\rho_+, \rho_- \in \Omega$ definidos pelas relações: $\rho_+|_H = \rho_-|_H$, $\rho(T) = 1$ e $\rho(T) = -1$. Com esses ingredientes em mãos, temos o

Teorema 2.97. *Seja η_ρ um fibrado do fixed-data de (M, ϕ_H). Então $\eta_\rho|_F = \xi_{\rho_+} \oplus \xi_{\rho_-}$.*

Demonstração. É claro que $\xi_{\rho_+}, \xi_{\rho_-}$ são subfibrados de $\eta_\rho|_F$, pois $\rho(S) = \rho_+(S) = \rho_-(S)$ para todo $S \in H$. Portanto $\xi_{\rho_+} \oplus \xi_{\rho_-}$ é subfibrado de $\eta_\rho|_F$. Por outro lado, note primeiramente que T é invariante em cada fibra de $\xi_\rho|_F$, pois dado $v \in \xi_\rho$ temos $S(T(v)) = T(S(v)) = T(v)$, o que implica que $T(v) \in \xi_\rho$. Além disso, dado $v \in \eta_\rho|_F$, podemos escrever

$$v = \frac{v + T(v)}{2} + \frac{v - T(v)}{2}$$

e é fácil ver que $v = \dfrac{v + T(v)}{2} \in \xi_{\rho_+}$ e $\dfrac{v - T(v)}{2} \in \xi_{\rho_-}$. Além disso, se $v \in \xi_{\rho_+} \cap \xi_{\rho_-}$ temos $T(v) = v$ e $T(v) = -v$. Portanto $v = 0$, o que encerra a prova. □

Veremos agora um Teorema provado em [16] que será amplamente utilizado nos capítulos 4 e 5. Seja $(M, \phi) = (M, T_1, \ldots, T_k)$ uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data $(F, \{\xi_\rho\})$ com F conexo. Fixe um homomorfismo não trivial $\rho_1 : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ e $T \in \mathbb{Z}_2^k - H$, onde

$H = \ker(\rho_1)$. Com as notações do teorema acima, podemos escrever $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$, onde $\Omega_+ = \{\rho \in \Omega | \rho(T) = 1\}$ e $\Omega_- = \{\rho \in \Omega | \rho(T) = -1\}$. Note que, dado $\rho \in \Omega_+$, existe um único $\rho' \in \Omega_-$ que satisfaz $\rho|_H = \rho'|_H$, e neste caso diremos que ρ' está pareado a ρ, valendo a relação $\rho_1 = \rho\rho'$. Denote por $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ o fibrado linha de Hopf associado a ξ_{ρ_1} (vide Definição 2.68). Nestas condições, temos o seguinte:

Teorema 2.98. *A lista de fibrados* $(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_\rho \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho'})\}_{1 \neq \rho \in \Omega_+})$ *borda simultaneamente.*

Demonstração. Por questões de clarificação do conteúdo, achamos interessante reproduzir aqui a prova do teorema acima. Denote por F_H a componente do conjunto de pontos fixos de ϕ_H que contém F e denote por $(F_H, \{\eta_\rho\})$ a componente do fixed-data da ação (M, ϕ_H) sobre F_H. Pelo Corolário 2.96 podemos considerar a involução (F_H, T) que possui fixed-data $\xi_{\rho_1} \to F$. Então $\dim(F_H) = n + n_{\rho_1}$. Além disso, como $\mathbb{Z}_2^k = H \oplus \mathbb{Z}_2[T]$, H age trivialmente em F_H e T é invariante em F_H, concluímos que ϕ é invariante em F_H e portanto podemos considerar a ação de $\mathbb{Z}_2^k$ em F_H. Usando a Proposição 2.91 podemos tomar uma vizinhança tubular $V \equiv D(\xi_{\rho_1})$ de F em F_H tal que a ação ϕ é invariante em V e $(V, \phi) \simeq (D(\xi_{\rho_1}), \phi')$. Defina $W = F_H - V$ a qual é uma variedade compacta com bordo, cujo bordo é $S(\xi_{\rho_1})$. Como ϕ é invariante em V, segue que ϕ é invariante em W, e em particular (W, T) é uma involução sem pontos fixos, pois $Fix(T) \cap F_H = F \subset V$. Com isso, podemos considerar seu fibrado linha associado $\tilde{\lambda} \to \frac{W}{T}$. Usando a identificação $(V, \phi) \simeq (D(\xi_{\rho_1}), \phi')$, concluímos que T atua como antipodal em $S(\xi_{\rho_1})$ e portanto

$$\partial(\frac{W}{T}) = \frac{\partial(W)}{T} = \frac{S(\xi_{\rho_1})}{T} = \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}).$$

Além disso, a restrição de (W, T) a $S(\xi_{\rho_1})$ é $(S(\xi_{\rho_1}), A)$, e consequentemente $\tilde{\lambda}|_{\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})}$ é exatamente o fibrado linha associado a ξ_{ρ_1}, o qual denotaremos por $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$.

Por outro lado, dado um homomorfismo não trivial $\rho : H \to \mathbb{Z}_2$, podemos considerar o fibrado restrição $\nu_\rho = \eta_\rho|_W$. Note que a ação de T (induzida pela derivada) é invariante em cada ν_ρ, pois dado $S \in H$, e $v \in \nu_\rho$, temos $S(T(v)) = T(S(v)) = T(\rho(S)v) = \rho(S)T(v)$, ou seja, $T(v) \in \nu_\rho$. Além disso, como $T \circ T = Id$ segue $T'(T(x))T'(x) = Id$ e portanto T' atua sem pontos fixos em ν_ρ, pois $T(x) \neq x$ para todo $x \in W$. Desta forma, T' leva a fibra sobre x de ν_ρ na fibra sobre $T(x)$ de ν_ρ. Com isso também segue que T' cobre a ação de T em W, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \nu_\rho & \xrightarrow{T'} & \nu_\rho \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ W & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

é comutativo, onde $\pi : \nu_\rho \to W$ é a projeção do fibrado ν_ρ. Isso nos permite considerar o fibrado quociente $\frac{\nu_\rho}{T'} \to \frac{W}{T}$. Denote por $\rho_+, \rho_- \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$ os elementos induzidos por $\rho : H \to \mathbb{Z}_2$ tais que $\rho_+|_H = \rho_-|_H$, $\rho_+(T) = 1$ e $\rho_-(T) = -1$. Seja $P : S(\xi_{\rho_1}) \to F$

a projeção do fibrado em esferas de $\xi_{\rho_1} \to F$. Pode-se provar que $\eta_\rho|_{S(\xi_{\rho_1})}$ é equivalente a $P!(\eta_\rho|_F)$ o qual, segundo o Teorema 2.97, é equivalente a $P!(\xi_{\rho_+}) \oplus P!(\xi_{\rho_-})$. Com isso, suprimindo a notação de pullback, temos

$$\frac{\eta_\rho|_{S(\xi_{\rho_1})}}{T} = \frac{\nu_\rho|_{S(\xi_{\rho_1})}}{T} = \frac{\xi_{\rho_+} \oplus \xi_{\rho_-}}{T} = \frac{\xi_{\rho_+}}{T} \oplus \frac{\xi_{\rho_-}}{T}.$$

Como T atua como 1 em ξ_{ρ_+}, segue que $\dfrac{\xi_{\rho_+}}{T} = \xi_{\rho_+}$, e como T atua como -1 em ξ_{ρ_-}, segue do Lema 33.1 de [2] que $\dfrac{\xi_{\rho_-}}{T} = \lambda \otimes \xi_{\rho_-}$. Portanto, a lista $\left(\dfrac{W}{T}, \tilde{\lambda}, \{\dfrac{\nu_\rho}{T}\}_{\rho\in\Omega}\right)$ com $\Omega = \hom(H, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$ realiza o bordo de $(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_{\rho_+} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho_-})\}_{\rho_+\in\Omega_+})$, o que conclui o resultado. □

Outro resultado que será bastante utilizado no capítulo 3, cuja demonstração não foi encontrada na literatura, é o seguinte

Teorema 2.99. *Seja $(F^n, \{\xi_\rho\})$ o fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M, ψ) e $(V^n, \{\eta_\rho\})$ uma lista de fibrados sobre uma variedade fechada V^n. Suponha que $(F^n, \{\xi_\rho\})$ e $(V^n, \{\eta_\rho\})$ sejam simultaneamente cobordantes. Então $(V^n, \{\eta_\rho\})$ também é fixed-data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (N, ϕ), a qual é portanto equivariantemente cobordante a (M, ψ).*

Para provarmos o teorema acima, precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.100. *Seja $(P^n, \{\nu_\rho\})$ uma lista de fibrados sobre uma variedade suave e fechada P^n, indexada em $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, que borda simultaneamente, onde $\mathbb{Z}_2^k = \{T_1, \ldots, T_k | T_i^2 = Id, T_i \circ T_j = T_j \circ T_i\}$, e $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Então existe uma ação (M, ϕ) de $\mathbb{Z}_2^k$ cujo fixed-data é $(P^n, \{\nu_\rho\})$.*

Demonstração. Seja $(W^{n+1}, \{R_\rho\})$ uma lista que tem como bordo $(P^n, \{\nu_\rho\})$, ou seja, W^{n+1} é uma variedade compacta com $\partial(W^{n+1}) = P^n$ e, para cada ρ, temos $R_\rho|_{F^n} = \nu_\rho$. Denote por $D(\nu_\rho)$ o fibrado em discos associado a ν_ρ. Para cada ρ, denote por $Id_\rho^1 : R_\rho \to R_\rho$ a aplicação identidade e por $Id_\rho^{-1} : R_\rho \to R_\rho$ a aplicação antipodal, ou seja, em cada fibra de R_ρ temos $Id^1(v) = v$ e $Id^{-1}(v) = -v$. Além disso, para cada ρ, denote por 0_ρ a seção nula em R_ρ. No espaço total de $\bigoplus_\rho R_\rho$ podemos definir as seguintes aplicações:

$$\widetilde{T}_1 = \bigoplus_\rho Id_\rho^{\rho(T_1)}, \ldots, \widetilde{T}_k = \bigoplus_\rho Id_\rho^{\rho(T_k)}.$$

Note que $\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_k$ são produtos cartesianos de involuções comutantes e portanto são involuções comutantes, definindo uma ação Φ de $\mathbb{Z}_2^k$ em $\bigoplus_\rho R_\rho$. Além disso, $Fix(\widetilde{T}_i) = \bigoplus_\rho Fix(Id_\rho^{\rho(T_i)})$, e com isso:

$$\begin{aligned}
Fix(\Phi) &= Fix(\widetilde{T}_1) \cap \ldots \cap Fix(\widetilde{T}_k) \\
&= \bigoplus_\rho Fix(Id_\rho^{\rho(T_1)}) \cap \ldots \cap \bigoplus_\rho Fix(Id_\rho^{\rho(T_k)}) \\
&= \bigoplus_\rho (\bigcap_{i=1}^{k} Fix(Id_\rho^{\rho(T_i)})) \\
&= \bigoplus_\rho 0_\rho,
\end{aligned}$$

pois para todo $1 \leq i \leq k$ existe $\rho \neq 1$ tal que $\rho(T_i) = -1$. Segue que $Fix(Id_\rho^{\rho(T_i)}) = Fix(Id_\rho^{-1}) = 0_\rho$. Portanto $Fix(\Phi) = \bigoplus_\rho 0_\rho$ é a seção nula em $\bigoplus_\rho R_\rho$.

Defina $N_1 = \bigoplus_\rho S(R_\rho)$, $N_2 = \bigoplus_\rho D(\nu_\rho)$ e $M = N_1 \cup N_2$. Então M é uma variedade suave e fechada e note que, para cada $1 \leq i \leq k, \widetilde{T}_i$ é invariante em N_1 e em N_2, portanto podemos considerar a $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M, \widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_k)$ cujo conjunto de pontos fixos é $\bigoplus_\rho 0_\rho \subset \bigoplus_\rho D(\nu_\rho)$, que é difeomorfo a P, e seu fibrado normal em $\bigoplus_\rho D(\nu_\rho)$ é o próprio $\bigoplus_\rho D(\nu_\rho)$. Além disso, identificando ν_ρ com $\nu_\rho \oplus \bigoplus_{\rho' \neq \rho} 0_{\rho'}$, temos que, dado $v_\rho \in \nu_\rho$, $\widetilde{T}_i(v) = Id_\rho^{\rho(T_i)} v = \rho(T_i)v$. Por outro lado, se $v_{\rho'} \in \nu_{\rho'}$ com $\rho' \neq \rho$, existe $1 \leq i \leq k$ tal que $\rho'(T_i) \neq \rho(T_i)$, e neste caso $\widetilde{T}_i(v_{\rho'}) = \rho'(T_i)(v) \neq \rho(T_i)(v)$. Em outras palavras, ν_ρ é o subfibrado de $\bigoplus_\rho D(\nu_\rho)$ onde cada $\widetilde{T}_i$ atua como $\rho(T_i)$. Portanto $(M, \widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T_k})$ tem fixed data $(P, \{\nu_\rho\})$, como queríamos. □

Demonstração do Teorema 2.99. Como $(F^n, \{\xi_\rho\}) \cup (V^n, \{\eta_\rho\})$ borda simultaneamente, existe uma ação (U^m, ψ) de $\mathbb{Z}_2^k$ cujo fixed-data é $(F^n, \{\xi_\rho\}) \cup (V^n, \{\eta_\rho\})$. Usando a Proposição 2.91 podemos tomar vizinhanças tubulares V e V' de F^n em M^m e U^m respectivamente, nas quais ϕ e ψ são invariantes e $(V, \phi) = (V', \psi)$ (equivariantemente difeomorfas). Considere $M_1 = M^m - V$ e $M_2 = U^m - V'$. Então então $(\partial(M_1), \phi) = (\partial(M_2), \psi)$ e isso nos permite realizar um "colamento equivariante"entre (M_1, ϕ) e (M_2, ψ) (identificando $(\partial(M_1), \phi)$ e $(\partial(M_2), \psi)$) e assim obter uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação cujo fixed-data é $(V^n, \{\eta_\rho\})$. □

2.7.2 Construindo $\mathbb{Z}_2^k$-ações

Vamos construir os modelos de ações de $\mathbb{Z}_2^k$ que utilizaremos no problema de classificação do capítulo 4. Tais ações podem ser encontradas em alguns artigos de P. Pergher, por exemplo [17] e [11].

Definição 2.101. [A ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist] Seja F^n uma variedade fechada. Definiremos indutivamente a ação denominada $\mathbb{Z}_2^k$-twist $(M^{2^k n}, T_1, \ldots, T_k)$, onde $M^{2^k n} = F^n \times \ldots \times F^n$ (2^k-cópias). Para $k = 1$, trata-se da involução twist vista no Exemplo 2.56, cujo fixed-data é $\tau(F^n) \to F^n$, $\tau(F^n)$ sendo o fibrado tangente a F^n.

Para $k = 2$ trata-se de $((F^n)^4, T_1, T_2) = (F^n \times F^n \times F^n \times F^n, T_1, T_2)$, onde $T_1 = \tau \times \tau$, sendo τ a involução twist em $F^n \times F^n$ e $(F^n)^4$ é visto como $(F^n \times F^n) \times (F^n \times F^n)$; ou seja, $T_1(x, y, z, w) = (y, x, w, z)$. Por outro lado, T_2 é a twist em $(F^n)^2 \times (F^n)^2$, ou seja, $T_2(x, y, z, w) = (z, w, x, y)$.

Agora, suponha por indução que esteja bem definida a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-twist $(M^{2^{k-1}n}, T_1, \ldots, T_{k-1})$. Como $M^{2^k n} = M^{2^{k-1}n} \times M^{2^{k-1}n}$, para $1 \leq i \leq k-1$ podemos definir $T_i' = T_i \times T_i$, e definimos T_k' como a twist em $M^{2^{k-1}n} \times M^{2^{k-1}n}$. Dessa forma, $T_1', \ldots, T_k'$ são involuções comutantes em $M^{2^k n}$ e $(M^{2^k n}, T_1', \ldots, T_k')$ é, por definição, a ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist.

Proposição 2.102. *O fixed-data da ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist em $(F^n)^{2^k}$ é $(F^n, \{\tau(F^n)\}_\rho)$, onde $\tau(F^n)$ denota o fibrado tangente de F^n .*

Demonstração. Vide Teorema 3.4.7 de [10], página 42. □

Agora veremos um procedimento para construir uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, com $k \geq 2$, a partir de uma involução (M^n, T). Novamente tal procedimento pode ser encontrado em alguns artigos de P. Pergher, por exemplo [17] e [11].

Proposição 2.103. *Seja (M^m, T) uma involução com fixed-data $\eta \to F$. Escreva $W = \prod_{i=1}^{2^{k-1}} M^m$. Em W podemos considerar a involução $T_1 = T \times \ldots \times T$ (2^{k-1} vezes) e a ação $\mathbb{Z}_2^{k-1}$-twist $(W, T_2, \ldots, T_k)$. Então $T_1, \ldots, T_k$ são involuções comutantes em W e portanto definem uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $\Gamma_k^k(M^m, T) = (W, T_1, \ldots, T_k)$. O fixed-data desta ação é $(F, \{\xi_\rho\})_\rho$, onde*

- $\xi_\rho = \tau(F)$ *se* $\rho(T_1) = 1$
- $\xi_\rho = \eta$ *se* $\rho(T_1) = -1$

Demonstração. Teorema 3.4.10, [10, p.43]. □

Em [14], P. Pergher provou um importante teorema, o *Section Theorem,* generalizando para $k > 1$ o resultado de Conner e Floyd [2] para $k = 1$, gerando um procedimento conhecido na literatura como *remoção de secções.* Essencialmente, tal teorema diz que, se algum subfibrado do fixed-data uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ possuir uma secção (ou um somando trivial), trocando-se no fixed data tal fibrado pelo mesmo fibrado sem a tal secção (ou seja, removendo-se essa secção), então a configuração remanescente continua sendo um fixed-data de alguma ação de $\mathbb{Z}_2^k$. Em alguns contextos, tais ações são chamadas de *exóticas,* porque não são construídas explicitamente (como por exemplo a $\mathbb{Z}_2^k$-twist), mas sabemos que existem com o fixed-data atrás descrito. O processo é iterativo, ou seja, pode-se remover tantas secçoes quanto for possivel, desde que, obviamente, existam. Tais ações participarão no teorema de classificação do capítulo 4. Precisamente:

Teorema 2.104. *Seja (M^m, ψ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F, \{\xi_\rho\})$. Suponha que exista um fibrado $\nu \to F$ e uma posição $\rho_1 \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$ tal que $\xi_{\rho_1} = \nu \oplus \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o fibrado linha trivial sobre F. Então a lista de fibrados $(F, \{\xi_\rho'\}_\rho)$ é o fixed-data de alguma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ sobre alguma variedade (m-1)-dimensional W^{m-1}, (W^{m-1}, ϕ), sendo*

$$\begin{aligned}
\xi_\rho' &= \xi_\rho \text{ se } \rho \neq \rho_1 \\
\xi_\rho' &= \nu. \text{ se } \rho = \rho_1
\end{aligned}$$

Vamos ilustrar a utilidade deste teorema, no contexto de se construir novas ações de $\mathbb{Z}_2^k$, com o seguinte:

Exemplo 2.105. Seja F^n uma variedade fechada tal que seu fibrado tangente $\tau(F^n)$ possui uma secção, ou seja, existe um fibrado vetorial $\nu^{n-1} \to F^n$ tal que $\tau(F^n) = \nu^{n-1} \oplus \mathbb{R}$. Considere a ação $\mathbb{Z}_2^k$-twist $(M^{2^k n}, \phi)$ induzida por F^n, a qual possui fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\})$ de tal sorte que, para todo ρ, $\xi_\rho = \tau(F^n) = \nu^{n-1} \oplus \mathbb{R}$. Dado $\rho_1 \neq 1$, usando o Section Theorem, obtemos uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação $(M_{\rho_1}^{2^k n-1}, \phi_{\rho_1})$ cujo fixed-data é $(F^n, \{\nu_\rho\})$, onde $\nu_\rho = \tau(F^n)$ para todo $\rho \neq \rho_1$ e $\nu_{\rho_1} = \nu^{n-1}$. Note que este procedimento dá origem a novas $2^k - 1$ ações de $\mathbb{Z}_2^k$ distintas e não cobordantes. De fato, se $(M_{\rho_1}^{2^k n-1}, \phi_{\rho_1})$ e $(M_{\rho_2}^{2^k n-1}, \phi_{\rho_2})$ são duas ações de $\mathbb{Z}_2^k$ obtidas por este procedimento, a dimensão dos fibrados nas posições ρ_1 e ρ_2 são distintas. Podemos aplicar este procedimento iteradamente, enquanto eventualmente houver secções no fixed-data, obtendo novas $\mathbb{Z}_2^k$-ações. Este procedimento para obter novas $\mathbb{Z}_2^k$-ações será fundamental no teorema de classificação do capítulo 4.

Por fim, existe uma maneira de construir novas ações de $\mathbb{Z}_2^k$ a partir de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ϕ), introduzida por P. Pergher em [17], e utilizada em outros artigos, por exemplo [11], obtida pela aplicação de automorfismos $\mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$.

Proposição 2.106. *Sejam $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ um automorfismo e uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$, $(M^m, T_1, \ldots, T_k)$, com fixed-data $(F, \{\xi_\rho\})$. Então definimos a $\mathbb{Z}_2^k$-ação $\sigma(M^m, \phi)$ por $(M^m, \sigma(T_1), \ldots, \sigma(T_k))$. Seu fixed-data é $(F, \{\nu_\rho\})$ em que $\nu_\rho = \xi_{\rho\circ\sigma}$.*

Demonstração. Denote $T_i' = \sigma(T_i)$. É fácil ver que o conjunto de pontos fixos de $\sigma(M^m, \phi)$ é igual ao de (M^m, ϕ) pois os conjuntos $\{T_1, \ldots, T_k\}$ e $\{T_1', \ldots, T_k'\}$ são iguais. Para provar a segunda afirmação do enunciado, basta ver que, para cada $1 \leq i \leq k$, temos $\rho(T_i') = \rho(\sigma(T_i))$. $\square$

Capítulo 3

A propriedade CP

Em 1958, J. Milnor provou em [8] o seguinte relevante resultado: suponha $\eta \to S^n$ um fibrado vetorial com base sendo a esfera n-dimensional com $w_n(\eta) \neq 0$, onde w_n denota a enésima classe de Stiefel-Whitney. Então $n = 1, 2, 4$ ou 8, e em cada caso existe um exemplo de um tal fibrado, com os espaços base sendo espaços projetivos apropriados (que são esferas). Posteriormente, em 1964, P. Conner e E. Floyd introduziram a teoria de Cobordismo Equivariante [2], estendendo a teoria de cobordismo de R. Thom de 1954 [26] ao contexto equivariante (essa teoria proporcionou a R. Thom a medalha Fields em 1958). Misturando suas técnicas com o resultado acima mencionado de Milnor, Conner e Floyd provaram em [2] o seguinte intrigante resultado: seja M uma variedade fechada e suave m-dimensional e $T : M \to M$ uma involução suave satisfazendo o fato de que seu conjunto de pontos fixos F é a união disjunta de uma n-esfera S^n e um ponto, $F = S^n \cup \{point\}$. Então $n = 1, 2, 4$ ou 8, $m = 2n$ e, em cada caso, existe um exemplo com o fibrado normal de S^n em M sendo o apropriado fibrado de Milnor acima mencionado. Em [13], P. Pergher estendeu este resultado para produtos de esferas da seguinte maneira: suponha que $T : M \to M$ é uma involução fixando $F = S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_p} \cup \{point\}$. Então $n_1 + n_2 + ... + n_p = 2^s$ para algum $s \geq 0$ e $dim(M) = 2^{s+1}$, além disso, se $s \geq 3$, a lista $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ é um refinamento de $(8, ..., 8)$ (2^{s-3} cópias) (por exemplo, $(3, 5, 1, 7, 2, 3, 3, 2, 6)$ é um refinamento de $(8, 8, 8, 8)$). Além disso, existem exemplos realizando cada uma das possibilidades descritas. Como mencionado na Introdução, estes resultados inspiraram a introdução da seguinte propriedade, associada a variedade conexas, fechadas e suaves F: dizemos que F satisfaz a propriedade CP (*compativel com o ponto*) se existe uma variedade fechada e suave M e uma involução suave $T : M \to M$ tal que seu conjunto de pontos fixos é $F \cup \{point\}$. Como também mencionado na Introdução, além de S^1, S^2, S^4, S^8 e os produtos de esferas acima descritos, todo espaço projetivo real RP^n satisfaz CP, e o mesmo é válido para espaços projetivos complexos e quaterniônicos, CP^n e KP^n. Esta propriedade foi introduzida na tese de Jessica Rossinati [3], e os resultados lá provados estão descritos na Introdução. Tais resultados geraram o artigo [4], no momento submetido para publicação. Conforme dito, vários tais resultados envolveram as variedades de Dold

$P(m,n)$, ficando vários casos em aberto. O objetivo deste Capítulo e atacar alguns desses casos em aberto, descritos na Introdução. Para facilidade de leitura, repetiremos o que será feito. Inicialmente, provaremos que no caso em que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ (e portanto $m \equiv 2(\text{mod } 4)$), se $P(m,n)$ satisfaz CP, então $m = 2$ ou $m = 6$. Posteriormente, concluiremos o caso em que $m = 2$, mostrando que $P(2,n)$ satisfaz CP se, e somente se, $n = 2^s - 1$ para algum $s \geq 1$. Também o caso em que $m = 6$ e $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ será resolvido: provaremos que, nestas condições, $P(m,n)$ não satisfaz CP. Completaremos também o caso em que $n = 1$, provando que $P(m,1)$ satisfaz CP se, e somente se, $m = 2^t - 2$ para algum $t \geq 1$. Note que existem portanto resultados positivos e negativos para esta questão, para diferentes valores de m e n. Com isso, restarão os seguintes casos em aberto:

- $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $m > 6$ e $1 < n < m$,
- $m \equiv 0 \pmod 4$ com n par,
- $m \equiv 2 \pmod 4$ com $m > 6$ e n par.

Neste capítulo, sempre que supusermos a existência de uma involução (M,T) cujo conjunto de pontos fixos é $P(m,n) \cup \{ponto\}$, denotaremos o fibrado normal de $P(m,n)$ em M por ν^r e sua classe de Stiefel-Whitney por $u = 1 + u_1 + \ldots + u_r$. Consequentemente, o fixed-data de (M^m, T) será denotado por

$$(\nu^r \to P(m,n)) \sqcup (\mathbb{R}^{m+2n+r} \to \{ponto\})$$

pois o fibrado normal de $\{ponto\}$ em M é o fibrado trivial de dimensão $\dim(P(m,n)) + r = m + 2n + r$.

Por outro lado, sabemos, pela sequência exata de Conner e Floyd, que um fibrado vetorial $(\eta \to P(m,n)) \cup (\mathbb{R}^{m+2n+r} \to \{ponto\})$ é o fixed-data de alguma involução (M,T) fixando $P(m,n) \cup \{ponto\}$ se, e somente se, a união $(\lambda \to \mathbb{R}P(\nu)) \cup (\lambda' \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1})$ borda como fibrado. Como fibrados sobre o $\{ponto\}$ são sempre triviais, o estudo da propriedade CP para $P(m,n)$ com m,n fixados equivale a provar a existência (ou não existência) de um fibrado $\nu^r \to P(m,n)$ tal que $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu)$ seja cobordante a $\lambda' \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ o que ocorre se, e somente se, os dois fibrados tiverem os mesmos números de Whitney (Corolário 2.29). Para isso, é fundamental conhecermos quais são todas as possíveis classes de Stiefel-Whitney de fibrados vetoriais sobre $P(m,n)$, ou seja, sua K-teoria real. Felizmente, isto foi resolvido por Robert Stong em [25]. A seguir, uma breve descrição do que Stong fez.

Primeiramente, como vimos no Exemplo 2.10, o anel de cohomologia de $P(m,n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ é dado por

$$H^*(P(m,n), \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[c,d]}{c^{m+1} = 0, d^{n+1} = 0},$$

onde $c \in H^1(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$ e $d \in H^2(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$ são os geradores. É conhecido que, sobre $P(m,n)$, existem um fibrado linha ℓ com $W(\ell) = 1 + c$, com $c \in H^1(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$, e um fibrado vetorial η de dimensão 2 com $W(\eta) = 1 + c + d$. Com isso, é possível gerar, via somas de Whitney, fibrados sobre $P(m, n)$ cujas classes características tem a forma $(1 + c)^a(1 + c + d)^b$. Além disso, Stong provou o seguinte

Teorema 3.1. *Existem fibrados sobre $P(m, n)$ cujas classes de Stiefel-Whitney são:*

1. $1 + c + (d + c^2)$ *para* $m = 2$ *e* $n \geq 1$,

2. $(1 + c + (d + c^2))^2$ *para* $m = 4$ *ou* $m = 5$ *e* $n \geq 2$,

3. $(1 + c + (d + c^2))^2(1 + c + d) + c^6$, *para* $m = 6$ *e* $n \geq 1$,

4. $1 + c^2d^3$, *para* $m = 2$ *e* $n = 3$.

Além disso, Stong provou que a classe de Stiefel-Whitney de qualquer fibrado sobre $P(m, n)$ é um produto das classes acima com produtos de $1 + c$ e $1 + c + d$.

Os fibrados cuja classe de Stiefel-Whitney têm a forma $(1 + c)^a$ $(1 + c + d)^b$ serão chamados de fibrados *standards*; caso contrário, serão chamados de *exóticos*. Além disso, ainda nesse artigo, na página 91, Stong cita a existência de um fibrado exótico ξ sobre $P(2, n)$, cuja classe de Stiefel-Whitney é:

$$W(\xi) = 1 + \frac{c^2d}{1 + d},$$

a qual satisfaz

$$\begin{aligned}
W(\xi)(1 + c)^2(1 + c + d) &= (1 + \frac{c^2d}{(1 + d)})(1 + c)^2(1 + c + d) \\
&= (1 + \frac{c^2d}{(1 + c + d)})(1 + c)^2(1 + c + d) \\
&= (1 + c^2 + \frac{c^2d}{(1 + c + d)})(1 + c + d) \\
&= 1 + c + d + c^2(1 + c + d) + c^2d \\
&= 1 + c + (d + c^2)
\end{aligned}$$

onde a igualdade $\frac{c^2d}{1 + d} = \frac{c^2d}{1 + c + d}$ decorre do fato de que $c^3 = 0$ (pois $m = 2$). Note que, para $P(2, 3)$, temos

$$\frac{c^2d}{1 + d} = \frac{c^2d}{1 + c + d}$$

pois $c^3 = 0$. Com isso

$$W(\xi)(1 + c + d) = 1 + c^2d.$$

Observe também que

$$W(\xi)^2 = \left(1 + \frac{c^2d}{1 + d}\right)^2 = 1 + \frac{c^4d^2}{(1 + d)^2} = 1$$

pois $c^3 = 0$. Em suma, usando o Teorema 3.1, temos o seguinte

Corolário 3.2. *Qualquer fibrado vetorial ν sobre $P(2,n)$ com $n > 3$ satisfaz:*

$$W(\nu) = (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)^\epsilon$$

para certos a, b, ϵ inteiros não negativos, de tal sorte que $\epsilon = 0$ no caso em que ν é standard e $\epsilon = 1$ no caso em que ν é exótico.

Demonstração. Note que $n > 3$ exclui a classe $1 + c^2d^3$ que ocorre quando $m = 2$ e $n = 3$. $\square$

Sobre $P(4,n)$, existe um fibrado ξ cuja classe de Stiefel-Whitney é

$$W(\xi) = 1 + \frac{c^4d^2}{(1+d)^2},$$

a qual satisfaz

$$\begin{aligned} W(\xi)(1+c)^4(1+c+d)^2 &= \left(1+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)(1+c)^4(1+c+d)^2 \\ &= \left(1+\frac{c^4d^2}{(1+c+d)^2}\right)(1+c)^4(1+c+d)^2 \\ &= \left(1++c^4+\frac{c^4d^2}{(1+c+d)^2}\right)(1+c+d)^2 \\ &= (1+c+d)^2 + c^4(1+c+d)^2 + c^4d^2 \\ &= (1+c+d+c^2)^2, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir, usando o Teorema 3.1, o seguinte

Corolário 3.3. *Qualquer fibrado vetorial ν sobre $P(4,n)$ satisfaz:*

$$W(\nu) = (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)^\epsilon$$

para certos a, b, ϵ inteiros não negativos de tal sorte que $\epsilon = 0$ no caso em que ν é standard e $\epsilon = 1$ no caso em que ν é exótico.

Agora, sobre $P(6,n)$ existe um fibrado ξ cuja classe de Stiefel-Whitney é

$$W(\xi) = 1 + \frac{c^6d}{(1+d)^4} + \frac{c^4d^2}{(1+d)^2}$$

a qual satisfaz

$$\begin{aligned}
W(\xi)(1+c)^4(1+c+d)^2 &= \left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)(1+c)^4(1+c+d)^2\\
&= \left(1+c^4+\frac{c^6d}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)\\
&= \left(1+\frac{c^4}{(1+d)^2}+\frac{c^6d}{(1+d)^4}\right)(1+c+d)^2\\
&= (1+c+d)^2+\frac{c^4}{(1+d)^2}((1+d)^2+c^2)+\frac{c^6d}{(1+d)^4}(1+d)^2\\
&= (1+c+d)^2+c^4+\frac{c^6}{(1+d)^2}+\frac{c^6d}{(1+d)^2}\\
&= (1+c+d)^2+c^4+\frac{c^6(1+d)}{(1+d)^2}\\
&= (1+c+d)^2+c^4+\frac{c^6}{(1+d)}\\
&= (1+c+d+c^2)^2+\frac{c^6}{(1+d)}
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{c^6d}{(1+d)^4}(1+c+d)^2=\dfrac{c^6d}{(1+d)^4}(1+d)^2$ pois $c^8=0$. Portanto

$$\begin{aligned}
W(\xi)(1+c)^4(1+c+d)^3 &= \left((1+c+d+c^2)^2+\frac{c^6}{(1+d)}\right)(1+c+d)\\
&= (1+c+d+c^2)^2(1+c+d)+c^6.
\end{aligned}$$

Com isso, novamente usando o Teorema 3.1, temos o

Corolário 3.4. *Qualquer fibrado vetorial ν sobre $P(6,n)$ satisfaz:*

$$W(\nu)=(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)^{\epsilon}$$

para certos a,b,ϵ inteiros não negativos, onde $\epsilon=0$ no caso em que ν é standard e $\epsilon=1$ no caso em que ν é exótico.

A vantagem de trabalhar com os Corolários 3.2, 3.3 e 3.4 é que, embora talvez não aparente, as classes de Stiefel-Whitney escritas dessa maneira são mais fáceis de manejar. Veremos agora três observações, feitas em [3], as quais usaremos nas seções seguintes.

Observação 3.5. Se $(\nu^r\to P(m,n))\cup(\mathbb{R}^{m+2n+r}\to\{ponto\})$ é um fixed-data, então $\nu^r\to P(m,n)$ não borda, pois caso contrário seria possível obter, usando a sequência exata curta de Conner e Floyd, uma involução (N^m,S) fixando apenas um ponto, o que é um absurdo como visto no Exemplo 2.79.

Observação 3.6. Quando n é ímpar, $P(m,n)$ borda (vide Exemplo 2.10) e como $W(P(m,n))=(1+c)^m(1+c+d)^{n+1}$ só possui potências pares de d segue que $W(\nu^r)$ deve conter uma potência ímpar de d para que seja possível gerar, através de produtos de classes tangenciais de $P(m,n)$ e classes de ν^r, o único elemento não nulo

$c^m d^n \in H^{m+2n}(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$. Ou seja, para que $\nu^r \to P(m,n)$ tenha um número de Whitney não nulo.

Observação 3.7. Em [3] foi provado que $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade CP quando:

- m é ímpar
- $m \equiv 0 \pmod 4$ e n é ímpar
- $m = 2$ e n é par

Neste capítulo, completaremos o caso em que $m = 2$, mostrando que $P(2,n)$ satisfaz a propriedade CP somente no caso em que $n = 2^s - 1$ para algum $s \in \mathbb{N}$, e que a involução que fixa $P(2, 2^s - 1) \cup \{point\}$ é única a menos de cobordismo equivariante.

Primeiramente, mostraremos que se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ e $P(m,n)$ satisfaz CP, então ν^r não pode ser standard, o que implica $m = 2$ ou $m = 6$. Para o caso em que $m = 2$, mostraremos que $P(2,n)$ satisfaz CP se, e somente se, n é da forma $n = 2^s - 1$. Para o caso em que $m = 6$, mostraremos que $P(m,n)$ não satisfaz CP, completando a descrição para o caso em que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$. O caso em que $n = 1$ será estudado por completo: mostraremos que $P(m,1)$ satisfaz CP se, e somente se, $m = 2^t - 2$, para algum t. Para n ímpar, ficará em aberto apenas o caso em que $n \equiv 1(\text{mod } 4)$.

As seguintes observações contém algumas das principais ferramentas para o estudo da propriedade CP para variedades de Dold.

Observação 3.8. Dado um fibrado $\nu^r \to P(m,n)$ com $W(\nu^r) = 1 + u_1 + \ldots + u_r$, denote por $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ seu fibrado linha associado (ou fibrado linha de Hopf) e por $W(\lambda) = 1 + e$ sua classe de Stiefel-Whitney, onde $e \in H^1(\mathbb{R}P(\nu^r), \mathbb{Z}_2)$. Denote por $\mathbb{R}^{m+2n+r} \to \{ponto\}$ o fibrado trivial $(m+2n+r)$-dimensional sobre $\{ponto\}$, e por $\lambda' \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$. Pela sequência de Conner e Floyd sabemos que

$$(\nu^r \to P(m,n)) \cup (\mathbb{R}^{m+2n+r} \to \{ponto\})$$

é fixed-data se, e somente se, os fibrados $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ e $\lambda' \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ forem cobordantes, ou seja, se, e somente se, seus números de Whitney forem todos iguais (Teorema 2.28). Em particular, como $e^{m+2n+r-1}$ é não nulo em $H^*(\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}, \mathbb{Z}_2)$, segue que

$$1 = e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]_2 = e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2,$$

e usando a fórmula de Conner, obtemos $1 = e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 = \overline{u}_{m+2n}[P(m,n)]_2$, ou seja $\overline{u}_{m+2n} \neq 0$; aqui, $\overline{u}$ é a classe de Stiefel-Whitney inversa de u.

Observação 3.9. Descreveremos agora as classes $\widetilde{W}$ que foram introduzidas em [3]. Tais classes foram fundamentais em [3], e aqui as mesmas serão bastante utilizadas neste capítulo. Seja $\nu^r \to P(m,n)$ um fibrado vetorial, e considere seu fibrado projetivo associado $\pi : \mathbb{R}P(\nu^r) \to P(m,n)$. Denote por $\tau(P(m,n))$ o fibrado tangente a $P(m,n)$, por

$\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ o fibrado linha associado a ν^r e por $\tau(\mathbb{R}P(\nu^r))$ o fibrado tangente a $\mathbb{R}P(\nu^r)$. Segundo [2], existe um fibrado vetorial $\theta \to P(m,n)$, denominado fibrado tangente às fibras de $\mathbb{R}P(\nu^r)$, que satisfaz $\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) = \tau(P(m,n)) \oplus \theta$. Além disso, ainda por [2], sabemos que

$$\theta \oplus \mathbb{R} = \nu^r \otimes \lambda.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
(\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \otimes \lambda) \oplus \lambda &= (\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \otimes \lambda) \oplus (\mathbb{R} \otimes \lambda) \\
&= (\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \\
&= ((\tau(P(m,n)) \oplus \theta) \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda \\
&= (\tau(P(m,n)) \otimes \lambda) \oplus ((\theta \oplus \mathbb{R}) \otimes \lambda) \\
&= (\tau(P(m,n)) \otimes \lambda) \oplus (\nu^r \otimes \lambda) \otimes \lambda) \\
&= (\tau(P(m,n)) \otimes \lambda) \oplus \nu^r.
\end{aligned}$$

Definimos $\widetilde{W} = W(\tau(P(m,n)) \otimes \lambda) \cdot W(\nu)$, e assim, usando as notações
$W(P(m,n)) = 1 + w_1 + \ldots + w_{m+2n}$, onde $w_i \in H^i(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$,
$W(\nu^r) = 1 + u_1 + \ldots + u_r$, onde $u_i \in H^i(P(m,n), \mathbb{Z}_2)$,
$W(\lambda) = 1 + e$ com $e \in H^1(\mathbb{R}P(\nu^r), \mathbb{Z}_2)$,
segue, pelo Lema 33.1 em [2, pg 114], que

$$\widetilde{W} = [(1+e)^{m+2n} + (1+e)^{m+2n-1}w_1 + \ldots + w_{m+2n}](1 + u_1 + \ldots + u_r).$$

Por outro lado, sobre $\{ponto\}$, temos $\widetilde{W} = W(\tau(\{ponto\} \otimes \lambda))W(\mathbb{R}^{m+2n+r}) = 1$, ou seja, podemos escrever

$$\widetilde{W} = \begin{cases} [(1+e)^{m+2n} + (1+e)^{m+2n-1}w_1 + \ldots + w_{m+2n}](1 + u_1 + \ldots + u_r) & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ 1 & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

Agora, vamos mostrar que toda classe em $\widetilde{W}$ é um polinômio nas classes de $\mathbb{R}P(\nu^r)$ e e. Denote $\eta = \tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \otimes \lambda$, de modo que $\widetilde{W} = W(\eta)$ e veja que

$$\begin{aligned}
((\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \otimes \lambda) \oplus \lambda) \otimes \lambda &= (\tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \otimes \lambda \oplus \lambda) \oplus (\lambda \otimes \lambda) \\
&= \tau(\mathbb{R}P(\nu^r)) \oplus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 33.1 em [2, pg 114], segue que

$$\begin{aligned}
W(\tau(\mathbb{R}P(\nu^r))) &= W(\eta \otimes \lambda) \\
&= (1+e)^{m+2n+r} + (1+e)^{m+2n+r-1}\widetilde{W}_1 + \ldots + \widetilde{W}_{m+2n+r}
\end{aligned}$$

pois $\lambda \otimes \lambda$ é trivial. Com isso, pela Observação 3.8 concluímos que a condição para que $(\nu^r \to P(m,n)) \cup (\mathbb{R}^{m+2n+r} \to \{ponto\})$ seja o fixed-data de alguma involução é que todos os números da forma

$$\widetilde{W}_\omega e^{m+2n+r-|\omega|}[\mathbb{R}P(\nu^r)]$$

sejam nulos se, e somente se, $|\omega| > 0$, onde $\omega = (j_1, \ldots, j_s)$ e $\widetilde{W}_\omega$ denota o produto $\widetilde{W}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{W}_{i_s}$; em outras palavras, somente o número $e^{m+2n+r}[\mathbb{R}P(\nu^r)]$ deve ser não nulo.

3.1 Lemas técnicos e condições necessárias

O objetivo dessa seção é fornecer alguns lemas técnicos e condições necessárias para que $P(m,n)$ satisfaça a propriedade CP, para certos m e n específicos. As condições necessárias que veremos determinam informações sobre o fibrado ν^r em relação a sua dimensão ou a ser exótico ou standard, para o caso em que $P(m,n)$ satisfaz a propriedade CP. O seguinte lema nos dá um limitante para a dimensão de ν^r e será usado na demonstração do Lema 3.11.

Lema 3.10. *Se (M,T) é involução fixando $P(m,n) \sqcup \{ponto\}$ e ν^r é o fibrado normal de $P(m,n)$ em M, então $r \leq m+2n$.*

Demonstração. Vamos dividir em 3 casos:

1. n ímpar,

2. n par e $m \equiv 2(\text{mod } 4)$; nesse caso, em especial, mostraremos que $r \leq m+2$, e

3. n par e $m \equiv 0(\text{mod } 4)$.

Caso 1: Se n é ímpar, então $P(m,n)$ borda (vide Exemplo 2.10), portanto todos os seus números de Stiefel-Whitney são nulos. Em particular $w_{m+2n}[P(m,n)]_2 = 0$, e como $\chi(P(m,n)) \equiv w_{m+2n}[P(m,n)]_2 \text{ (mod 2)}$ segue que $\chi(P(m,n)) \equiv 0 \text{ (mod 2)}$. Aqui, $\chi(P(m,n)$ denota a caracteristica de Euler de $P(m,n)$, e o resultado acima pode ser visto em [7]. Portanto, se existir involução (M^{m+2n+r}, T) fixando $P(m,n) \sqcup \{ponto\}$, teremos:

$$\chi(M^{m+2n+r}) = \chi(P(m,n)) + \chi(\{ponto\}) \equiv 0 + 1 = 1 \text{ (mod 2)}$$

o que implica que $m+2n+r$ é par. Mas como m é par, segue que r também é par, e com isso segue de [2] que $u_r \neq 0$, o que implica $r \leq m+2n$. Acima, usamos o resultado de [2], que diz que se (M,T) é uma involução fixando F, entao $\chi(M) \equiv \chi(F)$ (mod 2).

Caso 2: temos, pela Observação 3.9, que

$$\widetilde{W} = [(1+e)^{m+2n} + w_1(1+e)^{m+2n-1} + \ldots + w_{m+2n}](1 + u_1 + \ldots + u_r)$$

são classes que satisfazem: $\widetilde{W}_i e^{m+2n+r-i-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 = 0$ para todo $i > 0$. Como n é par, m é par e $m \equiv 2$ (mod 4), segue que
$\widetilde{W}_1 = \binom{m+2n}{1}e + w_1 + u_1 = w_1 + u_1$
$\widetilde{W}_2 = \binom{m+2n}{2}e^2 + ew_1 + w_2 + u_2 + w_1u_1 = e^2 + ew_1 + w_2 + u_2 + w_1u_1.$
Se $u_1 = 0$, então $\widetilde{W}_1 = w_1$, e com isso $\widetilde{W}_2 + \widetilde{W}_1 e + e^2 = w_2 + u_2$. Denote $2k := m+2n+2$.

Então

$$\begin{array}{rcl} 0 & \neq & e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]_2 \\ & = & e^{r-3}e^{2k}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]_2 \\ & = & e^{r-3}e^{2k}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & e^{r-3}(e^2+\widetilde{W}_1 e+\widetilde{W}_2)^k[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & e^{r-3}(w_2+u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & 0 \end{array}$$

o que é absurdo, portanto $u_1 = c$. Também temos $w_1 = mc + (n+1)c = c$, portanto $\widetilde{W}_1 = 0$ e então $\widetilde{W}_2 + \widetilde{W}_1 e + e^2 = w_2 + w_1u_1 + u_2$. Suponha por absurdo que $r > m+2$ e denote $2k := m + 2n + m + 2$. Então $2k \leq m + 2n + r - 1$ e com isso:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \neq & e^{m+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]_2 \\ & = & e^{m+2n+r-1-2k}e^{2k}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}]_2 \\ & = & e^{m+2n+r-1-2k}(\widetilde{W}_2+\widetilde{W}_1 e+e^2)^k[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & e^{m+2n+r-1-2k}(ce+w_2+w_1u_1u_2)^k[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & e^{m+2n+r-1-2k}(\sum_{i=0}^{m+n+1}\binom{m+n+1}{i}(ec)^i(w_2+w_1u_1+u_2))^{m+n+1-i}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\ & = & 0 \end{array}$$

pois se $i > m$ então $c_i = 0$, e se $i \leq m$ então a classe $c^i(w_2 + w_1u_1 + u_2)^{m+n+1-i}$ tem dimensão $2m + 2n + 2 - 2i + i = m + 2n + 2 + (m - i) \geq m + 2n + 2$. Portanto tal classe é nula, absurdo, o que nos leva a concluir que $r \leq m + 2$.

Caso 3:

Considere:

$$W[1] = \begin{cases} (1+w_1+\ldots+w_{m+2n})[(1+e)+u_1+u_2(1+e)^{-1}+\ldots] & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ (1+e)^{m+2n+1} & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

$$W[2] = \begin{cases} (1+w_1+\ldots+w_{m+2n})[(1+e)^2+u_1(1+e)+u_2+\dfrac{u_3}{1+e}+\ldots] & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ (1+e)^{m+2n+2} & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

Então:

$$W[1]_2 = \begin{cases} w_2+u_2+w_1(e+u_1) & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ \binom{m+2n+1}{2}e^w & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

$$W[2]_4 = \begin{cases} w_2e^2 + \text{ termos com potência de e menor que 2} & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ \binom{m+2n+2}{4}e^4 & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

Como $m = 4k$, temos

$W(P(m,n)) = (1+c)^m(1+c+d)^{n+1} = (1+c^4)^k(1+\binom{n+1}{1}(c+d)+\binom{n+1}{2}(c+d)^2+\ldots)$, e portanto $w_1 = c$ e $w_2 = d + \binom{n+1}{2}c^2$. Se $r > m + 2n$, podemos considerar a classe:

$$\begin{aligned}
& W[1]_2^m W[2]_4^n e^{r-1-(m+2n)}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\
= \; & (ce + (w_2 + w_1u_1 + u_2))^m (w_2e^2 + e^{\leq 1})^n e^{r-1-(m+2n)}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\
= \; & (c^m e^m + e^{<m})(w_2^n e^{2n} + e^{2n}) e^{r-1-(m+2n)}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\
= \; & (c^m w_2^n e^{m+2n} + e^{<m+2n}) e^{r-1-(m+2n)}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\
= \; & c^m w_2^n [P(m,n)]_2 \\
= \; & c^m d^n [P(m,n)]_2 \\
= \; & 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$W[1]_2^m W[2]_4^n e^{r-1-(m+2n)}[\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}] = 0,$$

pois $W[1]_2 = 0$ em $\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$, o que é absurdo. Portanto $r \leq m + 2n$. $\square$

O lema seguinte nos dá uma condição necessária para a existência de uma involução (M, T) cujo conjunto de pontos fixos é $P(m,n) \sqcup \{point\}$, para o caso em que $n = 2^s - 1$ e $m = 2^t - 2^s + k$, onde s, t e k são inteiros e $0 \leq k < 2^s \leq 2^t$.

Lema 3.11. *Se existe involução (M,T) fixando $P(m,n) \sqcup \{ponto\}$ com $n = 2^s - 1$ e $m = 2^t - 2^s + k$, onde $0 \leq k < 2^s \leq 2^t$, então*

$$r = \begin{cases} 2^{s+1} - k + 2 \qquad (k \geq 2), & se\ 2^t = 2^s \\ 2^t - 2^s + 2 - k \qquad\qquad , & se\ 2^t > 2^s \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que exista involução (M,T) fixando $P(2^t - 2^s + k, 2^s - 1) \cup \{ponto\}$ nas condições do enunciado. Sabemos que:

$$W(\mathbb{R}P(\nu^r)) = (1+c)^k[(1+e)^r + u_1(1+e)^{r-1} + \ldots + u_r].$$

Como $e^r + u_1e^{r-1} + \ldots + u_r = 0$ segue que $W_i(\mathbb{R}P(\nu^r)) = 0$ para todo $i > k + r - 1$.

Por outro lado, escreva $2^t + 2^s + k - 2 + r = 2^p(2q+1)$. Então:

$$\begin{aligned}
W(\mathbb{R}P^{2^t+2^s+k-2+r-1}) &= (1+e)^{2^t+2^s+k-2+r} \\
&= (1+e^{2^p})^{2q+1} \\
&= \left(1 + \binom{2q+1}{1}e^{2^p} + \ldots + \binom{2q+1}{2q}e^{2^p 2q} + e^{2^p(2q+1)}\right) \\
&= \left(1 + \binom{2q+1}{1}e^{2^p} + \ldots + \binom{2q+1}{2q}e^{2^p 2q}\right).
\end{aligned}$$

Portanto $W_{2^p(2q)}(\mathbb{R}P^{2^t+2^s+k-2+r-1}) = \binom{2q+1}{2q}e^{2^p 2q} \neq 0$. Em suma, para que exista involução fixando $P(2^t - 2^s + k, 2^s - 1) \cup \{ponto\}$ é necessário que $2^p(2q) \leq k + r - 1$. Mas $2^p(2q)$ é par e $k + r - 1$ é ímpar, então $2^p(2q) \leq k + r - 1$ equivale a $2^p(2q) < k + r - 1$. Com isso:

$$\frac{k+r-1}{2^t + 2^s + k + r - 2} > \frac{2^p(2q)}{2^t + 2^s + k + r - 2} = \frac{2^p(2q)}{2^p(2q+1)} = \frac{2^p}{2q+1},$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&(k+r-1)(2q+1) > 2q(2^t+2^s+k+r-2) && \iff \\
&2q(k+r)+k+r-(2q+1) > 2q(k+r+2q(2^t+2^s-2)) && \iff \\
&r > 2q(2^t+2^s-2)+(2q+1)-k.
\end{aligned}$$

Agora, se $q \neq 0$, segue que $q \geq 1$ e portanto $2q+1 \geq 3$. Então:

$$\begin{aligned}
r > 2(2^t+2^s-2)+3-k &= (2^t+2^s-2+k)+-k+2^t+2^s-2+3-k \\
&= m+2n+(2^t-k)+(2^s-k)+1 \\
&> m+2n
\end{aligned}$$

pois $2^t-k \geq 0$ e $2^s-k \geq 0$, ou seja, se $q \neq 0$ temos $r > m+2n$, o que é absurdo. Portanto $q=0$, e com isso $2^t+2^s+k-2+r=2^p$. Como $0 < r \leq m+2n$, segue que

$$m+2n < m+2n+r \leq 2(m+2n) < 2\cdot 2^p,$$

ou seja, 2^p é a menor potência de 2 maior que $m+2n$. Se $2^t=2^s$, então $m+2n = k+2^{s+1}-2$. Se $k=0,1$ temos $m+2n < 2^{2+1}$ e com isso:

$$r = 2^{s+1}-2^{s+1}-k-2 = 2-k \leq 2,$$

o que é absurdo. Então nesse caso $2 \leq k < 2^s$, e com isso $2^p = 2^{s+2}$. Portanto

$$r = 2^{s+2}-(k+2^{s+1}-2) = 2^{s+1}-k+2.$$

Por outro lado, para $2^t > 2^s$, temos:

$$\begin{aligned}
m+2n &= 2^t+2^s+k+2^{s+1}-2 \\
&= 2^t+2^s+k-2 \\
&< 2^t+2^s+2^s \\
&\leq 2^{t+1}
\end{aligned}$$

e portanto $2^t \leq m+2n < 2^{t+1}$, o que implica $2^p = 2^{t+1}$. Com isso,

$$r = 2^{t+1}-(2^t-2^s+k+2^{s+1}-2) = 2^t-2^s-k+2.$$

□

O seguinte fato foi provado no meio da demonstração do Teorema 3.4 de [3]. Por facilidade, reescreveremos aqui a demonstração deste fato, pois a mesma será utilizada várias vezes no caso em que n é ímpar.

Observação 3.12. Suponha que $P(m,n)$ satisfaça a propriedade CP com n ímpar e $m \equiv 2 \pmod 4$. Denote por u a classe de Stiefel-Whitney de ν^r. Então, pelos Corolários 3.2 e

3.4, temos:

$$u = \begin{cases} (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\dfrac{c^2d}{1+d}\right) & \text{se } m=2 \\ (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\dfrac{c^6d}{(1+d)^4}+\dfrac{c^4d}{(1+d)^2}\right) & \text{se } m=6 \end{cases}$$

Vamos mostrar que se b é ímpar, então a é ímpar e $m > n$. Usando a notação $W(P(m,n)) = 1 + w_1 + \ldots + w_{m+2n}$, temos:
$w_1 = mc + (n+1)c = 0$ pois m é par e n é ímpar,
$w_2 = \binom{m}{2}c^2 + \binom{n+1}{2}c^2 + \binom{m}{1}\binom{n+1}{1}c^2 = [\binom{m}{2} + \binom{n+1}{2}]c^2 = \binom{m+n+1}{2}c^2$.
Temos também
$u_1 = ac + bc = (a+1)$
$u_2 = N_1c^2 + \binom{b}{1}d = N_1c^2 + d$ em que $N_1 \in \{0,1\}$.
Pela Observação 3.9 temos:
$\widetilde{W}_1 = (a+1)c$
$\widetilde{W}_2 = d + N_2c^2$.
Agora, se a é par, então $\widetilde{W}_1 = c$ e, com isso podemos considerar a evaluação

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{W}_1^m\widetilde{W}_2^n e^{r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ &= c^m(d+N_2c^2)^n e^{r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ &= c^m d^n[P(m,n)] \\ &= 1, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue pela Fórmula de Conner, absurdo, então a deve ser ímpar. Como a é ímpar segue que $\widetilde{W}_1 = 0$. Então, pela fórmula de Wu, temos

$$Sq^1(\widetilde{W}_2) = \widetilde{W}_1\widetilde{W}_2 + \binom{2-1-1+1}{1}\widetilde{W}_0\widetilde{W}_3 = \widetilde{W}_3.$$

Por outro lado

$$Sq^1(\widetilde{W}_2) = Sq^1(N_2c^2 + d) = cd.$$

Portanto $\widetilde{W}_3 = cd$. Se $m \leq n$, então podemos considerar

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{W}_2^{n-m}\widetilde{W}_3^m e^{r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ &= (d+N_2c^2)^{n-m}c^m d^n e^{r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ &= c^m d^n[P(m,n)] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isso é absurdo, de onde concluímos que $m > n$.

A seguinte proposição apresenta um fato que ocorre quando $P(m,n)$ satisfaz a propriedade CP e a dimensão de ν^r é máxima, ou seja, quando $r = m + 2n$. Este fato ocorrerá quando provarmos que $P(2, 2^s - 1)$ e $P(2^t - 2, 1)$ satisfazem a propriedade CP. Então o seguinte lema nos permitirá concluir que as involuções em questão são únicas a menos de cobordismo equivariante.

Lema 3.13. *Se (M, T) é involução fixando $P(m, n) \sqcup \{ponto\}$ e $\dim(\nu) = m + 2n$, então (M, T) é única a menos de cobordismo equivariante.*

Demonstração. Suponha que existam involuções (M_1, T_1) e (M_2, T_2) fixando $P(m, n) \cup \{ponto\}$, e denote o fibrado normal de $P(m, n)$ em M_1 por ν_1 e em M_2 por ν_2. Note que a união $(M_1, T_1) \cup (M_2, T_2)$ é cobordante a uma involução (N, S) com fixed-data $\nu_1 \to P(m, n) \cup \nu_2 \to P(m, n)$. Portanto seu conjunto de pontos fixos tem dimensão constante igual a $m + 2n$. Segue pelo resultado de Kosniowski e Stong de [7] que, como $r = m + 2n$, então (N, S) é cobordante à involução twist $(F \times F, twist)$, onde $F = P(m, n) \sqcup P(m, n)$, a qual tem fixed-data $(\tau(P(m, n)) \to P(m, n)) \sqcup (\tau(P(m, n)) \to P(m, n))$ e portanto borda equivariantemente. Assim concluímos que (N, S) borda equivariantemente, o que implica $\nu_1 \simeq \nu_2$ e portanto (M_1, T_1) é equivariantemente cobordante a (M_2, T_2), concluindo a prova da unicidade. □

3.2 P(m,n) com n ≡ 3 (mod 4)

Nesta seção nosso objetivo é provar que, se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ e $P(m, n)$ satisfaz a propriedade CP, então ν^r não pode ser standard. Como consequência disso, pelo Teorema 3.1, seguirá que se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ e $P(m, n)$ satisfaz CP, então $m = 2$ ou $m = 6$ (lembrando que $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ e n ímpar já foi excluído, vide Observação 3.7. Trataremos separadamente os casos $m = 2$ e $m = 6$ nas secções seguintes. Além disso, tal resultado também nos permitirá concluir que se $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ e $m > 6$ então $P(m, n)$ não satisfaz a propriedade CP, que é uma melhoria para o item 3 do Teorema 1.1, para o caso em que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$.

Teorema 3.14. *Se existe involução (M^{m+2n+r}, T) fixando $P(m, n) \cup \{ponto\}$ com $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, então ν^r não é standard.*

Demonstração. A prova será feita por absurdo. Suponha que exista uma involução (M^{m+2n+r}, T) com ν^r standard, ou seja, sua classe de Stiefel-Whitney é da forma $u = (1 + c)^a(1 + c + d)^b$. Como já excluímos o caso em que n é ímpar e $m \equiv 0 \text{ (mod 4)}$ (vide Teorema 1.1), podemos supor que $m \equiv 2 \text{ (mod 4)}$. Denote

$$\begin{aligned} u &= (1 + c)^a(1 + c + b)^b, \\ \overline{u} &= (1 + c)^{a'}(1 + c + b)^{b'}, \\ W(P(m, n)) &= 1 + w_1 + \ldots + w_{m+2n}. \end{aligned}$$

Aqui, $\overline{u}$ é a classe inversa de u. Como n é ímpar e ν^r é standard segue da Observação 3.6 que b deve ser ímpar, e pela Observação 3.12 segue que a é ímpar e $m > n$. Agora, denote por 2^s e 2^t as menores potências de 2 maiores que n e m respectivamente, ou seja, $2^{s-1} \leq n < 2^s$ e $2^{t-1} \leq n < 2^t$. Como $u\overline{u} = (1+c)^{a+a'}(1+c+d)^{b+b'} = 1$ segue que $b+b'$ é uma potência de 2 maior que n e então podemos supor, sem perda de generalidade, que $b+b' = 2^s$. Com isso $u\overline{u} = (1+c)^{a+a'+2^s} = 1$ implica que $a+a'+2^s$ é um múltiplo de 2^t. Então,

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= (1+c)^{a'}(1+c+d)^{b'} \\
&= (1+c)^{a'}\left(\sum_{j=0}^{b'} \binom{b'}{j}(1+c)^{b'-j}d^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{b'} \binom{b'}{j}(1+c)^{a'+b'-j}d^j \\
&= \binom{b'}{n}d^n(1+c)^{a'+b'-n} + \sum_{j=0, j\neq n}^{b'} \binom{b'}{j}(1+c)^{b'-j}d^j.
\end{aligned}$$

Pela Observação 3.8 sabemos que $\overline{u}_{m+2n} \neq 0$ e portanto $0 \neq \overline{u}_{m+2n} = \binom{b'}{n}\binom{a'+b'-n}{m}c^m d^n$ o que implica $\binom{b'}{n} = 1$ e $\binom{a'+b'-n}{m} = 1$. Agora, $\binom{b'}{n'} = 1$ implica $n \leq b'$ e com isso $2^{s-1} \leq n \leq b' < b'+b = 2^s$. Portanto, $b \leq n$. Escreva $(1+c)^a = 1 + ac + \ldots c^x$ para algum $x \leq m$, ou seja, $\binom{a}{x} = 1$ e x é o maior inteiro positivo com essa propriedade. Note que, se x é par e $x < m$, $\binom{a}{x} = 1$ implica em $\binom{a}{x+1} = 1$, pois a é ímpar, o que contraria a maximalidade de x. Portanto ou $x = m$ ou x é ímpar. Agora mostraremos que x é par e portanto $x = m$, o que implica $r = m + 2b$. Note que

$$\begin{aligned}
u &= (1+c)^a(1+c+d)^b \\
&= (1+c)^a\left(\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i}(1+c)^i d^{b-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i}(1+c)^{a+i}d^{b-i} \\
&= \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i}(1+ac+\ldots c^x)(1+c)^i d^{b-i}
\end{aligned}$$

e para cada i, o termo homogêneo de maior dimensão em $\binom{b}{i}(1+ac+\ldots c^x)(1+c)^i d^{b-i}$ tem dimensão menor ou igual a $x + i + 2b - 2i = x + 2b - i$. Com isso, o elemento de maior dimensão no somatório acima ocorre quando $i = 0$, e portanto $\binom{b}{0}c^x d^b = c^x d^b$ é a classe de u, não nula, com maior dimensão. Mas pelo caso 1 do Lema 3.10 sabemos que $u_r \neq 0$, portanto $r = x + 2b$, e como r é par, x é par, e portanto $x = m$ e $r = m + 2b$. Como $x = m$, seque que $\binom{a}{m} = 1$, e em particular $m \leq a$. Por outro lado, $\binom{a'+b'-n}{m} = 1$ implica $m \leq a' + b' - n$. Juntando essas duas informações e usando as definições de 2^s e 2^t, temos

$$\begin{aligned}
a + a' + 2^s &= a + a' + b + b' \\
&> a + a' + b' \\
&> a + a' + b' - n \\
&\geq m + m \\
&\geq 2(2^{t-1}) \\
&= 2^t.
\end{aligned}$$

Portanto $a+a'+2^s \geq 2^{t+1}$, pois $a+a'+2^s$ é múltiplo de 2^t. Por outro lado, $a, a' < 2^t$ e $n < m$ implicam que $2^s \leq 2^t$ e portanto $a+a'+2^s < 2^t+2^t+2^t = 3\cdot 2^t$, ou seja, $a+a'+2^s \leq 2^{t+1}$, o que implica $a+a'+2^s = 2^{t+1}$. Como $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ e $\binom{b'}{n} = 1$, segue do Teorema de Lucas que 1 e 2 também participam da partição diádica de b', ou seja, $b' \equiv 3(\text{mod } 4)$. Como a é ímpar e $a+a'+2^s = 2^t$, segue que a' também é ímpar. Juntando isto com o fato de que $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ e $\binom{a}{m} = 1$, segue que $a \equiv 3(\text{mod } 4)$. Como $b' \equiv n \equiv 3(\text{mod } 4)$, podemos escrever $b' = 4k+3$, $n = 4k'+3$ e então $\binom{a'+b'-n}{m} = 1$ equivale a $\binom{a'+4(k-k')}{m} = 1$. Portanto, pelo Teorema de Lucas, 2 participa da expansão diádica de a', e como a' é ímpar segue que $a' \equiv 3(\text{mod } 4)$. Pelo fato de que $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, segue que $n \geq 3$ e com isso $4 \leq 2^s \leq 2^t$. Portanto a igualdade $a+a'+2^s = 2^{t+1}$ implica $a+a' \equiv 0(\text{mod } 4)$. Mas $a \equiv a' \equiv 3(\text{mod } 4)$, e então $6 \equiv 0(\text{mod } 4)$, o que é um absurdo. Portanto não existe involução fixando $P(m,n) \cup \{ponto\}$ com $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ com ν^r standard, como queríamos. □

Corolário 3.15. *Se $P(m,n)$ com $n \equiv 3(mod\ 4)$ satisfaz a propriedade CP, então $m = 2$ ou $m = 6$ e ν^r é exótico.*

Corolário 3.16. *Se $n \equiv 3(mod\ 4)$ e $m > 6$, então $P(m,n)$ não satisfaz a propriedade CP.*

Demonstração. Os dois corolários seguem do mesmo argumento. Basta notar que, pelo Teorema 3.1, só existem fibrados exóticos sobre $P(2,n), P(4,n), P(5,n)$ e $P(6,n)$. Mas, pela Observação 3.7, os casos m ímpar ou $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ com n ímpar já estão excluídos, portanto m só pode ser igual a 2 ou 6. □

3.3 O caso P(2,n)

Nesta seção completaremos o estudo da propriedade CP para as variedades $P(m,n)$ com $m = 2$. Em [3], foi provado que $P(2, par)$ não satisfaz a propriedade CP e que $P(2,1)$ e $P(2,3)$ satisfazem CP. Pelo corolário 3.15, sabemos que, se $P(m,n)$ satisfaz a propriedade CP e $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, então $m = 2$ ou $m = 6$, e ν^r é necessariamente exótico. Aqui, provaremos que se n não possui sua partição diádica completa, isto é, $n \neq 2^s - 1$, então $P(2,n)$ não satisfaz a propriedade CP. Por outro lado, provaremos que se $n = 2^s - 1$, então $P(2, 2^s - 1)$ satisfaz a propriedade CP. Em suma, $P(2,n)$ satisfaz a propriedade CP se, e somente se, $n = 2^s - 1$ para algum $s \geq 1$. Comecemos pelo seguinte

Teorema 3.17. *Se $m = 2$, $n > 3$ é ímpar e $P(m,n)$ satisfaz a propriedade CP, então $n = 2^p - 1$ para algum inteiro $p \geq 1$.*

Demonstração. Já vimos que, nessas condições, se n e b forem ímpares, segue que $n < m = 2$, portanto b deve ser par e nesse caso, como $P(2, impar)$ borda, a classe de Stiefel Whitney de ν^r deve conter alguma potência ímpar de d. Com isso ν^r, não pode ser standard, já que b é par. Então, pelo Corolário 3.2, podemos escrever

$$u = (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right).$$

Com isso:

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)}\\
&= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)\\
&= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}+\frac{c^2d}{(1+c)^a(1+c+d)^b(1+d)}\\
&= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}+\frac{c^2d}{(1+d)^{b+1}}.
\end{aligned}$$

Primeiramente usamos o fato de que $\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)^2 = \left(1+\frac{c^4d}{1+d}\right) = 1$, ou seja, $\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)$ é seu próprio inverso, e depois usamos o fato de que c^2 multiplicado por qualquer termo que contenha um fator c é nulo, pois $c^3=0$. Como $\frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}$ só contém potências pares de d, segue do Lema 2.89 que $\overline{u}_{m+2n} = \binom{b+n-1}{n-1}c^2d^n \neq 0$, e portanto $\binom{b+n-1}{n-1}\neq 0$. Agora, escreva $n+1 = 2^p(2q+1)$ com $p,q\geq 0$. Então, $n = 2^p(2q+1)-1$ e suponha que $q>0$; nosso objetivo agora é chegar em um absurdo e concluir que $q=0$, o que implica $n = 2^p-1$. Temos

$$0\neq \binom{b+n-1}{n-1} = \binom{b+2^p2q+2^p-2}{2^p2q+2^p-2}.$$

Então, usando o Teorema de Lucas, concluímos que a partição diática de b é disjunta da partição diática de $2^p2+2^p-2 = 2^{p+1}+2^{p-1}+\ldots+2$, e como b é par, segue que b é múltiplo de 2^p. Lembre que:

$$\widetilde{W} = \frac{(1+c+e)^2(1+c+e^2+ce+d)^{n+1}}{(1+e)^2}(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)$$

sobre $\mathbb{R}P(\nu)$ e $\widetilde{W}=1$ sobre $\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}$. Portanto, em $\mathbb{R}P(\nu)$, $\widetilde{W}_1 = c$ se, e somente se, a é ímpar. Podemos definir $\widehat{W} = \frac{\widetilde{W}}{1+\widetilde{W}_1}$.
Dessa forma, temos

$$\widehat{W} = \frac{(1+c+e)^2(1+c+e^2+ce+d)^{n+1}}{(1+e)^2}(1+c)^{\overline{a}}(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^2d}{1+d}\right)$$

sobre $\mathbb{R}P(\nu)$ onde $\overline{a}=a$ se a é par, e $\overline{a}=a-1$ se a é ímpar. Com isso, como b e $n+1$ são pares, só aparecem potências pares de c nos fatores de $\widehat{W}$. Com isso, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\widehat{W} &= \frac{(1+e)^2(1+e^2+d)^{n+1}(1+d)^b}{(1+e)^2} && \text{módulo } c^2\\
&= (1+e^2+d)^{2^p(2q+1)}(1+d)^b && \text{módulo } c^2\\
&= (1+(e^2+d)^{2^p})^{2q+1}(1+d)^b && \text{módulo } c^2,
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{array}{rcll} \widehat{W}_{2^{p+1}} & = & (e^2+d)^{2^p} + \binom{b}{2^p} d^{2^p} + c^2x & \text{em } \mathbb{R}P(\nu) \\ \widehat{W}_{2^{p+1}} & = & 0 & \text{em } \mathbb{R}P^{2+2n+r-1}. \end{array}$$

Segue que

$$\begin{array}{rcll} \widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}} & = & (1+\binom{b}{2^p})d^{2^p} + c^2x & \text{em } \mathbb{R}P(\nu) \\ \widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}} & = & e^{2^{p+1}} & \text{em } \mathbb{R}P^{2+2n+r-1}. \end{array}$$

Elevando tais classes ao quadrado, obtemos

$$\begin{array}{rcll} (\widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}})^2 & = & (1+\binom{b}{2^p})d^{2^{p+1}} & \text{em } \mathbb{R}P(\nu) \\ (\widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}})^2 & = & e^{2^{p+2}} & \text{em } \mathbb{R}P^{2+2n+r-1}. \end{array}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{array}{rcl} u & = & (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\dfrac{c^2d}{1+d}\right) \\ & = & (1+c)^a(1+c+d)^b + (1+c)^a(1+c+d)^b\dfrac{c^2d}{1+d} \\ & = & (1+c)^a(1+c+d)^b + c^2d(1+d)^{b-1}. \end{array}$$

Dividiremos a partir de agora o argumento em dois casos, a saber, b sendo múltiplo ímpar ou par de 2^p. Se b é múltiplo ímpar de 2^p, então $b = 2^p(2j+1) = 2^{p+1}j + 2^p$, e com isso, segue do Teorema de Lucas que $\binom{b}{2^p} = 1$. Então

$$\begin{array}{rcl} u_{2^{p+1}} & = & \binom{b}{2^p}d^{2^p} + \text{ termos com potências de d distintas de } 2^p \\ u_{2^{p+1}} & = & d^{2^p} + \text{ termos com potências de d distintas de } 2^p \\ & \neq & 0 \end{array}$$

o que implica $r \geq 2^{p+1}$. Segue que

$$\begin{array}{rcl} m+2n+r-1 & \geq & 2+2(n+1)-2+r-1 \\ & = & 2+2(2^p(2q+1))-2+r-1 \\ & \geq & 2^{p+1}(2q+1)+2^{p+1}-1 \\ & = & 2^{p+2}q+2^{p+1}+2^{p+1}-1 \\ & = & 2^{p+2}q+2^{p+2}-1 \\ & > & 2^{p+2}, \end{array}$$

pois, por hipótese, $q \geq 1$. Então podemos considerar:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \neq & e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] \\ & = & (\widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}})^2 e^{2+2n+r-1-(2^{p+2})}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] \\ & = & 0 \cdot e^{2+2n+r-1-2^{p+2}}[\mathbb{R}P(\nu)] \\ & = & 0 \end{array}$$

o que é absurdo. Portanto b é um múltiplo par de 2^p, ou seja, múltiplo de 2^{p+1}. Então

$$(\widehat{W}_{2^{p+1}} + 2^{p+1})^2 = (1 + \tbinom{b}{2^p})d^{2^{p+1}} = d^{2^{p+1}} \text{ sobre } \mathbb{R}P(\nu)$$

e, como anteriormente, temos

$$(\widehat{W}_{2^{p+1}} + 2^{p+1})^2 = e^{2^{p+2}} \text{ em } \mathbb{R}P^{2+2n+r-1}.$$

Mas $n+1 = 2^p(2q+1) = 2^{p+1}q + 2^p < 2^{p+1}q + 2^{p+1} = 2^{p+1}(q+1)$. Com isso:

$$(\widehat{W}_{2^{p+1}} + 2^{p+1})^2(q+1) = d^{2^{p+1}(q+1)} = 0 \text{ sobre } \mathbb{R}P(\nu),$$

e por outro lado

$$(\widehat{W}_{2^{p+1}} + 2^{p+1})^2(q+1) = e^{2^{p+2}(q+1)} \text{ sobre } \mathbb{R}P^{2+2n+r-1}.$$

Se $b = 0$, então

$$\begin{aligned} u &= (1+c)^a(1+c+d)^b(\frac{c^2d}{(1+d)}) \\ &= (1+c)^a(1+\frac{c^2d}{1+d}) \\ &= (1+c)^a + \frac{c^2d}{1+d} \end{aligned}$$

e portanto $u_{2+2n} = c^2d^n \neq 0$. Isto implica que $r = 2+2n = 2+2(n+1)-2 = 2(2^q(2q+1)) = 2^{p+2}q + 2^{p+1} \geq 2^{p+2}$. Por outro lado, se $b \neq 0$, podemos escrever $b = 2^tj$, onde j é ímpar e $t \geq p+1$. Assim,

$$u = (1+c)^a(1+c+d)^b(1+\frac{c^2d}{(1+d)}) = (1+c)^a(1+c+d)^b + c^2d(1+d)^{b-1}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} u_{2+2^{t+1}} &= \tbinom{b}{2^t}d^{2^t} + \text{termos com potência de d diferente de } 2^t \\ &= d^{2^t} + \text{termos com potência de d diferente de } 2^t \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

e portanto $r \geq 2^{t+1} \geq 2^{p+2}$, ou seja, nos dois casos ($b=0$ e $b \neq 0$), temos $r \geq 2^{p+2}$. Com isso,

$$\begin{aligned} m+2n+r-1 &= 2+2n+2-2+r-1 \\ &= 2(n+1)+r-1 \\ &\geq 2(n+1)+2^{p+2}-1 \\ &= 2(2^p(2q+1))+2^{p+2}-1 \\ &= 2^{p+2}q+2^{p+1}2^{p+2}-1 \\ &= 2^{p+2}(q+1)+2^{p+1}-1 \end{aligned}$$

o que nos permite considerar

$$\begin{aligned} 0 &\neq e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] \\ &= (\widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}})^{2(q+1)} e^{2+2n+r-1-2^{p+2}(q+1)}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] \\ &= (\widehat{W}_{2^{p+1}} + e^{2^{p+1}})^{2(q+1)} e^{2+2n+r-1-2^{p+2}(q+1)}[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= 0 \cdot e^{2+2n+r-1-2^{p+2}(q+1)}[\mathbb{R}P(\nu)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é absurdo e portanto $q = 0$. Segue que $n + 1 = 2^p$ para algum $p \geq 0$, como queríamos. □

Teorema 3.18. *Dado $s \geq 1$, existe involução (M^{2+2n+r}, T) cujo conjunto de pontos fixos é $P(2, 2^s - 1) \cup \{ponto\}$, ou seja, $P(2, 2^s - 1)$ satisfaz a propriedade CP. Além disso, (M^{2+2n+r}, T) é única a menos de cobordismo equivariante.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos a unicidade de tal involução (M^{2+2n+r}, T) fixando $P(2, 2^s - 1) \cup \{ponto\}$. Note que $m = 2 = 2^s - 2^s + 2$ e $n = 2^s - 1$ com $2^t = 2^s > k = 2$. Então $m+2n = 2^{s+1}$ e, pelo Lema 3.11, segue que $r = 2^{s+1} - k + 2 = 2^{s+1}$. Assim, $r = m + 2n = 2^{s+1}$, e com isso, pelo Lema 3.13, segue que a classe de cobordismo equivariante de (M^{m+2n+r}, T) fixando $P(2, 2^s - 1) \cup \{ponto\}$ é única.

Agora provaremos a existência. Segundo [25], existe um fibrado ξ sobre $P(2, n)$ cuja classe é:

$$W(\xi) = 1 + \frac{c^2 d}{1+d} = 1 + c^2 d + c^2 d^2 + \cdots c^2 d^{2^s - 1}.$$

Por estabilidade, podemos supor que $r = m + 2n$, isto é, a menos de remoção de secções, ν^r tem dimensão $m + 2n$. Agora, segundo a Observação 3.8, basta provarmos que os fibrados $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ e $\lambda' \to \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ são cobordantes. Denote, cometendo um abuso de notação, as classes de Stiefel-Whitney
$W(\lambda) = 1 + e$ com $e \in H^1(\mathbb{R}P(\nu^r), \mathbb{Z}_2)$
$W(\lambda') = 1 + e$ com $e \in H^1(\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}, \mathbb{Z}_2)$.
Como $2 + 2n + r - 1 < 2^{s+2}$, segue que

$$W(\mathbb{R}P(2 + 2n + r - 1)) = (1 + e)^{2+2^{s+1}-2+2^{s+1}} = (1 + e)^{2^{s+2}} = 1,$$

e portanto o único número não nulo do fibrado λ' é $w_1(\lambda)^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}]_2 = e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{2+2n+r-1}] = 1$. Vamos mostrar que o mesmo ocorre com $\lambda' \to \mathbb{R}P(\nu^r)$. Primeiramente, note que

$$\overline{u} = u = 1 + \frac{c^2 d}{1+d} = 1 + c^2 d + c^2 d^2 + \cdots c^2 d^{2^s - 1}$$

pois

$$\left(1 + \frac{c^2 d}{1+d}\right)^2 = 1 + \frac{c^4 d}{(1+d)^2} = 1.$$

Com isso, $\overline{u}_{2+2n} = c^2 d^n$, e portanto, pela fórmula de Conner, temos

$$e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 = \overline{u}_{2+2n}[P(m,n)]_2 = 1.$$

Agora, falta mostrar que, dados quaisquer $i_1, \ldots, i_s, l$ inteiros positivos $i_1 + \ldots + i_s + l = m + 2n + r - 1 = 2^{s+2} - 1$, então

$$W(\mathbb{R}P(\nu^r))_{i_1} \cdots W(\mathbb{R}P(\nu^r))_{i_s} e^l [W(\mathbb{R}P(\nu^r)] = 0.$$

Denote $W = W(\mathbb{R}P(\nu^r))$. Então
$W = (1+c)^2(1+c+d)^{(2^s-1)+1}[(1+e)^{2^{s+1}} + u_1(1+e)^{2^{s+1}-1} + \ldots + u_{2^{s+1}}]$
com $e^{2^{s+1}} + u_1 e^{2^{s+1}-1} + \ldots + u_{2^{s+1}} = 0$. Escrevendo $(1+e)^s_* = (1+e)^s + e^s$, temos que:

$$\begin{aligned} W &= (1+c)^2[1 + c^2(1+e)_*^{2^{s+1}-2} + \ldots + c^2 d^{2^s-2}] \\ &= 1 + c^2 + c^2(1+e)_*^{2^{s+1}-2} + \ldots + c^2 d^{2^s-2}. \end{aligned}$$

Note que a maior classe não nula em W é $c^2 d^{2^s-2}$, a qual tem dimensão $2 + 2 \cdot (2^s - 2) = 2 + 2^{s+1} - 4 = 2^{s+1} - 2$, e portanto $W_i = 0$ se $i \geq 2^{s+1}$. Além disso, $W_i = 0$ se i é ímpar. Caso i seja par e $i \leq 2^{s+1} - 2$, W_i é múltiplo de c^2. Segue que, dados quaisquer inteiros positivos i, j, o produto $W_i W_j$ é múltiplo de $c^4 = 0$, ou seja, qualquer produto de duas classes W_i é nula. Então só falta mostrar que os números da forma $e^j W_i[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2$ com $i + j = 2^{s+2}$ são nulos, onde $i, j > 0$. Pelos comentários acima, basta considerarmos apenas $i + j = 2^{s+2}$ com $0 < i \leq 2^{s+1} - 2$ e i par. Nesse caso, temos:

$$W_i = u_2 \binom{2^s-2}{i-2} e^{i-2} + u_4 \binom{2^s-4}{i-4} e^{i-4} + \ldots + u_i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & W_i e^{2+2n+r-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ = \; & (u_2 \tbinom{2^s-2}{i-2} e^{i-2} + u_4 \tbinom{2^s-4}{i-4} e^{i-4} + \ldots + u_i) e^{2^{s+1}-1-i}[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ = \; & (u_2 \tbinom{2^s-2}{i-2} e^{2^{s+1}-3} + u_4 \tbinom{2^s-4}{i-4} e^{2^{s+1}-5} + \ldots + u_i e^{2^{s+1}-1-i})[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\ = \; & u_2 \overline{u}_{2^s-2}[P(2, 2^s-1)]_2 + \ldots + u_i \overline{u}_{2^s-i}[P(2, 2^s-1)]_2. \end{aligned}$$

Mas já vimos que $u = \overline{u}$ onde

$$\overline{u}_i = u_i = \begin{cases} 0 & \text{se i é ímpar} \\ c^2 d^{i-2} & \text{se i é par} \end{cases}$$

Ou seja, para cada $1 \leq i \leq 2^s - 1$ ou u_i é nula ou é divisível por c^2. Como $c^4 = 0$, segue que $u_i u_j = 0$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq 2^s - 1$, o que completa a demonstração. □

Combinando os resultados vistos nesta seção com o fato de que $P(2,1)$ e $P(2,3)$ satisfazem CP, obtemos o seguinte:

Corolário 3.19. *$P(2,n)$ satisfaz a propriedade CP se, e somente se, $n = 2^s - 1$ para algum $s \geq 1$.*

3.4 Caso P(m,1)

Nesta seção vamos nos concentrar no caso $P(m,1)$ com $m \equiv 2 \pmod 4$ e com $m > 6$, pois os casos em que $n = 1$ com $m \equiv 0 \pmod 4$, $P(2,1)$ e $P(6,1)$ seguem dos Teoremas 1.1 e 1.2. Nosso objetivo nesta seção é concluir que $P(m,1)$ satisfaz a propriedade CP se, e somente se, $m = 2^p - 2$ para algum $p \geq 1$.

Teorema 3.20. *Se $P(m,1)$ satisfaz a propriedade CP, então $m = 2^p - 2$ para algum $p \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que exista involução (M^{m+2+r}, T) fixando $P(m,1) \cup \{point\}$ onde $m \equiv 2 \pmod 4$ e suponha, por absurdo, que $m + 2$ não seja uma potência de 2. Como $m > 6$, segue que ν^r é standard. Denote

$$u = (1+c)^a(1+c+d)^b$$
$$\overline{u} = (1+c)^{a'}(1+c+d)^{b'}$$

e denote por 2^t a menor potência de 2 maior que m. Então podemos supor, sem perda de generalidade, que $a < 2^t$ e $b < 2$, pois $(1+c)^{2^p} = 1 + c^{2^t} = 1$ e $(1+c+d)^2 = (1+c^2+d^2) = 1+c^2 = (1+c)^2$. Como n é ímpar, segue da Observação 3.6 que a classe de Stiefel-Whitney de ν^r deve conter uma potência ímpar de d. Então b é ímpar e portanto $b = 1$. Como $u\overline{u} = (1+c)^{a+a'}(1+c+d)^{b+b'}$ concluímos que $b+b' = 2$, o que implica $b' = 1$ e $(1+c)^{a+a'+2} = 1$. Portanto, $a+a'+2$ é múltiplo de 2^t. Escreva $(1+c)^a = 1 + ac + \ldots c^x$ para algum $x \leq m$, ou seja, $\binom{a}{x} = 1$ e x é o maior inteiro positivo com essa propriedade. Note que, se x é par e $x < m$, $\binom{a}{x} = 1$ implica em $\binom{a}{x+1} = 1$, pois a é ímpar, o que contrariaria a maximalidade de x. Portanto, ou $x = m$ ou x é ímpar. Mostraremos que x é par e que $r = m+2$. Note que

$$\begin{aligned} u &= (1+c)^a(1+c+d) \\ &= (1+c)(1+ac+\ldots c^x) + d(1+ac+\ldots c^x) \end{aligned}$$

e com isso a classe de maior dimensão em u é $c^x d$. Mas pelo caso 1 do Lema 3.10 sabemos que $u_r \neq 0$, portanto $r = x + 2b$, e como r é par, x é par, portanto $x = m$, $\binom{a}{m} = 1$ e $r = m+2$. Pela Observação 3.8, sabemos que $\overline{u}_{m+2n} \neq 0$ e portanto $\overline{u}_{m+2n} = \binom{b'}{n}\binom{a'+b'-n}{m} c^m d^n \neq 0$. Isto acarreta $\binom{b'}{n} = 1$ e $\binom{a'+b'-n}{m} = \binom{a'+1-n}{m} = 1$, e com isso, $m \leq a' + b' - 1$. Como $2^{t-1} \leq m < 2^t$, temos

$$\begin{aligned} a + a' + 2 &= a + a' + b + b' \\ &> a + a' + b' \\ &> a + (a' + b' - 1) \\ &\geq m + m \\ &\geq 2(2^{t-1}) \\ &= 2^t, \end{aligned}$$

e portanto $a + a' + 2 \geq 2^{t+1}$ pois $a + a' + 2$ é múltiplo de 2^t. Por outro lado, $a, a' < 2^t$ e $6 < m < 2^t$ implicam em $a + a' + 2 < 3 \cdot 2^t$. Concluímos então que $a + a' + 2 = 2^{t+1}$, ou seja, $a + a' = 2^{t+1} - 2 = (2^t - 1) + (2^t - 1)$, e como $a, a' < 2^t$, a única possibilidade é $a = 2^t - 1$ e $a' = 2^t - 1$, ou seja

$$u = \overline{u} = \frac{1 + c + d}{1 + d}.$$

Agora, denotando $W = W(\mathbb{R}P(\nu^r))$ e $m + 2 = 2^p(2q + 1)$, nas notações da Observação 3.8, nosso objetivo será comparar alguns números de $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ e $\lambda' \to \mathbb{R}^{m+2+m+2}$ e encontrar um absurdo. Lembrando que $r = m + 2$, temos

$$\begin{aligned} W(P(m,1)) &= (1+c)^m(1+c+d)^2 = (1+c)^{m+2} = (1+c)^{2^p(2q+1)} \\ W &= (1+c)^{2^p(2q+1)}[(1+e)^{2^p(2q+1)} + u_1(1+e)^{2^p(2q+1)} + \ldots + u_{2^p(2q+1)}]. \end{aligned}$$

Considere

$$W[s] = \frac{W}{(1+e)^{m+2-s}} = \frac{W}{(1+e)^{2^p(2q+1)-s}}.$$

Denotando $W(P(m,n)) = 1 + w_1 + \ldots + w_{m+2n}$, da Observação 2.81, temos que

$$\begin{aligned} w[s]_{2s} &= w_s e^s + \text{ termos cuja potência de e é menor que s} \\ w[s]_{2s+1} &= (w_{s+1} + u_{s+1})e^s + \text{ termos cuja potência de e é menor que s.} \end{aligned}$$

Por simplicidade, usaremos a notação $e^{<n}$ para indicar um somatório de termos com potências de e menores que n. Temos

$$\begin{aligned} W[2^p]_{2^{p+1}} &= w_{2^p} e^{2^p} + e^{<2^p} \\ &= c^{2^p} e^{2^p} + e^{<2^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W[2^{p+1}q - 1]_{2^{p+2}q-1} &= (w_{2^{p+1}q} + u_{2^{p+1}q})e^{2^{p+1}q-1} + e^{<2^{p+1}q-1} \\ &= \left(\binom{2^p(2q+1)}{2^{p+1}q} c^{2^{p+1}q} + c^{2q} d^{2^p-2}\right) e^{2^{p+1}q-1} + e^{<2^{p+1}q-1}. \end{aligned}$$

Note que $W[r]$ corresponde a

$$\begin{aligned} W'[r] = \frac{\mathbb{R}P^{m+2+m+2}}{(1+e)^{m+2-r}} &= (1+e)^{2(m+2)-(m+2)+r)} \\ &= (1+e)^{m+2+r)} \\ &= (1+e)^{2^p(2q+1)+r)}, \end{aligned}$$

e com isso

$$\begin{aligned} W'[2^p] &= (1+e)^{2^p(2q+1)+2^p} \\ W'[2^{p+1}q - 1] &= (1+e)^{2^p(2q+1)+2^{p+1}q-1} = (1+e)^{2^p(2q+1)+2^{p+1}q-1} = (1+e)^{2^p(4q+1)-1}. \end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
W'[2^p]_{2^{p+1}} &= \binom{2^p(2q+1)+2^p}{2^{p+1}}e^{2^{p+1}} = \binom{2^{p+1}q+2^{p+1}}{2^{p+1}}e^{p+1} = (q+1)e^{p+1}.\\
W[2^{p+1}q-1]_{2^{p+2}q-1} &= \binom{2^p(4q+1)-1}{2^{p+2}q-1}e^{2^{p+2}q-1}.
\end{aligned}
$$

Mas note que $2^p(4q+1)-1 = 2^{p+2}q+2^p-1 = 2^{p+2}q+2^{p-1}+\ldots+1$ não contém 2^p em sua partição diádica. Por outro lado, se 2^j é a menor potência de 2 da partição diádica de q, então

$$2^{p+2}q-1 = (2^{p+2+j}-1)+ \text{ potências de 2 maiores que } p+2+j.$$

Ou seja,

$$2^{p+2}q-1 = (2^{p+2+j-1}+\ldots+1)+ \text{ potências de 2 maiores que } p+2+j$$

e portanto contém 2^p em sua partição diádica. Logo, pelo Teorema de Lucas, $\binom{2^p(4q+1)-1}{2^{p+2}q-1} = 0$. Com isso, o número $W'[2^p]_{2^{p+1}}W'[2^{p+1}q-1]_{2^{p+2}q-1}[\mathbb{R}P^{2(m+2)}] = 0$ e por outro lado

$$
\begin{aligned}
& W'[2^p]_{2^{p+1}}W'[2^{p+1}q-1]_{2^{p+2}q-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]\\
= \;& (c^{2^p}e^{2^p}+e^{<2^p})((w_{2^{p+1}q}+u_{2^{p+1}q})e^{2^{p+1}q-1}+e^{<2^{p+1}q-1})[\mathbb{R}P(\nu^r)]\\
= \;& (\tbinom{2^p(2q+1)}{2^{p+1}q}c^{m+2}+c^m d)e^{2^{p+1}q+2^p-1}+e^{<2^{p+1}q+2^p-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)].
\end{aligned}
$$

Como $H^*(\mathbb{R}P(\nu^r))$ é um $H^*(P(m,1),\mathbb{Z}_2)$-módulo gerado por $1, c, \ldots, c^{r-1}$ com $r = m+2$, segue que qualquer potência de e em $e^{<2^{p+1}q+2^p-1}$ está multiplicada por um elemento de $H^*(P(m,1),\mathbb{Z}_2)$ de dimensão maior que $m+2$, pois $2^{p+1}q+2^p-1 = m+1$. Então, usando $c^{m+1} = 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
& (\tbinom{2^p(2q+1)}{2^{p+1}q}c^{m+2}+c^m d)e^{2^{p+1}q+2^p-1}+e^{<2^{p+1}q+2^p-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]\\
= \;& (\tbinom{2^p(2q+1)}{2^{p+1}q}c^{m+2}+c^m d)e^{2^{p+1}q+2^p-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]\\
= \;& c^m d e^{2^{p+1}q+2^p-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]\\
= \;& c^m d[P(m,1)] = 1,
\end{aligned}
$$

absurdo. Portanto $m = 2^p-2$ para algum inteiro positivo p, como queríamos. □

Agora, para completar o caso em que $n = 1$, vamos mostrar que $P(2^t-2,1)$ satisfaz a propriedade CP para qualquer $t > 1$.

Teorema 3.21. *$P(2^t-2,1)$ com $t > 1$ satisfaz a propriedade CP.*

Demonstração. Primeiramente, note que, como $m = 2^t-2$ e $n = 1 = 2-1$, temos, pelo Teorema 3.11, que $r = 2^t-2+2 = 2^t = m+2$, ou seja, caso exista uma involução (M^{m+2n+r},T) fixando $P(2^t-2,1)$, o fibrado ν^r terá dimensão máxima ($r = m+2$). Com isso, segundo o Teorema 3.13, (M^{m+2n+r},T) será única a menos de cobordismo equivariante. Agora vamos provar que, de fato, existe tal involução (M^{m+2n+r},T). Considere o fibrado linha canônico $\ell \to \mathbb{R}P^{2^t-2}$ e denote por $\ell^\perp$ o complemento ortogonal do fibrado

ℓ no fibrado produto $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}P^m$. Então $W(\ell^\perp) = \dfrac{1}{1+\alpha}$, onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}_2)$. Considere a aplicação $f : S^m \times \mathbb{C}P^n \to S^m$ definida por $f(x, [z]) = x$. Então f induz $F : P(m,1) \to \mathbb{R}P^m$ e podemos considerar o pullback $F!(\ell^\perp) \to P(m,1)$, cuja classe de Stiefel-Whitney é $W(F!(\ell^\perp)) = \dfrac{1}{1+c}$. Defina $\nu^r = F!(\ell^\perp) \oplus \eta$, onde η é o fibrado vetorial bidimensional sobre $P(m,1)$ cuja classe de Stiefel-Whitney é $1 + c + d$ (vide Teorema 3.1). Então

$$W(\nu^r) = \frac{1+c+d}{1+c} = 1 + \frac{d}{1+c} = 1 + d + cd + \ldots + c^m d.$$

Agora, seguindo a ideia da Observação 3.8, para mostrar que $\nu^r \to P(m,1) \cup \mathbb{R}^{2(m+2)} \to \{ponto\}$ é fixed-data de alguma involução $(M^{2(m+2)}, T)$, vamos mostrar que os fibrados-linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ e $\lambda' \to \mathbb{R}P^{2(m+2)-1}$ possuem os mesmos números de Whitney. Por simplicidade, denote
$W(\lambda) = 1 + e$ com $e \in H^1(\mathbb{R}P(\nu^r))$
$W(\lambda') = 1 + e$ com $e \in H^1(\mathbb{R}P^{2(m+2)-1})$
e note que
$W(\mathbb{R}P^{2(m+2)-1}) = (1+e)^{2(m+2)} = (1+e)^{2^{t+1}} = 1.$
Portanto, o único número de Whitney não nulo de λ' é $w_1(\lambda')^{2(m+2)-1}[\mathbb{R}P^{2(m+2)-1}] = e^{2(m+2)-1}[\mathbb{R}P^{2(m+2)-1}]_2$.
Com isso em mãos, basta provarmos que o único número de Whitney não nulo do fibrado $\lambda \to \mathbb{R}P(\nu^r)$ é $w_1(\lambda')^{2(m+2)-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2$. Note que, pela fórmula de Conner, $w_1(\lambda')^{2(m+2)-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 = e^{2(m+2)-1}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 = \overline{u}_{m+2}[P(m,1)]_2$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{u} = \frac{1}{W(\nu^r)} &= \frac{1+c}{1+c+d} \\
&= \frac{1+c+d+d}{1+c+d} \\
&= 1 + \frac{d}{1+c+d} \\
&= 1 + d + cd + \ldots + c^m d
\end{aligned}$$

e portanto $\overline{u}_{m+2}[P(m,1)]_2 = c^m d[P(m,1)]_2 = 1$. Além disso, veja que
$W(P(m,1)) = (1+c)^m(1+c+d)^2 = (1+c)^{2^t-2}(1+c+d)^2 = (1+c)^{2^t} = 1$
e portanto, denotando $W(\nu^r) = 1 + u_1 + \ldots + u_{m+2}$, temos
$W(\mathbb{R}P(\nu^r)) = 1 \cdot ((1+e)^{2^t} + u_1(1+e)^{2^t-1} + \ldots + u_{m+2})$
com $e^{2^t} + u_1 e^{2^t-1} + \ldots + u_{2^t} = 0$ (vide Teorema 2.80). Então, denotando $W(\mathbb{R}P(\nu^r)) = 1 + W_1 + \ldots + W_{2(2+m)}$, temos:

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \geq 2^t \\ 0 & \text{se i é ímpar} \\ \binom{2^t-2}{i-2} de^{i-2} + \binom{2^t-3}{i-3} dce^{i-3} + \ldots + dc^{i-2} & \text{se } i < 2^t \text{ é par} \end{cases}$$

No caso em que i é par, podemos escrever $W_i = dA_{i-2}$ com $A_{i-2} \in H^{i-2}(\mathbb{R}P(\nu^r), \mathbb{Z}_2)$. Portanto, para quaisquer i, j temos $W_iW_j = d^2A_{i-2}A_{i-2} = 0 \cdot A_{i-2}A_{i-2} = 0$. Resta ver que os números da forma $W_ie^j[\mathbb{R}P(\nu^r)]$ são nulos. Como $W_i = 0$ para todo $i \geq 2^t = m+2$ e para todo i ímpar, podemos supor que i é par e $i \leq 2^t - 2$. Denotando $j = 2^{t+1} - 1 - i$ temos $i + j = 2^{t+1} - 1 = 2(m+2) - 1$ e usando a fórmula de Conner, segue que

$$\begin{aligned}
& W_ie^j[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\
= & \left(\tbinom{2^t-2}{i-2}de^{i-2} + \tbinom{2^t-3}{i-3}dce^{i-3} + \ldots + dc^{i-2}\right)e^j[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\
= & \tbinom{2^t-2}{i-2}de^{2^{t+1}-3}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 + \tbinom{2^t-3}{i-3}dce^{2^{t+1}-4}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 + \ldots + dc^{i-2}e^{2^{t+1}-(i+1)}[\mathbb{R}P(\nu^r)]_2 \\
= & \tbinom{2^t-2}{i-2}d\overline{u}_{2^t-2}[P(m,n)]_2 + \tbinom{2^t-3}{i-3}dc\overline{u}_{2^t-3}[P(m,n)]_2 + \ldots + dc^{i-2}\overline{u}_{2^t-i}[P(m,n)]_2.
\end{aligned}$$

Mas como
$\overline{u} = 1 + d + cd + \ldots + c^md$, toda classe não nula de $\overline{u}$ é divisível por d, e como $d^2 = 0$, segue que $d \cdot \overline{u}_s = 0$ para todo $1 \leq s \leq 2^t = m+2$. Portanto

$$\begin{aligned}
& W_ie^j[\mathbb{R}P(\nu^r)] \\
= & \tbinom{2^t-2}{i-2}d\overline{u}_{2^t-2}[P(m,n)]_2 + \tbinom{2^t-3}{i-3}dc\overline{u}_{2^t-3}[P(m,n)]_2 + \ldots + dc^{i-2}\overline{u}_{2^t-i}[P(m,n)]_2 \\
= & 0,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

3.5 P(6,n) com n ≡ 3 (mod 4)

Nesta seção completaremos o estudo da propriedade CP para o caso em que $m = 6$ e $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$. Veremos que tais variedades não satisfazem a propriedade CP.

Teorema 3.22. *Não existe involução fixando $P(6,n) \cup \{ponto\}$ com $n \equiv 3$ (mod 4).*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista involução (M^{6+2n+r}, T) fixando $P(6,n) \cup \{ponto\}$. Pelo Teorema 3.14 segue que ν^r não é standard. Vamos dividir a prova em dois casos: $n = 3$ e $n \geq 7$. No primeiro caso, note que $6 = 2^3 - 2$ e $3 = 2^2 - 1$. Então, pelo Lema 3.11, concluímos que $r = 4$. Denore $u = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Em [3] foi provado que não existe uma tal involução com $u_j = 0$ para $j \geq 4$. Então $u_4 \neq 0$. Denotando $u_4 = \alpha d^2 + \beta c^2d + \gamma c^4$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$, e usando a fórmula de Wu e as propriedades dos quadrados de Steenrod, temos:

$$u_1u_4 = Sq^1(\alpha d^2 + \beta c^2d + \gamma c^4) = \alpha Sq^1(d^2) + \beta Sq^1(c^2d) + \gamma Sq^1(c^4) = \beta c^3d.$$

Agora, vamos dividir em dois casos: $u_1 = 0$ ou $u_1 = c$. Se $u_1 = 0$, temos $\beta c^3d = 0$, e portanto $\beta = 0$. Denotando $u_2 = \delta d + \epsilon c^2$, e usando a fórmula de Wu, temos

$$Sq^1(u_2) = u_1u_2 + \tbinom{2-1-1+1}{1}u_ou_3 = u_3.$$

Então

$$u_3 = Sq^1(\delta d + \epsilon c^2) = \delta d) + \epsilon Sq^1(c^2) = \delta cd.$$

Com isso,

$$u = 1 + (\delta d + \epsilon c^2) + (\delta cd) + (\alpha d^2 + \gamma c^4).$$

Já vimos que, como n é ímpar, u deve conter uma potência ímpar de d, o que implica $\delta = 1$. Com isso, usando a fórmula de Wu, obtemos

$$\begin{aligned} u_2 u_4 &= Sq^2(u_4) \\ &= Sq^2(\alpha d^2 + \gamma c^2) \\ &= \alpha(dSq^2(d) + (cd)^2 + dSq^2(d)) + \gamma(c^2 Sq^2(c^2) + Sq^1(c^2)Sq^1(c^2) + Sq^2(c^2)) \\ &= \alpha c^2 d^2. \end{aligned}$$

Mas, por outro lado,

$$u_2 u_4 = (d + \epsilon c^2)(\alpha d^2 + \gamma c^4) = \alpha d^3 + \gamma dc^4 + \alpha\epsilon c^2 d^2 + \epsilon\gamma c^6$$

o que implica $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$. Portanto $u_4 = 0$, absurdo.
Agora, vamos ao caso em que $u_1 = c$. Usando a fórmula de Wu, temos

$$u_1 u_4 = Sq^1(\alpha d^2 + \beta c^2 d + \gamma c^4) = \beta c^3 d,$$

e por outro lado

$$u_1 u_4 = c(\alpha d^2 + \beta c^2 d + \gamma c^4) = \alpha cd^2 + \beta c^3 d + \gamma c^5.$$

Portanto $\alpha = 0, \gamma = 0$ e com isso $u_4 = c^2 d$. Além disso, denotando $u_2 = \delta d + \epsilon c^2$, temos, usando a fórmula de Wu, que $Sq^1(u_2) = c(\delta d + \epsilon c^2) + u_3$, o que implica $u_3 = \delta cd + \epsilon c^3 + \delta cd = \epsilon c^3$, ou seja, $u_3 = \delta c^3$. Temos também

$$u_2 u_4 = Sq^2(u_4) = Sq^2(c^2 d) = c^4 d + 0 \cdot d^2 + c^2 d^2 = c^4 d + c^2 d^2.$$

Por outro lado,

$$u_2 u_4 = (\delta d + \epsilon c^2)c^2 d = \delta c^2 d^2 + \epsilon c^4 d,$$

o que implica $\delta = 1$ e $\epsilon = 1$. Juntando essas informações, obtemos

$$u = 1 + c + d + c + c^3 + c^2 d = (1+c)^3 + (1+c^2)d = (1+c+d)(1+c)^2,$$

o que é absurdo pois $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, e pelo Teorema 3.14 o fibrado ν^r não poderia ser standard. Isso encerra a prova para o caso $P(6,3)$.

Agora, suponha que exista involução (M^{m+2n+r}, T) fixando $P(6,n) \cup \{ponto\}$ com $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ e $n \geq 7$. Então, pelo Teorema 3.14, segue que ν^r é standard. Pelo Corolário 3.4, temos

$$u = (1+c)^a (1+c+d)^b \left(1 + \frac{c^6}{(1+d)^4} + \frac{c^4 d^2}{(1+d)^2}\right).$$

Já vimos, na Observação 3.12, que se b é ímpar então $m > n$. Como $7 \leq n$, segue que b é par. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\dfrac{c^6}{(1+d)^4}+\dfrac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)} \\
&= \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^6}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)
\end{aligned}$$

pois

$$\left(1+\frac{c^6}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)^2=\left(1+\frac{c^{12}}{(1+d)^8}+\frac{c^8d^4}{(1+d)^4}\right)=1,$$

uma vez que $c^7 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^6}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right) \\
=& \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}\right)+\frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right) \\
=& \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)+\frac{1}{(1+d)^b}\left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}\right) \\
=& \frac{1}{(1+c)^a(1+c+d)^b}\left(1+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)+\frac{c^6d}{(1+d)^{b+4}}.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos o fato de que o produto por c^6 elimina todo termo múltiplo de c. Note que, no primeiro termo da expressão acima, só aparecem potências pares de d, pois b é par. Então $\overline{u}_{m+2n} = c^6d\binom{b+4}{n-1}d^{n-1}$ o qual, pela Observação 3.8, é não nulo. Como $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, segue que $n-1 \equiv 2(\text{mod } 4)$, e como b é par e $\binom{b+4}{n-1} = 1$, segue do Teorema de Lucas que $b+4 \equiv 2(\text{mod } 4)$, ou seja, $b \equiv 2(\text{mod } 4)$. Agora, lembremos que, da Observação 3.9, temos

$$\widetilde{W}=\frac{(1+c+e)^6(1+c+e^2+ce+d)^{n+1}}{(1+e)^2}(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)$$

sobre $\mathbb{R}P(\nu^r)$ e $\widetilde{W} = 1$ sobre $\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$. Com isso, $\widetilde{W}_1 = ac$ e portanto $\widetilde{W}_1 = c$ se, e somente se, a é ímpar. Para que não seja necessário dividir a demonstração em dois casos, vamos definir $\widehat{W} = \dfrac{1}{1+\widetilde{W}_1}$. Então, em $\mathbb{R}P(\nu^r)$ temos $\widehat{W} = \widetilde{W}$ se a é par e $\widehat{W} = \dfrac{\widetilde{W}}{1+c}$ se a é ímpar. Sobre $\mathbb{R}P^{m+2n+r-1}$ temos $\widehat{W} = \widetilde{W} = 1$. Então, podemos escrever

$$\widehat{W}=(1+c+e)^6(1+c+e^2+ce+d)^{n+1}(1+c)^{\widehat{a}}(1+c+d)^b\left(1+\frac{c^6d}{(1+d)^4}+\frac{c^4d^2}{(1+d)^2}\right)$$

sobre $\mathbb{R}P(\nu^r)$, onde $\widehat{a} = a-1$ se a é ímpar e $\widehat{a} = a$ se a é par. Dessa forma, note que todas as potências de c em $\widehat{W}$ são pares. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
\widehat{W} &= \frac{(1+e)^6}{(1+e)^2}(1+e^2+d^{n+1})(1+d)^b \quad \text{módulo } c^2 \\
&= (1+e)^4(1+e^2+d)^{n+1}(1+d)^b \quad \text{módulo } c^2,
\end{aligned}$$

e com isso, $\widehat{W}_4 = e^4 + \binom{n+1}{2}(e^2+d)^2 + \binom{b}{2}d^2 + \binom{n+1}{1}(e^2+d)\binom{b}{1}d$. Como $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, segue que $n+1 \equiv 0(\text{mod } 4)$, e portanto, pelo Teorema de Lucas, $\binom{n+1}{1} = 0$ e $\binom{n+1}{2} = 0$. Com isso,

$$\widehat{W}_4 = \begin{cases} e^4 + d^2 + c^2 x & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1}, \end{cases}$$

onde x é algum elemento da cohomologia de $\mathbb{R}P(\nu^r)$ (não importa qual). Segue que

$$(\widehat{W}_4 + e^4)^4 = \begin{cases} d^8 & \text{em } \mathbb{R}P(\nu^r) \\ e^{16} & \text{em } \mathbb{R}P^{m+2n+r-1} \end{cases}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} u &= (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1 + \frac{c^6 d}{(1+d)^4} + \frac{c^4 d^2}{(1+d)^2}\right) \\ &= (1+c)^a(1+c+d)^b\left(1 + \frac{c^4 d^2}{(1+d)^2}\right) + \frac{c^6 d}{(1+d)^4}, \end{aligned}$$

onde $(1+c)^a(1+c+d)^b\left(1 + \frac{c^4 d^2}{(1+d)^2}\right)$ só contém potências pares de d. Portanto,

$$u_{6+6} = c^6 d\binom{b}{2}d^2 + \text{ termos com potências de d diferente de 3 }.$$

Como $\binom{b}{2} = 1$, pois $b \equiv 2(\text{mod } 4)$, segue que $u_{12} \neq 0$ e portanto $r \geq 12$. Como $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, podemos escrever $n = 8s+3$ ou $n = 8s+7$. Então, usando $r \geq 12$ e $n \geq 8s+3$, obtemos

$$m + 2n + r - 1 \geq 6 + 2n + 11 \geq 6 + (8s+3) + 11 = 16s + 23 \geq 16(s+1)$$

o que nos permite considerar

$$\begin{aligned} 0 &\neq e^{6+2n+r-1}[\mathbb{R}P^{6+2n+r-1}] \\ &= (\widehat{W}_4 + e^4)^{4(s+1)} e^{6+2n+r-1-(16(s+1))}[\mathbb{R}^{6+2n+r-1}] \\ &= (\widehat{W}_4 + e^4)^{4(s+1)} e^{6+2n+r-1-(16(s+1))}[\mathbb{R}(\nu^r)] \\ &= (d^8)^{s+1} e^{6+2n+r-1-(16(s+1))}[\mathbb{R}P(\nu^r)] = 0 \end{aligned}$$

onde $d^{8s+8} = 0$, pois $8s+8 \geq n+1$. Isto é um absurdo, o que conclui o resultado. Portanto não existe involução fixando $P(6,n) \cup \{ponto\}$ com $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, como queríamos. □

3.6 Conclusão

Note que o Teorema 3.1 foi fundamental para realizarmos o estudo da propriedade CP para as variedades de Dold. Com isso, para que seja realizado um estudo semelhante para uma variedade suave e fechada V^n (usando as mesmas técnicas) é necessário conhecer todas as possíveis classes de Stiefel-Whitney de fibrados vetoriais sobre V^n. Em relação a propriedade CP e as variedades de Dold, os seguintes casos permanecem em aberto:

- $m \equiv 0 \pmod 4$ com n par,
- $m \equiv 2 \pmod 4$, com $m > 6$ e n par,
- $m = 6$ e $n \equiv 1 \pmod 4$ com $n > 1$,
- $m \equiv 2 \pmod 4$, com $n \equiv 1 \pmod 4$, $m > 6$ e $1 < n < m$.

Capítulo 4

$\mathbb{Z}_2^k$-ações cujo conjunto de pontos fixos é conexo e n-dimensional

Considere F^n uma variedade fechada, conexa e n-dimensional. Como já observado na introdução, neste capítulo nosso objetivo é classificar todas as classes de cobordismo equivariante de $\mathbb{Z}_2^k$-ações, definidas em variedades fechadas m-dimensionais, cujo conjunto de pontos fixos é F^n e $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$. O principal resultado deste capítulo diz que, se (M^m, ϕ) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação cujo conjunto de pontos fixos F_ϕ é conexo e n-dimensional com $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$, então ocorre um dos seguintes casos:

- (M, ϕ) borda,
- (M, ϕ) pode ser obtida via remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist usando o Teorema 2.104,
- (M, ϕ) pode ser obtida, a menos de automorfismos de $\mathbb{Z}_2^k$, a partir de uma involução de Stong (M^{2n-1}, T) usando as Proposições 2.103 e 2.106,

e o terceiro caso só ocorre quando $m = 2^k n - 2^{k-1}$. A ideia da demonstração é a seguinte: fixemos uma variedade fechada e conexa F^n e seja (M^m, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ fixando F^n. Podemos então denotar o fixed-data de (M^m, ϕ) por $(F^n, \{\xi_\rho\})$, o qual, a priori, é uma lista de $2^k - 1$ fibrados vetoriais sobre F^n desconhecidos. A ideia é, a partir da dimensão de M^m, obter informações em relação à dimensão dos fibrados ξ_ρ do fixed-data e, a partir disso, obter uma lista de fibrados $(F^n, \{\nu_\rho\})$ conhecida e simultaneamente cobordante a $(F^n, \{\xi_\rho\})$. Por exemplo, suponha que, para algum $\rho_1 \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, ξ_{ρ_1} tenha dimensão n. Então, por um lema em [16, pg 108] (o qual veremos neste capítulo), concluímos que $(F^n, \{\xi_\rho\})$ é simultaneamente cobordante a $(F^n, \{\xi'_\rho\})$, onde $\xi'_\rho = \xi_\rho$ para todo $\rho \neq \rho_1$ e $\xi'_{\rho_1} = \tau(F^n)$. Pelo Teorema 2.99, $(F^n, \{\xi'_\rho\})$ será também um fixed-data, de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (N^m, ψ), cobordante a (M^m, ϕ), a qual possui $2^k - 2$ fibrados desconhecidos em seu fixed-data e 1 conhecido. A ideia é aplicar resultados similares iteradamente até obtermos uma lista de fibrados sobre F^n simultaneamente cobordante ao fixed-data de alguma das ações de $\mathbb{Z}_2^k$ acima listadas.

4.1 Modelos de $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M^m, ϕ) com $2^k n - k - 1 \leq m < 2^k n$ e conjunto de pontos fixos conexo e n-dimensional

Nesta seção, a partir de uma variedade fechada e conexa F^n, vamos construir modelos de ações de $\mathbb{Z}_2^k$, (M^m, ϕ), com $2^k n - 2^{k-1} \leq m < 2^k n$ e cujo conjunto de pontos fixos é F^n.

Definição 4.1. Dada uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ψ) com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\})$, diremos que (M^m, ψ) é obtida a partir da remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist se existir $0 < r \leq n$ de modo que:

1. $\tau(F^n) \simeq \nu^{n-r} \oplus r\mathbb{R}$, onde $\nu^{n-r} \to F^n$ é um fibrado vetorial de dimensão $n - r$, $r\mathbb{R}$ é o fibrado trivial de dimensão r e $\tau(F^n)$ o fibrado tangente de F^n,

2. $(F^n, \{\xi_\rho\})$ é simultaneamente cobordante a $(F^n, \{\nu \oplus s_\rho \mathbb{R}\})$,

onde $0 \leq s_\rho \leq r$. Recordemos que o fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist é $(F, \{\tau(F)\})$ (vide Definição 2.101), o qual, nas condições acima, é simultaneamente cobordante a $(F^n, \{\nu \oplus r\mathbb{R}\})$. Então, de fato, a ação (M^m, ψ) pode ser obtida usando o Teorema 2.104, através da remoção de $(r - s_\rho)$ secções do fibrado na posição ρ, para cada ρ.

Definição 4.2 ($\mathbb{Z}_2^k$-ações provenientes das involuções de Stong)**.** Dada uma variedade F^n fechada, conexa e n-dimensional, vamos criar uma família de $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M^m, ψ) cujo conjunto de pontos fixos é F^n e $m = 2^k n - 2^{k-1}$. Em [24], Stong determinou todas as possíveis classes de cobordismo de involuções (M^m, T) cujo conjunto de pontos fixos F^n tem dimensão n e $m = 2n - 1$. Mais especificamente, ele mostrou que, nas condições acima, qualquer tal involução é equivariantemente cobordante a uma união de involuções dos seguintes tipos:

1. Seja $\pi : N \to S^1$ uma fibração suave, em que N é uma variedade fechada n-dimensional e S^1 é a esfera 1-dimensional. Defina $M_1 = \{(x, y) \in N \times N | \pi(x) = \pi(y)\}$ e $T_1 : M_1 \to M_1$ $T_1(x, y) = (y, x)$.

2. Sejam P e Q variedades fechadas p e q dimensionais, respectivamente, onde $p + q = n - 1$, e defina

$$M_2(P, Q) = \frac{S^1 \times P \times P \times Q \times Q}{(x, p, p', q, q') \simeq (-x, p', p, q, q')}$$

com a involução $T_2[x, p, p', q, q'] = [x, p', p, q', q]$.

Seja (W^{2n-1}, T) uma tal involução e denote o seu fixed-data por $\eta \to F^n$. Então, usando a Definição 2.103, obtemos a $\mathbb{Z}_2^k$-ação $\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T) = (\prod_{i=1}^{2^{k-1}} W^{2n-1}, T_1, \dots, T_k)$, definida em uma variedade de dimensão $2^k n - 2^{k-1}$, cujo fixed-data é $(F^n, \{\nu_\rho\})$, onde $\nu_\rho = \tau(F^n)$ se $\rho(T) = 1$ e $\nu_\rho = \eta$ se $\rho(T) = -1$. Por comodidade, chamaremos tais $\mathbb{Z}_2^k$-ações $\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T)$ de *$\mathbb{Z}_2^k$-ações de Stong* uma vez que as mesmas são obtidas via a junção das involuções de Stong com a construção 2.103).

4.2 Lemas técnicos

O seguinte lema será utilizado nas provas dos Teoremas 4.6 e 4.7 e decorre da definição de cobordismo simultâneo; embora simples, trata-se de um argumento crucial na prova de tais teoremas, e de fato consiste em técnica inédita.

Lema 4.3. *Sejam $(F, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega})$ e $(F, \{\xi'_\rho\}_{\rho\in\Omega})$ duas listas simultaneamente cobordantes de fibrados sobre uma variedade fechada F e suponha que exista um subconjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ e um fibrado $\mu \to F$ de modo que $\xi_\rho = \mu$ para todo $\rho \in \Omega_1$; podemos escrever $(F, \{\xi_\rho\}) = (F, \{\mu\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$. Tome um elemento ρ_1 de Ω_1. Então as listas $(F, \{\mu\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ e $(F, \{\xi'_{\rho_1}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi'_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ são simultaneamente cobordantes.*

Demonstração. Denote por $(W, \{\Phi_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\Phi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ a lista de fibrados que realiza o cobordismo simultâneo entre $(F, \{\mu\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ e $(F, \{\xi'_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi'_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$. Então a lista $(W, \{\Phi_{\rho_1}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\Phi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ realiza o cobordismo simultâneo entre $(F, \{\mu\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$ e $(F, \{\xi'_{\rho_1}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi'_\rho\}_{\rho\notin\Omega_1})$. □

O seguinte lema é uma generalização do Lema 2.2 de [18] e será usado na demonstração dos Teoremas 4.6 e 4.7. Existe um resultado de mesma natureza que este em [17] para o caso em que $F = V^n \cup \{ponto\}$, onde V^n é uma variedade suave, fechada e conexa.

Lema 4.4. *Seja $(F, \{\xi_\rho\})$ o fixed data de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação, onde $dim(F) = n$, e sejam ρ_1, ρ_a e ρ_b homomorfismos distintos em $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$. Suponha que $\dim(\xi_{\rho_1}) = n$, e ρ_a, ρ_b sejam pareados com respeito a ρ_1. Suponha que exista um fibrado vetorial $\nu \to F$ tal que $\xi_{\rho_a} = \nu \oplus s_a\mathbb{R}$, com $\dim(\nu) \leq \dim(\xi_{\rho_b})$. Então a lista $(F, \xi_{\rho_b}, \{\xi_\rho\}_{\rho\neq\rho_b})$ é simultaneamente cobordante a $(F, \nu \oplus s_b\mathbb{R}, \{\xi_\rho\}_{\rho\neq\rho_b})$, onde $s_{\rho_b} = \dim(\xi_{\rho_b}) - \dim(\nu)$.*

Demonstração. A prova consiste em mostrar que as duas listas $(F, \xi_{\rho_b}, \{\xi_\rho\}_{\rho\neq\rho_b})$ e $(F, \nu \oplus s_b\mathbb{R}, \{\xi_\rho\}_{\rho\neq\rho_b})$ possuem os mesmos números de Whitney. Como $\rho_a \neq \rho_b$, temos $\ker(\rho_a) \neq \ker(\rho_b)$, e como ambos são isomorfos a $\mathbb{Z}_2^{k-1}$, podemos tomar $T \in \ker(\rho_a)$ tal que $T \notin \ker(\rho_b)$. Então $\rho_a(T) = 1$ e $\rho_b(T) = -1$, e consequentemente $\rho_1(T) = \rho_b(T)\rho_a(T) = -1$. Portanto $T \notin \ker(\rho_1)$, e então, pelo Teorema 2.98, a lista

$$(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \xi_{\rho_a} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho_b}), \{\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''})\}_{\rho_a\neq\rho'\in\Omega_+})$$

borda como lista de fibrados, onde $\Omega_+ = \{\rho' \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | \rho(T) = 1\}$ e ρ'' denota o par de ρ' com respeito a ρ_1. Escreva

$$\begin{aligned} W(F) &= 1 + w_1 + \ldots + w_n \\ W(\xi_{\rho_1}) &= 1 + u_1 + \ldots + u_n \\ W(\xi_\rho) &= 1 + u_1^\rho + \ldots + u_{n_\rho}^\rho \end{aligned}$$

para as classes de Stiefel-Whitney de F, ξ_{ρ_1} e ξ_ρ respectivamente, para cada $\rho \neq \rho_1$. Denote por $c \in H^1(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \mathbb{Z}_2)$ a classe de Stiefel-Whitney 1-dimensional do fibrado linha de Hopf $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ associado a ξ_{ρ_1} (vide Definição 2.68). Pelo Teorema 2.80, temos que a classe de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ é

$$W(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})) = (1 + w_1 + \ldots + w_n)((1+c)^n + u_1(1+c)^{n-1} + \ldots + u_n).$$

Segue do Lema 33.1 de [2] que a classe de Stiefel-Whitney do fibrado $\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''})$ é

$$W(\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''})) = (1 + u_1^{\rho'} + \ldots + u_{n_{\rho'}}^{\rho'})((1+c)^{n_{\rho''}} + u_1^{\rho''}(1+c)^{n_{\rho''}-1} + \ldots + u_{n_{\rho''}}^{\rho''}).$$

Como $(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''})\})$ borda simultaneamente e $\dim(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})) = n + n_{\rho_1} - 1 = 2n - 1$, qualquer classe de dimensão $2n-1$ obtido via produtos das classes

$$w_i(\mathbb{R}P(\xi_\rho)), c \text{ e } w_j(\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''}))$$

evaluado em $[\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})]_2$ é nulo. Agora usaremos as classes definidas no Exemplo 2.81. Dado um inteiro positivo r, definimos

$$W[r] = \frac{W(\mathbb{R}P(\xi_\rho))}{(1+c)^{n-r}} \text{ e } W_{\rho'}[r] = \frac{W(\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''}))}{(1+c)^{n_{\rho''}-r}}.$$

Então

$$\begin{aligned} W[r] = \quad & (1 + w_1 + \ldots + w_n) \\ & \cdot\{(1+c)^r + u_1(1+c)^{r-1} + \ldots u_r + \frac{u_{r+1}}{(1+c)^{-1}} + \ldots + \frac{u_n}{(1+c)^{n-r}}\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_{\rho'}[r] = \quad & (1 + u_1^{\rho'} + \ldots + u_{n_{\rho'}}^{\rho'}) \\ & \cdot\{(1+c)^r + u_1^{\rho''}(1+c)^{r-1} + \ldots + u_r + \frac{u_{r+1}^{\rho''}}{(1+c)} + \ldots + \frac{u_{n_{\rho''}}^{\rho''}}{(1+c)^{n_{\rho''}-r}}\} \end{aligned}$$

Estas classes possuem as seguintes propriedades especiais:

$$\begin{aligned} W[r]_{2r} &= w_r c^r + \text{ termos com potências de } c \text{ menores que r} \\ W[r]_{2r+2} &= u_{r+1} c^{r+1} + \text{ termos com potências de } c \text{ menores que r.} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} W_{\rho'}[r]_{2r} &= u_r^{\rho'} c^r + \text{ termos com potências de } c \text{ menores que r} \\ W_{\rho'}[r]_{2r+1} &= (u_{r+1}^{\rho'} + u_{r+1}^{\rho''}) c^r + \text{ termos com potências de } c \text{ menores que r} \\ W_{\rho'}[r]_{2r+2} &= u_{r+1}^{\rho''} c^{r+1} + \text{ termos com potências de } c \text{ menor que r.} \end{aligned}$$

Dada uma sequência $\omega = (i_1, \ldots, i_s)$ de inteiros positivos, denote $|\omega| = i_1 + \ldots + i_s$, e para uma classe de Stiefel-Whitney $1 + u_1 + \ldots + u_p$, denote $u_\omega = u_{i_1} \ldots u_{i_s}$ o produto das classes $u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}$.
Dadas de forma arbitrária as sequências $\omega = (i_1, \ldots, i_s), \omega^\rho = (i_1^\rho, \ldots, i_{s_\rho}^\rho)$ e um inteiro positivo r tais que:

$$|\omega| + \sum_\rho |\omega_\rho| + r = n,$$

podemos considerar a classe característica:

$$\chi = \prod_{i \in \omega} W[i]_{2i} \prod_{i \in \omega_{\rho_1}} W[i-1]_{2i} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ \prod_{i \in \omega_{\rho'}} W_{\rho'}[i]_{2i} \prod_{i \in \omega_{\rho''}} W_{\rho''}[i-1]_{2i} \} W_{\rho_a}[r-1]_{2r-1},$$

a qual é uma classe $(2n-1)$-dimensional na cohomologia de $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$. Temos:

$$\chi = w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} (u^{\rho_a}_r + u^{\rho_b}_r) c^{n-1} + \text{termos com potências de } c \text{ menores que r.}$$

Como $H^*(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}); \mathbb{Z}_2)$ é um $H^*(F, \mathbb{Z}_2)$-módulo livre com base $1, c, \ldots c^{n-1}$, segue que

$$0 = \chi[\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})]_2 = w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} (u^{\rho_a}_r + u^{\rho_b}_r)[F^n]_2,$$

ou, equivalentemente,

$$w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} u^{\rho_a}_r [F^n]_2 = w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} u^{\rho_b}_r [F^n]_2.$$

Denote $W(\nu) = 1 + v_1 + \ldots + v_k$. Como $\xi_{\rho_a} = \nu \oplus s_a \mathbb{R}$, temos que

$$w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} v_r [F^n]_2 = w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} u^{\rho_b}_r [F^n]_2,$$

onde $1 \leq r \leq k$ e

$$w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} \cdot 0 [F^n]_2 = w_\omega u^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho' \in \Omega'} \{ u^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} u^{\rho''}_{\omega_{\rho''}} \} u^{\rho_b}_r [F^n]_2$$

para $k < r \leq n_{\rho_b}$. Em outras palavras, qualquer classe $u^{\rho_b}_r$ em um número característico de $(F, \xi_{\rho_b}, \{\xi_\rho\}_{\rho \neq \rho_b})$ pode ser substituído por v_r se $1 \leq r \leq k$ e por 0 se $k < r \leq n_{\rho_b}$, sem alterar o valor do número característico. Isto significa que as listas $(F, \xi_{\rho_b}, \{\xi_\rho\}_{\rho \neq \rho_b})$ e $(F, \nu \oplus s_b \mathbb{R}, \{\xi_\rho\}_{\rho \neq \rho_b})$ possuem os mesmos números característicos, como queríamos. □

Também precisaremos do seguinte teorema, cuja demonstração se encontra na seção 3 de [16].

Teorema 4.5. *Seja (M^m, ψ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\})$, onde F^n é conexo e n-dimensional. Então:*

1. *se, para algum $\rho_1 \in \hom(G, \mathbb{Z}_2)$, tivermos $n_{\rho_1} > n$, então $(F^n, \{\xi_\rho\})$ borda.*

2. *se, para algum $\rho_1 \in \hom(G, \mathbb{Z}_2)$, tivermos $n_{\rho_1} = n$, então $(F^n, \xi_{\rho_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho \neq \rho_1})$ é simultaneamente cobordante a $(F^n, \tau(F), \{\xi_\rho\}_{\rho \neq \rho_1})$.*

4.3 Resultados principais

Agora estamos aptos a provar os dois teoremas que providenciam a classificação por nós anunciada. Primeiramente, provemos o:

Teorema 4.6. *Seja (M^m, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ cujo conjunto de pontos fixos F^n é conexo e n-dimensional. Se $2^k \cdot n - 2^{k-1} < m < 2^k \cdot n$, então uma das seguintes situações ocorre:*

(i) (M, ϕ) borda,

(ii) (M, ϕ) pode ser obtida a partir de remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist.

Demonstração. Denote por $(F, \{\xi_\rho\}_\rho)$ o fixed-data de (M^m, ϕ) e por n_ρ a dimensão de ξ_ρ. Sabemos, pelo ítem 1 do Teorema 4.5, que se $n_\rho > n$ para algum ρ, então (M, ϕ) borda equivariantemente. Então podemos supor que $n_\rho \leq n$ para todo $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$. Podemos escrever $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde

$$\Omega_1 = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | n_\rho = n\}$$
$$\Omega_2 = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | n_\rho < n\}.$$

Usando iteradamente o ítem 2 do Teorema 4.5 para cada $\rho \in \Omega_1$, concluímos que as listas $(F, \{\xi_\rho\}_{\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\Omega_2})$ e $(F, \{\tau_\rho\}_{\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\Omega_2})$ são simultaneamente cobordantes, onde $\tau_\rho = \tau(F)$ para todo $\rho \in \Omega_1$.

Como $2^k \cdot n - 2^{k-1} < m$, segue que $|\Omega_1| \geq 2^{k-1}$; de fato, caso contrário, teríamos $|\Omega_1| < 2^{k-1}$ e consequentemente

$$|\Omega_2| = 2^k - 1 - |\Omega_1| > 2^k - 1 - 2^{k-1} = 2^{k-1} - 1.$$

Ou seja, $|\Omega_2| \geq 2^{k-1}$, e com isso:

$$\begin{aligned} m \quad &= n + \sum_\rho n_\rho \quad = n + \sum_{\rho \in \Omega_1} n_\rho + \sum_{\rho \in \Omega_2} n_\rho \\ &\leq n + |\Omega_1| n + |\Omega_2|(n-1) \\ &= (1 + |\Omega_1| + |\Omega_2|)n - |\Omega_2| \\ &= 2^k n - |\Omega_2| \\ &\leq 2^k n - 2^{k-1}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois, por hipótese, $2^k n - 2^{k-1} < m$. Podemos então escrever:
$|\Omega_1| = 2^{k-1} + r$
$|\Omega_2| = 2^{k-1} - (r+1)$
para algum inteiro r não negativo. Escolha um homomorfismo $\rho_a : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ que corresponda a algum fibrado da lista $\{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_2}$ com a seguinte propriedade: $\dim(\xi_{\rho_a}) \leq \dim(\xi_\rho)$ para todo $\rho \in \Omega_2$, ou seja, com dimensão minimal entre os fibrados indexados por Ω_2. Primeiramente, vamos mostrar que $\tau(F^n) \simeq \xi_{\rho_a} \oplus (n - n_a)\mathbb{R}$ e então que $(F, \{\xi_\rho\})$ é simultaneamente cobordante a $(F, \{\xi'_\rho\})$, onde:

$$\xi'_\rho = \xi_{\rho_a} \oplus (n_\rho - n_a)\mathbb{R} \text{ para todo } \rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}.$$

Tome arbitrariamente $\rho \in \Omega_2$ e considere o conjunto $X = \{\rho\lambda\}_{\lambda\in\Omega_1} \subset \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$. Note que, pela lei do cancelamento, X possui a mesma cardinalidade de Ω_1, ou seja, possui $2^{k-1} + r$ elementos distintos, e como $|\Omega_2| = 2^{k-1} - (r+1)$, segue que $X \not\subset \Omega_2$, ou seja, $X \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Portanto, existem $\rho', \rho'' \in \Omega_1$ tais que $\rho\rho' = \rho''$. Em particular, existem $\rho'_a, \rho''_a \in \Omega_1$ de modo que $\rho_a\rho'_a = \rho''_a$, e isso nos permite aplicar o Lema 4.4 para concluir que as listas: $(F^n, \{\tau_{\rho'_a}\}, \{\tau_\rho\}_{\rho'_a\neq\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\}$ e $(F^n, \xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}, \{\tau_\rho\}_{\rho_a\neq\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\}$. são simultaneamente cobordantes.

Em particular, $\tau(F^n)$ é cobordante a $\xi_{\rho_a} \oplus (n - n_a)\mathbb{R}$. Mas note que, na lista $(F, \{\tau_{\rho'_a}\}, \{\tau_\rho\}_{\rho'_a\neq\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\}$, temos $\tau'_\rho = \tau(F^n)$ para todo $\rho \in \Omega_1$. Então o cobordismo acima nos permite aplicar o Lema 4.3 e concluir que a lista:

$$(F^n, \xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}, \{\tau_\rho\}_{\rho_a\neq\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\}$$

é simultaneamente cobordante a

$$(F^n, \xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}\}_{\rho_a\neq\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\}).$$

Mas vimos que, para todo $\rho \in \Omega_2$, existem $\rho', \rho'' \in \Omega_1$ tais que $\rho\rho' = \rho''$. Como $n_{\rho_a} \leq n_\rho$ para todo $\rho \in \Omega_2$, podemos aplicar novamente o Lema 4.4 para cada elemento de $\Omega_2 - \{\rho_a\}$ e então concluir que

$$(F^n, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}\})$$

é simultaneamente cobordante a

$$(F, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n-n_{\rho_a})\mathbb{R}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n_\rho-n_{\rho_a})\mathbb{R}\}_{\rho\in\Omega_2}).$$

Em suma, $(F^n, \{\xi_\rho\})$ é simultaneamente cobordante a

$$(F^n, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n-n_{\rho_a})\mathbb{R}\}_{\rho\in\Omega_1}, \{\xi_{\rho_a} \oplus (n_\rho-n_{\rho_a})\mathbb{R}\}_{\rho\in\Omega_2}).$$

Como $\tau(F^n)$ é cobordante a $\xi_{\rho_a} \oplus (n-n_a)\mathbb{R}$, segue que (M, ϕ) pode ser obtida a partir da remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist, como queríamos. □

Teorema 4.7. *Seja (M^m, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ cujo conjunto de pontos fixos F^n é conexo e n-dimensional. Se $m = 2^k \cdot n - 2^{k-1}$, então uma das seguintes situações ocorre:*

(i) *(M, ϕ) borda,*

(ii) *(M, ϕ) pode ser obtida a partir da remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist*

(iii) *(M, ϕ) é equivariantemente cobordante a $\sigma\Gamma_k^k(W, T)$ para algum automorfismo $\sigma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$, onde $\Gamma_k^k(W, T)$ é uma ação de Stong.*

Demonstração. Primeiramente, se $n_\rho > n$ para algum $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, então (M, ϕ) borda equivariantemente, ou seja, vale (i). Portanto, podemos supor que $n_\rho \leq n$.
Considere:

$$\Omega_1 = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | n_\rho = n\}$$
$$\Omega_2 = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | n_\rho < n\}.$$

Como $m = 2^k n - 2^{k-1}$ e $n_\rho \leq n$ para todo $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, segue que $|\Omega_1| \geq 2^{k-1} - 1$, e com isso podemos dividir o problema em dois casos:
caso 1: $|\Omega_1| = 2^{k-1} + r$, onde $r \geq 0$ é um inteiro não negativo. Neste caso o argumento segue exatamente como no teorema anterior, pois note que o fato de que $|\Omega_1| \geq 2^{k-1} > |\Omega_2|$ é o que dá início a toda a argumentação, que pode ser de forma similar repetida aqui. Então concluímos que, neste caso, (M, ϕ) pode ser obtida por remoção de secções da ação twist, ou seja, vale (ii).
caso 2: $|\Omega_1| = 2^{k-1} - 1$, e consequentemente $|\Omega_2| = 2^{k-1}$. Nesse caso, duas situações podem ocorrer:

(a) $\Omega_1 \cup \{1\}$ não é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$

(b) $\Omega_1 \cup \{1\}$ é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$

Prova do caso (a). Primeiramente, podemos aplicar o ítem 2 do Teorema 4.5 para cada $\rho \in \Omega_1$ e concluir que as listas:

$$(F^n, \{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_2}) \text{ e } (F^n, \{\tau_\rho\}_{\rho \in \Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_2}),$$

são simultaneamente cobordantes, onde $\tau_\rho = \tau(F^n)$ para todo $\rho \in \Omega_1$.
Se $\Omega_1 \cup \{1\}$ não é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, existem $\rho, \rho' \in \Omega_1$ tais que $\rho\rho' \notin \Omega_1 \cup \{1\}$, ou seja, $\rho\rho' = \rho_a$ para algum $\rho_a \in \Omega_2$. Note que

$$\begin{aligned} 2^k n - 2^{k-1} = m &= n + \sum_{\rho \neq 1} n_\rho \\ &= n + |\Omega_1| n + \sum_{\rho \in \Omega_2} n_\rho \\ &= 2^{k-1} n + \sum_{\rho \in \Omega_2} n_\rho \end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{\rho \in \Omega_2} n_\rho = 2^{k-1} n - 2^{k-1} = 2^{k-1}(n-1),$$

e como $n_\rho \leq n - 1$ para todo $\rho \in \Omega_2$ e $|\Omega_2| = 2^{k-1}$, segue que $n_\rho = n - 1$ para todo $\rho \in \Omega_2$. Em particular, $n_{\rho_a} = n - 1$, e como $n_\rho = n_{\rho'} = n$ e $\rho = \rho'\rho_a$ podemos usar o Lema 4.4 para concluir que a lista $(F^n, \tau_{\rho'}; \{\tau_\rho\}_{\rho \in \Omega_1 - \{\rho'\}}; \{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_2})$ é simultaneamente cobordante a $(F^n, \nu_{\rho'}; \{\tau_\rho\}_{\rho \in \Omega_1 - \{\rho'\}}; \{\xi_\rho\}_{\rho \in \Omega_2})$, onde $\nu_{\rho'} = \xi_{\rho_a} \oplus \mathbb{R}$. Em particular, também concluímos que o fibrado $\tau(F^n)$ é cobordante a $\xi_{\rho_a} \oplus \mathbb{R}$. Agora, como $\tau_\rho = \tau(F^n)$ para todo $\rho \in \Omega_1$, na lista $(F^n, \tau_{\rho'}; \{\tau_\rho\}_{\rho\in\Omega_1-\{\rho'\}}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$ podemos usar o cobordismo acima e o Lema 4.3 para concluir que

$$(F^n, \nu_{\rho'}; \{\tau_\rho\}_{\rho\in\Omega_1-\{\rho'\}}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$$

é simultaneamente cobordante a

$$(F^n, \nu_{\rho'}; \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_1-\{\rho'\}}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}),$$

onde $\nu_\rho = \xi_{\rho_a} \oplus \mathbb{R}$ para todo $\rho \in \Omega_1$.

Agora, dado $\rho_b \in \Omega_2 - \{\rho_a\}$, considere o conjunto $Y = \{\rho_b\rho\}_{\rho\in\Omega_1\cup\{\rho_a\}}$, o qual tem 2^{k-1} elementos. Como $\Omega_2 - \{\rho_b\}$ tem $2^{k-1} - 1$ elementos, segue que $\{\rho_b\rho\}_{\rho\in\Omega_1\cup\{\rho_a\}}$ não está contido em $\Omega_2 - \{\rho_b\}$, e como $\rho_b \notin \{\rho_b\rho\}_{\rho\in\Omega_1\cup\{\rho_a\}}$ (pois $1 \notin \Omega_1 \cup \{\rho_a\}$), segue que $\{\rho_b\rho\}_{\rho\in\Omega_1\cup\{\rho_a\}} \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Portanto existe $\rho_b' \in \Omega_1 \cup \{\rho_a\}$ tal que $\rho_b\rho_b' = \rho_b'' \in \Omega_1$. Tal procedimento pode ser feito de forma iterada para todo elemento de $\Omega_2 - \{\rho_a\}$, e dessa forma podemos aplicar o Lema 4.4 para cada elemento de $\Omega_2 - \{\rho_a\}$ para concluir que

$$(F^n, \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$$

é simultaneamente cobordante a

$$(F^n, \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}),$$

onde $\nu_\rho = \xi_{\rho_a}$ para todo $\rho \in \Omega_2$. Como $\tau(F^n)$ é cobordante a $\xi_{\rho_a} \oplus \mathbb{R}$, segue que (M, ϕ) pode ser obtida por remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-ação twist.

Prova do caso (b). Primeiramente, podemos aplicar o Teorema 4.5 para cada elemento de Ω_1 para concluir que as listas $(F^n, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$ e $(F^n, \{\tau_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$ são simultaneamente cobordantes. Como $\Omega_1 \cup \{1\}$ é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, então para quaisquer $\rho, \rho' \in \Omega_1$, $\rho\rho' = \rho'' \in \Omega_1$. Então, dado $\rho_a \in \Omega_2$, temos $\{\rho_a\rho\}_{\rho\in\Omega_1} \cap \Omega_1 = \emptyset$, o que implica que $\{\rho_a\rho\}_{\rho\in\Omega_1} \cup \{\rho_a\} = \Omega_2$. Em outras palavras, para cada $\rho \in \Omega_2, \rho \neq \rho_a$, existe $\rho' \in \Omega_1$ tal que $\rho_a\rho = \rho'$. Com isso, podemos aplicar o Lema 4.4 para cada $\rho \in \Omega_2$, $\rho \neq \rho_a$ para concluir que

$$(F^n, \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\xi_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$$

é simultaneamente cobordante a

$$(F^n, \{\tau_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_2}),$$

onde $\nu_\rho = \xi_{\rho_a}$ para todo $\rho \in \Omega_2$. Em outras palavras, mostramos que (M, ϕ) é equivariantemente cobordante a uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação cujo fixed-data é $(F^n, \{\tau_\rho\}_{\rho\in\Omega_1}; \{\nu_\rho\}_{\rho\in\Omega_2})$. Denote tal ação por $(N, S_1, \ldots, S_k)$. Como $\xi_{\rho_a} \to F^n$ participa do fixed-data de $(N, S_1, \ldots, S_k)$, sabemos pelo Corolário 2.96 que existe involução (W^{2n-1}, T) cujo fixed-data é $\xi_{\rho_a} \to F^n$, a qual portanto é uma involução de Stong. Como $\Omega_1 \cup \{1\}$ é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, com

2^{k-1} elementos, podemos tomar uma base $(\rho_2, \ldots, \rho_k)$ de $\Omega_1 \cup \{1\}$, e a seguir completá-la para uma base $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$. Sabemos que a base dual a $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$ corresponde a uma base $(S_1', \ldots, S_k')$ de $\mathbb{Z}_2^k$, a qual satisfaz:

$$\rho_i(S_j') = 1 \text{ se } i \neq j$$
$$\rho_i(S_j') = -1 \text{ se } i = j.$$

Como $(\rho_2, \ldots, \rho_k)$ é base de $\Omega_1 \cup \{1\}$, segue que, dado $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$, $\rho \in \Omega_1 \cup \{1\}$ se, e somente se, $\rho(S_1') = 1$, pois $\rho(S_1') = 1$ ocorre se, e somente se, ρ_1 não participa da decomposição de ρ na base $(\rho_1, \ldots, \rho_k)$. Tome $\widetilde{\sigma} : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^k$ o automorfismo que leva S_i em S_i' para todo $1 \leq i \leq k$. Pelo Teorema 2.106, o fixed-data da $\mathbb{Z}_2^k$-ação $\widetilde{\sigma}(N, S_1, \ldots, S_k) = (N, S_1', \ldots, S_k')$ é

$$(F^n, \{\tau_\rho\}_{\{\rho \neq 1 | \rho(S_1') = 1\}}; \{\nu_\rho\}_{\{\rho | \rho(S_1') = -1)\}}),$$

pois vimos que $\rho \in \Omega_1$ se, e somente se, $\rho(S_1') = 1$, e como Ω_2 é o complementar de Ω_1 em $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, segue que $\Omega_2 = \{\rho | \rho(S_1') = -1\}$. Mas o fixed-data acima é exatamente o fixed-data de $\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T)$ (que é uma ação de Stong), e portanto $\widetilde{\sigma}(N, S_1, \ldots, S_k)$ é equivariantemente cobordante a $\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T)$, o que implica que (M, ϕ) é equivariantemente cobordante a $\widetilde{\sigma}^{-1}\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T)$. Tomando o automorfismo $\sigma := \widetilde{\sigma}^{-1}$, concluímos que (M, ϕ) é equivariantemente cobordante a $\sigma\Gamma_k^k(W^{2n-1}, T)$, o que conclui o resultado. □

4.4 Conclusão

Um fato bem conhecido é o seguinte, se o conjunto de pontos fixos F de uma involução (M^m, T) só possui componentes n-dimensionais, então é possível obter uma involução (N^m, S), cobordante a (M^m, T), cujo conjunto de pontos fixos é conexo. Portanto, caso o conjunto de pontos fixos F de uma involução (M^m, T) só tenha componentes em uma dimensão, podemos supor, sem perda de generalidade, que F é conexo. Com isso, a classificação obtida pela junção dos Teoremas 4.6 e 4.7 é exatamente a generalização, para ações de $\mathbb{Z}_2^k$, da classificação obtida pelo Stong em [24] para involuções definidas em variedades M^{2n-1} que fixam F^n. Uma tal classificação para involuções definidas em variedades de dimensão $2n-2$ não é conhecida, nosso objetivo agora é ver como este fato impossibilita a classificação de $\mathbb{Z}_2^k$-ações (M^m, ϕ) fixando F^n conexa com $m < 2^k n - 2^{k-1}$. Seja (M^m, ϕ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com o conjunto de pontos fixos F^n conexo e com $m = 2^k n - 2^{k-1} - 1$. Denote seu fixed-data por $(F^n, \{\xi_\rho\}))$. Pelo Teorema 4.5 podemos supor que $\dim(\xi_\rho) \leq n$ para todo ρ. Denote $\Omega_1 = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | \dim(\xi_\rho) = n\}$ e Ω_2 o complementar de Ω_1 em $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$; Se $\Omega_1 \geq 2^{k-1}$ é possível repetir as técnicas do teorema acima e concluir que (M^m, ϕ) pode ser obtida via remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-twist. Agora, caso $\Omega_1 = 2^{k-1} - 1$, como $m = 2^k n - 2^{k-1} - 1$, por razões dimensionais existe um fibrado ξ_{ρ_1} em Ω_2 com $\dim(\xi_{\rho_1}) = n - 2$. Usando as mesmas técnicas deste capítulo, não é possível provar que, neste caso, (M^m, ϕ) é obtido via remoção de secções da $\mathbb{Z}_2^k$-twist. Pelo Corolário 2.96 sabemos que existe uma involução (M^{2n-2}, T) com fixed-data $\xi_{\rho_1} \to F^n$, portanto seria necessário conhecer a classificação de todas as classes de cobordismo equivariante de involuções (M^{2n-2}, T) fixando F^n e com isso gerar novos modelos de $\mathbb{Z}_2^k$-ações. Além disso ainda faltaria o caso em que $|\Omega_1| = 2^{k-1} - 2$, o qual também não se encaixa em nenhum de nossos modelos.

Capítulo 5

$\mathbb{Z}_2^k$-ações fixando $F^n \sqcup F^{n-1}$

Considere (M^m, ϕ) uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação suave, em uma variedade M^m fechada e suave, cujo conjunto de pontos fixos é uma união disjunta de duas subvariedades conexas $F^n \sqcup F^{n-1}$ de dimensões n e $n-1$, respectivamente. Denote por $(F^n, \{\xi_\rho\}) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$ o seu fixed-data. O objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema, que é uma melhoria de uma conjectura proposta por Pergher e Figueira no artigo [6, pg 192].

Teorema 5.1. *Seja (M^m, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$. Suponha que pelo menos 2^{k-1} fibrados sobre F^n tenha dimensão maior que n. Então (M^m, ϕ) borda equivariantemente.*

Na conjectura proposta em [6, pg 192] pedia-se adicionalmente a existência de pelo menos um fibrado sobre F^{n-1} com dimensão maior que $n-1$. Usaremos tal fato, porém veremos que o mesmo decorre da hipótese de existir pelo menos 2^{k-1} fibrados sobre F^n com dimensão maior que n, não sendo portanto necessário colocá-lo como hipótese.

5.1 Lemas técnicos

Considere uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (M^m, ϕ), com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$, onde F^n e F^{n-1} são subvariedades conexas de M. Dado $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, podemos considerar a ação de $\ker(\rho)$ em M como a restrição da ação ϕ aos elementos de $\ker(\rho)$. Denote tal ação por ϕ_ρ. Como $\ker(\rho) \subset \mathbb{Z}_2^k$, segue que o conjunto de pontos fixos F_ρ de ϕ_ρ contém $F^n \sqcup F^{n-1}$. Em todo o capítulo, denotaremos por S_ρ e P_ρ as componentes de F_ρ que contem F^n e F^{n-1}, respectivamente, e também denotaremos $n_\rho = \dim(\xi_\rho)$ e $m_\rho = \dim(\mu_\rho)$. O lema a seguir é imediato a partir do conceito de componente conexa.

Lema 5.2. *Levando em conta as notações acima, uma das seguintes situações ocorre:*

1. $S_\rho = P_\rho$
2. $S_\rho \cap P_\rho = \emptyset$.

Lema 5.3. *Dado $T \in \mathbb{Z}_2^k - \ker(\rho)$, então*

1. *se $S_\rho = P_\rho$, então (S_ρ, T) é involução com fixed-data $(\xi_\rho \to F^n) \cup (\mu_\rho \to F^{n-1})$,*

2. *se $S_\rho \cap P_\rho = \emptyset$, então (S_ρ, T) e (P_ρ, T) são involuções com fixed-datas $\xi_\rho \to F^n$ e $\mu_\rho \to F^{n-1}$, respectivamente.*

Demonstração. 1) Primeiramente, note que T é invariante em F_ρ. De fato, dado $x \in F_\rho$, então $S(T(x)) = T(S(x)) = T(x)$ para todo $S \in \ker(\rho)$, portanto $T(x) \in F_\rho$. Se $S_\rho = P_\rho$, como S_ρ é conexo, segue que $T(S_\rho) \subset F_H$ é conexo e contém $F^n \cup F^{n-1}$, então $T(S_\rho) = S_\rho$, e pelo Teorema 2.95 segue que o fibrado normal de $F^n \cup F^{n-1}$ em S_ρ é $(\xi_\rho \to F^n) \cup (\mu_\rho \to F^{n-1})$, e portanto é o fixed-data de (S_ρ, T).

2)Se $S_\rho \cap P(\rho) = \emptyset$, temos $T(S_\rho) \subset F_\rho$ é conexo e contém F^n, então $T(S_\rho) = S_\rho$. Usando o Teorema 2.95, concluímos que o fibrado normal de F^n em S_ρ é $\xi_\rho \to F^n$ e portanto é o fixed-data de (S_ρ, T). De maneira análoga, concluímos que $\mu_\rho \to F^{n-1}$ é o fixed-data de (P_ρ, T). □

Corolário 5.4. *Dado $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, se $S_\rho = P_\rho$, então $m_\rho = n_\rho + 1$.*

Demonstração. Tome $T \in \mathbb{Z}_2^k - \ker(\rho)$. Então, pelo lema acima, (S_ρ, T) é uma involução com fixed-data $(\xi_\rho \to F^n) \cup (\mu_\rho \to F^{n-1})$. Segue que $n + n_\rho = n - 1 + m_\rho$, portanto $m_\rho = n_\rho + 1$ □

Note que o Corolário acima nos dá uma condição necessária para que ocorra $S_\rho = P_\rho$. Em outras palavras, temos o seguinte

Corolário 5.5. *Dado $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, se $m_\rho \neq n_\rho + 1$, então $S_\rho \cap P_\rho = \emptyset$.*

Tome $\rho_1 \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$ e denote por $H = \ker(\rho_1)$. Denote $\Omega_0 = \hom(H, \mathbb{Z}_2)$ e $(F_{\rho_1}, \{\eta_\rho\}_{1 \neq \rho \in \Omega_0})$ o fixed-data da ação restrição (M, ϕ_{ρ_1}). Fixe um $T \in \mathbb{Z}_2^k - H$. Já vimos que cada homomorfismo ρ em Ω_0 induz dois homomorfismos $\rho_+, \rho_- \in \Omega$ definidos pelas condições: $\rho_+|_H = \rho_-|_H$, $\rho(T) = 1$ e $\rho(T) = -1$. Observe que isto equivale a dizer que $\rho_1 = \rho_+\rho_-$. Nessas condições, temos o seguinte

Lema 5.6. *Se $S_{\rho_1} = P_{\rho_1}$, então $n_{\rho_+} + n_{\rho_-} = m_{\rho_+} + m_{\rho_-}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.97 temos que $\eta_\rho|_{F^n} = \xi_{\rho_+} \oplus \xi_{\rho_-}$ e $\eta_\rho|_{F^{n-1}} = \mu_{\rho_+} \oplus \mu_{\rho_-}$. Mas $\eta_\rho|_{F^n}$ e $\eta_\rho|_{F^{n-1}}$ são restrições do mesmo fibrado $\eta \to S_{\rho_1}$, pois $S_{\rho_1} = P_{\rho_1}$. Então

$$\dim(\xi_{\rho_+} \oplus \xi_{\rho_-}) = \dim(\mu_{\rho_+} \oplus \mu_{\rho_-}),$$

ou seja, $n_{\rho_+} + n_{\rho_-} = m_{\rho_+} + m_{\rho_-}$, como queríamos. □

O teorema a seguir é uma generalização do Lema 3.1 de [6], referente a $\mathbb{Z}_2^2$, para $\mathbb{Z}_2^k$, $k \geq 2$.

Teorema 5.7. *Sejam (M, ϕ) ação de $\mathbb{Z}_2^k$ e V uma componente de dimensão n do conjunto de pontos fixos de ϕ. Denote o fixed-data de (M, ϕ) sobre V por $(V, \{\xi_\rho\})$. Suponha que exista $\rho_1 \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, satisfazendo as seguintes condições: denotando por P a componente do conjunto de pontos fixos de H_{ρ_1} que contém V, tenhamos:*

- $\dim P > 2n$
- *V é a única componente de F_ϕ contida em P.*

Então $(V, \{\xi_\rho\})$ borda simultaneamente.

Demonstração. Note que, usando a lista $(V, \{\xi_\rho\})$ na componente P, podemos repetir a construção feita na demonstração do Teorema 2.98 para concluir que $(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_{\rho'} \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho''})\}$ borda como lista de fibrados. Como $\dim P > 2n$, segue que a dimensão de ξ_{ρ_1} é maior que n. Então, pelo Teorema 4.5, concluímos que $(V, \{\xi_\rho\})$ borda simultaneamente. □

Corolário 5.8. *Seja (M, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$, e suponha que exista $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$ tal que $S_\rho \cap P_\rho = \emptyset$. Nessas condições,*

1. *se $n_\rho > n$ então $(F^n, \{\xi_\rho\})$ borda simultaneamente,*
2. *se $m_\rho > n - 1$ então $(F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$ borda simultaneamente.*

Usaremos também o seguinte Teorema (veja Lema 3.3 de [11]), o qual é uma adaptação do Teorema 2.98 para o caso em que F tem duas componentes. Tome $\rho_1 \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$ e $T \in \mathbb{Z}_2^k - \ker(\rho_1)$. Então podemos escrever:

$$\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} = \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

onde

$$\Omega_+ = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | \rho(T) = 1\}$$
$$\Omega_- = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | \rho(T) = -1\}.$$

Com tais notações, temos o seguinte.

Teorema 5.9. *Seja (M, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$. Então, a lista*

$$(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_\rho \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho'})\}_{\rho \in \Omega_+}) \cup (\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1}), \lambda', \{\mu_\rho \oplus (\lambda' \otimes \mu_{\rho'})\}_{\rho \in \Omega_+})$$

borda simultaneamente.

5.2 Prova da conjectura

Agora estamos aptos a provar o Teorema 5.1.

Demonstração. Seja (M, ϕ) uma ação de $\mathbb{Z}_2^k$ com fixed-data $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$ e suponha que pelo menos 2^{k-1} fibrados sobre F^n tenham dimensão maior que n. Nosso objetivo é provar que (M, ϕ) borda equivariantemente; para tanto, provaremos que $(F^n, \{\xi_\rho\}_\rho) \sqcup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\}_\rho)$ borda simultaneamente.

Denote por $\Omega_S = \{\rho \in \hom | S_\rho \cap P_\rho = \emptyset\}$ e $\Omega_J = \{\rho \in \hom | S_\rho = P_\rho\}$. Se existir $\rho_1 \in \hom$ tal que $S_{\rho_1} \cap P_{\rho_1} = \emptyset$ com $n_{\rho_1} > n$, poderíamos aplicar o Corolário 5.8 e concluir que $(F^n, \{\xi_\rho\})$ borda equivariantemente. Portanto podemos supor que, se $n_\rho > n$, então $S_\rho = P_\rho$. Por hipótese, existem pelo menos 2^{k-1} fibrados sobre F^n cuja dimensão é maior que n. Portanto $|\Omega_J| \geq 2^{k-1}$ e consequentemente $|\Omega_S| \leq 2^{k-1} - 1$.

Vamos agora mostrar que necessariamente $|\Omega_J| = 2^{k-1}$ e $|\Omega_S| = 2^{k-1} - 1$. Fixe $\rho_1 \in \Omega_J$. Dado $\rho \in \Omega_J - \{\rho_1\}$ vamos mostrar que $\rho_1\rho = \rho' \in \Omega_S$. Como $\rho_1 = \rho\rho'$ e $S_{\rho_1} = P_{\rho_1}$, segue do Lema 5.6 que

$$n_\rho + n_{\rho'} = m_\rho + m_{\rho'}$$

e como $\rho \in \Omega_J$, temos $S_\rho = P_\rho$. Então, aplicando o Corolário 5.4, segue que $m_\rho = n_\rho + 1$. Usando isso na igualdade acima, obtemos:

$$n_\rho + n_{\rho'} = m_\rho + m_{\rho'} = n_\rho + 1 + m_{\rho'},$$

e portanto $m_{\rho'} = n_{\rho'} - 1$. Então segue do Corolário 5.5 que $S_{\rho'} \cap P_{\rho'} = \emptyset$, ou seja, provamos que $\rho_1\rho = \rho' \in \Omega_S$. Em outras palavras, o produto de dois elementos distintos em Ω_J pertence a Ω_S.

Agora note que, fixando $\rho_1 \in \Omega_J$, temos $X := \{\rho_1\rho\}_{\Omega_J - \{\rho_1\}} \subset \Omega_S$. Com isso, $|X| \leq \Omega_S$. Por outro lado $|X| \geq 2^{k-1} - 1$ e $|\Omega_S| \leq 2^{k-1} - 1$, o que implica $|\Omega_S| \leq |X|$. Portanto $X = \Omega_S$. Com isso, dados $\rho', \rho'' \in \Omega_S$, temos $\rho' = \rho_1\widetilde{\rho}'$ e $\rho' = \rho_1\widetilde{\rho}''$ para certos $\widetilde{\rho}', \widetilde{\rho}'' \in \Omega_J - \{\rho_1\}$.

Então

$$\rho'\rho'' = \rho_1\widetilde{\rho}'\rho_1\widetilde{\rho}'' = \widetilde{\rho}'\widetilde{\rho}'' \in \Omega_S,$$

a última igualdade decorrendo do fato de que $\widetilde{\rho}', \widetilde{\rho}''$ são elementos de Ω_J e portanto seu produto pertence a Ω_S. Com isso, concluímos que Ω_S é fechado para o produto e portanto $\Omega_S \cup \{1\}$ é subgrupo de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$. Portanto, podemos escrever:

$$\Omega_J = \{\rho \in \hom(G, \mathbb{Z}_2) | m_\rho = n_\rho + 1\} \tag{5.1}$$

$$\Omega_S = \{\rho \in \hom(G, \mathbb{Z}_2) | m_\rho = n_\rho - 1\} \tag{5.2}$$

Agora, tome uma base $\{\rho_2, \ldots, \rho_k\}$ de $\Omega_S \cup \{1\}$ e complete-a para uma base $\{\rho_2, \ldots, \rho_k, \rho_{k+1}\}$ de $\hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2)$. Denote por $T'_2, \ldots, T'_{k+1}$ a base de $\mathbb{Z}_2^k$ correspondente a base dual de $\{\rho_2, \ldots, \rho_k, \rho_{k+1}\}$ no bidual de $\mathbb{Z}_2^k$. Agora provaremos que $\rho \notin \Omega_S$ se, e somente se, $\rho(T'_{k+1}) = -1$. De fato, veja que $\rho \notin \Omega_S$ equivale a dizer que ρ não é gerado por $\{\rho_2, \ldots, \rho_k\}$. Mas como $\{\rho_2, \ldots, \rho_k, \rho_{k+1}\}$ é base de $\mathbb{Z}_2^k$, temos $\rho = \rho_{k+1} \circ \widetilde{\rho}$ em que $\widetilde{\rho}$ é uma combinação de elementos de $\{\rho_2, \ldots, \rho_k\}$. Portanto $\rho(T_{k+1}) = \rho_{k+1}(T_{k+1})\widetilde{\rho}(T_{k+1}) = -1 \cdot 1 = -1$.

Como $\rho_1 \in \Omega_J$, segue que $T_{k+1} \in G - H$, onde $H = \ker(\rho_1)$. Então, podemos usar ρ_1 e T'_{k+1} no Teorema 5.9 para concluir que a lista

$$(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1}), \lambda, \{\xi_\rho \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho'})\}_{\rho\in\Omega_S}) \cup (\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1}), \lambda', \{\mu_\rho \oplus (\lambda' \otimes \mu_{\rho'})\}_{\rho\in\Omega_S})$$

borda simultaneamente, pois $\Omega_S = \{\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\} | \rho(T_{k+1}) = 1\}$ (nas notações do Teorema 5.9 temos $\Omega_+ = \Omega_S$), onde $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$ são respectivamente os fibrados linha associados a ξ_{ρ_1} e μ_{ρ_1}, e, para cada $\rho \in \Omega_S$, ρ' denota o elemento de $\Omega_J - \{\rho_1\}$ que satisfaz $\rho_1 = \rho\rho'$. Usaremos esta notação até o fim do capítulo. Denote:

$$W(F^n) = 1 + w_1 + \ldots + w_n$$
$$W(F^{n-1}) = 1 + \theta_1 + \ldots + \theta_{n-1}$$

e para cada $\rho \in \hom(G, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, podemos denotar

$$W(\xi_\rho) = 1 + v_1^\rho + \ldots + v_{n_\rho}^\rho$$
$$W(\mu_\rho) = 1 + u_1^\rho + \ldots + u_{m_\rho}^\rho.$$

Além disso, denote, $W(\lambda) = 1+e$, onde $e \in \mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$, e por simplicidade denote da mesma forma $W(\lambda) = 1 + e$ onde $e \in \mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$. Agora vamos considerar as classes $W[r]$ (vide Exemplo 2.81). Denotaremos $W[r]$ para tais classes em $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ e por $U[r]$ tais classes em $\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$, ou seja:

$$W[r] = \frac{\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})}{(1+e)^{n_{\rho_1}-r}}$$
$$U[r] = \frac{\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})}{(1+e)^{m_{\rho_1}-r}}.$$

Com isso

$W[r] = (1 + w_1 + \ldots + w_n) \cdot ((1+c)^r + v_1^{\rho_1}(1+c)^{r-1} + \ldots + v_{r-1}^{\rho_1}(1+c) + v_r^{\rho_1} + \dfrac{v_{r+1}^{\rho_1}}{1+c} + \ldots + \dfrac{v_{n_{\rho_1}}^{\rho_1}}{(1+c)^{n_{\rho_1}-r}}),$

$U[r] = (1 + \theta_1 + \ldots + \theta_{n-1}) \cdot ((1+c)^r + u_1^{\rho_1}(1+c)^{r-1} + \ldots + u_{r-1}^{\rho_1}(1+c) + u_r^{\rho_1} + \dfrac{u_{r+1}^{\rho_1}}{1+c} + \ldots + \dfrac{u_{m_{\rho_1}}^{\rho_1}}{(1+c)^{m_{\rho_1}-r}}),$

as quais possuem as seguintes propriedades:

$W[r]_{2r} = w_r e^r +$ termos com potências de e menores que r ,

$W[r]_{2r+1} = (w_{r+1} + v_{r+1}^{\rho_1})e^r +$ termos com potências de e menores que r ,

$W[r]_{2r+2} = v_{r+1}^{\rho_1} e^{r+1} +$ termos com potências de e menores que r+1 .

Tambem,

$U[r]_{2r} = \theta_r e^r +$ termos com potências de e menores que r ,

$U[r]_{2r+1} = (\theta_{r+1} + u_{r+1})e^r +$ termos com potências de e menor que r ,

$U[r]_{2r+2} = u_{r+1} e^{r+1} +$ termos com potências de e menores que r+1 .

De modo análogo, dado $\rho \in \Omega_S$, definimos

$$W_\rho[r] = \frac{\xi_\rho \oplus (\lambda \otimes \xi_{\rho'})}{(1+e)^{n_{\rho'}-r}}$$
$$U_\rho[r] = \frac{\mu_\rho \oplus (\lambda \otimes \mu_{\rho'})}{(1+e)^{m_{\rho'}-r}},$$

e com isso

$W_\rho[r] = (1 + v_1^\rho + \ldots + v_{n_\rho}^\rho) \cdot ((1+c)^r + v_1^{\rho'}(1+c)^{r-1} + \ldots + v_{r-1}^{\rho'}(1+c) + v_r^{\rho'} + \dfrac{v_{r+1}^{\rho'}}{1+c} +$
$\ldots + \dfrac{v_{n_{\rho'}}^{\rho'}}{(1+c)^{n_{\rho'}-r}}),$

$U_\rho[r] = (1 + u_1^\rho + \ldots + u_{m_\rho}^\rho) \cdot ((1+c)^r + u_1^{\rho'}(1+c)^{r-1} + \ldots + u_{r-1}^{\rho'}(1+c) + u_r^{\rho'} + \dfrac{u_{r+1}^{\rho'}}{1+c} +$
$\ldots + \dfrac{u_{m_{\rho'}}^{\rho'}}{(1+c)^{m_{\rho'}-r}}).$

Tais classes satisfazem as seguintes propriedades:

$W_\rho[r]_{2r} = v_r^\rho e^r +$ termos com potências de e menores que r ,
$W_\rho[r]_{2r+1} = (v_{r+1}^\rho + v_{r+1}^{\rho'})e^r +$ termos com potências de e menor que r ,
$W_\rho[r]_{2r+2} = v_{r+1}^{\rho'} e^{r+1} +$ termos com potências de e menores que $r+1$.

Tambem,

$U_\rho[r]_{2r} = u_r^\rho e^r +$ termos com potências de e menores que r ,
$U_\rho[r]_{2r+1} = (u_{r+1}^\rho + u_{r+1}^{\rho'})e^r +$ termos com potências de e menores que r ,
$U_\rho[r]_{2r+2} = u_{r+1}^{\rho'} e^{r+1} +$ termos com potências de e menor que $r+1$.

Agora, note que, como $\rho_1 \in \Omega_J$, segue que $m_{\rho_1} = n_{\rho_1} + 1$. Usando isto, temos:

$$\begin{aligned} \frac{W(\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1}))}{(1+e)^{n_{\rho_1}-r}} &= \frac{W(\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})}{(1+e)^{(n_{\rho_1}+1)-1-r}} \\ &= \frac{\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})}{(1+e)^{m_{\rho_1}-(r+1)}} \\ &= U[r+1], \end{aligned}$$

ou seja, a classe $W[r]$ em $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ corresponde a classe $U[r]$ em $\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$. Além disso, para cada $\rho \in \Omega_S$, denote por $\rho' \in \Omega_J - \{\rho\}$ o par de ρ segundo ρ_1, ou seja, $\rho_1 = \rho\rho'$. Como $\rho' \in \Omega_J$, segue que $m_{\rho'} = n_{\rho'} + 1$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{W(\mu_\rho \oplus (\lambda \otimes \mu_{\rho'})}{(1+e)^{n_{\rho'}-r}} &= \frac{W(\mu_\rho \oplus (\lambda' \otimes \mu_{\rho'})}{(1+e)^{(n_{\rho'}+1)-1-r}} \\ &= \frac{W(\mu_\rho \oplus (\lambda' \otimes \mu_{\rho'})}{(1+e)^{(n_{\rho'}+1)-(r+1)}} \\ &= U_\rho[r+1], \end{aligned}$$

ou seja, para cada $\rho \in \Omega_S$ a classe $W_\rho[r]$ em $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ corresponde a classe $U_\rho[r+1]$ em $\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$.

Agora faremos uma escolha adequada de produtos de tais classes $W[r]$ a fim de mostrar que $(F^n, \{\xi_\rho\}) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$ borda simultaneamente. Considere

$$\overline{W}_{2r} = W[r-1]_{2r} + W[r-1]_{2r-1}W[1]_1$$

e denote $e^{<x} :=$ termos com potências de e menores que x. Usando as propriedades das

classes $W[r]$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{2r} &= W[r-1]_{2r} + W[r-1]_{2r-1}W[1]_1 \\
&= (v_r^{\rho_1}e^r + e^{<r}) + ((w_r + v_r^{\rho_1})e^{r-1} + e^{<r-1})(e + w_1 + v_1^{\rho_1}) \\
&= v_r^{\rho_1}e^r + e^{<r} + ((w_r + v_r^{\rho_1})e^{r-1} + e^{<r-1})\cdot e + ((w_r + v_r^{\rho_1})e^{r-1} + e^{<r-1})(w_1 + v_1^{\rho_1}) \\
&= v_r^{\rho_1}e^r + e^{<r} + ((w_r + v_r^{\rho_1})e^{r} + e^{<r}) + ((w_r + v_r^{\rho_1})e^{r-1} + e^{<r-1})(w_1 + v_1^{\rho_1}) \\
&= v_r^{\rho_1}e^r + (w_re^r + v_r^{\rho_1}e^r + e^{<r}) \\
&= w_re^r + e^{<r}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\rho \in \Omega_S$, considere

$$\overline{W}^{\rho}_{2r} = W_\rho[r-1]_{2r} + W_\rho[r-1]_{2r-1}W_\rho[1]_1,$$

a qual, de modo análogo, satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{W}^{\rho}_{2r} &= W_\rho[r-1]_{2r} + W_\rho[r-1]_{2r-1}W_\rho[1]_1 \\
&= (v_r^{\rho}e^r + e^{<r}) + ((v_r^{\rho} + v_r^{\rho'})e^{r-1} + e^{<r-1})(e + v_1^{\rho} + v_1^{\rho'}) \\
&= v_r^{\rho}e^r + e^{<r} + ((v_r^{\rho} + v_r^{\rho'})e^{r-1} + e^{<r-1})\cdot e + ((v_r^{\rho} + v_r^{\rho'})e^{r-1} + e^{<r-1})(v_1^{\rho} + v_1^{\rho'}) \\
&= v_r^{\rho'}e^r + (v_r^{\rho} + v_r^{\rho'})e^r + e^{<r} \\
&= v_r^{\rho}e^r + e^{<r}.
\end{aligned}$$

Agora, sejam $\omega = (j_1, \ldots, j_s)$ e $\omega_\rho = (j_1^\rho, \ldots, j_{s_\rho}^\rho)$, para cada $\rho \in \hom(\mathbb{Z}_2^k, \mathbb{Z}_2) - \{1\}$, de tal sorte que $|\omega| + \sum_\rho |\omega_\rho| = n$. Como $n_{\rho_1} \geq n+1$, segue que $\dim(\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})) = n + n_{\rho_1} - 1$, o que nos permite considerar a classe:

$$X = (\prod_{j\in\omega} \overline{W}_{2j})(\prod_{j\in\omega_{\rho_1}} W_{2j}[j-1]) \prod_{\rho'\in\Omega_S}((\prod_{j\in\omega_{\rho'}} \overline{W}^{\rho}_{2j})(\prod_{j\in\omega_{\rho'}} W_\rho[j-1]_{2j}))e^{n_{\rho_1}-1-n}.$$

Note que, pelas observações anteriores, temos

$$\begin{aligned}
X &= w_\omega e^{|\omega|} v_{\omega_{\rho_1}} e^{|\omega_{\rho_1}|} \prod_{\rho\in\Omega_S} (v^\rho_{\omega_\rho} e^{|\omega_\rho|} v^{\rho'}_{\omega_{\rho'}} e^{|\omega_{\rho'}|}) e^{n_{\rho_1}-1-n} \\
&= w_\omega v_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S} (v^\rho_{\omega_\rho} v^{\rho'}_{\omega_{\rho'}}) e^{n_{\rho_1}-1}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
X[\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})] &= w_\omega v_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S} (v^\rho_{\omega_\rho} v^{\rho'}_{\omega_{\rho'}}) e^{n_{\rho_1}-1}[\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})] \\
&= w_\omega v_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S} (v^\rho_{\omega_\rho} v^{\rho'}_{\omega_{\rho'}})[F^n]
\end{aligned}$$

o qual representa um número de Whitney arbitrário da lista $(F^n, \{\xi_\rho\})$. Agora mostraremos que o número de Whitney em $\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$ correspondente a $X[\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})]$ é nulo, o que nos permitirá concluir que a lista $(F^n, \{\xi_\rho\})$ borda simultaneamente. Pelas considerações anteriores, a classe $\overline{W}_{2r} = W[r-1]_{2r} + W[r-1]_{2r-1}W[1]_1$ corresponde a

$\overline{W}'_{2r} = U[r]_{2r} + U[r]_{2r-1}U[2]_1$, e com isso

$$\begin{aligned}\overline{U}_{2r} &= (\theta_r e^r + e^{<r}) + (\theta_{r-1}e^r + e^{<r})(\theta_1 + u_1^{\rho_1}) \\ &= (\theta_r e^r + e^{<r}) + (\theta_1 + u_1^{\rho_1})\theta_{r-1}e^r + e^{<r}.\end{aligned}$$

Então, podemos escrever $\overline{U}_{2r} = A_r e^r + e^{<r}$, onde $A_r \in H^r(F^n, \mathbb{Z}_2)$. Além disso, para cada $\rho \in \Omega_S$, a classe

$$\overline{W}^{\rho}_{2r} = W_\rho[r-1]_{2r} + W_\rho[r-1]_{2r-1}W_\rho[1]_1$$

corresponde a

$$\overline{U}^{\rho}_{2r} = U_\rho[r]_{2r} + U_\rho[r]_{2r-1}U_\rho[1]_1.$$

Então

$$\begin{aligned}\overline{U}^{\rho}_{2r} &= U_\rho[r]_{2r} + U_\rho[r]_{2r-1}U_\rho[1]_1 \\ &= (u_r^\rho e^r + e^{<r}) + ((u_{r-1}^\rho)e^r + e^{<r})(u_1^\rho + u_1^{\rho'}) \\ &= (u_r^\rho + u_{r-1}^\rho(u_1^\rho + u_1^{\rho'}))e^r + e^{<r} \\ &= B_r e^r + e^{<r},\end{aligned}$$

onde $B_r \in H^r(F^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$. Note que a classe Y em $\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})$ que corresponde a classe X em $\mathbb{R}P(\xi_{\rho_1})$ é igual a

$$Y = (\prod_{j\in\omega}\overline{U}_{2j})(\prod_{j\in\omega_{\rho_1}} U_{2j}[j]) \prod_{\rho'\in\Omega_S}((\prod_{j\in\omega_{\rho'}}\overline{U}^{\rho}_{2j})(\prod_{j\in\omega_{\rho'}} U_\rho[j]_{2j}))e^{n_{\rho_1}-1-n}$$

e pelas considerações anteriores, segue que

$$\begin{aligned}Y &= A_\omega e^{|\omega|}\theta^{\rho_1}_{\omega_{\rho_1}} e^{|\omega_{\rho_1}|} \prod_{\rho\in\Omega_S}(B_{|\omega_\rho|}e^{|\omega_\rho|})(u^\rho_\omega e^{|\omega_{\rho'}|})e^{n_{\rho_1}-1-n} \\ &= A_\omega\theta_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S}(B_{|\omega_\rho|})(u^\rho_\omega)e^{n_{\rho_1}-1}.\end{aligned}$$

Mas $A_\omega\theta_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S}(B_{|\omega_\rho|})(u^\rho_\omega) \in H^n(F^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$, e portanto

$$Y[\mathbb{R}P(\mu_{\rho_1})] = A_\omega\theta_{\omega_{\rho_1}} \prod_{\rho\in\Omega_S}(B_{|\omega_\rho|})(u^\rho_\omega)[F^{n-1}] = 0.$$

Ou seja, provamos que todo número da lista $(F^n, \{\xi\}_\rho)$ é nulo, portanto $(F^n, \{\xi\}_\rho)$ borda simultaneamente. Então existe uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação (N^m, ψ) com fixed-data $(F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$, cobordante a (M^m, ϕ). Mas note que as dimensões dos fibrados $\{\mu_\rho\}$ permanecem as mesmas. Então $\mu_{\rho_1} = n_{\rho_1} + 1 > n - 1$ e como F^{n-1} é conexa segue de Teorema 4.5 que $(F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$ borda simultaneamente. Portanto provamos que $(F^n, \{\xi\}_\rho) \cup (F^{n-1}, \{\mu_\rho\})$ borda simultaneamente, que é o que queríamos. $\square$

5.3 Conclusão

Como vimos na Introdução, em [7] Stong e Kosniowski provaram o seguinte teorema, o qual é uma generalização do famoso Five Halves Theorem de Boardman.

Teorema 5.10 (Teorema Forte de Boardman)**.** *Seja* (M^m, T) *uma involução com fixed-set* $F = F^0 \cup \ldots \cup F^n$*. Se* $m > \dfrac{5n}{2}$*, então* (M^m, T) *borda equivariantemente.*

Não existe uma generalização deste Teorema para $\mathbb{Z}_2^k$-ações. Ainda em [7], Stong e Kosniowsky provaram que se o conjunto de pontos fixos F tem dimensão constante igual a n e $m > 2n$ então (M^m, T) borda. Este último resultado pode ser visto como um caso particular do Teorema Forte de Boardman e foi generalizado por Pergher em [16]; Pergher provou que se (M^m, ϕ) é uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação com o conjunto de pontos fixos conexo e $m > 2^k n$, então (M^m, ϕ) borda. Não é conhecido um resultado deste tipo para o caso em que $F = F^n \cup F^{n-1}$, o Teorema 5.1 é um resultado intermediário nesta direção.

Referências Bibliográficas

[1] P. E. Conner, *Diffeomorphisms of period two*, Michigan Math., Journal 10, 341-352, **1963**.

[2] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Second Edition Springer **1979**.

[3] J. C. R. R. Costa, *Involucoes fixando RP(2n) U RP(6) e variedades compatíveis com o ponto com respeito à involuções*, Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, **2020**.

[4] J. C. R. R. Costa, R. M. Moraes, P. L. Q. Pergher, *Manifolds compatible with the point with respect to involutions*, submitted.

[5] A. Dold, *Erzeugende der Thomshen Algebra* η, Math. Z. 10 10 **1963** 341-352.

[6] F. G. Figueira, P. L. Q. Pergher, *Two commuting involutions fixing* $F^n \cup F^{n-1}$, Geometricae Dedicata. 117 **2006**, 181-193.

[7] Czes Kosniowski, R. E. Stong, *Involutions and characteristic numbers*, Topology, 17, **1978**, 309-330.

[8] J. Milnor, *Some consequences of a Theorem of Bott*, Annals of Mathematics 68,n. 2, **1958**, 444-449.

[9] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, **1974**.

[10] R. Oliveira, *Involuções Comutantes Fixando Dois Espaços Projetivos Pares*, Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, **2002**.

[11] R. Oliveira, P. L. Q. Pergher, *Commuting Involutions whose fixed point set consists of two special components*, FUNDAMENTA MATHEMATICAE, 201, **2008**, 241-259.

[12] H. Osborn, *Vector Bundles*, vol.1, Academic Press, **1982**.

[13] P. L. Q. Pergher, *Involutions fixing an arbitrary product of spheres and a point*, Manuscripta Mathematica 89, **1996**, 471-474.

[14] P. L. Q. Pergher, $\mathbb{Z}_2^k$*-actions whose fixed data has a section*, Trans. Amer. Math. Soc. 353, **2001**, 175-189.

[15] P. L. Q. Pergher, R.E. Stong, *Involutions fixing* $\{point\} \cup F^n$, Transform. Groups, 6, **2001**, 79-86.

[16] P. L. Q. Pergher, *On* $\mathbb{Z}_2^k$*-actions*, Topology Appl. 117, **2002**, 105-112.

[17] P. L. Q. Pergher, $\mathbb{Z}_2^k$*-actions fixing* $\{point\} \cup V^n$, Fundamenta Mathematicae, 172, **2002**, 83-97.

[18] P. L. Q. Pergher, $\mathbb{Z}_2^2$*-actions with n-dimensional fixed point set*, Proceedings of the american mathematical society, 136, **2007**, 1855-1860.

[19] L. S. Pontrjagin, Characteristic Cycles on Differentiable Manifolds, Mat. Sbonik N. S. 21(63) **1947**, 233-284; A.M.S. Translation 32 **1950**.

[20] A. Ramos, *Involuções fixando espaços projetivos*, Tese (Doutorado em Matemática), UFSCar, **2003**.

[21] D. C. Royster, *Involutions fixing the disjoint union of two projectives spaces*, Indiana Univ. Math. J., 29, **1980**, 267-276.

[22] R. E. Stong, *Involutions fixing projective spaces*, Michigan Math J., 13, **1966**, 445-447.

[23] R. E. Stong, *Equivariant bordism and* $\mathbb{Z}_2^k$*-actions*, Duke Math.J. 37 **1970**, 779-785.

[24] R. E. Stong, *Involutions with n-dimensional fixed set*, Math.Z. 178, **1981**, 443-447.

[25] R. E. Stong, *Vector bundles over Dold manifolds*, Fundamenta Mathematicae 169, 85-95, **2001**

[26] R. Thom, *Qualques Proprietés Globales des Variétés Differentiables*, Comm. Math. Helv. 28 **1954**, 17-86.