



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## **Um Princípio de Tangência e Aplicações**

Raúl Armando Gómez Tarazona

São Carlos, SP, Brasil

Novembro de 2021



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

## **Um Princípio de Tangência e Aplicações**

Raúl Armando Gómez Tarazona

Orientador: Luiz Roberto Hartmann Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos, SP, Brasil

Novembro de 2021



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Raúl Armando Gómez Tarazona, realizada em 17/12/2021.

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto (UFSCar)

Prof. Dr. Francisco Xavier Fontenele Neto (UFF)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*A minha querida irmã Patrícia (in memoriam),  
que esta presente em todos meus passos,  
e me ensinou a beleza da matemática  
quando eu ainda não sabia ler.*

---

# Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades, conquistas e por ser o criador do céu e da terra e de tudo que habita neste mundo e dar a vida para o ser humano construir sua história. A pessoa que mais tenho admiração, gratidão e respeito diante construção deste trabalho e por minha formação como mestre, é a meu orientador Luiz Roberto Hartmann Junior, que se comprometeu de forma paciente e atenciosa soube guiar meus passos e fazer meus sonhos tornarem realidade. Muito obrigado por seus sábios conselhos, pela confiança, paciência e bom humor em todas nossas conversas. Serei eternamente grato com você.

Agradeço aos meus pais Raúl e Caridad Euníce, aos meus irmãos Jhon Jairo, Daniela Saareth e Karen Lisseth, aos meus sobrinhos Allison Valentina, Daily Giovanna, Silvia Juliana, Dilan Giovanni, Miguel Ángel, Edgar Andrés, Matias, ao meu cunhado Giovanni, aos meus primos e tios, pela capacidade de me transmitir forças para conseguir seguir em frente e acreditar que tudo no final é resolvido.

Um agradecimento mais que especial ao meu amigo Michael Alexánder Rincón Villamizar pelo exemplo de amizade demonstrado ao longo desses anos e por ter acreditado em mim.

Agradeço à coordenação e professores do PPGM/USFCar que contribuíram na minha formação. Em especial aos professores Edivaldo Lopes dos Santos, Bruna Oréfica Okamoto e José Nazareno Vieira Gomes pelas conversas de apoio e incentivo.

Aos meus colegas de mestrado, em especial a Amanda Santos Araújo, Matheus Favero de Moraes e Vitória Soares dos Santos, pelas nossas longas e árduas jornadas de estudo.

Aos meus amigos Álvaro Almeida Gómez, Vladimir Angulo Castillo, Gabriel Andre Asmat Medina, Sergio Andrés Pérez León, Telmo Irineo Acosta Vellozo, Manuel Stalin Torres Gonzales e Rodiak Nicolai Figueroa López, obrigado pela amizade.

Aos meus professores de graduação Rafael Antonio Castro Triana, Ronald Eduardo Paternina

Salgado e Elder Jesús Villamizar Roa por acreditar em mim.

Aos meus amigos John Jairo Duarte Durán, Diego Durán Ruiz, Jorge Manuel Barrios Sánchez, Fabiola Vásquez Carmona, Jerson Alexander Rojas, Michael Andrés Quintero Mejía, Sergio Andres Prada Cáceres, Ledyz Cuesta Herrera, Yeisson Ricardo Mendoza Castellanos e Hugo Alexander Torres Mantilla que torceram por mim desde o início.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro durante todo o mestrado, pois sem ele este trabalho não teria se concretizado. Em fim, agradeço a todas as pessoas que aqui não foram citadas mas que me ajudaram de alguma forma na realização deste sonho.

Deus abençoe todos vocês.

---

# Resumo

---

Apresentamos ferramentas, como um princípio do máximo para operadores elípticos e propriedades dos polinômios  $a$ -hiperbólicos, para estudar um princípio de tangência entre duas hipersuperfícies com curvaturas  $r$ -médias de uma variedade Riemanniana, que dá condições geométricas suficientes, para que essas hipersuperfícies coincidam em uma vizinhança de um ponto de tangência. Também estudamos o problema de calcular as curvaturas  $r$ -médias da esfera geodésica, para usar-lo nas aplicações do princípio de tangência.

**Palavras-chave:** Variedade Riemanniana, Hipersuperfície, Curvatura  $r$ -média, Esfera geodésica.

---

# Abstract

---

We present tools, such as a maximum principle for elliptic functions and properties of  $a$ -hyperbolic polynomials, to study a tangency principle between two hypersurfaces with  $r$ -mean curvatures of a Riemannian manifold, which gives sufficient geometric conditions for these hypersurfaces to coincide in a neighborhood of a tangency point. We also study the problem of calculating the  $r$ -mean curvatures of the geodesic sphere, to use it in applications of the tangency principle.

**Keywords:** Riemannian manifold, Hypersurfaces,  $r$ -mean curvature, Geodesic sphere.



---

# Sumário

---

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 Resultados de Álgebra Linear . . . . .	7
1.2 Resultados da Teoria de Subvariedades . . . . .	14
1.3 Curvatura $r$ -média da esfera geodésica . . . . .	16
1.4 Operadores elípticos e operadores uniformemente elípticos . . . . .	19
1.5 Polinômios $a$ -Hiperbólicos . . . . .	23
<b>2 Curvatura <math>r</math>-média e Elipticidade</b>	<b>30</b>
2.1 Curvatura $r$ -média . . . . .	30
2.2 Elipticidade . . . . .	35
<b>3 Um Princípio de Tangência e Aplicações</b>	<b>41</b>
3.1 Resultados Auxiliares . . . . .	41
3.2 Princípio de Tangência . . . . .	43
3.3 Aplicações . . . . .	48
3.3.1 A maior esfera geodésica contida numa hipersuperfície . . . . .	48
3.3.2 Hipersuperfícies contidas em bolas geodésicas . . . . .	50
3.3.3 Uma coincidência da esfera geodésica e uma isometria no espaço forma . . . . .	53
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

---

# Lista de Símbolos

---

- $\delta_{ij}$ : o delta de Kronecker;
- $M_n(\mathbb{R})$ : o espaço das matrizes  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{R}$ ;
- $S_n(U)$ : o espaço das matrizes simétricas  $n \times n$  com entradas num subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ ;
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ;
- $C(U)$ : o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas num subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ;
- $C^2(U)$ : o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas num subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , com primeira e segunda derivada contínua em  $U$ ;
- $\text{Cut}(p_0)$ : o cut locus do ponto  $p_0$ ;
- $\mathcal{O}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$  é chamado do cone positivo;
- $\overline{B_\rho(p_0)}$ : a bola geodésica fechada com centro em  $p_0$  e raio  $\rho$  no espaço ambiente;
- $Q_c^n$ : o espaço forma  $n$ -dimensional simplesmente conexo, com curvatura seccional constante  $c$ ;
- $d_{p_0}(\cdot)$ : a função distância Riemanniana de  $p_0$ , definida numa variedade Riemanniana que contém o ponto  $p_0$ ;
- $\mu_c$ : a função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por

$$\mu_c(t) = \begin{cases} t\sqrt{-c} \coth(t\sqrt{-c}), & \text{se } c < 0, \\ 1, & \text{se } c = 0, \\ t\sqrt{c} \cot(t\sqrt{c}), & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

---

# Introdução

---

Na Geometria Riemanniana, princípios de tangência apresentam condições para que duas hiper-superfícies tangentes coincidam. O primeiro princípio de tangência pode ser considerado datado do final do século XVII a partir do conceito de curvatura de uma curva plana, feito pelos criadores do cálculo infinitesimal: Leibniz e Newton em seus trabalhos [1] e [2] respectivamente. Lá eles definem a curvatura de uma curva num ponto  $p$ , como o inverso do raio do círculo osculador:  $k(p) = 1/r(p)$ . Com isso, um princípio de tangência em  $\mathbb{R}^2$  poderia ser:

**Exemplo 0.1.** Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curvas em  $\mathbb{R}^2$  que são côncavas na mesma direção, tais que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são tangentes num ponto  $p$ ,  $\gamma_1$  está acima de  $\gamma_2$  localmente e  $k_2(p) > k_1(p)$ . Então  $\gamma_1$  coincide com  $\gamma_2$  numa vizinhança do ponto  $p$ .

As ideias iniciais de Leibniz e Newton sobre curvatura, depois de uns anos foram aprimoradas por Leonardo Euler. Além disso, Alexis Claude Clairaut fez um trabalho sobre curvas espaciais, que foi formalizado por Michel Ange Lancret. Lancret foi a primeira pessoa em desenvolver uma teoria sistemática das curvas espaciais após Euler, mas a formalização definitiva foi feita por Cauchy, Frenet e Serret. Em 1760, Euler inaugurou a Geometria Diferencial com seu trabalho [3] que apresentou à Academia de Ciências de Berlim, este trabalho foi publicado em 1767 e fez uma contribuição decisiva à teoria de superfícies apresentando as curvaturas principais de uma superfície num ponto. Em 1827, Carl Friedrich Gauss apresentou na Sociedade Científica Real de Gotinga, uma forma de medir curvaturas usando a conhecida Aplicação de Gauss. De resultados obtidos previamente por Euler, Gauss também introduz a curvatura chamada Gaussiana. E, uns poucos anos antes de Euler apresentar aqueles resultados, Sophie Germain introduz a curvatura média. Para mais informação sobre a história da curvatura veja [4].

No estudo de curvaturas, os princípios do máximo desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de princípios de tangência na geometria. Por exemplo, os princípios do máximo aplicados no infinito, estudam o comportamento de superfícies com curvatura média constante, quando o ponto de tangência entre duas superfícies está no infinito:

**Exemplo 0.2.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies conexas propriamente mergulhadas em  $\mathbb{R}^3$  com a mesma curvatura média constante  $H > 0$ , tais que  $S_2$  pertence à componente conexa de  $\mathbb{R}^3 \setminus S_1$  onde aponta o vetor de curvatura média de  $S_1$ . Então  $S_1 = S_2$ . A prova deste princípio pode ser vista em [5, pág. 1436].

Um princípio do máximo clássico na geometria diferencial, é o princípio do máximo de Hopf para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , com curvaturas médias constantes diferentes de zero. Ele afirma que se duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são tangentes num ponto interior  $p \in S_1 \cap S_2$ , de maneira que uma dessas superfícies está de um lado da outra, e além disso seus vetores de curvatura média no ponto  $p$  são os mesmos, então  $S_1$  e  $S_2$  coincidem numa vizinhança de  $p$ . Usando este resultado, Alexandrov provou em 1956 que as únicas superfícies compactas mergulhadas em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante são esferas (redondas).

Para hipersuperfícies de dimensões maiores e ambientes arbitrários vejamos o seguinte:

Consideremos a aplicação exponencial usual  $\exp : TN \rightarrow N$  definida numa variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ . Se  $M^n$  é uma hipersuperfície de  $N^{n+1}$ , dado  $p \in M$  e fixado um vetor unitário  $\eta_0$  normal a  $M$  em  $p$ , definimos uma parametrização  $\varphi$  numa vizinhança de  $M$ , contendo o ponto  $p$  e contida em uma bola normal de  $N$  como

$$\begin{aligned} \varphi : W &\longrightarrow M^n \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \exp_p(x + \mu(x)\eta_0), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $W$  é uma vizinhança de  $0_p$  em  $T_pM$  e  $\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que satisfaz  $\mu(0_p) = 0$ . Note que a função  $\mu$  é única. De fato, suponhamos que existe outra função  $\bar{\mu} : W \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz  $\varphi(x) = \exp_p(x + \bar{\mu}(x)\eta_0)$  tal que  $\bar{\mu}(0_p) = 0$ . Então

$$\exp_p(x + \mu(x)\eta_0) = \exp_p(x + \bar{\mu}(x)\eta_0). \quad (2)$$

Sejam  $U, V$  duas vizinhanças onde  $\exp_p$  é um difeomorfismo, então  $\exp_p$  é uma bijeção em  $U$  e  $V$ , e de (2) segue-se que

$$x + \mu(x)\eta_0 = x + \bar{\mu}(x)\eta_0 \Rightarrow \mu(x) = \bar{\mu}(x)$$

para todo  $x$  em  $U \cap V$ . Note que, se  $x_0 \in U \cap V$  então  $\mu(x_0) = \bar{\mu}(x_0)$ , portanto tomando  $W = U \cap V$  obtemos que  $\mu(x) = \bar{\mu}(x)$  para todo  $x \in W$ , ou seja  $\mu$  é única. Agora, consideremos uma orientação local  $\eta : W \rightarrow T_{\varphi(W)}^\perp M$  de  $M$  tal que  $\eta(0_p) = \eta_0$ , e seja  $A_{\eta(x)}$  o operador de forma associado a  $M$  na direção  $\eta(x)$ . Se  $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$  são as curvaturas principais em  $x \in W$  e se denotamos por  $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$  o vetor curvatura principal em  $x \in W$ , as curvaturas  $r$ -médias  $H_r$  de  $M$  para  $r = 1, 2, \dots, n$  estão definidas por

$$H_r(x) := \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r(\lambda(x)), \quad (3)$$

onde  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função simétrica  $r$ -elementar definida por

$$\sigma_r(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_r}. \quad (4)$$

No caso de que  $r = 0$  ou  $r = k > n$ , estão definidos  $\sigma_0(z_1, z_2, \dots, z_n) = 1$  e  $\sigma_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  respectivamente. Além disso, para  $r = 1, 2, \dots, n$  se satisfaz

$$\sigma_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n + \sigma_r(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (5)$$

Observe que

- Se  $r = 1$  e  $n = 2$ ,  $H_1(x) = \frac{1}{2}[\lambda_1(x) + \lambda_2(x)]$  é a curvatura média.
- Se  $r = 2$  e  $n = 2$ ,  $H_2(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$  é a curvatura gaussiana.
- Se  $r = 1$  e  $n = 3$ ,  $H_1(x) = \frac{1}{3}[\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)]$  é a curvatura média 3-dimensional.
- Se  $r = 2$  e  $n = 3$ ,  $H_2(x) = \frac{1}{3}[\lambda_1(x)\lambda_2(x) + \lambda_1(x)\lambda_3(x) + \lambda_2(x)\lambda_3(x)]$ .
- Se  $r = n$ ,  $H_n(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x) \cdots \lambda_n(x)$  é a curvatura Gauss-Kronecker.

Utilizaremos a notação de  $\Gamma_r$  para a componente conexa em  $\mathbb{R}^n$  do conjunto  $\{\sigma_r > 0\}$  que contém ao vetor  $a_0 = (1, 1, \dots, 1)$ . Na seção 1.5 estudaremos aqueles conjuntos  $\Gamma_r$ .

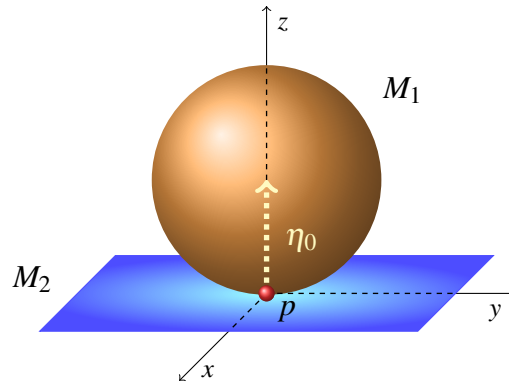
**Definição 0.3.** Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de  $N^{n+1}$  que são tangentes em  $p$ , ou seja  $T_p M_1 = T_p M_2$ . Fixado um vetor unitário  $\eta_0$  que seja normal a  $M_1^n$  em  $p$ , dizemos que  $M_1$  está acima de  $M_2$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ , se quando parametrizamos em  $M_1$  e  $M_2$  por  $\varphi^1$  e  $\varphi^2$  como em (1), as correspondentes funções  $\mu^1 : W \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mu^2 : W \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem

$$\mu^1(x) \geq \mu^2(x)$$

para todo  $x$  em uma vizinhança de zero em  $T_p M_1 = T_p M_2$ .

A definição acima é equivalente a exigir que as geodésicas de  $N^{n+1}$  que são normais na direção de  $\eta_0$  à hipersuperfície ( $T_p M_1 = T_p M_2$ ) que é totalmente geodésica em  $p$  (ou seja,  $\exp_p(W)$ ), em uma vizinhança de  $p$ , interceptem  $M_2^n$  antes de  $M_1^n$ .

**Exemplo 0.4.** Consideremos as hipersuperfícies  $M_1$  e  $M_2$  de  $\mathbb{R}^3$  que são tangentes no ponto  $p = (0, 0, 0)$ , onde  $M_1$  é a esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  centrada em  $(0, 0, 1)$  com raio 1, e  $M_2$  é o plano

Figura 1: Hipersuperfícies tangentes de  $\mathbb{R}^3$ 

$z = 0$ , e tomemos o vetor unitário  $\eta_0 = e_3$  de  $\mathbb{R}^3$ , que é normal a  $M_1$  em  $p$ . Ver Figura 1. Como a função exponencial em  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \exp_p(x, y, z) = p + (x, y, z) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Se tomamos o disco  $B_\varepsilon(p)$  com  $0 < \varepsilon < 1$  em  $T_pM_2$  e parametrizamos numa vizinhança de  $M_2$  como em (1) obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_2 : B_\varepsilon(p) &\longrightarrow M_2 \\ (x, y, 0) &\longmapsto \varphi_2(x, y, 0) = \exp_p((x, y, 0) + \mu^2(x, y, 0)\eta_0) = (x, y, 0) + \mu^2(x, y, 0)e_3, \end{aligned}$$

de maneira que a função  $\mu^2$  fica definida por

$$\begin{aligned} \mu^2 : B_\varepsilon(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, 0) &\longmapsto \mu^2(x, y, 0) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mu^2$  é a função nula. Note que, se  $\mu^2$  não for a função nula, então  $\varphi_2(x, y, 0) \notin M_2$  para  $(x, y, 0) \in B_\varepsilon(p)$ . Agora, parametrizando como em (1) a metade inferior da esfera  $M_1$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \varphi_1 : B_\varepsilon(p) &\longrightarrow M_1 \\ (x, y, 0) &\longmapsto \varphi_1(x, y, 0) = \exp_p((x, y, 0) + \mu^1(x, y, 0)\eta_0) = (x, y, 0) + \mu^1(x, y, 0)e_3, \end{aligned}$$

onde a função  $\mu^1$  fica definida por

$$\begin{aligned} \mu^1 : B_\varepsilon(p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, 0) &\longmapsto \mu^1(x, y, 0) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Como  $\mu^1(x, y, 0) \geq \mu^2(x, y, 0)$  para todo  $(x, y, 0) \in B_\varepsilon(p)$ , concluímos neste exemplo que  $M_1$  está acima de  $M_2$  em  $B_\varepsilon(p)$ .

Em base à Definição 0.3 e considerando os conjuntos  $\Gamma_r$ , nesta dissertação estudaremos condições para garantir que  $M_1$  e  $M_2$  com curvaturas  $r$ -médias não necessariamente constantes, coincidam numa vizinhança do ponto  $p$ , e este chamaremos de Princípio de Tangência. O texto está dividido em três

partes. Na primeira parte apresentamos as ferramentas necessárias para a prova do Princípio. Além disso, lá calcularemos a curvatura  $r$ -média da esfera geodésica normal que usaremos na parte de aplicações do Princípio. Na segunda parte estudaremos a construção de certos operadores elípticos que serão a chave na demonstração do Princípio. Na última parte, nos dedicaremos à prova do Princípio e aplicações, onde estudaremos condições para estimar o tamanho da maior bola que se encaixa dentro de uma hipersuperfície compacta conexa mergulhada em um espaço forma de curvatura seccional constante  $c \leq 0$ , e no tamanho da menor bola que contém a imagem de uma imersão de uma variedade Riemanniana compacta em uma variedade Riemanniana com curvaturas seccionais limitadas superiormente. Também estudaremos condições que garantem quando uma hipersuperfície compacta e conexa do espaço forma com curvatura seccional constante, tal que tenha seu bordo contido numa bola, esteja completamente contida em essa bola.

---

## Preliminares

---

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados de Geometria, Análise e Álgebra, que iremos utilizar no decorrer desta dissertação. Na primeira seção, mostramos propriedades de algumas matrizes que usaremos no trabalho, e introduzimos a noção de perturbação analítica para autovalores. Em seguida, será apresentado resultados da Teoria de Subvariedades onde abordaremos a diferenciabilidade da função distância Riemanniana. Na terceira seção calcularemos a curvatura  $r$ -média da esfera geodésica. Depois introduziremos conceitos de operadores elípticos para apresentar um princípio do máximo com respeito a esses operadores. Ao final, estudaremos os polinômios  $a$ -hiperbólicos, que são um tipo especial de polinômios homogêneos.

### 1.1 Resultados de Álgebra Linear

Lembremos que a função determinante  $\det : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma multilinear com respeito às colunas das matrizes, ou seja, se denotamos por  $M(c_1, c_2, \dots, c_n)$  uma matriz  $n \times n$  com colunas  $c_1, c_2, \dots, c_n$  respectivamente, então

- $\det(M(c_1, c_2, \dots, c_i + c'_i, \dots, c_n)) = \det(M(c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n)) + \det(M(c_1, c_2, \dots, c'_i, \dots, c_n))$ ;
- $\det(M(c_1, c_2, \dots, \alpha c_i, \dots, c_n)) = \alpha \det(M(c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n))$ ;

para todas colunas  $c_i, c'_i$  de  $M(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , e para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Agora, sendo  $E^{kl} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  a matriz com entradas

$$e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } (i, j) \neq (k, l), \\ 1, & \text{se } (i, j) = (k, l), \end{cases}$$

tal que  $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ , usando a multilinearidade do determinante provemos o seguinte resultado:

**Proposição 1.1.** *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal, então as matrizes  $A$  e  $A + tE^{kl}$  com  $k \neq l$ , têm o mesmo polinômio característico, para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*



*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos considerar  $E^{kl} = E^{21}$ , cujas entradas são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Para os outros casos da matriz  $E^{lk}$ , é feito de maneira análoga. Vamos encontrar o polinômio característico  $p(x)$  da matriz  $A + tE^{kl}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

e usando a multilinearidade do determinante, mostraremos que  $p(x)$  coincide com o polinômio característico da matriz  $A$ . De fato, como  $p(x) = \det(xI - (A + tE^{kl}))$ , e por (1.1) a matriz  $xI - (A + tE^{kl})$  tem a forma

$$\begin{bmatrix} x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -t & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - a_n \end{bmatrix},$$

da multilinearidade do determinante segue-se que

$$p(x) = \det \begin{bmatrix} x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - a_n \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & x - a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - a_n \end{bmatrix},$$

e portanto  $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ . ■

Para uma matriz arbitrária  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , queremos expressar as entradas da matriz  $A^t E^{kl} A$ , em termos das entradas da matriz  $A^t$ .

**Proposição 1.2.** Se  $A = (A_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , então a matriz  $A^t E^{kl} A$  tem entradas  $(A^t E^{kl} A)_{ij} = A_{ik}^t A_{jl}$ .

*Demonstração.* Se  $A^t E^{kl} = (\tilde{A}_{ij})$ , então

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{s=1}^n A_{is}^t e_{sj} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq l, \\ A_{ik}^t, & \text{se } j = l, \end{cases}$$

ou seja, a matriz  $A^t E^{kl}$  tem a forma

$$A^t E^{kl} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_{1k}^t & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & A_{2k}^t & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{nk}^t & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

↑  
coluna  $l$

Logo se  $A^t E^{kl} A = (\tilde{A}_{ij})$ , temos que  $\tilde{A}_{ij} = \sum_{s=1}^n \tilde{A}_{is} A_{sj} = \tilde{A}_{il} A_{lj} = A_{ik}^t A_{jl}^t$ . ■

Para provar o seguinte resultado, usaremos as propriedades do determinante  $\det(A) \det(B) = \det(AB)$  e  $\det(I) = 1$ , sendo  $A, B$  matrizes quadradas, e  $I$  a matriz identidade.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $A, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  tal que  $P$  é ortogonal. Então, as duas matrizes  $A$  e  $P^t A P$  têm o mesmo polinômio característico.*

*Demonstração.* Das propriedades do determinante, e do fato de que  $P$  é uma matriz ortogonal, temos

$$\begin{aligned} \det(xI - P^t A P) &= \det(xP^t I P - P^t A P) \\ &= \det(P^t (xIP - AP)) \\ &= \det(P^t (xI - A) P) \\ &= \det(P^t) \det(xI - A) \det(P) \\ &= \det(xI - A) \det(P^t) \det(P) \\ &= \det(xI - A) \det(P^t P) \\ &= \det(xI - A) \det(I) \\ &= \det(xI - A), \end{aligned}$$

e fica provado o resultado. ■

Vamos calcular o número de entradas que estão na diagonal e acima da diagonal de uma matriz quadrada de ordem  $n \times n$ .

**Lema 1.4.** *Se  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , então o número de entradas da matriz  $A$  que estão na diagonal e acima da diagonal é  $n(n+1)/2$ .*

*Demonstração.* Se a matriz  $A$  tem entradas  $a_{ij}$  com  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e consideramos somente suas entradas que estão na diagonal e acima da diagonal, organizadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{array} \quad (1.2)$$

observamos que a primeira coluna tem um elemento, a segunda coluna tem dois elementos, etc. Então, a soma dos elementos de cada coluna em (1.2) é  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . ■

Com ajuda do lema anterior, vamos a provar o seguinte resultado:

**Proposição 1.5.** *Um elemento que tem como coordenadas números reais organizados da forma*

$$(r_{11}, \dots, r_{1n}, r_{22}, \dots, r_{2n}, r_{(n-1)n}, r_{nn}, r_1, \dots, r_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

tem no total  $(n(n+1)/2) + 2n + 1$  coordenadas.

*Demonstração.* Pelo Lema 1.4 o número das coordenadas  $r_{ij}$  com  $1 \leq i \leq j \leq n$  é  $n(n+1)/2$ . Agora, como as coordenadas  $r_i$  são  $n$ ,  $z$  é só uma coordenada, e os  $x_i$  são  $n$  coordenadas, temos que o número total de coordenadas é  $(n(n+1)/2) + 2n + 1$ . ■

Se  $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  e  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é positiva semi-definida, com os seguintes resultados faremos uma relação, entre os autovalores da matriz  $A$  e os autovalores da matriz  $A + B$ . A prova do próximo teorema pode ser encontrada em [6, pág. 130].

**Teorema 1.6.** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno,  $A : V \rightarrow V$  uma transformação linear auto-adjunta com autovalores  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , e  $V_1, V_2, \dots, V_n$  subespaços vetoriais de  $V$  tais que cada subespaço  $V_k$  é de dimensão  $(n - k + 1)$ . Então para cada subespaço  $V_k$  temos que  $\min \{ \langle A(x), x \rangle \mid x \in V_k \text{ com } \langle x, x \rangle = 1 \} \leq \lambda_n$ . Além disso, cada subespaço  $V_k$  pode ser escolhido de forma que  $\min \{ \langle A(x), x \rangle \mid x \in V_k \text{ com } \langle x, x \rangle = 1 \} = \lambda_k$ .*

O Teorema 1.6 pode ser expressado pela fórmula

$$\max_{V_k} \min_{\substack{\langle x, x \rangle = 1 \\ x \in V_k}} \langle A(x), x \rangle = \lambda_k, \quad (1.3)$$

de maneira que o mínimo é tomado sobre todos os pontos  $x \in V_k$  tais que  $\langle x, x \rangle = 1$ , e o máximo é tomado sobre todos os subespaços  $V_k$  de dimensão  $(n - k + 1)$ .

**Teorema 1.7.** *Seja  $V$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  munido de um produto interno,  $A : V \rightarrow V$  uma transformação linear auto-adjunta e  $B : V \rightarrow V$  uma transformação linear positiva semi-definida. Se  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  são os autovalores de  $A$  e  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  são os autovalores de  $A + B$ , então  $\lambda_k \leq \mu_k$  para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Como  $B$  é uma transformação linear positiva semi-definida,  $\langle B(x), x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in V$ , então

$$\langle A(x), x \rangle \leq \langle A(x), x \rangle + \langle B(x), x \rangle \quad \text{para todo } x \in V,$$

e como  $\langle A(x), x \rangle + \langle B(x), x \rangle = \langle A(x) + B(x), x \rangle$ , temos

$$\langle A(x), x \rangle \leq \langle (A + B)(x), x \rangle \quad \text{para todo } x \in V.$$

Logo, para qualquer subespaço  $(n - k + 1)$ -dimensional  $V_k$  de  $V$  obtemos que

$$\min_{\substack{\langle x, x \rangle = 1 \\ x \in V_k}} \langle A(x), x \rangle \leq \min_{\substack{\langle x, x \rangle = 1 \\ x \in V_k}} \langle (A + B)(x), x \rangle.$$

Segue-se que o máximo da expressão do lado esquerdo tomado sobre todos os subespaços  $V_k$  de dimensão  $(n - k + 1)$  não excede o máximo do lado direito, assim, pela fórmula (1.3)

$$\max_{V_k} \min_{\substack{\langle x, x \rangle = 1 \\ x \in V_k}} \langle A(x), x \rangle = \lambda_k \quad \text{e} \quad \max_{V_k} \min_{\substack{\langle x, x \rangle = 1 \\ x \in V_k}} \langle (A + B)(x), x \rangle = \mu_k,$$

e portanto  $\lambda_k \leq \mu_k$  para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ . ■

Como uma consequência do Teorema 1.7 obtemos o resultado:

**Corolário 1.8.** *Se  $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  e  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é positiva definida, então satisfaz-se*

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + B) \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$  são os autovalores da matriz  $A$ , e  $\lambda_1(A + B) \leq \lambda_2(A + B) \leq \dots \leq \lambda_n(A + B)$  são os autovalores da matriz  $A + B$ .

Lembremos que se uma matriz  $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é positiva definida, então a expressão  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$  é positiva para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Vamos limitar aquela expressão em termos de seus autovalores.

**Lema 1.9.** *Se  $\underline{\lambda}$  é o menor dos autovalores de uma matriz positiva definida  $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , então  $0 < \underline{\lambda} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$  para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .*

*Demonstração.* Consideremos o operador positivo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuja matriz na base canônica é  $(a_{ij})$ , e definamos o operador linear  $L := A - \underline{\lambda}I$ , onde  $I$  é o operador identidade. Vejamos que  $\langle L(\xi), \xi \rangle \geq 0$  para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Com efeito, como  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é autoadjunto, pelo Teorema Espectral existe uma base ortonormal  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , formada por autovetores de  $A$ , de maneira que  $A(u_i) = \lambda_i u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde cada  $\lambda_i$  é um autovalor de  $A$ . Além disso, para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$

tem-se que  $\xi = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ , onde cada  $\alpha_i$  é uma constante em  $\mathbb{R}$ . Note que

$$\begin{aligned} \langle L(\xi), \xi \rangle &= \langle (A - \underline{\lambda}I)(\xi), \xi \rangle \\ &= \langle A(\xi) - \underline{\lambda}\xi, \xi \rangle \\ &= \left\langle A \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) - \underline{\lambda} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A(u_i) - \left( \underline{\lambda} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \underline{\lambda} \alpha_i u_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i \alpha_i u_i - \underline{\lambda} \alpha_i u_i, \alpha_i u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (\lambda_i - \underline{\lambda}) \langle u_i, u_i \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto  $\langle L(\xi), \xi \rangle \geq 0$ , para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Como  $L = A - \underline{\lambda}I$ , segue-se que

$$0 \leq \langle (A - \underline{\lambda}I)(\xi), \xi \rangle = \langle A(\xi) - \underline{\lambda}I(\xi), \xi \rangle = \langle A(\xi), \xi \rangle - \underline{\lambda} \langle \xi, \xi \rangle.$$

Consequentemente,  $\underline{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ , para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Por último, por ser  $(a_{ij})$  positiva definida, seus autovalores são positivos, e como  $\underline{\lambda}$  é o menor dos autovalores, obtemos  $\underline{\lambda} > 0$ . Concluimos  $0 < \underline{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j$ , para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . ■

O lema anterior nos ajudará na prova do seguinte resultado:

**Proposição 1.10.** *Sejam  $a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , funções contínuas definidas num subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $(a_{ij}(x)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz positiva definida para qualquer  $x \in U$ , então, para cada ponto  $x_0 \in U$  existem uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  contida em  $U$ , e uma constante  $\lambda > 0$ , tal que  $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$  para todo  $x \in V$  e qualquer  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demonstração.* Por hipótese,  $(a_{ij}(x))$  é positiva definida para qualquer  $x \in U$ . Daí, se  $\underline{\lambda}(x)$  é o menor autovalor da matriz  $(a_{ij}(x))$ , temos que  $\underline{\lambda}(x) > 0$  para todo  $x \in U$ . Agora, consideremos uma vizinhança  $V$  de um ponto  $x_0 \in U$  tal que  $V \subset \bar{V} \subset U$ , e além disso  $\bar{V}$  é compacto. Como  $\underline{\lambda}$  é contínua em  $U$ , a restrição  $\underline{\lambda}|_{\bar{V}}$  possui um mínimo. Definamos  $\lambda := \frac{\min\{\underline{\lambda}(x) : x \in \bar{V}\}}{2}$ . Então  $0 < \lambda < \underline{\lambda}(x)$  para todo  $x \in V$ . Portanto, do Lema 1.9 segue-se que  $\lambda|\xi|^2 \leq \underline{\lambda}(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ , para todo  $x \in V$  e qualquer  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . ■

Agora, vamos demonstrar uma proposição que garante quando uma matriz definida em termos das Hessianas de duas funções de classe  $C^2$ , é positiva definida. Para as funções reais  $f$  e  $g$  de  $n$  variáveis, denotaremos suas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  por  $f_i$  e  $g_i$  respectivamente.

**Proposição 1.11.** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$  tais que  $f(x) \geq g(x)$  para  $x$  em uma vizinhança do zero,  $f(0) = g(0)$ ,  $f_i(0) = 0$  e  $g_i(0) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então a matriz  $(\text{Hess } f - \text{Hess } g)(0)$  é semi-definida positiva.*

*Demonstração.* Definamos  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h = f - g$ , então das hipóteses obtemos:

- (1)  $h(x) \geq 0$  para  $x$  em uma vizinhança do zero;
- (2)  $h(0) = 0$ ;
- (3)  $h_i(0) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Dos itens (1), (2) e (3) segue-se que  $0 \in \mathbb{R}^n$  é ponto mínimo de  $h$  numa vizinhança dele, portanto a matriz Hessiana de  $h$  em 0 dada por  $(\text{Hess } h)(0) = (h_{ij}(0))$  é semi-definida positiva, isto é,

$$(\xi_i)^t (h_{ij}(0)) (\xi_i) \geq 0 \quad \text{para todo } (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

mas  $(\xi_i)^t (h_{ij}(0)) (\xi_i) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(0) \xi_i \xi_j$ , pois

$$(\xi_i)^t (h_{ij}(0)) (\xi_i) = (\xi_i)^t \left( \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(0) \xi_i \right) = \xi_j \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(0) \xi_i = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(0) \xi_i \xi_j,$$

logo

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(0) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{para todo } (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

Agora, como  $h = f - g$ , então  $\text{Hess } h = \text{Hess } f - \text{Hess } g$ , assim  $h_{ij}(0) = (\text{Hess } f - \text{Hess } g)_{ij}(0)$ , e de (1.4) obtemos

$$\sum_{i,j=1}^n (\text{Hess } f - \text{Hess } g)_{ij}(0) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \text{para todo } (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

isto é,  $(\text{Hess } f - \text{Hess } g)(0)$  é semi-definida positiva. ■

Para derivar autovalores de matrizes neste trabalho, precisamos da noção de perturbação analítica de autovalores, que vamos introduzir na continuação.

**Definição 1.12.** Dizemos que uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  está sujeita a uma pequena perturbação, quando dada outra matriz  $A' \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , consideramos uma família de matrizes  $\{A_t\}_{t \in V}$  da forma  $A_t = A + tA'$ , onde  $V \subset \mathbb{R}$  é uma vizinhança do 0.

Em [7, pág. 64], pode ser encontrada a seguinte afirmação:

**Afirmção 1.13.** *As raízes  $\lambda_i(t)$  do polinômio  $\det(xI - A_t)$ , são ramos de funções analíticas.*

A afirmação acima nos dá o conceito de perturbação analítica de autovalores. Convém observar um exemplo.

**Exemplo 1.14.** Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , então  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & -1 \end{pmatrix}$ , de maneira que

$$\det(xI - A_t) = -1 + x^2 - t^2 = 0.$$

Logo  $A_t$  tem os autovalores  $\lambda_1(t) = (1 + t^2)^{1/2}$  e  $\lambda_2(t) = -(1 + t^2)^{1/2}$ , que são ramos da função analítica de duplo valor  $x(t)^2 = 1 + t^2$ .

## 1.2 Resultados da Teoria de Subvariedades

Nesta seção apresentaremos ferramentas da Teoria de subvariedades, que serão crucias para a prova de vários resultados da dissertação. A prova da seguinte proposição pode ser encontrada em [8, pág. 26]. Lembremos que uma variedade de Hadamard é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional não-positiva.

**Proposição 1.15.** *Seja  $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$  uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta  $M^n$  em uma variedade de Hadamard  $\overline{M}^{n+k}$ . Então existem um ponto  $q \in M$  e um vetor  $\xi_0 \in T_q M^\perp$  de maneira que a aplicação linear*

$$\begin{aligned} A_{\xi_0} : T_q M &\longrightarrow T_q M \\ v &\longmapsto A_{\xi_0}(v) = (A_\xi X)(q) \end{aligned}$$

é definida positiva, onde  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  são quaisquer campos tais que  $X(q) = v$  e  $\xi(q) = \xi_0$ , sendo cada aplicação  $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  o operador de forma de  $M$  relativo a  $\xi$ .

Agora, convém apresentar um resultado da comparação da Hessiana, porém, provaremos antes uma proposição respeito à diferenciabilidade da função distância Riemanniana. Lembremos que se  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $U$  uma vizinhança normal de  $p \in M$ , dadas quaisquer coordenadas normais  $(x^i)$  em  $U$  centradas em  $p$ , a função distância radial  $r : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$r(x) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2},$$

e ainda  $r^2$  é suave em  $U$ .

**Proposição 1.16.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana, e consideremos a função distância Riemanniana  $d_{p_0}(\cdot)$  de  $p_0$  definida em  $M$ , então*

$$\begin{aligned} g : \overline{B_\rho(p_0)} \subset M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{2}d_{p_0}(x)^2, \end{aligned}$$

é diferenciável numa vizinhança da bola geodésica normal  $\overline{B_\rho(p_0)}$ . Além disso  $\|\nabla g(x)\| = d_{p_0}(x)$ , para todo  $x \in \overline{B_\rho(p_0)}$ .

*Demonstração.* Consideremos a aplicação exponencial

$$\exp_{p_0} : B_\rho(0) \subset T_{p_0}M \longrightarrow M,$$

de modo que  $\exp_{p_0}(B_\rho(0)) \cap \text{Cut}(p_0) = \emptyset$ . Seja  $\rho' < \rho$  e definamos a vizinhança normal  $U = \exp_{p_0}(B_{\rho'}(0))$  da bola geodésica  $B_{\rho'}(p_0)$ , assim  $U \cap \text{Cut}(p_0) = \emptyset$ . Como  $d_{p_0}(\cdot)$  definida em  $U$  é dada por

$$\begin{aligned} d_{p_0} : U &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto d_{p_0}(x) = |\exp_{p_0}^{-1}(x)|, \end{aligned}$$

e ela é suave em  $U \setminus \{p_0\}$ , pois  $\exp_{p_0}^{-1}(x) \neq (0, 0, \dots, 0)$  para todo  $x \in U \setminus \{p_0\}$ , podemos definir a função

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{2}d_{p_0}^2(x) = \frac{1}{2}|\exp_{p_0}^{-1}(x)|^2, \end{aligned}$$

e como  $d_{p_0}$  é uma função radial, então  $g$  é diferenciável em  $U$ . Por outro lado, note que

$$\nabla g(x) = 2 \left( \frac{1}{2}d_{p_0}(x) \right) \nabla d_{p_0}(x) = d_{p_0}(x) \nabla d_{p_0}(x),$$

logo a norma de  $\nabla g(x)$  é dada por

$$\|\nabla g(x)\| = |d_{p_0}(x)| \|\nabla d_{p_0}(x)\|,$$

e como  $d_{p_0}$  é uma função radial, pelo Lema de Gauss (ver [9, pág. 159]) temos que  $\|\nabla d_{p_0}(x)\| = 1$  para todo  $x \neq p_0$ , assim  $\|\nabla g(x)\| = |d_{p_0}(x)|$ . ■

A afirmação a seguir, cuja demonstração está em [10, pág. 713], relaciona o gradiente e a Hessiana da função  $\frac{1}{2}d_{p_0}(\cdot)^2$  definida em uma variedade Riemanniana, com o gradiente e a Hessiana da restrição da função  $\frac{1}{2}d_{p_0}(\cdot)^2$  a uma subvariedade.

**Afirmção 1.17.** *Sejam  $M^n$  e  $N^{n+1}$  duas variedades Riemannianas. Se:*

- (1)  $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$  é uma imersão isométrica suave;
- (2)  $g : N^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $g(x) = \frac{1}{2}d_{p_0}(x)^2$  em  $N^{n+1}$ ;
- (3)  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $\varphi = g \circ F$ ;

então a Hessiana de  $\varphi$  no ponto  $p \in M^n$ , para todo  $u, v \in T_pM$  satisfaz

$$\text{Hess } \varphi_p(u, v) = \text{Hess } g_{F(p)}(dF_p(u), dF_p(v)) + \langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(u, v) \rangle$$

onde  $\alpha_p$  é a segunda forma fundamental de  $F$  em  $p$ , e  $\nabla g(F(p))$  é o gradiente da função  $g$  no ponto  $F(p)$ .



O resultado abaixo recebe o nome de Comparação da Hessiana. Sua demonstração pode ser vista em [10, pág. 713].

**Lema 1.18.** *Sejam  $N^m$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional  $K$ . Se:*

- (1)  $p_0$  e  $p$  são pontos de  $N^m$ , de maneira que  $p$  não pertence ao cut locus de  $p_0$ ;
- (2)  $\gamma: [0, a] \rightarrow N^m$  é o segmento de geodésica minimizante normalizada, que liga a  $\gamma(0) = p_0$  com  $\gamma(a) = p$ ;
- (3)  $\delta$  é um número positivo fixado;
- (4)  $g: N^m \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $g(x) = \frac{1}{2}d_{p_0}(x)^2$ , onde  $d_{p_0}(\cdot)$  é a função distância Riemanniana de  $p_0$  em  $N^m$ ;

então, a Hessiana de  $g$  no ponto  $p$ , para todo  $v \in T_p N$  tal que  $v \perp \gamma'(a)$  e  $\|v\| = 1$ , satisfaz

$$\text{Hess } g_p(v, v) \geq \begin{cases} a\delta \cot(a\delta), & \text{se } \max_{\gamma} K = \delta^2 \text{ com } a < \frac{\pi}{\delta}; \\ 1, & \text{se } \max_{\gamma} K = 0; \\ a\delta \coth(a\delta), & \text{se } \max_{\gamma} K = -\delta^2. \end{cases}$$

Encerraremos esta seção com o próximo resultado, que nos dá uma condição suficiente para uma isometria entre uma bola geodésica de uma variedade Riemanniana e uma bola aberta do espaço forma. Sua demonstração esta em [11, pág. 409].

**Proposição 1.19.** *Seja  $N^m$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional  $K \leq c$ , tal que:*

- (1)  $\overline{B_\rho(p_0)}$  é uma bola geodésica normal em  $N$ ;
- (2) se  $c > 0$ , então  $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ ;
- (3) se  $H^{\partial \overline{B_\rho(p_0)}}$  denota o vetor curvatura média na esfera geodésica  $\partial \overline{B_\rho(p_0)}$ , então o comprimento  $\|H^{\partial \overline{B_\rho(p_0)}}\|$  satisfaz

$$\|H^{\partial \overline{B_\rho(p_0)}}(x)\| = \begin{cases} \sqrt{-c} \coth(\rho\sqrt{-c}), & \text{se } c < 0, \\ 1/\rho, & \text{se } c = 0, \\ \sqrt{c} \cot(\rho\sqrt{c}), & \text{se } c > 0, \end{cases}$$

para todo  $x \in \partial \overline{B_\rho(p_0)}$ ;

então,  $B_\rho(p_0)$  é isométrica a uma bola aberta de raio  $\rho$  em  $Q_c^m$ .

### 1.3 Curvatura $r$ -média da esfera geodésica

Nesta seção vamos calcular as curvaturas  $r$ -médias da esfera geodésica. Lembremos que um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é chamado umbílico quando as curvaturas principais de  $S$  em  $p$

são iguais, ou equivalentemente, quando o operador de forma de  $S$  em  $p$  for múltiplo da aplicação identidade  $I_p : T_p M \rightarrow T_p M$ . Esta definição estende-se para hipersuperfícies.

**Definição 1.20.** Uma imersão isométrica  $\phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é chamada umbílica em um ponto  $p \in M$ , se para todo vetor  $\eta \in T_p M^\perp$ , existe um número  $\lambda_\eta \in \mathbb{R}$  tal que o operador de forma  $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  da imersão  $\phi$  satisfaz

$$A_\eta = \lambda_\eta I,$$

onde  $I$  é a aplicação identidade de  $T_p M$ . A hipersuperfície  $\phi(M)$  é chamada umbílica, quando a imersão  $\phi$  for umbílica em todo ponto. Se  $\phi(M)$  é uma hipersuperfície umbílica, então em qualquer ponto de  $\phi(M)$ , as curvaturas principais são iguais à constante  $\lambda_\eta$ .

Lembre-se que  $n$  campos de vetores  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , definidos em um subconjunto aberto  $U$  de uma variedade Riemanniana  $M^n$ , são chamados de referencial local (ou global, se  $U = M$ ) para  $M$ , se  $E_1, E_2, \dots, E_n$  são linearmente independentes, isto é, os vetores  $E_1(p), E_2(p), \dots, E_n(p)$  são linearmente independentes em  $T_p M$ , para cada ponto  $p \in U$ . Além disso, se para cada ponto  $p \in U$ , os vetores  $E_1(p), E_2(p), \dots, E_n(p)$  são ortonormais, com respeito ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  do espaço tangente  $T_p M$ , os campos  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  são chamados de referencial ortonormal local. No seguinte teorema calculamos as curvaturas  $r$ -médias da esfera geodésica em um espaço de curvatura constante.

**Teorema 1.21.** *Se  $M_c^{n+1}$  é uma variedade Riemanniana conexa com curvatura seccional constante  $c$ , então qualquer esfera geodésica normal  $\overline{\partial B_t(p_0)}$  de  $M$  é umbílica. Além disso, a sua curvatura  $r$ -média, para  $r = 1, 2, \dots, n$ , está dada por*

$$H_r(x) = \left[ \frac{\mu_c(t)}{t} \right]^r,$$

sobre qualquer ponto  $x \in \overline{\partial B_t(p_0)}$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$ , tal que  $[a, b] \subset I$  e  $\gamma(a) = p_0$ . Escolhamos um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, \dots, E_{n+1}\}$ , de modo que os campos  $E_1, E_2, \dots, E_{n+1}$  estão definidos numa vizinhança do ponto  $p_0$ , e além disso, o campo de vetores  $E_{n+1}$  é tangente ao longo de  $\gamma$ . Como os vetores  $E_1(p_0), E_2(p_0), \dots, E_{n+1}(p_0)$  são linearmente independentes em  $T_{p_0} M$ , da Proposição 2.6 de [12, pág. 42], obtemos os transportes paralelos  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n+1}$  dos vetores  $E_1(p_0), E_2(p_0), \dots, E_{n+1}(p_0)$  respectivamente, ao longo de  $\gamma$ , e portanto  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n+1}\}$  é um referencial ao longo de  $\gamma$ . Sejam  $J_1, J_2, \dots, J_{n+1}$  campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , com as condições iniciais

$$\begin{cases} J_i(a) = 0, \\ \frac{DJ_i}{dt}(a) = \mathbf{E}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \end{cases} \quad (1.5)$$

e formemos uma matriz  $F$  de tamanho  $(n+1) \times (n+1)$ , a partir das componentes de cada campo  $J_i$  com respeito ao referencial  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n+1}\}$ , de maneira que a primeira coluna de  $F$  sejam as  $n+1$  componentes de  $J_1$ , a segunda coluna sejam as  $n+1$  componentes de  $J_2$ , etc. Logo

$$F\mathbf{E}_i = J_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (1.6)$$

Note que a derivada covariante de cada termo  $F\mathbf{E}_i$  é

$$\frac{DF}{dt}\mathbf{E}_i + F\frac{D\mathbf{E}_i}{dt} = \frac{DF}{dt}\mathbf{E}_i + F0 = \frac{DF}{dt}\mathbf{E}_i,$$

onde usamos que  $\frac{D\mathbf{E}_i}{dt} = 0$  por ser cada  $\mathbf{E}_i$  paralelo. Se derivamos (1.6) obtemos

$$\frac{DF}{dt}\mathbf{E}_i = \frac{DJ_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (1.7)$$

Seja  $A_\eta : T_p \overline{\partial B_t(p_0)} \rightarrow T_p \overline{\partial B_t(p_0)}$  o operador de forma associado à esfera geodésica  $\overline{\partial B_t(p_0)}$  com  $\eta \in \langle E_{n+1} \rangle = T_p \overline{\partial B_t(p_0)}^\perp$  e  $p \in \overline{\partial B_t(p_0)}$ . Se  $A_\eta$  é a matriz associada ao operador  $A_\eta$ , de [13, pág. 52], segue-se que

$$A_\eta J_j = \frac{DJ_j}{dt}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8)$$

para um ponto  $p \in \overline{\partial B_t(p_0)}$ , e todo vetor  $\eta \in E_{n+1}$ . De (1.6), (1.7) e (1.8) obtemos

$$A_\eta F\mathbf{E}_j = A_\eta J_j = \frac{DJ_j}{dt} = \frac{DF}{dt}\mathbf{E}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

logo

$$A_\eta F = \frac{DF}{dt},$$

e como as colunas da matriz  $F$  são linearmente independentes, então  $F$  é invertível e consequentemente

$$A_\eta = F'F^{-1}.$$

Consideremos o tensor curvatura de ordem 4 em  $M$  definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y), Z, W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Então, como  $M$  tem curvatura seccional constante  $c$ , de [12, pág. 86], segue-se que

$$R(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_l) = 0 \text{ para } k \neq l \text{ com } k, l = 1, 2, \dots, n,$$

e portanto a equação de Jacobi é

$$\frac{D^2 F}{dt} + cF = 0,$$

com as condições iniciais  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) = I$ , cuja solução é

$$F(t) = I\lambda(t), \quad (1.9)$$

onde

$$\lambda(t) = \begin{cases} \sinh(t\sqrt{-c})/\sqrt{-c}, & \text{se } c < 0, \\ t, & \text{se } c = 0, \\ \sin(t\sqrt{c})/\sqrt{c}, & \text{se } c > 0, \end{cases}$$

de maneira que

$$F' = I\lambda' \quad (1.10)$$

com

$$\lambda'(t) = \begin{cases} \cosh(t\sqrt{-c}), & \text{se } c < 0, \\ 1, & \text{se } c = 0, \\ \cos(t\sqrt{c}), & \text{se } c > 0. \end{cases}$$

De (1.9) segue-se que

$$I = F^{-1}\lambda. \quad (1.11)$$

Escrevendo (1.10) da forma  $F'I = I\lambda'$ , e usando (1.11) temos

$$\begin{aligned} F'I &= I\lambda' \\ F'(F^{-1}\lambda) &= I\lambda' \\ F'F^{-1} &= \frac{\lambda'}{\lambda}I. \end{aligned}$$

Como  $A_\eta = F'F^{-1}$ , e ainda  $\frac{\mu_c(t)}{t} = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}$ , obtemos

$$A_\eta = \frac{\mu_c(t)}{t}I.$$

Portanto da Definição 1.20, a esfera geodésica  $\partial\overline{B_t}(p_0)$  é uma hipersuperfície umbílica, com curvaturas principais  $\mu_c(t)/t$  em qualquer ponto sobre  $\partial\overline{B_t}(p_0)$ . Logo a curvatura  $r$ -média de  $\partial\overline{B_t}(p_0)$  sobre qualquer ponto  $x \in \partial\overline{B_t}(p_0)$ , segundo (3) é  $H_r(x) = \left[\frac{\mu_c(t)}{t}\right]^r$  para  $r = 1, 2, \dots, n$ . ■

## 1.4 Operadores elípticos e operadores uniformemente elípticos

Nesta seção introduzimos algumas notações e definições que serão usadas nos próximos capítulos. Além disso, usando um Princípio do Máximo de Serrin, obteremos um Princípio do Máximo para operadores elípticos, que será uma ferramenta importante para a demonstração do Princípio de Tangência no Capítulo 3.

Para  $d = (n(n+1)/2) + 2n + 1$ , comecemos denotando os elementos em  $\mathbb{R}^d$ . Pela Proposição 1.5,  $\mathbb{R}^d$  é o conjunto dos pontos  $(r_{11}, \dots, r_{1n}, r_{22}, \dots, r_{2n}, r_{(n-1)n}, r_{nn}, r_1, \dots, r_n, z, x_1, \dots, x_n)$  tais que cada coordenada  $r_{ij}, r_i, z, x_i$  com  $1 \leq i \leq j \leq n$  é um número real. Por notação, escrevemos

$$\mathbb{R}^d = \{(r_{ij}, r_i, z, x) \mid 1 \leq i \leq j \leq n \text{ e } x = (x_1, \dots, x_n)\}.$$

Por outro lado, dada uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , definida num subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , e dado um ponto  $x \in U$ , associamos a função  $f$  e o ponto  $x$ , com um ponto de  $\mathbb{R}^d$ , denotado por

$$\Lambda(f)(x) = (f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x),$$

onde  $f_{ij}(x)$  e  $f_i(x)$  representam as derivadas parciais  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  respectivamente, com  $1 \leq i \leq j \leq n$ , e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Agora, apresentamos uma definição que mostra a propriedade que deve satisfazer um operador definido num aberto de  $\mathbb{R}^d$ , para que ele seja elíptico pontualmente.

**Definição 1.22.** Se  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é um operador de classe  $C^1$  definido num aberto  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^d$ , dizemos que  $\Phi$  é elíptico num ponto  $p \in \Gamma$ , se  $\sum_{i \leq j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}(p) \xi_i \xi_j > 0$  para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Além disso, se  $\Phi$  for elíptico em todos os pontos de  $\Gamma$ , diz-se que  $\Phi$  é elíptico em  $\Gamma$ .

Um operador definido num aberto de  $\mathbb{R}^d$ , também pode ser elíptico com respeito a certas funções:

**Definição 1.23.** Sejam  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  um operador de classe  $C^1$  definido num conjunto aberto  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^d$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  definida num conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Se

- (1)  $\Lambda(f)(x) \in \Gamma$  para cada  $x \in U$ ;
- (2)  $\Phi$  é elíptico no ponto  $\Lambda(f)(x)$  para todo  $x \in U$ ;

dizemos que  $\Phi$  é elíptico com respeito a  $f$ .

No resto da seção, vamos considerar operadores diferenciáveis lineares do tipo

$$\begin{aligned} L : C^2(U) \cap C(\bar{U}) &\longrightarrow C(U) \\ f &\longmapsto L(f) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf, \end{aligned}$$

onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , e  $a_{ij}, b_i, c$  são funções que tomam valores reais, contínuas em  $U$ , tais que  $a_{ij} = a_{ji}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 1.24.** Seja  $L$  um operador diferencial linear definido em  $C^2(U) \cap C(\bar{U})$ . Dizemos que  $L$  é um operador uniformemente elíptico em  $U$ , se existe uma constante  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$  para todo ponto  $x \in U$  e qualquer  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .

A referência que usamos para o Princípio do Máximo de Serrin é [14, pág. 29].

**Princípio do Máximo de Serrin 1.25.** *Seja  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $U$ . Se para uma função  $f \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  se satisfaz que  $L(f) \geq 0$  em  $U$ , e além disso  $f \leq 0$  em  $U$ , então, ou  $f < 0$  em  $U$ , ou  $f = 0$  em  $U$ .*

A ideia agora, é obter um princípio do máximo para operadores elípticos, a partir do Princípio do Máximo de Serrin. Antes de fazer isto, provaremos o seguinte lema:

**Lema 1.26.** *Seja  $T : U \rightarrow \mathbb{R}$  um operador de classe  $C^1$  definido num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então, para cada par de pontos  $x, y \in U$ , tais que o segmento  $(1-t)x + ty$ ,  $t \in [0, 1]$  está contido em  $U$ , temos que*

$$T(y) - T(x) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x_i}((1-t)x + ty) dt.$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $T \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ . Note que

$$\frac{d}{dt} T \circ \gamma(t) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial T}{\partial x_i} \gamma(t),$$

pois  $\frac{d}{dt} T \circ \gamma(t) = \nabla T(\gamma(t)) \gamma'(t) = \left[ \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] (y_i - x_i) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial T}{\partial x_i} \gamma(t)$ . Então, usando o Teorema Fundamental do Cálculo com a função  $T \circ \gamma$ , obtemos que  $T \circ \gamma(1) - T \circ \gamma(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} T \circ \gamma(t) dt$ , e portanto  $T(y) - T(x) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x_i}((1-t)x + ty) dt$ . ■

Agora sim, provemos o Princípio do Máximo deste trabalho para operadores elípticos:

**Princípio do Máximo 1.27.** *Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$  definidas num conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , e  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  um operador de classe  $C^1$  definido num conjunto aberto  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^d$  tais que:*

- (1)  $f \leq g$  em  $U$ ;
- (2)  $\Phi(\Lambda(f)(x)) \geq \Phi(\Lambda(g)(x))$  para todo  $x \in U$ ;
- (3)  $\Phi$  é elíptico com respeito às funções  $(1-t)f + tg$ ,  $t \in [0, 1]$ .

*Então, ou  $f < g$  em  $U$ , ou  $f = g$  numa vizinhança de qualquer ponto  $x_0 \in U$  tal que  $f(x_0) = g(x_0)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar este Princípio do Máximo em sete passos. Para isto, consideremos uma vizinhança  $V$  de um ponto  $x_0 \in U$  tal que  $V \subset \bar{V} \subset U$  com  $\bar{V}$  compacto.

*Passo 1.* Provar que os pontos  $\Lambda(f)(x)$  e  $\Lambda(g)(x)$  de  $\mathbb{R}^d$ , pertencem ao aberto  $\Gamma$  para todo  $x \in V$ : de fato, para  $t = 0$  e  $t = 1$  na hipótese (3), temos que  $\Phi$  é elíptico com respeito às funções  $f$  e  $g$ , então pela parte (1) da Definição 1.23 segue-se que  $\Lambda(f)(x), \Lambda(g)(x) \in \Gamma$  para todo  $x \in V$ .

*Passo 2.* Provar que o segmento  $(1-t)\Lambda(f)(x) + t\Lambda(g)(x)$ ,  $t \in [0, 1]$  está contido no aberto  $\Gamma$ , para

todo  $x \in V$ : como  $\Phi$  é elíptico em relação a  $(1-t)f + tg$ ,  $t \in [0, 1]$  pela hipótese (3), então pela parte (1) da Definição 1.23 temos que  $\Lambda((1-t)f + tg)(x) = (1-t)\Lambda(f)(x) + t\Lambda(g)(x)$ ,  $t \in [0, 1]$  pertence ao aberto  $\Gamma$  para todo  $x \in V$ .

*Passo 3.* Provar que  $\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) = L((f-g)(x))$  para todo  $x \in V$ , onde  $L$  é um operador diferencial linear: pelos passos 1 e 2, e do fato de que o operador  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  por hipótese, podemos usar o Lema 1.26 com o operador  $\Phi$  nos pontos  $\Lambda(f)(x)$  e  $\Lambda(g)(x)$ , que têm a forma

$$(f_{ij}(x), f_i(x), f(x), x) \text{ e } (g_{ij}(x), g_i(x), g(x), x) \text{ com } 1 \leq i \leq j \leq n \text{ e } x = (x_1, \dots, x_n),$$

respectivamente, e obtemos que

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) &= \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}(x) - g_{ij}(x)) \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}} ((1-t)\Lambda(g)(x) - t\Lambda(f)(x)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n (f_i(x) - g_i(x)) \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} ((1-t)\Lambda(g)(x) - t\Lambda(f)(x)) dt \\ &+ (f(x) - g(x)) \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} ((1-t)\Lambda(g)(x) - t\Lambda(f)(x)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n (x_i - x_i) \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} ((1-t)\Lambda(g)(x) - t\Lambda(f)(x)) dt. \end{aligned}$$

para todo  $x \in V$ . A última somatória de acima é zero. Agora, denotando por

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}} ((1-t)\Lambda(g)(x) + t\Lambda(f)(x)) dt, \\ b_i(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} ((1-t)\Lambda(g)(x) + t\Lambda(f)(x)) dt, \\ c(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial z} ((1-t)\Lambda(g)(x) + t\Lambda(f)(x)) dt, \end{aligned}$$

acima, e relembando as notações

$$f_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad f_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad g_{ij}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad g_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

de maneira que  $f_{ij}(x) - g_{ij}(x) = \frac{\partial^2 (f-g)}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ , e  $f_i(x) - g_i(x) = \frac{\partial (f-g)}{\partial x_i}(x)$ , obtemos que

$$\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 (f-g)}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial (f-g)}{\partial x_i}(x) + c(x)(f-g)(x),$$

para todo  $x \in V$ . Ou seja,  $\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) = L((f-g)(x))$  para todo  $x \in V$ , onde  $L$  é o operador diferencial linear que satisfaz

$$L((f-g)(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 (f-g)}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial (f-g)}{\partial x_i}(x) + c(x)(f-g)(x)$$

para todo  $x \in V$ .

*Passo 4.* Provar que  $L$  é uniformemente elíptico em  $V$ : da hipótese (3) e pela parte (2) da Definição

1.23 temos que  $\Phi$  é elíptico nos pontos  $\Lambda(((1-t)f + tg)(x))$ ,  $t \in [0, 1]$  para todo  $x \in V$ . Assim, pela Definição 1.22 segue-se que  $\sum_{i \leq j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}(\Lambda(((1-t)f + tg)(x))) \xi_i \xi_j > 0$  para qualquer  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in$

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e todo  $x \in V$  com  $t \in [0, 1]$ . Então,  $\sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}}((1-t)\Lambda(f)(x) + t\Lambda(g)(x)) dt \xi_i \xi_j > 0$

para qualquer  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e todo  $x \in V$ , isto é,  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0$  para qualquer  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e todo  $x \in V$ . Consequentemente  $(a_{ij}(x))$  é uma matriz definida positiva

para cada  $x \in V$ . Agora, restringindo  $V$  se for necessário, pela Proposição 1.10 existe uma constante  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$  para todo  $x \in V$ , e portanto da Definição 1.24 se tem que o operador  $L$  é uniformemente elíptico em  $V$ .

*Passo 5.* Provar que  $L(f - g) \geq 0$  em  $V$ : da hipótese (2) e do Passo 3, segue-se que  $\Phi(\Lambda(f)(x)) - \Phi(\Lambda(g)(x)) = L((f - g)(x)) \geq 0$  para todo  $x \in V$ , portanto  $L(f - g) \geq 0$  em  $V$ .

*Passo 6.* Provar que, ou  $f < g$  em  $V$ , ou  $f = g$  em  $V$ : da hipótese (1) temos que  $f - g \leq 0$  em  $V$ . Agora, usando este fato, junto com os passos 4 e 5, podemos aplicar o Princípio do Máximo de Serrin com operador  $L$  e a função  $f - g$  em  $V$ , e obtemos que, ou  $f - g < 0$  em  $V$ , ou  $f - g = 0$  em  $V$ . Daí, concluímos que, ou  $f < g$  em  $V$ , ou  $f = g$  em  $V$ .

*Passo 7.* Provar que, ou  $f < g$  em  $U$ , ou  $f = g$  numa vizinhança de qualquer ponto  $x_0 \in U$  tal que  $f(x_0) = g(x_0)$ : definamos o conjunto  $A := \{x \in U : f(x) = g(x)\}$ . Note que, se  $A = \emptyset$ , então da hipótese (1) tem-se  $f < g$  em  $U$ . Se  $A \neq \emptyset$ , então pelo Passo 6 existe uma vizinhança  $V$  de um ponto  $x_0 \in U$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in V$ . ■

## 1.5 Polinômios $a$ -Hiperbólicos

Nesta seção apresentamos propriedades dos polinômios  $a$ -hiperbólicos, para estudar os conjuntos  $\Gamma_r$  introduzidos na introdução da dissertação.

**Definição 1.28.** Se  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio homogêneo de grau  $m$  e  $a \in \mathbb{R}^n$  é um vetor fixo, dizemos que  $P(x)$  é  $a$ -hiperbólico ou hiperbólico com respeito ao vetor  $a$ , se o polinômio  $P(as + x)$  com respeito à variável  $s \in \mathbb{R}$  tem  $m$  raízes reais para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 1.29.** O polinômio homogêneo  $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$  de grau 2 é (3, 4)-hiperbólico, pois  $P((3, 4)s + (x_1, x_2)) = (3s + x_1)^2 + (3s + x_1)(4s + x_2) = (3s + x_1)(7s + x_1 + x_2)$  tem as duas raízes



reais  $s_1 = -\frac{x_1}{3}$  e  $s_2 = \frac{x_1 + x_2}{-7}$ , para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Geometricamente a definição de que um polinômio homogêneo  $P(x)$  de grau  $m$  seja  $a$ -hiperbólico, significa que fixado qualquer ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , a reta  $\gamma(s) = as + x_0$  corta a hipersuperfície  $P(x) = 0$  em  $m$  pontos  $\gamma(s_1), \dots, \gamma(s_m)$  onde  $s_1, \dots, s_m$  são as  $m$  raízes do polinômio  $P(sa + x_0)$ .

**Exemplo 1.30.** Note que o polinômio homogêneo  $P(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$  de grau 2 é  $(2, 1)$ -hiperbólico, pois  $P((2, 1)s + (x_1, x_2)) = (2s + x_1)^2 - (s + x_2)^2 = (s + x_1 - x_2)(3s + x_1 + x_2)$  tem as raízes  $s_1 = x_2 - x_1$  e  $s_2 = -\frac{x_1 + x_2}{3}$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Em particular para  $(x_1, x_2) = (2, 4)$  temos que  $s_1 = 2$  e  $s_2 = -2$ , e a reta  $\gamma(s) = (2, 1)s + (2, 4)$  passa por  $x_1^2 - x_2^2 = 0$  nos pontos  $\gamma(s_1) = (6, 6)$  e  $\gamma(s_2) = (-2, 2)$ . Ver Figura 1.1.

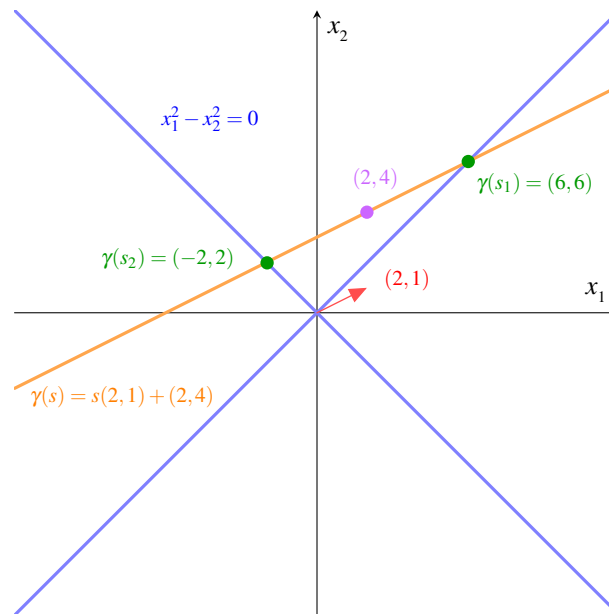


Figura 1.1: Noção geométrica de um polinômio ser  $a$ -hiperbólico

No estudo de polinômios  $a$ -hiperbólicos trabalhamos com os seguintes conjuntos:

**Definição 1.31.** Dado um polinômio  $a$ -hiperbólico  $P(x)$  de grau  $m$ , definimos o subconjunto  $C(P, a)$  de  $\mathbb{R}^n$  por  $C(P, a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(as + x) \neq 0, \forall s \geq 0\}$ .

Geometricamente um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  está no conjunto  $C(P, a)$  se a semirreta  $\gamma(s) = as + x_0$  com  $s \geq 0$  não passa pela hipersuperfície  $P(x) = 0$ . Vejamos dois exemplos deste conjunto.

**Exemplo 1.32.** Como  $P(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$  é um polinômio  $(2, 1)$ -hiperbólico, então  $C(P, (2, 1))$  é o conjunto  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < x_1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > -x_1\}$ . Ver Figura 1.2.

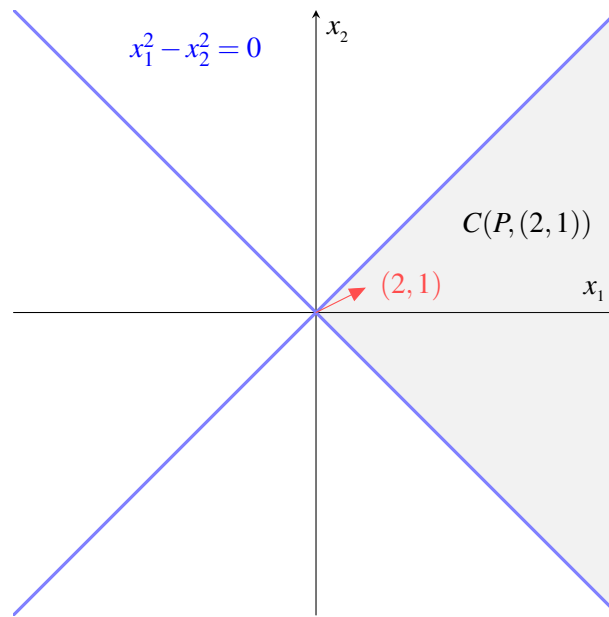


Figura 1.2: Noção geométrica do conjunto  $C(P, (2, 1))$

**Exemplo 1.33.** O polinômio homogêneo  $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$  é um polinômio  $(3, 4)$ -hiperbólico, e  $C(P, (3, 4))$  é o conjunto  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 0\}$ . Ver Figura 1.3.

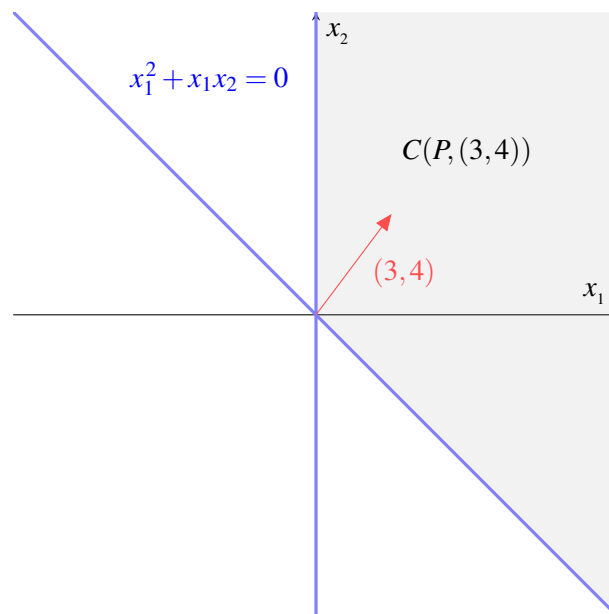


Figura 1.3: Noção geométrica do conjunto  $C(P, (3, 4))$

No resto da seção denotaremos por  $a_0$  o vetor  $(1, 1, \dots, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Queremos mostrar que as funções  $r$ -elementais  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em (4), são polinômios  $a_0$ -hiperbólicos de grau  $r$ . Para isto usaremos os seguintes lemas.

**Lema 1.34.** Se  $P(x)$  é um polinômio  $a$ -hiperbólico de grau  $m$ , então

- (1)  $C(P, a)$  é um cone convexo aberto de  $\mathbb{R}^n$ , que coincide com a componente conexa do conjunto  $\{P \neq 0\}$  que contém o vetor  $a$ , onde  $\{P \neq 0\}$  é o conjunto  $(P^{-1}(0))^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) \neq 0\}$ ;
- (2) O polinômio homogêneo de grau  $m - 1$  dado por  $Q(x) = \left. \frac{d}{ds} P(sa + x) \right|_{s=0}$  é  $a$ -hiperbólico;
- (3)  $C(P, a) \subset C(Q, a)$ .

*Demonstração.* (1) Uma prova deste item pode ser encontrada em [15, pág. 960-961].

(2) Como  $P(x)$  é  $a$ -hiperbólico de grau  $m$ , o polinômio  $P(as + x)$  com respeito à variável  $s$  tem  $m$  raízes  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $s_1 < s_2$ , note que  $f(s) := P(as + x)$  é diferenciável no intervalo  $(s_1, s_2)$  e  $f(s_1) = 0 = f(s_2)$ , então pelo Teorema de Rolle existe  $r_1 \in (s_1, s_2)$  tal que

$$f'(r_1) = \left. \frac{d}{ds} P(as + x) \right|_{s=r_1} = Q(r_1 a + x) = 0,$$

assim,  $r_1$  é raiz do polinômio  $Q(sa + x)$  respeito à variável  $s$ . Usando o Teorema de Rolle novamente para a função  $f(s)$  nos intervalos  $(s_2, s_3), (s_3, s_4), \dots, (s_{m-1}, s_m)$ , obtemos as outras raízes  $r_2, r_3, \dots, r_{m-1}$  do polinômio  $Q(sa + x)$ , e portanto  $Q(x)$  é  $a$ -hiperbólico. No caso de que  $s_1 = s_2$ , tem-se que  $s_1$  é uma raiz do polinômio  $Q(as + x)$  respeito à variável  $s$ , então usando o Teorema de Rolle para  $f(s)$  nos intervalos  $(s_2, s_3), (s_3, s_4), \dots, (s_{m-1}, s_m)$  obtemos em total  $m - 1$  raízes para o polinômio  $Q(as + x)$  e conseqüentemente  $Q(x)$  é  $a$ -hiperbólico. Para os outros casos dos  $s_i \leq s_{i+1}$  é feito de maneira análoga.

(3) Vamos fazer a prova por contradição. Tomemos  $x_0 \in C(P, a)$ , isto é

$$P(as + x_0) \neq 0, \quad \forall s \geq 0, \tag{1.12}$$

e suponhamos que  $x_0 \notin C(Q, a)$ . Como  $x_0$  não pertence ao conjunto  $C(Q, a)$ , existe  $s_0 \geq 0$  tal que  $Q(as_0 + x_0) = 0$ . Agora, pelo Teorema de Rolle cada raiz do polinômio  $Q(as + x_0)$  está entre dois raízes do polinômio  $P(as + x_0)$ , assim, existe  $s_1 \geq 0$  tal que  $s_1 \geq s_0$  de maneira que  $P(as_1 + x_0) = 0$ , mas isto contradiz (1.12) e portanto  $x_0 \in C(Q, a)$ . ■

**Lema 1.35.** A função simétrica  $n$ -elemental  $\sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio  $a_0$ -hiperbólico de grau  $n$ .

*Demonstração.* Se  $r = n$ , então  $\sigma_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 z_2 \dots z_n$  é um polinômio homogêneo de grau  $n$ . Além disso, o polinômio  $\sigma_n((1, 1, \dots, 1)s + (z_1, z_2, \dots, z_n)) = (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n)$  com respeito à variável  $s$ , tem  $n$  raízes reais para todo  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ . Portanto  $\sigma_n$  é um polinômio  $a_0$ -hiperbólico de grau  $n$ . ■

**Lema 1.36.** As funções simétricas  $r$ -elementais  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  podem-se expressar como

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{(n-r)!} \left. \frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \sigma_n(sa_0 + x) \right|_{s=0}, \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, n.$$

*Demonstração.* Para provar este resultado, precisamos demonstrar por indução sobre  $n$ , que

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + x) \right|_{s=0} = t! \sigma_{n-t}(x), \quad \text{para } t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.13)$$

Por notação, para  $t = 0$  vamos fazer  $\frac{d^0}{ds^0} \sigma_n(x) = \sigma_n(x)$ . Começemos a prova por indução.

Passo base para  $k = 1$ : Note que  $\sigma_1(x_1) = x_1$  e  $\sigma_1(sa_0 + x_1) = (s + x_1)$ , portanto

$$\left. \frac{d^0}{ds^0} \sigma_1(sa_0 + x_1) \right|_{s=0} = \sigma_1(sa_0 + x_1) \Big|_{s=0} = 0! \sigma_1(x_1).$$

Passo base para  $k = 2$ : Note que  $\sigma_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$  e  $\sigma_2(sa_0 + (x_1, x_2)) = (s + x_1)(s + x_2)$ , portanto

$$\left. \frac{d^0}{ds^0} \sigma_2(sa_0 + (x_1, x_2)) \right|_{s=0} = \sigma_2(sa_0 + (x_1, x_2)) \Big|_{s=0} = 0! \sigma_2(x_1, x_2),$$

e também

$$\left. \frac{d}{ds} \sigma_2(sa_0 + (x_1, x_2)) \right|_{s=0} = 2s + x_1 + x_2 \Big|_{s=0} = x_1 + x_2 = 1! \sigma_1(x_1, x_2).$$

Hipótese de indução: É verdade que  $\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_k(sa_0 + (x_1, \dots, x_k)) \right|_{s=0} = t! \sigma_{k-t}(x_1, \dots, x_k)$  para os valores de  $k = 1, 2, \dots, n-1$  com  $t = 0, 1, 2, \dots, k-1$ .

Agora, assumindo a hipótese de indução, vamos provar que para  $k = n$  é válido que

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = t! \sigma_{n-t}(x_1, \dots, x_n),$$

para  $t = 0, 1, \dots, n-1$ . De fato, note que

$$\frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) = \frac{d^t}{ds^t} \sigma_{n-1}(s + x_1, \dots, s + x_{n-1})(s + x_n) + t \frac{d^{t-1}}{ds^{t-1}} \sigma_{n-1}(s + x_1, \dots, s + x_{n-1}), \quad (1.14)$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Agora, avaliando  $\frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n))$  em  $s = 0$  para  $t = 0, 1, \dots, n-1$ , usando a hipótese de indução e também usando (5), de (1.14) temos que

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = \left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_{n-1}(s + x_1, \dots, s + x_{n-1}) \right|_{s=0} x_n + t \left. \frac{d^{t-1}}{ds^{t-1}} \sigma_{n-1}(s + x_1, \dots, s + x_{n-1}) \right|_{s=0}$$

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = t! \sigma_{n-1-t}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n + t(t-1)! \sigma_{n-1-(t-1)}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = t! \sigma_{(n-t)-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n + t! \sigma_{(n-t)}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = t! [\sigma_{(n-t)-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n + \sigma_{(n-t)}(x_1, \dots, x_{n-1})]$$

$$\left. \frac{d^t}{ds^t} \sigma_n(sa_0 + (x_1, \dots, x_n)) \right|_{s=0} = t! \sigma_{n-t}(x_1, \dots, x_n)$$

para  $t = 0, 1, \dots, n-1$ , e portanto fica provado (1.13). Finalmente, isolando  $\sigma_{n-t}(x)$  de (1.13) e fazendo  $n-t = r$ , obtemos que  $\sigma_r(x) = \frac{1}{(n-r)!} \frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0}$  para  $r = 1, 2, \dots, n$ . ■

Agora sim, provemos o resultado das funções  $\sigma_r$ :

**Proposição 1.37.** *As funções simétricas  $r$ -elementais  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $r = 1, 2, \dots, n$ , são polinômios  $a_0$ -hiperbólicos de grau  $r$ .*

*Demonstração.* Como o polinômio  $\sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é  $a_0$ -hiperbólico de grau  $n$  pelo Lema 1.35, podemos usar  $(n-1)$ -vezes a parte (2) do Lema 1.34 em cada uma das  $(n-1)$  derivadas de  $\sigma_n$ , e temos que

$$\frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0} \quad (1.15)$$

é um polinômio  $a_0$ -hiperbólico de grau  $r$  para  $r = 1, 2, \dots, n$ . Por notação, quando  $r = n$  fazemos

$$\frac{d^0}{ds^0} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0} = \sigma_n(x).$$

Então, se multiplicamos (1.15) por  $\frac{1}{(n-r)!}$  segue-se que o polinômio

$$\frac{1}{(n-r)!} \frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0}$$

também é  $a_0$ -hiperbólico de grau  $r$  para  $r = 1, 2, \dots, n$ . Agora, pelo Lema 1.36 temos a igualdade

$$\sigma_r(x) = \frac{1}{(n-r)!} \frac{d^{n-r}}{ds^{n-r}} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0}$$

para  $r = 1, 2, \dots, n$ , e conseqüentemente tem-se que  $\sigma_r$  é um polinômio  $a_0$ -hiperbólico de grau  $r$ , com  $r = 1, 2, \dots, n$ . ■

Como as funções simétricas  $r$ -elementais  $\sigma_r$  são polinômios  $a_0$ -hiperbólicos, podemos definir os conjuntos  $C(\sigma_r, a_0)$  que denotaremos  $\Gamma_r$ . Provaremos o seguinte resultado interessante:

**Proposição 1.38.**  $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \dots \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_1$ .

*Demonstração.* Como  $\sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio  $a_0$ -hiperbólico pelo Lema 1.35, e  $\sigma_{n-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $\sigma_{n-1}(x) = \frac{d}{ds} \sigma_n(sa_0 + x) \Big|_{s=0}$ , podemos usar a parte (3) do Lema 1.34 e obter

$$C(\sigma_n, a_0) \subset C(\sigma_{n-1}, a_0).$$

Igualmente  $\sigma_{n-2}, \dots, \sigma_1$  satisfazem  $\sigma_{n-2}(x) = \frac{d}{ds} \sigma_{n-1}(sa_0 + x) \Big|_{s=0}, \dots, \sigma_1(x) = \frac{d}{ds} \sigma_2(sa_0 + x) \Big|_{s=0}$ , então pela parte (3) do Lema (1.34) novamente, obtemos as inclusões

$$C(\sigma_{n-1}, a_0) \subset C(\sigma_{n-2}, a_0) \subset \dots \subset C(\sigma_2, a_0) \subset C(\sigma_1, a_0),$$

e conseqüentemente  $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \dots \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_1$ . ■

A seguinte proposição é consequência dos resultados anteriores apresentados nesta seção.

**Proposição 1.39.** *Para o cone  $\mathcal{O}^n$  e os conjuntos  $\Gamma_r$ , tem-se que:*

- (1)  $\Gamma_n$  coincide com o cone positivo  $\mathcal{O}^n$ ;
- (2)  $\mathcal{O}^n \subset \Gamma_r$  para cada  $r = 1, 2, \dots, n$ ;
- (3) Cada  $\Gamma_r$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ ;
- (4) Cada  $\Gamma_r$  é um cone convexo e coincide com a componente conexa em  $\mathbb{R}^n$  do conjunto  $\{\sigma_r > 0\}$  que contém ao vetor  $a_0$ .

Lembremos de (4) que para cada  $r = 1, 2, \dots, n$  as funções simétricas  $r$ -elementais  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  estão definidas por  $\sigma_r(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_r}$ . Encerramos esta seção com um resultado que garante quando as derivadas parciais das funções  $\sigma_r$  são positivas num ponto. Uma prova da seguinte proposição pode ser encontrada em [16, pág. 269].

**Proposição 1.40.** *Se  $a \in \Gamma_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , então as funções simétricas  $r$ -elementais  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(a) > 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

---

# Curvatura $r$ -média e Elipticidade

---

Neste capítulo vamos construir de uma maneira muito natural,  $n$  operadores elípticos que vão a coincidir com as funções de curvatura  $r$ -média  $H_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ . Na primeira seção, será feita a construção desses operadores, e na segunda seção se provará a elipticidade de cada um deles.

## 2.1 Curvatura $r$ -média

Dados uma hipersuperfície  $M^n$  de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ , e um ponto  $p \in M^n$ . Parametrizando numa vizinhança de  $p$  em  $M$  por  $\varphi(x) = \exp_p(x + \mu(x)\eta_0)$  como em (1), nesta seção queremos encontrar um operador  $\Phi_r$  definido em algum aberto de  $\mathbb{R}^d$ , de maneira que a função curvatura  $r$ -média  $H_r$  avaliada em  $x \in W$ , coincida com o operador  $\Phi_r$  no ponto  $\Lambda(\mu)(x) = (u_{ij}, \mu_i(x), \mu(x), x)$ , ou seja

$$H_r(x) = \Phi_r(\Lambda(\mu)(x)), \quad \text{para todo } x \in W.$$

Para este fim, vamos fixar uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $T_pM$ , para introduzir um sistema de coordenadas em  $T_pM$  em relação à base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Assim, para cada vetor  $x \in T_pM$ , vai existir um único vetor de coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Também vamos denotar por  $v(x)$  o vetor  $\sum_{m=1}^n x_m e_m + \mu(x)\eta_0$ , e para as derivadas parciais de  $\varphi$  e  $\mu$  usaremos as notações:

$$\partial_{x_i} \varphi(x) =: \varphi_i(x), \quad \partial_{x_i} \mu(x) =: \mu_i(x), \quad \partial_{x_i x_j} \varphi(x) =: \mu_{ij}(x).$$

Relembremos que  $\eta : W \rightarrow T_{\varphi(W)}^\perp M$  é uma orientação local para a hipersuperfície  $M$  tal que  $\eta(0_p) = \eta_0$ , e  $A_{\eta(x)}$  é operador de forma associado a  $M^n$ . Se  $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é a matriz associada ao operador de forma  $A_{\eta(x)}$  na base  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  de  $T_pM$ , queremos relacionar a matriz  $A(x)$  com as matrizes da primeira e segunda forma fundamental de  $M$ . Antes de fazer isso, provemos o seguinte resultado.

**Lema 2.1.** O operador de forma  $A_{\eta(x)}$  satisfaz  $A_{\eta(x)}(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x)\varphi_j(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , para todo  $x \in W$ .

*Demonstração.* Como  $A(x) = (a_{ij}(x))$  é a matriz associada ao operador de forma  $A_{\eta(x)} : T_pM \rightarrow T_pM$  na base  $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  de  $T_pM$ , temos que

$$\begin{aligned} A_{\eta(x)}(\varphi_1(x)) &= a_{11}(x)\varphi_1(x) + a_{21}(x)\varphi_2(x) + \dots + a_{n1}\varphi_n(x) \\ A_{\eta(x)}(\varphi_2(x)) &= a_{12}(x)\varphi_1(x) + a_{22}(x)\varphi_2(x) + \dots + a_{n2}\varphi_n(x) \\ &\vdots \\ A_{\eta(x)}(\varphi_n(x)) &= a_{1n}(x)\varphi_1(x) + a_{2n}(x)\varphi_2(x) + \dots + a_{nn}\varphi_n(x) \end{aligned}$$

e portanto  $A_{\eta(x)}(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x)\varphi_j(x)$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . ■

Se  $I(x), II(x) \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  são as matrizes da primeira e segunda forma fundamental de  $M$  com as entradas

$$I(x)_{ij} = \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle \quad \text{e} \quad II(x)_{ij} = \langle A_{\eta(x)}(\varphi_i(x)), \varphi_j(x) \rangle = \langle (\nabla_{\varphi_i} \varphi_j)_x, \eta(x) \rangle,$$

respectivamente, onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita em  $N$ , o próximo resultado relacionará a matriz do operador de forma  $A_{\eta(x)}$  com as matrizes  $I(x)^{-1}$  e  $II(x)$ .

**Proposição 2.2.** A matriz associada ao operador de forma  $A_{\eta(x)}$  pode-se expressar por  $A(x) = I(x)^{-1}II(x)$ , para todo  $x \in W$ .

*Demonstração.* Multiplicando as matrizes  $I(x)$ ,  $A(x)$  com ajuda das propriedades da métrica  $\langle, \rangle$  e usando o Lema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} I(x)A(x) &= \left( \sum_{k=1}^n \langle \varphi_i(x), \varphi_k(x) \rangle a_{kj}(x) \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \langle \varphi_i(x), a_{kj}(x)\varphi_k(x) \rangle \right) \\ &= \left( \left\langle \varphi_i(x), \sum_{k=1}^n a_{kj}(x)\varphi_k(x) \right\rangle \right) \\ &= \left( \langle \varphi_i(x), A_{\eta(x)}(\varphi_j(x)) \rangle \right) \\ &= \left( \langle A_{\eta(x)}(\varphi_j(x)), \varphi_i(x) \rangle \right) \\ &= II(x)^t. \end{aligned}$$

Agora, como  $I(x)$  é uma matriz invertível, pois é uma matriz definida positiva, e pelo fato de  $II(x)$  ser uma matriz simétrica, de acima segue-se que  $A(x) = I(x)^{-1}II(x)$ . ■



O seguinte resultado nos ajudará a expressar as entradas da matriz  $I(x)^{-1}$  em termos de  $x$ ,  $\mu(x)$  e das derivadas  $\mu_i(x)$ .

**Lema 2.3.** *Cada vetor  $\varphi_i(x)$  é da forma  $\varphi_i(x) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \mu_i(x)\eta_0)$ , para todo  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Usando a regra da cadeia para derivar  $\varphi(x) = \exp_p(x + \mu(x)\eta_0)$  obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \partial_{x_i} \varphi(x) = d(\exp_p)_{v(x)}[\partial_{x_i}(x + \mu(x)\eta_0)] \\ &= d(\exp_p)_{v(x)}[\partial_{x_i}x + \partial_{x_i}\mu(x)\eta_0] \\ &= d(\exp_p)_{v(x)}[\partial_{x_i}(\sum_{m=1}^n x_m e_m) + \partial_{x_i}\mu(x)\eta_0] \\ &= d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \partial_{x_i}\mu(x)\eta_0) \\ &= d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \mu_i(x)\eta_0)\end{aligned}$$

e fica provado o resultado. ■

Em particular, do Lema 2.3 segue-se que as derivadas parciais de primeira ordem da função  $\mu$  avaliadas no zero satisfazem

$$\mu_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Agora, consideremos ao maior subconjunto aberto e conexo em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que contém a origem, definido por  $\mathcal{N} := \{(z, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : d(\exp_p)_{(\sum_{i=1}^n y_i e_i + z\eta_0)} \text{ é um isomorfismo linear}\}$ . O conjunto maximal  $\mathcal{N}$  existe pelo fato de que  $d(\exp_p)_0$  é a identidade. Mostremos que a matriz  $I(x)^{-1}$  pode-se identificar com uma matriz do espaço  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R}^n \times \mathcal{N})$ .

**Proposição 2.4.** *Existe uma matriz simétrica definida positiva  $F(r_i, z, y_i) \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}^n \times \mathcal{N})$  que satisfaz  $F(\mu_i(x), \mu(x), x_i) = I(x)^{-1}$ , para todo  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Como as entradas da matriz  $I(x)$  dependem somente dos vetores  $\varphi_i(x)$ , pelo Lema 2.3 a matriz  $I(x)$  pode-se reescrever em função de  $\mu_i(x)$ ,  $\mu(x)$  e das coordenadas de  $x$ . Se trocamos  $\mu_i(x)$  por  $r_i$ ,  $\mu(x)$  por  $z$ , e  $x_i$  por  $y_i$ , em cada entrada da matriz  $I(x)$ , obtemos uma matriz simétrica  $\bar{F}(r_i, z, y_i)$  de ordem  $n \times n$ , que tem inversa nos pontos  $(r_i, z, y_i)$  tais que  $d(\exp_p)_{\sum_{i=1}^n y_i e_i + z\eta_0}$  é um isomorfismo linear. Assim, restringindo  $\bar{F}$  a  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$  e fazendo  $F(r_i, z, y_i) := \bar{F}(r_i, z, y_i)^{-1}$ , temos que  $F(r_i, z, y_i)$  pertence a  $\mathbb{S}_n(\mathbb{R}^n \times \mathcal{N})$  e além disso  $I(x)^{-1} = F(\mu_i(x), \mu(x), x_i)$  para todo  $x \in W$ . Que  $F(r_i, z, y_i)$  seja definida positiva, segue-se da métrica Riemanniana de  $N^{n+1}$ . ■

Agora, provaremos uma igualdade que relaciona derivadas de  $\varphi$ ,  $\mu$  e  $\bar{\mu}$ , onde  $\bar{\mu} := \mu \circ \varphi^{-1}$ .

**Lema 2.5.** *Os vetores  $\varphi_i(x)$  satisfazem  $\varphi_i(x)(\bar{\mu}_j) = \mu_{ij}(x)$ , para todo  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Para cada  $x \in W$  vamos considerar o diferencial de  $\varphi$  em  $x$  dado por

$$\begin{aligned} d\varphi_x : T_x W &\longrightarrow T_{\varphi(x)} M \\ e_i &\longmapsto d\varphi_x(e_i) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\beta \longmapsto d\varphi_x(e_i)(\beta) = e_i(\beta \circ \varphi). \end{aligned}$$

Observe que, como  $W \subset T_p M$ , então  $T_x W = T_p M$ . Além disso, a função  $\bar{\mu} = \mu \circ \varphi^{-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$  avaliada no operador  $d\varphi_x(e_i) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é igual a

$$d\varphi_x(e_i)(\bar{\mu}) = \partial_{x_i} \varphi(x)(\bar{\mu}), \quad (2.2)$$

pois  $d\varphi_x(e_i)(\bar{\mu}) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_i(x + \mu(x)\eta_0))(\bar{\mu}) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \partial_{x_i} \mu(x)\eta_0)(\bar{\mu}) = \partial_{x_i} \varphi(x)(\bar{\mu})$ .

Provemos que

$$\partial_{x_i}(\bar{\mu} \circ \varphi)(x) = \partial_{x_i} \mu(x). \quad (2.3)$$

De fato, como  $\mu(x) = (\bar{\mu} \circ \varphi)(x)$ , usando (2.2) temos que  $\partial_{x_i}(\bar{\mu} \circ \varphi)(x) = \partial_{x_i} \varphi(x)(\bar{\mu}) = d\varphi_x(e_i)(\bar{\mu}) = e_i(\bar{\mu} \circ \varphi) = e_i(\mu) = \partial_{x_i} \mu(x)$ , e fica provado (2.3). Agora, note que

$$\partial_{x_i} \varphi(x)(\partial_{x_j} \bar{\mu}) = \partial_{x_i x_j} \mu(x), \quad (2.4)$$

pois usando (2.2) e (2.3) obtemos que  $\partial_{x_i} \varphi(x)(\partial_{x_j} \bar{\mu}) = d\varphi_x(e_i)(\partial_{x_j} \bar{\mu}) = e_i(\partial_{x_j}(\bar{\mu} \circ \varphi)) = e_i(\partial_{x_j} \mu) = \partial_{x_i x_j} \mu(x)$ . Mudando as notações das derivadas em (2.4) concluímos que  $\varphi_i(x)(\bar{\mu}_j) = \mu_{ij}(x)$ . ■

O próximo resultado permitirá caracterizar as entradas da matriz  $\Pi(x)$  em termos de  $x$ ,  $\mu(x)$  e das derivadas de primeira e segunda ordem de  $\mu$ .

**Lema 2.6.** *O termo  $(\nabla_{\varphi_i} \varphi_j)_x$  da entrada da matriz  $\Pi(x)$  pode-se expressar da forma*

$$\nabla_{\varphi_i(x)} \varphi_j(x) = \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + \mu_{ij}(x) d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0) + \mu_j(x) \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0).$$

*Demonstração.* Note que  $\varphi_i(x) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \mu_i(x)\eta_0)$  e  $\varphi_j(x) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_j + \mu_j(x)\eta_0)$ , então, usando o Lema 2.5 e as propriedades da conexão  $\nabla$  para o termo  $\nabla_{\varphi_i(x)} \varphi_j(x)$  obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\varphi_i(x)} \varphi_j(x) &= \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j + \mu_j(x)\eta_0) \\ &= \nabla_{\varphi_i(x)} [d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + d(\exp_p)_{v(x)}(\mu_j(x)\eta_0)] \\ &= \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(\mu_j(x)\eta_0) \\ &= \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + \nabla_{\varphi_i(x)} [\mu_j(x) d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0)] \\ &= \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + \mu_j(x) \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0) + \varphi_i(x)(\mu_j) d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0) \\ &= \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_j) + \mu_j(x) \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0) + \mu_{ij}(x) d(\exp_p)_{v(x)}(\eta_0) \end{aligned}$$

e fica provado o resultado. ■

Com ajuda do lema anterior, provemos que a matriz  $II(x)$  da segunda forma fundamental de  $M$ , coincide com uma matriz do espaço  $\mathbb{S}_n \left( \mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N} \right)$ .

**Proposição 2.7.** *Existe uma matriz simétrica  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i) \in \mathbb{S}_n \left( \mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N} \right)$ , que satisfaz  $G(\mu_{ij}(x), \mu_i(x), \mu(x), x_i) = II(x)$  para todo  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Do Lema 2.6 segue-se que as entradas da matriz  $II(x)$  tem a forma

$$\begin{aligned} II(x)_{ij} &= \langle \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)} e_j, \eta(x) \rangle \\ &\quad + \mu_{ij}(x) \langle d(\exp_p)_{v(x)} \eta_0, \eta(x) \rangle \\ &\quad + \mu_j(x) \langle \nabla_{\varphi_i(x)} d(\exp_p)_{v(x)} \eta_0, \eta(x) \rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a matriz  $II(x)$  pode-se escrever, em função de  $\mu_{ij}(x), \mu_i(x), \mu(x)$  e das coordenadas  $x_i$  de  $x$ . Se em (2.5) trocamos  $\mu_{ij}(x)$  por  $r_{ij}$ ,  $\mu_i(x)$  por  $r_i$ ,  $\mu(x)$  por  $z$ , e  $x_i$  por  $y_i$  com  $1 \leq i \leq j \leq n$ , obtemos uma matriz simétrica  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  de ordem  $n \times n$  que pertence a  $\mathbb{S}_n \left( \mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N} \right)$  e satisfaz  $II(x) = G(\mu_{ij}(x), \mu_i(x), \mu(x), x_i)$  para todo  $x \in W$ . ■

Agora, vamos construir uma função definida num aberto de  $\mathbb{R}^d$ , que tem como contradomínio ao espaço das matrizes  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , para depois definir o operador  $\Phi_r$  em termos dela.

**Proposição 2.8.** *Existe uma função  $\tilde{A}$  definida no aberto  $\mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N}$  de  $\mathbb{R}^d$ , que tem a forma*

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ (r_{ij}, r_i, z, y_i) &\longmapsto \tilde{A}(r_{ij}, r_i, z, y_i) = F(r_i, z, y_i)G(r_{ij}, r_i, z, y_i), \end{aligned}$$

tal que para cada  $x \in W$ , a função  $\tilde{A}$  avaliada no ponto  $\Lambda(\mu(x)) = (\mu_{ij}(x), \mu_i(x), \mu(x), x)$ , coincide com a matriz  $A(x)$  do operador de forma  $A_{\eta(x)}$ , isto é,  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(x)) = A(x)$  para todo  $x \in W$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2, Proposição 2.4 e Proposição 2.7, podemos definir a função  $\tilde{A}(r_{ij}, r_i, z, y_i) = F(r_i, z, y_i)G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  definida no conjunto aberto  $\mathbb{R}^{(n(n+1)/2)+n} \times \mathcal{N}$  de  $\mathbb{R}^d$  que satisfaz  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(x)) = A(x)$  para todo  $x \in W$ . Além disso, pelo fato de ser  $F(r_i, z, y_i)$  e  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  matrizes de ordem  $n \times n$ , segue-se que o contradomínio da função  $\tilde{A}$  é o espaço  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . ■

Denotemos simplesmente por  $\lambda$ , a função  $\lambda : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^n$  que a cada matriz  $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  com autovalores  $|\lambda_1(M)| \leq |\lambda_2(M)| \leq \dots \leq |\lambda_n(M)|$ , faz corresponder a  $n$ -upla  $(\lambda_1(M), \lambda_2(M), \dots, \lambda_n(M))$ .

**Teorema 2.9.** *Existe um operador  $\Phi_r : \mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para  $x \in W$ , o operador  $\Phi_r$  avaliado no ponto  $\Lambda(\mu)(x) = (\mu_{ij}(x), \mu_i(x), \mu(x), x)$ , coincide com a função curvatura  $r$ -média  $H_r$  no ponto  $x$ , isto é,  $\Phi_r(\Lambda(\mu)(x)) = H_r(x)$  para todo  $x \in W$ .*

*Demonstração.* Fazendo a composição entre as funções  $\tilde{A}$ ,  $\lambda$  e  $\sigma_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos definir o operador  $\Phi_r$  em  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$  da forma  $\Phi_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sigma_r \circ \lambda \circ \tilde{A}$ , que satisfaz  $\Phi_r(\Lambda(\mu)(x)) = H_r(x)$  para todo  $x \in W$ . ■

## 2.2 Elipticidade

O objetivo desta seção é provar que os operadores  $\Phi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , do Teorema 2.9 são elípticos. Para isso, começaremos provando a diferenciabilidade da função  $\sigma_r \circ \lambda : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lema 2.10.** *A função  $\sigma_r \circ \lambda$  é diferenciável.*

*Demonstração.* Como a função  $\sigma_r$  é um polinômio homogêneo de grau  $r$  pela Proposição 1.37, então para qualquer matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  temos que  $\sigma_r \circ \lambda(A)$  é um polinômio homogêneo de grau  $r$  com respeito as entradas da matriz  $A$ , e portanto  $\sigma_r \circ \lambda$  é diferenciável. ■

Com o seguinte resultado, vamos caracterizar as derivadas parciais da função  $\sigma_r \circ \lambda$ .

**Proposição 2.11.** *Se  $A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal que satisfaz  $\lambda(A_0) \in \Gamma_r$ , então*

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq l, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_k}(\lambda(A_0)) > 0, & \text{se } k = l, \end{cases}$$

*Demonstração.* Como  $\sigma_r \circ \lambda$  é diferenciável pelo Lema 2.10, da regra de cadeia obtemos que

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(\lambda(A_0)) \frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kl}}(A_0). \quad (2.6)$$

Agora, vejamos como é a cara de cada termo  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kl}}(A_0)$  de acima, quando  $k \neq l$  e  $k = l$ .

$k \neq l$ : Consideremos a matriz  $E^{kl} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , então como  $k \neq l$ , da Proposição 1.1 segue-se que as matrizes  $A_0$  e  $A_0 + tE^{kl}$  têm os mesmos autovalores, isto é,  $\lambda_i(A_0) = \lambda_i(A_0 + tE^{kl})$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Assim  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kl}}(A_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(A_0 + tE^{kl}) - \lambda_i(A_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0$ , e portanto para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  temos que

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kl}}(A_0) = 0, \quad \text{se } k \neq l. \quad (2.7)$$

$k = l$ : Consideremos a matriz  $E^{kk} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , então como  $A_0$  é uma matriz diagonal, para  $t$  suficientemente pequeno, os autovalores  $\lambda_i(A_0 + tE^{kk})$  da matriz  $A_0 + tE^{kk}$  satisfazem  $\lambda_i(A_0 + tE^{kk}) = (A_0)_{ii} + t(E^{kk})_{ii}$ . Portanto, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  obtemos

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kk}}(A_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_i(A_0 + tE^{kk}) - \lambda_i(A_0)}{t} = (E^{kk})_{ii} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i, \\ 1, & \text{se } k = i. \end{cases} \quad (2.8)$$

Como já sabemos como são os termos  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kl}}(A_0)$  quando  $k \neq l$  e  $k = l$ , de (2.6), (2.7) e (2.8) segue-se

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq l, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_k}(\lambda(A_0)), & \text{se } k = l. \end{cases}$$

Agora, pela hipótese  $\lambda(A_0) \in \Gamma_r$ , podemos usar a Proposição 1.40 e obtemos que  $\frac{\partial \sigma_r}{\partial z_k}(\lambda(A_0)) > 0$  para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ . Consequentemente

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq l, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_k}(\lambda(A_0)) > 0, & \text{se } k = l, \end{cases}$$

e fica provado o resultado. ■

Provemos outra propriedade da função  $\sigma_r \circ \lambda$ .

**Lema 2.12.** *Se  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal, então  $\sigma_r \circ \lambda(P^t A P) = \sigma_r \circ \lambda(A)$  para qualquer matriz  $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Da proposição 1.3 segue-se que as duas matrizes  $A$  e  $P^t A P$  têm os mesmos autovalores, daí  $\lambda(P^t A P) = \lambda(A)$ , e conseqüentemente  $(\sigma_r \circ \lambda)(P^t A P) = (\sigma_r \circ \lambda)(A)$ . ■

O seguinte resultado será uma ferramenta importante na prova de elipticidade dos operadores  $\Phi_r$ .

**Proposição 2.13.** *Se  $A_0 \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  satisfaz  $\lambda(A_0) \in \Gamma_r$ , então  $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{ij}}(A_0) \xi_i \xi_j > 0$  para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .*

*Demonstração.* Como  $A_0$  é simétrica, existe uma matriz ortogonal  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  tal que  $P^t A_0 P$  é uma matriz diagonal. Agora, fazendo  $C := P^t A P$ , vamos calcular  $\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0)$  com respeito às entradas de  $C$  e  $A$ . Com efeito, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(A_0) \frac{\partial C_{ij}}{\partial A_{kl}}(A_0),$$

então pelo Lema 2.12 a expressão de acima pode se reescrever por

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) \frac{\partial C_{ij}}{\partial A_{kl}}(A_0). \quad (2.9)$$

Usando a Proposição 1.2, vejamos que caras têm as derivadas  $\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P)$  em (2.9). De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(P^t A P)_{ij}}{\partial A_{kl}}(A_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P^t(A_0 + hE^{kl})P)_{ij} - (P^t A_0 P)_{ij}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P^t A_0 P + P^t hE^{kl} P)_{ij} - (P^t A_0 P)_{ij}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P^t A_0 P)_{ij} + (hP^t E^{kl} P)_{ij} - (P^t A_0 P)_{ij}}{h} = (P^t E^{kl} P)_{ij} = P_{ik}^t P_{jl}^t, \end{aligned}$$

então a expressão (2.9) pode-se reescrever por

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) P_{ik}^t P_{jl}^t,$$

e para todo  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) \xi_k \xi_l &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) P_{ik}^t P_{jl}^t \xi_k \xi_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) P_{ik}^t \xi_k P_{jl}^t \xi_l \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) w_i w_j \end{aligned}$$

onde  $w = P^t \xi \neq 0$ , isto é

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) \xi_k \xi_l = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) w_i w_j. \quad (2.10)$$

Agora, usando a Proposição 2.11 vejamos que forma têm as derivadas  $\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P)$  da expressão de acima. De fato, usando a Proposição 1.3 com as duas matrizes  $P^t A_0 P$  e  $A_0$  obtemos que  $\lambda(P^t A_0 P) = \lambda(A_0)$ , logo da hipótese  $\lambda(A_0) \in \Gamma_r$ , segue-se que a matriz diagonal  $P^t A_0 P$  satisfaz  $\lambda(P^t A_0 P) \in \Gamma_r$ , daí pela Proposição 2.11 temos que

$$\frac{\partial \sigma_r \circ \lambda}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(\lambda(P^t A_0 P)) > 0, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Então

$$\frac{\partial \sigma_r \circ \lambda}{\partial C_{ij}}(P^t A_0 P) w_i w_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(\lambda(P^t A_0 P)) (w_i)^2 > 0, & \text{se } i = j, \end{cases}$$

e portanto (2.10) satisfaz  $\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{kl}}(A_0) \xi_k \xi_l > 0$  para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . ■

Lembremos da seção anterior, que as entradas  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)_{kl}$ ,  $k \leq l$ , da matriz  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  foram obtidas das entradas da matriz  $II(x)$ .

**Observação 2.14.** Seja  $k \leq l$ . Se em (2.5) trocamos  $\mu_{kl}(x)$  por  $r_{kl}$ ,  $\mu_m(x)$  por  $r_m$ ,  $\mu(x)$  por  $z$ , e  $x_m$  por  $y_m$ , com  $1 \leq m \leq n$ , obtemos que as entradas da matriz  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  têm a forma

$$\begin{aligned} G(r_{ij}, r_i, z, y_i)_{kl} &= \langle \nabla_{\psi_k} d(\exp_p)_v e_l, \eta \rangle_{(r_i, z, y_i)} + r_{kl} \langle d(\exp_p)_v \eta_0, \eta \rangle_{(r_i, z, y_i)} \\ &\quad + r_l \langle \nabla_{\psi_k} d(\exp_p)_v \eta_0, \eta \rangle_{(r_i, z, y_i)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $v(z, y_i) = \sum_{m=1}^n y_m e_m + z \eta_0$ ,  $\psi_k(r_i, z, y_i) = d(\exp_p)_{v(z, y_i)}(e_k + r_k \eta_0)$  e  $\eta(r_i, z, y_i)$  é o vetor unitário que é normal ao hiperplano gerado por  $\psi_m(r_i, z, y_i)$ ,  $1 \leq m \leq n$ .

Agora, lembrando que as entradas  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)_{kl} =: G_{kl}$ ,  $k \leq l$ , da matriz  $G(r_{ij}, r_i, z, y_i)$  são em função de  $r_{ij}$ ,  $r_i$ ,  $z$ ,  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , vamos calcular as derivadas parciais de primeira ordem de  $G_{mt}$  avaliada num ponto do aberto  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$  de  $\mathbb{R}^d$ , com respeito às variáveis  $r_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Para isto, definamos a função  $\omega$

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}^n \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r_i, z, y_i) &\longmapsto \omega(r_i, z, y_i) = \langle d(\exp_p)_{v(z, x_i)} \eta_0, \eta(r_i, z, x_i) \rangle, \end{aligned}$$

com  $v(z, x_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i + z \eta_0$ .

**Lema 2.15.** Para  $k \leq l$  temos que

$$\frac{\partial G_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0) = \begin{cases} \omega(r_i^0, z^0, x_i^0), & \text{se } (\delta_{mk} \delta_{tl} + \delta_{ml} \delta_{tk}) \neq 0, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

onde  $p_0 = (r_{ij}^0, r_i^0, z^0, x_i^0)$  é um ponto do aberto  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$ .

*Demonstração.* Usando (2.11) note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(r_{11}^0, \dots, r_{kl}^0 + h, \dots, r_{mm}^0, r_i^0, z^0, y_i^0)_{mt} - G(r_{ij}^0, r_i^0, z^0, y_i^0)_{mt}}{h} \\ &= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r_{mt}^0 + h) \omega(r_i^0, z^0, x_i^0) - r_{mt}^0 \omega(r_i^0, z^0, x_i^0)}{h}, & \text{se } r_{mt}^0 = r_{kl}^0 \text{ ou } r_{mt}^0 = r_{lk}^0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{mt}^0 \omega(r_i^0, z^0, x_i^0) - r_{mt}^0 \omega(r_i^0, z^0, x_i^0)}{h}, & \text{se } r_{mt}^0 \neq r_{kl}^0 \text{ ou } r_{mt}^0 \neq r_{lk}^0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega(r_i^0, z^0, x_i^0), & \text{se } r_{mt}^0 = r_{kl}^0 \text{ ou } r_{mt}^0 = r_{lk}^0, \\ 0, & \text{se } r_{mt}^0 \neq r_{kl}^0 \text{ ou } r_{mt}^0 \neq r_{lk}^0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega(r_i^0, z^0, x_i^0), & \text{se } (m, t) = (k, l) \text{ ou } (m, t) = (l, k), \\ 0, & \text{se } (m, t) \neq (k, l) \text{ ou } (m, t) \neq (l, k), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \omega(r_i^0, z^0, x_i^0), & \text{se } (\delta_{mk} \delta_{tl} + \delta_{ml} \delta_{tk}) \neq 0, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $\delta_{mk} \delta_{tl} = \begin{cases} 1, & \text{se } (m, t) = (k, l), \\ 0, & \text{se } (m, t) \neq (k, l), \end{cases}$  e  $\delta_{ml} \delta_{tk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (m, t) = (l, k), \\ 0, & \text{se } (m, t) \neq (l, k). \end{cases}$  ■

O seguinte resultado garante que a função  $\omega$  é positiva em  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$ .

**Lema 2.16.** A função  $\omega$  satisfaz que  $\omega(r_i^0, z^0, x_i^0) > 0$  para todo  $(r_i^0, z^0, x_i^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$  e em particular  $\omega(0, 0, 0) = 1$ .

*Demonstração.* Da Observação 2.14, para qualquer ponto  $(r_i^0, z^0, x_i^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$ , o vetor unitário  $\eta(r_i^0, z^0, x_i^0)$  é ortogonal ao espaço gerado pelo vetor  $\psi_\ell(r_i^0, z^0, x_i^0) = d(\exp_p)_{v(z^0, x_i^0)}(e_\ell + r_\ell^0 \eta_0)$ ,  $\ell =$

$1, 2, \dots, n$ , e  $d(\exp_p)_{v(z^0, x_i^0)}$  é um isomorfismo linear, daí, a função  $\omega(r_i^0, z^0, x_i^0)$  não muda de sinal em  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$ . Além disso, se  $r_i^0 = 0$ ,  $z^0 = 0$  e  $x_i^0 = 0$ , os vetores unitários  $d(\exp_p)_{v(0,0)}\eta_0$  e  $\eta(0,0,0)$  são paralelos. Consequentemente  $\langle d(\exp_p)_{v(0,0)}\eta_0, \eta(0,0,0) \rangle = \|d(\exp_p)_{v(0,0)}\eta_0\| \|\eta(0,0,0)\| = 1$ , isto é,  $\omega(0,0,0) = 1$ , e portanto  $\omega(r_i^0, z^0, x_i^0)$  é positivo em  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{N}$ . ■

Lembremos que na Seção 2.1 introduzimos um sistema de coordenadas em  $T_pM$  em relação à base ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e definimos a matriz  $I(x)$  com entradas  $I(x)_{ij} = \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle$ , onde cada vetor  $\varphi_i(x)$  é da forma  $\varphi_i(x) = d(\exp_p)_{v(x)}(e_i + \mu_i(x)\eta_0)$  com  $v(x) = \sum_{m=1}^n x_m e_m + \mu(x)\eta_0$ . O seguinte lema ajudará na prova da elipticidade dos operadores  $\Phi_r$  e também será usado na Seção 3.1.

**Lema 2.17.** *A matriz  $F(\mu_i(0), \mu(0), 0) \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}^n \times \mathcal{N})$  coincide com a matriz identidade de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Como a função  $\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $\mu(0) = 0$ , se usamos (2.1) e relembramos que os vetores  $e_1, e_2, \dots, e_n$  são ortonormais, temos que

$$\begin{aligned} I(0)_{ij} &= \langle \varphi_i(0), \varphi_j(0) \rangle \\ &= \langle d(\exp_p)_{v(0)}(e_i + \mu_i(0)\eta_0), d(\exp_p)_{v(0)}(e_j + \mu_j(0)\eta_0) \rangle \\ &= \langle d(\exp_p)_0(e_i), d(\exp_p)_0(e_j) \rangle \\ &= \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo  $I(0)$  é a matriz identidade em  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , e sua inversa  $I(0)^{-1} = F(\mu_i(0), \mu(0), 0)$  também é a matriz identidade. ■

Encerramos esta seção mostrando a elipticidade dos operadores  $\Phi_r$ .

**Teorema 2.18.** *Para os operadores  $\Phi_r$  temos que:*

- (1)  $\Phi_1$  é elíptico no aberto  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$  de  $\mathbb{R}^d$ ;
- (2) para cada  $r = 2, 3, \dots, n$ , o operador  $\Phi_r$  é elíptico em qualquer ponto do tipo  $p_0 = (r_{ij}^0, 0, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}^d$  tal que  $\lambda(\tilde{A}(p_0)) \in \Gamma_r$ .

*Demonstração.* (2) Consideremos a  $r = 2, 3, \dots, n$ . Para  $k \leq l$ , da regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda \circ \tilde{A})}{\partial r_{kl}}(p_0) = \sum_{m,t=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial A_{mt}}(\tilde{A}(p_0)) \frac{\partial \tilde{A}_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0). \quad (2.12)$$

Vejam que formas têm as derivadas parciais  $\frac{\partial \tilde{A}_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0)$  da expressão acima. Pela definição da função  $\tilde{A}$  temos que  $\tilde{A}(r_{ij}, r_i, z, y_i)_{mt} = \sum_{\ell} F(r_i, z, y_i)_{m\ell} G(r_{ij}, r_i, z, y_i)_{\ell t}$ , e como  $F(0,0,0)$  é a matriz identidade



pelo Lema 2.17, segue-se que  $\frac{\partial \tilde{A}_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0) = \sum_{\ell} F(0,0,0)_{m\ell} \frac{\partial G_{\ell t}}{\partial r_{kl}}(p_0) = \frac{G_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0)$ . Dos Lema 2.15 e Lema 2.16 obtemos que as derivadas  $\frac{\partial \tilde{A}_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0)$  têm a forma

$$\frac{\partial G_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0) = \begin{cases} 1, & \text{se } (\delta_{mk}\delta_{tl} + \delta_{ml}\delta_{tk}) \neq 0, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad (2.13)$$

Como já sabemos bem a forma das derivadas  $\frac{\partial \tilde{A}_{mt}}{\partial r_{kl}}(p_0)$ , a expressão (2.12) pode-se reescrever por

$$\frac{\sigma_r \circ \lambda \circ \tilde{A}}{\partial r_{kl}}(p_0) = \begin{cases} \left( \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial r_{kl}} + \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial r_{lk}} \right) (\tilde{A}(p_0)), & \text{se } k < l, \\ \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial r_{kk}} (\tilde{A}(p_0)), & \text{se } k = l. \end{cases} \quad (2.14)$$

Agora, como  $\lambda(\tilde{A}(p_0)) \in \Gamma_r$  por hipótese, e  $\tilde{A}(p_0) \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$  pois  $\tilde{A}(p_0) = F(0,0,0)G(p_0) = G(p_0)$ , da Proposição 2.13 obtemos que  $\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial r_{kl}}(\tilde{A}(p_0)) \xi_k \xi_l > 0$  para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Daí e da expressão (2.14) segue-se que  $\sum_{k \leq l} \frac{\partial \Phi_r}{\partial r_{kl}}(p_0) \xi_k \xi_l = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial(\sigma_r \circ \lambda)}{\partial r_{kl}}(\tilde{A}(p_0)) \xi_k \xi_l > 0$ , para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $r = 2, 3, \dots, n$ . Da Definição 1.22 concluímos que os operadores  $\Phi_r$ ,  $r = 2, 3, \dots, n$  são elípticos no ponto  $p_0$ .

(1) Consideremos a  $r = 1$ . Seja  $q = (r_{ij}, r_i, z, y_i) \in \mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$ . Como  $\tilde{A}(q) = F(q)G(q)$  e  $\Phi_1(q) = \frac{1}{\binom{n}{1}} (\sigma_1 \circ \lambda \circ \tilde{A})(q)$ , temos que  $\Phi_1(q) = \frac{1}{n} \sum_t \tilde{A}(q)_{tt} = \frac{1}{n} \sum_{t,n} F(q)_{tm} G_{mt}(q)$ , e lembrando que a matriz  $F$  não depende das entradas  $r_{kl}$ , obtemos que

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{kl}}(q) = \frac{1}{n} \sum_{k,l} F(q)_{tm} \frac{\partial G_{mt}}{\partial r_{kl}}(q). \quad (2.15)$$

Dos Lema 2.15 e Lema 2.16 segue-se que

$$\omega =: \frac{\partial G_{mt}}{\partial r_{kl}}(q) = \begin{cases} \omega(r_i, z, x_i) > 0, & \text{se } (\delta_{mk}\delta_{tl} + \delta_{ml}\delta_{tk}) \neq 0, \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

e para qualquer ponto  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tem-se que

$$\omega \xi_k \xi_l = \begin{cases} \omega(r_i, z, x_i) (\xi_i)^2 > 0, & \text{se } (\delta_{mk}\delta_{tl} + \delta_{ml}\delta_{tk}) \neq 0, \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Das expressões (2.15), (2.16) e do fato de que  $F(q)$  é uma matriz simétrica positiva definida, segue-se que  $\sum_{k \leq l} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{kl}}(q) \xi_k \xi_l = \frac{\omega}{n} \sum_{k,l} F(q)_{k,l} \xi_k \xi_l > 0$  para todo  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Portanto, dado que o ponto  $q \in \mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$  é arbitrário, da Definição 1.22 concluímos que  $\Phi_1$  é elíptico no aberto  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$  de  $\mathbb{R}^d$ . ■

---

# Um Princípio de Tangência e Aplicações

---

Neste capítulo apresentaremos um princípio de tangência para hipersuperfícies e mostraremos algumas de suas aplicações. Na primeira seção, provamos resultados extras que precisaremos para a prova do princípio, e para suas aplicações. Na segunda seção demonstraremos o princípio e obteremos quatro resultados como consequências imediatas dele. Na última seção faremos quatro aplicações.

### 3.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção mostramos algumas propriedades adicionais que satisfazem os conjuntos  $\Gamma_r$  e as funções  $\tilde{A}$ ,  $\mu_c$ . Relembremos que na Seção 1.5 definimos os conjuntos  $\Gamma_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$  da forma  $\Gamma_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_r(sa_0 + x) \neq 0 \text{ para todo } s \geq 0\}$  onde  $a_0$  denota o vetor  $(1, 1, \dots, 1)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Lembremos também que o cone positivo de  $\mathbb{R}^n$  é definido por  $\mathcal{O}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i > 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}$  e portanto seu fecho é o conjunto  $\overline{\mathcal{O}^n} = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n \mid w_i \geq 0 \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n\}$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $p \in \Gamma_r$  e  $v \in \overline{\mathcal{O}^n}$  então  $(p + tv) \in \Gamma_r$  para todo  $t \geq 0$  e cada  $r = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Faremos a prova por contradição, isto é, se  $p \in \Gamma_r$  e  $v \in \overline{\mathcal{O}^n}$ , então vamos supor que existe um  $t_0 > 0$  tal que  $(p + t_0v) \notin \Gamma_r$ . Como o ponto  $(p + t_0v)$  não pertence a  $\Gamma_r$ , existe  $s_0 \geq 0$  tal que  $\sigma_r(s_0a_0 + (p + t_0v)) = 0$ . Sem perda de generalidade, consideremos  $s_0 = 0$ . Logo

$$\sigma_r(p + t_0v) = 0. \tag{3.1}$$

Além disso, das hipóteses  $p \in \Gamma_r$  e  $v \in \overline{\mathcal{O}^n}$  segue-se que

$$\sigma_r(p + tv) > 0 \quad \text{para } t \in [0, t_0). \tag{3.2}$$

Então de (3.1) e (3.2) temos que a função  $\sigma_r(p + tv)$  é decrescente no intervalo  $(0, t_0)$  e portanto

$$\left. \frac{d}{dt} \sigma_r(p + tv) \right|_{t=t'} < 0 \quad \text{para algum } t' \in (0, t_0). \quad (3.3)$$

A ideia agora é procurar uma contração de (3.3). Note que, se consideramos a  $p$  e  $v$  com suas respectivas coordenadas, isto é,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , da regra da cadeia obtemos

$$\left. \frac{d}{dt} \sigma_r(p + tv) \right|_{t=t'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(p + t'v) \left( \left. \frac{d}{dt} (p_i + tv_i) \right|_{t=t'} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(p + t'v) v_i. \quad (3.4)$$

Como  $t' \in (0, t_0)$ , então  $(p + t'v) \in \Gamma_r$  e podemos usar a Proposição 1.40 para obter que

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial z_i}(p + t'v) > 0 \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Usando novamente a hipótese de que o ponto  $v$  pertence ao conjunto  $\overline{\mathcal{O}^n}$ , temos que

$$v_i \geq 0 \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Logo de (3.4), (3.6) e (3.5) obtemos  $\left. \frac{d}{dt} \sigma_r(p + tv) \right|_{t=t'} \geq 0$  que contradiz (3.3). ■

Lembremos que a função  $\tilde{A}$  construída na Proposição 2.8 está definida num aberto de  $\mathbb{R}^d$  e seu contradomínio é o conjunto das matrizes  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposição 3.2.** Cada entrada  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(0))_{kl}$  da matriz simétrica  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(0))$  satisfaz  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(0))_{kl} = \left\langle \frac{D}{ds} d(\exp_p)_{se_l} e_k \Big|_{s=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}(0)$ .

*Demonstração.* Note que a função  $\tilde{A}$  avaliada no ponto  $\Lambda(\mu)(0) = (\mu_{ij}(0), \mu_i(0), \mu(0), 0)$  corresponde a matriz  $A(\Lambda(\mu)(0)) = F(\mu_i(0), \mu(0), 0) G(\mu_{ij}(0), \mu_i(0), \mu(0), 0)$ . Então do Lema 2.17 obtemos  $\tilde{A}(\Lambda(\mu)(0)) = G(\mu_{ij}(0), \mu_i(0), \mu(0), 0)$ . Daí, usando (2.1), o fato de que a função  $\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $\mu(0) = 0$ , e a expressão (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\Lambda(\mu)(0))_{kl} &= G(\mu_{ij}(0), 0, 0, 0)_{kl} \\ &= \left\langle \nabla_{\varphi_k(0)} d(\exp_p)_{v(x)}(e_l) \Big|_{x=0}, \eta(0) \right\rangle + \mu_{kl}(0) \left\langle d(\exp_p)_{v(0)}(\eta_0), \eta_0 \right\rangle \\ &\quad + \mu_l(0) \left\langle \nabla_{\varphi_k(0)} d(\exp_p)_{v(0)}(\eta_0), \eta(0) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{e_k} d(\exp_p)_{v(x)}(e_l) \Big|_{x=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}(0) \left\langle d(\exp_p)_0(\eta_0), \eta_0 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} d(\exp_p)_{v(te_k)} e_l \Big|_{t=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}(0) \left\langle \eta_0, \eta_0 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \exp_p(v(te_k) + se_l) \Big|_{t=0, s=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}(0) \\ &= \left\langle \frac{D}{ds} d(\exp_p)_{se_l} e_k \Big|_{s=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}(0). \end{aligned}$$

e fica provada a proposição. ■

Encerramos esta seção com um resultado respeito à função  $\mu_c$  que usaremos na seção de aplicações.

**Afirmção 3.3.** A função  $\mu_c(t)/t$  é decrescente para  $t > 0$ .

*Demonstração.* Segue-se do fato de que as funções  $f(t) = \coth(t)$ ,  $g(t) = \cot(t)$  e  $h(t) = \frac{1}{t}$  são decrescentes para valores positivos em  $\mathbb{R}$ . ■

## 3.2 Princípio de Tangência

O Princípio de Tangência que apresentaremos nesta seção, foi estudado de [17, pág. 214].

**Princípio de Tangência 3.4.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$  tais que:*

- (1)  $M_1^n$  e  $M_2^n$  são tangentes num ponto  $p$ ;
- (2)  $\eta_0$  é um vetor fixo unitário normal a  $M_1^n$  em  $p$ ;
- (3)  $M_1^n$  está acima de  $M_2^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ ;
- (4) se  $W$  é uma vizinhança de  $0_p \in T_p M_1 = T_p M_2$ , e  $H_r^1(x)$ ,  $H_r^2(x)$  denotam as curvaturas  $r$ -médias em  $x \in W$  de  $M_1^n$  e  $M_2^n$  respectivamente, para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  tem-se que  $H_r^2(x) \geq H_r^1(x)$  para todo  $x \in W$ ;
- (5) se  $\lambda^2(0_p)$  é o vetor curvatura principal de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_2$ , tem-se que  $\lambda^2(0_p) \in \Gamma_r$  para cada  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Então as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

*Demonstração.* Sejam  $\varphi^1(x) = \exp_p(x + \mu^1(x))$  e  $\varphi^2(x) = \exp_p(x + \mu^2(x))$  as parametrizações como em (1) de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Então, pelo Teorema 2.9 para  $\mu^1 : W \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mu^2 : W \rightarrow \mathbb{R}$  existe o operador  $\Phi_r : \mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Phi_r(\Lambda(\mu^1)(x)) = H_r^1(x) \text{ e } \Phi_r(\Lambda(\mu^2)(x)) = H_r^2(x) \text{ para todo } x \in W. \quad (3.7)$$

Agora, vamos a usar o Princípio do Máximo 1.27, com  $\mu^1$ ,  $\mu^2$  e  $\Phi_r$  para provar que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  coincidem numa vizinhança do ponto  $0_p$ . Pelas hipóteses do Princípio do Máximo, devemos mostrar:

- (i)  $\mu^2(x) \leq \mu^1(x)$  para todo  $x$  em  $W$ ;
- (ii)  $\Phi_r(\Lambda(\mu^2)(x)) \geq \Phi_r(\Lambda(\mu^1)(x))$  para todo  $x$  em  $W$ ;
- (iii)  $\Phi_r$  é elíptico com respeito às funções  $(1-t)\mu^2 + t\mu^1$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Verificação de (i): segue-se da hipótese (3) e da Definição 0.3.

Verificação de (ii): segue-se da hipótese (4) e de (3.7).

Verificação de (iii): vamos fazer isto em seis passos.

*Passo 1.* Provar que a matriz  $\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0)) - \tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))$  é semi-definida positiva para  $t \in [0, 1]$ : De fato, usando o Proposição 3.2 note que

$$\begin{aligned} \tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))_{kl} &= \tilde{A}((1-t)(\mu_{ij}^2(0), \mu_i^2(0), \mu(0), 0) + t(\mu_{ij}^1(0), \mu_i^1(0), \mu(0), 0))_{kl} \\ &= \tilde{A}((1-t)(\mu_{ij}^2(0), 0, 0, 0) + t(\mu_{ij}^1(0), 0, 0, 0))_{kl} \\ &= \tilde{A}((1-t)\mu_{ij}^2(0) + t\mu_{ij}^1(0), 0, 0, 0)_{kl} \\ &= \left\langle \frac{D}{ds} d(\exp_p)_{se_l} e_k \Big|_{s=0}, \eta_0 \right\rangle + (1-t)\mu_{kl}^2(0) + t\mu_{kl}^1(0) \\ &= \left\langle \frac{D}{ds} d(\exp_p)_{se_l} e_k \Big|_{s=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}^2(0) - t\mu_{kl}^2(0) + t\mu_{kl}^1(0) \\ &= \left( \left\langle \frac{D}{ds} d(\exp_p)_{se_l} e_k \Big|_{s=0}, \eta_0 \right\rangle + \mu_{kl}^2(0) \right) - t\mu_{kl}^2(0) + t\mu_{kl}^1(0) \\ &= \tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))_{kl} + t(\mu_{kl}^1(0) - \mu_{kl}^2(0)), \end{aligned}$$

e como  $(\mu_{kl}^1(0))$  e  $(\mu_{kl}^2(0))$  são as matrizes Hessianas  $(\text{Hess } \mu^1)(0)$  e  $(\text{Hess } \mu^2)(0)$  de  $\mu^1(x)$  e  $\mu^2(x)$  no ponto  $x = 0$  respectivamente, temos que

$$\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0)) - \tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0)) = t [(\text{Hess } \mu^1)(0) - (\text{Hess } \mu^2)(0)]. \quad (3.8)$$

Agora, como  $\mu^1(x) \geq \mu^2(x)$  para todo  $x$  em  $W$  pela hipótese (3), e além disso  $\mu_i^j(0) = 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2$  por (2.1). Podemos usar a Proposição 1.11 com as funções  $\mu^1, \mu^2$  e obtemos que a matriz  $t [(\text{Hess } \mu^1)(0) - (\text{Hess } \mu^2)(0)]$ ,  $t \in [0, 1]$  é semi-definida positiva, portanto de (3.8) temos que  $\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0)) - \tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))$  é uma matriz semi-definida positiva para os valores  $t \in [0, 1]$ .

*Passo 2.* Provar que  $\lambda(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))) - \lambda(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))) \in \overline{\mathcal{O}^n}$  para  $t \in [0, 1]$ : com efeito, como a matriz  $\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))$  é simétrica pela definição de  $\tilde{A}$ , podemos usar o Corolário 1.8 com essa matriz e a matriz do Passo 1, e obtemos que

$$\lambda_i(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))) \leq \lambda_i(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0)) + \tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0)) - \tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0)))$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Logo  $\lambda_i(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))) - \lambda_i(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))) \geq 0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , e portanto  $\lambda(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))) - \lambda(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))) \in \overline{\mathcal{O}^n}$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

*Passo 3.* Provar que  $\lambda(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))) \in \Gamma_r$  para  $t \in [0, 1]$  e  $r = 2, 3, \dots, n$ : com

efeito, da hipótese (5) temos que  $\lambda\left(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))\right) \in \Gamma_r$  para  $r = 2, 3, \dots, n$ . Agora, com este fato junto com o Passo 2, podemos usar a Proposição 3.1 e obtemos que

$$\lambda\left(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))\right) - \lambda\left(\tilde{A}(\Lambda(\mu^2)(0))\right) + \lambda\left(\tilde{A}(\Lambda(\mu^1)(0))\right) \in \Gamma_r$$

para  $t \in [0, 1]$  e  $r = 2, 3, \dots, n$ . Portanto  $\lambda\left(\tilde{A}((1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0))\right) \in \Gamma_r$  para  $t \in [0, 1]$  e  $r = 2, 3, \dots, n$ .

*Passo 4.* Provar que cada ponto  $(1-t)\Lambda(\mu^2(0)) + t\Lambda(\mu^1)(0)$ ,  $t \in [0, 1]$  é do tipo  $(r_{ij}^0, 0, 0, 0)$ : note que, para todo  $t \in [0, 1]$  tem-se

$$\begin{aligned} (1-t)\Lambda(\mu^2(0)) + t\Lambda(\mu^1)(0) &= \\ &= (1-t)(\mu_{ij}^2(0), \mu_i^2(0), \mu^2(0), 0) + t(\mu_{ij}^1(0), \mu_i^1(0), \mu^1(0), 0) \\ &= ((1-t)\mu_{ij}^2(0) + t\mu_{ij}^1(0), (1-t)\mu_i^2(0) + t\mu_i^1(0), (1-t)\mu^2(0) - t\mu^1(0), 0) \\ &= ((1-t)\mu_{ij}^2(0) + t\mu_{ij}^1(0), 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Consequentemente cada ponto  $(1-t)\Lambda(\mu^2)(0) + t\Lambda(\mu^1)(0)$  é do tipo  $(r_{ij}^0, 0, 0, 0)$ .

*Passo 5.* Provar que para cada  $r = 1, 2, \dots, n$  o operador  $\Phi_r$  é elíptico nos pontos  $(1-t)\Lambda(\mu^2(0)) + t\Lambda(\mu^1)(0)$ ,  $t \in [0, 1]$ : com efeito, se  $r = 1$ , pela parte (1) da Proposição 2.18 temos que  $\Phi_1$  é elíptico em todo  $\mathbb{R}^{[n(n+1)/2]+n} \times \mathcal{N}$ . Daí  $\Phi_1$  é elíptico nos pontos  $(1-t)\Lambda(\mu^2(0)) + t\Lambda(\mu^1)(0)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Por outro lado, com o Passo 3 e o Passo 4 podemos usar a Proposição 2.18. Então, pelo item (2) desta proposição, obtemos que para  $r = 2, 3, \dots, n$ , o operador  $\Phi_r$  é elíptico nos pontos  $(1-t)\Lambda(\mu^2(0)) + t\Lambda(\mu^1)(0)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

*Passo 6.* Provar que  $\Phi_r$  é elíptico como respeito às funções  $(1-t)\mu^2 + t\mu^1$ ,  $t \in [0, 1]$ : de fato, como a elipticidade provada no passo 5 é uma condição aberta, restringindo  $W$  se é necessário, concluimos da continuidade das funções

$$(1-t)\mu_{ij}^2(x) + t\mu_{ij}^1(x), (1-t)\mu_i^2(x) + t\mu_i^1(x), (1-t)\mu^2(x) - t\mu^1(x)$$

e do fato de ser o intervalo  $[0, 1]$  compacto, que  $\Phi_r$  é elíptico nos pontos  $(1-t)\Lambda(\mu^2)(x) + t\Lambda(\mu^1)(x)$ ,  $x \in W$ ,  $t \in [0, 1]$ . Assim, da Definição 1.23 concluimos que  $\Phi_r$  é elíptico com respeito às funções  $(1-t)\mu^2 + t\mu^1$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Como está provado (i), (ii) e (iii), pelo Princípio do Máximo 1.27 as funções  $\mu^1$  e  $\mu^2$  coincidem em uma vizinhança de  $0_p$ . Portanto  $M_1$  e  $M_2$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ . ■

Uma questão que surge das hipóteses do Princípio de Tangência é pensar se a hipótese (5) é necessária. O seguinte exemplo mostra a importância de esta hipótese.

**Exemplo 3.5.** Consideremos as hipersuperfícies  $M_1$  e  $M_2$  de  $\mathbb{R}^3$  que são tangentes no ponto  $p = (0, 0, 0)$ , de maneira que  $M_1$  é a esfera  $x^2 + y^2 + (z - r_1)^2 = r_1^2$  e  $M_2$  é a esfera  $x^2 + y^2 + (z + r_2)^2 = r_2^2$  com  $1 < r_2 < r_1$ , ver Figura 3.1.

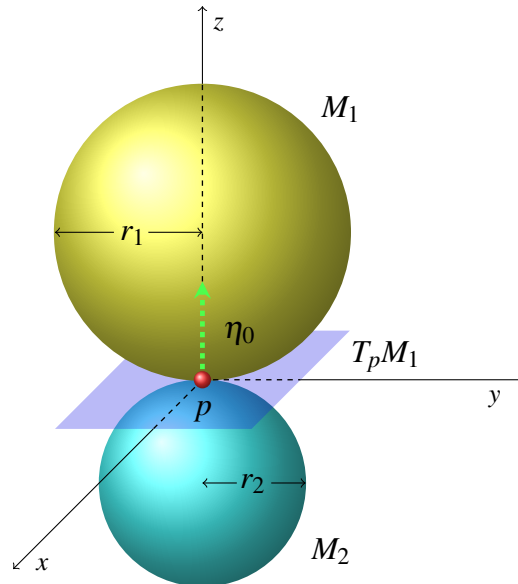


Figura 3.1: Hipersuperfícies tangentes de  $\mathbb{R}^3$

Então  $M_1$  e  $M_2$  satisfazem as quatro primeiras hipóteses do Princípio de Tangência, isto é:

- (1)  $M_1$  e  $M_2$  são tangentes em  $p$ ;
- (2)  $\eta_0 = e_3$  é normal a  $M_1$  em  $p$ ;
- (3)  $M_1$  está acima de  $M_2$ ;
- (4)  $H_{r=2}^2(x) = \frac{1}{r_2^2} > \frac{1}{r_1^2} = H_{r=2}^1(x)$ ;

mas respeito a  $\eta_0$ , o vetor curvatura principal  $\lambda^2(0_p) = \left(-\frac{1}{r_2}, -\frac{1}{r_2}\right)$  de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_1$  não pertence ao cone  $\Gamma_2$ , ver Figura 3.2, ou seja  $M_1$  e  $M_2$  não satisfazem a hipótese (5) do Princípio de Tangencia. Portanto as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  não coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

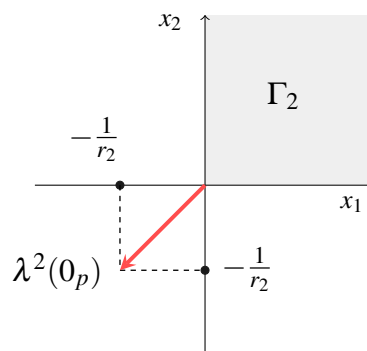


Figura 3.2: Representação de  $\lambda^2(0_p) \notin \Gamma_2$

Como uma consequência da prova do Princípio de Tangência 3.4, obtemos o seguinte princípio de tangência para hipersuperfícies com bordo:

**Teorema 3.6.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ , com bordos  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  respectivamente, tais que:*

- (1)  $M_1^n$  e  $M_2^n$ , assim como  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  são tangentes num ponto  $p$ ;
- (2)  $\eta_0$  é um vetor fixo unitário normal a  $M_1^n$  em  $p$ ;
- (3)  $M_1^n$  está acima de  $M_2^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ ;
- (4) se  $W$  é uma vizinhança de  $0_p \in T_p M_1 = T_p M_2$ , e  $H_r^1(x)$ ,  $H_r^2(x)$  denotam as curvaturas  $r$ -médias em  $x \in W$  de  $M_1^n$  e  $M_2^n$  respectivamente, para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  tem-se que  $H_r^2(x) \geq H_r^1(x)$  para todo  $x \in W$ ;
- (5) se  $\lambda^2(0_p)$  é o vetor curvatura principal de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_2$ , tem-se que  $\lambda^2(0_p) \in \Gamma_r$  para cada  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Então as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

A prova do Teorema 3.6 é análoga à prova do Teorema 3.4. A única diferença é que  $W$  não é considerado como um aberto usual, pois quando se parametrizam as hipersuperfícies com bordo  $M_1$  e  $M_2$  como em (1),  $W$  é uma meia bola. Outras consequências da prova do Princípio de Tangência 3.4 são os seguintes três resultados:

**Corolário 3.7.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$  tais que:*

- (1)  $M_1^n$  e  $M_2^n$  são tangentes num ponto  $p$ ;
- (2)  $\eta_0$  é um vetor fixo unitário normal a  $M_1^n$  em  $p$ ;
- (3)  $M_1^n$  está acima de  $M_2^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ ;
- (4) se  $W$  é uma vizinhança de  $0_p \in T_p M_1 = T_p M_2$ , e  $H_r^1(x)$ ,  $H_r^2(x)$  denotam as curvaturas  $r$ -médias em  $x \in W$  de  $M_1^n$  e  $M_2^n$  respectivamente, para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  tem-se que  $H_r^2(x) \geq H_r^1(x)$  para todo  $x \in W$ ;
- (5) as curvaturas principais  $\lambda_1(0_p) \leq \lambda_2(0_p) \leq \dots \leq \lambda_n(0_p)$  de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_2$  são positivas;

Então as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

**Corolário 3.8.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ , com curvaturas  $r$ -médias constantes  $H_r^1$  e  $H_r^2$  respectivamente, tais que:*

- (1)  $M_1^n$  e  $M_2^n$  são tangentes num ponto  $p$ ;
- (2)  $\eta_0$  é um vetor fixo unitário normal a  $M_1^n$  em  $p$ ;



- (3)  $M_1^n$  está acima de  $M_2^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ ;
- (4)  $H_r^2 \geq H_r^1$ ;
- (5) as curvaturas principais  $\lambda_1(0_p) \leq \lambda_2(0_p) \leq \dots \leq \lambda_n(0_p)$  de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_2$  são positivas ;

Então as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

**Corolário 3.9.** *Sejam  $M_1^n$  e  $M_2^n$  hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ , com curvaturas escalares  $K^1$  e  $K^2$  respectivamente, tais que:*

- (1)  $M_1^n$  e  $M_2^n$  são tangentes num ponto  $p$ ;
- (2)  $\eta_0$  é um vetor fixo unitário normal a  $M_1^n$  em  $p$ ;
- (3)  $M_1^n$  está acima de  $M_2^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a  $\eta_0$ ;
- (4)  $K^2(p) \geq K^1(p)$ ;
- (5) as curvaturas principais  $\lambda_1(0_p) \leq \lambda_2(0_p) \leq \dots \leq \lambda_n(0_p)$  de  $M_2$  no ponto  $0_p \in T_p M_2$  são positivas ;

Então as hipersuperfícies  $M_1^n$  e  $M_2^n$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $p$ .

### 3.3 Aplicações

Vamos apresentar algumas aplicações do Princípio de Tangência 3.4 estudadas em [17, pág. 215]. Na primeira subseção se fará uma generalização do Teorema 1 de [18], na segunda se generalizará o Teorema 1 de [19], e na última estenderá-se o Teorema 2 de [20].

#### 3.3.1 A maior esfera geodésica contida numa hipersuperfície

A primeira aplicação do Princípio de Tangência , dá uma estimativa do tamanho da maior esfera geodésica que se encaixa numa hipersuperfície de uma variedade de Hadamard.

**Teorema 3.10.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mergulhada, compacta e conexa de  $Q_c^{n+1}$ ,  $c \leq 0$ , tal que suas curvaturas  $r$ -médias  $H_r$ , para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  satisfazem*

$$|H_r(x)| \geq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r \text{ para todo } x \in M^n \text{ e para algum } \rho > 0.$$

Então, a maior esfera geodésica que cabe dentro de  $M^n$ , tem raio menor que  $\rho$ , a menos que  $M^n$  seja uma esfera geodésica.

*Demonstração.* Vamos fazer a prova por contradição, isto é, se:

- (a)  $M^n$  é uma hipersuperfície mergulhada, compacta e conexa de  $Q_c^{n+1}$ ,  $c \leq 0$ ;

(b) para algum  $r = 1, 2, \dots, n$ , tem-se que  $|H_r(x)| \geq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r$  para todo  $x \in M^n$  e algum  $\rho > 0$ ;

(c)  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  é a maior esfera geodésica que cabe dentro de  $M^n$ .

Então, vamos supor como verdade que  $\rho' > \rho$ , e procuremos uma contradição. De fato, como  $\rho < \rho'$ , da Afirmação 3.3 temos que  $\mu_c(\rho')/\rho' < \mu_c(\rho)/\rho$ , logo de (b) segue-se que

$$|H_r(x)| \geq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r > \left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r \quad \text{para todo } x \in M^n. \quad (3.9)$$

Agora, por (a) podemos usar a Proposição 1.15. Daí, existe um ponto  $q \in M^n$  e um vetor unitário  $\xi_0 \in T_q M^\perp$  apontando para dentro de  $M^n$ , tal que o operador de forma  $A_{\xi_0} : T_q M \rightarrow T_q M$  associado à segunda forma fundamental do mergulho  $M^n \rightarrow Q_c^{n+1}$ , é positivo definido. Assim, as curvaturas principais  $\lambda_1(q) \leq \lambda_2(q) \leq \dots \leq \lambda_n(q)$  de  $M^n$  no ponto  $q$  são todas positivas. Logo

$$H_r(q) > 0. \quad (3.10)$$

Além disso, se  $(\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_n(q))$  é o vetor curvatura principal de  $M^n$  no ponto  $q$ , temos que  $(\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_n(q)) \in \mathcal{O}^n$ . Da Proposição 1.39 segue-se que

$$(\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_n(q)) \in \Gamma_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

A ideia agora é usar o Princípio de Tangência 3.4 com  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ . Segundo as hipóteses do Princípio devemos provar:

(i)  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  são tangentes em um ponto  $p$ ;

(ii)  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  está acima de  $M^n$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a um vetor unitário  $\eta_0$  fixo que é normal a  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  em  $p$ ;

(iii) para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  tem-se que  $H_r(x) \geq H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x)$  para todo  $x$  numa vizinhança do ponto  $0_p \in T_p M^n = T_p \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , onde  $H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}$  denota a curvatura  $r$ -média de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ ;

(iv) o vetor curvatura principal  $\lambda(0_p)$  de  $M^n$  no ponto  $0_p$ , pertence a  $\Gamma_r$  para  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Vamos a mostrar cada um desses quatro itens.

Verificação de (i): Por contradição. Suponhamos que  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  não são tangentes. Então se  $\varepsilon > 0$  é a distância mínima entre  $\partial(M^n)^c$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , e consideramos a esfera geodésica  $\overline{\partial B_{\rho'+\varepsilon}(p_0)}$ , segue-se que  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  está dentro de  $\overline{\partial B_{\rho'+\varepsilon}(p_0)}$  e  $\overline{\partial B_{\rho'+\varepsilon}(p_0)} \subset M^n$ , mas isto contradiz (c).

Verificação de (ii): Segue-se do item (c), pelo fato de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  estar dentro de  $M^n$ .

Verificação de (iii): De (b) temos que, ou  $H_r > 0$  em  $M^n$ , ou  $H_r < 0$  em  $M^n$ . Daí e da continuidade de  $H_r$  em  $M^n$ , obtemos que  $H_r$  não muda de sinal em  $M^n$ . Logo de (3.10) segue-se que  $H_r(x) > 0$  para todo  $x \in M^n$ , e assim

$$|H_r(x)| = H_r(x) \quad \text{para cada } x \in M^n. \quad (3.12)$$

Além disso, pelo Teorema 1.21 temos que

$$H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x) = \left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r \text{ para cada } x \in \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}. \quad (3.13)$$

De (3.9), (3.12) e (3.13) concluímos que  $H_r(p) > H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(p)$ , e portanto  $H_r(x) > H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x)$  para todo  $x$  em uma vizinhança do ponto  $0_p$ .

Verificação de (iv): Seja  $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função contínua que associa a cada ponto de  $M^n$  seu vetor curvatura principal com as escolhas  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  das curvaturas principais. Agora, como  $M^n$  é conexa, e  $\lambda$  é contínua, então  $\lambda(M^n)$  é um conjunto conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Daí, de (3.11) e da parte (4) da Proposição 1.39 segue-se que  $\lambda(M^n) \subset \Gamma_r$  para  $r = 1, 2, \dots, n$ . Em particular,  $\lambda(0_p) \in \Gamma_r$  para  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Como está provado (i), (ii), (iii) e (iv), do Princípio de Tangência 3.4 obtemos que  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  coincidem numa vizinhança do ponto  $p$ . Então para qualquer ponto  $x$  de aquela vizinhança, se satisfaz  $H_r(x) = H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x) = \left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r$ , mas isso contradiz (3.9). Portanto  $\rho' \leq \rho$ .

Finalmente, no caso em que  $\rho = \rho'$ , vejamos que  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)} = M^n$ . Com efeito, definamos o conjunto  $\mathcal{A} := \left\{ x \in M^n \mid x \text{ é ponto de tangência entre } M^n \text{ e } \overline{\partial B_{\rho}(p_0)} \right\}$ . Então,

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , pois  $p \in \mathcal{A}$ .
- Provemos que  $\mathcal{A}$  é aberto: seja  $a \in \mathcal{A}$ , então pelo Princípio de Tangência 3.4 existe uma vizinhança  $V$  de  $a$ , onde  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$  coincidem. Daí cada elemento de  $V$  é ponto de tangência entre  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$  e portanto  $V \subset \mathcal{A}$ . Logo  $\mathcal{A}$  é aberto.
- Mostremos que  $\mathcal{A}$  é fechado: seja  $a \in \overline{\mathcal{A}}$ , então existe uma sequência  $(a_m)$  em  $\mathcal{A}$ , tal que  $a_m \rightarrow a$ . Note que  $\mathcal{A} \subset M^n$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $M^n$ , e como  $M^n$  é compacto, temos que  $(a_m)$  converge em  $M^n$ . Logo  $a \in M$ . Por outro lado, note que  $\mathcal{A} \subset \overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ , e como  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$  é fechado, temos que  $(a_m)$  converge em  $\overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ . Logo  $a \in \overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ . Portanto  $a \in M^n \cap \overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ , e consequentemente  $a \in \mathcal{A}$ . Concluímos que  $\mathcal{A}$  é um conjunto fechado.

Dos três itens de acima e da conexidade de  $M^n$  segue-se que  $\mathcal{A}$  é igual a  $M^n$ , e consequentemente  $M^n = \overline{\partial B_{\rho}(p_0)}$ . ■

### 3.3.2 Hipersuperfícies contidas em bolas geodésicas

O seguinte resultado apresenta condições para que toda hipersuperfície esteja contida numa bola.

**Teorema 3.11.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície compacta e conexa em  $Q_c^{n+1}$ , com bordo  $\partial M$ , tal que:*

- (1)  $\partial M \subset \overline{B_{\tau}(p_0)}$ ;

(2) para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  a curvatura  $r$ -média  $H_r$  de  $M^n$  satisfaz

$$|H_r(x)| \leq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r \text{ para todo } x \in M^n \text{ e algum } \rho > 0,$$

de maneira que se  $c > 0$  então  $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ ;

(3)  $M^n \subset \overline{B_\rho(p_0)}$ .

Então  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$ .

*Demonstração.* Vamos a fazer a prova considerando dois casos, quando  $\rho \leq \tau$  e quando  $\rho > \tau$ .

*Caso 1.* Provar que se  $M^n$  é uma hipersuperfície compacta e conexa em  $Q_c^{n+1}$ , com bordo  $\partial M$ , de maneira que se satisfazem (1), (2), (3) e  $\rho \leq \tau$ , então  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$ : de fato, como  $\rho \leq \tau$ , temos que  $\overline{B_\rho(p_0)} \subset \overline{B_\tau(p_0)}$ , daí e usando (3), segue-se que  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$ .

*Caso 2.* Provar que se  $M^n$  é uma hipersuperfície compacta e conexa em  $Q_c^{n+1}$ , com bordo  $\partial M$ , de maneira que se satisfazem (1), (2), (3) e  $\rho > \tau$ , então  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$ : vamos provar este caso por contradição, isto é, sendo  $M^n$  uma hipersuperfície compacta e conexa em  $Q_c^{n+1}$ , com bordo  $\partial M$ , de maneira que se satisfazem (1), (2), (3) e  $\rho > \tau$ , então vamos supor como verdade que

$$M^n \not\subset \overline{B_\tau(p_0)}, \quad (3.14)$$

(ver Figura 3.3) e procuremos uma contradição. De fato, sejam  $p \in M^n$  o ponto mais distante de  $p_0$ , e  $\rho' := d(p_0, p)$ . Provemos os três seguintes itens.

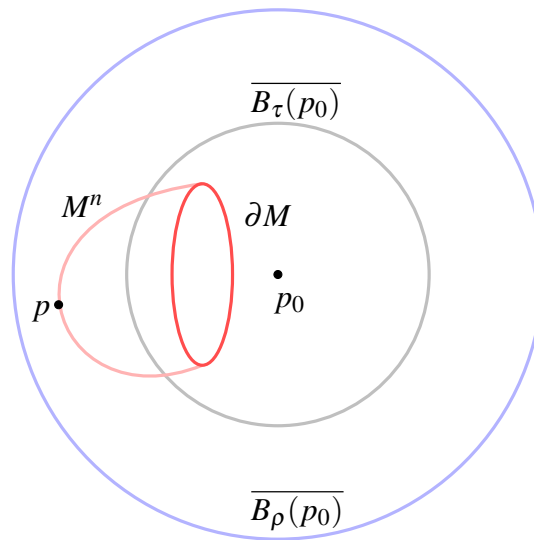


Figura 3.3: Caso 2 por contradição

(a)  $p \in M^n - \partial M$ :

Provemos este item por contradição. Suponhamos que  $p \in \partial M$ . Daí, por (1) e pelo fato de ser  $p$  o

ponto de  $M$  mais distante de  $p_0$ , segue-se que  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$  e isto contradiz (3.14). Portanto  $p \notin \partial M$ , e como  $p \in M^n$ , obtemos que  $p \in M^n - \partial M$ .

(b)  $\rho' > \tau$ :

Mostremos isto por contradição. Vamos supor que  $\rho' \leq \tau$ , isto é,  $d(p_0, p) \leq \tau$ . Daí e pelo fato de ser  $p$  o ponto de  $M$  mais distante de  $p_0$ , temos que  $M^n \subset \overline{B_\tau(p_0)}$  e isto contradiz (3.14). Portanto  $\rho' > \tau$ .

(c)  $\overline{B_{\rho'}(p_0)}$  é a menor bola centrada em  $p_0$  que contém  $M^n$ :

Demostremos isso por contradição. Suponhamos que  $\overline{B_{\rho'}(p_0)}$  não é a menor bola centrada em  $p_0$  que contém a  $M^n$ , então existe uma bola  $\overline{B_r(p_0)}$  com  $r < \rho'$  tal que  $M^n \subset \overline{B_r(p_0)}$ . Daí, segue-se que  $d(p_0, p) = \rho' < r$  e temos uma contradição.

Os três itens de acima nos ajudarão a usar o Princípio de Tangência 3.4 com  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ . Segundo as hipóteses do Princípio temos que verificar as quatro seguintes condições:

(i) Provar que  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  são tangentes no ponto  $p$ : segue-se do item (c).

(ii) Provar que  $M^n$  está acima  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  em uma vizinhança de  $p$  com respeito a um vetor unitário  $\eta_0$  fixo que é normal a  $M^n$  em  $p$ : segue-se do item (c) pelo fato de estar  $M^n$  contido em  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ .

(iii) Provar que para algum  $r = 1, 2, \dots, n$ , tem-se que  $H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x) \geq H_r(x)$  para todo  $x$  numa vizinhança de  $0_p \in T_p M^n = T_p \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ : com efeito, note que  $\rho' \leq \rho$ , pois se  $\rho < \rho' = d(p_0, p)$  então  $M^n \not\subset \overline{B_\rho(p_0)}$  e isto contradiz (3). Daí, e pela Afirmação 3.3 temos que  $\mu_c(\rho)/\rho \leq \mu_c(\rho')/\rho'$ .

Logo, por (2) segue-se que para algum  $r = 1, 2, \dots, n$ , se satisfaz

$$\left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r \geq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r \geq |H_r(x)| \geq H_r(x) \quad \text{para todo } x \in M^n. \quad (3.15)$$

Agora, pelo Teorema 1.21 temos que o termo de acima  $\left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r$  é a curvatura  $r$ -média  $H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}$  da esfera  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ . Então, se orientamos a  $M^n$  em  $p$  com o vetor unitário  $\eta_0$  apontando para dentro de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , de (3.15) segue-se que para algum  $r = 1, 2, \dots, n$  se satisfaz  $H_r^{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}}(x) \geq H_r(x)$  para todo  $x$  numa vizinhança de  $0_p$ .

(iv) Provar que o vetor curvatura principal  $\lambda(0_p)$  de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  em  $0_p$ , pertence ao conjunto  $\Gamma_r$  para cada  $r = 2, 3, \dots, n$ : Seja  $\lambda : \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função contínua que associa a cada ponto de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  seu vetor curvatura principal com as escolhas  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  das curvaturas principais. Como as curvaturas principais em qualquer ponto de  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  são positivas, então  $\lambda(\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}) \subset \mathcal{O}^n$ . Daí e pela parte (2) da Proposição 1.39 concluímos que  $\lambda(0_p) \in \Gamma_r$  para  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Como está provado (i), (ii), (iii) e (iv), podemos usar o Princípio de Tangência 3.4, e obtemos que as hipersuperfícies  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  coincidem numa vizinhança do ponto  $p$ . Esse fato

nos ajudará a provar a inclusão

$$M^n - \partial M \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}. \quad (3.16)$$

Com efeito, definamos o conjunto  $\mathcal{A} = \left\{ x \in M^n \mid x \text{ é ponto de tangência entre } M^n \text{ e } \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)} \right\}$ , então

- $\mathcal{A}$  é não-vazio, pois  $p \in \mathcal{A}$ .
- Vejamos que  $\mathcal{A}$  é aberto: se  $a \in \mathcal{A}$ , então pelo Princípio de Tangência 3.4 existe uma vizinhança  $V$  de  $a$ , onde  $M^n$  e  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  coincidem. Daí,  $V \subset \mathcal{A}$  e portanto  $\mathcal{A}$  é aberto.
- Mostremos que  $\mathcal{A}$  é fechado: seja  $a \in \overline{\mathcal{A}}$ , então existe uma sequência  $(a_m)$  em  $\mathcal{A}$ , tal que  $a_m \rightarrow a$ . Note que  $\mathcal{A} \subset M^n$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $M^n$ , e como  $M^n$  é compacto, temos que  $(a_m)$  converge em  $M^n$ . Logo  $a \in M$ . Por outro lado, note que  $\mathcal{A} \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , e como  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  é fechado, temos que  $(a_m)$  converge em  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ . Logo  $a \in \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ . Portanto  $a \in M^n \cap \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$ , e consequentemente  $a \in \mathcal{A}$ . Logo  $\mathcal{A}$  é fechado.
- Provemos que  $\mathcal{A} \subset M^n - \partial M$ : de (1) e (b) segue-se que  $\partial M \not\subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  e portanto  $\mathcal{A} \subset M^n - \partial M$ . Agora, como  $M^n$  é conexa por hipótese, então  $M^n - \partial M$  também é conexa. Daí e dos quatro itens de acima temos que  $\mathcal{A} = M^n - \partial M$ , e por (c) segue-se que  $M^n - \partial M \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}$  e fica provada (3.16).

Note que (3.16) implica

$$\overline{M^n - \partial M} \subset \overline{\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)}} \Rightarrow M^n \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)} \Rightarrow \partial M \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)},$$

e por (1) segue-se que  $\partial M \subset \overline{\partial B_{\rho'}(p_0)} \cap \overline{B_{\tau}(p_0)}$ . Mas  $\overline{\partial B_{\rho'}(p_0)} \cap \overline{B_{\tau}(p_0)} = \emptyset$  por (b). Logo  $\partial M \subset \emptyset$  é uma contradição e portanto  $M^n \subset \overline{B_{\tau}(p_0)}$ . ■

### 3.3.3 Uma coincidência da esfera geodésica e uma isometria no espaço forma

Dada uma hipersuperfície contida numa bola geodésica fechada  $\overline{B}$ , o seguinte resultado dá condições para que aquela hipersuperfície coincida com o bordo da bola  $\overline{B}$ , e além disso, garante uma isometria entre  $B$  e uma bola aberta dos espaços forma.

**Teorema 3.12.** *Seja  $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão isométrica suave, de uma variedade Riemanniana compacta e conexa  $M^n$ , numa variedade Riemanniana  $N^{n+1}$ , tal que:*

- (1)  $F(M)$  está contido numa bola geodésica normal  $\overline{B_{\rho}(p_0)}$ ;
- (2)  $c$  é o supremo das curvaturas seccionais de  $N^{n+1}$  em  $\overline{B_{\rho}(p_0)}$  de maneira que se  $c > 0$  então  $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ ;
- (3) Para algum  $r = 1, 2, \dots, n$ , a curvatura  $r$ -média  $H_r$  de  $M^n$ , satisfaz  $|H_r(x)| \leq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r$  para todo  $x \in M^n$ .

Então,  $F(M)$  é o bordo de  $\overline{B_{\rho}(p_0)}$ , e  $B_{\rho}(p_0)$  é isométrica a uma bola aberta de raio  $\rho$  em  $Q_c^{n+1}$ .

*Demonstração.* Consideremos a função  $g$  dada por

$$\begin{aligned} g : \overline{B_\rho(p_0)} \subset N^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{2}d_{p_0}(x)^2 \end{aligned}$$

onde  $d_{p_0}(\cdot)$  é a função distância Riemanniana de  $p_0$  em  $N^{n+1}$ . Por (1) podemos definir a função

$$\varphi : M \xrightarrow{F} F(M) \subset \overline{B_\rho(p_0)} \xrightarrow{g} \mathbb{R},$$

ou seja,  $\varphi = g \circ F$ . Então,

Provemos que  $F(M)$  é o bordo da bola  $\overline{B_\rho(p_0)}$ : vamos fazer isto em três passos. Fixemos um ponto  $p \in M^n$  de maneira que  $d_{p_0}(F(p))$  seja o raio da menor bola geodésica centrada em  $p_0$  que contém a  $F(M)$ .

*Passo 1.* Mostrar que  $\overline{B_\rho(p_0)}$  é a menor bola centrada em  $p_0$  que contém a  $F(M)$ : Por contradição. Suponhamos que  $\overline{B_\rho(p_0)}$  não é a menor bola geodésica centrada em  $p_0$  que contém a  $F(M)$ , então existe uma bola  $\overline{B_{\rho'}(p_0)}$  com  $\rho' < \rho$  tal que  $F(M) \subset \overline{B_{\rho'}(p_0)}$  e além disso  $d_{p_0}(F(p)) = \rho'$ . Agora, se  $\eta$  é o vetor unitário que é normal a  $M^n$  em  $p$ , apontando para dentro de  $\partial\overline{B_{\rho'}(p_0)}$ , então

$$\eta = -\frac{\nabla\varphi(p)}{\|\nabla\varphi(p)\|} = -\frac{\nabla g(F(p))}{\|\nabla g(F(p))\|}, \quad (3.17)$$

de maneira que

- (a)  $\|\nabla g(F(p))\| = \rho'$ : segue-se da Proposição 1.16 e do fato de que  $d_{p_0}(F(p)) = \rho'$ ;
- (b)  $\varphi$  alcança um máximo em  $p$ : segue-se do fato de que  $d_{p_0}(F(p)) = \rho'$ .

Observemos que

- $F(p)$  é um ponto de  $N^{n+1}$  que não pertence ao cut locus de  $p_0$ , pois  $F(p) \in \overline{B_\rho(p_0)}$ ;
- Do item anterior, e pelo Corolário 2.8 da Proposição 2.2 em [12, pág. 195], existe uma geodésica minimizante normalizada  $\gamma : [0, \rho'] \rightarrow \mathbb{R}$ , que liga ao ponto  $\gamma(0) = p_0$  com  $\gamma(\rho') = F(p)$ .

Por (2) e pelos dois itens acima podemos usar o Lema 1.18 e obtemos que

$$\text{Hess } g_{F(p)}(z, z) \geq \mu_c(\rho') \quad (3.18)$$

para todo vetor unitário  $z \in T_{F(p)}N$  tal que  $z \perp \gamma'(\rho')$ . Além disso, pela Afirmação 1.17

$$\text{Hess } \varphi_p(v, w) = \text{Hess } g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)) + \langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(v, w) \rangle \quad (3.19)$$

para todo  $v, w \in T_pM$ , onde  $\alpha_p$  é a segunda forma fundamental da imersão  $F$  no ponto  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ . De (3.18) e (3.19) segue-se que

$$\text{Hess } \varphi_p(u, u) \geq \mu_c(\rho') + \langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(u, u) \rangle \quad (3.20)$$

para todo vetor unitário  $u \in T_pM$ . Seja  $A_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  o operador de forma de  $\alpha_p$ . Como  $A_\eta$  é um operador auto-adjunto, existe uma base ortonormal de  $T_pM$ , constituída pelas direções principais  $e_1 = e_1(p)$ ,  $e_2 = e_2(p)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = e_n(p)$ , associadas às curvaturas principais  $\lambda_1 = \lambda_1(p)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_2(p)$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_n = \lambda_n(p)$ , de  $M^n$  em  $p$ . Tomemos uma de aquelas curvaturas principais  $\lambda_i$  de  $M^n$  em  $p$ , junto com sua direção principal  $e_i$ , respectivamente. Por (b) temos que  $0 \geq \text{Hess } \varphi_p(e_i, e_i)$ . Daí e de (3.20) segue-se que  $0 \geq \text{Hess } \varphi_p(e_i, e_i) \geq \mu_c(\rho') + \langle \nabla g(F(p)), \alpha(e_i, e_i) \rangle$ , ou seja

$$0 \geq \mu_c(\rho') + \langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(e_i, e_i) \rangle. \quad (3.21)$$

Além disso,

$$\langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(e_i, e_i) \rangle = -\lambda_i \rho', \quad (3.22)$$

de fato, vamos multiplicar  $\langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(e_i, e_i) \rangle$  por  $\frac{-\|\nabla g(F(p))\|}{-\|\nabla g(F(p))\|}$ , e usar (3.17) e (a), para expressar  $\langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(e_i, e_i) \rangle$  em termos do operador forma  $A_\eta$  e assim obter (3.22), isto é

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(F(p)), \alpha_p(e_i, e_i) \rangle &= \frac{-\|\nabla g(F(p))\|}{-\|\nabla g(F(p))\|} \langle \alpha_p(e_i, e_i), \nabla g(F(p)) \rangle \\ &= -\|\nabla g(F(p))\| \left\langle \alpha_p(e_i, e_i), -\frac{\nabla g(F(p))}{\|\nabla g(F(p))\|} \right\rangle \\ &= -\rho' \langle \alpha_p(e_i, e_i), \eta \rangle \\ &= -\rho \langle A_\eta(e_i), e_i \rangle \\ &= -\rho' \lambda_i. \end{aligned}$$

De (3.21) e (3.22) obtemos

$$\lambda_i = \lambda_i(p) \geq \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'}. \quad (3.23)$$

Como  $\lambda_i$  é arbitrária, de (3.23) segue-se que a curvatura  $r$ -média  $H_r$  de  $M^n$  em  $p$  satisfaz

$$H_r(p) \geq \left[ \frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} \right]^r. \quad (3.24)$$

Da Afirmação 3.3 e do fato de  $\rho' < \rho$  obtemos  $\frac{\mu_c(\rho')}{\rho'} > \frac{\mu_c(\rho)}{\rho}$ . Daí, e de (3.24) segue-se que  $H_r(p) > \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r$ , e isto contradiz (3). Portanto  $\rho' = \rho$  e  $\overline{B_\rho(p_0)}$  é a menor bola centrada em  $p_0$  que contém a  $F(M)$ . Consequentemente

$$d_{p_0}(F(p)) = \rho. \quad (3.25)$$

*Passo 2.* Mostrar que as hipersuperfícies  $F(M)$  e  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  de  $N^{n+1}$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $F(p)$ : Para isto, vamos aplicar o Princípio de Tangência 3.4 com  $F(M)$  e  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  no ponto  $F(p)$ . Segundo as hipóteses do Princípio devemos verificar,



(i)  $F(M)$  e  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  são tangentes em  $F(p)$ : com efeito, da expressão (3.25) segue-se que  $F(p) \in F(M) \cap \partial B_\rho(p_0)$ . Daí,  $\nabla g(F(p))$  calculado em  $F(M)$  e em  $\partial B_\rho(p_0)$  coincidem, logo  $T_{F(p)}F(M) = T_{F(p)}\partial B_\rho(p_0)$  e portanto  $F(M)$  e  $\partial B_\rho(p_0)$  são tangentes no ponto  $F(p)$ .

(ii)  $F(M)$  está acima de  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  em uma vizinhança de  $F(p)$  com respeito a um vetor unitário  $\eta_0$  fixo que é normal a  $F(M)$  em  $F(p)$ : segue-se de (1).

(iii)  $H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(x) \geq H_r^{F(M)}(x)$ , para todo  $x$  numa vizinhança de  $0_{F(p)} \in T_{F(p)}F(M) = T_{F(p)}\overline{\partial B_\rho(p_0)}$ : de fato, pelo Teorema 1.21 temos que

$$H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(x) = \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r \text{ para todo } x \in \overline{\partial B_\rho(p_0)}. \quad (3.26)$$

Agora, de (3) e do fato de ser  $F$  uma imersão obtemos que

$$\left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r \geq |H_r(p)| \geq H_r(p) = H_r^{F(M)}(F(p)). \quad (3.27)$$

Logo, de (3.26) e (3.27) segue-se que  $H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(F(p)) \geq H_r^{F(M)}(F(p))$ , e portanto  $H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(x) \geq H_r^{F(M)}(x)$  para todo  $x$  numa vizinhança de  $0_{F(p)} \in T_{F(p)}F(M) = T_{F(p)}\overline{\partial B_\rho(p_0)}$ .

(iv) Para  $r = 2, 3, \dots, n$ , o vetor curvatura principal  $\lambda(0_{F(p)})$  de  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  no ponto  $0_{F(p)}$ , pertence ao conjunto  $\Gamma_r$ : de fato, seja  $\lambda : \overline{\partial B_\rho(p_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função contínua que associa a cada ponto de  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  seu vetor curvatura principal com as escolhas  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  das curvaturas principais. Como as curvaturas principais em qualquer ponto de  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  são positivas, então  $\lambda(\overline{\partial B_\rho(p_0)}) \subset \mathcal{O}^n$ . Daí e pela parte (2) da Proposição 1.39 concluímos que  $\lambda(0_p) \in \Gamma_r$  para  $r = 2, 3, \dots, n$ .

Como está provado (i), (ii), (iii) e (iv), do Princípio de Tangência 3.4 temos que as hipersuperfícies  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  e  $F(M)$  coincidem em uma vizinhança do ponto  $F(p)$ .

*Passo 3.* Mostrar que  $F(M)$  é o bordo da bola geodésica  $\overline{B_\rho(p_0)}$ : com efeito, definamos o conjunto  $\mathcal{A} := \left\{ x \in F(M) \mid x \text{ é ponto de tangência entre } F(M) \text{ e } \overline{\partial B_\rho(p_0)} \right\}$ . Então,

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , pois  $F(p) \in \mathcal{A}$ .
- Provemos que  $\mathcal{A}$  é aberto de  $F(M)$ : seja  $a \in \mathcal{A}$ , então pelo Princípio de Tangência 3.4 existe uma vizinhança  $V$  de  $a$ , onde  $F(M)$  e  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  coincidem. Daí,  $V \subset \mathcal{A}$  e portanto  $\mathcal{A}$  é aberto.
- Mostremos que  $\mathcal{A}$  é fechado em  $F(M)$ : seja  $a \in \overline{\mathcal{A}}$ , então existe uma sequência  $(a_m)$  em  $\mathcal{A}$ , tal que  $a_m \rightarrow a$ . Note que  $\mathcal{A} \subset M^n$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $M^n$ , e como  $M^n$  é compacto, temos que  $(a_m)$  converge em  $M^n$ . Logo  $a \in M$ . Por outro lado, note que  $\mathcal{A} \subset \overline{\partial B_\rho(p_0)}$ , então  $(a_m)$  é também uma sequência em  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$ , e como  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  é fechado, temos que  $(a_m)$  converge em  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$ . Logo  $a \in \overline{\partial B_\rho(p_0)}$ . Portanto  $a \in M^n \cap \overline{\partial B_\rho(p_0)}$ , e consequentemente  $a \in \mathcal{A}$ . Logo  $\mathcal{A}$  é fechado.

Agora, como  $M$  é conexo e  $F$  é uma imersão, temos que  $F(M)$  é conexo. Daí, e dos três itens acima segue-se que  $\mathcal{A} = F(M)$ . Consequentemente  $F(M) = \overline{\partial B_\rho(p_0)}$ , isto é,  $F(M)$  é o bordo de  $B_\rho(p_0)$  e fica demonstrada a primeira tese do Teorema.

Provemos a segunda tese do Teorema.

Mostremos que  $B_\rho(p_0)$  é isométrica a uma bola aberta de raio  $\rho$  em  $Q_c^{n+1}$ : com efeito, do fato que  $F$  é uma imersão e da primeira tese deste teorema, temos que  $H_r = H_r^{F(M)} = H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}$ . Daí e de (3), obtemos que  $H_r^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(x) \leq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r$  para todo  $x \in \overline{\partial B_\rho(p_0)}$ . Consequentemente todas as curvaturas principais  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x)$  de  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  em qualquer ponto  $x$  satisfazem  $\lambda_i(x) \leq \frac{\mu_c(\rho)}{\rho}$ . Usando isso junto com (3.23) obtemos que  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$  tem todas as suas curvaturas principais iguais a  $\frac{\mu_c(\rho)}{\rho}$ . Além disso, se  $H^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}$  denota o vetor curvatura média na esfera  $\overline{\partial B_\rho(p_0)}$ , do anterior segue-se

$$\left\| H^{\overline{\partial B_\rho(p_0)}}(x) \right\| = \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \text{ para todo } x \in \overline{\partial B_\rho(p_0)}. \quad (3.28)$$

Finalmente, com (2) e (3.28) podemos usar a Proposição 1.19 e concluímos que  $B_\rho(p_0)$  é isométrica a uma bola aberta de raio  $\rho$  em  $Q_c^{n+1}$ . ■

Uma consequência imediata deste teorema é o seguinte resultado.

**Corolário 3.13.** *Seja  $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão isométrica suave, de uma variedade Riemanniana compacta e conexa  $M^n$ , em uma variedade Riemanniana  $N^{n+1}$  tal que:*

- (1)  $F(M)$  está contido numa bola normal  $\overline{B_\rho(p_0)}$ ;
- (2) a função curvatura seccional  $K_N$  em  $N^{n+1}$  satisfaz  $K_N \leq c$ , para alguma constante real  $c$ , de maneira que se  $c > 0$ , então  $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ ;
- (3) Para algum  $r = 1, 2, \dots, n$ , a curvatura  $r$ -média  $H_r$  de  $M^n$ , satisfaz  $|H_r(x)| \leq \left[ \frac{\mu_c(\rho)}{\rho} \right]^r$  para todo  $x \in M^n$ .

Então,  $F(M)$  é o bordo de  $\overline{B_\rho(p_0)}$ , e  $B_\rho(p_0)$  é isométrica a uma bola aberta de raio  $\rho$  em  $Q_c^{n+1}$ .

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] G. Leibniz. *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas. Acta Eruditorum 1686*, 7:326–329, ed. C.I. Gerhardt, Halle, 1863.
- [2] I. Newton. *The method of fluxions and infinite series (methodus fluxionum et serierum infinitorum)*. Henry Woodfall, London, 1736.
- [3] L. Euler. *Recherches sur la courbure des surfaces. Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin*, 16:119–143, 1767.
- [4] Ilmo. Sr. D. Pascual Lucas Saorín. *BREVE HISTORIA DE LA CURVATURA*. Academia de Ciencias de la Región de Murcia, 2019.
- [5] Antonio Ros and Harold Rosenberg. Properly embedded surfaces with constant mean curvature. *Amer. J. Math.*, 132(6):1429–1443, 2010.
- [6] I. M. Gel'fand. *Lectures on linear algebra*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 9. Interscience Publishers, New York-London, 1961. Translated from the revised second Russian edition by A. Shenitzer.
- [7] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer, 1995. Reprint of the 1980 Edition.
- [8] F. Fontenele. *Introdução à Teoria de Subvariedades*. Notas do minicurso apresentado em 12/04/2021. <https://www.dm.ufscar.br/ppgm/index.php/extensao/77-programa-de-verao/1213-programa-de-verao-2021?start=3>, acessado em 29/09/2021.
- [9] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. Second Edition, 2018.

- [10] L. Jorge and D. Koutroufiotis. An estimate for the curvature of bounded submanifolds. *Amer. J. Math.*, 103(4):711–725, 1981.
- [11] Steen Markvorsen. A sufficient condition for a compact immersion to be spherical. *Math. Z.*, 183(3):407–411, 1983.
- [12] Manfredo Perdigão de Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. 6. ed., 2019.
- [13] W. Ambrose. The index theorem in Riemannian geometry. *Ann. of Math. (2)*, 73:49–86, 1961.
- [14] Fanghua Lin Qing Han. *Elliptic Partial Differential Equations: Second Edition (Courant Lecture Notes)*. American Mathematical Society, 2 edition, 2011.
- [15] Lars Gårding. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 8:957–965, 1959.
- [16] L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck. The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math.*, 155(3-4):261–301, 1985.
- [17] F. Fontenele and Sérgio L. Silva. A tangency principle and applications. *Illinois Journal of Mathematics*, 45(1):213 – 228, 2001.
- [18] A. D. Aleksandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 21:341–354, 1962.
- [19] James Serrin. On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. *Math. Z.*, 112:77–88, 1969.
- [20] Steen Markvorsen. A sufficient condition for a compact immersion to be spherical. *Math. Z.*, 183(3):407–411, 1983.