

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PEDRO HENRIQUE LONGO PARSEKIAN

**DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* DE SIMULAÇÃO DO  
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM VEÍCULO BAJA**

SÃO CARLOS  
2022

PEDRO HENRIQUE LONGO PARSEKIAN

**DESENVOLVIMENTO DE UM *SOFTWARE* DE SIMULAÇÃO DO  
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM VEÍCULO BAJA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a  
Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do  
título de Bacharel em Curso de Graduação em Engenharia  
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Vitor Ramos Franco

SÃO CARLOS  
2022

Dedico este trabalho aos meus avós, professores Elson Longo e Maria Aparecida, que sempre me ajudaram e apoiaram independentemente do momento. Especialmente, para minha avó, que apesar de não ser da área de exatas, sempre conseguiu me ajudar a desenvolver trabalhos acadêmicos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família por todo suporte e incentivo recebido durante os momentos difíceis, que passei durante meu período na Universidade. Seguido de todos os meus amigos de infância, que sempre me apoiaram e não desistiram de mim, apesar da ausência que apresentei, decorrente da alta carga de trabalho durante a graduação.

Aos meus colegas e amigos de curso, por todos os momentos bons e ruins que enfrentamos, e pela troca de conhecimentos que experimentamos no decorrer da minha formação. Ao professor Vitor Ramos Franco por todo auxílio no desenvolvimento do meu trabalho e aos professores que contribuíram de forma positiva com todos os conhecimentos, lições e experiências, aos quais foram fundamentais para o meu crescimento profissional.

E, por fim, a todos os membros e ex-membros da Equipe Baja UFSCar, pela oportunidade de ingressar no projeto e aplicar na prática os conceitos aprendidos dentro da sala de aula. Por todos os altos e baixos que passamos juntos durante meus três anos na equipe que, apesar de tudo, mostraram-me o que é realmente gostar e se dedicar a um projeto.

*“[...]*  
*Nunca perseguir la gloria*  
*Ni dejar en la memoria*  
*De los hombres, mi canción*  
*[...]*  
*Nunca perseguir la gloria*

*Caminante*  
*Son tus huellas el camino y nada más*  
*Caminante, no hay camino*  
*Se hace camino al andar*  
*Al andar, se hace camino*  
*Y al volver la vista atrás*  
*Se ve la senda que nunca*  
*Se ha de volver a pisar*  
*Caminante, no hay camino*  
*Sino estelas en la mar*  
*[...]*  
*Caminante, no hay camino*  
*Se hace camino al andar*  
*Golpe a golpe, verso a verso*  
*Caminante, no hay camino*  
*Se hace camino al andar*  
*Golpe a golpe, verso a verso*  
*[...]”*



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA - CCEMec/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33519703 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 34/2021/CCEMec/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

PEDRO HENRIQUE LONGO PARSEKIAN

DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE DE SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM VEÍCULO BAJA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 30 de novembro de 2021

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Vitor Ramos Franco
Membro da Banca 1	Flávio Yukio Watanabe
Membro da Banca 2	Sidney Bruce Shiki



Documento assinado eletronicamente por **Flavio Yukio Watanabe, Docente**, em 30/11/2021, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sidney Bruce Shiki, Docente**, em 30/11/2021, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vitor Ramos Franco, Docente**, em 30/11/2021, às 16:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0541963** e o código CRC **7F63A966**.

## RESUMO

A dificuldade de se prever o comportamento dinâmico e os esforços envolvidos em um veículo *off road* influencia de maneira significativa no projeto e desenvolvimento de sua suspensão. Na tentativa de contornar esses problemas, simulações computacionais são realizadas mediante o uso de modelos dinâmicos que, em sua maioria, representam veículos *on road*, submetidos a condições de funcionamento bastante diferentes às do modelo proposto. Diante desse cenário, faz-se necessário o desenvolvimento de modelos dinâmicos que melhor representam o comportamento do veículo *off road*, aumentando-se assim sua confiabilidade e desempenho. O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um modelo matemático na condição *full car* (7 graus de liberdade) de um veículo *off road* utilizado em competições estudantis, também chamado de minibaja. Características da suspensão do veículo foram estudadas de forma a se ter um melhor desempenho durante o percurso da competição. Diversos tipos de obstáculos encontrados nas competições foram simulados e, para uma maior facilidade de utilização do software, foi desenvolvida uma interface gráfica, de modo que o conhecimento em programação é dispensado pelo usuário. Por meio do desenvolvimento do modelo matemático e de obstáculos bastante representativos, foi possível criar uma ferramenta de fácil uso, e assim, proporcionar dados que retratam o veículo de maneira mais realista durante as fases de projeto, garantindo melhores colocações da equipe nas competições, dado a maior capacidade de prever o comportamento do carro durante a fase de projeto.

**Palavras-chave:** Dinâmica veicular. Baja. Modelo matemático. Interface gráfica do utilizador. *Full car*.

## ABSTRACT

The difficulty of predicting the dynamic behavior and stress involved in an off road vehicle significantly influences the design and development of its suspension. In an attempt to overcome this problems, computational simulations are carried out using dynamic models that, in their majority, represent on-road vehicles, subject to operating conditions that are quite different from those of the proposed model. Given this scenario, it is necessary to development of dynamic models that better represent the off-road vehicle's behavior, thus increasing its reliability and performance. The present work had as its objective the development of a mathematical model in the full car condition (7 degrees of freedom) of an off road vehicle used in student competitions, also called minibaja. Vehicle suspension characteristics were studied in order to have a better performance during the competition route. Different types of obstacles were simulated and to make easy the use of the software, a graphical interface was developed, so that programming knowledge is dispensed by the user. Through the development of the model and quite representative obstacles, it was possible to create an easy-to-use tool, and thus, provide data that portray the vehicle more realistically during the design phases, ensuring better position of the team in competitions, given the greater ability to predict car behavior during the design phase.

**Keywords:** Vehicle dynamics. Baja. Mathematical model. Graphical user interface. Full car.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Renderização do protótipo desenvolvido. . . . .	19
Figura 2 – Sistema de coordenadas de um veículo. . . . .	21
Figura 3 – Suspensão de eixo rígido. . . . .	22
Figura 4 – Suspensão McPherson. . . . .	23
Figura 5 – Suspensão duplo A. . . . .	23
Figura 6 – Suspensão multilink. . . . .	24
Figura 7 – Ângulo de Caster. . . . .	24
Figura 8 – Ângulo de Cambagem. . . . .	25
Figura 9 – Ângulo de Convergência. . . . .	25
Figura 10 – Ângulo de Pino Mestre. . . . .	26
Figura 11 – Suspensão do tipo duplo A. . . . .	26
Figura 12 – Template criado no <i>Adams Car</i> . . . . .	27
Figura 13 – Diferentes tipos de molas. . . . .	28
Figura 14 – Representação do elemento mola para modelos matemáticos. . . . .	28
Figura 15 – Tipos de amortecedor. . . . .	29
Figura 16 – Representação do elemento amortecedor para modelos matemáticos. . . . .	30
Figura 17 – Forças e momentos que agem sobre o pneu. . . . .	30
Figura 18 – Representação modelo de pneu. . . . .	30
Figura 19 – Relação da pressão do pneu com os coeficientes de amortecimento e rigidez. . . . .	31
Figura 20 – Barra estabilizadora. . . . .	31
Figura 21 – Força nas rodas gerada pela barra. . . . .	32
Figura 22 – Representação do modelo de 1/4 de carro. . . . .	35
Figura 23 – Aceleração em função da frequência para diferentes frequências de ressonância. . . . .	36
Figura 24 – Resposta de um sistema de segunda ordem à uma entrada degrau. . . . .	37
Figura 25 – Ganho em função da frequência para diferentes fatores de amortecimento. . . . .	38
Figura 26 – Modelagem de um quarto de carro. . . . .	38
Figura 27 – Modelo de 5 graus de liberdade. . . . .	39
Figura 28 – Modelo de 7 graus de liberdade. . . . .	40
Figura 29 – Processo iterativo. . . . .	40
Figura 30 – Sistema criado no <i>Adams Car</i> . . . . .	41
Figura 31 – Modelo com pneus deformáveis. . . . .	42
Figura 32 – Sistema de coordenadas utilizado para a criação do modelo matemático. . . . .	43
Figura 33 – Sistema de sete graus de liberdade. . . . .	44
Figura 34 – Parâmetros do veículo. . . . .	44

Figura 35 – DCL massa suspensa. . . . .	46
Figura 36 – Diagrama de corpo livre das massas não suspensas. . . . .	47
Figura 37 – Sistema massa-mola-amortecedor. . . . .	57
Figura 38 – Curvas para compor entrada do <i>drop test</i> . . . . .	58
Figura 39 – Curva de entrada para o <i>drop test</i> . . . . .	58
Figura 40 – Função do <i>drop test</i> para cada uma das rodas. . . . .	59
Figura 41 – Perfil de pista construído com vetores de posição. . . . .	60
Figura 42 – Influência do raio na trajetória da parte inferior do pneu. . . . .	61
Figura 43 – Processo de adequação do perfil da pista ao raio do pneu. . . . .	61
Figura 44 – Perfil de pista corrigido conforme raio do pneu. . . . .	62
Figura 45 – Transformação do regime da distância para do tempo. . . . .	63
Figura 46 – Dimensões para o cálculo de defasagem para cada uma das rodas. . . . .	64
Figura 47 – Obstáculo criado para cada uma das rodas. . . . .	65
Figura 48 – Arquivo executável do programa de simulação desenvolvido. . . . .	67
Figura 49 – Menu principal. . . . .	67
Figura 50 – Gerenciador de sistemas. . . . .	68
Figura 51 – Confirmação da criação de um novo sistema. . . . .	69
Figura 52 – Ajuda do gerenciador de sistemas. . . . .	69
Figura 53 – Interface da simulação de um <i>drop test</i> . . . . .	70
Figura 54 – Visualização da entrada para a simulação do <i>drop test</i> . . . . .	71
Figura 55 – Confirmação da realização da simulação do <i>drop test</i> . . . . .	71
Figura 56 – Ajuda do simulador de <i>drop test</i> . . . . .	72
Figura 57 – Interface da simulação de obstáculos. . . . .	72
Figura 58 – Obstáculo gerado pelo simulador. . . . .	73
Figura 59 – Confirmação da realização da simulação da passagem por um obstáculo personalizado. . . . .	73
Figura 60 – Janela de ajuda do simulador de obstáculos personalizados. . . . .	74
Figura 61 – Interface da janela do gerador de diagramas Bode. . . . .	74
Figura 62 – Diagrama de Bode gerados pelo programa . . . . .	75
Figura 63 – Combinação entre o <i>plot</i> dos diagramas gerados anteriormente. . . . .	76
Figura 64 – Janela de ajuda do gerador de diagramas Bode. . . . .	76
Figura 65 – Janela para aplicação das entradas padrão. . . . .	77
Figura 66 – Entrada degrau aplicada pelo programa. . . . .	78
Figura 67 – Confirmação da simulação de uma entrada padrão. . . . .	78
Figura 68 – Interface da opção de ajuda para entradas padrão. . . . .	79
Figura 69 – Janela do modulo de “plotar” resultados. . . . .	79
Figura 70 – Visualização do <i>plot</i> das entradas no tempo. . . . .	80
Figura 71 – Visualização do <i>plot</i> das saídas do CG no tempo. . . . .	81
Figura 72 – Gráfico do deslocamento da massa suspensa e entrada na roda. . . . .	82

Figura 73 – Gráficos do deslocamento da roda e da massa suspensa sobrepostos. . .	83
Figura 74 – Seleção dos eixos para o <i>plot</i> personalizado. . . . .	84
Figura 75 – <i>Plot</i> personalizado, gerado segundo a seleção da figura anterior. . . .	84
Figura 76 – Opção de salvar “.csv” no explorador de arquivos. . . . .	85
Figura 77 – Arquivo exportado aberto no Microsoft Excel. . . . .	85
Figura 78 – Janela de ajuda do modulo de resultados. . . . .	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Entradas e saídas do modelo. . . . .	45
Tabela 2 – Descrição dos parâmetros do modelo. . . . .	45
Tabela 3 – Bibliotecas utilizadas. . . . .	65
Tabela 4 – Descrição do início das variáveis exportadas pelo programa. . . . .	86

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CG	Centro de Gravidade
DCL	Diagrama de Corpo Livre
DD	Dianteira Direita
DE	Dianteira Esquerda
EDO	Equações Diferencias Ordinárias
GUI	Interface Gráfica para o Usuário
Ma-Mo-Am	Massa-Mola-Amortecedor
MUV	Movimento Uniformemente Variado
SAE	Sociedade de Engenheiros Automotivos (Society of Automotive Engineers)
TD	Traseira Esquerda
TE	Traseira Esquerda

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo de entrada no obstáculo
$\gamma$	Ângulo de rolagem
$\gamma_0$	Saída do ângulo de Rolagem no CG
$\Delta S$	Deslocamento do conjunto amortecedor e mola
$\Delta W$	Deslocamento da roda
$\zeta$	Fator de amortecimento
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular
$\theta_0$	Saída do ângulo de Arfagem no CG
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida em rad/s
$\omega_d$	Frequência natural amortecida
$B$	Coefficiente de amortecimento do amortecedor
$B_d$	Amortecimento do amortecedor dianteiro
$B_{rd}$	Amortecimento do pneu dianteiro
$B_{rt}$	Amortecimento do pneu traseiro
$B_t$	Amortecimento do amortecedor traseiro
$B_w$	Coefficiente de amortecimento virtual
$c$	Distância entre o centro das rodas do eixo estudado
$c_1$	Distância em X da linha do CG até a roda 1
$c_2$	Distância em X da linha do CG até a roda 2
$c_3$	Distância em X da linha do CG até a roda 3
$c_4$	Distância em X da linha do CG até a roda 4
$C_s$	Coefficiente de amortecimento.
$d_d$	Bitola dianteira
$d_t$	Bitola traseira

$d_x$	Deslocamento lateral do CG
$d_{f1}$	Defasagem da roda traseira esquerda
$d_{f2}$	Defasagem da roda traseira direita
$d_{f3}$	Defasagem da roda dianteira direita
$F$	Força de reação
$f$	Frequência em Hz
$F_B$	Força de reação do amortecedor
$f_i$	Entrada de força
$F_k$	Força de reação da mola
$F_{kt}$	Força resultante da barra
$g$	Aceleração da gravidade
$I$	Momento de inercia
$I_x$	Momento de inercia da arfagem
$I_z$	Momento de inercia da rolagem
$k_b$	Rigidez da barra estilizadora "linearizada"
$k_d$	Rigidez da mola dianteira
$k_{rd}$	Rigidez do pneu dianteiro
$k_{rt}$	Rigidez do pneu traseiro
$k_s$	Coefficiente de rigidez da mola
$K_s$	Coefficiente de rigidez da mola
$K_t$	Coefficiente rigidez equivalente do pneu
$k_t$	Rigidez da mola traseira
$k_{tor}$	Coefficiente rigidez torsional da barra
$k_w$	Rigidez virtual
$l_d$	Distância do CG até o eixo dianteiro
$l_t$	Distância do CG até o eixo traseiro

$m$	Massa
$M$	Momento reação
$m_d$	Massa não suspensa dianteira (independente)
$M_{kt}$	Momento de reação à rolagem do carro
$M_s$	Massa suspensa
$M_s$	Massa suspensa.
$m_t$	Massa não suspensa traseira (independente)
$pV$	Vetor de pontos de velocidade.
$pX$	Vetor de pontos de deslocamento horizontal.
$pY$	Vetor de pontos de deslocamento vertical.
$RI$	Razão de instalação
$t$	Tempo
$x$	Deslocamento linear
$\dot{x}$	Velocidade linear
$\ddot{x}$	Aceração
$y_1$	Entrada de deslocamento vertical na base da roda 1
$y_2$	Entrada de Deslocamento vertical da base da roda 2
$y_3$	Entrada de Deslocamento vertical da base da roda 3
$y_4$	Entrada de Deslocamento vertical da base da roda 4
$y_o$	Saída de Deslocamento vertical no CG
$y_{r1}$	Saída de Deslocamento vertical da roda 1
$y_{r2}$	Saída de Deslocamento vertical da roda 2
$y_{r3}$	Saída de Deslocamento vertical da roda 3
$y_{r4}$	Saída de Deslocamento vertical da roda 4



## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	19
1.2 OBJETIVOS	20
<b>2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1 SISTEMA DE COORDENADAS	21
2.2 ESTUDO CINEMÁTICO	21
2.2.1 TIPOS DE SUSPENSÃO	22
2.2.1.1 EIXO RÍGIDO	22
2.2.1.2 MCPHERSON	22
2.2.1.3 DUPLO “A”	23
2.2.1.4 MULTILINK	23
2.2.2 PARÂMETROS DA SUSPENSÃO	24
2.2.2.1 CASTER	24
2.2.2.2 CAMBAGEM	24
2.2.2.3 Convergência	25
2.2.2.4 PINO MESTRE	26
2.2.2.5 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS	26
2.3 ELEMENTOS DA SUSPENSÃO	27
2.3.1 MOLA	27
2.3.2 AMORTECEDOR	28
2.3.3 PNEU	30
2.3.4 BARRA ESTABILIZADORA	31
2.3.5 RAZÃO DE INSTALAÇÃO	33
2.4 ESTUDO DA DINÂMICA VERTICAL	33
2.4.1 MODELOS MULTICORPOS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS OU DE ELEMENTOS COM PARÂMETROS CONCENTRADO	34
2.4.1.1 1/4 DE CARRO	35
2.4.1.2 1/2 CARRO	39
2.4.1.3 CARRO COMPLETO	40
2.4.2 <i>SOFTWARES</i> EXISTENTES	41
<b>3 – METODOLOGIA</b>	<b>43</b>
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	43
3.1.1 HIPÓTESES	46
3.1.2 APLICAÇÃO DAS LEIS DE NEWTON-EULER	46

3.1.3	RELAÇÕES MATEMÁTICAS . . . . .	48
3.1.4	DESENVOLVIMENTO DO MODELO . . . . .	51
3.2	MODELAGEM DOS OBSTÁCULOS . . . . .	56
3.2.1	<i>DROP TEST</i> . . . . .	56
3.2.2	OBSTÁCULO PERSONALIZADO . . . . .	59
3.2.3	<i>SOFTWARE</i> . . . . .	65
<b>4</b>	<b>– RESULTADOS . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1	GERENCIADOR DE SISTEMAS . . . . .	68
4.2	SIMULAR <i>DROP TEST</i> . . . . .	70
4.3	SIMULAR OBSTÁCULO PERSONALIZADO . . . . .	72
4.4	DIAGRAMA DE BODE . . . . .	74
4.5	ENTRADAS PADRÃO . . . . .	77
4.6	“PLOTAR” RESULTADOS . . . . .	79
<b>5</b>	<b>– CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>89</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O programa Baja SAE Brasil iniciou-se em 1994 pela Sociedade de Engenheiros Automotivos (SAE). É um desafio lançado para estudantes de engenharia, com objetivo de projetar e manufaturar um protótipo *off road* (Figura 1), utilizando os conhecimentos adquiridos em atividades acadêmicas de curso de graduação, por uma equipe com estrutura muito semelhante a de uma empresa real. O projeto deve respeitar um regulamento (SAE BRASIL, 2019) e poderá participar de diversas competições.

Figura 1 – Renderização do protótipo desenvolvido.



Fonte: Autor.

Anualmente, ocorrem três competições oficiais: regional, subdividida entre as regiões nordeste, sudeste e sul; nacional, que unifica todas as regiões em uma única competição; e, por fim, mundial, que conta com a participação das três equipes mais bem colocadas na competição nacional. Nessas competições, existem diferentes provas, com o objetivo de avaliar o desempenho do protótipo. Esse desempenho pode ser subdividido em dinâmicas - longitudinal, vertical e lateral - que dão origem aos subsistemas do projeto.

### 1.1 MOTIVAÇÃO

Durante o desenvolvimento do projeto, foram enfrentados diversos problemas, tais como: a) excesso de massa; b) quebra de componentes; c) dificuldades durante a transposição de obstáculos; d) desconforto ao piloto, gerado por imperfeições no terreno; e) falta de manobrabilidade. Em razão do desconhecimento das entradas, em muitos casos,

valores empíricos foram utilizados para a modelagem de componentes estruturais. Além disso, a modelagem cinemática e dinâmica do projeto do veículo é feita, em sua grande maioria, utilizando bibliografias criadas com objetivo de gerar conforto e desempenho para veículos *on road*.

A modelagem da suspensão de um veículo pode ser dividida em cinemática e dinâmica. Em um estudo de dinâmica, a divisão ocorre entre vertical e lateral no qual, na maioria dos casos, a melhoria de uma implicará no definhamento da outra. Com isso, diversos estudos são realizados na tentativa de encontrar a combinação que proporcione a melhor interação entre as duas direções. No contexto *off road*, a dinâmica vertical está atrelada à capacidade do veículo traspor obstáculos no menor tempo possível, sem sobrecarregar os componentes ou transmitir acelerações exageradas ao piloto. Enquanto a lateral, é ligada a capacidade do veículo realizar curvas fechadas no menor tempo possível.

Esse estudo é feito, em sua grande maioria, utilizando *softwares* pagos. Porém, por se tratarem de programas comerciais e fechados, sua *engine* é programada para abranger casos genéricos, não sendo possível conhecer suas condições de contorno. Com isso, a construção de modelos e interpretação dos resultados se torna algo muito complexo.

Essa complexidade pode ser contornada por meio da criação de modelos autorais, geralmente feitos no *MATLAB*, que também é um *software* pago. Porém, seu uso ainda está limitado ao conhecimento em programação e à gestão de conhecimento de como utilizá-lo.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho foi construir um modelo representativo de um protótipo baja e desenvolver uma interface capaz de possibilitar ao usuário maiores facilidades com relação a simulação do comportamento dinâmico do veículo.

Os objetivos específicos foram:

- Construir um modelo de sete graus de liberdade de um veículo;
- Simular o modelo matemático utilizando linguagem de programação *Python*;
- Criar uma GUI (Interface Gráfica para o Usuário) capaz de:
  1. Gerar novos sistemas a partir de parâmetros fornecidos pelo o usuário;
  2. Simular um *Drop Test*;
  3. Simular um obstáculo personalizado;
  4. Simular obstáculos “padrão” (degrau, rampa e impulso).
  5. Gerar a Resposta em Frequência *diagrama de Bode* do sistema;
  6. Plotar resultados ao usuário.

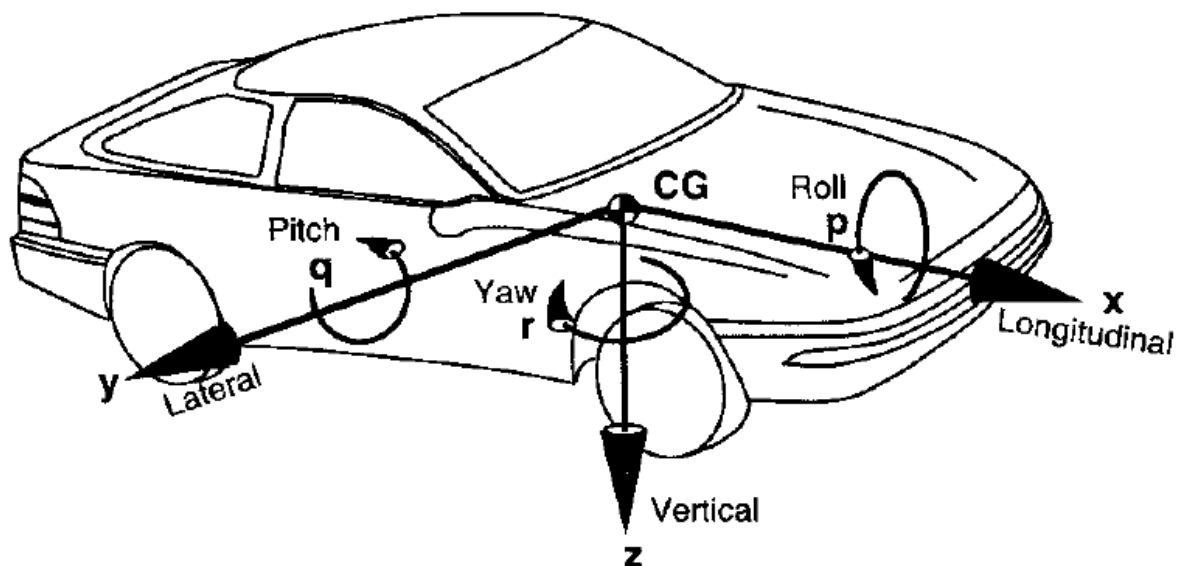
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo, com o objetivo da contextualização e familiarização com o tema, serão abordados conceitos e termos da dinâmica de suspensão de um veículo.

### 2.1 SISTEMA DE COORDENADAS

Segundo Gillespie (1992) para a modelagem de um veículo, toda massa de componentes, que se movem juntos, deve ser concentrada em um único ponto, no centro de gravidade (CG), juntamente, aos respectivos momentos de inércia para cada um dos eixos. Como as rodas se movem de maneira independente, o carro é representado pela massa do chassi que compõe a “massa suspensa”, e as rodas como “massas não suspensas”. Os eixos em que, na maioria dos casos, um veículo é estudado são representados pela Figura 2, na qual *Roll* representa o movimento de rolagem, *Pitch*, de arfagem e *Yaw*, de guinada.

Figura 2 – Sistema de coordenadas de um veículo.



Fonte: Gillespie (1992).

### 2.2 ESTUDO CINEMÁTICO

Inicialmente, conforme Milliken e Milliken (1995), são feitos estudos na geometria que serão utilizados em cada um dos eixos do veículo. Esse estudo terá maior influência na cinemática do veículo, pois a escolha entre diferentes tipos de geometria implicará em como ocorrerá a variação dos ângulos de suspensão.

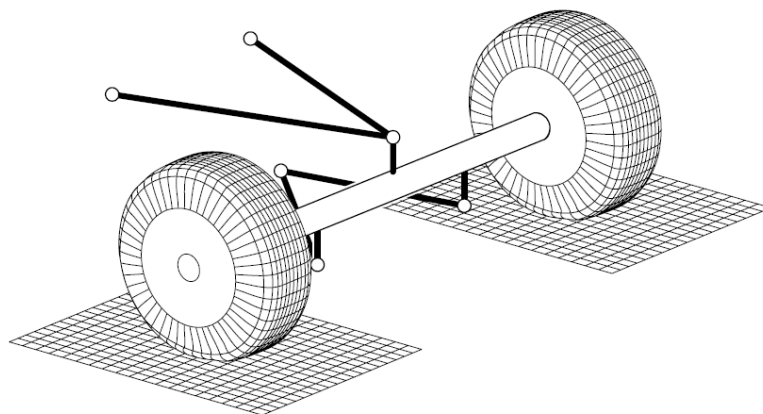
## 2.2.1 TIPOS DE SUSPENSÃO

O tipo de suspensão utilizado tem grande impacto na dinâmica do veículo e sua escolha dependerá dos requisitos do projeto. Cada uma tem vantagens e desvantagens. Alguns apresentam uma maior simplicidade de aplicação, manufatura e montagem, porém, não é possível atingir um controle tão grande da variação de ângulos e pontos geométricos. Com o uso dos modelos de maior complexidade de aplicação, esse controle se torna muito maior. De forma simples, é possível afirmar que, quanto maior a complexidade, maior será o controle sobre os parâmetros da suspensão, porém menor será a robustez.

### 2.2.1.1 EIXO RÍGIDO

Um modelo bastante comum é a suspensão de eixo rígido (Figura 3) comumente utilizada no eixo traseiro de veículos de passeio. Sua aplicação é simples o que a torna barato e de fácil manutenção. Por se tratar de um eixo rígido interligando as duas rodas, a suspensão é caracterizada como não independente, ou seja, o comportamento de um lado influencia o outro. Para transposição de obstáculos isso pode se tornar um problema, pois, um lado pode fazer com que o outro perca tração com o terreno.

Figura 3 – Suspensão de eixo rígido.

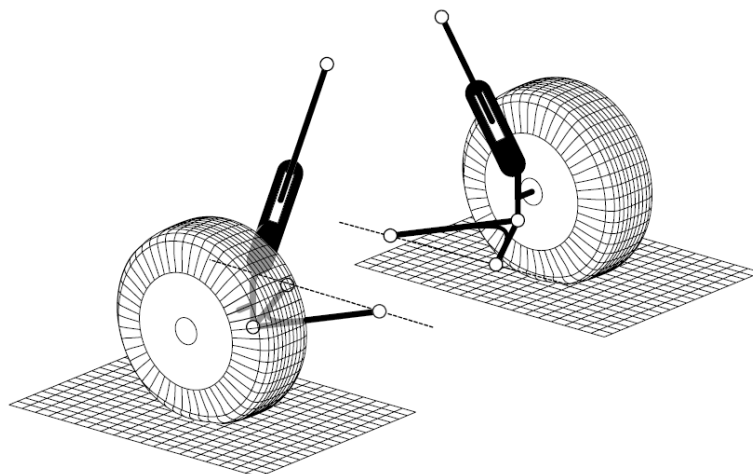


Fonte: Jazar (2008).

### 2.2.1.2 MCPHERSON

A suspensão McPherson, criada em 1940 por Earle Steele McPherson e apresentada na Figura 4, é a mais utilizada em eixos dianteiros de carros de passeio. Ao contrário da suspensão de eixo rígido, ela proporciona independência para a suspensão, ou seja, o movimento de um lado não influencia no outro. Sua construção é simples, e com ela é possível obter um fácil ajuste de ângulos da suspensão com a movimentação do ponto superior do amortecedor.

Figura 4 – Suspensão McPherson.

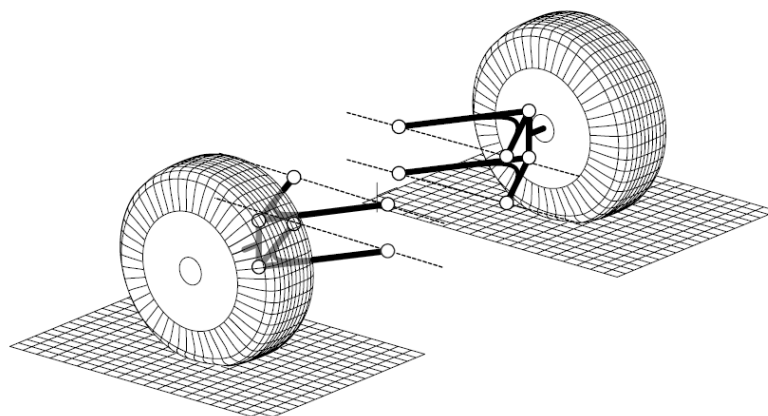


Fonte: Jazar (2008).

### 2.2.1.3 DUPLO “A”

A suspensão Duplo A (Figura 5), da mesma forma que a McPherson, proporciona independência entre os lados do eixo. Comumente utilizada em carros esportivos, tem uma construção mais complexa, porém proporciona um maior ajuste dos pontos geométricos da suspensão e um maior controle sobre a variação dos ângulos.

Figura 5 – Suspensão duplo A.

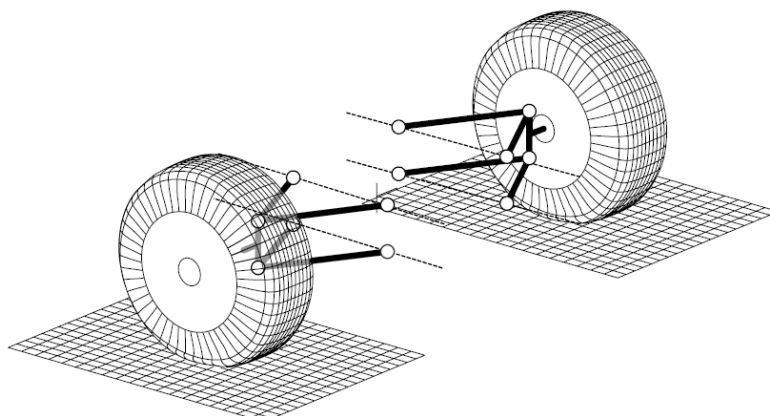


Fonte: Jazar (2008).

### 2.2.1.4 MULTILINK

O sistema multilink (Figura 6) pode ser considerado uma evolução do sistema de suspensão duplo A. Sua aplicação é menos comum, por se tratar de um sistema muito mais complexo. Todavia, sua utilização permite obter um maior desempenho, pois, por meio de seu uso, é possível obter um perfeito controle de todos os ângulos de suspensão.

Figura 6 – Suspensão multilink.



Fonte: Jazar (2008).

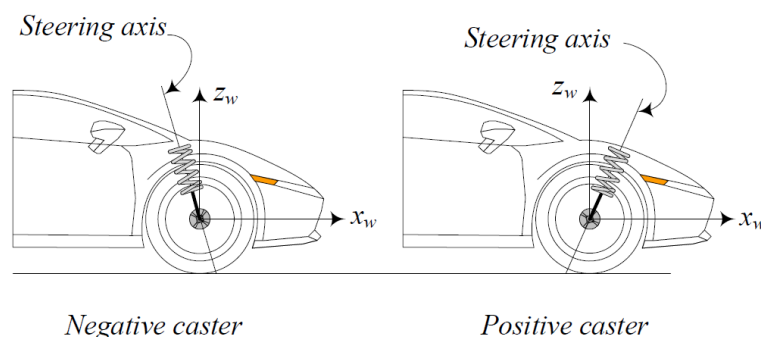
## 2.2.2 PARÂMETROS DA SUSPENSÃO

Os parâmetros e suas variações estão diretamente atrelados ao desempenho final do veículo. Caso não seja dada a devida atenção durante essa parte do projeto, o resultado final pode gerar em um carro desequilibrado e instável. Os principais parâmetros são: os ângulos de Caster, Cambagem, Convergência e Pino Mestre.

### 2.2.2.1 CASTER

O Caster é representado pelo ângulo do eixo de rotação da roda em relação ao eixo vertical na vista lateral do veículo, conforme apresenta a Figura 7. Este ângulo, geralmente negativo, tem como principal função gerar o torque auto-alinhante ao volante em altas velocidades, o que proporciona maior segurança e estabilidade.

Figura 7 – Ângulo de Caster.



Fonte: Jazar (2008).

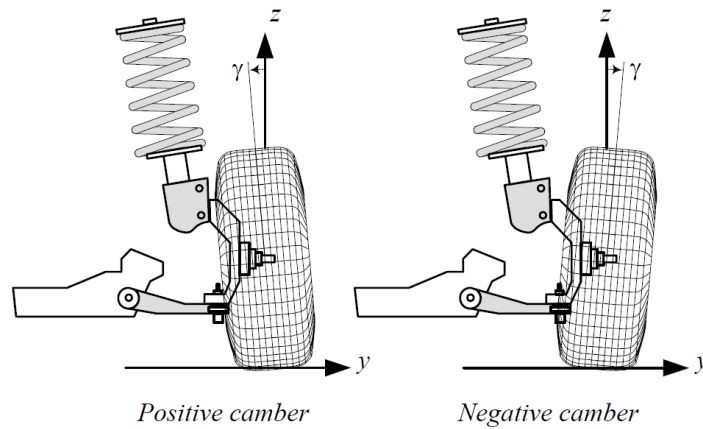
### 2.2.2.2 CAMBAGEM

A cambagem de um veículo pode ser medida por meio do ângulo da roda em relação ao plano lateral no sentido vertical, conforme apresentado na Figura 8. Normalmente,



é utilizado em uma configuração neutra, pois aumenta o contato do pneu com o solo proporcionando maior aderência.

Figura 8 – Ângulo de Cambagem.

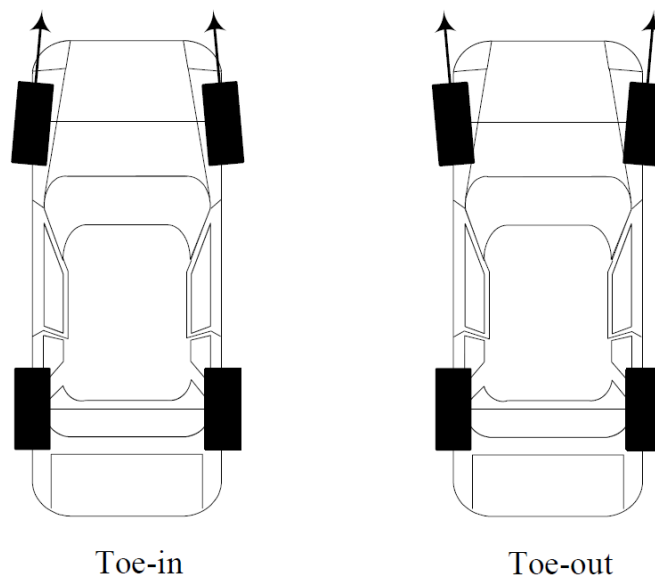


Fonte: Jazar (2008).

### 2.2.2.3 Convergência

O ângulo de toe é obtido de maneira semelhante ao camber, mas, medido em relação à horizontal (Figura 9). Seu ajuste irá impactar na entrada e saída de curvas e, caso sua variação com o curso da suspensão seja muito alta, ocorrerá um efeito chamado “*bump steer*”, que é a mudança de direção do veículo decorrente do trabalho da suspensão.

Figura 9 – Ângulo de Convergência.

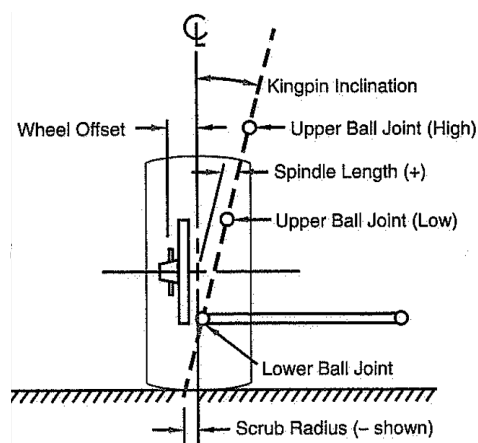


Fonte: Jazar (2008).

#### 2.2.2.4 PINO MESTRE

Por fim, o ângulo de Pino Mestre é medido entre o eixo de rotação da roda e o eixo vertical na vista frontal do veículo (Figura 10). Tem uma função semelhante ao ângulo de Caster, contudo, sua influência é muito maior em baixas velocidades.

Figura 10 – Ângulo de Pino Mestre.

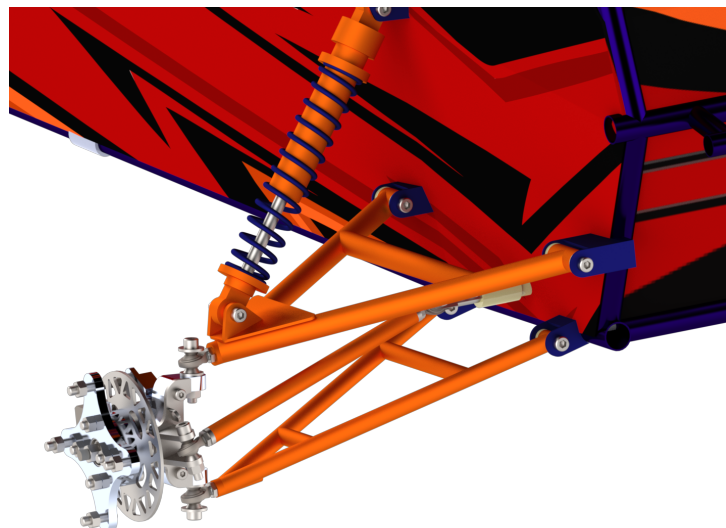


Fonte: Milliken e Milliken (1995).

#### 2.2.2.5 OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS

Os parâmetros estáticos do automóvel são definidos pelo projetista segundo o tipo de suspensão empregada. Seus valores serão escolhidos de acordo com as condições que o veículo irá enfrentar. As variações destes parâmetros podem ser obtidas por meio de um equacionamento, tal como utilizado por Tanik e Parlaktaş (2015) e Augusto (2006). Estes autores empregaram este modelo no projeto de uma suspensão do tipo duplo A (Figura 11) e, assim, obtiveram a variação dos ângulos em função do curso da suspensão.

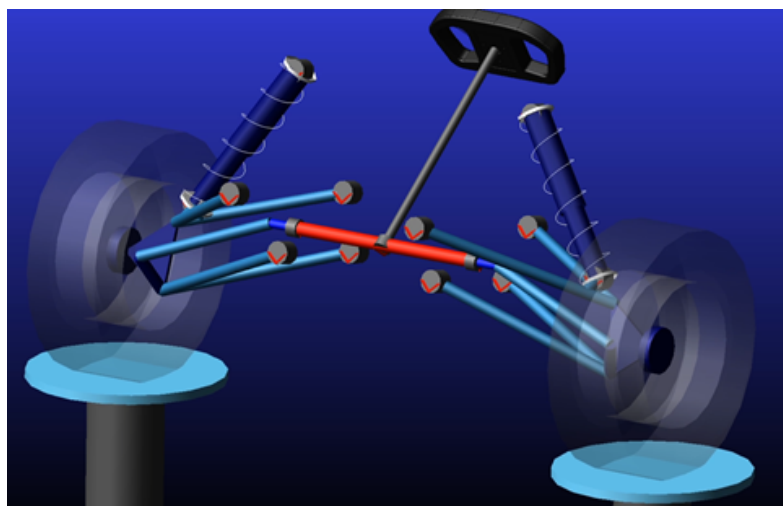
Figura 11 – Suspensão do tipo duplo A.



Fonte: Autor.

Em análises mais aprofundadas, é possível a utilização de *softwares*, como o *Adams Car* MSC software (2011) ou *Lotus Cars* Lotus Cars (2015), os quais, por meio da criação de *templates* (Figura 12), permitem a obtenção de resultados mais precisos, por levarem em conta um maior número de graus de liberdade, deformações dos componentes e esforços providos do conjunto mola, amortecedor e pneus.

Figura 12 – Template criado no *Adams Car*.



Fonte: Autor.

## 2.3 ELEMENTOS DA SUSPENSÃO

O sistema de suspensão é construído a partir da montagem de componentes mecânicos, que são modelados segundo relações básicas, e desempenham as funções de criar interações entre duas ou mais massas por meio de acoplamentos em suas extremidades. Os elementos utilizados para a modelagem de uma suspensão veicular são: mola, amortecedor, pneu e barra estabilizadora.

### 2.3.1 MOLA

O elemento mecânico mola é um objeto flexível capaz de armazenar energia mecânica e seu princípio de funcionamento é determinado pela lei de Hooke (Equação 1). Geralmente é feita de aço carbono temperado, e pode ter diversos formatos.

$$F_k = k_s x \quad (1)$$

em que:

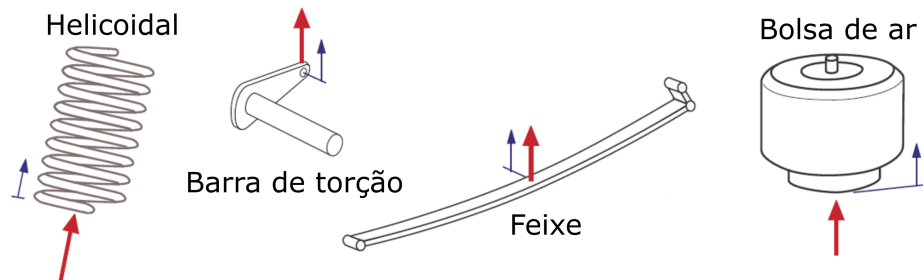
$F_k$  é a força de reação gerada pela mola;

$k_s$  é o coeficiente de rigidez da mola;

$x$  é o deslocamento linear de alongação da mola (deformação) gerado na mola.

Em suspensões veiculares, esse elemento pode aparecer no formato helicoidal, barra de torção, feixe de molas ou bolsas de ar (para o caso de suspensões pneumáticas), conforme ilustrado pela Figura 13.

Figura 13 – Diferentes tipos de molas.



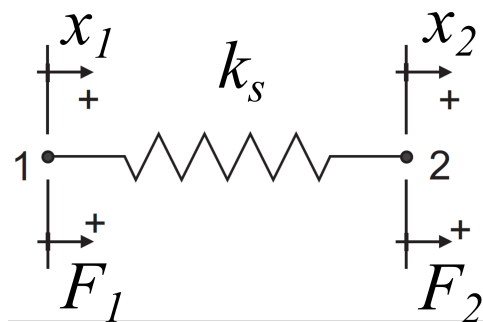
Fonte: Rill (2009) (Adaptado e traduzido).

Para a modelagem matemática, descrita por Felício (2010), a mola linear ideal é ilustrada pela Figura 14, e é modelada segundo as Equações 2 e 3.

$$F_1 = -k_s(x_1 - x_2) \tag{2}$$

$$F_2 = -k_s(x_2 - x_1) \tag{3}$$

Figura 14 – Representação do elemento mola para modelos matemáticos.



Fonte: Felício (2010) (Adaptado).

### 2.3.2 AMORTECEDOR

O elemento amortecedor tem funcionamento semelhante à mola, entretanto sua função é dissipar energia mecânica. Seu funcionamento é descrito segundo a Equação 4, na qual a força de reação é proporcional à velocidade do movimento.

$$F_B = B\dot{x} \tag{4}$$

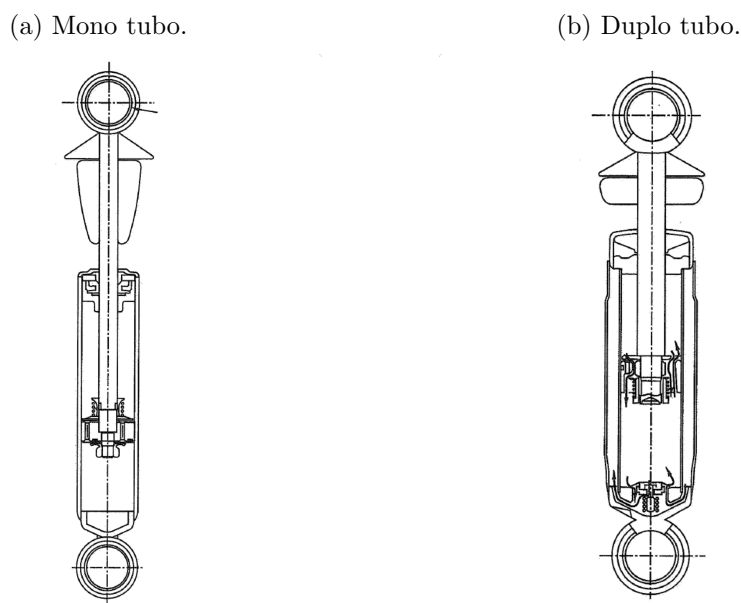
em que:

$F_B$  é a força de reação gerada pelo amortecedor;

$B$  é o coeficiente de amortecimento do amortecedor;  
 $\dot{x}$  é a velocidade linear imprimida no amortecedor.

Existem dois tipos de amortecedor que são amplamente utilizados no mercado: o mono tubo (Figura 15a) e o duplo tubo (Figura 15b). Usualmente falando, o duplo tubo é mais comumente utilizado em carros, caminhonetes e SUVs e vans, enquanto o modelo mono tubo, por apresentar uma construção mais robusta, é utilizado em aplicações de maior desempenho.

Figura 15 – Tipos de amortecedor.



Fonte: Milliken e Milliken (1995).

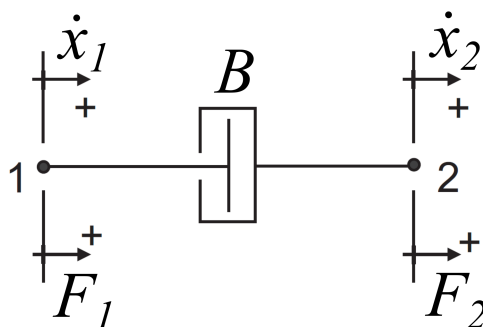
Tipicamente, existem duas direções de movimento em uma suspensão: o *bump* (compressão) e o *rebound* (alongamento). Durante o *bump*, é desejável que o coeficiente de amortecimento não seja muito alto, pois quanto maior seu valor, maior será a força nos componentes. Já no *rebound* esse valor pode ser maior, por que se trata de uma estágio em que a suspensão está voltando ao equilíbrio e é desejável que a maior dissipação de energia ocorra nesse momento. Porém, para a simplificação adotada na modelagem que será utilizada, os coeficientes de *bump* e *rebound* serão considerados iguais.

Analogamente à molas, a representação de amortecedores lineares (Figura 16), descrita por Felício (2010) para modelos matemáticos, é representada pelas Equações 5 e 6.

$$F_1 = -B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5)$$

$$F_2 = -B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (6)$$

Figura 16 – Representação do elemento amortecedor para modelos matemáticos.

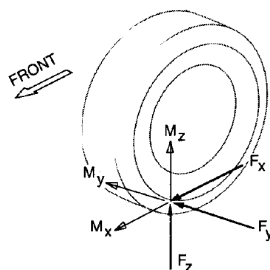


Fonte: Felício (2010) (Adaptado).

### 2.3.3 PNEU

Segundo Gillespie (1992), a força que age sobre o elemento pneu pode ser dividida em três direções (Figura 17): a longitudinal responsável pela aceleração e frenagem do veículo; a lateral que permite a desenvoltura de curvas; a vertical vinda de imperfeições e obstáculos do solo.

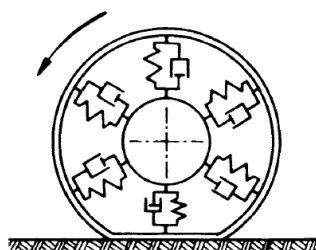
Figura 17 – Forças e momentos que agem sobre o pneu.



Fonte: Gillespie (1992).

Os pneus são os primeiros elementos a absorverem e transferirem energia vinda do solo à massa do carro. Segundo Mitschke e Wallentowitz (2014), sua modelagem pode ser aproximada para uma mola linear (Equação 1) e um amortecedor (Equação 4) ligado em paralelo conforme a Figura 18. Por contar com um coeficiente de amortecimento muito baixo, em muitos casos, é possível aproximá-lo para zero durante a modelagem.

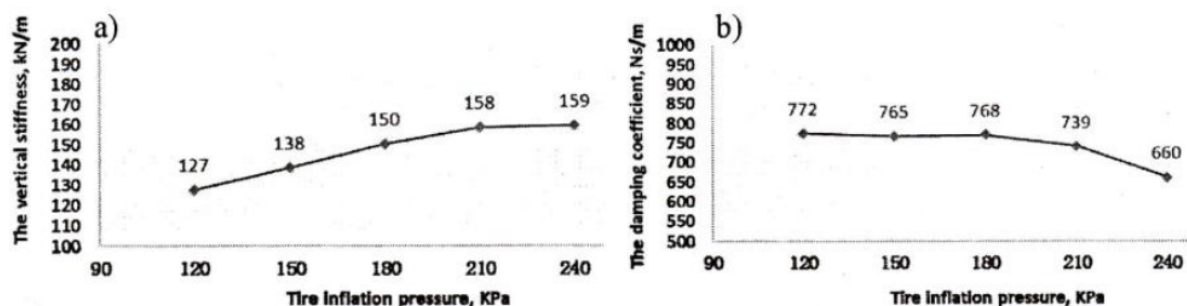
Figura 18 – Representação modelo de pneu.



Fonte: Mitschke e Wallentowitz (2014).

A rigidez e o coeficiente de amortecimento podem ser relacionados com a pressão do pneu. Cuong et al. (2013) em seus resultados, conforme a Figura 19, demonstraram que a rigidez é diretamente relacionada à pressão do pneu, e o amortecimento inversamente relacionada.

Figura 19 – Relação da pressão do pneu com os coeficientes de amortecimento e rigidez.

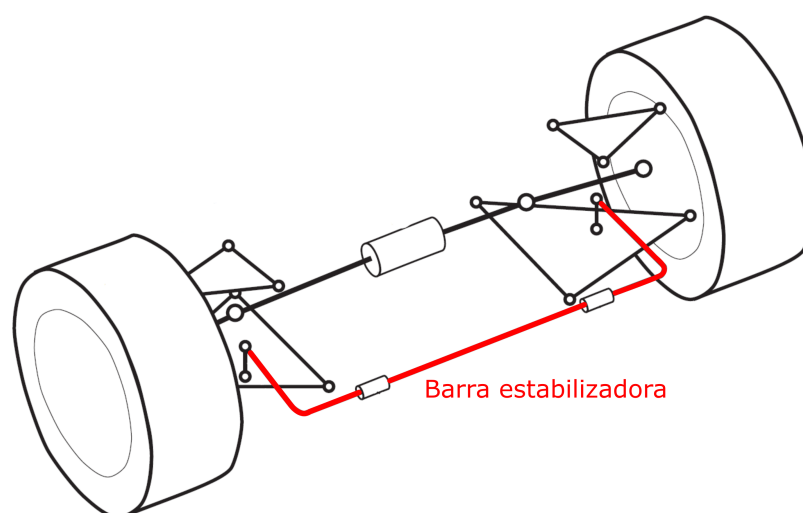


Fonte: Cuong et al. (2013).

### 2.3.4 BARRA ESTABILIZADORA

A barra estabilizadora (destacada na Figura 20) é um componente da suspensão que interliga um lado ao outro, removendo parte da independência do eixo em que é colocada. Sua função é restringir a rotação da massa suspensa em torno do eixo de rolagem, aumentando o desempenho em curvas sem comprometer a dinâmica vertical.

Figura 20 – Barra estabilizadora.



Fonte: Rill (2009) (Adaptado e Traduzido).

Sua modelagem é realizada por meio de uma mola torsional que conecta um lado do carro ao outro, e é composta pelo momento decorrente da rotação da massa suspensa, somado à força gerada pela diferença de deslocamento entre os lados. Seu coeficiente de rigidez pode ser visto como torsional (quando referenciado na rotação do chassi), ou linear

(quando referenciado na diferença de deslocamento das rodas), e são relacionados segundo a Equação 7.

$$k_{tor} = k_b c^2 \quad (7)$$

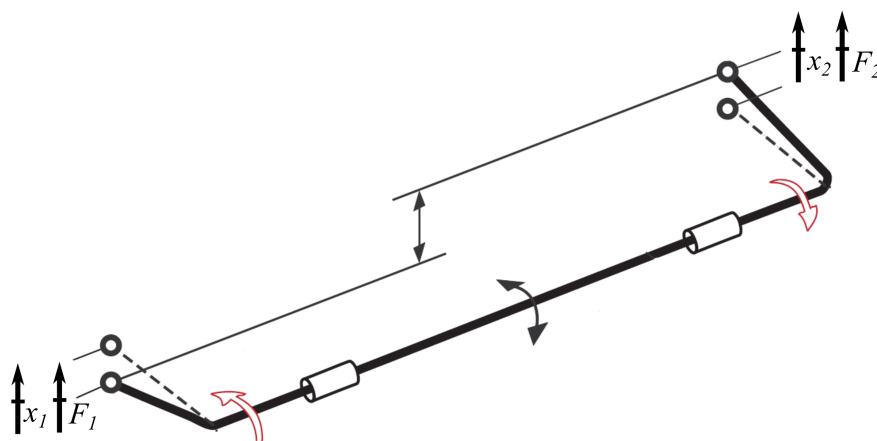
em que:

$k_b$  é o coeficiente de rigidez linear;

$k_{tor}$  é o coeficiente de rigidez torsional;

$c$  é a distância entre o centro das rodas do eixo estudado. A força causada pela barra estabilizadora (Figura 21) é composta pela somatória da força resultante da interligação entre as duas rodas, representada pelas Equações 2 e 3, com o momento da rolagem dividido pela distância entre o centro das rodas, que é calculado segundo a Equação 8.

Figura 21 – Força nas rodas gerada pela barra.



Fonte: Rill (2009) (Adaptado).

$$F_{kt} = M_{kt}/c = k_{tor}\gamma/c \quad (8)$$

em que:

$M_{kt}$  é o momento de reação à rolagem do carro;

$F_{kt}$  é a força resultante da barra;

$\gamma$  é o ângulo de rolagem.

Substituindo a Equação 7 na 8, tem-se:

$$F_{kb} = k_b c \gamma \quad (9)$$



Dessa forma, somado às Equações 2 e 3, é possível chegar nas Equações 10 e 11:

$$F_1 = -k_b(x_1 - x_2 - c\gamma) \quad (10)$$

$$F_2 = -k_b(x_2 - x_1 + c\gamma) \quad (11)$$

### 2.3.5 RAZÃO DE INSTALAÇÃO

A razão de instalação ( $RI$ ) é um parâmetro muito importante de se definir durante o desenvolvimento de um projeto de suspensão. É obtido em função da razão do deslocamento da roda pelo deslocamento do amortecedor.

Sua curva característica pode ou não ser linear, e dependerá do tipo de suspensão escolhido. Seu valor está relacionado com os pontos de fixação do amortecedor que, por sua vez, dependem da geometria do braço da suspensão e do chassi.

Para um caso em que a razão é linear, podem-se encontrar valores de rigidez e amortecimento virtuais, que atuam de forma vertical acima da roda. De acordo com Milliken e Milliken (1995), como o valor da razão é aplicado duas vezes, uma para o valor da força e outra para o valor do deslocamento, a relação entre os parâmetros virtuais e reais pode ser escrita segundo as Equações 12 e 13.

$$k_w = \frac{k_s}{\left(\frac{\Delta W}{\Delta S}\right)^2} = \frac{k_s}{(RI)^2} \quad (12)$$

$$B_w = \frac{B_s}{\left(\frac{\Delta W}{\Delta S}\right)^2} = \frac{B_s}{(RI)^2} \quad (13)$$

em que:

$k_w$  é a rigidez virtual;

$B_w$  é o coeficiente de amortecimento virtual;

$\Delta W$  é o deslocamento da roda;

$\Delta S$  é o deslocamento do conjunto amortecedor e mola;

$RI$  é a razão de instalação.

## 2.4 ESTUDO DA DINÂMICA VERTICAL

Existem diversas maneiras de realizar um estudo em dinâmica vertical. Inicialmente podem ser criados modelos mais simples, com poucos graus de liberdade para entender as reações. Em seguida, o estudo pode ganhar maior complexidade, com modelos matemáticos ou multi-corpos, nos quais o número de hipóteses é reduzido e os graus de liberdade são aumentados.

Para Neto (2005), o uso de modelos matemáticos na dinâmica de veículos se tornou inevitável na indústria automobilística, pois seu uso proporciona uma grande redução de tempo e gastos durante o desenvolvimento de novos veículos.

#### 2.4.1 MODELOS MULTICORPOS DE PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS OU DE ELEMENTOS COM PARÂMETROS CONCENTRADO

Segundo Felício (2010), o processo de modelagem é dividido em quatro etapas:

1. Definição de hipóteses;
2. Aplicação das leis;
3. Aplicação das relações;
4. Validação.

As hipóteses simplificadoras devem ser definidas de forma bastante criteriosa, pois elas irão determinar o quão próximo o modelo criado estará do real. Elas tornam o problema mais fácil de ser resolvido, mas caso não sejam devidamente compatíveis com o sistema, a modelagem se tornará inútil.

A segunda etapa baseia-se na aplicação das leis da física ao modelo. Para o caso abordado, deve-se criar o diagrama de corpo livre (DCL) para cada um dos corpos, e, assim, aplicar a somatória de forças e momento (Segunda lei de Newton), descritos pelas Equações 14 e 15, respectivamente, para cada uma deles.

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (14)$$

$$\sum M = I\ddot{\theta} \quad (15)$$

em que:

- $m$  é a massa;
- $I$  é o momento de inercia;
- $F$  são as forças atuantes;
- $M$  são os momentos atuantes;
- $\ddot{x}$  é a aceleração;
- $\ddot{\theta}$  é a aceleração angular.

Na terceira etapa, são aplicadas as equações dos elementos desenvolvidas na seção 2.3, em cada um dos esforços atuantes no DCL (Diagrama de Corpo Livre) de cada um dos corpos. Em seguida, deve-se substituí-las nas equações da etapa 2, para que, dessa forma, sejam produzidas uma ou mais Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) do sistema.

Para resolução desse tipo de equação, utiliza-se a Transformada de Laplace (operador  $\mathcal{L}$ ). A transformação gera uma função na variável “s” (variável de Laplace), a

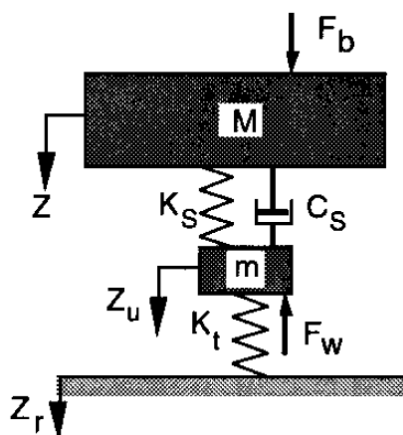
partir de uma função na variável “t” (regime do tempo), ou o inverso. Seu uso permite solucionar e manipular EDOs de maneira muito mais simples.

A última etapa, possivelmente a mais importante, é a validação na qual devem-se coletar dados experimentais resultantes de testes, e compará-los com os obtidos por meio do sistema desenvolvido. Um sistema sem a devida validação não é confiável, pois as hipóteses simplificadoras podem levá-lo a valores muito discrepantes dos reais. Essa validação pode ser feita de diversas formas, tanto no regime do tempo, quanto no regime da frequência.

#### 2.4.1.1 1/4 DE CARRO

Um veículo pode ser simplificado por meio de sua repartição em parcelas menores. O modelo mais simples que pode ser construído é o de 1/4 de carro (Figura 22) que, segundo Gillespie (1992), é capaz de representar a dinâmica essencial do carro.

Figura 22 – Representação do modelo de 1/4 de carro.



Fonte: Gillespie (1992).

Nesse modelo, a massa é definida segundo a parcela consequente de sua distribuição no veículo e está suspensa pelo pneu - que, nesse caso, tem coeficiente de amortecimento nulo -, pela mola e pelo amortecedor.

Para uma análise do sistema de suspensão pode-se olhar para o modelo de 1/4 de veículo com um único grau de liberdade. Dessa forma, o sistema fica com apenas um grau de liberdade e, com isso, a frequência natural não amortecida pode ser calculada de acordo com a Equação 16 e convertida de rad/s para Hz por meio da Equação 17.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}} \quad (16)$$

em que:

$K_s$  é o coeficiente de rigidez da mola;

$\omega_n$  é a frequência natural não amortecida em rad/s;

$M_s$  é a massa suspensa.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (17)$$

na qual  $f$  é a frequência em Hz;

Outrossim, por meio da Equação 18 pode-se calcular o fator de amortecimento, e assim, a frequência natural amortecida, utilizando a Equação 19 que, por fim, pode ser convertida de rad/s para Hz com a Equação 17.

$$\zeta = \frac{C_s}{2\sqrt{K_s M_s}} \quad (18)$$

em que:

$\zeta$  é o fator de amortecimento;

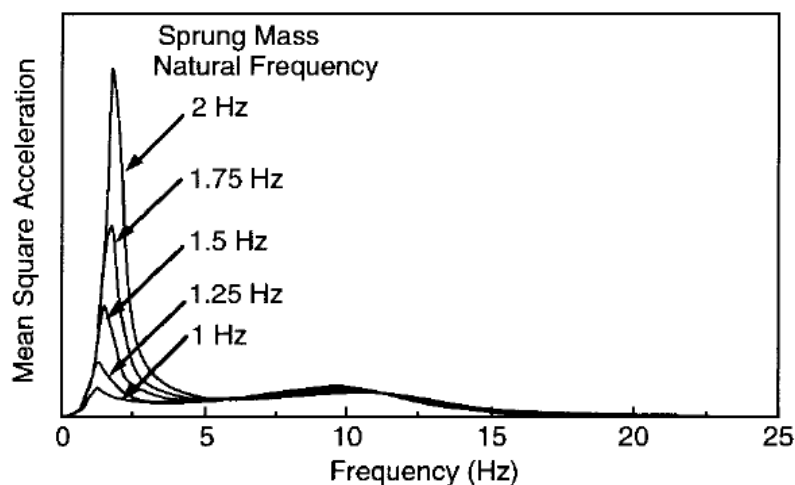
$C_s$  é o coeficiente de amortecimento do amortecedor.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (19)$$

na qual  $\omega_d$  é a frequência natural amortecida.

Dessa forma, Gillespie (1992) afirma que, para uma modelagem convencional, carros de passeio utilizam uma frequência de 1 a 1,5 Hz, e carros para competições nos quais o conforto é sacrificado em função do ganho em desempenho, para a obtenção de uma maior rigidez, esse valor é utilizado no intervalo de 2 a 2,5 Hz. Na Figura 23, é possível visualizar o aumento da aceleração máxima em função do aumento da frequência.

Figura 23 – Aceleração em função da frequência para diferentes frequências de ressonância.

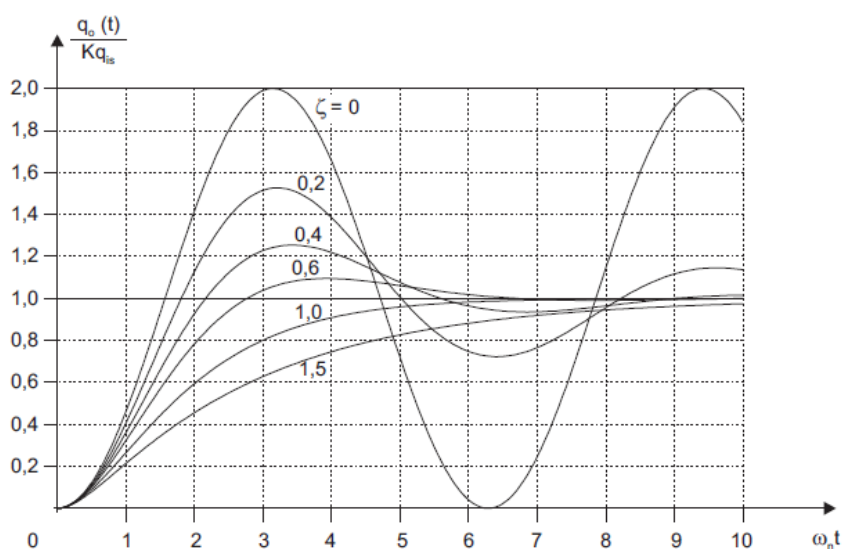


Fonte: Gillespie (1992).

No meio *off road*, em que o veículo também é submetido à transposição de obstáculos e a suspensão não pode ter uma rigidez muito elevada, obtém-se a seguinte situação: em se tratando de um carro que é submetido a muita aceleração vertical, um valor de frequência de ressonância muito alto tornará as acelerações da massa suspensa muito elevadas. Dessa forma, esse tipo de automóvel utiliza frequências menores, e para compensar isso, tem cursos de amortecedor muito maiores.

Segundo Jazar (2008), o fator de amortecimento influenciará no tipo de resposta no regime do tempo que o sistema terá, e pode ser subdividido em 3 categorias: a) sub amortecido, quando  $0 < \zeta < 1$ ; b) criticamente amortecido quando  $\zeta = 1$ ; e c) super amortecido quando  $\zeta > 1$ . Na Figura 24, nota-se que para valores sub amortecidos, a resposta oscila; no valor criticamente amortecido, o sistema para de oscilar; e para valores, no caso super amortecido, o tempo de resposta se torna cada vez maior.

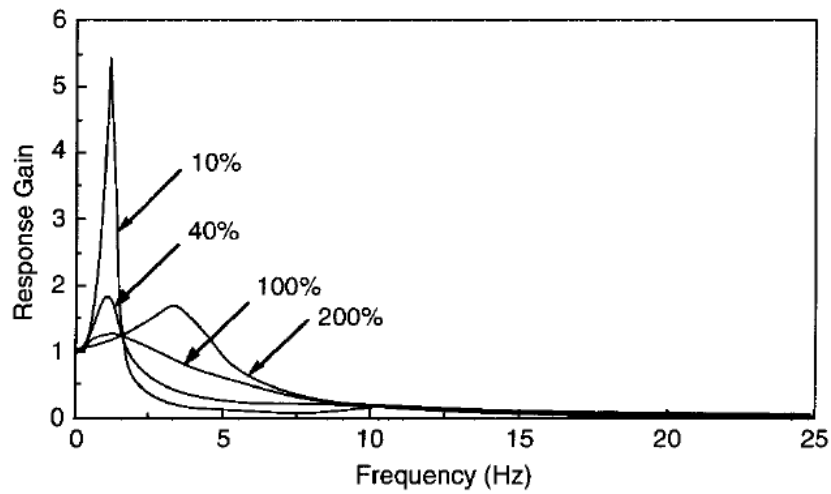
Figura 24 – Resposta de um sistema de segunda ordem à uma entrada degrau.



Fonte: Felício (2010).

Para a maior parte dos veículos, Gillespie (1992) sugere o fator de amortecimento com o valor de 0,4, pois já é suficientemente grande para atenuar boa parte do deslocamento imposto pela entrada. Na Figura 25, é possível observar a redução da amplitude (*Response Gain*), determinada pela razão entre as amplitudes das respostas da saída e da entrada, do sistema na frequência, com o aumento do fator de amortecimento.

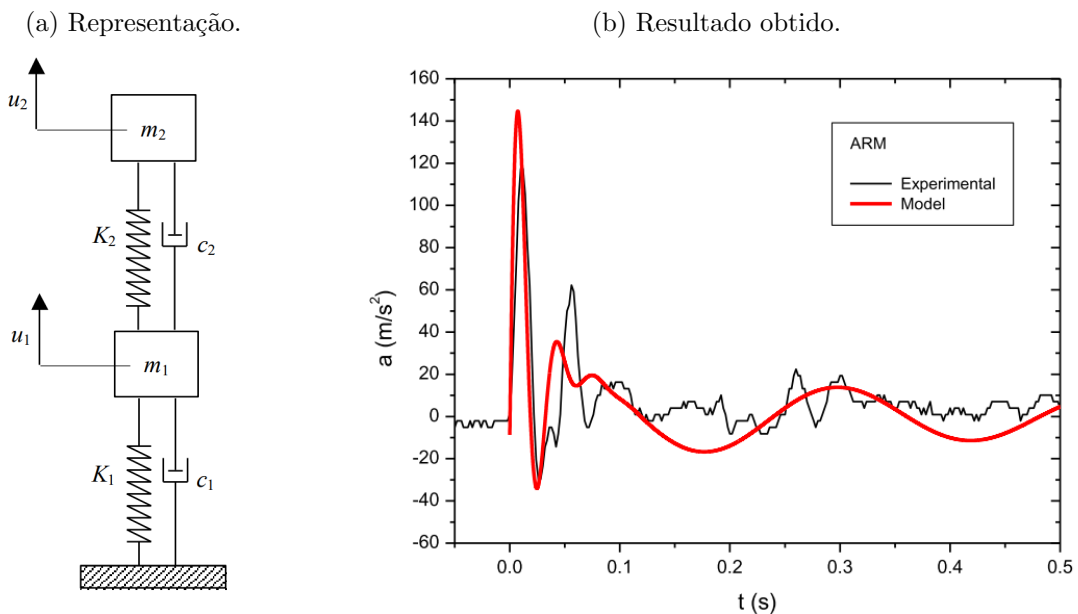
Figura 25 – Ganho em função da frequência para diferentes fatores de amortecimento.



Fonte: Gillespie (1992).

Durante o desenvolvimento de protótipos, modelagens simples são, inicialmente, feitas para tentar prever o comportamento de forma simplificada. Por exemplo, Pacheco et al. (2002), em um modelo de um quarto de carro com 2 graus de liberdade, um da interface do pneu com o solo e outro da roda com o carro, e com entrada de deslocamento no pneu (Figura 26a), realizam simulações da suspensão traseira de um veículo minibaja. Por meio de testes realizados, os autores foram capazes de verificar tendências muito semelhantes entre o modelo e os testes. Contudo, por se tratar da modelagem de apenas uma fatia do carro, a influência das outras partes do carro é desconsiderada, o que reduz a acurácia dos resultados (Figura 26b). Em um estudo semelhante, Peres (2013) utiliza do mesmo modelo para definir os coeficientes de suspensão de um veículo minibaja.

Figura 26 – Modelagem de um quarto de carro.



Fonte: Pacheco et al. (2002).

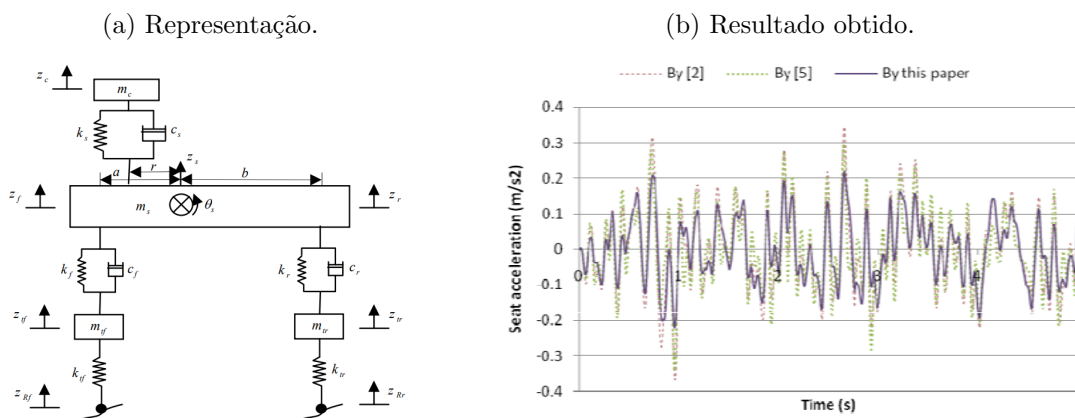
Minozzo e Gomes (2012) buscaram encontrar a força atuante em todas as direções entre o pneu e o solo. Na modelagem, a geometria da suspensão foi considerada para converter esforços atuantes nos componentes da suspensão aos atuantes no pneu. Por meio da utilização de extensômetros, potenciômetros e acelerômetros, os autores citados realizaram a experimentação da suspensão de um protótipo minibaja.

### 2.4.1.2 1/2 CARRO

Em um grau de complexidade maior, é possível criar modelos com um número maior de graus de liberdade. A dificuldade para esse tipo de modelo é amplificada, porém, os resultados podem trazer uma confiabilidade maior e permitem estudos vibratórios do sistema completo.

Shojaeefard, Khalkhali e Safarpour (2014) criaram um modelo de 5 graus de liberdade (Figura 27a), que representa metade de um veículo, que teve como finalidade realizar uma simulação no regime temporal com uma entrada de um perfil de estrada aleatório. O estudo realizado, que visou reduzir a aceleração no banco do motorista, possibilitou otimizar os parâmetros do veículo estudado. Na Figura 27b, é visto um comparativo entre as acelerações no banco do motorista em estudos anteriores, e as atingidas utilizando os parâmetros otimizados.

Figura 27 – Modelo de 5 graus de liberdade.



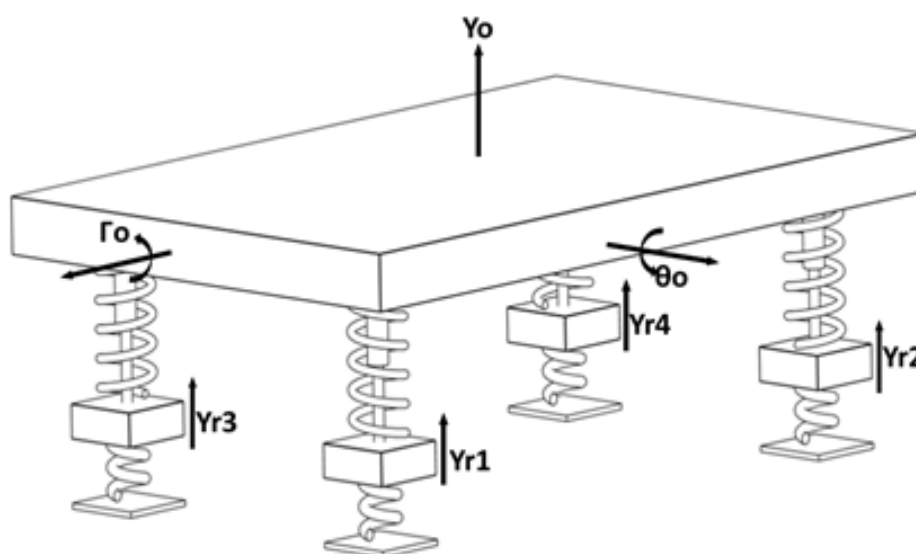
Fonte: Shojaeefard, Khalkhali e Safarpour (2014).

Esse tipo de modelo também permite estudos de controle em suspensões semiativas ou ativas. Nariman-Zadeh et al. (2010) utilizaram da mesma modelagem, com a inclusão de atuadores e sensores nos amortecedores, para estudos no regime temporal e da frequência, visando amplificar o conforto e desempenho de um veículo. Seus resultados apontaram uma redução nas acelerações no assento do motorista, quando comparado a um modelo sem atuadores.

## 2.4.1.3 CARRO COMPLETO

Em um nível ainda maior de complexidade para simulações, também é possível a modelagem de sistemas de 7 graus de liberdade (Figura 28), na qual os efeitos de rolagem e arfagem são considerados de maneira conjunta e podem ser modelados segundo as literaturas de Jazar (2008) e Felício (2010). Esses modelos permitem estudos no regime temporal, em obstáculos nos quais a entrada ocorre de maneira assíncrona entre os lados do carro, por exemplo. Já no regime da frequência, é possível realizar o estudo das frequências de ressonância do veículo bem como das faixas de frequência de operação do mesmo.

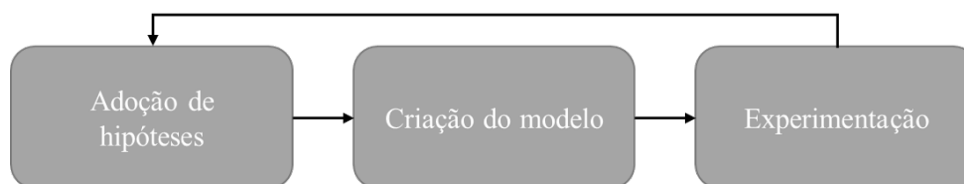
Figura 28 – Modelo de 7 graus de liberdade.



Fonte: Autor.

Esse tipo de modelagem conta com hipóteses simplificadoras, o que pode comprometer a veracidade dos resultados obtidos. Dessa forma, a criação de modelos sempre implica em uma experimentação com objetivo de validação. O processo iterativo, representado pela Figura 29, mostra o processo iterativo que ocorre até que a divergência entre os resultados obtidos e simulados atinja um valor aceitável.

Figura 29 – Processo iterativo.



Fonte: Autor.

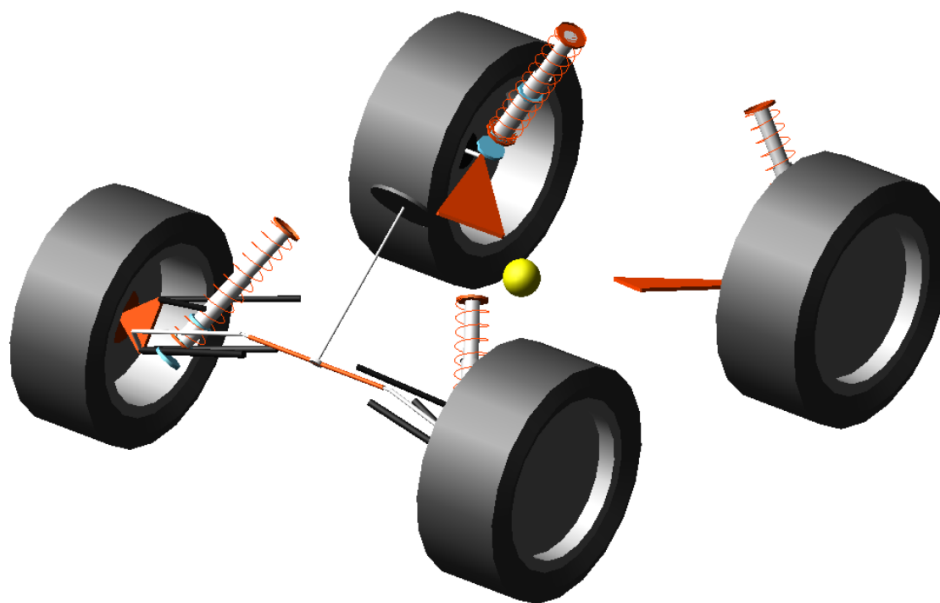


### 2.4.2 SOFTWARES EXISTENTES

Com intuito de obter resultados ainda mais acurados, em simulações que consideram o contato do pneu com o solo e a geometria dos componentes, modelos multi-corpos são criados em *softwares* específicos para esse tipo de aplicação. Isso permite simulações que não seriam possíveis dentro dos modelos comumente utilizados, como por exemplo, realização de curvas e pulos. Por levar em conta a geometria dos componentes, neles é possível entender melhor a influência dos ângulos de suspensão no desempenho do carro.

Barbosa e Silva (2016) utilizaram o programa *Adams Car* para criar um modelo completo de carro (Figura 30). Os autores realizaram três tipos de simulação, da passagem por um degrau, de um *drop test* e da passagem por semicírculos. Por meio, da utilização do *software* e de experimentações, os autores obtiveram os esforços nos componentes do protótipo, possibilitando a realização de um comparativo.

Figura 30 – Sistema criado no *Adams Car*.



Fonte: Barbosa e Silva (2016).

Com uso de um sistema semelhante, Diniz e Silva (2014) realizaram a simulação e experimentação do veículo passando por lombadas, valetas e rampas. O estudo também contou com a utilização de modelagens de um quarto e meio carro. Por meio de resultados de testes e simulações Diniz e Silva (2014) buscaram a otimização dos parâmetros do protótipo.

Esse tipo de modelo também pode ser empregado no *Motion* do *Solidworks*, que utiliza o mesmo *Solver* do *Adams Car*. A vantagem do uso dessa plataforma é a facilidade de criação de obstáculos personalizados e da geometria do carro, por vir diretamente do modelo 3D desenvolvido. Além disso, com o uso de servo motores, é possível ter um controle do carro muito próximo ao que o piloto tem em uma condição real.

Atualmente simulações com um nível muito alto de complexidade já foram feitas. Müller et al. (2020) realizaram a simulação de um veículo (Figura 31) empregando modelagens dinâmicas de corpo livre, somada à implementação do método de elementos finitos para obter a deformação dos pneus. O aprimoramento do algoritmo permitiu que as simulações ocorressem em tempo real. Com isso, por conta do contato do pneu com o solo em um maior nível de acurácia, obteve resultados muito próximos ao que acontece em situações reais.

Figura 31 – Modelo com pneus deformáveis.



Fonte: Müller et al. (2020).

A utilização de *softwares* ajuda a realizar simulações mais complexas, porém, por utilizarem modelagens e hipóteses próprias e não conhecidas, podem trazer resultados não confiáveis. Dessa forma, deve-se utilizá-los em conjunto a modelos matemáticos mais simples e autorais que permitem um maior entendimento do que está ocorrendo. Destarte, a validação das simulações sempre deve ser feita, pois é ela que criará a conexão entre o modelo e o protótipo.

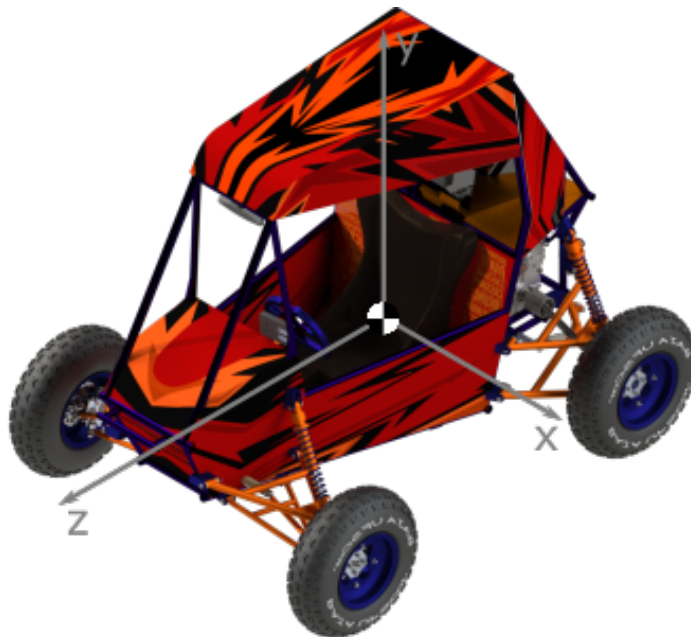
### 3 METODOLOGIA

A modelagem do sistema foi subdividida em três etapas: a) a primeira deduzido do modelo matemático; b) a segunda foi o levantamento e modelagem dos obstáculos presentes no ambiente de competições; e c) a terceira foi o desenvolvimento de um *software* em *Python* com a implementação de todas as funcionalidades desenvolvidas.

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A construção do modelo matemático foi obtida por intermédio da utilização dos conceitos abordados na subseção 2.4.1 e das relações matemáticas dos elementos descritos na seção 2.3. O sistema de coordenadas definido será diferente do comumente empregado em veículos, pois foi compatibilizado com o sistema do *software* SOLIDWORKS, usado pela Equipe Baja UFSCar para realizar os desenhos 3D dos componentes desenvolvidos, o qual pode ser visto na Figura 32.

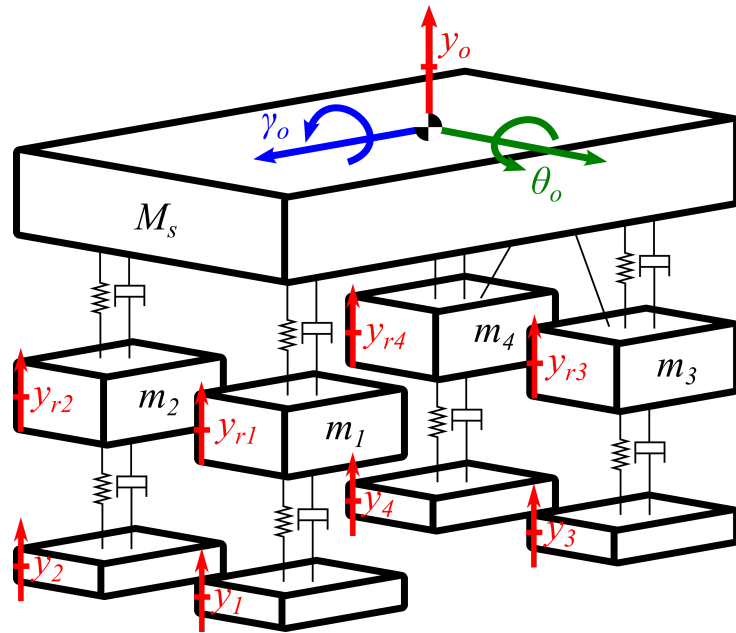
Figura 32 – Sistema de coordenadas utilizado para a criação do modelo matemático.



Fonte: Autor.

Com isso, um sistema de 7 graus de liberdade com entrada em deslocamento em cada uma das rodas, representado pela Figura 33, foi produzido, no qual suas entradas e saídas estão descritos na Tabela 1. Os parâmetros do modelo (Tabela 2) foram divididas em: a) gerais (Figura 34a); b) dianteira (Figura 34b); e c) traseira (Figura 34c).

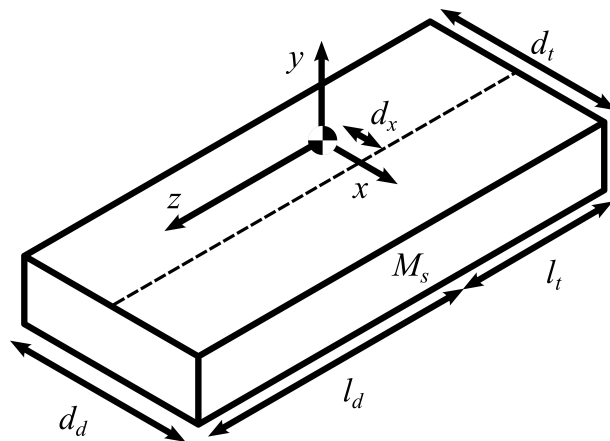
Figura 33 – Sistema de sete graus de liberdade.



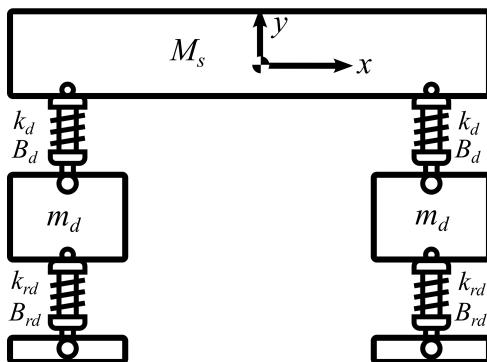
Fonte: Autor.

Figura 34 – Parâmetros do veículo.

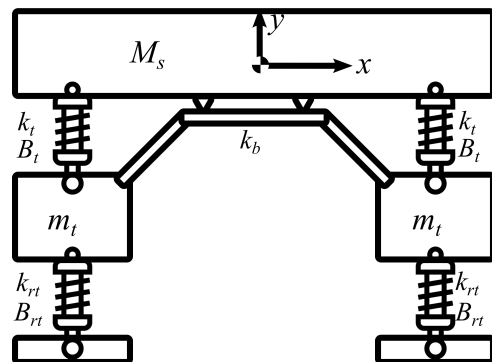
(a) Parâmetros gerais.



(b) Parâmetros da dianteira..



(c) Parâmetros da traseira.



Fonte: Autor.

Tabela 1 – Entradas e saídas do modelo.

Variável	Unidade	Tipo	Descrição
$y_1$	[m]	Entrada	Deslocamento vertical da base
$y_2$	[m]	Entrada	Deslocamento vertical da base
$y_3$	[m]	Entrada	Deslocamento vertical da base
$y_4$	[m]	Entrada	Deslocamento vertical da base
$y_o$	[m]	Saída	Deslocamento vertical do CG
$\theta_o$	[rad]	Saída	Arfagem do CG
$\gamma_o$	[rad]	Saída	Rolagem do CG
$y_{r1}$	[m]	Saída	Deslocamento vertical da roda
$y_{r2}$	[m]	Saída	Deslocamento vertical da roda
$y_{r3}$	[m]	Saída	Deslocamento vertical da roda
$y_{r4}$	[m]	Saída	Deslocamento vertical da roda

Tabela 2 – Descrição dos parâmetros do modelo.

Variável	Unidade	Descrição
$k_d$	[N/m]	Rigidez da mola dianteira
$k_t$	[N/m]	Rigidez da mola traseira
$k_{rd}$	[N/m]	Rigidez do pneu dianteiro
$k_{rt}$	[N/m]	Rigidez do pneu traseiro
$k_b$	[N/m]	Rigidez da barra estabilizadora "linearizada"
$B_d$	[Ns/m]	Amortecimento do amortecedor dianteiro
$B_t$	[Ns/m]	Amortecimento do amortecedor traseiro
$B_{rd}$	[Ns/m]	Amortecimento do pneu dianteiro
$B_{rt}$	[Ns/m]	Amortecimento do pneu traseiro
$M_s$	[kg]	Massa suspensa
$I_x$	[kgm <sup>2</sup> ]	Momento de inercia da arfagem
$I_z$	[kgm <sup>2</sup> ]	Momento de inercia da rolagem
$m_d$	[kg]	Massa não suspensa dianteira (independente)
$m_t$	[kg]	Massa não suspensa traseira (independente)
$l_d$	[m]	Distância do CG até o eixo dianteiro
$l_t$	[m]	Distância do CG até o eixo traseiro
$d_d$	[m]	Bitola dianteira
$d_t$	[m]	Bitola traseira
$d_x$	[m]	Deslocamento lateral do CG

### 3.1.1 HIPÓTESES

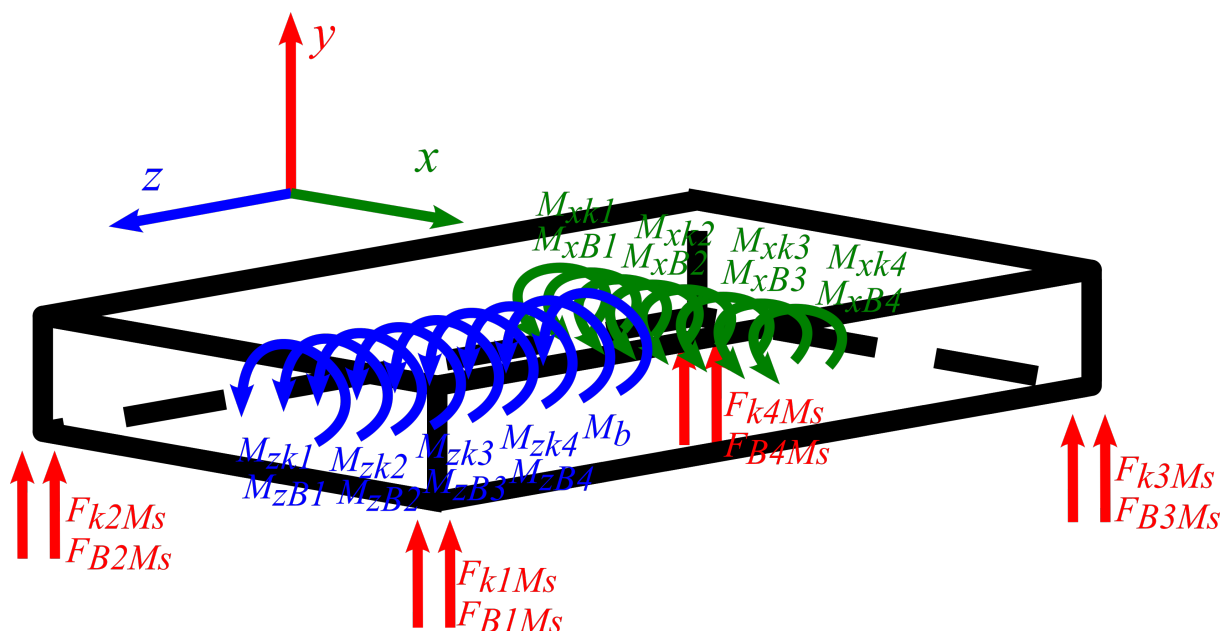
Para a modelagem do problema foram consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. O sistema parte do equilíbrio com todas as condições iniciais são nulas;
2. As massas são rígidas e possuem valores constantes;
3. As molas, amortecedores, pneus e barras são puros e lineares;
4. A massa da massa suspensa está condensada no centro de gravidade (CG);
5. A massas suspensas  $m_1$  e  $m_2$  da dianteira são iguais, e serão consideradas como  $m_d$ ;
6. A massas suspensas  $m_3$  e  $m_4$  da traseira são iguais, e serão consideradas como  $m_t$ ;
7. O sistema é submetido a pequenos ângulos e deslocamentos, portanto  $\text{sen}(\theta) = \theta$ .
8. Todos os pneus sempre estão em contato com o terreno.
9. O sistema tem 7 graus de liberdade sendo eles:
  - a) O movimento vertical da massa da roda dianteira esquerda;
  - b) O movimento vertical da massa da roda dianteira direita;
  - c) O movimento vertical da massa da roda traseira esquerda;
  - d) O movimento vertical da massa da roda traseira direita;
  - e) O movimento vertical da massa suspensa;
  - f) A rotação em torno do eixo X da massa suspensa (*Pitch*);
  - g) A rotação em torno do eixo Z da massa suspensa (*Roll*).

### 3.1.2 APLICAÇÃO DAS LEIS DE NEWTON-EULER

Primeiramente, constrói-se o diagrama de corpo livre da massa suspensa, conforme apresentado na Figura 35.

Figura 35 – DCL massa suspensa.



Fonte: Autor.

Em seguida, aplica-se a somatória de forças (Equação 14) para o eixo y e de momentos (Equação 15), nos eixos x e y:

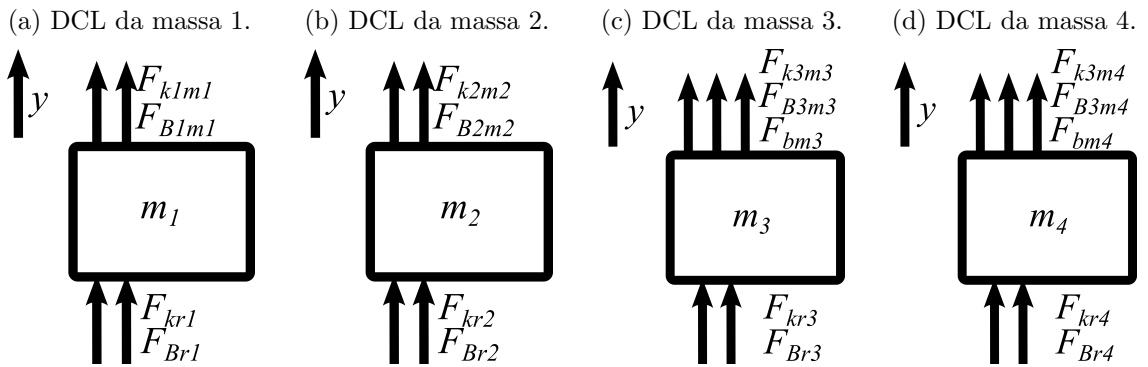
$$F_{k1M_s} + F_{k2M_s} + F_{k3M_s} + F_{k4M_s} + F_{B1M_s} + F_{B2M_s} + F_{B3M_s} + F_{B4M_s} = M_s \ddot{y}_o \quad (20)$$

$$M_{xk1} + M_{xk2} + M_{xk3} + M_{xk4} + M_{xB1} + M_{xB2} + M_{xB3} + M_{xB4} = I_x \ddot{\theta}_o \quad (21)$$

$$M_{zk1} + M_{zk2} + M_{zk3} + M_{zk4} + M_{zB1} + M_{zB2} + M_{zB3} + M_{zB4} + M_b = I_z \ddot{\gamma}_o \quad (22)$$

Da mesma forma, constrói-se o diagrama de corpo livre para cada uma das massas não suspensas, conforme a Figura 36.

Figura 36 – Diagrama de corpo livre das massas não suspensas.



Fonte: Autor.

Aplicando a Equação 14 para cada uma delas, tem-se:

$$F_{k1m1} + F_{kr1} + F_{B1m1} + F_{Br1} = m_1 \ddot{y}_{r1} = m_d \ddot{y}_{r1} \quad (23)$$

$$F_{k2m2} + F_{kr2} + F_{B2m2} + F_{Br2} = m_2 \ddot{y}_{r2} = m_d \ddot{y}_{r2} \quad (24)$$

$$F_{k3m3} + F_{kr3} + F_{bm3} + F_{B3m3} + F_{Br3} = m_3 \ddot{y}_{r3} = m_t \ddot{y}_{r3} \quad (25)$$

$$F_{k4m4} + F_{kr4} + F_{bm4} + F_{B4m4} + F_{Br4} = m_4 \ddot{y}_{r4} = m_t \ddot{y}_{r4} \quad (26)$$

### 3.1.3 RELAÇÕES MATEMÁTICAS

A partir da Figura 34a, pode-se deduzir as distâncias equivalentes do CG para as extremidades da  $M_s$  no eixo x:

$$c_1 = \frac{d_d}{2} - d_x \quad (27)$$

$$c_2 = \frac{d_d}{2} + d_x \quad (28)$$

$$c_3 = \frac{d_t}{2} - d_x \quad (29)$$

$$c_4 = \frac{d_t}{2} + d_x \quad (30)$$

Pode-se encontrar o deslocamento da parte superior das molas da massa suspensa, por meio da combinação entre  $y_o$ ,  $\theta_o$  e  $\gamma_o$ , da seguinte forma:

$$y_{o1} = y_o - \text{sen}(\theta_o)l_1 + \text{sen}(\gamma_o)c_1 = y_o - \theta_o l_1 + \gamma_o c_1 \quad (31)$$

$$y_{o2} = y_o - \text{sen}(\theta_o)l_1 - \text{sen}(\gamma_o)c_2 = y_o - \theta_o l_1 - \gamma_o c_2 \quad (32)$$

$$y_{o3} = y_o + \text{sen}(\theta_o)l_2 + \text{sen}(\gamma_o)c_3 = y_o + \theta_o l_2 + \gamma_o c_3 \quad (33)$$

$$y_{o4} = y_o + \text{sen}(\theta_o)l_2 - \text{sen}(\gamma_o)c_4 = y_o + \theta_o l_2 - \gamma_o c_4 \quad (34)$$

Por meio da relação da força multiplicada pela distância é possível obter os momentos atuantes, apresentados pelas Equações 35 a 50.

$$M_{xk1} = l_1 F_{k1Ms} \quad (35)$$

$$M_{xk2} = l_1 F_{k2Ms} \quad (36)$$

$$M_{xk3} = l_2 F_{k3Ms} \quad (37)$$

$$M_{xk4} = l_2 F_{k4Ms} \quad (38)$$

$$M_{xB1} = l_1 F_{B1Ms} \quad (39)$$



$$M_{xB2} = l_1 F_{B2Ms} \quad (40)$$

$$M_{xB3} = l_2 F_{B3Ms} \quad (41)$$

$$M_{xB4} = l_2 F_{B4Ms} \quad (42)$$

$$M_{zk1} = c_1 F_{k1Ms} \quad (43)$$

$$M_{zk2} = c_2 F_{k2Ms} \quad (44)$$

$$M_{zk3} = c_3 F_{k3Ms} \quad (45)$$

$$M_{zk4} = c_4 F_{k4Ms} \quad (46)$$

$$M_{zB1} = c_1 F_{B1Ms} \quad (47)$$

$$M_{zB2} = c_2 F_{B2Ms} \quad (48)$$

$$M_{zB3} = c_3 F_{B3Ms} \quad (49)$$

$$M_{zB4} = c_4 F_{B4Ms} \quad (50)$$

Baseando-se na relação descrita pelas Equações 2 e 3, é possível encontrar a relação matemática para os elementos mola da massa suspensa:

$$F_{k1Ms} = -k_d(y_{o1} - y_{r1}) \quad (51)$$

$$F_{k2Ms} = -k_d(y_{o2} - y_{r2}) \quad (52)$$

$$F_{k3Ms} = -k_t(y_{o3} - y_{r3}) \quad (53)$$

$$F_{k4Ms} = -k_t(y_{o4} - y_{r4}) \quad (54)$$

De forma análoga, utiliza-se as Equações 5 e 6 para encontrar a relação dos elementos amortecedor da massa suspensa:

$$F_{B1Ms} = -B_d(\dot{y}_{o1} - \dot{y}_{r1}) \quad (55)$$

$$F_{B2Ms} = -B_d(\dot{y}_{o2} - \dot{y}_{r2}) \quad (56)$$

$$F_{B3Ms} = -B_t(\dot{y}_{o3} - \dot{y}_{r3}) \quad (57)$$

$$F_{B4Ms} = -B_t(\dot{y}_{o4} - \dot{y}_{r4}) \quad (58)$$

Seguindo o mesmo método é possível encontrar as relações de mola e amortecedor as massas não suspensas:

$$F_{k1m1} = -k_d(y_{r1} - y_{o1}) \quad (59)$$

$$F_{B1m1} = -B_d(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_{o1}) \quad (60)$$

$$F_{kr1} = -k_{r1}(y_{r1} - y_1) \quad (61)$$

$$F_{Br1} = -B_{r1}(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_1) \quad (62)$$

$$F_{k2m2} = -k_d(y_{r2} - y_{o2}) \quad (63)$$

$$F_{B2m2} = -B_d(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_{o2}) \quad (64)$$

$$F_{kr2} = -k_{r2}(y_{r2} - y_2) \quad (65)$$

$$F_{Br2} = -B_{r2}(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_2) \quad (66)$$

$$F_{k3m3} = -k_t(y_{r3} - y_{o3}) \quad (67)$$

$$F_{B3m3} = -B_t(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_{o3}) \quad (68)$$

$$F_{kr3} = -k_{r3}(y_{r3} - y_3) \quad (69)$$

$$F_{Br3} = -B_{r3}(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_3) \quad (70)$$

$$F_{k4m4} = -k_t(y_{r4} - y_{o4}) \quad (71)$$

$$F_{B4m4} = -B_t(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_{o4}) \quad (72)$$

$$F_{kr4} = -k_{r4}(y_{r4} - y_4) \quad (73)$$

$$F_{Br4} = -B_{r4}(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_4) \quad (74)$$

Por fim, por meio das Equações 10 e 11 e das somatórias dos esforços atuantes na barra, é possível chegar nas relações a seguir:

$$M_b = c_3 F_{bm3} - c_4 F_{bm4} \quad (75)$$

$$F_{bm3} = -k_b(y_{r3} - y_{r4} - (c_3 + c_4)\theta_o) \quad (76)$$

$$F_{bm4} = -k_b(y_{r4} - y_{r3} + (c_3 + c_4)\theta_o) \quad (77)$$

### 3.1.4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Nessa etapa, primeiramente, serão substituídas as relações encontradas na seção 3.1.3, nas equações desenvolvidas a partir da aplicação das leis na seção 3.1.2. Em seguida, será aplicada a transformada de Laplace, para chegar nas equações do modelo.

Dessa forma, substituindo as Equações 51 a 58 na Equação 20 tem-se:

$$\begin{aligned} & -k_d(y_{o1} - y_{r1}) - k_d(y_{o2} - y_{r2}) - k_t(y_{o3} - y_{r3}) - k_t(y_{o4} - y_{r4}) \\ & - B_d(\dot{y}_{o1} - \dot{y}_{r1}) - B_d(\dot{y}_{o2} - \dot{y}_{r2}) - B_t(\dot{y}_{o3} - \dot{y}_{r3}) - B_t(\dot{y}_{o4} - \dot{y}_{r4}) = Ms\dot{y}_o \end{aligned} \quad (78)$$

Substituindo as Equações 31 a 34:

$$\begin{aligned} & -k_d(y_o - \theta_o l_1 + \gamma_o c_1 - y_{r1}) - k_d(y_o - \theta_o l_1 - \gamma_o c_2 - y_{r2}) - k_t(y_o + \theta_o l_2 + \gamma_o c_3 - y_{r3}) \\ & - k_t(y_o + \theta_o l_2 - \gamma_o c_4 - y_{r4}) - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 + \dot{\gamma}_o c_1 - \dot{y}_{r1}) - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 - \dot{\gamma}_o c_2 - \dot{y}_{r2}) \\ & - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 + \dot{\gamma}_o c_3 - \dot{y}_{r3}) - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 - \dot{\gamma}_o c_4 - \dot{y}_{r4}) = Ms\dot{y}_o \end{aligned} \quad (79)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$\begin{aligned} & Y_o(M_s s^2 + (2B_d + 2B_t)s + (2k_d + 2k_t)) + \Theta_o((-2l_1 B_d + 2l_2 B_t)s + (-2l_1 k_d + 2l_2 k_t)) \\ & + \Gamma_o(((c_1 - c_2)B_d + (c_3 - c_4)B_t)s + ((c_1 - c_2)k_d + (c_3 - c_4)k_t)) \\ & - Y_{r1}(B_d s + k_d) - Y_{r2}(B_d s + k_d) - Y_{r3}(B_t s + k_t) - Y_{r4}(B_t s + k_t) = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Substituindo as Equações 35 a 42 na Equação 21, tem-se:

$$-l_1(F_{k1Ms} + F_{k2Ms} + F_{B1Ms} + F_{B2Ms}) + l_2(F_{k3Ms} + F_{k4Ms} + F_{B3Ms} + F_{B4Ms}) = I_x \ddot{\theta}_o \quad (81)$$

Com isso, substituindo as Equações 51 a 58 na equação encontrada, tem-se:

$$-l_1(-k_d(y_{o1} - y_{r1}) - k_d(y_{o2} - y_{r2}) - B_d(\dot{y}_{o1} - \dot{y}_{r1}) - B_d(\dot{y}_{o2} - \dot{y}_{r2})) \\ + l_2(-k_t(y_{o3} - y_{r3}) - k_t(y_{o4} - y_{r4}) - B_t(\dot{y}_{o3} - \dot{y}_{r3}) - B_t(\dot{y}_{o4} - \dot{y}_{r4})) = I_x \ddot{\theta}_o \quad (82)$$

Substituindo as Equações 31 a 34:

$$-l_1(-k_d(y_o - \theta_o l_1 + \gamma_o c_1 - y_{r1}) - k_d(y_o - \theta_o l_1 - \gamma_o c_2 - y_{r2}) \\ - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 + \dot{\gamma}_o c_1 - \dot{y}_{r1}) - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 - \dot{\gamma}_o c_2 - \dot{y}_{r2})) \\ + l_2(-k_t(y_o + \theta_o l_2 + \gamma_o c_3 - y_{r3}) - k_t(y_o + \theta_o l_2 - \gamma_o c_4 - y_{r4}) \\ - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 + \dot{\gamma}_o c_3 - \dot{y}_{r3}) - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 - \dot{\gamma}_o c_4 - \dot{y}_{r4})) = I_x \ddot{\theta}_o \quad (83)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$Y_o((-2l_1 B_d + 2l_2 B_t)s + (-2l_1 k_d + 2l_2 k_t)) + \Theta_o(I_x s^2 + (2l_1^2 B_d + 2l_2^2 B_t)s + \\ (2l_1^2 k_d + 2l_2^2 k_t)) + \Gamma_o((B_d l_1(c_2 - c_1) + B_t l_2(c_3 - c_4))s + (k_d l_1(c_2 - c_1) + k_t l_2(c_3 - c_4))) \\ + Y_{r1} l_1(B_d s + k_d) + Y_{r2} l_1(B_d s + k_d) - Y_{r3} l_2(B_t s + k_t) - Y_{r4} l_2(B_t s + k_t) = 0 \quad (84)$$

Substituindo as Equações 35 a 42 e 75 na Equação 22, tem-se:

$$c_1(F_{k1Ms} + F_{B1Ms}) - c_2(F_{k2Ms} + F_{B2Ms}) \\ + c_3(F_{k3Ms} + F_{B3Ms} + F_{bm3}) - c_4(F_{k4Ms} + F_{B4Ms} + F_{bm4}) = I_z \ddot{\gamma}_o \quad (85)$$

Dessa forma, substituindo as Equações 51 a 58 na Equação 85, tem-se:

$$c_1(-k_d(y_{o1} - y_{r1}) - B_d(\dot{y}_{o1} - \dot{y}_{r1})) - c_2(-k_d(y_{o2} - y_{r2}) - B_d(\dot{y}_{o2} - \dot{y}_{r2})) \\ + c_3(-k_t(y_{o3} - y_{r3}) - B_t(\dot{y}_{o3} - \dot{y}_{r3}) - k_b(y_{r3} - y_{r4} - (c_3 + c_4)\theta_o)) \\ - c_4(-k_t(y_{o4} - y_{r4}) - B_t(\dot{y}_{o4} - \dot{y}_{r4}) - k_b(y_{r4} - y_{r3} + (c_3 + c_4)\theta_o)) = I_z \ddot{\gamma}_o \quad (86)$$

Substituindo as Equações 31 a 34:

$$c_1(-k_d(y_o - \theta_o l_1 + \gamma_o c_1 - y_{r1}) - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 + \dot{\gamma}_o c_1 - \dot{y}_{r1})) \\ - c_2(-k_d(y_o - \theta_o l_1 - \gamma_o c_2 - y_{r2}) - B_d(\dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 - \dot{\gamma}_o c_2 - \dot{y}_{r2})) \\ + c_3(-k_t(y_o + \theta_o l_2 + \gamma_o c_3 - y_{r3}) - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 + \dot{\gamma}_o c_3 - \dot{y}_{r3}) \\ - k_b(y_{r3} - y_{r4} - (c_3 + c_4)\theta_o)) \\ - c_4(-k_t(y_o + \theta_o l_2 - \gamma_o c_4 - y_{r4}) - B_t(\dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 - \dot{\gamma}_o c_4 - \dot{y}_{r4}) \\ - k_b(y_{r4} - y_{r3} + (c_3 + c_4)\theta_o)) = I_z \ddot{\gamma}_o \quad (87)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$\begin{aligned}
& Y_o(((c_1 - c_2)B_d + (c_3 - c_4)B_t)s + ((c_1 - c_2)k_d + (c_3 - c_4)k_t)) \\
& + \Theta_o((B_d l_1(c_2 - c_1) + B_t l_2(c_3 - c_4))s + (k_d l_1(c_2 - c_1) + k_t l_2(c_3 - c_4))) + \\
\Gamma_o(I_z s^2 + ((c_1^2 + c_2^2)B_d + (c_3^2 + c_4^2)B_t)s + ((c_1^2 + c_2^2)k_d + (c_3^2 + c_4^2)k_t + (c_3 + c_4)^2 k_b)) \\
& - Y_{r1}c_1(B_d s + k_d) + Y_{r2}c_2(B_d s + k_d) - Y_{r3}(c_3(B_t s + k_t + k_b) + c_4 k_b) \\
& + Y_{r4}(c_4(B_t s + k_t + k_b) + c_3 k_b) = 0 \quad (88)
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações 59 a 62 na Equação 23, tem-se:

$$-k_d(y_{r1} - y_{o1}) - k_{r1}(y_{r1} - y_1) - B_d(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_{o1}) - B_{r1}(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_1) = m_d \ddot{y}_{r1} \quad (89)$$

Substituindo a Equação 31 na equação encontrada:

$$\begin{aligned}
& -k_d(y_{r1} - y_o - \theta_o l_1 + \gamma_o c_1) - k_{r1}(y_{r1} - y_1) \\
& - B_d(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 + \dot{\gamma}_o c_1) - B_{r1}(\dot{y}_{r1} - \dot{y}_1) = m_d \ddot{y}_{r1} \quad (90)
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$\begin{aligned}
& -Y_o(B_d s + k_d) + \Theta_o l_1(B_d s + k_d) - \Gamma_o c_1(B_d s + k_d) \\
& + Y_{r1}(m_d s^2 + (B_d + B_{rd})s + (k_d + k_{rd})) = Y_1(B_{rd} s + k_{rd}) \quad (91)
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações 63 a 66 na Equação 24, observa-se:

$$-k_d(y_{r2} - y_{o2}) - k_{r2}(y_{r2} - y_2) - B_d(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_{o2}) + -B_{r2}(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_2) = m_d \ddot{y}_{r2} \quad (92)$$

Substituindo a Equação 32 na equação encontrada:

$$\begin{aligned}
& -k_d(y_{r2} - y_o - \theta_o l_1 - \gamma_o c_2) - k_{r2}(y_{r2} - y_2) \\
& - B_d(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_o - \dot{\theta}_o l_1 - \dot{\gamma}_o c_2) + -B_{r2}(\dot{y}_{r2} - \dot{y}_2) = m_d \ddot{y}_{r2} \quad (93)
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$\begin{aligned}
& -Y_o(B_d s + k_d) + \Theta_o l_1(B_d s + k_d) + \Gamma_o c_2(B_d s + k_d) \\
& + Y_{r2}(m_d s^2 + (B_d + B_{rd})s + (k_d + k_{rd})) = Y_2(B_{rd} s + k_{rd}) \quad (94)
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações 67 a 70 e 76 na Equação 25, tem-se:

$$\begin{aligned}
& -k_t(y_{r3} - y_{o3}) - k_{r3}(y_{r3} - y_3) - k_b(y_{r3} - y_{r4} - (c_3 + c_4)\theta_o) \\
& - B_t(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_{o3}) - B_{r3}(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_3) = m_t \ddot{y}_{r3} \quad (95)
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação 33 na equação encontrada:

$$\begin{aligned}
& -k_t(y_{r3} - y_o + \theta_o l_2 + \gamma_o c_3) - k_{r3}(y_{r3} - y_3) - k_b(y_{r3} - y_{r4} - (c_3 + c_4)\theta_o) \\
& - B_t(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_o + \dot{\theta}_o l_2 + \dot{\gamma}_o c_3) - B_{r3}(\dot{y}_{r3} - \dot{y}_3) = m_t \ddot{y}_{r3} \quad (96)
\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$- Y_o(B_t s + k_t) - \Theta_o I_2(B_t s + k_t) - \Gamma_o(c_3(B_t s + k_t + k_b) + c_4 k_b) \\ + Y_{r3}(m_t s^2 + (B_t + B_{rt})s + (k_t + k_{rt} + k_b)) - Y_{r4}(k_b) = Y_3(B_{rt} s + k_{rt}) \quad (97)$$

Substituindo as Equações 71 a 74 e 77 na Equação 26, tem-se:

$$- k_t(y_{r4} - y_{o4}) - k_{r4}(y_{r4} - y_4) - k_b(y_{r4} - y_{r3} + (c_3 + c_4)\theta_o) \\ - B_t(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_{o4}) - B_{r4}(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_4) = m_t \ddot{y}_{r4} \quad (98)$$

Substituindo a Equação 34 na equação encontrada:

$$- k_t(y_{r4} - y_o + \theta_o I_2 - \gamma_o c_4) - k_{r4}(y_{r4} - y_4) - k_b(y_{r4} - y_{r3} + (c_3 + c_4)\theta_o) \\ - B_t(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_o + \dot{\theta}_o I_2 - \dot{\gamma}_o c_4) - B_{r4}(\dot{y}_{r4} - \dot{y}_4) = m_t \ddot{y}_{r4} \quad (99)$$

Aplicando a Transformada de Laplace e as devidas simplificações:

$$- Y_o(B_t s + k_t) - \Theta_o I_2(B_t s + k_t) + \Gamma_o(c_4(B_t s + k_t + k_b) + c_3 k_b) \\ - Y_{r3}(k_b) + Y_{r4}(m_t s^2 + (B_t + B_{rt})s + (k_t + k_{rt} + k_b)) = Y_4(B_{rt} s + k_{rt}) \quad (100)$$

Com isso, utilizam-se as Equações 80, 84, 88, 91, 94, 97 e 100 para colocar o modelo na forma matricial:

$$MA \cdot Out = MB \cdot In \quad (101)$$

Cujo os valores das matrizes são:

$$MA = \begin{bmatrix} M_s s^2 + B_{e1} s + k_{e1} & B_{e2} s + k_{e2} & B_{e3} s + k_{e3} & -B_d s - k_d & -B_d s - k_d & -B_t s - k_t & -B_t s - k_t \\ B_{e2} s + k_{e2} & I_x s^2 + B_{e4} s + k_{e4} & B_{e5} s + k_{e5} & l_1 \cdot (B_d s + k_d) & l_1 \cdot (B_d s + k_d) & -l_2 \cdot (B_t s + k_t) & -l_2 \cdot (B_t s + k_t) \\ B_{e3} s + k_{e3} & B_{e5} s + k_{e5} & I_z s^2 + B_{e6} s + k_{e6} & -c_1 \cdot (B_d s + k_d) & c_2 \cdot (B_d s + k_d) & -c_3(B_t s + k_t) - (c_3 + c_4)k_b & c_4(B_t s + k_t) + (c_3 + c_4)k_b \\ -B_d s - k_d & l_1 \cdot (B_d s + k_d) & -c_1 \cdot (B_d s + k_d) & m_d s^2 + B_{e7} s + k_{e7} & 0 & 0 & 0 \\ -B_d s - k_d & l_1 \cdot (B_d s + k_d) & c_2 \cdot (B_d s + k_d) & 0 & m_d s^2 + B_{e7} s + k_{e7} & 0 & 0 \\ -B_t s - k_t & -l_2 \cdot (B_t s + k_t) & -c_3(B_t s + k_t) - (c_3 + c_4)k_b & 0 & 0 & m_t s^2 + B_{e8} s + k_{e8} & -k_b \\ -B_t s - k_t & -l_2 \cdot (B_t s + k_t) & c_4(B_t s + k_t) + (c_3 + c_4)k_b & 0 & 0 & -k_b & m_t s^2 + B_{e8} s + k_{e8} \end{bmatrix};$$

$$\text{Out} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \Theta_0 \\ \Gamma_0 \\ Y_{r1} \\ Y_{r2} \\ Y_{r3} \\ Y_{r4} \end{bmatrix}; MB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{r1s} + k_{r1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{r2s} + k_{r2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{r3s} + k_{r3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{r4s} + k_{r4} \end{bmatrix} \text{ e } In = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

em que:

$$ke1 = 2k_d + 2k_t;$$

$$Be1 = 2B_d + 2B_t;$$

$$ke2 = -2l_1k_d + 2l_2k_t;$$

$$Be2 = -2l_1B_d + 2l_2B_t;$$

$$ke3 = (c_1 - c_2)k_d + (c_3 - c_4)k_t;$$

$$Be3 = (c_1 - c_2)B_d + (c_3 - c_4)B_t;$$

$$ke4 = 2l_1^2k_d + 2l_2^2k_t;$$

$$Be4 = 2l_1^2B_d + 2l_2^2B_t;$$

$$ke5 = k_d l_1 (c_2 - c_1) + k_t l_2 (c_3 - c_4);$$

$$Be5 = B_d l_1 (c_2 - c_1) + B_t l_2 (c_3 - c_4);$$

$$ke6 = (c_1^2 + c_2^2)k_d + (c_3^2 + c_4^2)k_t + (c_3 + c_4)^2k_b;$$

$$Be6 = (c_1^2 + c_2^2)B_d + (c_3^2 + c_4^2)B_t;$$

$$ke7 = k_d + k_{rd};$$

$$Be7 = B_d + B_{rd};$$

$$ke8 = k_t + k_{rt} + k_b;$$

$$Be8 = B_t + B_{rt}.$$

Para obter a solução do problema, e assim, a solução do problema deve-se isolar o vetor *Out* da Equação 101:

$$Out = MA^{-1} \cdot MB \cdot In \quad (102)$$

A inversão da matriz *MA*, dada por  $MA^{-1}$ , foi realizada utilizando a regra de Cramer, e por se tratar de um cálculo muito complexo, foi resolvido computacionalmente por meio da utilização do *Python*. Dessa maneira, tem-se a matriz com as funções de

transferência dada por:

$$MA^{-1} \cdot MB = S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1j} & \cdots & S_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i1} & \cdots & S_{ij} & \cdots & S_{i7} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{71} & \cdots & S_{7j} & \cdots & S_{77} \end{bmatrix} \quad (103)$$

A combinação das funções para cada um dos *outputs* é:

$$Y_o = S_{14}Y_1 + S_{15}Y_2 + S_{16}Y_3 + S_{17}Y_4 \quad (104)$$

$$\Theta_o = S_{24}Y_1 + S_{25}Y_2 + S_{26}Y_3 + S_{27}Y_4 \quad (105)$$

$$\Gamma_o = S_{34}Y_1 + S_{35}Y_2 + S_{36}Y_3 + S_{37}Y_4 \quad (106)$$

$$Y_{r1} = S_{44}Y_1 + S_{45}Y_2 + S_{46}Y_3 + S_{47}Y_4 \quad (107)$$

$$Y_{r2} = S_{54}Y_1 + S_{55}Y_2 + S_{56}Y_3 + S_{57}Y_4 \quad (108)$$

$$Y_{r3} = S_{64}Y_1 + S_{65}Y_2 + S_{66}Y_3 + S_{67}Y_4 \quad (109)$$

$$Y_{r4} = S_{74}Y_1 + S_{75}Y_2 + S_{76}Y_3 + S_{77}Y_4 \quad (110)$$

## 3.2 MODELAGEM DOS OBSTÁCULOS

Para essa parte do trabalho, foram realizados dois estudos de modelagem para obstáculos. O primeiro foi o de uma aproximação de um *Drop test*, no qual o veículo é solto de uma determinada altura, e o segundo, a criação de obstáculos genéricos, a partir dos vetores de velocidade, deslocamento vertical e longitudinal.

### 3.2.1 DROP TEST

O ensaio de *drop test* se baseia em soltar o veículo em queda livre de diferentes alturas. Esse tipo de teste é muito importante, pois, um veículo Baja é constantemente submetido a saltos durante competições e pode ser considerado um dos obstáculos que geram os maiores esforços nos componentes da suspensão.

Para a modelagem deste obstáculo, o problema foi aproximado de forma que cada roda do veículo está assentada sobre plataformas, que geram uma entrada de deslocamento, muito semelhante à de uma queda real.



Desse modo, o movimento dessa plataforma, foi dividido em duas componentes: a) o Movimento Uniformemente Variado (MUV) de uma queda livre; e b) o deslocamento proveniente da massa não suspensa “pendurada” no conjunto Massa-Mola-Amortecedor (Ma-Mo-Am). Assim, utiliza-se a teoria da superposição de efeitos para calcular as entradas de forma separada, e, assim, somá-las.

O movimento uniformemente variável é calculado segundo a função horária da posição. Nesse caso, a velocidade inicial e o deslocamento são nulos e a aceleração equivale à gravidade. Após atingir a altura designada pelo teste, a função se torna constante. Ademais, para atender as condições iniciais nulas, a altura varia a partir de zero e negativamente. Assim, a variação do deslocamento em função do tempo é calculado segundo a Equação 111.

$$y_o = -g \frac{t^2}{2} \quad (111)$$

em que:

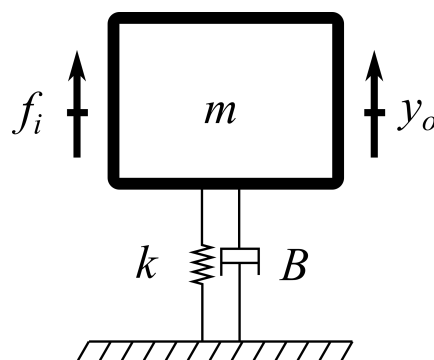
$y_o$  é a saída em deslocamento;

$g$  é a aceleração da gravidade;

$t$  é o tempo.

O deslocamento de cada uma das massas não suspensas foi calculado a partir do sistema massa-mola-amortecedor convencional, com entrada de força e saída de deslocamento na massa (Figura 37). Sua função de transferência pode ser vista na Equação 112, e a entrada foi um “degrau” com o valor negativo em Newtons do peso da respectiva parcela da massa suspensa, sustentada pelo conjunto mola e amortecedor.

Figura 37 – Sistema massa-mola-amortecedor.



Fonte: Autor.

$$\frac{Y_o}{F_i} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k} \quad (112)$$

em que:

$m$  é a massa não suspensa;

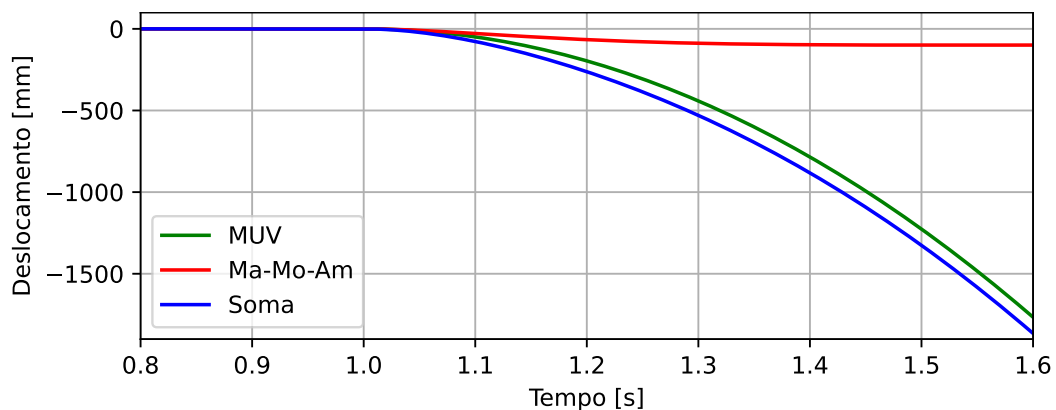
$B$  é o coeficiente de amortecimento;

$k$  é a rigidez da mola.

$f_i$  é a entrada de força equivalente ao peso da parcela da massa suspensa.  
 $y_o$  é a saída em deslocamento.

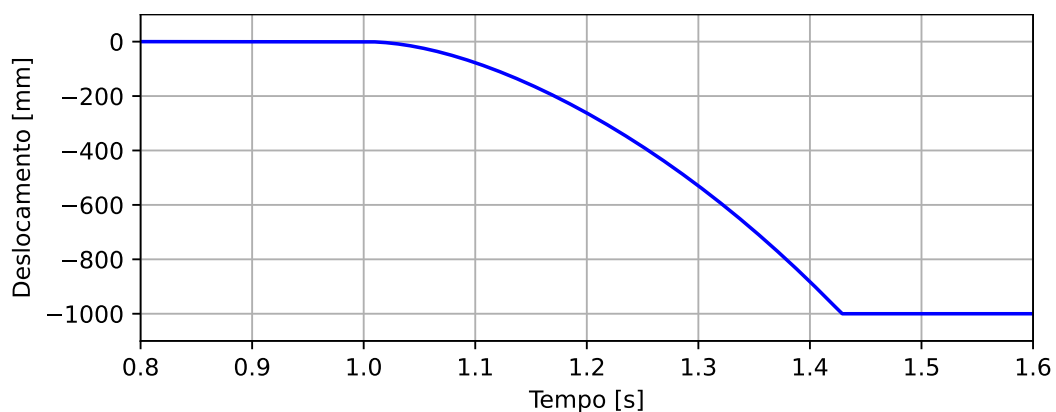
Assim, por exemplo, para um sistema com  $m = 50$  kg,  $B = 800$  Ns/m e  $k = 5000$  N/m, em um *drop test* com início em  $t = 1$  s, obtém-se as curvas da Figura 38. A altura do teste pode ser configurada por meio de uma condição em que o deslocamento se torna constante ao atingir o valor desejado, demonstrado pela Figura 39 em uma queda de 1000 mm.

Figura 38 – Curvas para compor entrada do *drop test*.



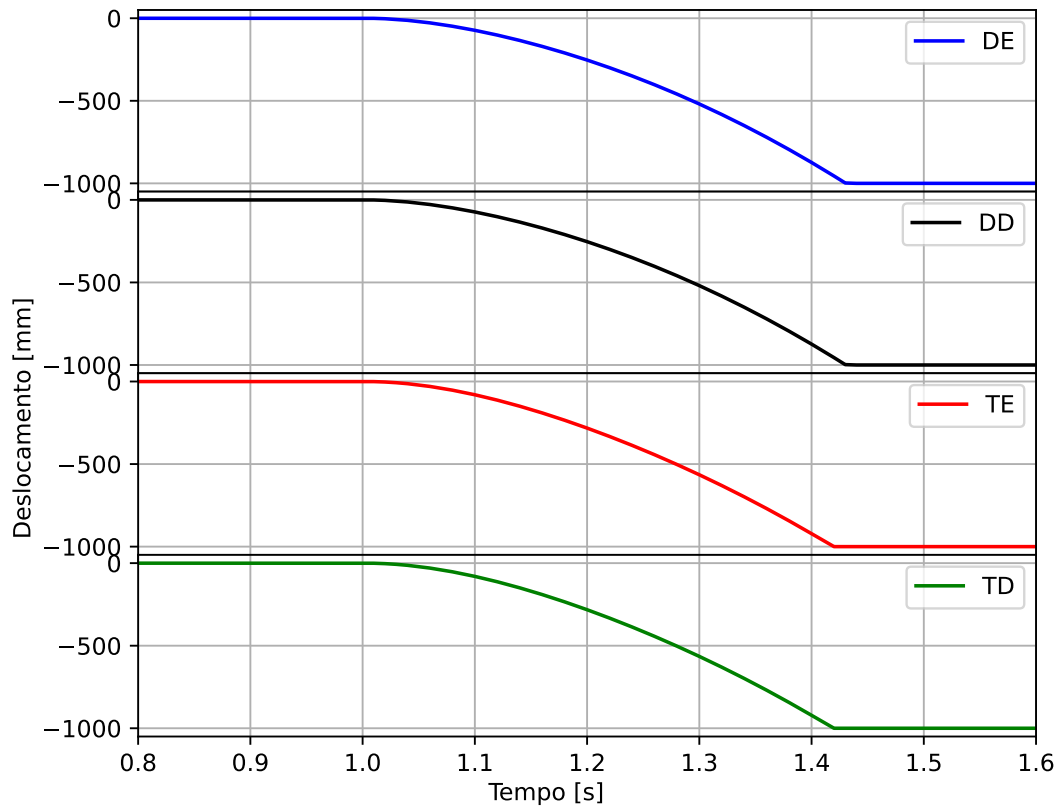
Fonte: Autor.

Figura 39 – Curva de entrada para o *drop test*.



Fonte: Autor.

Generalizando para um veículo completo, utiliza-se a massa não suspensa individual para cada uma das quatro rodas, obtendo-se quatro curvas, conforme o exemplo da Figura 40, em que “DE” é a roda Dianteira Esquerda, “DD” a Dianteira Direita, “TE” a Traseira Esquerda e “TD” a Traseira Direita.

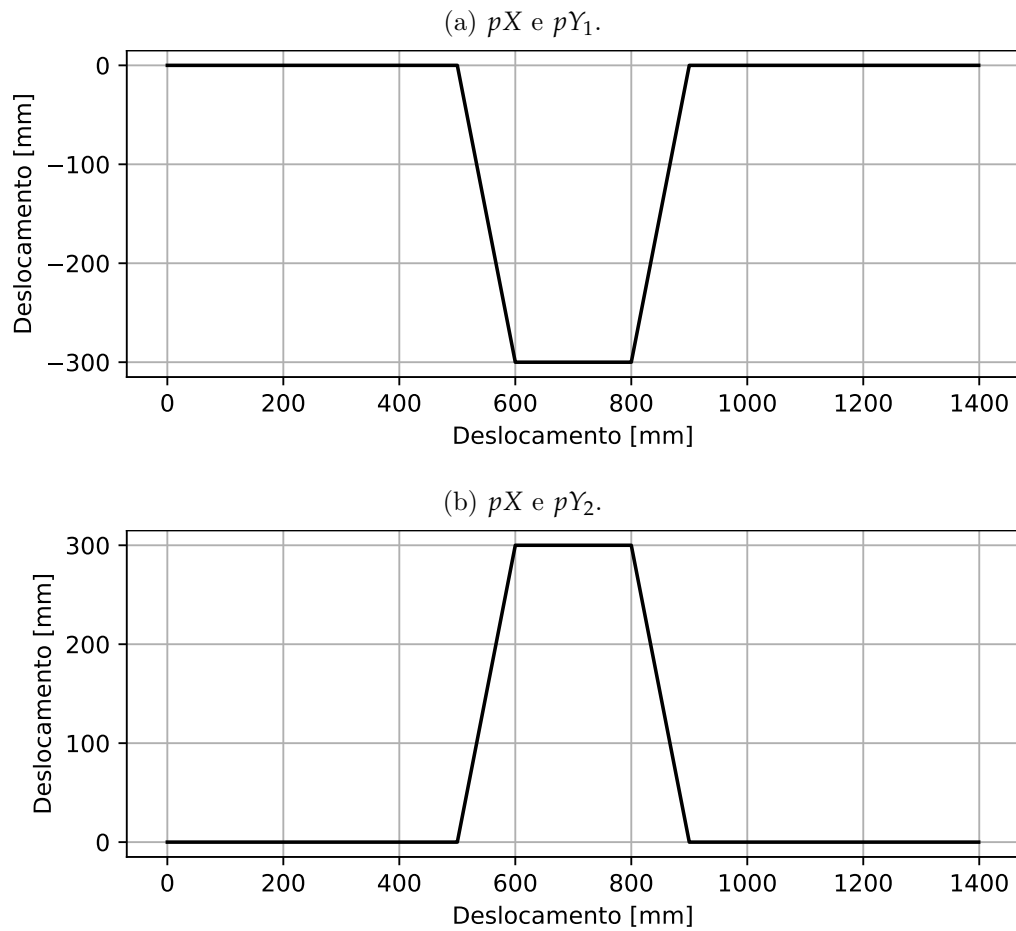
Figura 40 – Função do *drop test* para cada uma das rodas.

Fonte: Autor.

### 3.2.2 OBSTÁCULO PERSONALIZADO

Para a modelagem de obstáculos, primeiramente, criou-se um perfil de pista a partir dos vetores com os pontos onde ocorrem mudanças de direção. Por exemplo, com vetores  $pX = [0, 500, 600, 800, 900, 1400]$  mm,  $pY_1 = [0, 0, -300, -300, 0, 0]$  mm e  $pY_2 = [0, 0, 300, 300, 0, 0]$  mm, foi possível construir as curvas da Figura 41.

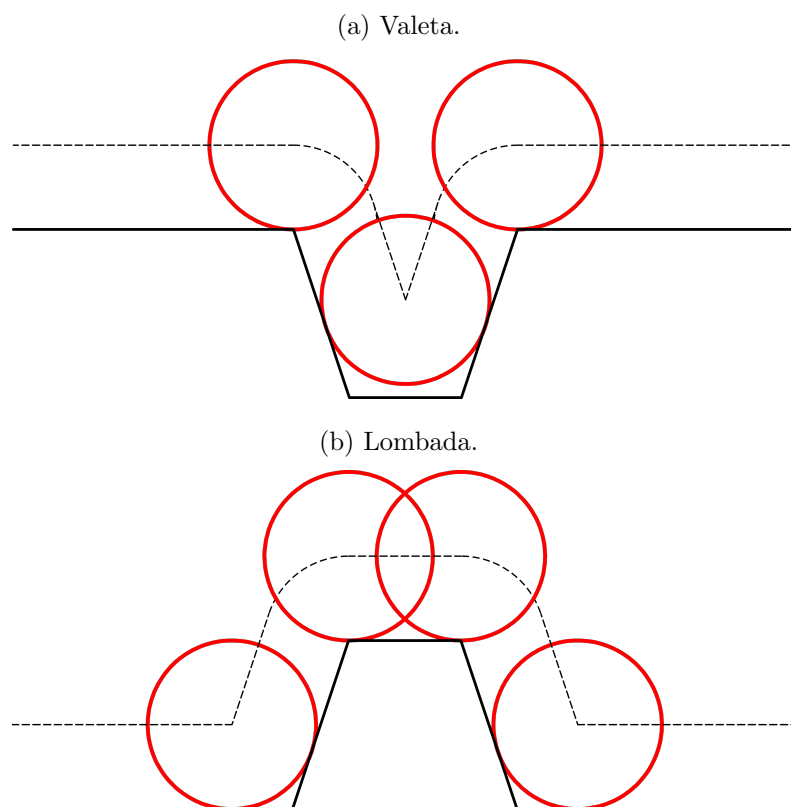
Figura 41 – Perfil de pista construído com vetores de posição.



Fonte: Autor.

Em seguida, as curvas são corrigidas, pois, em consequência da parte frontal do pneu ter o primeiro contato com as perturbações do solo, a trajetória real da parte inferior do pneu não é igual ao perfil da pista. Dessa forma, o trajeto real é criado a partir do caminho traçado pelo centro da roda, exemplificado pela Figura 42.

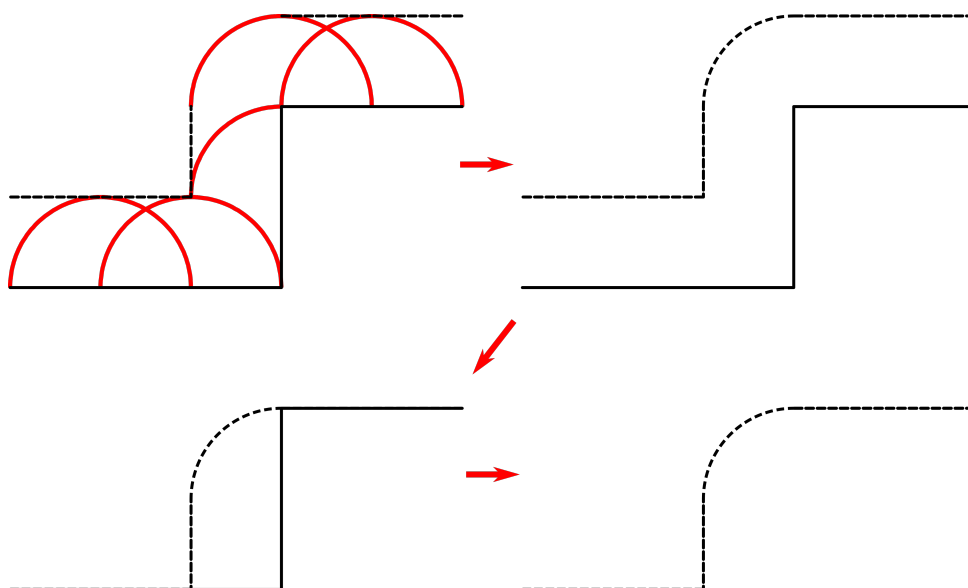
Figura 42 – Influência do raio na trajetória da parte inferior do pneu.



Fonte: Autor.

Com isso, foi possível aplicar esse conceito para diversos tipos de pista. O processo, descrito pela Figura 43, baseia-se na soma do valor do raio em todas as direções verticais positivas (quadrantes um e quatro), e, em seguida, na subtração do valor do raio apenas na vertical, para todos os pontos da curva.

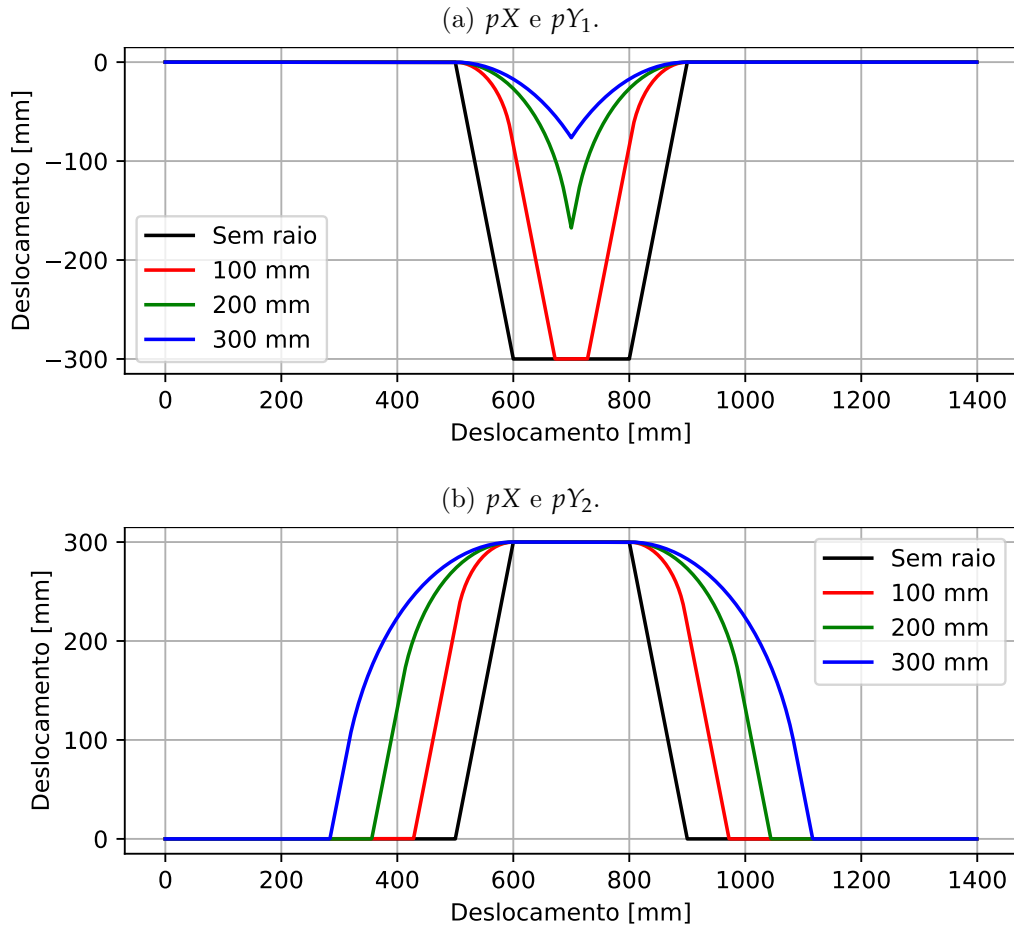
Figura 43 – Processo de adequação do perfil da pista ao raio do pneu.



Fonte: Autor.

Assim sendo, aplicando-se o conceito aos obstáculos da Figura 41 , para os valores 100, 200 e 300 mm de raio, foi possível obter os perfis da Figura 44.

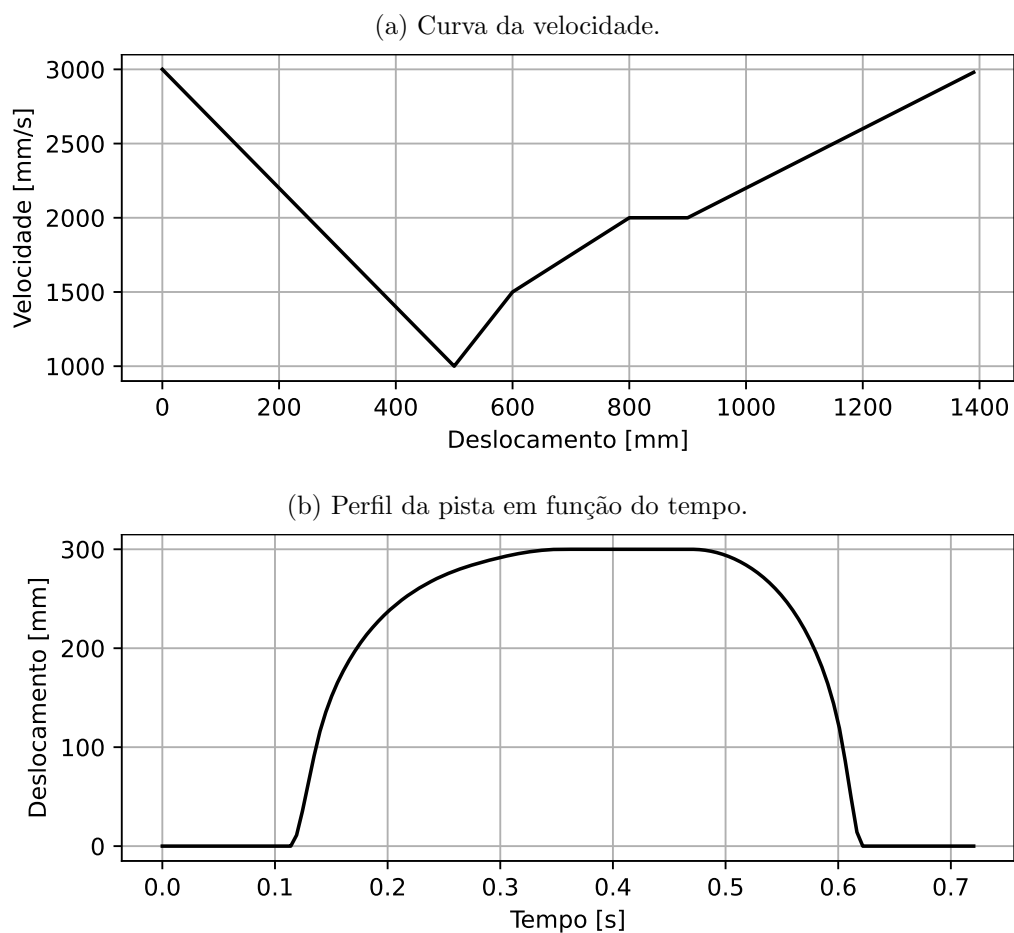
Figura 44 – Perfil de pista corrigido conforme raio do pneu.



Fonte: Autor.

Posteriormente, utilizando o vetor da velocidade em função do deslocamento longitudinal, foi possível mudar o eixo horizontal para o regime do tempo. Utilizando o vetor  $pV = [3000, 1000, 1500, 2000, 2000, 3000]$  mm/s na curva com o raio de 300 mm do exemplo da Figura 44b, encontrou-se a variação da velocidade em função do deslocamento longitudinal, segundo a Figura 45a, e a variação vertical em função do tempo, ilustrado pela Figura 45b.

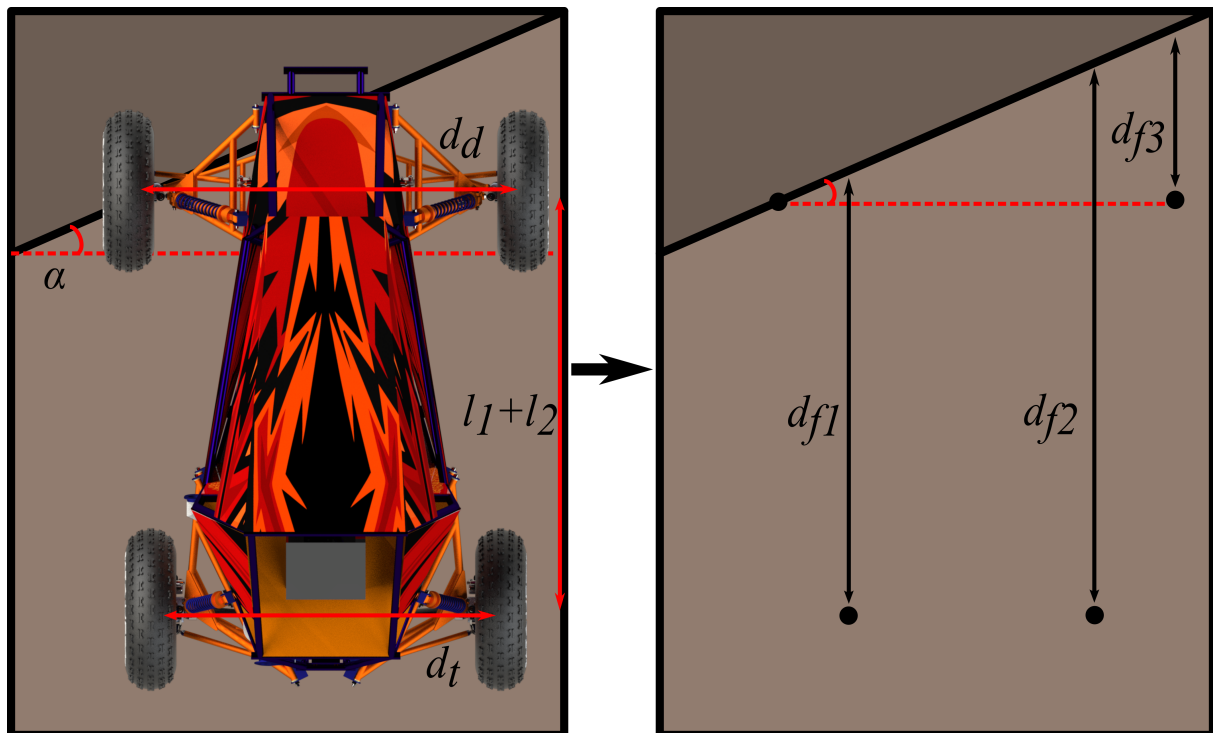
Figura 45 – Transformação do regime da distância para do tempo.



Fonte: Autor.

Em se tratando de uma entrada diferente por roda, a defasagem no tempo para cada uma delas deve ser considerada. A partir das dimensões do veículo e do ângulo de entrada no obstáculo, mostrados na Figura 46, é possível verificar o acréscimo em distância para cada uma das rodas.

Figura 46 – Dimensões para o cálculo de defasagem para cada uma das rodas.



Fonte: Autor.

Considerando que a roda esquerda dianteira é a primeira a passar pelo obstáculo, esse cálculo pode ser feito segundo as Equações 113 a 115:

$$d_{f1} = \left(\frac{d_d - d_t}{2}\right) \operatorname{tg}(\alpha) + (l_1 + l_2) \quad (113)$$

$$d_{f2} = \left(\frac{d_d + d_t}{2}\right) \operatorname{tg}(\alpha) + (l_1 + l_2) \quad (114)$$

$$d_{f3} = (d_d) \operatorname{tg}(\alpha) \quad (115)$$

em que:

$d_{f1}$  é a defasagem da roda traseira esquerda;

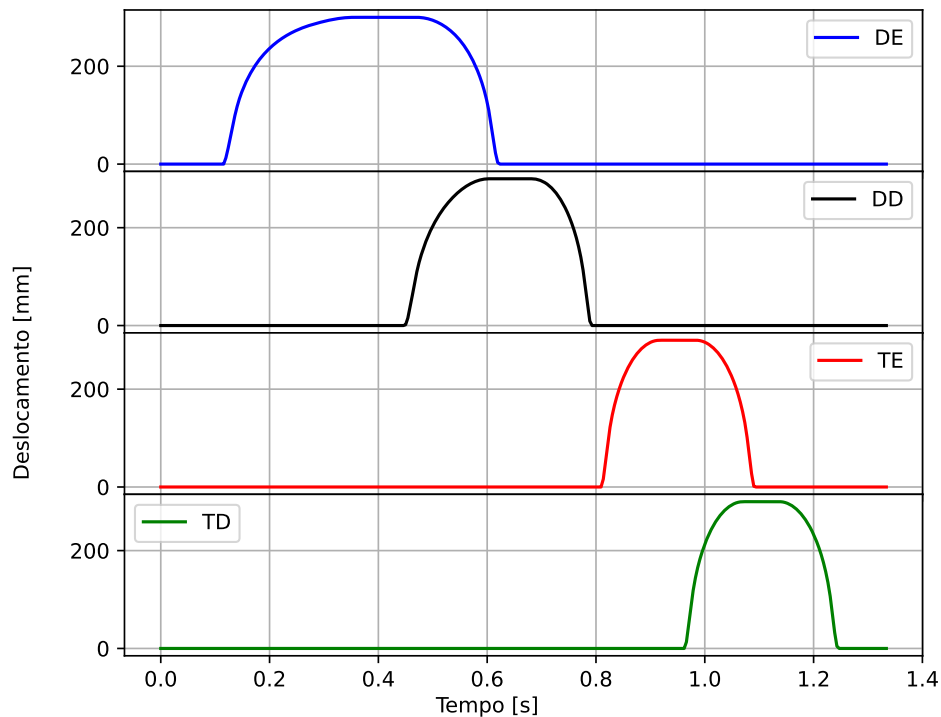
$d_{f2}$  é a defasagem da roda traseira direita;

$d_{f3}$  é a defasagem da roda dianteira direita.

Dessa forma, utilizando todos os conceitos desenvolvidos nessa subseção, com  $\alpha = 20$  graus,  $d_d = 1320$  mm,  $d_t = 1240$  mm e  $l_1 + l_2 = 1400$  mm, e, além disso, considerando o vetor  $pV$  como a velocidade da roda esquerda dianteira, foi possível encontrar o deslocamento vertical em função do tempo para cada uma das rodas, conforme a Figura 47.



Figura 47 – Obstáculo criado para cada uma das rodas.



Fonte: Autor.

### 3.2.3 SOFTWARE

Durante o desenvolvimento da interface gráfica e funções de cálculos para as soluções matemáticas desenvolvidas, utilizou-se a linguagem de programação *Python*, juntamente às bibliotecas descritas na Tabela 3.

Tabela 3 – Bibliotecas utilizadas.

Nome	Descrição
<i>numpy</i>	Cálculos com vetores
<i>control</i>	Funções de controle
<i>matplotlib</i>	Plot de gráficos
<i>time</i>	Representação do tempo
<i>PySimpleGUI</i>	Interface gráfica
<i>threading</i>	Multiprocessos
<i>os</i>	Manipulação de arquivos
<i>pickle</i>	Armazenamento de variáveis
<i>pyinstaller</i>	Arquivo executável

A fim de obter uma maior organização e facilitar o desenvolvimento do *software*, foram desenvolvidos três *scripts*: a) denominado como *inputsys.py* com as funções de entradas; *syspy.py* com as funções do modelo matemático; e c) *interface.py* com a função

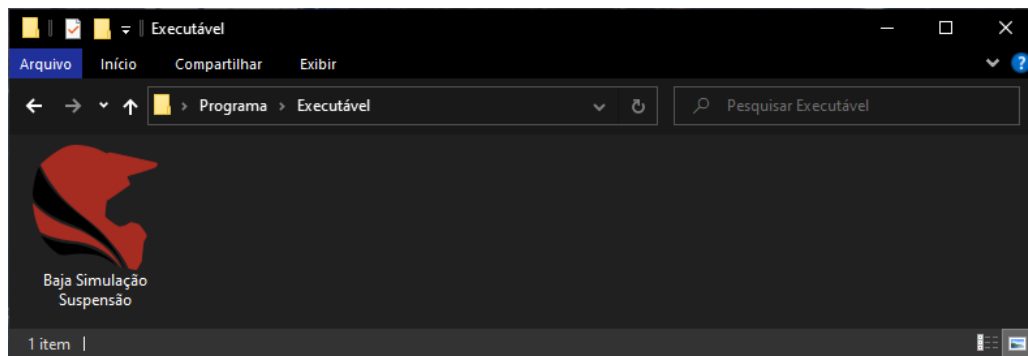
de gerar a interface gráfica. Os resultados apresentados na seção a seguir mostram alguns aspectos da interface, bem como os a forma de apresentação dos resultados por parte do programa confeccionado.

## 4 RESULTADOS

Por meio da utilização dos conceitos apresentados na metodologia (Capítulo 3), foi produzido um software funcional para estudos da dinâmica vertical em veículos minibaja. A utilização da linguagem de programação *Python* possibilitou uma programação simplificada e em uma plataforma *open source* (código aberto).

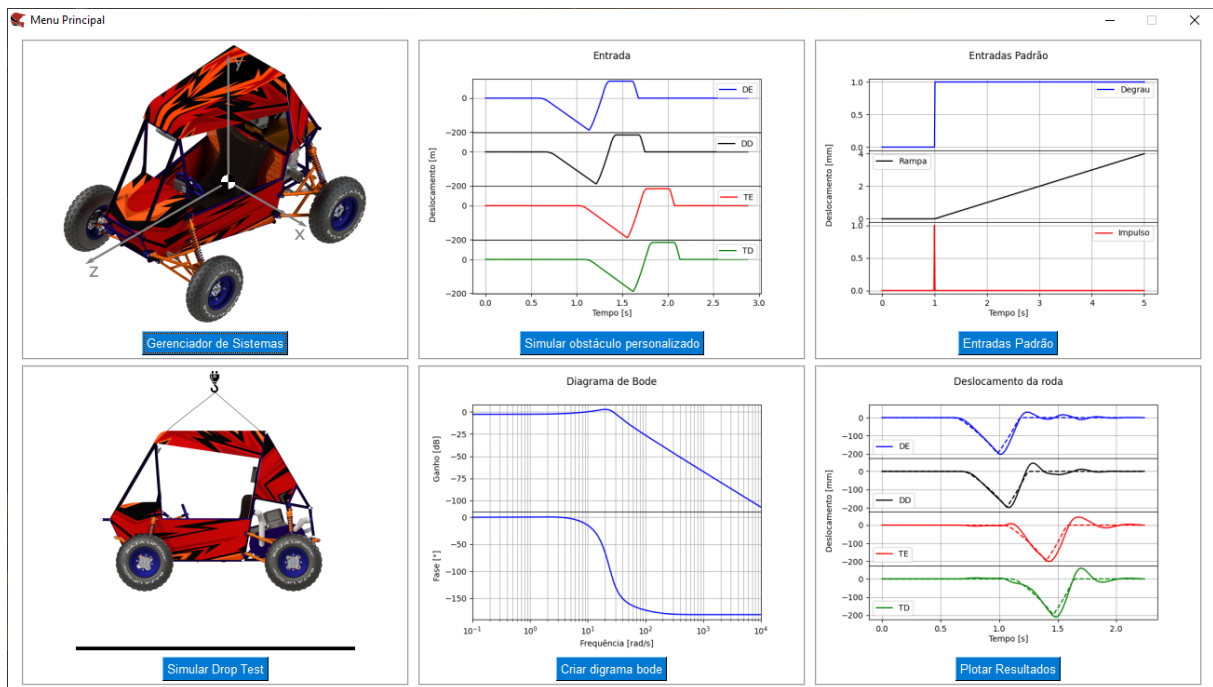
O resultado final contou com um arquivo executável, ilustrado pela Figura 48, gerado a partir da biblioteca *pyinstaller.py*, possibilitando que sua utilização seja feita sem a instalação de programas externos.

Figura 48 – Arquivo executável do programa de simulação desenvolvido.



Fonte: Autor.

Figura 49 – Menu principal.



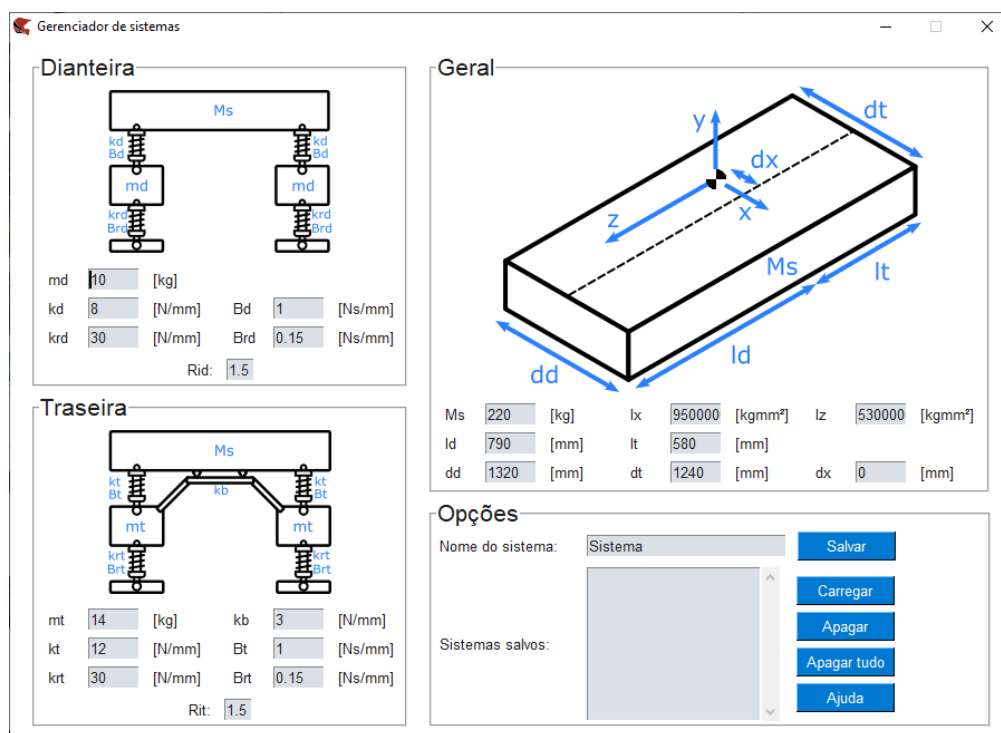
Fonte: Autor.

Ao abrir o arquivo executável, a primeira interface que será disposta é o menu principal (Figura 49). Nele, é possível escolher entre seis opções: a) Gerenciador de sistemas; b) Simular *drop test*; c) Simular obstáculo personalizado; d) Criar diagrama de Bode; e) Entradas padrão; e f) “Plotar” resultados. Cada uma delas irá gerar uma nova janela, na qual diversas opções são disponibilizadas de acordo com as funções implementadas. Além disso, para otimizar o seu uso durante a simulação de sistemas, é possível abrir mais de uma janela simultaneamente, e ao fechar o menu principal, todas as janelas abertas também são fechadas.

#### 4.1 GERENCIADOR DE SISTEMAS

Ao iniciar o programa, a primeira janela que deve ser aberta é o gerenciador de sistemas (Figura 50). Nela é possível criar, excluir ou modificar sistemas. As opções de entrada são as mesmas da Tabela 2, juntamente com as razões de instalação para cada um dos eixos, cujas unidades foram adaptadas para uma melhor compatibilidade com o sistema de unidades implementado pela equipe Baja UFSCar.

Figura 50 – Gerenciador de sistemas.

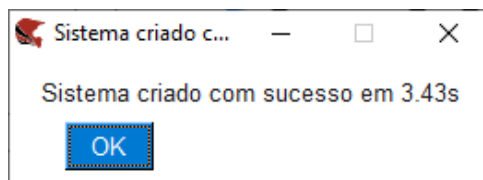


Fonte: Autor.

Após preencher as caixas de diálogo com os parâmetros de veículo, deve-se escolher um nome para o sistema e, em seguida, salvá-lo. Ao pressionar este botão, os valores são substituídos nas matrizes do sistema, é realizada a inversão da matriz, e, por fim, os sistemas e todas as variáveis inseridas são salvas por meio do uso da biblioteca *picke.py*.

Como se pode observar na Figura 51, após os cálculos, o programa gera uma janela *popup*, informando que o sistema foi criado com sucesso, ou caso ocorra algum tipo de erro.

Figura 51 – Confirmação da criação de um novo sistema.

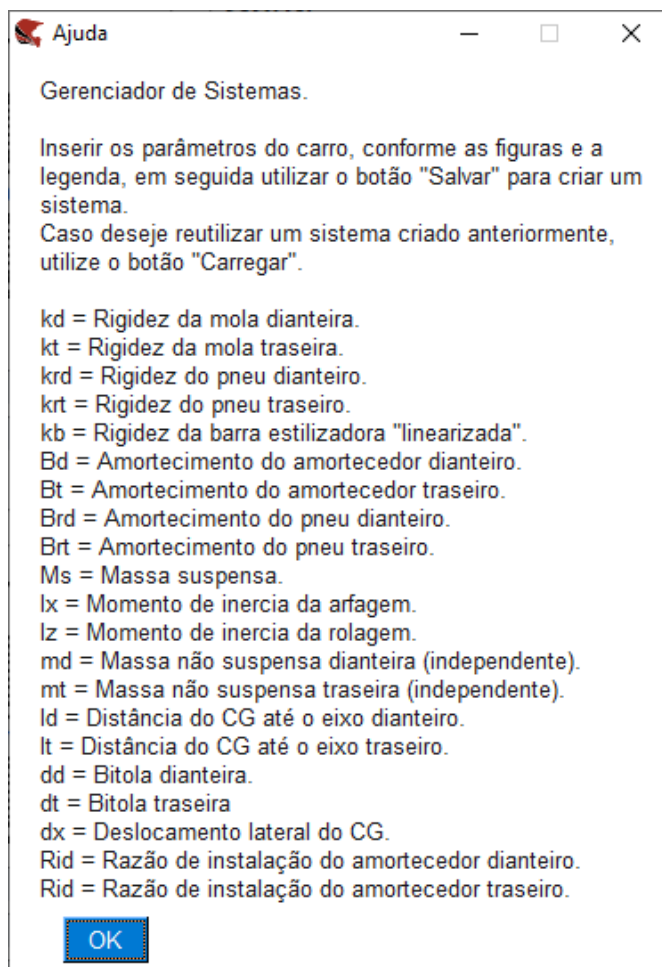


Fonte: Autor.

Ademais, após criar um sistema, é possível reutilizar todas as variáveis inseridas, por meio do botão “Carregar”, apagá-lo com a opção “Apagar”, ou apagar tudo com a seleção da caixa “Apagar tudo”.

Caso surja alguma dúvida durante o uso do gerenciador de sistemas, é possível utilizar a “Ajuda” para abrir uma janela com um breve resumo das funcionalidades do módulo e a descrição de todas as variáveis (Figura 52).

Figura 52 – Ajuda do gerenciador de sistemas.

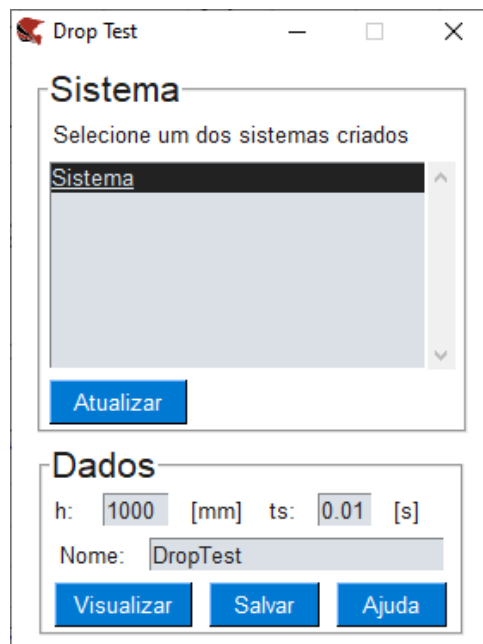


Fonte: Autor.

## 4.2 SIMULAR DROP TEST

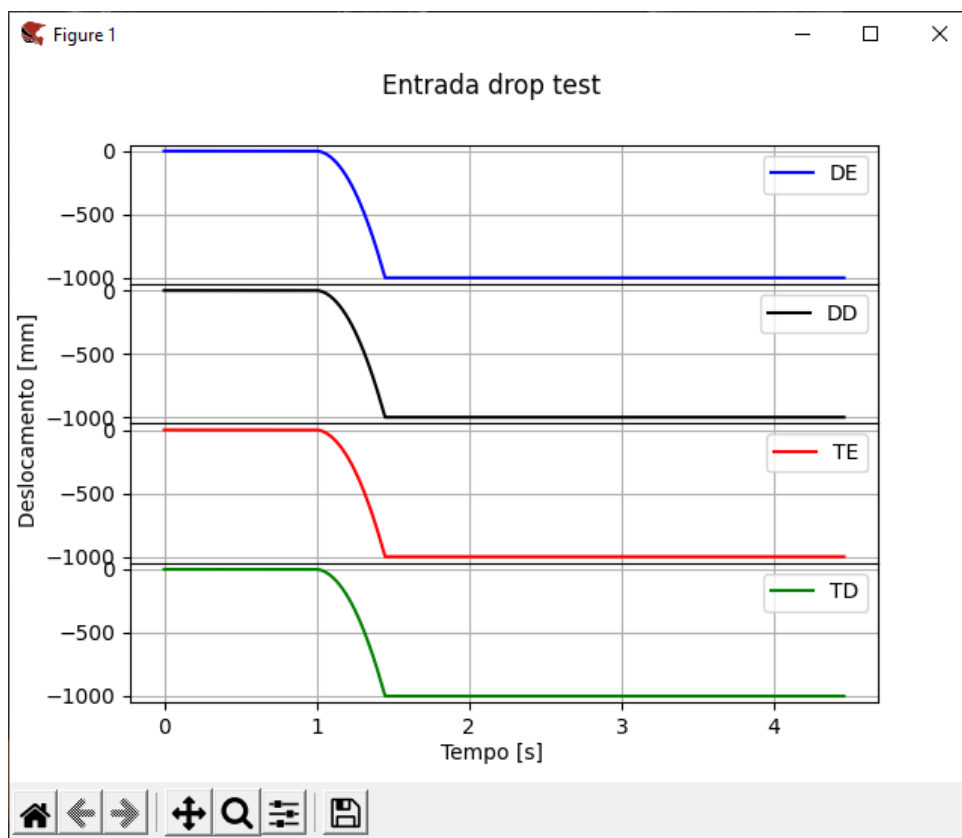
Após a criação de um sistema, são abertas algumas opções de simulação para o sistema. A primeira delas é simular um *drop test*. Empregando os métodos desenvolvidos na Subseção 3.2.1, foi possível desenvolver a interface exposta na Figura 53, que realiza a simulação com as opções de entrada: altura a qual o carro será solto (em milímetros), e intervalo de tempo (em segundos) entre uma amostra e outra do tempo de simulação (tempo de amostragem).

Figura 53 – Interface da simulação de um *drop test*.



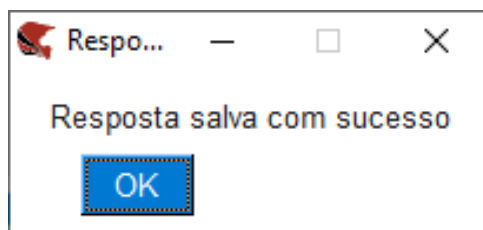
Fonte: Autor.

Ao selecionar a opção “Visualizar”, uma janela (Figura 54) é aberta com a pré visualização do deslocamento que será imposto em cada uma das rodas. Para que esse *plot* seja adequadamente gerado, deve-se selecionar o sistema de interesse, pois, durante a criação dos pontos em função do tempo, os parâmetros do carro são utilizados.

Figura 54 – Visualização da entrada para a simulação do *drop test*.

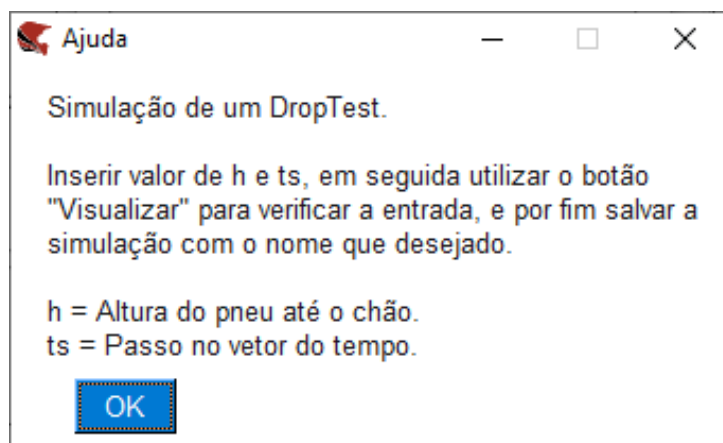
Fonte: Autor.

Em seguida, deve-se selecionar a opção “Salvar”, que gera um arquivo com todas as respostas da simulação, que é aberto com o módulo de respostas, o qual será abordado na Seção 4.6. A resposta é gerada a partir da utilização da função *lsim*, com funcionamento baseado na soma das respostas de várias entradas degrau, para cada um dos passos dos vetores temporais de entrada. Na Figura 55, é possível visualizar a confirmação apresentada após o sucesso na geração da resposta.

Figura 55 – Confirmação da realização da simulação do *drop test*.

Fonte: Autor.

Do mesmo modo que o módulo anterior, a opção “Ajuda”, representada na Figura 56, traz uma breve descrição de como realizar a simulação e o significado de cada uma das variáveis.

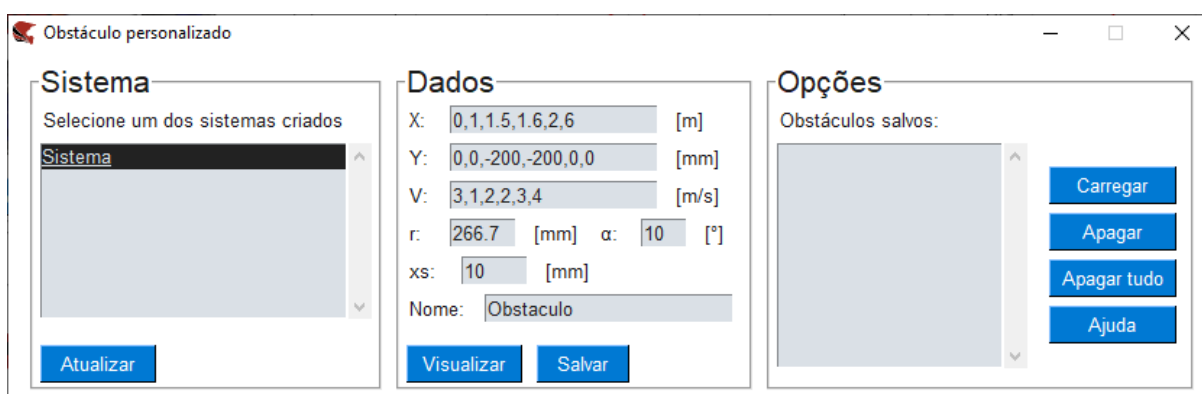
Figura 56 – Ajuda do simulador de *drop test*.

Fonte: Autor.

### 4.3 SIMULAR OBSTÁCULO PERSONALIZADO

Outro tipo de simulação possível é um obstáculo gerado a partir de um perfil de pista personalizado. A interface mostrada na Figura 57 permite a entrada dos vetores de posição vertical, posição horizontal e velocidade, junto ao passo, raio do pneu, ângulo de entrada no obstáculo e o nome da simulação.

Figura 57 – Interface da simulação de obstáculos.

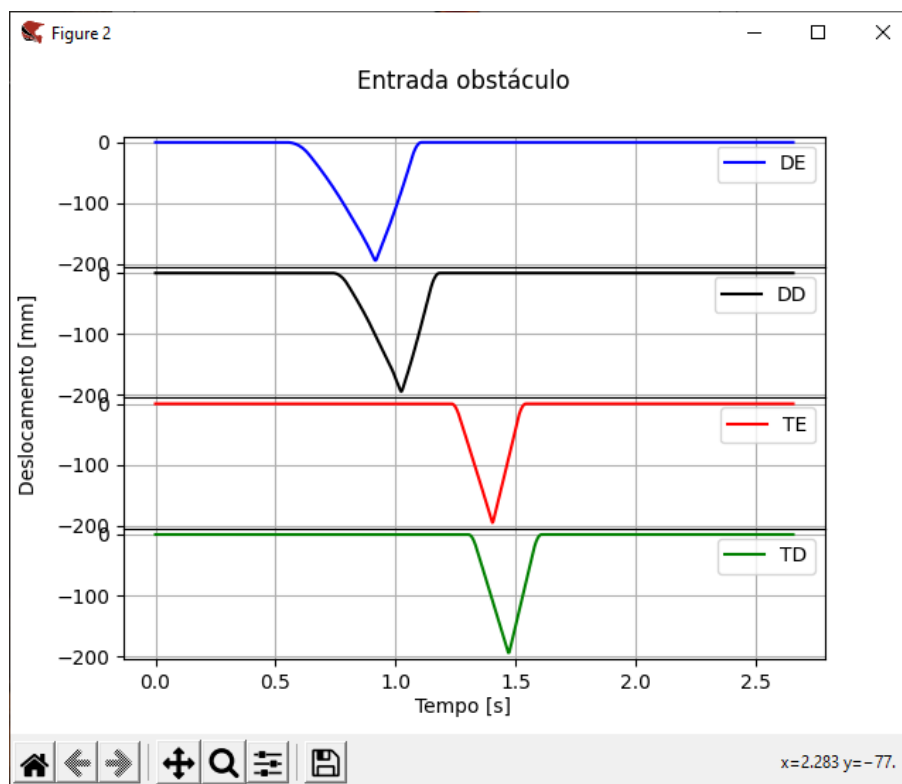


Fonte: Autor.

Após a inserção dos dados, é possível visualizar a entrada em cada uma das rodas, vista na Figura 58, por meio da utilização do comando "Visualizar". Esse *plot* já inclui todos os cálculos para gerar o perfil do obstáculo em função do tempo.



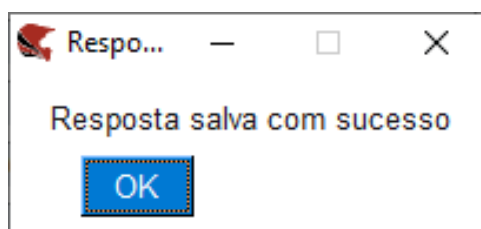
Figura 58 – Obstáculo gerado pelo simulador.



Fonte: Autor.

Na sequência, para realizar a simulação, deve-se pressionar o botão “Salvar”. Caso a simulação seja executada com sucesso, como demonstrado na Figura 59, um arquivo de resposta com o nome definido anteriormente é gerado. Além disso, é possível realizar uma manipulação das respostas salvas em simulações realizadas por meio das opções: “Carregar”, que importa os valores dos parâmetros utilizados; “Apagar”, para excluir; “Apagar tudo”, para excluir todas.

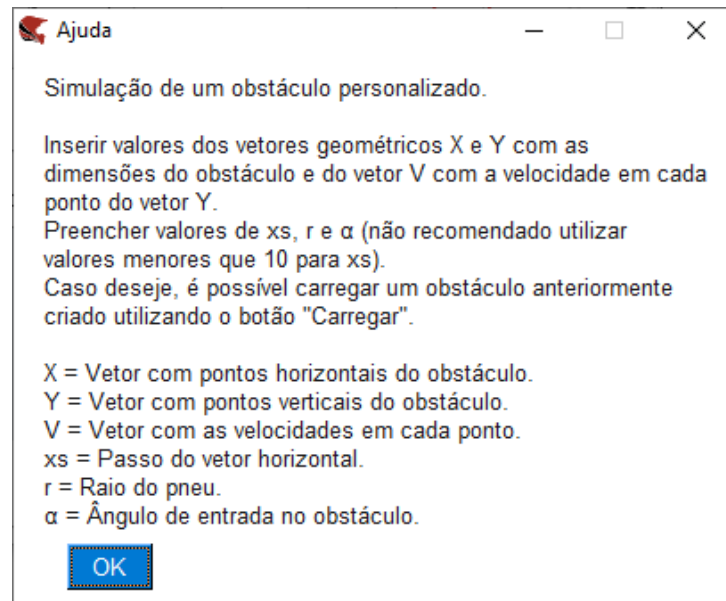
Figura 59 – Confirmação da realização da simulação da passagem por um obstáculo personalizado.



Fonte: Autor.

Por fim, por meio da utilização da opção “Ajuda”, visualizada na Figura 60, obtém-se a descrição do simulador de obstáculos personalizados, recomendações e a função de cada uma das variáveis que podem ser inseridas.

Figura 60 – Janela de ajuda do simulador de obstáculos personalizados.

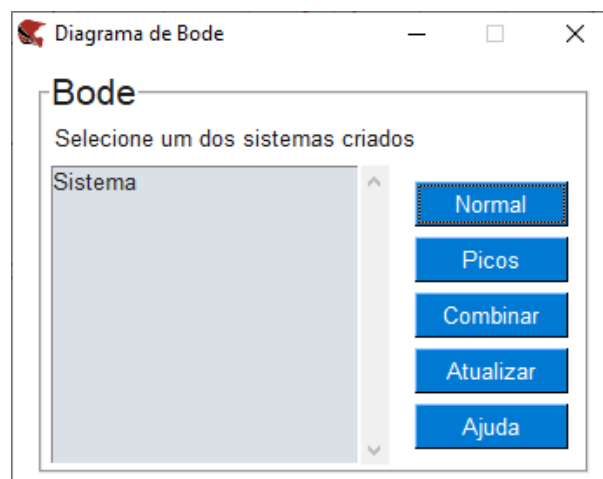


Fonte: Autor.

#### 4.4 DIAGRAMA DE BODE

Com o objetivo de criar diagramas Bode, o próximo módulo tem sua interface ilustrada pela Figura 61, e nele é possível gerar a visualização do diagrama convencional, com entrada apenas na roda dianteira esquerda e saída de deslocamento equivalente na massa suspensa em uma posição acima da roda.

Figura 61 – Interface da janela do gerador de diagramas Bode.



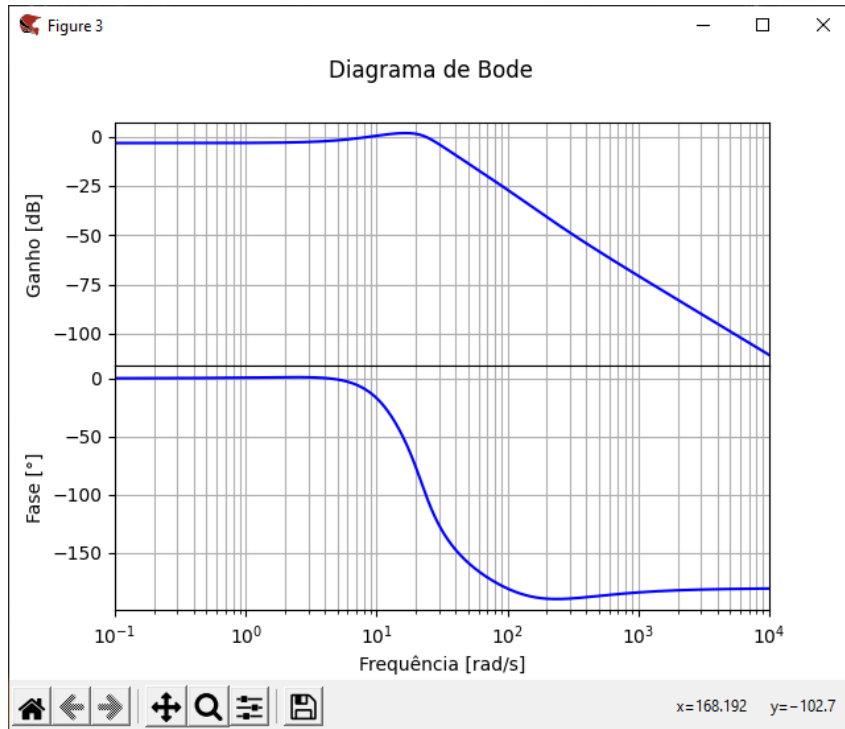
Fonte: Autor.

A primeira opção irá criar um diagrama de Bode (curvas de Resposta em Frequência), ilustrado na Figura 62a, com o uso dos coeficientes de amortecimento fornecidos durante a criação do sistema. Já com a segunda opção, é possível gerar um diagrama para o mesmo sistema, mas considerando os coeficientes de amortecimento zerados, conforme

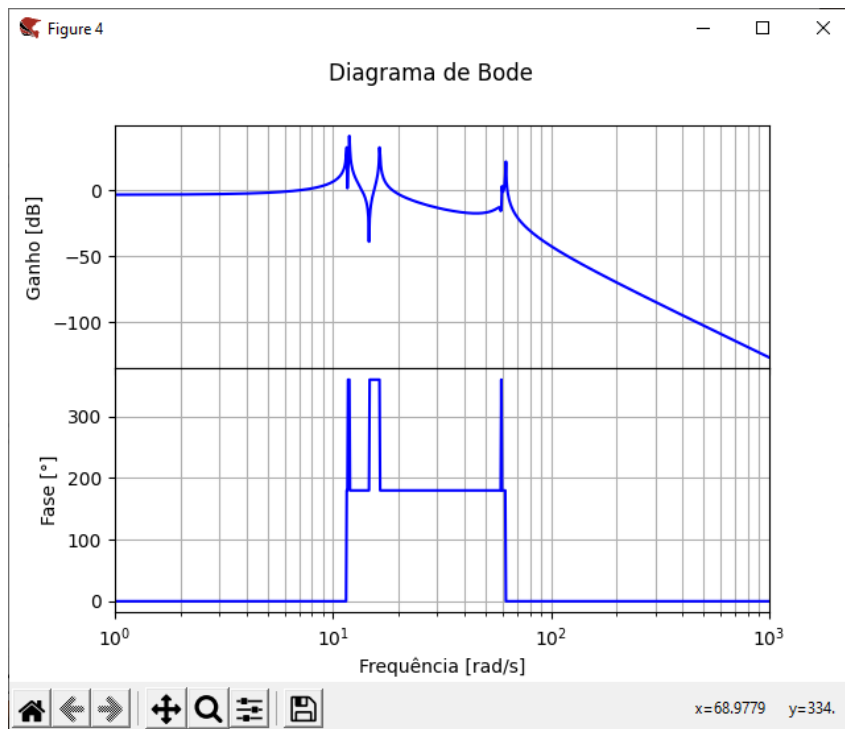
observado na Figura 62b. A finalidade de tal estudo é destacar a localização dos picos de ressonância do sistema.

Figura 62 – Diagrama de Bode gerados pelo programa

(a) Considerando coeficientes de amortecimento fornecidos pelo usuário.



(b) Considerando coeficientes de amortecimento zerados.

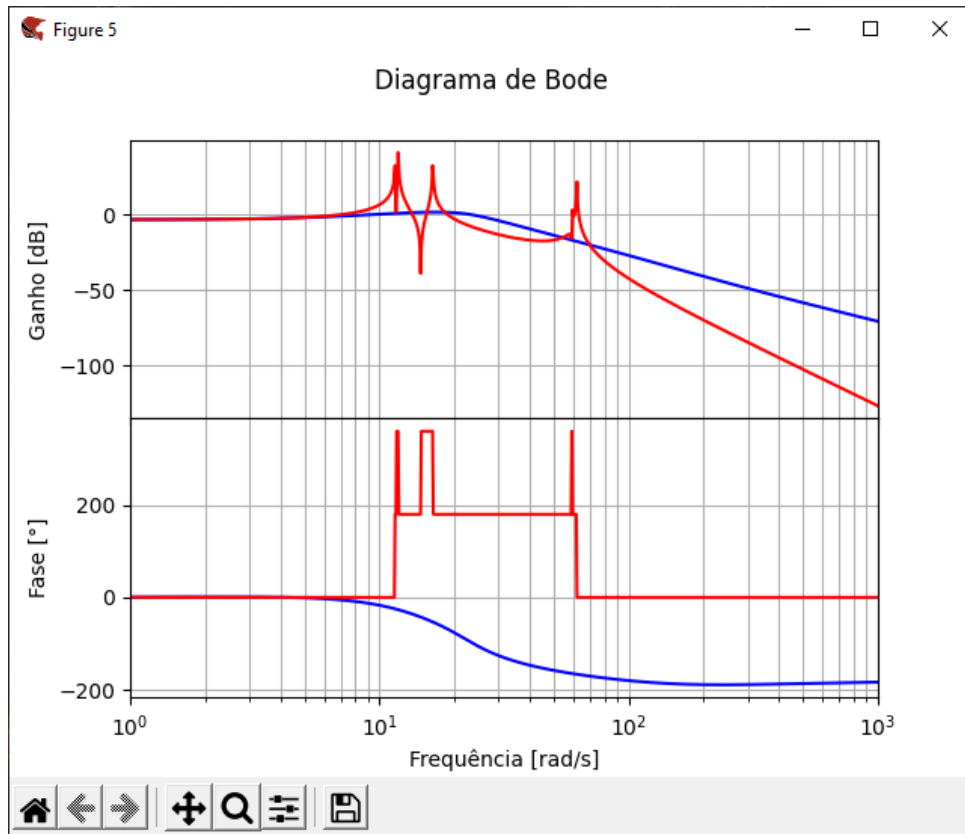


Fonte: Autor.

Por fim, a opção “Combinar” cria uma visualização combinada entre os *plots*

anteriores, como visto na Figura 63. Nela é possível observar a diferença entre a as magnitudes da Resposta em frequência e, de forma clara, observar como o amortecimento atenua os modos de vibrar do sistema.

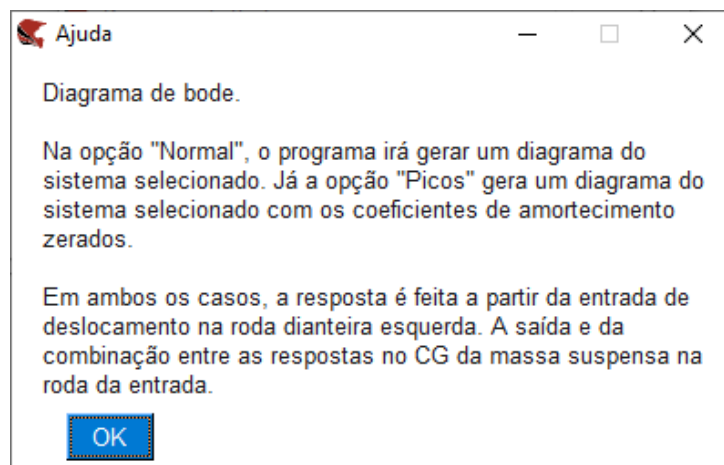
Figura 63 – Combinação entre o *plot* dos diagramas gerados anteriormente.



Fonte: Autor.

Por meio da opção “Ajuda” é possível obter um breve resumo das funcionalidades da janela, conforme apresentado na Figura 64.

Figura 64 – Janela de ajuda do gerador de diagramas Bode.

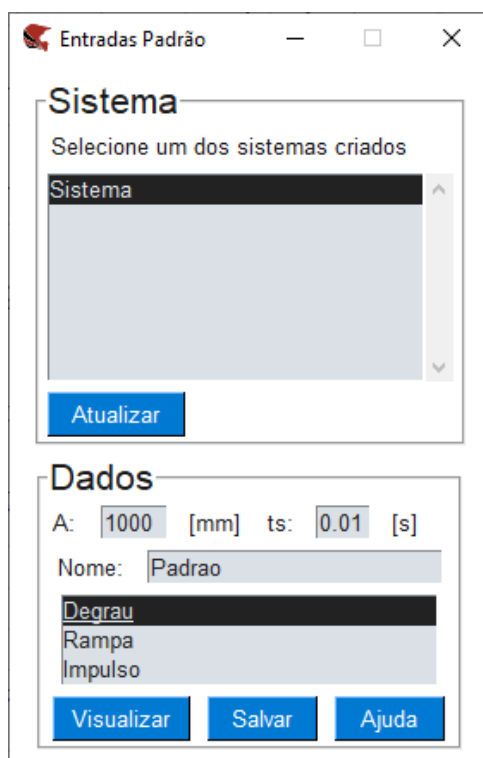


Fonte: Autor.

## 4.5 ENTRADAS PADRÃO

A interface denominada “Entradas padrão”, ilustrada na Figura 65, permite a aplicação das entradas degrau, rampa e impulso, que são as mais utilizadas em análises preliminares de sistemas dinâmicos. A janela desenvolvida conta com a opção da escolha do sistema para a análise, o tipo de entrada que será aplicada, o passo no tempo (tempo de amostragem) e a amplitude da entrada. A amplitude da entrada degrau corresponde ao valor que a entrada vai assumir; a amplitude da entrada rampa corresponde à inclinação da reta e a amplitude da entrada impulso corresponde à área abaixo da função de impulso de entrada.

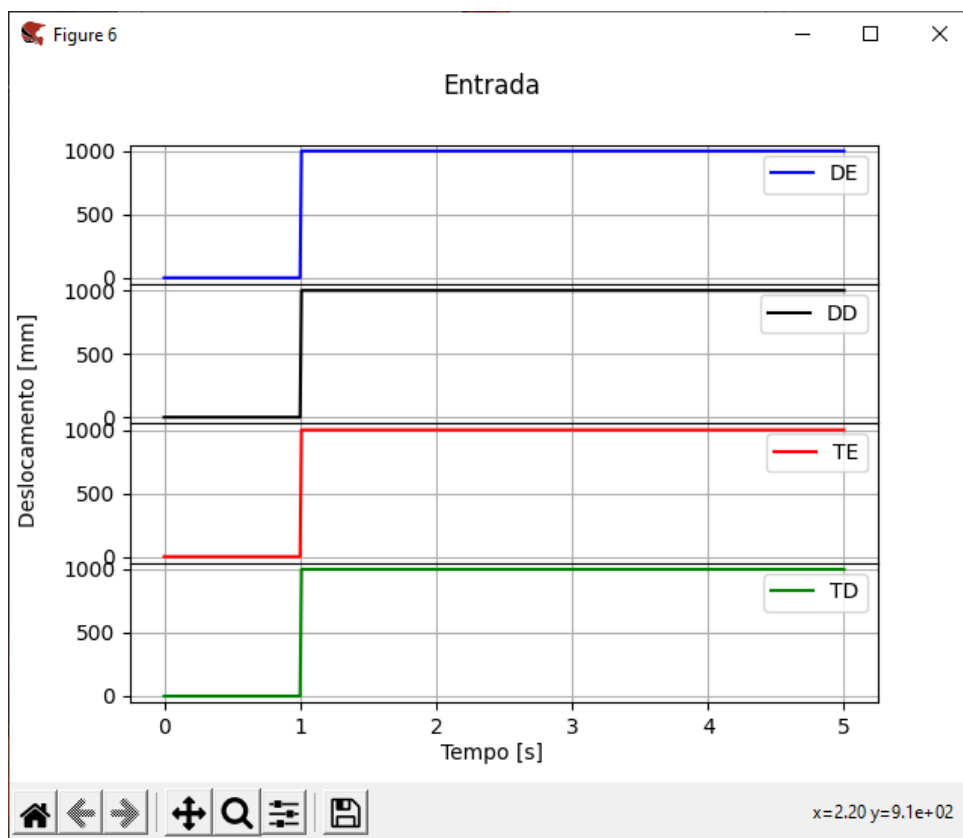
Figura 65 – Janela para aplicação das entradas padrão.



Fonte: Autor.

Ao selecionar o tipo de entrada, por meio da opção “Visualizar”, é possível obter uma visualização do formato da entrada a ser aplicada por cada roda, conforme a Figura 66.

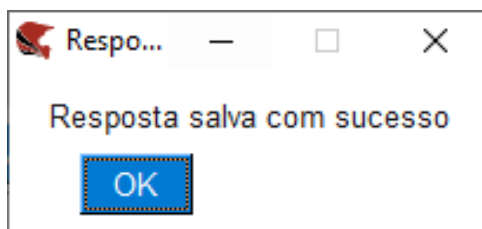
Figura 66 – Entrada degrau aplicada pelo programa.



Fonte: Autor.

Em seguida, ao realizar simulação, por meio do uso da opção “Salvar”, o programa irá imprimir uma mensagem de sucesso, conforme a Figura 67, caso a simulação não encontre nenhum erro.

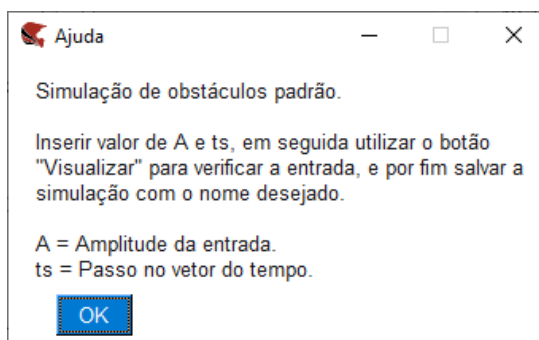
Figura 67 – Confirmação da simulação de uma entrada padrão.



Fonte: Autor.

Por fim, o módulo também conta com a opção “Ajuda” que irá imprimir uma janela, representada pela Figura 68, com instruções de como realizar a simulação.

Figura 68 – Interface da opção de ajuda para entradas padrão.

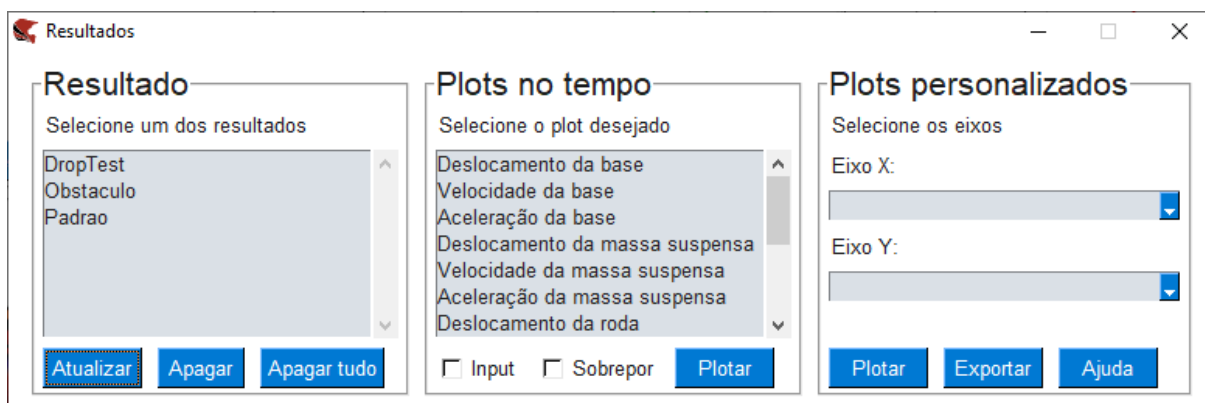


Fonte: Autor.

#### 4.6 “PLOTAR” RESULTADOS

Finalmente, para a análise de resultados, utiliza-se o módulo “Plotar resultados”, visto na Figura 69. Nele é possível escolher a simulação desejada para obter respostas no tempo, *plots* personalizados ou exportar todos os dados.

Figura 69 – Janela do módulo de “plotar” resultados.



Fonte: Autor.

Os resultados no tempo podem ser plotados segundo os parâmetros listados a seguir:

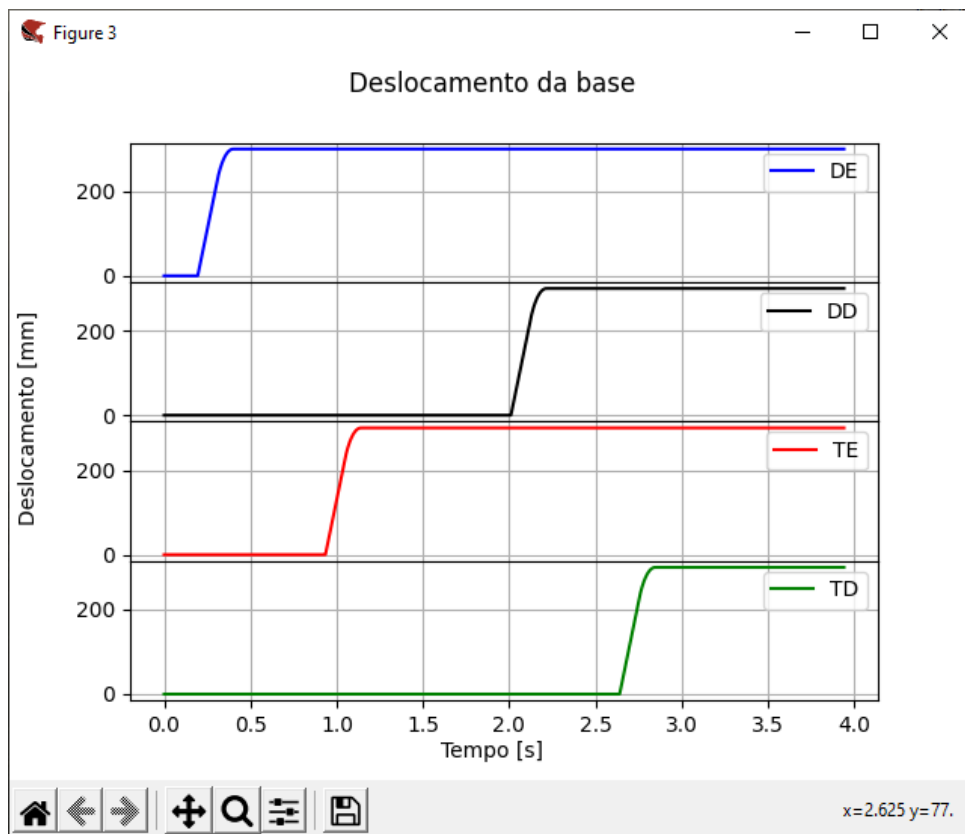
- Deslocamento da base;
- Velocidade da base;
- Aceleração da base;
- Deslocamento da massa suspensa;
- Velocidade da massa suspensa;
- Aceleração da massa suspensa;
- Deslocamento da roda;
- Velocidade da roda;
- Aceleração da roda;
- Deslocamento do centro de gravidade (CG);

- Velocidade do centro de gravidade (CG);
- Aceleração do centro de gravidade (CG);
- Força na roda;
- Curso do amortecedor.

Com base nesses parâmetros, considera-se que: a) as velocidades e acelerações são obtidas por meio da integração numérica dos gráficos de deslocamento no tempo; b) as forças nas rodas são obtidas por meio da multiplicação das respectivas massas não suspensas pelas acelerações; c) os cursos dos amortecedores são obtidos por meio da subtração dos respectivos deslocamentos da massa suspensa pelos das rodas e divididos pelas razões de instalação.

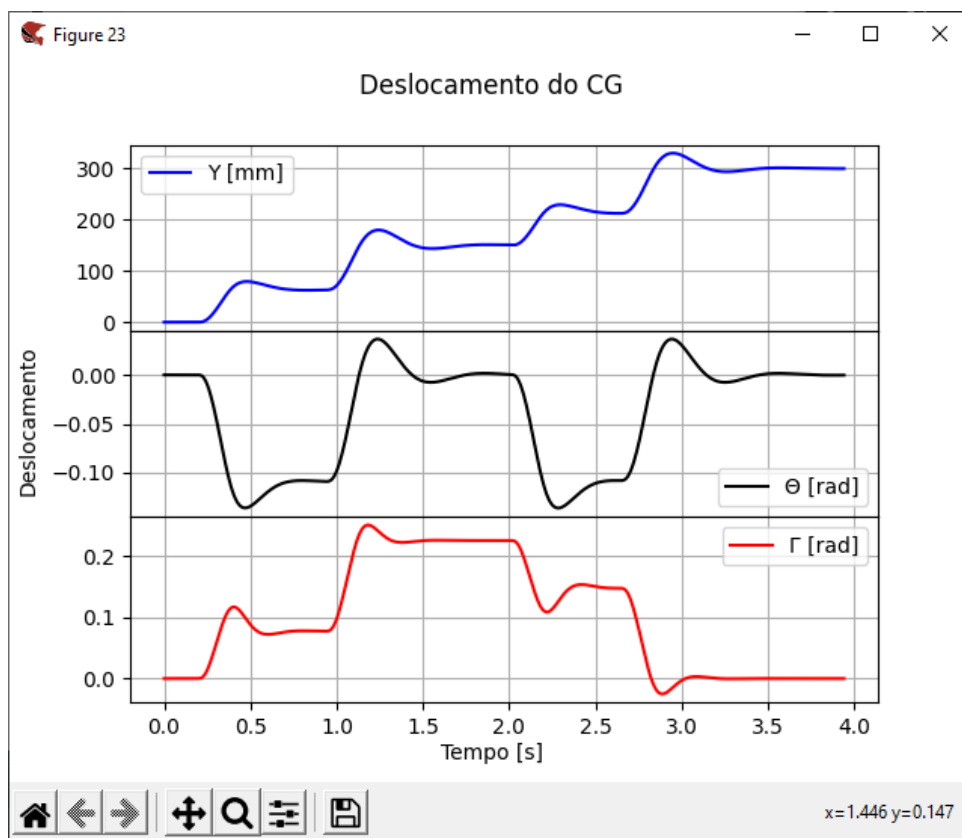
Ao selecionar o *plot* desejado e escolher a opção “Plotar”, obtém-se sua visualização. Na Figura 72, tem-se a entrada imposta em cada uma das rodas em função do tempo, em que o ângulo  $\alpha$  utilizado foi de 70 graus, e na Figura 71, observa-se a resposta no tempo do deslocamento vertical do CG e os ângulos de arfagem e rolagem.

Figura 70 – Visualização do *plot* das entradas no tempo.



Fonte: Autor.



Figura 71 – Visualização do *plot* das saídas do CG no tempo.

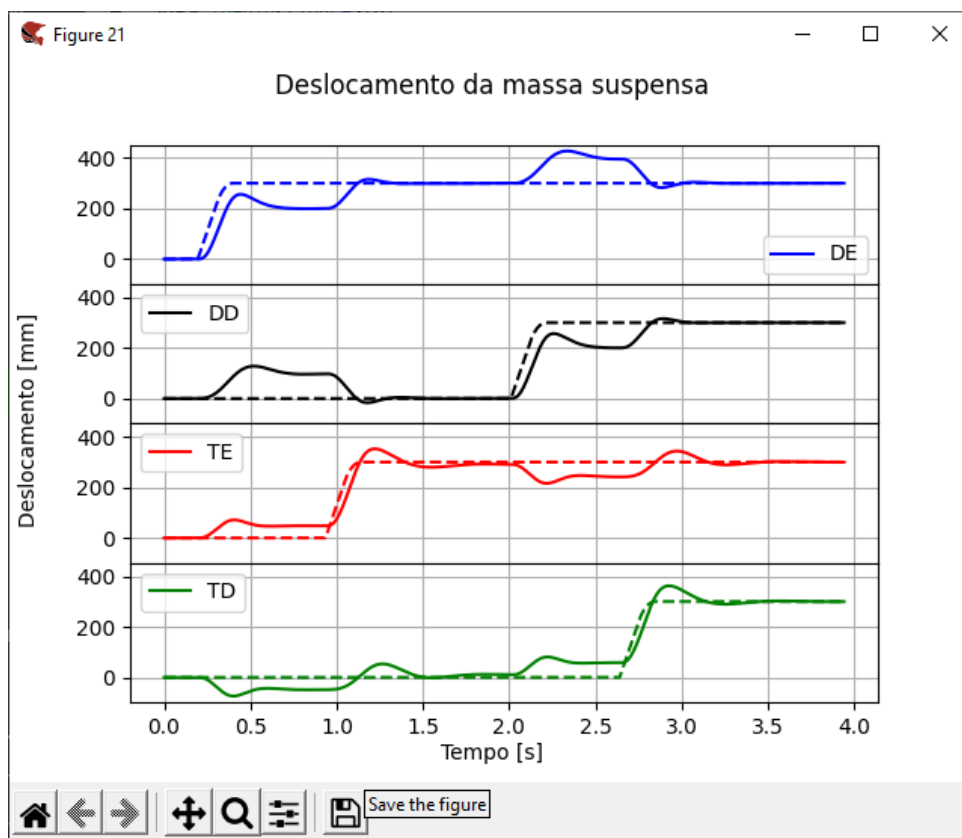
Fonte: Autor.

Por meio das respostas das Figuras 72 e 71 é possível realizar uma verificação do modelo. A entrada é um degrau de 300 mm e ocorre de forma intercalada para cada uma das rodas, na seguinte ordem: 1) roda Dianteira Esquerda (DE); 2) roda Traseira Esquerda (TE); 3) roda Dianteira Direita (DD); 4) roda Traseira Direita (TD).

Desse modo, é possível observar que o valor da resposta vertical do centro de gravidade avança na forma de “degraus” e, como, nesse caso, o centro de gravidade, visto no plano frontal, encontra-se exatamente na metade do veículo. Tal como esperado, constata-se que no tempo de 1,9 s ela equivale ao valor de 150 mm, que é metade do tamanho do degrau.

Há também a opção de traçar a resposta junto à entrada aplicada em cada roda. Para tanto, deve-se utilizar a caixa de seleção “*Input*”. Pela visualização da Figura 72, a qual contempla o deslocamento da massa suspensa logo acima das rodas (deslocamentos nos “quatro cantos” da massa suspensa), é possível verificar uma linha tracejada, a qual representa a entrada, e a linha sólida, representando a saída.

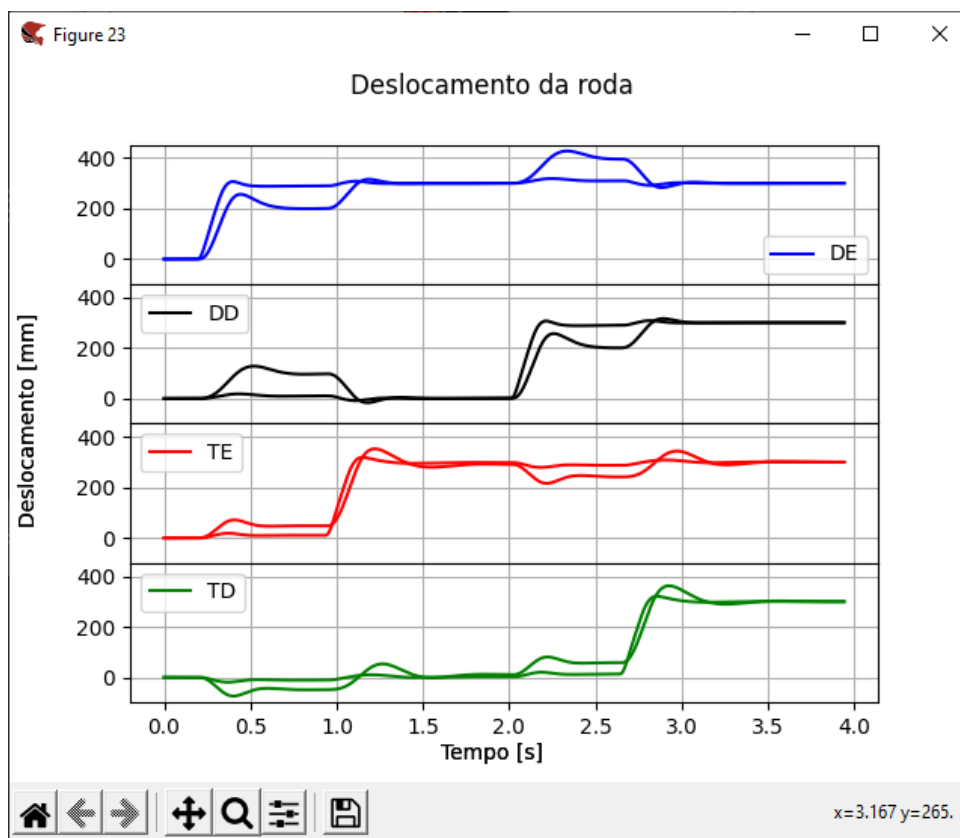
Figura 72 – Gráfico do deslocamento da massa suspensa e entrada na roda.



Fonte: Autor.

A opção de “Sobrepor” permite adicionar vários *plots* à mesma figura para casos onde se torna interessante realizar o comparativo entre dois ou mais resultados, representado pela Figura 73, que apresenta os dados de deslocamento da roda e da massa suspensa. É importante ressaltar que, nesse modo, o programa desenvolvido não identifica qual curva está relacionada à cada saída. Assim, não é recomendado que o usuário tente realizar *plots* com tipos de unidade diferentes (deslocamento angular e linear por exemplo), pois a escala do eixo Y da figura se tornará não representativa.

Figura 73 – Gráficos do deslocamento da roda e da massa suspensa sobrepostos.



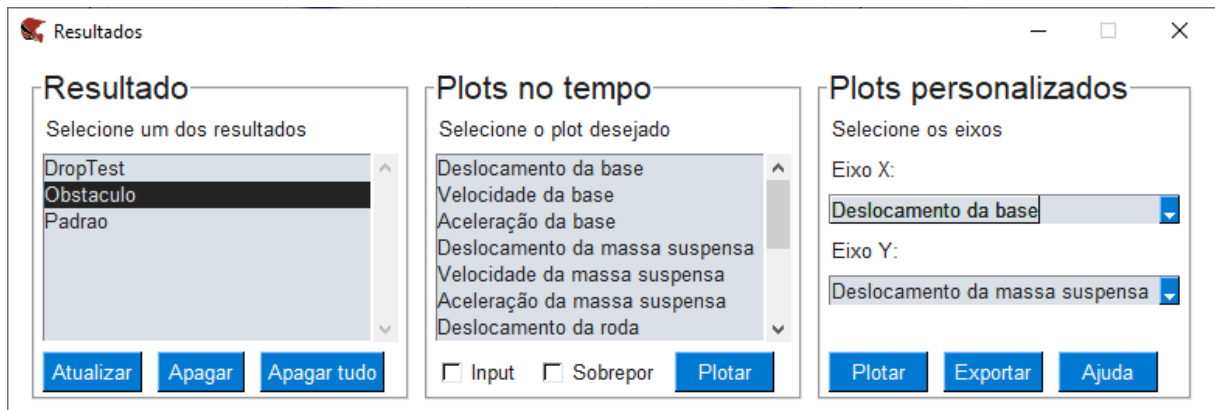
Fonte: Autor.

A opção “Plots personalizados” permite escolher os dados que serão vistos em cada um dos eixos. Nesse caso, as variáveis que podem ser utilizadas são:

- Deslocamento da base;
- Velocidade da base;
- Aceleração da base;
- Deslocamento da massa suspensa;
- Velocidade da massa suspensa;
- Aceleração da massa suspensa;
- Deslocamento da roda;
- Velocidade da roda;
- Aceleração da roda;
- Força na roda;
- Curso do amortecedor.

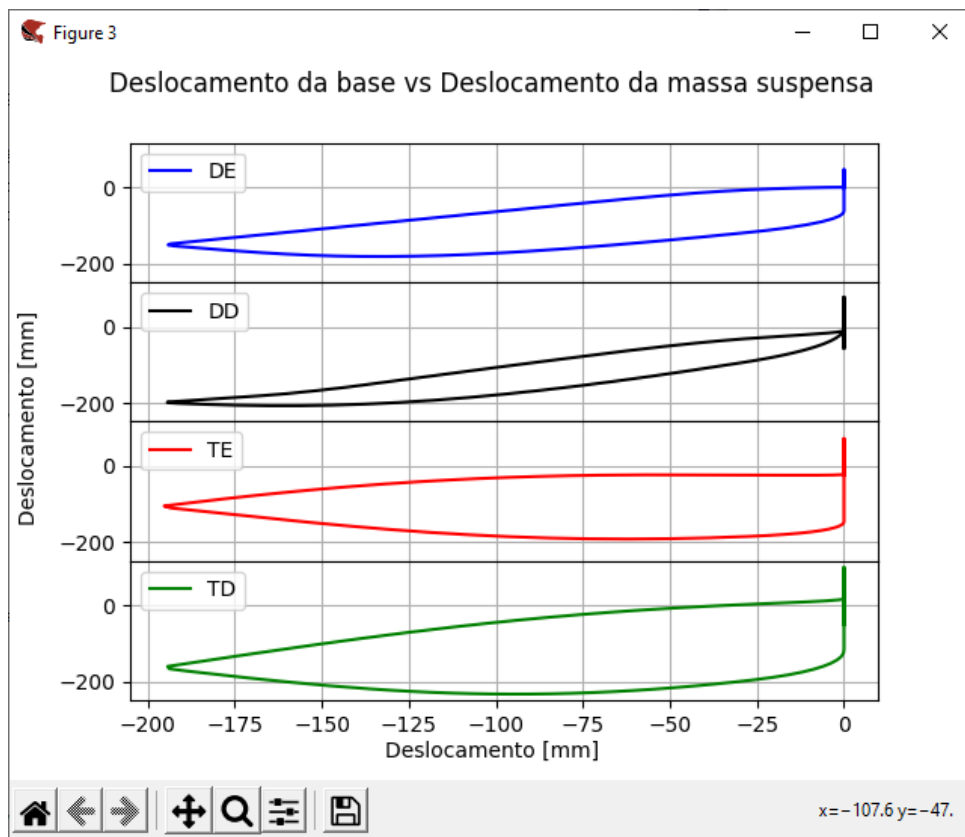
Os *plots* do CG foram excluídos da seleção, pois não são compatíveis com o restante. Na Figura 74 são selecionados no eixo X, o deslocamento da base, e no eixo Y, o deslocamento da massa suspensa, para gerar o gráfico ilustrado pela Figura 75. A partir de uma breve análise desse exemplo, em função de uma histerese maior, tem-se que o eixo da traseira apresenta uma suspensão mais macia.

Figura 74 – Seleção dos eixos para o *plot* personalizado.



Fonte: Autor.

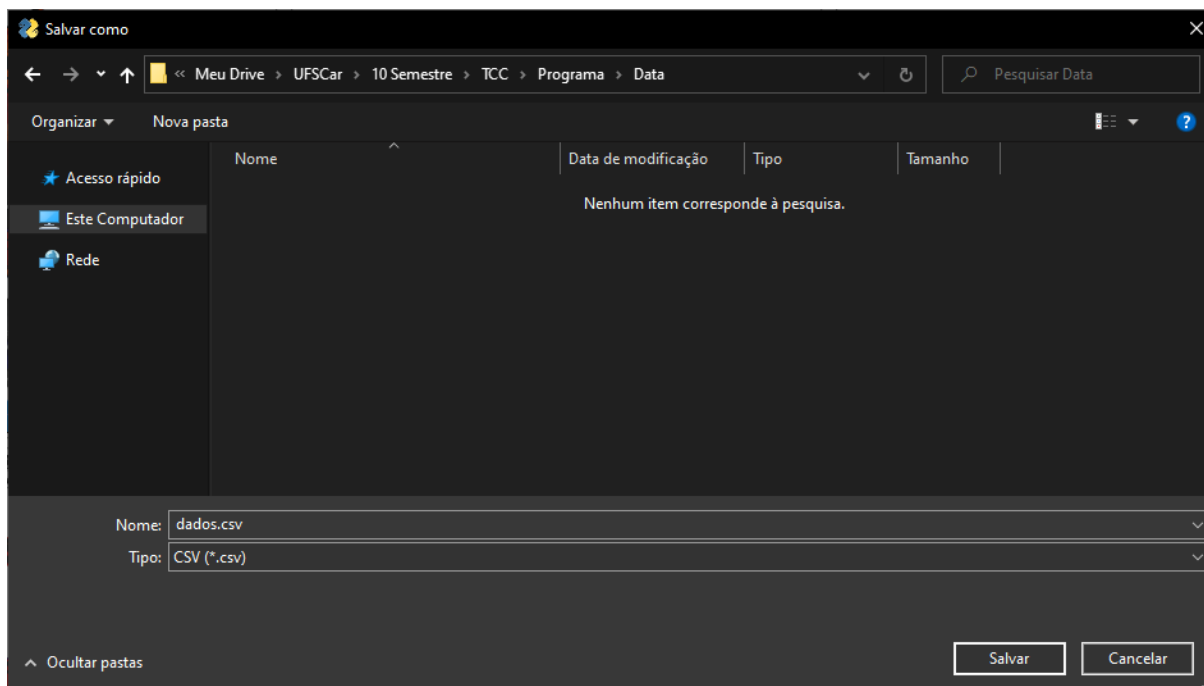
Figura 75 – *Plot* personalizado, gerado segundo a seleção da figura anterior.



Fonte: Autor.

No caso do usuário apresentar a necessidade de uma análise diferente, por meio da opção “Exportar”, é possível salvar todos os dados da simulação para um arquivo “.csv”. Ilustrada pela Figura 76, a opção abre uma janela do explorador de arquivos, no qual pode-se escolher o nome e o local onde o arquivo será salvo.

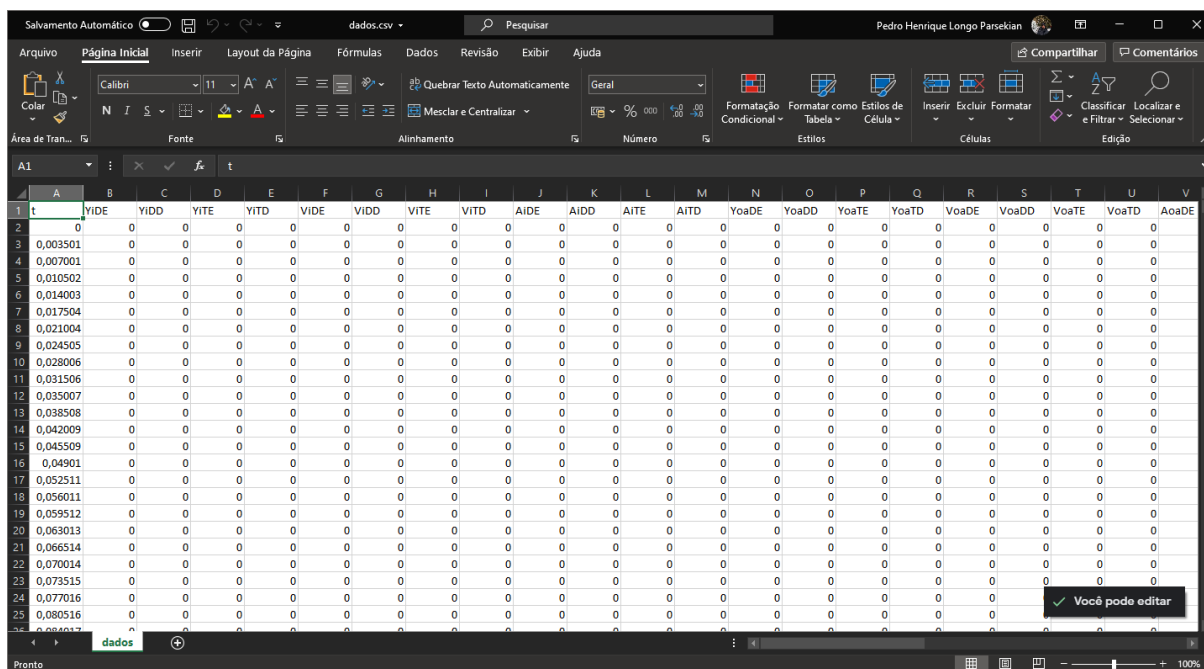
Figura 76 – Opção de salvar “.csv” no explorador de arquivos.



Fonte: Autor.

Esse arquivo pode ser aberto por meio de *softwares offices*, ilustrado pela Figura 77. Ele congrega todos os dados do CG e de cada uma das rodas, as quais são representadas pelas iniciais apresentadas na Tabela 4, somadas às terminações: “DE” (Dianteira Esquerda), “DD” (Dianteira Direita), “TE” (Traseira Esquerda), e “TD” (Traseira Direita).

Figura 77 – Arquivo exportado aberto no Microsoft Excel.



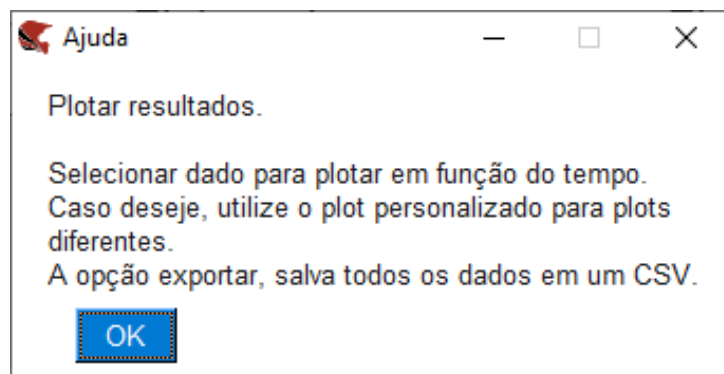
Fonte: Autor.

Tabela 4 – Descrição do início das variáveis exportadas pelo programa.

Vetor	Descrição
t	Tempo
Yi	Deslocamento da entrada
Vi	Velocidade da entrada
Ai	Aceleração da entrada
Yoa	Deslocamento da massa suspensa
Voa	Velocidade da massa suspensa
Aoa	Aceleração da massa suspensa
Yor	Deslocamento da roda
Vor	Velocidade da roda
Aor	Aceleração da roda
For	Força na roda
C	Curso do amortecedor
YocY	Deslocamento do CG
YocT	Ângulo de arfagem do CG
YocG	Ângulo de rolagem do CG
VocY	Velocidade do CG
VocT	Velocidade angular de arfagem do CG
VocG	Velocidade angular de rolagem do CG
AocY	Aceleração do CG
AocT	Aceleração angular de arfagem do CG
AocG	Aceleração angular de rolagem do CG

Por fim, por meio do uso da opção “Ajuda”, é possível ter uma breve descrição das funções da janela aberta.

Figura 78 – Janela de ajuda do modulo de resultados.



Fonte: Autor.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

Decorrente do desenvolvimento na metodologia do presente trabalho, foi possível, a partir dos equacionamentos desenvolvidos na Seção 3.1, encontrar as funções de transferência para um veículo baja modelado como um sistema Massa-Mola-Amortecedor de 7 graus de liberdade, as quais reproduzem o funcionamento da dinâmica vertical do veículo.

Em seguida, foi possível realizar a simulação de um *drop test*. Por mais que sua modelagem foi realizada de maneira simplificada, a qual desconsidera a energia do impacto do pneu com o terreno bem como a questão de desconectar o sistema do chão (*ground*), os resultados provenientes da simulação já garantem um primeiro entendimento sobre os esforços sofridos pelos componentes da suspensão.

Além disso, a criação de obstáculos personalizados com diversas opções permitiu reproduzir de maneira bastante fiel o perfil de entrada do solo recebido pelo pneu do veículo. Isso permite que a Equipe Baja UFSCar possa realizar simulações da passagem do veículo pela grande maioria dos obstáculos encontrados nas competições.

Por fim, a interface gráfica desenvolvida proporcionou uma grande gestão de conhecimento, pois, sua implementação descartou o uso de *softwares* pagos e o conhecimento específico em programação requerido. Por meio das ferramentas implementadas, o usuário consegue realizar grande parte dos estudos necessários relacionados à dinâmica vertical do protótipo.

Entretanto, para uma maior confiabilidade nos resultados das simulações, ainda é preciso realizar o processo de validação do modelo. Esta etapa pode ser realizada por meio de testes experimentais, realizados tanto no domínio do tempo, com a comparação da resposta temporal do sistema submetido à obstáculos simulados e reais, quanto no domínio da frequência, por meio da estimativa de Funções de Resposta em Frequência obtidas experimentalmente com a utilização de um *shaker* acoplado em uma das rodas (plataforma) para aplicação da excitação e acelerômetros para medição da resposta do sistema à entrada aplicada.

No contexto geral, a utilização de programação em *python* para a criação do *software* proporcionou um resultado além do esperado. Por se tratar de uma linguagem de programação *open source*, diversos tipos de biblioteca são disponibilizadas pela comunidade. Isso proporcionou a criação de um programa com muitas funcionalidades, que facilitaram e reduziram o tempo do desenvolvimento do projeto de suspensão do veículo minibaja dentro da equipe.

Ademais, como sugestão para trabalhos futuros:

- Validação do modelo criado, pois devido a utilização de hipóteses durante a modelagem, as respostas devem ser comparadas com testes reais;
- Implementação de outros tipos de obstáculos, como por exemplo, lombadas, troncos

ou tachas.

- Modelos com utilização de duas molas em serie no amortecedor, uma com rigidez menor, para pequenas imperfeições, e outra com rigidez maior, para maiores deslocamentos.
- Criação de modelos que representem a dinâmica lateral do veículo. Como anteriormente discutido, as dinâmicas dependem uma da outra, e devem ser estudadas de maneira conjunta. Dessa forma, para que o aplicativo desenvolvido tenha um impacto ainda maior, é salutar que exista um módulo no qual são realizados estudos de dinâmica lateral;



## REFERÊNCIAS

- AUGUSTO, V. Dimensionamento E Calibração De Suspensão Tipo Duplo a Para Veículo Mini Baja. 2006.
- BARBOSA, M. F.; SILVA, M. M. d. Modelagem multicorpos de um veículo baja sae e estudo de sua dinâmica vertical. **Escola de Engenharia de São Carlos**, 2016.
- CUONG, D. M. et al. Study on the Vertical Stiffness and Damping Coefficient of Tractor Tire Using Semi-Empirical Model. **Hue University Journal of Science: Agriculture and Rural Development**, v. 83, n. 5, 2013. ISSN 2588-1191.
- DINIZ, D. D. S.; SILVA, A. A. Estudo Da Dinâmica Vertical Em Suspensão Duplo a De Um Veículo Off-Road Tipo Baja. **Universidade Federal De Campina Grande**, p. 134, 2014.
- FELÍCIO, L. C. **Modelagem da Dinamica de Sistemas e Estudo da Resposta**. [S.l.]: RiMa Editora, 2010. 568 p. ISBN 978-85-7656-169-9.
- GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. [S.l.]: SAE International, 1992. 519 p. ISBN 978-1-56091-199-9.
- JAZAR, R. N. **Vehicle dynamics: Theory and applications**. [S.l.: s.n.], 2008. 1–1015 p. ISBN 9780387742434.
- Lotus Cars. **GETTING STARTED WITH LOTUS SUSPENSION ANALYSIS**. [S.l.: s.n.], 2015.
- MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race Car Vehicle Dynamics**. Society of Automotive Engineers, Inc., 1995. ISBN 978-1-56091-526-3. Disponível em: <<https://www.sae.org/publications/books/content/r-146/>>.
- MINOZZO, R.; GOMES, H. M. AQUISIÇÃO DE FORÇAS DINÂMICAS ATUANTES NA SUSPENSÃO DIANTEIRA DE UM VEÍCULO PROTÓTIPO BAJA SAE. **Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, 2012.
- MITSCHE, M.; WALLENTOWITZ, H. **Dynamik der Kraftfahrzeuge**. 5. ed. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. 911 p. ISBN 978-3-658-05067-2. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-05068-9>>.
- MSC software. **Getting Started Using Adams/Car**. [S.l.: s.n.], 2011.
- MÜLLER, M. et al. Detailed Rigid Body Simulation with Extended Position Based Dynamics. v. 39, n. 8, 2020.
- NARIMAN-ZADEH, N. et al. Pareto optimization of a five-degree of freedom vehicle vibration model using a multi-objective uniform-diversity genetic algorithm (MUGA). **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 543–551, 2010. ISSN 09521976. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engappai.2009.08.008>>.
- NETO, A. C. Dinâmica Veicular. **Universidade de São Paulo**, 2005.

PACHECO, P. M. C. L. et al. Analysis of the transmissibility of the rear suspension of a mini-baja vehicle. **SAE Technical Papers**, n. May 2016, 2002. ISSN 26883627.

PERES, R. D. A. Projeto, Fabricação E Montagem Dos Sistemas De Suspensão De Um Protótipo Baja Off- Road. **Congresso brasileiro de engenharia de fabricação**, 2013.

RILL, G. Vehicles Dynamics. **University of Applied Sciences**, p. 200, 2009.

SAE BRASIL. Regulamento administrativo e técnico BAJA SAE Brasil - Emenda 3. p. 133, 2019.

SHOJAEEFARD, M. H.; KHALKHALI, A.; SAFARPOUR, P. E. Multi-Objective Suspension Optimization of a 5-DOF Vehicle Vibration Model Excited by Random Road Profile. **Advanced Design and Manufacturing Technology**, v. 7, n. 1, 2014.

TANIK, E.; PARLAKTAŞ, V. On the analysis of double wishbone suspension. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing**, v. 9, n. 3, p. 1–10, 2015. ISSN 18813054.