



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS



FERNANDO FLORA FILHO

**SÍNTESE DE SOM: UMA PROPOSTA DE ENSINO
PARA FUNÇÕES PERIÓDICAS**

SOROCABA
ABRIL DE 2022

Fernando Flora Filho

Síntese de Som: Uma Proposta de Ensino para Funções Periódicas

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação do Professor Doutor Antonio Noel Filho.

Universidade Federal De São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientador: Professor Doutor Antonio Noel Filho

Sorocaba
Abril de 2022

Flora Filho, Fernando

Síntese de som: uma proposta de ensino para funções
periódicas / Fernando Flora Filho -- 2022.
159f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São
Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Antonio Noel Filho

Banca Examinadora: Graciele Paraguaia Silveira, Robson
dos Santos Ferreira

Bibliografia

1. Funções periódicas. 2. Características do som. 3.
GeoGebra como sintetizador. I. Flora Filho, Fernando. II.
Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Fernando Flora Filho, realizada em 25/02/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Noel Filho (IFSP)

Prof. Dr. Robson dos Santos Ferreira (UFPA)

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira (UFSCar)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Dedico esse trabalho a todos os professores, em especial, Maria Genesina de Almeida Castanho e Pedrina Rodrigues de Almeida Castanho. In memoriam do violonista Genésio Castanho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a essa energia cósmica “multiversal” que epistemologicamente a maioria dos seres humanos a conceituam como Deus.

Agradeço a minha mãe Maria Genesina de Almeida Castanho por ter me criado, cuidado e educado, propiciando assim, a passagem por esse nobre momento acadêmico.

Aos meus amigos e familiares mais próximos. Sou grato pela amizade de todos vocês. Desculpem-me por todas as ausências devido aos meus estudos e/ou trabalhos.

Ao professor de violão Milton Garbeto Rosa por ter dado início ao aprendizado das primeiras escalas e acordes musicais.

Agradeço os pesquisadores (cientistas) do Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora (NICS): Adolfo Maia Junior, José Eduardo Fornari Novo Junior e Jônatas Manzolli por me apresentarem a área música computacional e orientarem estudos concernentes a síntese de som.

À UFSCar por ter proporcionado o apoio necessário a realização deste sonho.

Aos meus colegas da UFSCar, por todos os conhecimentos, momentos e experiências compartilhadas. Que o desejo de apreender mais sobre a nossa nobre ciência nunca se apague em nossos corações.

Agradeço a todos os professores que me influenciaram ao longo de minha trajetória, em especial, Prof^a. Dr^a. Graciele Paraguaia Silveira, Prof^a. Dr^a. Magda da Silva Peixoto, Prof^a. Dr^a Maria Ogécia Drigo e Prof. Dr. Robson dos Santos Ferreira.

Ao nobre Prof. Dr. Antonio Noel Filho, que tem se tornado um amigo desde minha graduação, até o dado momento no mestrado, em especial, pelas orientações e correções da escrita deste trabalho. Jamais me esquecerei das oportunidades e ajudas que tem me dado em todo o percurso.

Matemática e música, os campos de atividade científica mais nitidamente contrastados, ainda estão tão relacionados que revelam a conexão secreta que une todas as atividades de nossa mente.

(Hermann von Helmholtz)

RESUMO

FLORA FILHO, Fernando. Síntese de Som: Uma Proposta de Ensino para Funções Periódicas. 2022. Dissertação (Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba, Sorocaba, 2022.

Este trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica em que o objetivo foi realizar um estudo sobre síntese de som e desenvolver um produto educacional na forma de proposta de ensino para funções periódicas no Ensino Médio. Mais especificamente, apresentar estudos de funções trigonométricas por meio de atividades com o uso de applets construídos no software GeoGebra a partir de modelos matemáticos e da geração de sinais que emitem uma desejada sensação acústica. Esta proposta pretende instigar o professor a estabelecer uma conexão de um assunto presumidamente abstrato com a interatividade e experimentação da variação de parâmetros que produza mais que uma alteração gráfica e visual, mas que produza também a alteração dos sons emitidos, com o intuito de tornar o aprendizado mais agradável. As atividades são sugestões que podem ser reproduzidas por professores de física e matemática sem que os mesmos necessitem de conhecimentos avançados sobre a síntese sonora, mas que tenham o interesse de contribuir com o ensino da física, da matemática e suas tecnologias.

Palavras-Chave: Funções periódicas. Características do som. GeoGebra como sintetizador.

ABSTRACT

FLORA FILHO, Fernando. Sound Synthesis: A Teaching Proposal for Periodic Functions. 2022. Dissertation (Master in the Graduate Program in Teaching Exact Sciences) – Universidade de São Carlos, Sorocaba campus, Sorocaba, 2022.

This assignment is a bibliographical research that aimed to carry out a study on sound synthesis and develop an educational product in the form of a teaching proposal for periodic functions in High School. More specifically, to present studies of trigonometric functions through activities using applets built in GeoGebra software from mathematical models and the generation of signals that emit a desired acoustic sensation. This proposal intends to instigate the teacher to establish a connection of a supposedly abstract subject with the interactivity and experimentation of the variation of parameters that produces more than a graphic and visual alteration, but that also produces the alteration of the emitted sounds, in order to make the most enjoyable learning. The activities are suggestions that can be reproduced by physics and mathematics teachers without requiring advanced knowledge about sound synthesis, but who are interested in contributing to the teaching of physics, mathematics and their technologies.

Keywords: Periodic functions. Sound characteristics. GeoGebra as synthesizer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Circunferência unitária em coordenadas cartesianas.	25
Figura 2.2 – Representação da função de Euler.	26
Figura 2.3 – Circunferência unitária em coordenadas polares.	27
Figura 2.4 – Sinais das funções circulares.....	28
Figura 2.5 – Cosseno e seno em volta da circunferência unitária.	28
Figura 2.6 – Diagrama animado que representa as funções cosseno e seno.	30
Figura 2.7 – Onda cosseno na forma da tripla $[20, 2\pi(40), \pi/2]$	32
Figura 2.8 – Representação cartesiana e polar do número complexo num plano de Argand-Gauss.	36
Figura 2.9 – Triângulo retângulo.....	37
Figura 2.10 – Parte real de um sinal exponencial complexo.....	40
Figura 2.11 – Parte imaginária de um sinal exponencial complexo.....	40
Figura 2.12 – Forma de Onda Cosseno pela projeção de um fasor rotativo no eixo real.....	42
Figura 2.13 – Forma de Onda Seno pela projeção de um fasor rotativo no eixo imaginário..	43
Figura 2.14 – Sinal exponencial complexo e suas projeções em ondas cosseno e seno simultâneas.	45
Figura 2.15 – Soma de fasores em simetria conjugada (esquerda) e diferença de fasores em simetria conjugada (direita).	46
Figura 3.1 – Propagação do som e representação da onda sonora.	47
Figura 3.2 – Diagrama para as diferentes classes de formas de onda.	48
Figura 3.3 – Representação esquemática da sinalização auditiva.	49
Figura 3.4 – Gama de frequências e intensidades as quais o sistema auditivo responde.	51
Figura 3.5 – Variação senoidal da pressão do ar e sua percepção auditiva.....	52
Figura 3.6 – Ondas de diferentes durações.....	53
Figura 3.7 – Ondas de diferentes frequências.	54
Figura 3.8 – Frequências de som e faixa média de audição.	55
Figura 3.9 – Altura x Frequência.....	56
Figura 3.10 – Ondas de diferentes amplitudes.	57
Figura 3.11 – Escala de nível de som em quatro categorias.....	59
Figura 3.12 – Curvas de audibilidade (volume igual).	60

Figura 3.13 – Linha contínua: relação experimental entre magnitude psicológica volume e a magnitude física nível de volume. Linha pontilhada: relação de potência.....	61
Figura 3.14 – Os três principais segmentos de um tom musical que se assemelha a um modelo de Helmholtz.	62
Figura 3.15 – Forma de onda (a esquerda) e espectro (a direita) da série harmônica.	63
Figura 3.16 – Aproximação gráfica de um envelope espectral.	64
Figura 3.17 – Envelopes espectrais similares mas com diferentes frequências fundamentais.	65
Figura 3.18 – Os quatro principais segmentos (ADSR) de uma forma de onda de um tom musical.....	67
Figura 3.19 – A progressão da amplitude dos parciais de um tom de trompete.....	68
Figura 3.20 – Processo da percepção auditiva.....	69
Figura 3.21 – Esquema da percepção dos parâmetros psicoacústicos.....	70
Figura 4.1 – Processamento de síntese de sons.	73
Figura 4.2 – Notação gráfica para um oscilador.....	74
Figura 4.3 – Controle deslizante para frequência.	78
Figura 4.4 – Applet Sinal Harmônico.	79
Figura 4.5 – Código do botão Tocar.....	80
Figura 4.6 – A oscilação de saída é a superposição linear das duas oscilações de entrada....	81
Figura 4.7 – Forma de onda combinada pela superposição de duas ondas senoidais em fase.	82
Figura 4.8 – Adição em fase à esquerda e adição fora de fase à direita.	82
Figura 4.9 – Batimentos gerados pela superposição de duas ondas de frequências próximas.	83
Figura 4.10 – Campo de Entrada da f_1	86
Figura 4.11 – Applet Batimento.	87
Figura 4.12 – Configuração da síntese aditiva em um diagrama de bloco.....	88
Figura 4.13 – Applet Síntese Aditiva de Sete Harmônicos.	89
Figura 4.14 – Onda sonora complexa e a resposta do ouvido.	91
Figura 4.15 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda triangular que se têm a intenção de sintetizar.	98
Figura 4.16 – Applet Síntese de Onda Triangular.....	99

Figura 4.17 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda quadrada que se têm a intenção de sintetizar.	99
Figura 4.18 – Applet Síntese de Onda Quadrada.	100
Figura 4.19 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda dente de serra que se têm a intenção de sintetizar.....	101
Figura 4.20 – Applet Síntese de Onda Dente de Serra.	102
Figura 4.21 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda trem de impulso que se têm a intenção de sintetizar.....	103
Figura 4.22 – Applet Síntese de Trem de Impulsos.	104
Figura 4.23 – Análise/Síntese de uma Forma de Onda Quadrada em 6 harmônicos ímpares.	106
Figura 4.24 – Transformada de Fourier na linguagem de sistema.	107
Figura 4.25 – Transformada de Fourier (Direta e Inversa).	107
Figura 4.26 – Princípio da Transformada de Fourier. Qualquer forma de onda complexa pode ser decomposta em uma soma de formas de onda simples. Aqui, a forma de onda superior com um período T é decomposta na adição de três formas de onda simples ($n = 3$) relacionadas por uma frequência fundamental f_0	108
Figura 4.27 – Recomposição de Fourier para quatro componentes.	110
Figura 4.28 – Aproximações da onda quadrada para N parciais harmônicos.	113
Figura 4.29 – Espectro da amostra de voz original.	116
Figura 4.30 – Espectro reconstruído da voz com 500 coeficientes.	116
Figura 4.31 – Espectro reconstruído da voz com 2000 coeficientes.	117
Figura 4.32 – Espectro reconstruído da voz com 8000 coeficientes.	117
Figura 4.33 – Espectro da amostra de música original.....	117
Figura 4.34 – Espectro reconstruído da música com 500 coeficientes.....	118
Figura 4.35 – Espectro reconstruído da música com 8000 coeficientes.....	118
Figura 4.36 – Espectro reconstruído da música com 32000 coeficientes.....	118
Figura 4.37 – Instrumento a) que implementa a modulação de amplitude e sua forma de onda de saída b).	120

Figura 4.38 – Combinação do sinal da onda portadora com o sinal modulante formando um sinal AM com $m = 1$. A linha tracejada em preto representa a envoltória da modulação em amplitude.	121
Figura 4.39 – Applet Síntese de Som por Modulação de Amplitude (AM).....	122
Figura 4.40 – Traçado do som AM com índice de modulação $m = 1,5$	123
Figura 4.41 – Espectro do sinal produzido pelo instrumento que implementa a modulação de amplitude.	124
Figura 4.42 – Instrumento básico de síntese FM.....	125
Figura 4.43 – Combinação do sinal da onda portadora em azul com o sinal modulante em verde formando um sinal em frequência modulada (FM) em vermelho com $I = 7$	126
Figura 4.44 – Applet Síntese de Som por Modulação de Frequência (FM).	127
Figura 4.45 – Três exemplos de modulações de frequência para uma mesma portadora de 440 Hz: uma frequência modulante de 10 Hz com índice de modulação de 45 (topo), uma frequência modulante de 10 Hz com um índice de modulação de 75 (meio) e uma frequência modulante de 10 Hz com um índice de modulação de 100 (abaixo).....	128
Figura 4.46 – Espectro de síntese FM exibindo bandas laterais até $n = 3$	129
Figura 4.47 – Yamaha DX-7.	129
Figura 5.1 – Funções cosseno.....	133
Figura 5.2 – Lista de pontos das funções cosseno.....	134
Figura 5.3 – Applet Sinal Harmônico (Atividade 2.1).	137
Figura 5.4 – Instante 54 segundos de Arctic Monkeys - Do I Wanna Know? (Official Video).	138
Figura 5.5 – Applet Batimento (Atividade 2.2).....	139
Figura 5.6 – Applet Síntese de Bicorde (Atividade 3.1).	141
Figura 5.7 – Applet Síntese de Tríade (Atividade 3.2).....	142
Figura 5.8 – Gráfico da soma s_3	143
Figura 5.9 – Applet Síntese de Onda Dente de Serra (Atividade 4.1).....	144
Figura 5.10 – Applet de Síntese de Onda Quadrada (Atividade 4.2).	145

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1 – Base Nacional Comum Curricular: Habilidades de matemática e suas tecnologias no Ensino Médio.....	22
Quadro 1.2 – Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e Suas Tecnologias: Conteúdos e Habilidades do 1º bimestre da 2ª série do Ensino Médio.	22

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Sistemas físicos e fisiológicos relevantes para sons e suas correspondentes funções.....	48
Tabela 3.2 – Nível de Volume em sons versus Volume subjetivo em sons.	61
Tabela 3.3 – Dependência das qualidades subjetivas do som em relação aos parâmetros físicos.	71
Tabela 4.1 – Amplitudes relativas de harmônicos presentes em ondas padrão.....	105
Tabela 4.2 – Tamanho do arquivo da amostra de voz de acordo com o N° de Coeficientes.	115
Tabela 4.3 – Tamanho do arquivo da amostra de música de acordo com o N° de Coeficientes.	115
Tabela 5.1 – Dados das funções cosseno.....	134

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
2 FUNÇÕES PERIÓDICAS E SUAS OSCILAÇÕES HARMÔNICAS.....	25
2.1 Função de Euler	25
2.2 Funções Trigonométricas.....	26
Representação gráfica das funções cosseno e seno.....	29
2.3 Sinais Harmônicos	30
2.3.1 Relação do Período com a Frequência	33
2.3.2 Relação do Tempo deslocado com a Fase deslocada.....	33
2.4 Exponenciais Complexo e Fasores	35
2.4.1 Números Complexos.....	36
Forma Retangular	36
Forma Polar	37
2.4.2 Sinais Exponenciais Complexo.....	39
2.4.3 A Interpretação Fasorial Rotativa	41
Fasores	41
Fasor Rotativo.....	41
2.4.4 Fórmulas de Euler Inversa	45
3 SOM, SUAS CARACTERÍSTICAS E NOSSA PERCEPÇÃO	47
3.1 Som e Ruído.....	47
3.2 Audição	49
3.3 Percepção Auditiva	50
3.4 Características do Som.....	53
3.4.1 Duração	53
3.4.2 Altura	54
3.4.3 Intensidade, Nível Sonoro e Volume	56
3.4.4 Timbre	62
Teoria clássica do Timbre.....	62
Teoria moderna do timbre	66
3.5 Qualidade Sonora.....	69
3.6 Psicoacústica	70
4 SÍNTESE DIGITAL DE SONS	73
4.1 Instrumento	74

4.2 Oscilador	74
4.3 GeoGebra como Sintetizador	75
4.3.1 O software GeoGebra.....	75
Applets	75
4.3.2 O uso do GeoGebra no Ensino.....	76
4.3.3 Produção de som no GeoGebra.....	77
4.4 Superposição de Sons Puros	80
4.4.1 Soma de ondas de mesma frequência.....	81
4.4.2 Batimento	83
4.5 Síntese Aditiva	87
4.5.1 Resposta Auditiva para a Onda Sonora.....	90
4.5.2 Representações de Séries de Fourier	92
Forma Trigonométrica	92
Forma Exponencial.....	93
Forma Harmônica	94
4.5.3 Formas de Onda Geométrica.....	95
Onda Triangular.....	97
Onda Quadrada	99
Onda Dente de Serra.....	101
Onda Trem de Impulso	103
4.5.4 Análise de Fourier	105
4.5.5 Síntese de Fourier.....	109
4.5.6 Análise e Síntese de Fourier da Onda Quadrada.....	111
4.5.7 Recomposição do Áudio Digital	113
4.6 Síntese por Modulação.....	119
4.6.1 Modulação de Amplitude (AM).....	119
4.6.2 Modulação de Frequência (FM).....	124
5 ATIVIDADES	131
5.1 Gráfico de Funções Trigonométricas	132
Atividade 1.1: Funções Cosseno	133
Atividade 1.2: Funções Seno.....	135
5.2 Síntese de Sinais Sonoros	135
Atividade 2.1: Observando e Escutando manipulações dos Parâmetros.....	136
Atividade 2.2: Observando e Escutando o fenômeno do Batimento	138
5.3 Síntese de Acordes Musicais	140

Atividade 3.1: Síntese Aditiva de Bicorde	140
Atividade 3.2: Síntese Aditiva de Tríade	141
5.4 Síntese de Formas de Onda Geométrica	143
Atividade 4.1: Síntese Aditiva de Onda Dente de Serra	143
Atividade 4.2: Síntese Aditiva de Onda Quadrada	144
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	146
REFERÊNCIAS	148
APÊNDICE A – Applets construídos no GeoGebra.....	156
ANEXO A – Código do programa Recomposição do Áudio Digital.....	157

1 INTRODUÇÃO

Os sons em geral desempenham uma função relevante para o desenvolvimento da espécie humana e da sociedade. Sabemos da existência dos sons graças a nossa audição, que combinada com outros sentidos, nos fornece uma enorme fonte de informações, instaurando um elo entre o mundo e a maneira que interagimos com ele. O som é capaz de proporcionar e modificar emoções e graças a ele é que existe a música. Assim, o som é capaz de estimular a imaginação, cativar a atenção e favorecer de forma sensorial o processo de ensino-aprendizagem. Desde que nascemos ouvimos e interagimos com o som, o que é algo natural e instintivo. Embora passamos boa parte das nossas vidas ouvindo e interagindo com uma imensa diversidade sonora, poucas vezes paramos para pensar: O que é o som? Como se forma? Como é possível haver tanta variedade sonora? Por que alguns sons soam agradáveis e outros não?

Pelo menos em ênfase registrada na história da ciência, os primeiros sinais de casamento entre a matemática e a música surgem no século VI a.C. quando Pitágoras através de experiências com sons do monocórdio¹, efetua uma de suas mais belas descobertas, que dá à luz, na época, ao quarto ramo da matemática: *a música* (ABDOUNUR, 2003, p. 4).

Pitágoras descobriu o fato que duas cordas semelhantes sujeitas à mesma tensão e diferindo apenas em comprimento, quando tocadas juntas criam um efeito que é agradável ao ouvido se os comprimentos das cordas tiverem como razão dois pequenos números inteiros (FEYNMAN, 2008, p. 50-1).

Após dois milênios e alguns séculos, o físico e matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), exerceu forte influência na física com seu trabalho publicado sobre *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria analítica do calor), através do qual o pensador francês mostrou que a condução de tal energia em corpos sólidos podia ser analisada em termos de séries matemáticas infinitas, agora chamadas de séries de Fourier. Iniciando seu trabalho em 1807, em Grenoble, e terminando-o em Paris em 1822 buscando responder ao desafio de encontrar a temperatura – por exemplo numa placa plana condutora – a partir de sua configuração inicial – Fourier chegou em uma equação diferencial parcial linear, de 2ª ordem, cuja solução em uma dimensão é dada por série de senos e/ou cossenos (ABDOUNUR, 2003, p. 89; FIGUEIREDO, 2005, p. XV).

¹ O monocórdio é um instrumento composto por apenas uma corda esticada entre dois suportes fixos numa prancha. Ele possui cavaletes móveis que são colocados sob a corda para dividi-la em seções. Possivelmente inventado por Pitágoras para estudo e cálculo das relações entre vibrações sonoras (ABDOUNUR, 2003, p. 6).

Além da aplicação à solução de equações diferenciais, utiliza-se a expansão por séries de Fourier em distintas situações, podendo-se enunciar este princípio num âmbito mais amplo da seguinte maneira:

Qualquer forma periódica regular de vibração pode sempre ser obtida pela adição de vibrações simples com números vibracionais que são uma, duas, três, quatro, ... vezes tão grande quanto o número vibracional do movimento dado (HELMHOLTZ, 1875, p. 52).

Do ponto de vista acústico-musical, o princípio acima pode ser reescrito como:

Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido, correspondente a um tom musical, pode ser sempre e de maneira única, exibido como a soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical (HELMHOLTZ, 1875, p. 53).

A comprovação da característica periódica do som, associada à contribuição indireta de Fourier para a música, colaboraram para a descoberta de que o ouvido analisa sons complexos examinando suas componentes senoidais e/ou cossenoidais de acordo com as leis de ressonância em diversas regiões de seu interior, fornecendo assim, elementos que possibilitaram uma solução para o problema - inserido pela escola pitagórica há cerca de 2500 anos – das consonâncias musicais subjazerem de razões de pequenos números inteiros (ABDOUNUR, 2003, p. 88-90).

Para determinar quais características de uma forma de onda se correlacionam melhor com o timbre, Helmholtz (1875) fez uso do ilustre trabalho de Fourier que serve como uma explicação teórica da série harmônica uma vez que as componentes da série Fourier de toda forma de onda periódica possuem frequências que estão relacionadas harmonicamente, estabelecendo e justificando as razões de pequenos números inteiros para criar um efeito que é agradável ao ouvido humano.

As primeiras tentativas de utilizar o computador como ferramenta de síntese sonora (um campo da música computacional²) datam da década de 1951-1960. Nessa época o “Bell Telephone Laboratories” estava interessado nas possibilidades de se transmitir conversas telefônicas de forma digitalizada, através da conversão da informação analógica em padrões equivalentes de amostras numéricas de um lado da linha e realizando-se o processo inverso do

² O autor deste trabalho adotou a utilização do termo Música Computacional como padrão no texto para o termo em Inglês *Computer Music*.

outro. Foi nesse clima de investigação que um dos engenheiros do Bell começou a explorar o uso do computador como meio de se calcular e gerar amostras sonoras. Neste momento vários músicos e compositores mostravam interesse na utilização do computador como ferramenta de processamento de sinais sonoros (CAETANO, 2006, p. 18).

A partir da sequência histórica da introdução deste trabalho, apresentaremos um breve relato sobre a trajetória do autor, que a conduziu até esse presente estudo. Desde sua adolescência, talvez por influências de amigos e familiares, o pesquisador começa a se interessar por matemática e também por música. No entanto, apenas depois de cursar um ano de licenciatura em matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) em 2002, o autor começa a fazer aulas de violão e estudar um pouco de música. Ao estudar os primeiros acordes e escalas musicais foi possível observar padrões matemáticos na construção das teorias musicais de maneira a instigar o pesquisador a investigar mais a fundo as relações entre ambas.

No penúltimo ano de licenciatura em matemática, mas nessa ocasião, na Universidade de Sorocaba (UNISO), o pesquisador é orientado pelo Prof. Dr. Antonio Noel Filho e pela Prof^ª. Dr^ª. Maria Ogécia Drigo no tema Matemática e Música. No final de 2006, o autor apresenta o trabalho de conclusão de curso (TCC) intitulado “Matemática e Música: analogias eficazes na apreensão de significados” o qual abordou a história e analogias da relação entre matemática e música com atividades elaboradas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

No final de 2009, após cursar as disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), o autor é inicialmente orientado pelo Prof. Dr. Adolfo Maia Junior no tema Síntese de Som. Nessa data, o Prof. Dr. Adolfo Maia Junior também exercia o cargo de coordenador do Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora (NICS) – UNICAMP.

O NICS, em atividade desde 1983, tem como principal objetivo a pesquisa de diferentes manifestações que tenham o som como objeto de conteúdo informacional. Congregando pesquisadores de diversas áreas do conhecimento, centradas em Artes & Ciências, vem atuando no desenvolvimento de projetos interdisciplinares que visam ao estabelecimento de relações entre a criação musical e a descoberta de novos modelos de produção, controle e análise sônica. A partir de 1994, a pesquisa do Núcleo concentrou-se em linhas vinculadas à Modelagem Matemática, Simulação Computacional e Composição Musical, que associadas às modernas técnicas de processamento digital de sinal, favoreceram a concentração de projetos na área de Música Computacional (SOBRE O NICS, 2022).

A partir de 2010, o pesquisador desenvolveu um trabalho de dissertação sobre aproximações de amostras de sons pelo método LSQR³. No NICS, o autor teve oportunidade de obter orientações e tirar dúvidas com os pesquisadores (cientistas) Adolfo Maia Junior, José Eduardo Fornari Novo Junior e Jônatas Manzolli. Entretanto, tal trabalho não foi finalizado.

Por outro lado, como professor efetivo da rede pública de ensino do estado de São Paulo, tendo ministrado disciplinas de Física e Matemática para o Ensino Médio, observando dificuldades no aprendizado de funções trigonométricas ao decorrer de 15 anos, em determinados momentos, o pesquisador considerou a possibilidade de utilizar a síntese de som para o ensino de funções periódicas.

Diante da sequência histórica e das motivações citadas anteriormente, **este trabalho consiste em realizar um estudo sobre síntese digital de som no software livre GeoGebra e investigar métodos e modelos matemáticos para descrever uma proposta de ensino para funções periódicas**. De modo simples, síntese de som é a geração de um sinal que cria uma desejada sensação acústica (DODGE e JERSE, 1985, p. 72). Segundo os PCNs: Ensino Médio,

Para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de observação e manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo a laboratorial, propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e é particularmente importante quando permite ao estudante diferentes e comunicantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual. A experimentação permite ainda ao aluno a tomada de dados significativos, com as quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências não realizadas (BRASIL, 1998, p. 52-53).

No enredo do estudo da síntese sonora, compreender as principais características do som e seus parâmetros torna-se imprescindível na busca de resposta ao seguinte problema, que se constitui o eixo norteador da presente pesquisa, que é: **Como é possível usar a síntese digital de som para ensinar funções periódicas?**

A justificativa para o desenvolvimento desse trabalho se mostra ao observar dificuldades de aprendizagens no entendimento (dos parâmetros) das funções trigonométricas por muitos alunos da segunda e terceira série do ensino médio conforme resultados de Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP) de matemática de 2019 do Governo do Estado de São Paulo.

³ LSQR é um método usado para encontrar a solução numérica aproximada de problemas de mínimos quadrados lineares.

Em relação ao estudo das funções trigonométricas, vale ressaltar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 74) recomendam que as funções seno e cosseno sejam associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico.

Quadro 1.1 – Base Nacional Comum Curricular: Habilidades de matemática e suas tecnologias no Ensino Médio.

HABILIDADES
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília, 2018, p. 528, 531 (Adaptado pelo autor).

Quadro 1.2 – Currículo do Estado de São Paulo – Matemática e Suas Tecnologias: Conteúdos e Habilidades do 1º bimestre da 2ª série do Ensino Médio.

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p>Relações</p> <p>Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fenômenos periódicos • Funções trigonométricas • Equações e inequações • Adição de arcos 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas • Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos • Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a \sin(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = \sin x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c • Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos

Fonte: SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática. São Paulo: SEE, 2011, p. 70.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que regulamenta o ensino das escolas públicas e particulares para toda a Educação Básica Brasileira. Ela orienta aos propósitos de aprendizagem de cada etapa da formação escolar, norteando os currículos. É um documento normativo e, como tal, estabelece regras e diretrizes fundamentais, tais como competências e habilidades, para garantir uma aprendizagem igualitária e de qualidade a todos os estudantes (BRASIL, 2018).

Funções periódicas está presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (ver Quadro 1), no Currículo do Estado de São Paulo (ver Quadro 2) e na Matriz de Avaliação Processual (ver Seção 5.1), na 2ª e 3ª série do Ensino Médio, com maior profundidade na 2ª série para o período do primeiro bimestre letivo. Esses documentos em conjunto tem o intuito de sinalizar os percursos de aprendizagem e de desenvolvimento que devem ser assegurados aos estudantes, ao longo da Educação Básica.

Por outros pontos de vista encontrado na literatura multidisciplinar referente aos sons é possível representar essas funções trigonométricas em que cada parâmetro pode ser variado e transmite informações que podem ser perceptíveis (sentidas) visualmente e/ou auditivamente, de modo a auxiliar os alunos a atribuir significado ao estudo dessas funções.

Ao utilizar gráficos, o pensamento funcional e a percepção auditiva na variação dos parâmetros físicos de um modelo de sinal sonoro (Subseção 4.3.3), por exemplo, têm-se por objetivo dar significado em cada parâmetro e variável com a escolha de uma notação adequada de maneira a favorecer o discente na compreensão dos conteúdos físicos e matemáticos, assim como, estimular o docente em suas atividades pedagógicas.

Para aplicar os modelos, construir gráficos, utilizar o pensamento funcional e realizar a síntese de sons, utiliza-se o programa livre de caráter interativo, GeoGebra, como Objeto de Aprendizagem⁴. Os applets construídos no GeoGebra, que compõem este trabalho, fazem uso dessa possibilidade em que diversas variações podem ser feitas de forma a diversificar o uso didático.

O uso de experimentos no GeoGebra deverá ser uma ferramenta pedagógica usada pelo professor para melhorar entendimento da física e da matemática por parte do aluno. Ao fazer isto, o docente terá a possibilidade de atingir a sensibilidade do estudante por meio dos sons com uso de um material tecnológico que desperte o interesse e facilite a compreensão de conceitos abstratos.

⁴ Entende-se como Objeto de Aprendizagem todo conteúdo educacional digital que pode ser reutilizado em sua íntegra ou em partes com objetivos pedagógicos que servem para apoiar o processo de ensino-aprendizagem (TAROUCO et al, p. 3, 2004).

Acreditando que a utilização do saber dos sons pode ser uma ferramenta motivadora e potencialmente significativa para o ensino da física, da matemática e suas tecnologias, pretende-se mostrar as similaridades e ligações entre elas, no intuito de desenvolver o ensino de funções periódicas de forma que sua prática seja incentivada para o uso dos estudantes e professores.

O relatório da pesquisa foi sendo tecido de acordo com seus capítulos, sendo a “introdução”, o primeiro deles.

No Capítulo 2 é apresentado um estudo sobre as funções seno e cosseno a partir da função de Euler. Sinais senoidais e seus parâmetros independentes, contribuindo assim, com entendimento das oscilações harmônicas. Há uma importante relação entre exponencial complexa e as funções trigonométricas que servirão de base para melhor compreensão dos modelos utilizados nas séries e transformadas de Fourier inserido no capítulo 4.

O Capítulo 3 apresenta um estudo acústico e psicoacústico. Nesse estudo, espera-se que o leitor entenda um pouco mais sobre o som, suas características, seus parciais harmônicos e a nossa percepção auditiva bem como os parâmetros físicos e psicoacústicos.

No Capítulo 4 é apresentado um breve histórico da síntese digital de sons, fundamentos da síntese de sons, o software GeoGebra como sintetizador, a superposição de sons e o fenômeno do batimento, a síntese aditiva e as sínteses por modulação. Na síntese aditiva, tivemos o interesse de descrever sobre análise e séries de Fourier que derivou de um trabalho de pesquisa em grupo interdisciplinar com aplicações na recomposição do áudio digital, gerando assim, um código de programação escrito em Python que foi inserido como ANEXO A deste trabalho.

Por último, no capítulo 5, são propostas atividades sugestivas para planos de aula com abordagens da síntese sonora, para estudantes a partir da segunda série do ensino médio, com a utilização de applets construídos no GeoGebra de modo que o aprendiz poderá visualizar a função e o gráfico do sinal sonoro bem como ouvir esse sinal de maneira a possibilitar ressignificações na aprendizagem de funções periódicas.

Apresentamos também as considerações finais e as referências que nortearam essa pesquisa. Para facilitar ao leitor, há uma quantidade considerável de ilustrações. Os gráficos e applets (inseridos no APÊNDICE A) deste trabalho foram elaborados pelo autor com auxílio do GeoGebra Classic 5.

2 FUNÇÕES PERIÓDICAS E SUAS OSCILAÇÕES HARMÔNICAS

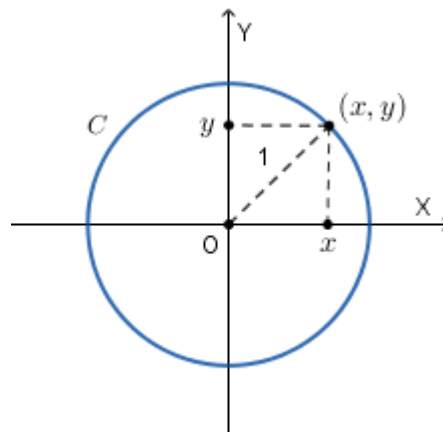
Funções periódicas desempenham um papel importante em vários ramos da ciência. Neste capítulo, a circunferência trigonométrica será a base para a construção das funções periódicas.

2.1 Função de Euler

Com base em Lima (2013, p. 220), uma maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E(\theta)$.

Notação: Indicaremos pela letra C a circunferência de centro na origem $O = (0, 0)$ e raio igual a 1, que chamaremos de circunferência unitária, conforme ilustra a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Circunferência unitária em coordenadas cartesianas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Segue-se do Teorema de Pitágoras que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Assim, para todo ponto $(x, y) \in C$ se tem $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

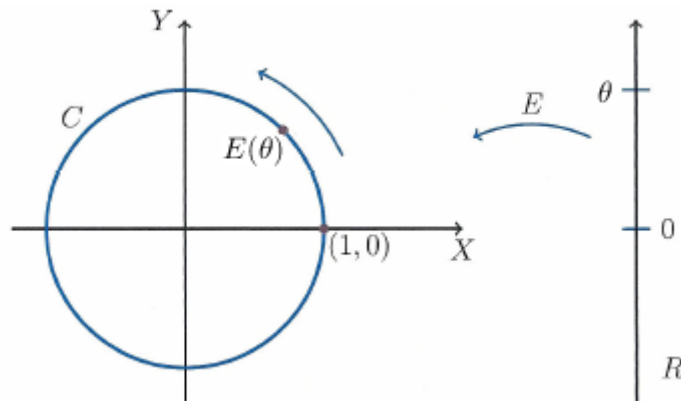
Definição 2.1: A função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow C$ é a correspondência que associa cada número real θ , o ponto $E(\theta) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$;
- se $\theta > 0$, percorre-se a circunferência C , a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento θ , no sentido anti-horário. O ponto final do caminho será o ponto $E(\theta)$;

- se $\theta < 0$, $E(\theta)$ será a extremidade final do caminho de comprimento $|\theta|$, percorrido sobre C a partir do ponto $(1, 0)$, no sentido horário.

A função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$.

Figura 2.2 – Representação da função de Euler.



Fonte: Lima (2013, p. 221).

Observe que cada vez que o ponto θ descreve na reta um intervalo de comprimento l , sua imagem $E(\theta)$ percorre sobre a circunferência C um arco de igual comprimento l . Em particular, como a circunferência unitária C tem comprimento igual a 2π , quando o ponto θ descreve um intervalo de comprimento 2π , sua imagem $E(\theta)$ dá uma volta completa sobre C , retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$E(\theta + 2\pi) = E(\theta)$$

e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(\theta + 2k\pi) = E(\theta)$, seja qual for $\theta \in \mathbb{R}$.

2.2 Funções Trigonômicas

A fim de definirmos as funções trigonométricas, também chamadas de funções circulares, devemos associar a cada número real θ um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número θ desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo.

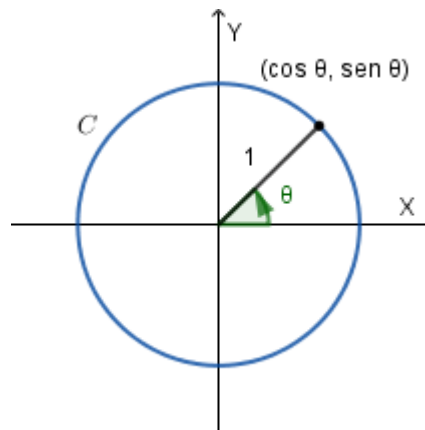
Evidentemente, há diversas maneiras de se medir um ângulo, dependendo da unidade que se adota. Há duas unidades que se destacam: o radiano (*rad*) por ser a unidade padrão no sistema internacional de unidades (SI) e o grau ($^\circ$) por ser tradicional há milênios.

Definição 2.2: As funções $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denominadas *função cosseno* e *função seno* respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $\theta \in \mathbb{R}$:

$$E(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Noutras palavras, $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$ são respectivamente a abscissa e a ordenada do ponto $E(\theta)$ da circunferência unitária C , conforme pode ser visualizado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Circunferência unitária em coordenadas polares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Segue-se imediatamente da Definição 2.2 que vale, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a relação fundamental da trigonometria (RFT)

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (2.1)$$

Definição 2.3: Diz-se que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-\theta) = f(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Se tem $f(-\theta) = -f(\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a função f chama-se ímpar.

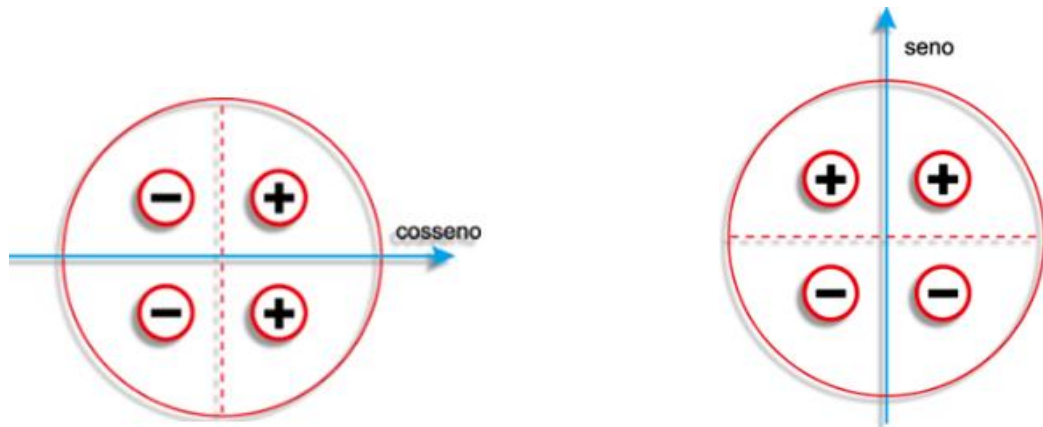
A função de Euler nos informa que quando $E(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ têm-se $E(-\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta)$. Isto significa que

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Portanto, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

Em decorrência dessa paridade, o sinal da função cosseno $x = \cos \theta$ é positivo para valores do 1º e 4º quadrantes e negativo para valores do 2º e 3º quadrantes enquanto o sinal da função seno $y = \sin \theta$ é positivo para valores do 1º e 2º quadrantes e negativo para valores do 3º e 4º quadrantes conforme pode ser visualizado na Figura 2.4.

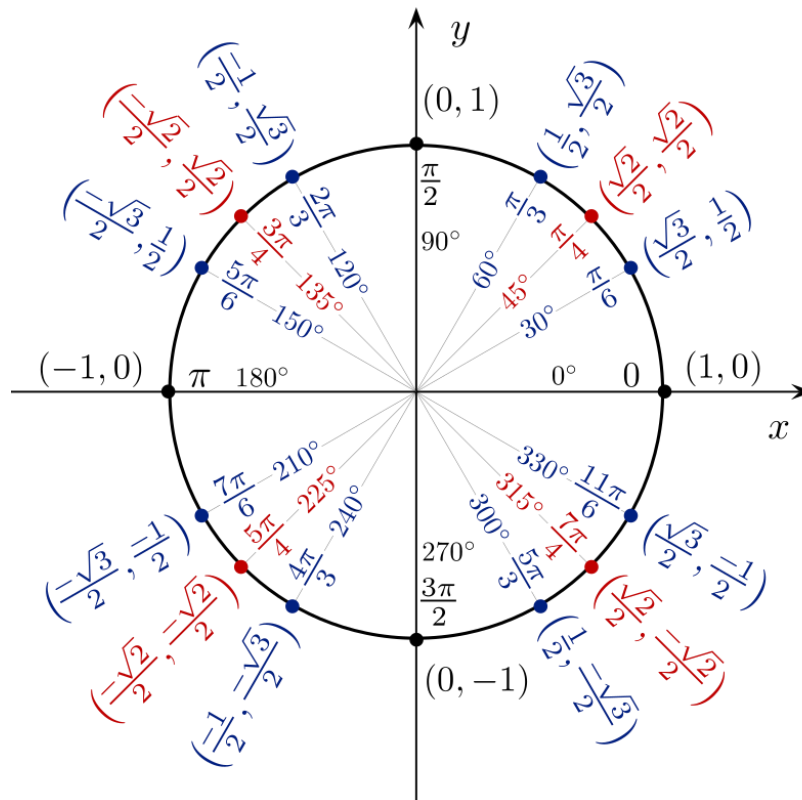
Figura 2.4 – Sinais das funções circulares.



Fonte: Fernandes (2021).

As coordenadas dos pontos da função de Euler para ângulos importantes e seus simétricos podem ser obtidas utilizando a definição de paridade aos conhecidos arcos notáveis conforme ilustra a Figura 2.5.

Figura 2.5 – Cosseno e seno em volta da circunferência unitária.



Fonte: Belk (2010).

Observando a Figura 2.5 é possível verificar que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, valem as relações:

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \quad (2)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \quad (3)$$

$$\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta \quad (4)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen} \theta \quad (5)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad (6)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad (7)$$

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta \quad (8)$$

Definição 2.4: Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica quando existe um período $T \neq 0$ tal que

$$f(t + T) = f(t) \quad (2.2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta função também é chamada de T – Periódica (LIMA, 2013, p. 226; SAUTER e AZEVEDO, 2020, p. 12).

Observação 2.1: Se uma função f é periódica de período T , então f também é periódica de período kT onde $k \in \mathbb{Z}$, já que

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = f(t + 3T) = \dots = f(t + kT).$$

Em decorrência da periodicidade da função de Euler, as funções seno e cosseno são periódicas, de período $T = 2\pi$.

Ou seja, conhecendo o comportamento da função no intervalo $[0, 2\pi]$, já é possível conhecer seu comportamento em qualquer outro intervalo da forma $[2k\pi, 2(k + 1)\pi]$, pois o valor de θ que percorre ao longo da circunferência dá as coordenadas de um ponto após um número de voltas sem perda de generalidade (OLIVEIRA, 2019, p. 37).

Assim,

$$x = \cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi) \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi),$$

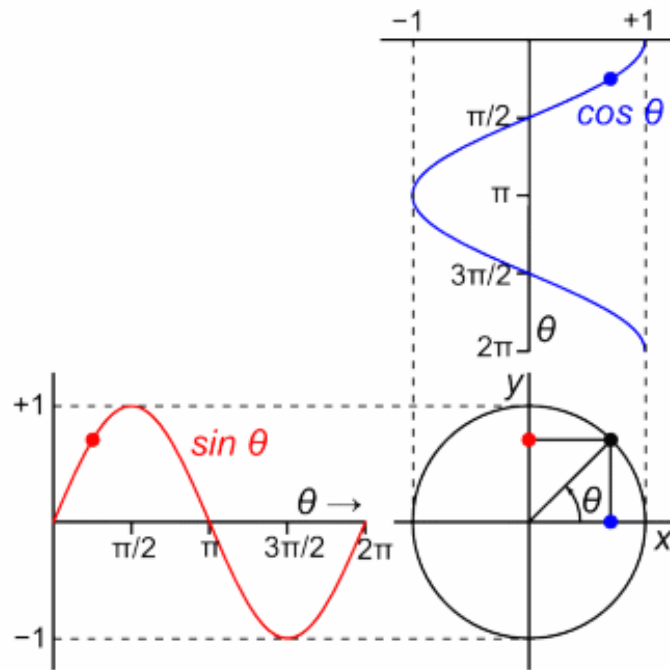
para todo $k \in \mathbb{Z}$, seja qual for $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, a transição da definição de seno e cosseno de um ângulo para a definição de seno e cosseno de um número real é feita por meio da função de Euler.

Representação gráfica das funções cosseno e seno

Com a expectativa de esclarecer melhor as representações gráficas e o pensamento funcional, este tópico nos mostra uma conexão entre a circunferência trigonométrica e as funções trigonométricas.

Essa conexão acontece em decorrência Definição 2.2 quando associamos os pontos da função de Euler $E(\theta) = (x, y)$ em preto com os pontos das funções $x = \cos \theta$ em azul e $y = \sin \theta$ em vermelho, pela rotação circunferência unitária formando um ângulo θ , com o eixo x conforme esclarece o diagrama animado da Figura 2.6.

Figura 2.6 – Diagrama animado⁵ que representa as funções cosseno e seno.



Fonte: Adaptado de Chetvorno (2014).

Note, na Figura 2.6, que a abscissa x é a projeção horizontal enquanto que a ordenada y é a projeção vertical do ponto $E(\theta)$.

2.3 Sinais Harmônicos

Sinais são padrões de variações no tempo que representam informações sobre um fenômeno, criando o que chamamos de "forma de onda no tempo" (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 2).

Ao definir um sinal, normalmente usaremos uma função cuja variável independente é o tempo t , com unidades em segundos (s).

⁵ Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sine_and_cosine_animation.gif>.

Entre os de fundamental importância, estão os **sinais senoidais**⁶ que produzem *oscilações harmônicas* (isto é, movimentos que se repetem em intervalos regulares) e serão desenvolvidos ao longo desse trabalho (TAYLOR, 1994, p. 32). Por este motivo, é possível encontrar nas literaturas, os termos **sinais harmônicos** ou funções harmônicas para estes mesmos sinais (FEYNMAN, 2008, p. 50-3; VISTNES, 2018, p. 93-94).

A representação de um modelo matemático mais geral para um sinal harmônico, é obtido fazendo com que o *argumento* (isto é, o ângulo θ_0) da função cosseno seja uma função de t . A equação (2.3) a seguir fornece duas formas equivalentes (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 15; MOORER, 1990, p. 57):

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi_0) = A \cos(2\pi f_0 t - \phi_0) \quad (2.3)$$

tal que $\theta_0(t) = \omega_0 t - \phi_0$. As duas formas são relacionadas pelo conceito de $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Por qualquer forma, descrita pela Equação (2.3), existem **três parâmetros independentes** que são números fixos. Os nomes e interpretações desses parâmetros são os seguintes (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 15; FEYNMAN, 2008, p. 21-4):

1. A é chamado de **amplitude**. A amplitude é um fator de escala que determina o tamanho do sinal cossenoidal. Como a imagem da função $\cos \theta$ oscila no intervalo $[-1, +1]$, o sinal $x(t)$ da equação (2.3) oscila no $[-A, +A]$.
2. ω_0 é denominada **frequência angular fundamental**. Como o argumento da função cosseno está em radianos, a quantidade $\omega_0 t$ também deve ser em radianos. Assim, ω_0 deve ter unidades em radianos por segundo (*rad/s*). Da mesma forma, $f_0 = \omega_0/2\pi$ é chamada de **frequência**, e f_0 tem unidades em hertz ($Hz = s^{-1}$).
3. ϕ_0 é chamado de **fase da oscilação fundamental**, quando $t = 0$. As unidades de fase devem ser radianos visto que o argumento do cosseno está em radianos.

Geralmente, preferimos usar a função cosseno ao definir a mudança de fase. Se tivermos uma fórmula contendo seno, por exemplo, $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t - \phi')$, podemos reescrevê-la em termos de cosseno se usarmos a quinta identidade das relações. O resultado é:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t - \phi_0') = A \cos(\omega_0 t - (\phi_0' + \pi/2)).$$

⁶ Começamos nossa discussão introduzindo uma classe geral de sinais que são comumente denominados de sinais cossenoidais ou, equivalentemente, sinais senoidais. Coletivamente, esses sinais são chamados de sinais senoidais (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 9).

Assim, denotamos a mudança de fase como $\phi_0 = \phi_0' + \pi/2$ na Equação (2.3).

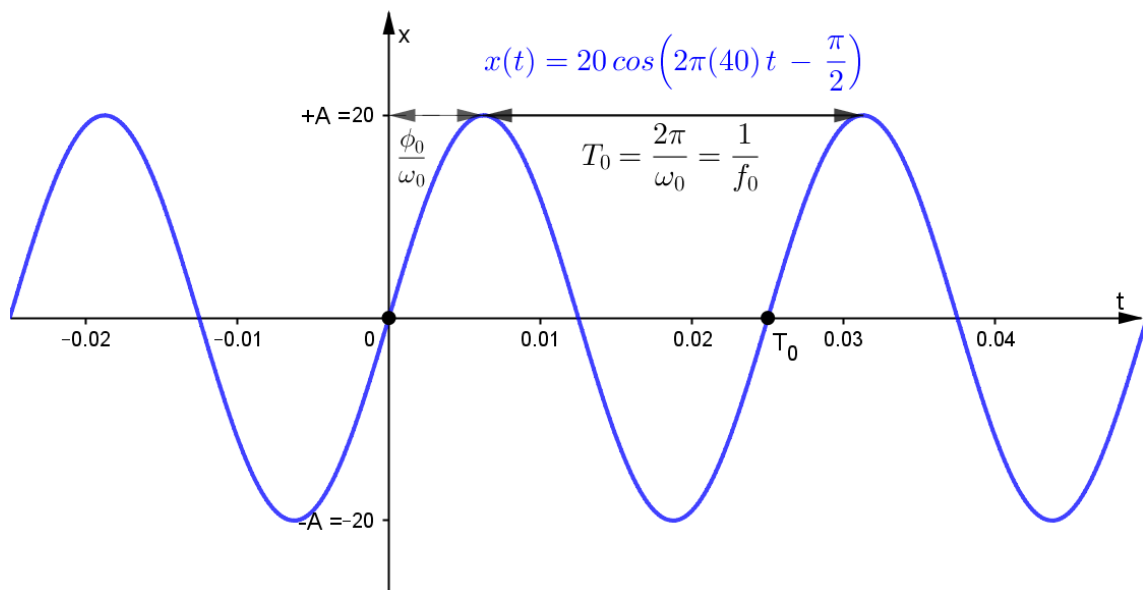
Um meio mais compacto de quantificar as informações encontradas na onda acústica $x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi_0)$ envolve a representação de todo o sinal na forma da tripla $[A, \omega_0, \phi_0]$, que representa a amplitude, a frequência angular e a fase de oscilação. Somente a partir desses três parâmetros, o sinal harmônico ideal pode ser construído com precisão, e em especial os dois primeiros, desempenham um papel muito importante na percepção de sons musicais (ROEDERER, 2008, p. 27; TAYLOR, 1994, p. 6).

Não é difícil observar que modelos de sinais senoidais são aplicados em vários circuitos eletrônicos de grande importância, alguns deles que podemos citar são: gerador, oscilador, osciloscópio, eletrocardiográfico e sintetizador.

Exemplo 2.1: Sinal cossenoidal na forma de onda da tripla $[20, 2\pi(40), \pi/2]$.

Ou seja, os parâmetros do sinal são a amplitude $A = 20$, a frequência $f_0 = 40 \text{ Hz}$ e a fase de oscilação $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$, conforme a plotagem apresentada na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Onda cosseno na forma da tripla $[20, 2\pi(40), \pi/2]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A dependência da função no parâmetro da amplitude $A = 20$ é perceptível uma vez que o sinal $x(t)$ oscila entre os picos máximos e mínimos, que são $+20$ e -20 , respectivamente.

Note que se a fase é um-quarto do ciclo trigonométrico (i.é, $\phi_0 = \pi/2$) e, como o sinal é uma função ímpar (o gráfico nos mostra simetria na origem), segue-se pelas relações trigonométricas que o sinal cossenoidal também possui uma forma de onda seno:

$$x(t) = \begin{cases} A \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ A \sin(\omega_0 t) \\ A \cos\left(\omega_0 \left[t - \frac{T_0}{4}\right]\right) \end{cases} .$$

O intervalo de tempo entre dois valores máximos sucessivos é $T_0 = 1/f_0 = 0,025$ s. Para entender por que o sinal tem essa propriedade, precisaremos fazer um pouco de análise.

2.3.1 Relação do Período com a Frequência

O sinal harmônico na Figura 2.7 é claramente **periódica**. O período desse sinal cossenoidal, indicado por T_0 , é o comprimento de um ciclo da forma de onda no tempo. Em geral, a frequência do sinal harmônico determina seu período, e a relação pode ser encontrada aplicando a definição de periodicidade, conforme procede as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x(t + T_0) &= x(t) \\ A \cos(\omega_0(t + T_0) - \phi) &= A \cos(\omega_0 t - \phi) \\ \cos(\omega_0 t + \underbrace{\omega_0 T_0}_{=2\pi} - \phi) &= \cos(\omega_0 t - \phi). \end{aligned}$$

Desde que a função cosseno tenha um período de 2π radianos, a igualdade acima vale para todos os valores reais de t se

$$\begin{aligned} \omega_0 T_0 = 2\pi &\quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ (2\pi f_0) T_0 = 2\pi &\quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{f_0}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Desde que T_0 seja a duração de um período do sinal, $f_0 = 1/T_0$ é o número de períodos (ciclos) por segundo. Por isso, ciclos por segundo é uma unidade apropriada para f_0 , e foi em uso geral até 1960⁷. Em determinados casos, as unidades de f_0 , são mais convenientes ao descrever a senoide, porque os ciclos por segundo definem naturalmente o período.

2.3.2 Relação do Tempo deslocado com a Fase deslocada

⁷ A unidade hertz foi adotada em 1933 pela comissão eletrotécnica em honra à Heinrich Hertz, quem primeiro demonstrou a existência de ondas de rádio (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 17).

O parâmetro fase deslocada (ou, fase de oscilação) ϕ junto com a frequência determina *os locais de tempo dos valores máximos e mínimos* da onda cosseno. Para ser específico, observe que o sinal harmônico (2.3) com $\phi = 0$ tem um pico positivo em $t = 0$. Quando $\phi \neq 0$, a fase de oscilação determina quanto o máximo do sinal senoidal é alterado em relação a $t = 0$.

Sempre que um sinal possa ser expresso na forma

$$x_1(t) = s(t - \tau)$$

diremos que $x_1(t)$ é um sinal com tempo-deslocado de $s(t)$. Assim:

- Se $\tau > 0$, então o deslocamento é para a *direita*, e dizemos que o sinal $s(t)$ *atrasou*⁸ no tempo.
- Se $\tau < 0$, o deslocamento é para a *esquerda* e dizemos que o sinal $s(t)$ *avançou* no tempo.

Em geral, qualquer função da forma $s(t - \tau)$ tem sua origem movida para o local $t = \tau$.

Uma maneira de determinar o tempo deslocado para um sinal harmônico é encontrar o pico positivo da cossenoide mais próximo de $t = 0$. No gráfico da Figura 2.7, o tempo em que o primeiro pico positivo ocorre é $\tau = 0,00625$ s. Como o pico neste caso ocorre em um momento positivo (à direita de $t = 0$), dizemos que o tempo deslocado é um atraso do sinal cossenoidal na fase nula.

Seja $x_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ um sinal denotado por cosseno, com fase de deslocamento zero. Um atraso de $x_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ pode ser convertido em uma fase deslocada ϕ , fazendo a seguinte comparação:

$$x_0(t - \tau) = A \cos(\omega_0(t - \tau)) = A \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$\cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau) = \cos(\omega_0 t - \phi_0).$$

Como essa equação deve ser válida para todos os t , devemos ter $\omega_0 \tau = \phi_0$, o que leva a

$$\tau = \frac{\phi_0}{\omega_0} = \frac{\phi_0}{2\pi f_0}.$$

Note que a fase deslocada é positiva quando o tempo deslocado é positivo (um atraso). Em termos de período ($T = 1/f_0$), obtemos a fórmula mais intuitiva

⁸ O atraso (delay) é uma técnica de processamento de sinal de áudio. Útil para criar o som de eco.

$$\phi_0 = 2\pi f_0 \tau = 2\pi \left(\frac{\tau}{T_0} \right), \quad (2.5)$$

que afirma que a mudança de fase é 2π vezes a fração de um ciclo, dada pela razão entre a mudança de tempo e o período.

Como o pico positivo mais próximo $t = 0$ sempre deve estar dentro de $|\tau| \leq T_0/2$, o *principal valor da fase deslocada* sempre deve ser escolhida para satisfazer $-\pi < \phi \leq \pi$. No entanto, a fase deslocada pode ser ambígua, porque adicionar um múltiplo de 2π ao argumento de uma função cosseno não altera seu valor, devido a sua periodicidade, visto que cada múltiplo diferente de 2π corresponde a escolher um pico diferente da forma de onda periódica.

Outra maneira de calcular o *principal valor da fase deslocada* é encontrar o pico positivo da senoide e medir sua localização no tempo correspondente. Após o local do tempo ser convertido em fase, usando (2.5), um número inteiro múltiplo de 2π pode ser adicionado ou subtraído na fase deslocada para produzir um resultado final entre $-\pi$ e $+\pi$. Isso fornece um resultado final idêntico à localização do pico que está dentro de um período de $t = 0$ (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 20).

2.4 Exponenciais Complexo e Fasores

Mostramos que os sinais harmônicos são modelos de representações matemáticas úteis para sinais que surgem em um ambiente prático. No entanto, verifica-se que a análise e a manipulação de sinais senoidais são muitas vezes bastante simplificadas ao lidar com sinais relacionados chamados **sinais exponenciais complexo**. Embora a introdução do conceito não familiar e aparentemente artificial de sinais exponenciais complexo pareça estar dificultando o problema, em breve veremos o valor nessa nova representação.

Sinal exponencial complexo é um número complexo que representa um sinal senoidal. Está relacionado a um conceito mais geral chamado *representação analítica*, que decompõe um sinal senoidal no produto de uma constante complexa e um fator que encapsula a dependência de frequência e tempo. A constante complexa, que engloba amplitude e fase deslocada, é conhecida como fasor (ou amplitude complexa).

Esta seção mostra como esses sinais exponenciais complexos podem ser representados como fasores rotativos. Esses fasores rotativos fornecem uma notação simplificada para os propósitos da análise e têm a vantagem adicional de serem fáceis de retratar visualmente e podem fornecer informações físicas significativas (DENBIGH, 1998, p. 71).

2.4.1 Números Complexos

Várias notações matemáticas diferentes podem ser usadas para representar números complexos. Os dois tipos que abordaremos nesta subseção são a **forma retangular** e a **forma polar**.

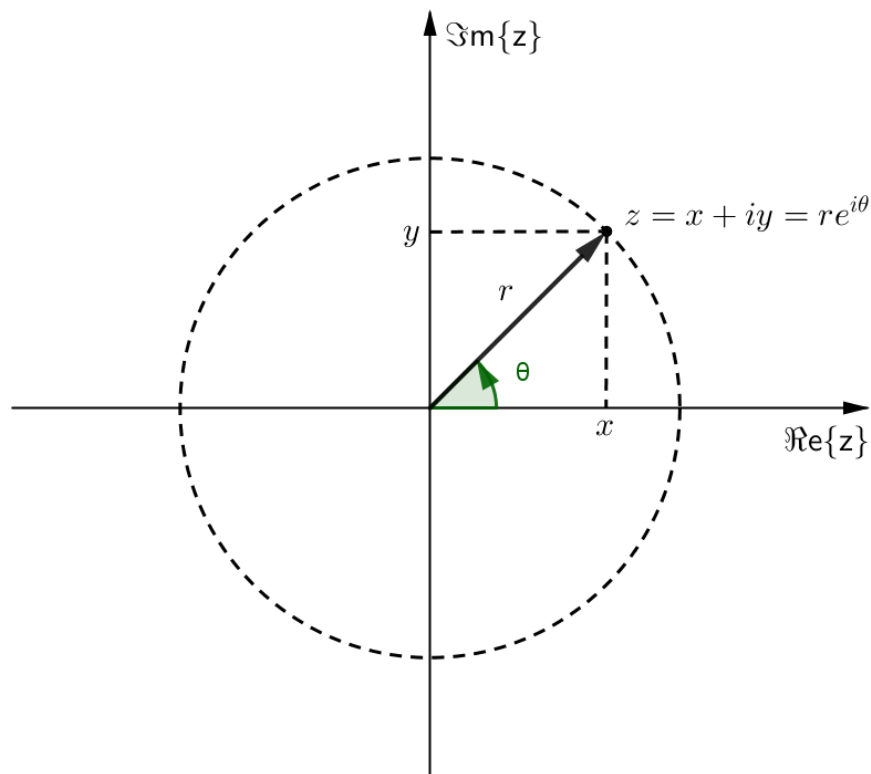
Forma Retangular

Na forma cartesiana (ou forma retangular), um número complexo z é um par ordenado de números reais, em que todas as seguintes notações definem o mesmo número complexo:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= x + iy \\ &= \Re\{z\} + i \Im\{z\} \end{aligned}$$

de modo que $x = \Re\{z\}$ é a parte real, $y = \Im\{z\}$ é a parte imaginária e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, respectivamente, de z .

Figura 2.8 – Representação cartesiana e polar do número complexo num plano de Argand-Gauss.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Isso leva a uma interpretação geométrica útil de um número complexo representado como um vetor, mostrado na Figura 2.8, em que seu início é a origem $(0, 0)$ e sua seta encosta no ponto (x, y) . Com esse mesmo raciocínio, o número $i = 0 + i1$ representa o vetor unitário vertical $(0, 1)$ e é considerado um operador rotacional de $\pi/2$ rad no sentido anti-horário. Portanto, os vetores têm comprimento, direção e sentido de forma que podemos representar o número complexo em uma forma polar (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 24; PEREIRA, 2017, p.8).

Forma Polar

Na forma polar, o número complexo z é um vetor que possui comprimento representado por r e a direção representada por θ , seu ângulo em relação ao eixo real (ABRAMSON, 2015, p. 817-818). Isso é indicado pela notação descritiva

$$z \leftrightarrow r\angle\theta.$$

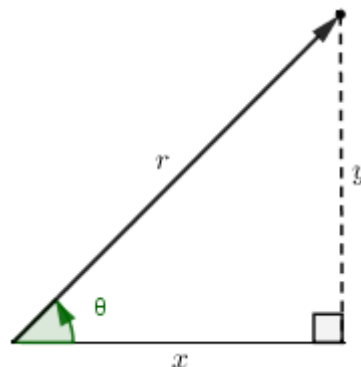
O comprimento do vetor também é chamado de **magnitude** de z (denotado por $|z|$), e o ângulo com o eixo real é denominado **argumento** de z (denotado por $\arg z$).

É importante poder fazer a conversão entre as formas cartesiana e polar de números complexos. A Figura 2.8 mostra um número complexo z e as quantidades envolvidas as representações tanto cartesiana quanto polar.

Conversão: Retangular e Polar

Observando o triângulo retângulo da Figura 2.8 na Figura 2.9 e utilizando suas *razões trigonométricas* temos um método para calcular as coordenadas cartesianas (x, y) a partir das variáveis polares $r\angle\theta$. Ou seja:

Figura 2.9 – Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\cos \theta = \frac{c. a}{hip} = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r \cos \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{c. o}{hip} = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \text{ sen } \theta.$$

Por outro lado, usando o Teorema de Pitágoras e uma razão trigonométrica obtemos um outro método para converter da forma retangular (x, y) para a forma polar $r\angle\theta$. Isto é:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg z = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Segundo McClellan, Schafer e Yoder (1998, p. 24), muitas calculadoras e programas computacionais possuem esses dois conjuntos de equações, tornando simples e conveniente a conversão entre as formas polar e cartesiana.

A notação $r\angle\theta$ é desajeitada para trabalhar as regras algébricas comuns. Uma forma polar mais conveniente é obtida usando a famosa fórmula de Euler⁹ para a exponencial complexa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{ sen } \theta,$$

onde $e \cong 2,7182$ é a *constante de Euler*. O par cartesiano $(\cos \theta, \text{sen } \theta) \stackrel{\text{def}}{=} E(\theta)$ pode representar qualquer ponto em uma circunferência de raio 1.

Portanto, uma ligeira generalização da fórmula de Euler fornece uma *representação trigonométrica* válida para qualquer número complexo

$$z = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \text{ sen } \theta, \quad (2.6)$$

de forma que $(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta) = r E(\theta) = r e^{i\theta}$ possa representar qualquer ponto em uma circunferência de raio r como pode ser visto na Figura 2.8.

A forma polar da exponencial complexa de um número complexo é mais conveniente ao calcular uma multiplicação ou divisão complexa. Também serve como base para o sinal exponencial complexo, que será introduzido na próxima subseção.

⁹ O físico Richard Feynman chamou a equação de “nossa jóia” e “a fórmula mais notável da matemática”.

2.4.2 Sinais Exponenciais Complexo

O **sinal exponencial complexo** é definido como

$$z(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi)}. \quad (2.7)$$

Observe que o sinal exponencial complexo é uma função de valor complexo de t , onde a magnitude de $z(t)$ é $|z(t)| = A$ e o ângulo de $z(t)$ é $\arg z(t) = (\omega_0 t + \phi)$. Usando a generalização da fórmula de Euler (2.5), o sinal exponencial complexo pode ser expresso em forma cartesiana por

$$z(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi)} = A \cos(\omega_0 t + \phi) + i A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (2.8)$$

Tal como acontece com o sinal senoidal real, A é a amplitude e deve ser um número real positivo; ϕ é a fase deslocada (ou inicial); e ω_0 é a frequência angular em rad/s. Na Equação (2.8), a parte real do sinal exponencial complexo é um sinal cossenoidal real, conforme definido em (2.3), e sua parte imaginária é um sinal senoidal real. As figuras mostram os gráficos do seguinte sinal exponencial complexo:

$$\begin{aligned} z(t) &= 20e^{i(2\pi(40)t - \frac{\pi}{2})} \\ &= 20 \cos(2\pi(40)t - \pi/2) + i \sin(2\pi(40)t - \pi/2) \\ &= 20 \cos(2\pi(40)t - \pi/2) + i \cos(2\pi(40)t - \pi). \end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos

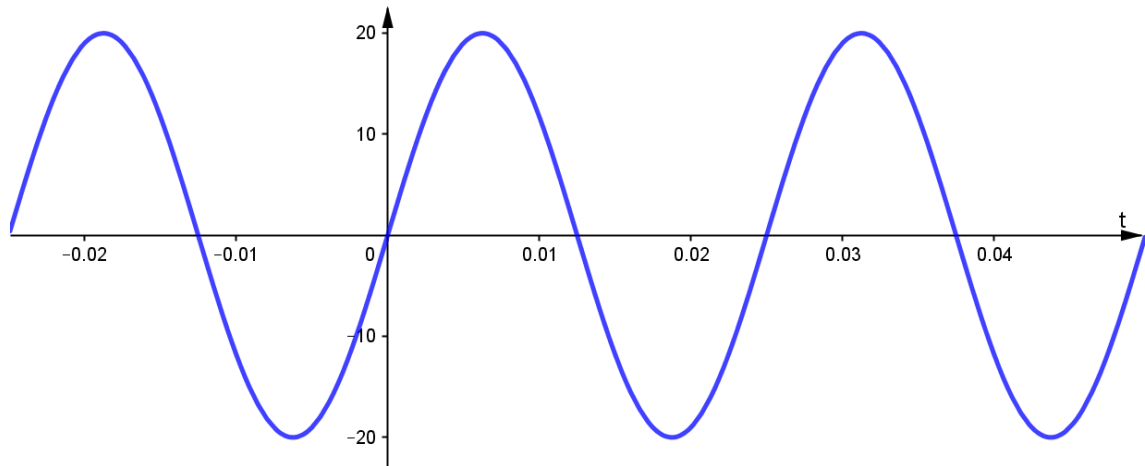
$$\begin{aligned} z(t) &= 20e^{i(2\pi(40)t - \frac{\pi}{2})} \\ &= 20 \cos(2\pi(40)t - \pi/2) + i \sin(2\pi(40)t - \pi/2) \\ &= 20 \sin(2\pi(40)t) + i \sin(2\pi(40)t - \pi/2). \end{aligned}$$

A plotagem de um sinal complexo em função do tempo requer dois gráficos, um para a parte real e outro para a parte imaginária. Observe que as partes reais e imaginárias do sinal exponencial complexo são sinais senoidais reais e diferem apenas por uma mudança de fase de $\pi/2$ rad.

A principal razão que nos faz interessar pelo sinal exponencial complexo é o fato de ter uma *representação* alternativa para o sinal cossenoidal real. Isso porque sempre podemos escrever

$$x(t) = \Re\{Ae^{i(\omega_0 t + \phi)}\} = A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

Figura 2.10 – Parte real de um sinal exponencial complexo.

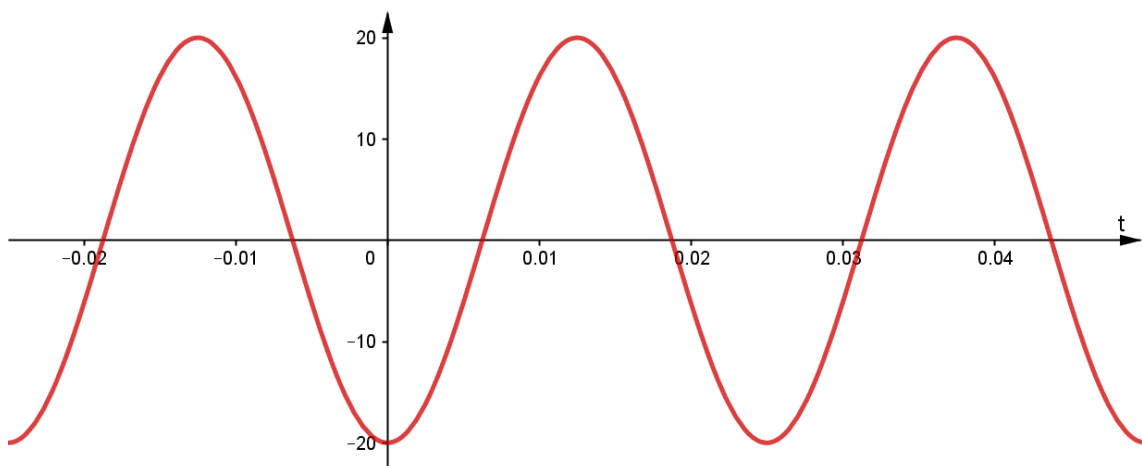


Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo análogo, temos uma outra *representação* alternativa para o sinal senoidal real

$$y(t) = \Im\{Ae^{i(\omega_0 t + \phi)}\} = A \sen(\omega_0 t + \phi).$$

Figura 2.11 – Parte imaginária de um sinal exponencial complexo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De fato, a parte real do sinal exponencial complexo mostrado na Figura 2.10 é idêntico ao cosseno traçado na Figura 2.7. Embora possa parecer complicado, introduzindo primeiro a parte imaginária para obter o sinal exponencial complexo e depois jogando fora usando apenas

a parte real, veremos que muitos cálculos são simplificados usando propriedades dos expoentes. É possível, por exemplo, substituir todas as manipulações trigonométricas por operações algébricas nos expoentes.

2.4.3 A Interpretação Fasorial Rotativa

A visão geométrica da multiplicação complexa leva a uma interpretação útil do sinal exponencial complexo, como um vetor complexo que gira à medida que o tempo aumenta.

Fasores

Fasor¹⁰ (ou **vetor de fase**) é uma representação polar criada a partir da amplitude e da fase deslocada do sinal exponencial complexo definido pelo número complexo

$$F = Ae^{i\phi} \leftrightarrow A\angle\phi. \quad (2.9)$$

Note que é uma forma simplificada na qual a frequência e a variação temporal são omitidas, sendo tomadas como conhecidas e entendidas. Dessa forma, o fasor F também é chamado de amplitude complexa, pois pode ser graficamente descrito como um vetor no plano complexo, onde a magnitude do vetor ($|F| = A$) é a amplitude e o ângulo do vetor ($\angle F = \phi$) é a fase deslocada (DENBIGH, p. 89, 1998; MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 27).

Fasor Rotativo

Observe que a Equação (2.7) do sinal exponencial complexo pode ser expressa como

$$\begin{aligned} z(t) &= Ae^{i(\omega_0 t + \phi_0)} \\ &= Ae^{i\phi_0} e^{i\omega_0 t} = F e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Isto é, $z(t)$ é o produto do fasor F pelo exponencial complexo $e^{i\omega_0 t}$.

Ao multiplicarmos a amplitude complexa, F , por $e^{i\omega_0 t}$, estamos simplesmente girando F por um ângulo $\omega_0 t$ (ou seja, o fasor resultante tem um ângulo de $(\omega_0 t + \phi_0)$). Dessa forma, o sinal exponencial complexo expresso em (2.9) também pode ser escrito como

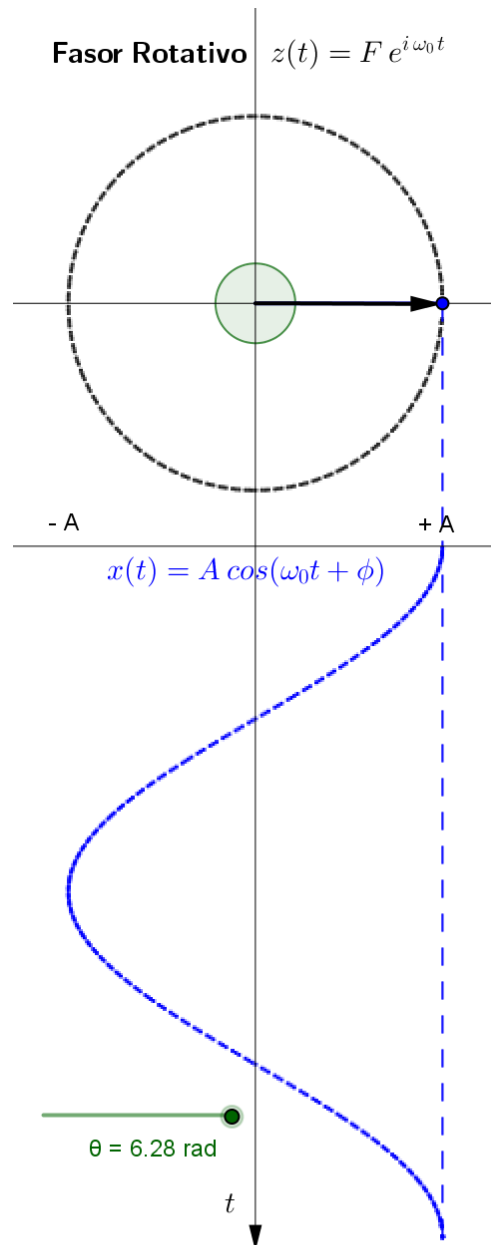
$$z(t) = F e^{i\omega_0 t} = Ae^{i\phi_0} e^{i\omega_0 t} = Ae^{i\theta(t)} \leftrightarrow A\angle\theta,$$

¹⁰ Possuí tratamento semelhante ao de vetor, mas varia com o tempo (PEREIRA, 2017, p. 3).

onde

$$\theta(t) = \omega_0 t + \phi_0.$$

Figura 2.12 – Forma de Onda Cosseno¹¹ pela projeção de um fasor rotativo no eixo real.



Forma de Onda Cosseno

Fonte: Elaborado pelo autor.

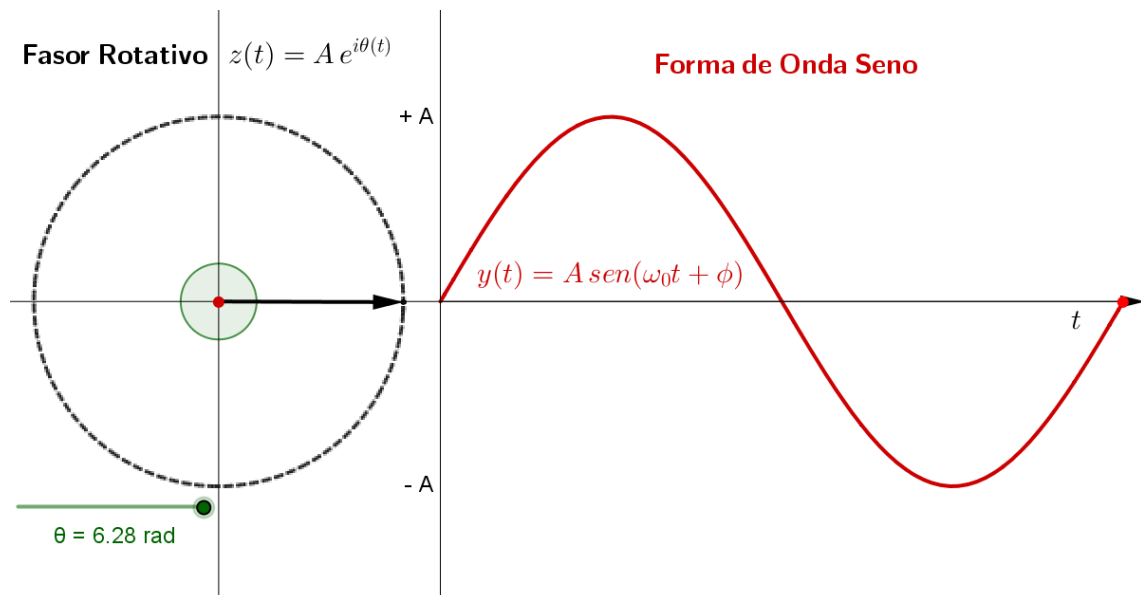
Tomadas em conjunto, a amplitude complexa $F = Ae^{i\phi}$ e a frequência angular (ou taxa de rotação) ω_0 é suficiente para representar $z(t) = Fe^{i\omega_0 t} = Ae^{i\theta(t)}$ bem como os sinais senoidais $x(t) = \Re\{Ae^{i\theta(t)}\} = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ e $y(t) = \Im\{Ae^{i\theta(t)}\} = A \sin(\omega_0 t + \phi)$

¹¹ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/h3tndntu>>.

conforme podemos visualizar nas Figuras 2.12 e 2.13 (LPSA, 2021; MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 27-28).

Em um dado instante no tempo t , o valor do sinal exponencial complexo, $z(t)$, é um número complexo cuja magnitude é A e cujo argumento é $\theta(t)$. Como qualquer número complexo, $z(t)$ pode ser representado como um vetor em plano complexo. Nesse caso, a ponta do vetor sempre fica na circunferência de raio A . Agora, se t aumentar, o vetor complexo F simplesmente girará a uma taxa constante, determinada pela frequência angular ω_0 . Em outras palavras, multiplicar o fador F por $e^{i\omega_0 t}$, como em (2.9), faz com que o fator fixo F gire (pois, como $|e^{i\omega_0 t}| = 1$, não ocorre variação na magnitude). Portanto, outro nome para o sinal exponencial complexo $z(t)$ é fador rotativo.

Figura 2.13 – Forma de Onda Seno¹² pela projeção de um fador rotativo no eixo imaginário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se a frequência ω_0 for positiva, o sentido de rotação será anti-horário, porque $\theta(t)$ aumentará com o aumento do tempo. Da mesma forma, quando ω_0 é negativo, o ângulo $\theta(t)$ muda na direção negativa à medida que o tempo aumenta, de modo que o fador complexo gira no sentido horário. Assim, diz-se que os fasores rotativos têm frequência positiva se eles girarem no sentido anti-horário e frequência negativa se eles girarem no sentido horário.

O fador rotativo pode ser pensado como um vetor de fase que tem amplitude constante e gira de modo que seu ângulo $\omega_0 t$ aumenta com o tempo (DENBIGH, 1998, p. 71).

¹² Applet disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/qhpnjnr>>.

Os fasores rotativos descrevem a forma de uma onda cossenoidal ou senoidal girando uma linha em um círculo. A distância do círculo até a ponta da linha nos dá a amplitude da onda. Quanto mais rápido a linha gira, mais alta é a frequência da onda resultante. As figuras 2.12 e 2.13 e mostram a geração de ondas via movimento circular. É possível alterar a amplitude e a frequência da onda resultante ajustando os parâmetros.

Um fasor rotativo faz uma revolução completa toda vez que o ângulo $\theta(t)$ muda em 2π radianos. O tempo necessário para fazer uma revolução também é igual ao período, T_0 , do sinal exponencial complexo, então

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{f_0}.$$

Note que o ângulo de fase ϕ define onde o fasor está pontuando quando $t = 0$. Por exemplo, se $\phi = \pi/2$, o fasor está apontando para cima quando $t = 0$, enquanto que se $\phi = 0$, o fasor está pontuando para a direita quando $t = 0$.

Observe que no instante que capturamos as ilustrações (Figura 2.12 e Figura 2.13) advinda dos applets construídos no GeoGebra, temos $\phi = 0$ e $t = 2\pi$ de forma que $\omega_0 = 2\pi/2\pi = 1 \text{ rad/s}$. Usando a generalização da Fórmula de Euler obtemos

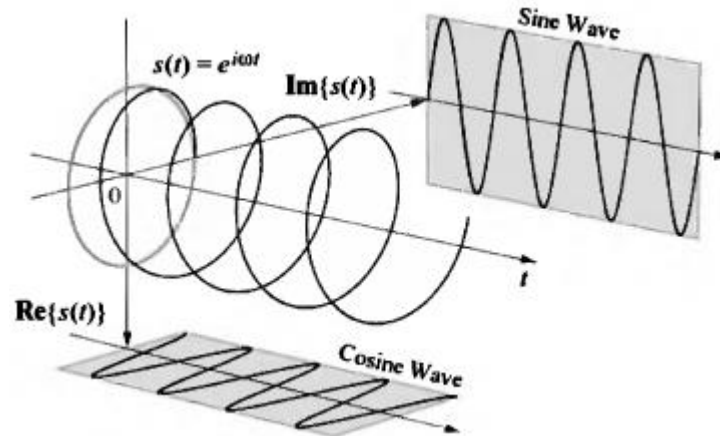
$$z = Ae^{i2\pi} = A \cos 2\pi + i A \sin 2\pi$$

Portanto,

$$z(2\pi) = A.$$

Para representar um sinal exponencial complexo graficamente, é possível usar uma representação tridimensional (3 D) onde o eixo x é a linha dos números reais, o eixo y é a linha dos números imaginários, e o eixo z é o tempo. A Figura 2.14 mostra o exponencial complexo $s(t) = e^{i\theta(t)}$ como uma hélice. A projeção da hélice ao longo do eixo x real é justamente a componente de onda seno (mostrado na “parede” atrás da hélice), enquanto que a projeção da hélice ao longo do eixo imaginário é justamente a componente de onda cosseno (mostrado no “chão” abaixo da hélice).

Figura 2.14 – Sinal exponencial complexo e suas projeções em ondas cosseno e seno simultâneas.



Autor: Loy (2007, v. 2, p. 86).

Desde que a equação da hélice seja dada por $s(t) = e^{i\omega t}$, as coordenadas cartesianas correspondentes a cada ponto 3 D é dada pela curva paramétrica

$$(x, y, z) = (\Re\{s(t)\}, \Im\{s(t)\}, t) = (\cos \omega t, \sin \omega t, t),$$

de modo que a projeção cosseno é justamente a parte real enquanto que a projeção seno é justamente a parte imaginária. A hélice na Figura 2.14 está girando no sentido anti-horário, indicando frequência positiva.

2.4.4 Fórmulas de Euler Inversa

As fórmulas de Euler inversas nos permitem escrever as funções cosseno e seno em termos de exponenciais como

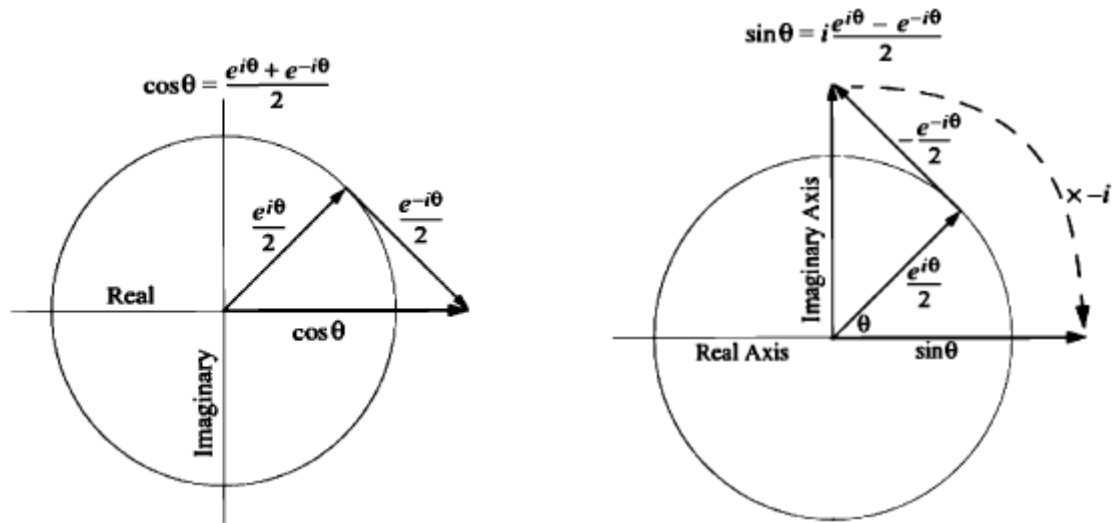
$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad (2.11)$$

É importante visualizar na Figura 2.15 que o cosseno real consiste da soma vetorial de dois fasores de meia amplitude de frequências opostas enquanto que o seno real consiste da diferença vetorial de dois fasores de meia amplitude de frequências opostas.

As equações em (2.11) são, na realidade, apenas variações da fórmula de Euler. Conforme Loy (2007, p. 80), “elas são a base de uma grande quantidade de tecnologias importantes da música moderna”.

As técnicas de processamento de sinais podem ser de muita utilidade no controle e análise de sistemas físicos de interesse dos mais diversos pesquisadores.

Figura 2.15 – Soma de fasores em simetria conjugada (esquerda) e diferença de fasores em simetria conjugada (direita).



Autor: Loy (2007, v. 2, p. 79-80).

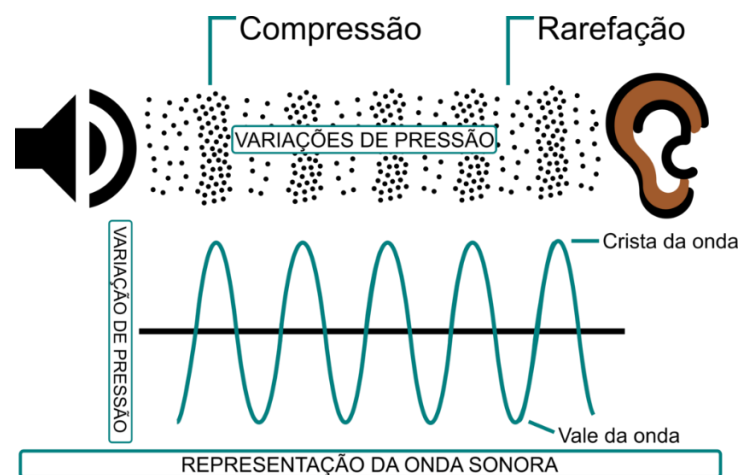
Para encerrar o Capítulo 2, é importante destacar as diferentes representações das funções e sinais periódicos, que são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam nosso universo. Nesse sentido, a compreensão das diferentes representações para descrever os fenômenos periódicos, contribuem para prosseguir com o capítulo 3, que desenvolve o estudo que almeja contribuir com um melhor entendimento do som, suas características e nossa percepção.

3 SOM, SUAS CARACTERÍSTICAS E NOSSA PERCEPÇÃO

3.1 Som e Ruído

O **som** é uma *sensação auditiva* que resulta da percepção de *distúrbios das moléculas de um meio*, num certo intervalo de tempo, ao colocar o tímpano em um tipo característico de movimento denominado vibração (WHEELER, 2014, p. 7). Considerando que o meio seja o ar, o som que ouvimos resulta de rápidas variações da pressão atmosférica que se propagam ao longo do espaço em todas as direções (BARBOSA, 1999, p. 6-7; PLACK, 2014, p. 4). Essas variações de pressão são chamadas de ondas sonoras. As ondas sonoras são mecânicas, longitudinais e compostas de compressão e rarefação alternadas (PLACK, 2014, p. 4; RIGDEN, 1985, p. 28).

Figura 3.1 – Propagação do som e representação da onda sonora.



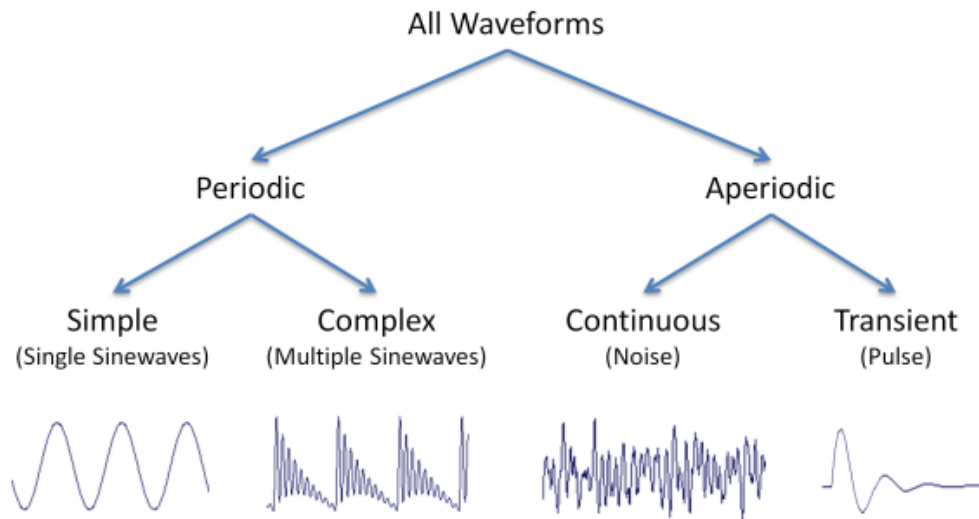
Fonte: U(iki)TFPR (2019).

Se essa pressão varia de acordo com um padrão repetitivo dizemos que o som tem uma *forma de onda periódica*. Se não há um padrão perceptível no som, a sensação resultante é chamada de **ruído** (BARBOSA, 1999, p.7; ROEDERER, 2002, p. 247).

No senso comum, ruído significa barulho, uma sensação sonora não desejada tal como um “rumor forte” (MICHAELIS, 2000, p. 83, p. 526). Para Wisnick (2006, p. 27), ruído é uma mancha em que não distinguimos frequência constante, uma oscilação que nos soa desordenada. Segundo Roederer (2002, p. 247), ruído é a sensação resultante que ocorre quando os padrões de vibração se tornam aleatórios (isto é, a sua periodicidade é destruída) ou quando sua complexidade excede um certo limiar, de modo que o processamento neural simplesmente pára e não é possível estabelecer nenhuma sensação de timbre ou altura definida. Dentro do escopo

deste trabalho, desenvolveremos o estudo apenas de classes de formas de ondas periódicas, conforme a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Diagrama para as diferentes classes de formas de onda.



Fonte: Huckvale (2019).

Para o fenômeno sonoro ocorrer há a necessidade de três elementos relacionados a um sistema físico: Fonte → Meio → Receptor. Veja mais especificações na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Sistemas físicos e fisiológicos relevantes para sons e suas correspondentes funções.

	Sistema	Função
Fonte	Mecanismo de Excitação	Suprimento de energia
	Elemento vibrante	Determinação das características do som
	Ressonador	Conversão das oscilações da pressão do ar (ondas sonoras), determinação final das características do som
Meio	Meio propriamente dito	Propagação sonora
	Fronteira	Reflexão, absorção e reverberação
Receptor	Tímpano	Conversão em oscilação mecânica
	Ouvido interno	Seleção de frequências primárias, conversão em impulsos nervosos
	Sistema nervoso	Processamento, configuração, identificação, armazenagem e transferência para outros pontos cerebrais

Fonte: Adaptado de Roederer (2008, p. 3).

Neste trabalho, especificamos os três elementos relacionados a um sistema à ficar da seguinte forma: Computador → Ar → Ouvinte.

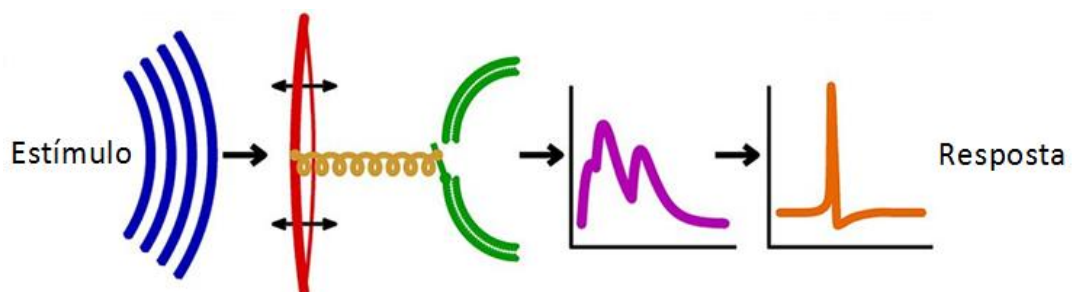
Conforme os conceitos desta seção 3.1, o som pode ser entendido de duas maneiras diferentes: fenômeno físico e fenômeno perceptual. A primeira concepção pode ser representada com o sinal harmônico (que neste caso é um som puro) e seus parâmetros independentes (frequência, amplitude e fase). Quando ouvimos um som puro cuja frequência e amplitude podem ser variadas à vontade, verificamos que há uma correspondência entre altura e frequência e entre volume e amplitude (ROEDERER, 2008, p. 44). Já o fenômeno perceptivo, decorrente de um estímulo sonoro que ocorre no interior do sistema nervoso auditivo, implica em considerar também as sensações da percepção correlata (duração, altura, volume, timbre), o que é algo notoriamente difícil de quantificar.

3.2 Audição

O termo **audição** se refere ao sentido, isto é, a capacidade fisiológica do sistema auditivo periférico (próprios ouvidos) receber como entrada o som proveniente do ambiente e encaminhar ao nosso sistema nervoso auditivo, que transmite os sinais neurais ao cérebro (PLACK, 2014, p. 53-76).

O *estímulo acústico* ocorre quando o sinal sonoro está situado em uma faixa de frequência e de amplitude mínima capaz de estimular o órgão sensorial da audição humana (WHEELER, 2014, p. 80). O estudo da audição é uma boa maneira para entender como o ouvido e o cérebro entendem estes estímulos (PLACK, 2014, p. 1).

Figura 3.3 – Representação esquemática da sinalização auditiva.



Fonte: Adaptado de Plos Biology (2005).

Observe na Figura 3.3 que o estímulo acústico (em azul) desencadeia oscilações no tímpano (em vermelho) que as converte em vibrações. Essas vibrações na cóclea (em amarelo) são captadas por células receptoras auditivas (em verde), classificadas de acordo com o espectro

de frequências (em púrpura) e convertidas em correntes elétricas que alteram o potencial de ação do nervo (em laranja) que leva a resposta do estímulo ao cérebro.

O ouvido é o órgão que é usado para reunir uma onda sonora e converter a **forma de onda** da onda sonora, de maneira mais fielmente possível, em sinais nervosos que viajam para o cérebro para serem analisados e interpretado (GUNTHER, 2012, p. 305).

Nosso modo de ouvir é determinado na maioria dos casos pela maneira em que o cérebro analisa os sinais do nervo auditivo que recebe. Além disso, demonstraram que o cérebro tem a notável capacidade de alterar o estado físico do ouvido e, portanto, sua maneira de converter o som em sinais nervosos (GUNTHER, 2012, p. 305-306).

Segundo Roederer (2002, p. 19), podemos selecionar no ouvinte os seguintes componentes principais:

1. O tímpano, que capta as oscilações de pressão da onda sonora que atinge o ouvido e as converte em vibrações mecânicas que são transmitidas por meio da ligação de três pequenos ossos para:
2. O ouvido interno, ou *cóclea*, no qual as vibrações são classificadas de acordo com gamas de frequência, captadas por células receptoras, e convertidas em impulsos nervosos elétricos.
3. O sistema nervoso auditivo, que transmite os sinais neurais ao cérebro, onde a informação é processada, apresentada como uma imagem de detalhes auditivos em certa área do córtex (a superfície do cérebro e o tecido subjacente), identificada, armazenada na memória e eventualmente transferida para outros centros do cérebro. Esses últimos estágios levam à **percepção** consciente dos sons musicais.

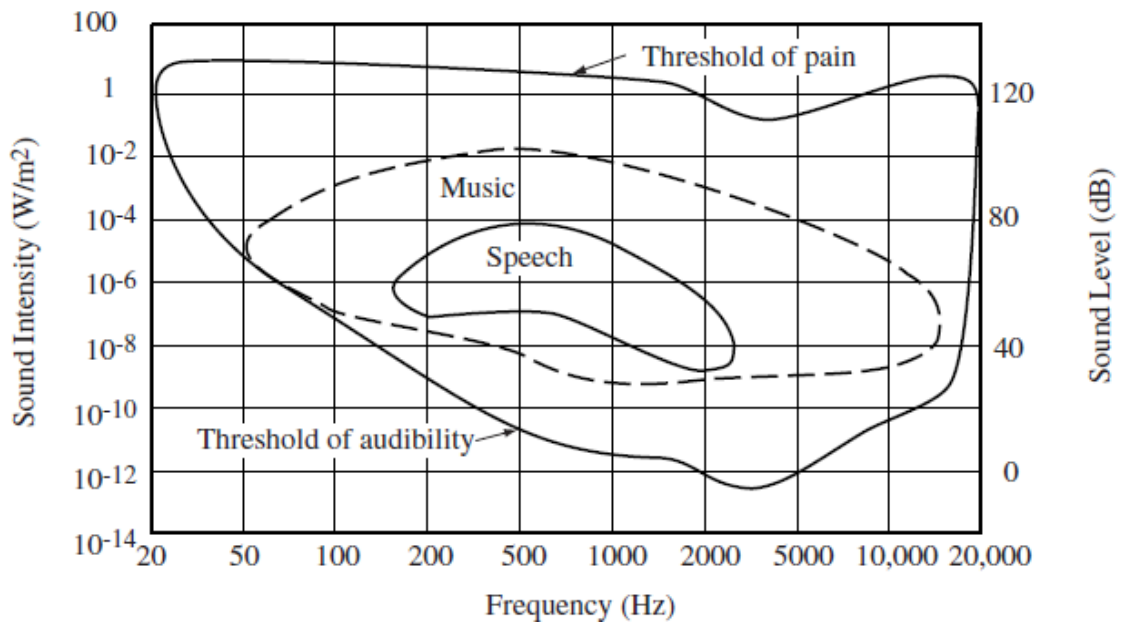
3.3 Percepção Auditiva

Percepção auditiva se refere ao processo de construção da representação mental provocada por um estímulo sonoro. A informação perceptiva é extraída em vários estágios do sistema nervoso auditivo (WHEELER, 2014, p. 86).

Nosso sistema auditivo é incrivelmente sensível, permitindo a percepção sobre muitas ordens de magnitude em amplitude e frequência. Podemos discriminar pequenas mudanças nos timbres sonoros e determinar com precisão onde no espaço, um som se origina. Sentimos o som através de nossos ouvidos e sistema nervoso, assim nossa percepção não pode ser divorciada desses mecanismos, e suas características influenciam o que ouvimos (KADIS, 2012, p. 43).

A faixa de intensidade do som (pressão) e a faixa de frequência para a qual o ouvido responde, como mostrado na Figura 3.4, é um fato realmente notável. A relação de intensidade entre os sons que causam dor aos nossos ouvidos e os sons mais fracos que podemos ouvir são mais de 10^{12} (1 000 000 000 000). O intervalo de frequência entre as frequências mais altas e mais baixas que nós podemos ouvir é na faixa de aproximadamente 10^3 (1000) vezes nove oitavas (cada oitava representa uma duplicação da frequência) (WHEELER, 2014, p. 80).

Figura 3.4 – Gama de frequências e intensidades as quais o sistema auditivo responde.



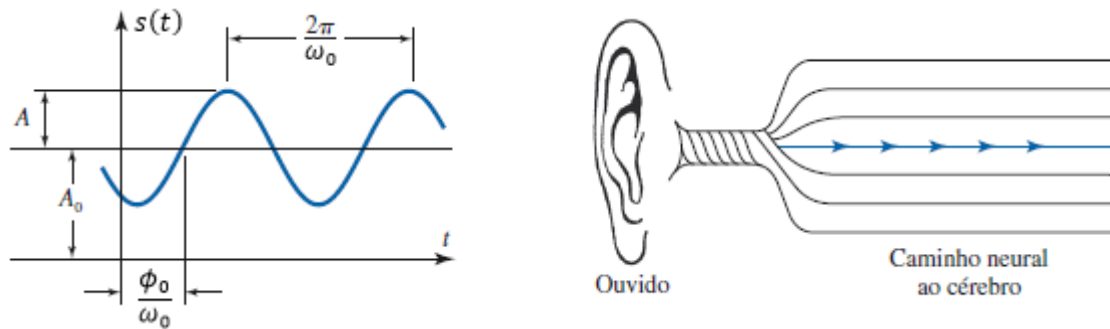
Fonte: Wheeler (2014, p. 80).

A visão humana é frequentemente considerada o sentido mais importante, mas a sua faixa de frequência nem começa a se comparar ao da audição humana. O intervalo de frequência da visão é de cerca de uma oitava. Segundo Rossing e Chiaverina (1999 apud WHEELER, 2014, p. 80), dentro deste intervalo de oitava de frequência, podemos identificar mais de 7 milhões de cores diferentes. Lembrando que a faixa de frequência do ouvido é nove vezes maior do que do olho, você pode começar a imaginar quantas “cores” sonoras seriam possíveis.

O ouvido humano é relativamente insensível a sons de baixa frequência; por exemplo, sua sensibilidade a 100 Hz é cerca de 1000 vezes menos do que sua sensibilidade em 1000 Hz (Figura 3.4). A sensibilidade a sons de alta frequência é maior no início da infância e diminui gradualmente ao longo da vida (WHEELER, 2014, p. 80).

Para o sistema auditivo, o tipo mais elementar de onda sonora é uma variação senoidal da pressão do ar. Esse tipo de onda sonora estimula os cílios da cóclea de tal maneira que produz um impulso nervoso ao longo de um único caminho neural (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Variação senoidal da pressão do ar e sua percepção auditiva.



Fonte: Adaptado de Anton e Rorres (2010, p. 694).

Uma onda sonora senoidal pode ser descrita por uma função do tempo

$$s(t) = A_0 + A \text{sen}(\omega_0 t - \phi_0) \quad (3.1)$$

onde $s(t)$ mede a pressão atmosférica no tímpano, A_0 é a pressão atmosférica normal, A é a variação máxima da pressão em relação à pressão atmosférica normal (Amplitude), $\omega_0/2\pi = f_0$ é a frequência da onda em hertz e ϕ_0 é o ângulo de fase da onda.

Para ser percebida como um som, uma onda senoidal precisa ter frequências num certo intervalo. Para os humanos, esse intervalo é de aproximadamente 20 a 20000 Hz (Figura 3.4). Tanto o limite inferior quanto o superior (e particularmente este) dependem da intensidade do som e variam de pessoa para pessoa dependendo da idade e do gênero. As frequências fora desse intervalo não estimulam suficientemente os cílios dentro da cóclea a ponto de produzir sinais nervosos (ANTON e RORRES, 2010, p. 694; ROEDERER, 2002, p. 43).

Quando dizemos que o sinal sonoro corresponde a uma onda que fazemos representar por uma senóide conforme a Figura 3.5, estamos procedendo a uma redução simplificadora (praticamente só em condições laboratoriais, a partir de sintetizadores eletrônicos), a uma abstração que se faz necessária para a apresentação mais elementar de um fundamento. Segundo Wisnick (2006, p. 23) os sinais sonoros não são simples e unidimensionais:

A onda sonora é complexa, e se compõe de frequências que superpõem e se interferem. Essa complexidade é antes de mais nada a do som concreto, o som real, que é sempre, em alguma medida, impuro. São os feixes de onda mais densos ou mais esgarçados, mais concentrados no grave ou no agudo, são em suma os componentes da sua complexidade (produzida pelo objeto que o gerou) que dão ao som aquela singularidade colorística que chamamos *timbre**. Uma mesma nota (ou seja, uma mesma altura) produzida por uma viola, um clarinete ou um xilofone soa completamente diferente, graças à combinação de comprimentos de ondas que são ressoadas pelo corpo de cada instrumento. Essa ressonância está ligada a uma propriedade do som, que é de vibrar dentro de si, além da frequência fundamental que percebemos como altura (a frequência mais lenta é grave), um feixe de frequências mais rápidas e agudas, que não ouvimos como altura isolada, mas como um corpo

timbrístico, muitas vezes caracterizado como a cor do som. Esse feixe de frequências embutido no som, esse espectro de ondas que o compõe, pode ser, como através de um prisma, subdividido nos sons da chamada *série harmônica**. A série harmônica é a única “escala” natural, inerente à própria ordem do fenômeno acústico (WISNICK, 2006, p. 24).

Outra qualidade notável do sistema auditivo é sua seletividade. Do misturado sons de uma orquestra sinfônica, um ouvinte pode escolher o som de um instrumento solo. Dentro uma sala barulhenta lotada de pessoas, é possível escolher um único alto-falante. Mesmo durante o ato de dormir, o ouvido condicionado de uma mãe pode responder ao choro de um bebê. Podemos treinar à dormir com o barulho do tráfego da cidade, mas acordarmos ao som de um alarme de relógio ou ruído incomum (WHEELER, 2014, p. 80).

3.4 Características do Som

Propriedades ou características do som estão relacionadas à qualidade fisiológica e a maneira como percebemos o som.

Nesta parte, é importante lembrar que, os parâmetros independentes $[A, f_0, \phi_0]$ do sinal sonoro (também chamados de **parâmetros físicos** da onda acústica) são conceitos *objetivos* e cientificamente mensuráveis. Na maioria dos casos, o ouvido é incapaz de perceber a fase.

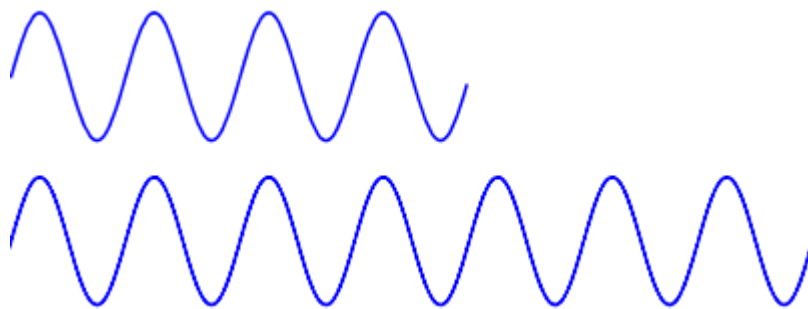
Por outro lado, as percepções das características do som não são independentes entre si e dependem da percepção sonora de quem está ouvindo, o que é bastante *subjetivo*.

No entanto, veremos adiante que a relação direta entre os dois parâmetros (quantitativo e qualitativo) pode ser claramente percebida.

3.4.1 Duração

É o parâmetro que regula a permanência de um som - ou do silêncio - no tempo.

Figura 3.6 – Ondas de diferentes durações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A **duração** de uma onda sonora pode ser curta, longa ou de determinado intervalo de tempo entre seu início e fim (SUEUR, 2018, p. 20-21).

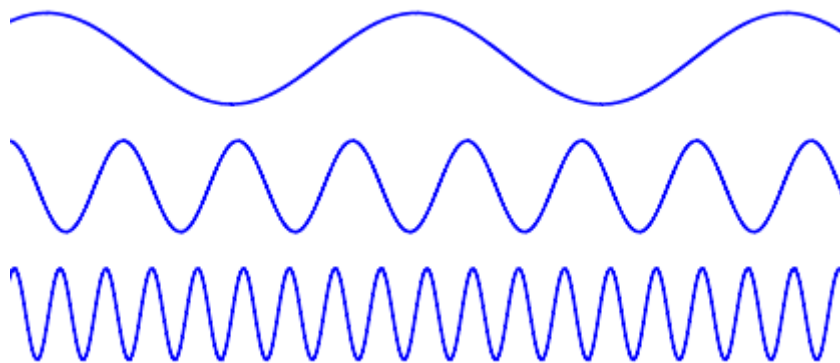
3.4.2 Altura

Uma definição comumente citada pelo American National Standards Institute (ANSI, 1960) afirma que: ‘**Altura** é aquele atributo da sensação auditiva de acordo com o qual os sons podem ser ordenados em uma escala de baixo a alto’ (HOWARD e ANGUS, 2017, p. 135).

Segundo Nussenzveig (1984, p. 132), altura de um som corresponde a sensação que nos permite distinguir entre sons mais graves e mais agudos.

Em ambas as perspectivas, a medida de altura é, portanto, “subjéitiva” porque requer um ouvinte humano para fazer um julgamento perceptivo. Isso está em contraste com a medição em laboratório de, por exemplo, a frequência fundamental (f_0) de uma nota, que é um medição “objetiva”.

Figura 3.7 – Ondas de diferentes frequências.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma repetição de uma onda periódica é chamada de ciclo. Quando comparamos sons com alturas diferentes, conforme pode ser visualizado na Figura 3.7, notamos que os sons são mais graves quanto mais longo for o ciclo de sua onda (ou seja, mais baixa será a sua frequência de oscilação) e os sons são mais agudos quanto mais curto for o ciclo de sua onda (ou seja, mais alta será a sua frequência de oscilação).

Essa **altura** dos sons está relacionada a como o ouvido humano percebe a **frequência fundamental** do som (isto é, o *tom*). Assim, quando classificarmos os sons em alto ou baixo, agudo ou grave, estaremos se referindo a **altura tonal**.

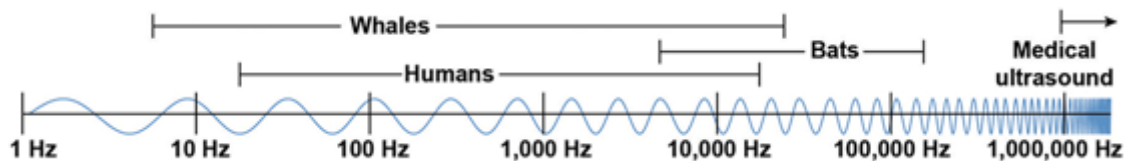
Tradicionalmente, a percepção do tom representou o coração da teoria da audição, e foi, sem dúvida, o assunto mais discutido ao longo dos anos. Por recentes descobertas, sabemos que

o tom é um produto do poder de análise de frequência do ouvido (PLOMP, 2005, p. 29). Conforme Howard e Angus (2017, p. 136):

A altura de uma nota varia à medida que sua frequência f_0 é alterada: quanto maior for f_0 , maior será a altura e vice-versa. Embora a medição de altura e f_0 sejam subjetivas e objetiva e mensuradas em uma escala de alto/baixo e Hz, respectivamente, uma medição de altura pode ser dado em Hz. Isso é conseguido pedindo a um ouvinte para comparar o som de interesse alternando entre ele e uma onda senoidal com uma frequência variável. O ouvinte ajusta a frequência da onda senoidal até os tons dos dois sons serem percebidos como iguais, ponto em que o tom do som de interesse é igual à frequência da onda senoidal em Hz.

O diapasão¹³, por exemplo, produz uma nota ‘Lá₄ central’ de 440 Hz (foi denominada frequência absoluta por uma convenção internacional) o que indica que a vibração ocorre com uma frequência de 440 ciclos por segundo (NUSSENZVEIG, 1984, p. 134).

Figura 3.8 – Frequências de som e faixa média de audição.



Fonte: Pasco scientific (2022).

A faixa de frequências que podem ser percebidas por um ouvido humano é de aproximadamente 20 Hz para os sons mais graves e de até 20 000 Hz para os sons mais agudos. Com a evolução etária a redução no limite de frequência superior da faixa de audição é acompanhada por um declínio na sensibilidade auditiva em todas as frequências, sendo o declínio menor para baixas frequências do que para altas frequências. Além disso, a perda natural da sensibilidade da audição e a perda de frequências altas são mais marcadas nos homens do que nas mulheres. (HOWARD e ANGUS, 2017, p. 90).

Os sons de frequências f_1 e f_2 podem ser classificados pela altura através do que denominamos **intervalo (i) entre dois sons** (ALVES, 1984, p. 478):

$$i = \frac{f_2}{f_1}$$

¹³ É um instrumento metálico em forma de forquilha, que serve para afinar instrumentos e vozes.

onde $f_2 \geq f_1$ de modo que a frequência maior f_2 corresponde ao som de maior altura e a frequência menor f_1 corresponde ao som de menor altura.

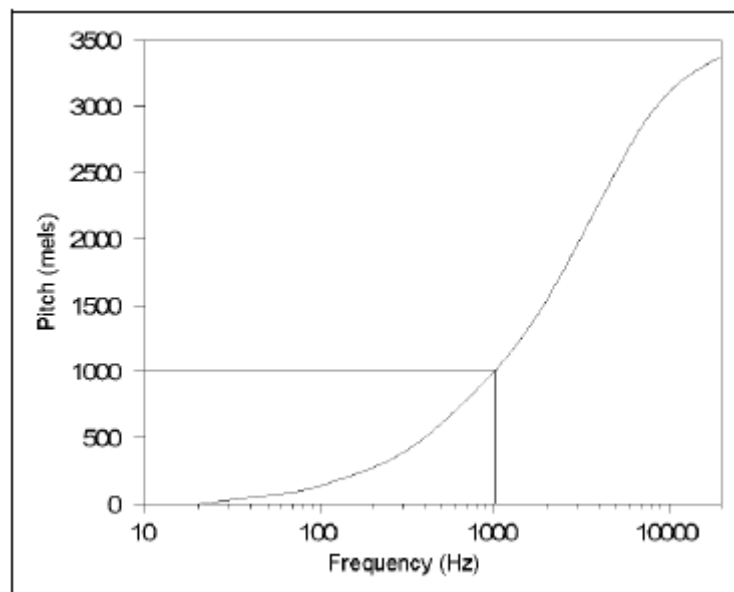
Se ouvimos dois sons simultaneamente e a sensação auditiva é agradável, dizemos que o intervalo entre eles é uma *consonância* (caso contrário, chamamos de *dissonância*).

Quando $f_2 = f_1$ (sons de mesma altura), temos $i = 1$, e dizemos que os sons estão em **unísono**.

Quando $f_2 = 2f_1$, temos $i = 2$. Dizemos, então, que o som de frequência f_2 está uma oitava acima do som de frequência f_1 , e o intervalo entre esses dois sons é denominado **oitava**.

Quando $f_n = nf_0$ (isto é, o intervalo entre dois sons, que não uníssonos, é um número inteiro), os sons de frequência maior f_n são denominados **n-ésimo harmônico** da frequência mais baixa f_0 , que é dito *som fundamental*.

Figura 3.9 – Altura x Frequência.



Monteiro e Carvalho (2011, p. 4).

A variável subjetiva altura é a que mais se aproxima da variável objetiva frequência. Por isso, altura é às vezes chamado de padrão de resposta à frequência. Mas não há igualdade simples entre eles (Figura 3.9). Embora nosso senso de altura seja aproximadamente proporcional à frequência, ela também é influenciada pela faixa de frequência, volume e presença ou ausência de outras frequências (LOY, 2006, v. 1, p. 156-157).

3.4.3 Intensidade, Nível Sonoro e Volume

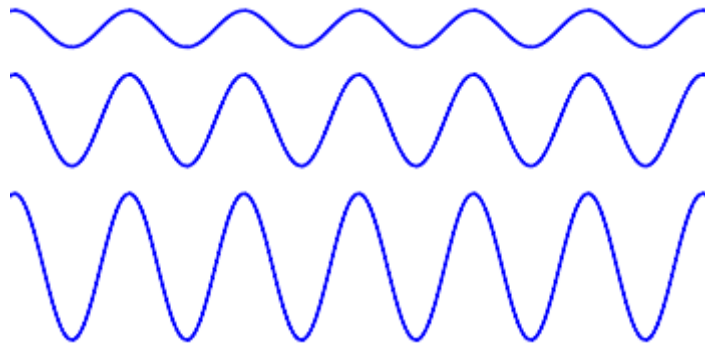
Intensidade é a *característica* que o som tem de ser mais forte ou mais fraco.

Para uma onda harmônica, a **intensidade** do som é definida como a potência por unidade de área, em watts por metro quadrado. A intensidade média do som durante o tempo T é dada por

$$I = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho c \quad (3.2)$$

onde, f é a frequência do som, A é a amplitude do deslocamento da partícula da onda sonora, ρ é a densidade do meio em que o som está propagando e c é a velocidade do som (NUSSENZVEIG, 1984, p. 100). Dessa forma, a intensidade do som é diretamente proporcional ao quadrado da amplitude da onda acústica.

Figura 3.10 – Ondas de diferentes amplitudes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esclarecer a relação do parâmetro amplitude e intensidade, tomemos como fonte sonora um instrumento de cordas. Se uma corda de guitarra é pulsada fortemente, o som produzido terá vibrações mais intensas com maiores amplitudes e será denominado som forte. Se for pulsada suavemente, o som produzido terá vibrações menos intensa com menores amplitudes e será chamado som fraco.

O **nível de intensidade do som** (ou magnitude da sensação auditiva) é dada pela lei de Weber-Flechner (ALVES, OLIVEIRA e ROBORTELLA, 1984, p. 479; WHEELER, 2014, p. 91) a qual afirma que ‘a resposta a qualquer estímulo é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo’. Neste caso,

$$NS = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (3.3)$$

onde temos as seguintes especificações:

- $NS = S - S_0$: magnitude da sensação auditiva;
- S_0 : sonoridade de referência (geralmente 0 dB);

- S : sonoridade do som considerado;
- I_0 : intensidade do som de referência (o padrão é $I_0 = 10^{-12} \text{ watt}/\text{m}^2$);
- I : Intensidade do som considerado.

A unidade do nível sonoro NS é denominada de decibel¹⁴ [dB] e existe uma enorme gama de intensidades compreendidas entre os dois limites de audibilidade.

Para o *limiar de audibilidade* (representada pela curva mais baixa da Figura 3.12) com uma frequência de 1 KHz temos uma intensidade limite inferior $I = 10^{-12} \text{ watt}/\text{m}^2$ de maneira que:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 1 \Rightarrow NS = 0 \text{ dB}$$

Para o *limiar da dor* (representada pela curva mais alta da Figura 3.12) com uma frequência de 1 KHz temos uma intensidade limite superior $I = 1 \text{ Watt}/\text{m}^2$ de modo que:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{10^0}{10^{-12}} = 10^{12} \Rightarrow NS = 120 \text{ dB.}$$

A Figura 3.11 mostra a escala de nível de intensidade de som pressupondo $S_0 = 0$ (limiar de audibilidade) e $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ (intensidade mínima capaz de vibrar o tímpano provocando sensação sonora [ALVES, OLIVEIRA e ROBORTELLA, 1984, p.479; DOCA, 2000, p.138]) classificando os sons em nosso ambiente em quatro categorias:

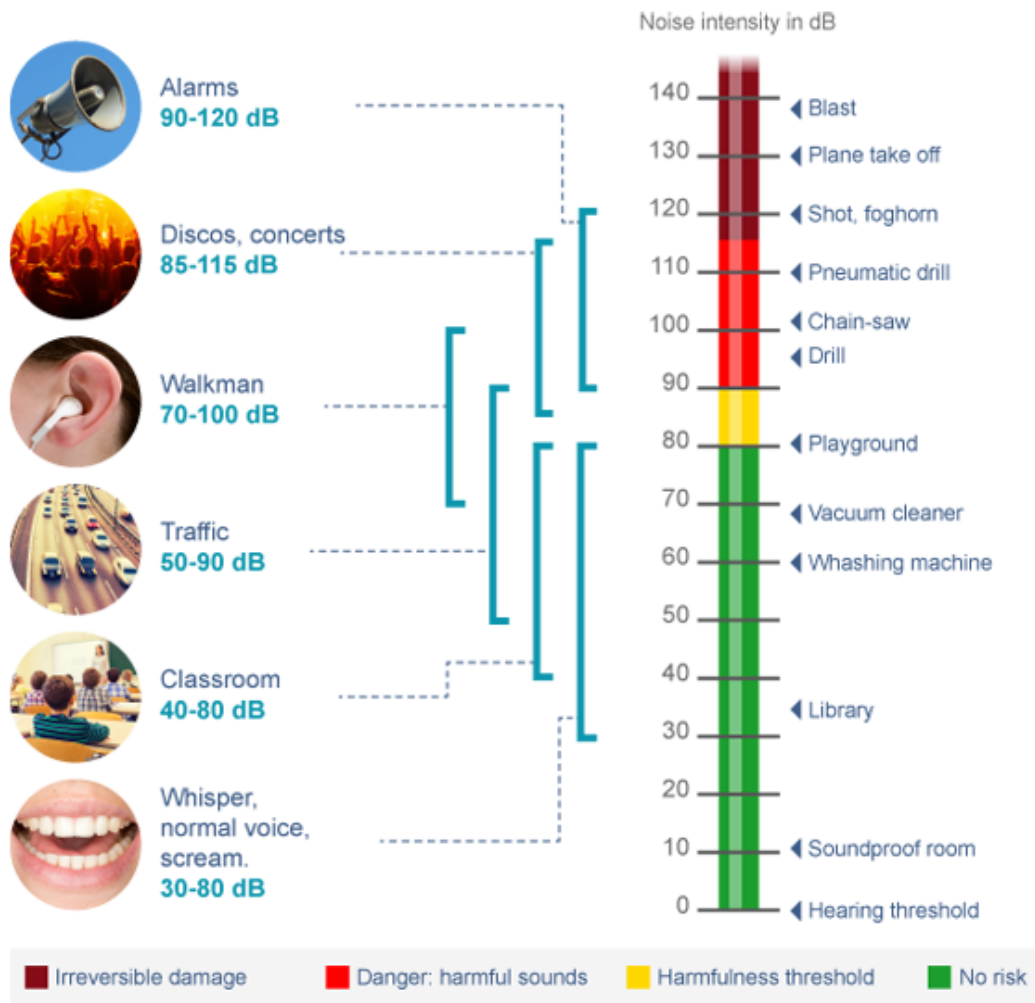
- Até 80 dB (verde): não há risco para o ouvido, independente da duração da exposição ao som;
- De 80 a 90 dB (amarelo): estamos nos aproximando da zona de perigo, mas os riscos são limitados a exposições muito longas.
- De 90 a 115 dB (vermelho): a zona de perigo: quanto mais alto o som, menos tempo é necessário para que ocorram danos.
- Acima de 115 dB (marrom), sons muito breves causam danos irreversíveis imediatamente.

Volume é a avaliação subjetiva da “força” de um som, que depende de sua pressão, frequência e timbre; volume pode ser expresso em sons (WHEELER, 2014, p. 118).

Em geral, os sons com mesmo nível de intensidade sonora, mas com frequências diferentes, são julgados como tendo volumes diferentes. Para estabelecer curvas de volume

¹⁴ A unidade Bel foi adotada em homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847 – 1922), o qual realizou diversos trabalhos em telegrafia e telefonia, que culminaram na invenção do telefone.

Figura 3.11 – Escala de nível de som em quatro categorias.



Fonte: Camilleri, Ducourneau e Pujol (2017).

igual, foram realizados experimentos tomando o NS^{15} em 1000 Hz = 1 KHz como unidade de referência (ROEDERER, 2002, p. 134; ZWICKER e FASTL, 1999, p. 203). As curvas de níveis de volume para diferentes frequências de tom puro podem ser vistas na Figura 3.12 (FLETCHER e MUNSON, 1933).

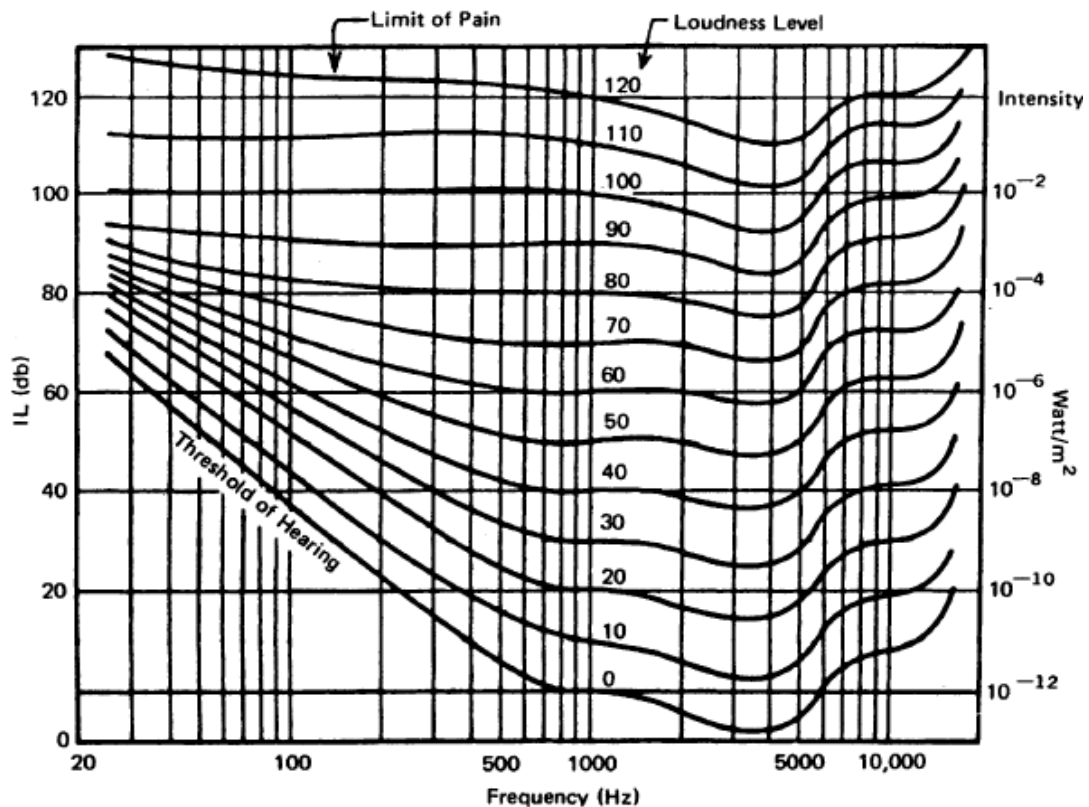
Partindo do eixo vertical centrado em 1000 Hz e seguindo em ambos sentidos de frequências mais baixas e mais altas, respectivamente, são traçadas curvas que correspondem aos NS s das notas que são julgadas como tendo “mesmo volume” que a nota de referência.

Observe na Figura 3.12 que para produzir certa sensação de volume em baixas frequências, digamos um som “forte”, será necessária uma intensidade (fluxo de energia) muito

¹⁵ No texto original está escrito NPS (nível de pressão sonora). No entanto, para onda em propagação, os valores numéricos de NPS e NS são idênticos e representam a mesma coisa (ROEDERER, 2002, p. 132).

maior do que em 1 KHz. Isso nos explica o porquê as notas do baixo tendem a “desaparecer” muito antes do que os agudos quando nos afastamos de uma fonte sonora fixa e, além disso, porque os alto-falantes de alta fidelidade com baixos balanceados são muito caros (RIGDEN, p. 53; ROEDERER, 2002, p. 134).

Figura 3.12 – Curvas de audibilidade (volume igual).



Fonte: Adaptado de Roederer (2008, p. 98).

Note que uma nova quantidade é introduzida, chamada *nível de volume*, que designamos *NV*. Ela é definida da seguinte maneira: o *NV* de um tom de frequência f é dado pelo *NS* de um tom de 1000 Hz que é julgado como igualmente forte. Isso significa que as curvas da Figura 3.12 são curvas de nível de volume constante (ou curvas isofônicas). A unidade de *NV* é chamada de *fon*. A Figura 3.12 pode ser usada para se encontrar o *NV* de uma nota de *NS* determinado, em qualquer frequência f . Por exemplo, considere um tom de 70 dB a 80 Hz. Vemos que a curva que passa por esse ponto que intercepta a linha de 1000 Hz em 50 dB. Assim, o *NV* desse tom é igual a 50 fons. Em geral, os números mostrados ao longo da linha de 1000 Hz representam o *NV* em fons das curvas de volume constante correspondentes (ROEDERER, 2002, p. 98).

É importante deixar claro que NV ainda é uma magnitude física, e não psicofísica. Representa essas intensidades que soam igualmente intensas, mas não pretende representar o volume percebido de uma maneira absoluta: uma nota cujo NV é duas vezes maior que a outra *não* soa com o dobro do volume! (Observe a Tabela 3.2).

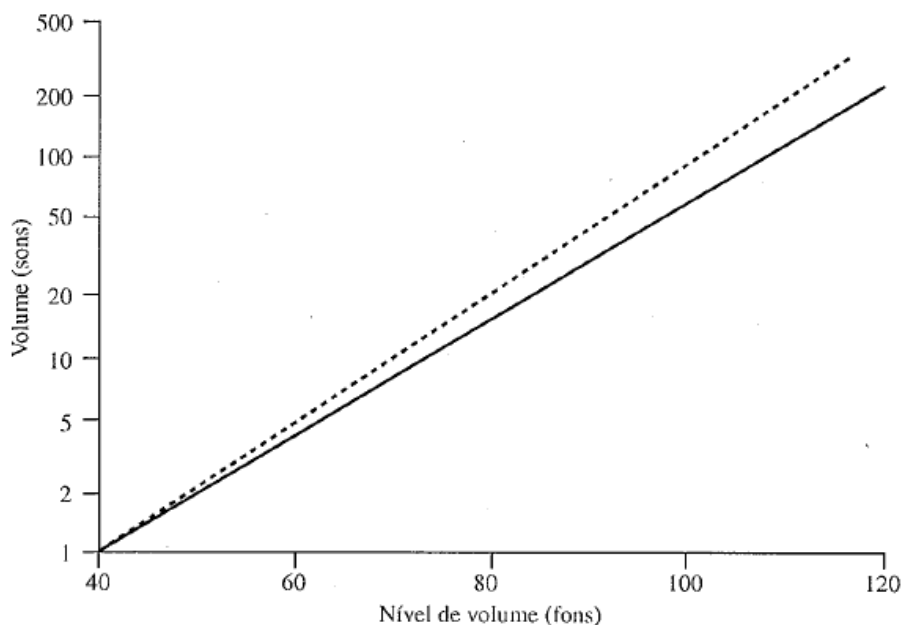
Tabela 3.2 – Nível de Volume em fons versus Volume subjetivo em sons.

Loudness Level (Phons)	Subjective Loudness (Sones)	Typical Examples
100	64	Heavy truck passing
80	16	Talking loudly
60	4	Talking softly
40	1	Quiet room
20	0.25	Very quiet studio

Fonte: Everest e Pohlman (2009, p. 50).

Muitos estudos têm sido feitos para se determinar uma escala subjetiva de volume. A Figura 3.13 (linha cheia) é o resultado (STEVENS, 1955), relacionando o “volume subjetivo” V com o nível de volume NV , no intervalo de interesse musical. A quantidade V que descreve o volume subjetivo é expresso em unidades chamadas *sones*. Observe que a relação não é linear (a escala de volume na Figura 3.13 é o que se chama de escala logarítmica). Ela é tal que, aumentando NV em 10 *fons*, o volume V simplesmente dobra.

Figura 3.13 – Linha contínua: relação experimental entre magnitude psicológica volume e a magnitude física nível de volume. Linha pontilhada: relação de potência.



Fonte: Stevens (1955 e 1970 apud ROEDERER (2002, p. 136)).

Isso significa, por exemplo, que dez instrumentos tocando uma determinada nota no mesmo *NV* são ouvidos soando apenas duas vezes mais forte que um dos instrumentos tocando sozinho (ROEDERER, 2002, p. 99).

3.4.4 Timbre

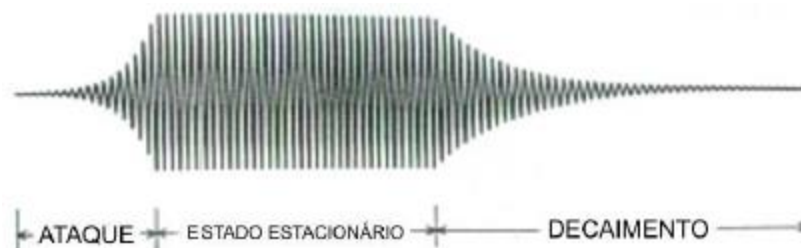
O conceito de timbre está relacionado à resposta perceptiva subjetiva a qualidades do tom que permitem a identificação de sua fonte. Timbre é muito mais difícil de caracterizar do que o volume ou altura devido ao fato de ser um fenômeno tão diverso. Pesquisas recentes em timbre são em escala multidimensional e constituíram o primeiro grande progresso na descrição quantitativa do timbre a partir do trabalho de Hermann von Helmholtz no século XIX (CAETANO, 2006, p. 38; DODGE e JERSE, 1985, p. 46).

Teoria clássica do Timbre

Hermann von Helmholtz criou a base para os estudos modernos do timbre em seu livro, “On the Sensations of Tone: As a Physiological Basis for the Theory of Music”, em 1862, onde combina suas ideias sobre som, audição e instrumentos musicais. Este trabalho contém uma inestimável quantidade de conceitos fundamentais necessário para o estudo do timbre.

Helmholtz caracterizou os tons como consistindo em uma forma de onda encerrado em um envelope de amplitude composto de três partes: o ataque; o estado estacionário; e o decaimento (Figura 3.14). Durante o ataque do tom, a amplitude cresce de zero até seu pico. Durante o estado estacionário, a amplitude é idealmente constante.

Figura 3.14 – Os três principais segmentos de um tom musical que se assemelha a um modelo de Helmholtz.



Fonte: Adaptado de Dodge e Jerse (1985, p. 47).

Durante o decaimento, o som esmaece. Ele concluiu que os sons que evocam uma sensação de altura possuem formas de onda periódicas, e descreveu-as como possuindo formas fixas e

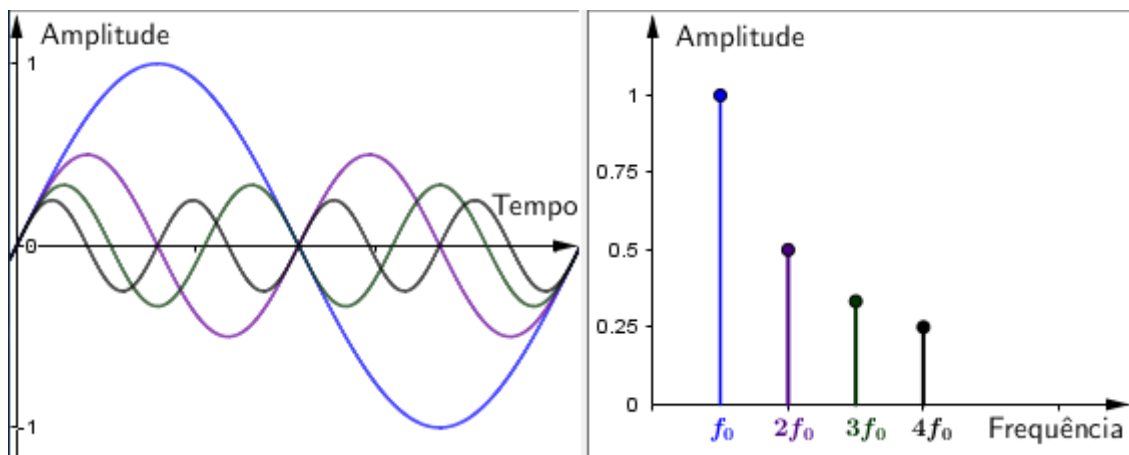
invariantes no tempo. Ele também estabeleceu que a natureza da forma de onda tem um grande efeito no timbre percebido de um som (apud DODGE e JERSE, 1985, p. 47).

Para determinar quais características de uma forma de onda se correlacionam melhor com o timbre, Helmholtz fez uso do ilustre trabalho de Jean Baptiste Fourier, que demonstrou que qualquer forma de onda periódica pode ser expressa como a soma de uma ou mais senoides.

No caso geral, Fourier demonstrou que qualquer sinal, pode ser descrito por seu padrão de *amplitude versus tempo* (forma de onda) ou por sua *distribuição de energia versus frequência* (espectro). Portanto, é comum falar dos dois domínios em que um sinal pode ser descrito: o domínio do tempo e o domínio da frequência (DODGE e JERSE, 1985, p. 48).

Fourier mostrou que toda forma de onda periódica é composta por um conjunto único de senoides cujas frequências estão relacionadas harmonicamente (essa relação deve-se a **Série Harmônica** representada na Figura 3.15 para os 4 primeiros harmônicos). Cada componente senoidal é caracterizada por três parâmetros: frequência, amplitude e fase em relação à fundamental. Os dois primeiros parâmetros têm um grande efeito sobre o timbre percebido do som. No entanto, as relações de fase entre as senoides têm efeito mínimo. Os *componentes espectrais* são às vezes referidos como parciais da forma de onda. No caso do espectro ser harmônico, pode-se referir aos componentes como *parciais harmônicos*, ou simplesmente harmônicos (CAETANO, 2006, p. 39; DODGE e JERSE, 1985 p. 48).

Figura 3.15 – Forma de onda (a esquerda) e espectro (a direita) da série harmônica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A representação geral para cada *parcial harmônico* é dado por duas formas equivalentes (MCCLELLAN; SCHAFER; YODER, 1998, p. 15; MOORER, 1990, p. 57):

$$x_n(t) = A_n \cos(\omega_n t - \phi_n) = A_n \cos(2\pi f_n t - \phi_n). \quad (3.4)$$

As duas formas são relacionadas pelo conceito de $\omega_n = 2\pi f_n$.

Por qualquer forma, descrita pelo modelo do parcial harmônico, existem **três parâmetros independentes** que são números fixos. Os nomes e interpretações desses parâmetros são os seguintes:

1. A_n é chamado de n - ésima **amplitude**. A amplitude é um fator de escala que determina o tamanho do sinal cossenoidal. Como a imagem da função $\cos(\omega_n t - \phi_n)$ oscila no intervalo $[-1, +1]$, o harmônico $x_n(t)$ oscila no $[-A_n, +A_n]$.
2. ω_n é denominada n - ésima **frequência angular**. Como o argumento da função cosseno está em radianos, a quantidade $\omega_n t$ também deve ser em radianos. Assim, ω_n deve ter unidades em radianos por segundo (*rad/s*). Da mesma forma, $f_n = \omega_n/2\pi$ é chamada de n - ésima frequência, e f_n têm unidades em hertz (*Hz*).
3. ϕ_n é chamado de n - ésima **fase da oscilação**. As unidades de fase da oscilação devem ser radianos visto que o argumento do cosseno está em radianos.

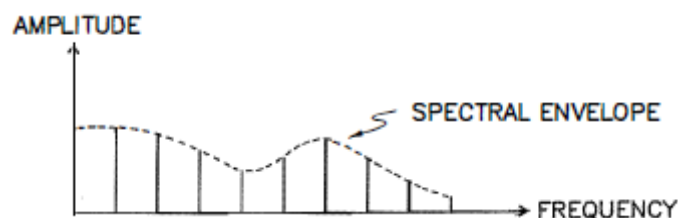
Como pode ser visualizado na Figura 3.15, os parciais harmônicos são tonalidades que aparecem numa ordem específica do grave ao agudo, às vezes de difícil percepção auditiva, que possuem amplitude decrescente (inversamente proporcional à frequência) e de diferentes durações (SERRA, 2002, p. 5). Ou seja,

$$f_n = n f_0 \quad \text{e} \quad A_n = A_1/n$$

para todo n não nulo pertencente aos conjunto dos números inteiros.

Helmholtz (1875) concluiu que a descrição espectral de um som possui a correlação mais direta com seu timbre. Por exemplo, a descrição qualitativa de brilhante para timbre caracteriza espectros que têm uma grande quantidade de energia em altas frequências. O espectro da maioria dos instrumentos da família dos metais exibe esta tendência.

Figura 3.16 – Aproximação gráfica de um envelope espectral.



Fonte: Dodge e Jerse (1985, p. 51).

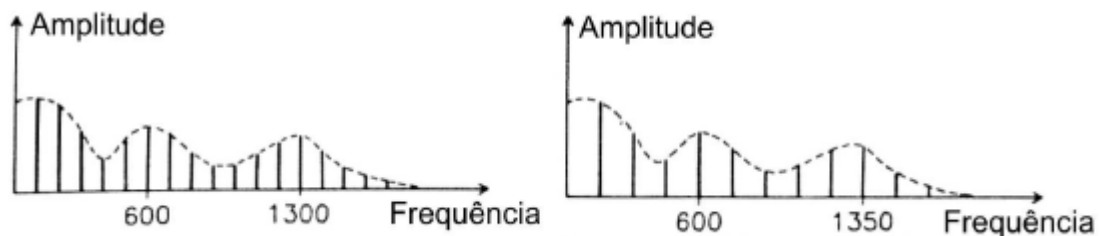
O envelope espectral de um som é um dos fatores mais importantes na determinação do timbre. O *envelope espectral* evidencia o *padrão de distribuição de energia de frequência em*

um espectro. O envelope espectral de uma forma de onda periódica pode ser aproximado graficamente conectando os topos das raias em um gráfico de amplitude harmônica versus frequência. A Figura 3.16 mostra como um envelope espectral é aproximado em um gráfico no domínio da frequência (DODGE e JERSE, 1985, p. 51).

Examinando-se os envelopes espectrais das formas de onda mais frequentemente encontradas, tanto em síntese digital como em sons de instrumentos acústicos, percebe-se que elas são limitadas em banda. Isto é, há uma frequência acima da qual os tons não possuem uma quantidade significativa de energia acústica. Obviamente o ouvido também é um receptor limitado em banda, pois pode converter energia apenas dentro de uma certa faixa de frequências. A *largura de banda* de um som é a largura da região de frequências na qual os componentes significativos de um som complexo residem – uma dentre muitas maneiras possíveis e úteis de se classificar um espectro. Espectros são usualmente caracterizados pela inclinação com a qual a energia no espectro diminui com a frequência, isto é, a inclinação do envelope espectral (DODGE e JERSE, 1985, p. 51).

Para sintetizar sons, é necessária uma compreensão bem detalhada das relações entre frequência fundamental, espectro e timbre. Se dois tons com o mesmo envelope de amplitude e aproximadamente a mesma frequência fundamental têm relações idênticas entre suas componentes espectrais, seus timbres soarão similares (DODGE e JERSE, 1985, p. 51). No entanto, se dois tons com frequências fundamentais diferentes têm a mesma distribuição de energia entre suas parciais, normalmente não se afirmará que esses tons possuem o mesmo timbre. Nossa percepção de similaridade timbral é fortemente baseada na presença de energia espectral em bandas de frequência absoluta. Dois tons com frequências fundamentais diferentes que julga-se ter o mesmo timbre não necessariamente apresentarão as mesmas relações entre as amplitudes dos componentes espectrais.

Figura 3.17 – Envelopes espectrais similares mas com diferentes frequências fundamentais.



Fonte: Dodge e Jerse (1985, p. 52).

Ao invés disso, seus envelopes espectrais exibirão picos de energia nas mesmas regiões de frequência. Dadas outras características parecidas, esses tons serão julgados como tendo

timbres parecidos. Os picos espectrais em regiões de frequência absoluta são denominados *formantes* (DODGE e JERSE, 1985, p. 52). A Figura 3.17 ilustra o conceito.

Observe que a figura mostra os espectros de Fourier de dois tons de alturas diferentes, 100 Hz e 150 Hz, provenientes da mesma fonte sonora. Deve-se notar que as relações entre as frequências dos parciais não é o que é preservado, mas sim a presença de energia em certas regiões de frequência absoluta, isto é, as estruturas formantes são semelhantes.

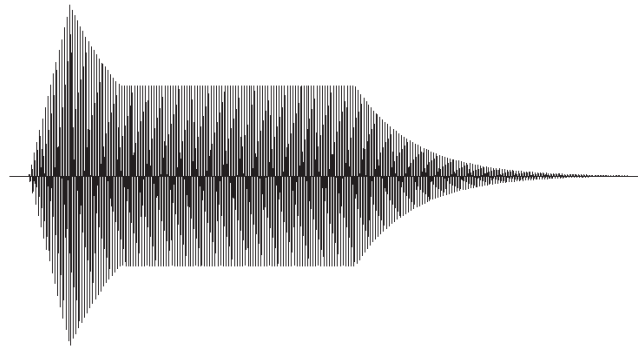
A voz humana e a maioria dos instrumentos acústicos exibem formantes em seus espectros. Seus sons característicos resultam de um sistema que consiste de uma fonte de excitação, tal como as cordas vocais ou uma palheta vibrando, e um sistema ressonante, como o trato vocal ou o corpo de um instrumento. O sistema ressonante faz com que as amplitudes das parciais em certas regiões de frequência sejam realçadas, enquanto que outras sejam atenuadas. Isso provoca picos de formantes nessas regiões, que estão relacionados ao tamanho, forma e material do corpo ressonante. Os mesmos picos estarão presentes, com maior ou menor predominância, em todos os tons do instrumento, independente da frequência fundamental da fonte. Isso explica porque, em muitos instrumentos, tons diferentes produzidos no mesmo instrumento possuem uma qualidade/coloração similar (DODGE e JERSE, 1985, p. 53).

Teoria moderna do timbre

O modelo de Helmholtz do som musical, uma forma de onda fixa envolta em um envelope, representa o trabalho mais significativo na pesquisa em acústica musical no século XIX. Desde então, os pesquisadores determinaram um modelo mais preciso do som musical. Primeiramente, estudos recentes permitiram identificar quatro regiões distintas no curso da evolução temporal de uma forma de onda típica de um instrumento musical, em contraste com o modelo simplificado de Helmholtz do envelope de amplitude com três regiões distintas mostrado na Figura 3.14. Pode-se identificar o ataque, o decaimento, a sustentação e o relaxamento (ADSR), mostrados na Figura 3.18, como o envelope de amplitude de grande parte dos tons musicais (CAETANO, 2006, p. 44; DODGE e JERSE, 1985, p. 54).

Observe a Figura 3.18 que no ataque, o volume vai ao máximo após o silêncio inicial. No decaimento, há uma redução do volume. Na sustentação, o volume se mantém constante. E finalmente, no relaxamento, há uma redução gradativa do volume até o silêncio total.

Figura 3.18 – Os quatro principais segmentos (ADSR) de uma forma de onda de um tom musical.



Fonte: Shepard (2013, p. 84).

Em 1960, o Instituto Nacional Americano de Padrões (American National Standards Institute – ANSI) publicou uma definição padrão de timbre que passou a ser amplamente aceita e utilizada: ‘Timbre é aquele atributo da percepção auditiva através do qual um ouvinte pode julgar se dois sons similarmente apresentados e que tenham a mesma altura e intensidade são distintos’ (apud HOWARD e ANGUS, 2017, p. 238). Apesar desta definição permitir a interpretação de que, aparentemente, timbre, frequência e intensidade sejam parâmetros independentes de um tom, alguns pesquisadores levantaram pontos a respeito da possível dependência perceptiva entre esses parâmetros que devem ser considerados.

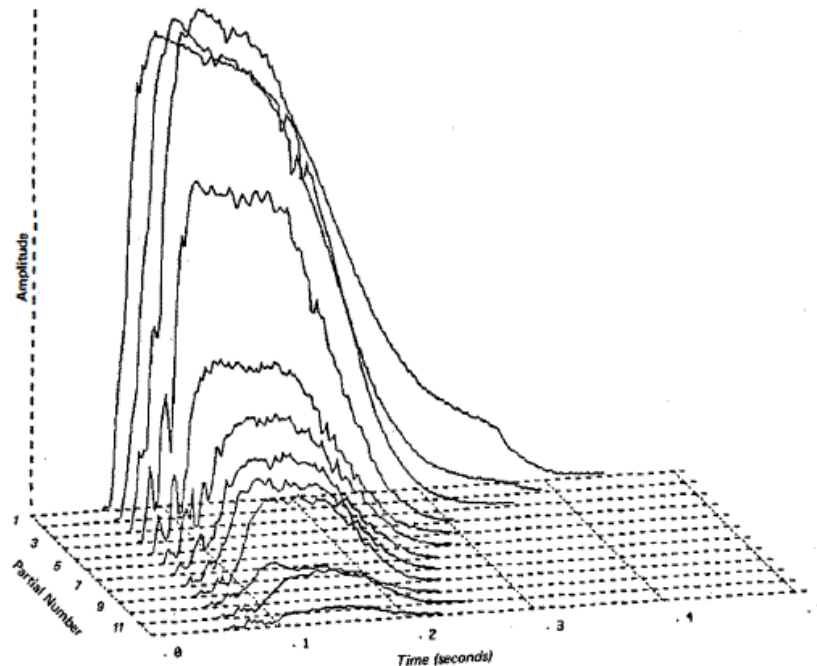
Pratt e Doak (1976) sugeriram uma definição alternativa: ‘Timbre é aquele atributo da sensação auditiva por meio do qual um ouvinte pode julgar que dois sons são diferentes usando qualquer critério diferente de altura, volume ou duração’ (apud WHEELER, 2014, p. 135).

A gravação digital permitiu ao pesquisador moderno mostrar que a forma de onda e, portanto, o espectro, pode mudar drasticamente durante o curso de um tom. A transformada de Fourier (TF) permite obter o espectro de um som de sua forma de onda. Uma técnica computacional que permite obter o espectro de Fourier de um sinal digital é a chamada Transformada Discreta de Fourier [TDF] (DODGE e JERSE, 1985, p. 55).

Seguindo os estudos de Risset, o qual analisou o tom de trompete através de curtas TDFs sucessivas ao longo de seu curso, Moorer e Grey (1977) publicaram análises por computador mostrando a evolução temporal do espectro de um tom de trompete. A Figura 3.19 mostra a progressão espectral de um tom de trompete. Eles observaram que cada parcial do tom possui um envelope temporal de amplitude único. Os harmônicos mais altos tornam-se mais ricos conforme a intensidade aumenta (dinâmica); harmônicos sucessivamente mais altos têm subidas mais lentas até a amplitude máxima durante o ataque, enquanto no decaimento eles têm descidas mais rápidas até o relaxamento total. Além da progressão da amplitude, as análises determinaram a variação de frequência de cada parcial do tom. Descobriu-se que os parciais

raramente são harmônicos precisos. A frequência de cada parcial flutua durante o curso do tom, e essa flutuação pode ser particularmente errática (irregular) durante o ataque do tom (CAETANO, 2006, p. 45; DODGE e JERSE, 1985, p. 55).

Figura 3.19 – A progressão da amplitude dos parciais de um tom de trompete.



Fonte: Analisado por Moorer e Grey (apud DODGE e JERSE, 1985, p. 56).

Timbre é considerado um atributo multidimensional da percepção dos sons. A percepção do timbre envolve correlacionar uma série de fatores do tom, incluindo a natureza do ataque, o conteúdo harmônico e a afinação dos parciais. Até certo ponto, a amplitude, altura e aspectos temporais contribuem conjuntamente para a caracterização timbral. Diferentes pesquisadores já sugeriram conjuntos de dimensões independentes para classificação do timbre (DODGE e JERSE, 1985, p. 57).

Pesquisadores recentes afirmam, também, que além disso, timbre possui uma ordem perceptiva; de acordo com eles, como atributo multidimensional, possui muitas, geralmente relacionadas a características físicas comuns a grupos de sons. Segundo Bregman (1990), timbre é uma propriedade emergente da interação da produção do tom com a percepção do ouvinte, um agrupamento do conjunto acústico influenciado pelo contexto acústico e pelo aprendizado e experiência prévia do ouvinte. Neste trabalho, assim como para Bregman, timbre é tido como um fenômeno perceptivo complexo e subjetivo.

Em suma, os resultados da pesquisa moderna sobre a natureza do timbre oferecem valiosas percepções para o sintetizador computacional. Poucos sons “naturais” assumem a

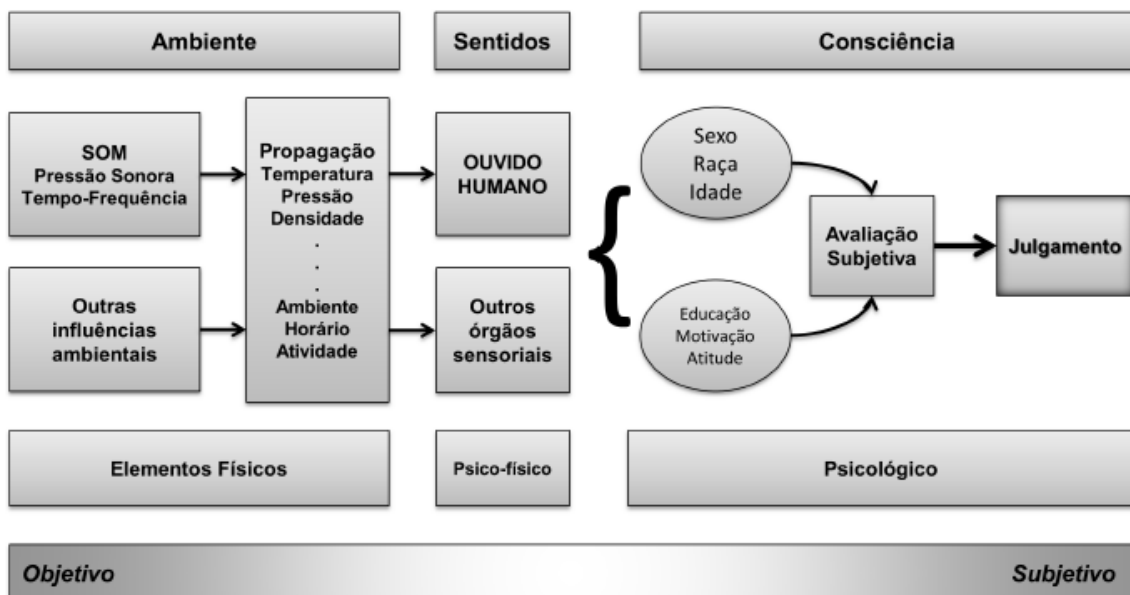
forma do clássico modelo de uma forma de onda invariante encerrada em um envelope. Em vez disso, seu conteúdo espectral varia substancialmente durante o curso do tom. Os ouvintes esperam essa característica em o que ouvem e, portanto, uma chave importante para sintetizar sons interessantes é a seleção de algoritmos que produzem espectros dinâmicos (DODGE e JERSE, 1985, p. 58).

3.5 Qualidade Sonora

O termo Qualidade Sonora faz referência ao grau de correlação obtido entre os elementos objetivos e subjetivos que interagem em um evento auditivo (GENUIT, 2002, p. 2). Os parâmetros físicos do som como amplitude, frequência e fase, junto aos aspectos relativos à sua propagação são correlacionados às particularidades da recepção e interpretação humana. Elementos físicos, psico-físicos e psicológicos (GENUIT, 2002, p. 2) participam e influenciam na percepção e julgamento final das informações auditivas (apud SÁNCHEZ, 2012, p. 7).

Na Figura 3.20, os itens do lado objetivo como pressão sonora, estrutura tempo-frequência do fenômeno sonoro e características do meio de propagação, influenciam os elementos objetivos/subjetivos como o ouvido humano e suas particularidades, os que por sua vez são função de características específicas do receptor como sexo, raça, idade, experiência,

Figura 3.20 – Processo da percepção auditiva.



Fonte: Adaptado de Genuit (2002, p. 2) por Sánchez (2012, p. 7).

educação, entre outros (SÁNCHEZ, 2012, p. 7). Por fim, a interpretação e julgamento do fenômeno auditivo dar-se-á logo após a combinação dos fatores.

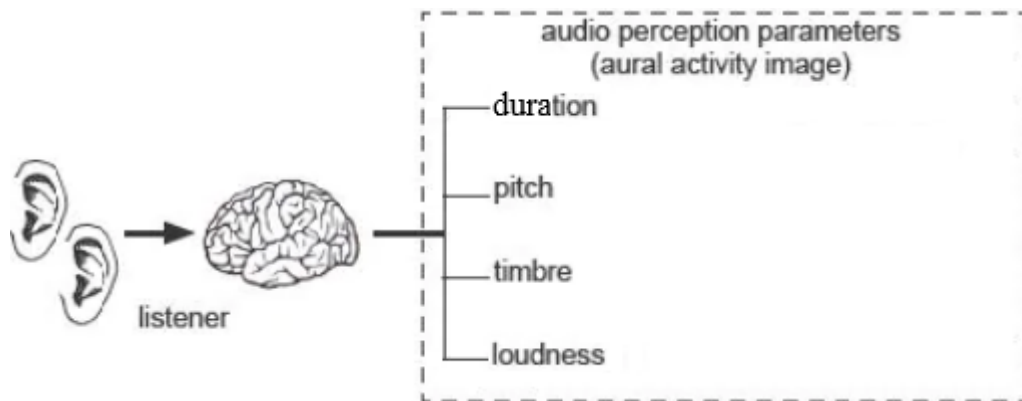
Uma vez que a natureza dos elementos que participam no citado processo é de caráter multidisciplinar, a avaliação da qualidade sonora de um determinado evento auditivo se torna complexa. O estudo da qualidade sonora deve abranger todos os conceitos relativos a ela de forma integral, sem separar os elementos envolvidos no processo.

A psicofísica se concentra apenas no ponto de cruzamento onde a física termina e a psicologia começa - onde o objetivamente observável termina e o subjetivo começa. Seu objetivo é desenvolver métricas que relacionam as variáveis físicas externas do som (as variáveis Φ) com as variáveis internas da psicoacústica (as variáveis Ψ). Podemos tomar como exemplo, a intensidade Φ de um som que pode ser quantificada facilmente por medição direta e relacionar com o volume Ψ correspondente (LOY, 2006, v. 1, p. 155).

3.6 Psicoacústica

O estudo da resposta cognitiva do sistema nervoso aos estímulos sonoros é conhecido como **psicoacústica**: é parte acústica e parte psicologia. Um campo interdisciplinar que envolve física, biologia, psicologia, engenharia e música (KADIS, 2012, p. 43; HOWARD e ANGUS, 2017, p. 72).

Figura 3.21 – Esquema da percepção dos parâmetros psicoacústicos.



Fonte: Adaptado de Yamaha (2019).

O conhecimento da psicoacústica é baseado em testes de audição para descobrir como os humanos percebem os sons em termos, por exemplo, de duração, altura, volume e timbre, conforme o esquema da Figura 3.21. Estes atributos subjetivos do som não são independentes. Volume, por exemplo, depende principalmente da pressão do som, mas também do espectro das parciais, a duração física, etc. Altura depende principalmente da frequência, mas também mostra menos dependência da pressão do som, envelope, etc. O timbre é uma espécie de pega

tudo, incluindo todos aqueles atributos que servem para distinguir sons com o mesmo tom e volume.

A Tabela 3.3 relaciona a dependência das qualidades subjetivas do som aos parâmetros físicos, e é apresentado aqui como um estudo suporte para as teorias e atividades que envolvam volume, altura, timbre e duração ao desenrolar deste trabalho.

Tabela 3.3 – Dependência das qualidades subjetivas do som em relação aos parâmetros físicos.

Physical Parameter	Subjective Quality			
	Loudness	Pitch	Timbre	Duration
Pressure	+++	+	+	+
Frequency	+	+++	++	+
Spectrum	+	+	+++	+
Duration	+	+	+	+++
Envelope	+	+	++	+

+ = fracamente dependente; ++ = moderadamente dependente; +++ = fortemente dependente.

Nota: o espectro se refere às frequências e amplitudes de todos os parciais (componentes) no som. A duração física de um som e sua duração percebida (subjetiva), embora intimamente relacionadas, não são as mesmas. Envelope inclui o ataque, relaxamento e as variações de amplitude.

Fonte: Wheeler (2014, p. 95).

Dessa forma, a psicoacústica se preocupa com a quantificação das sensações auditivas e estabelece relações matemáticas entre os estímulos acústicos e as sensações auditivas. Por consequência, pode-se prever sensações auditivas, como a sensação de volume sonoro ou a sensação de tonalidade, a partir das características físicas do sinal sonoro (PSICOACÚSTICA, 2022).

As medições diretas não são possíveis neste contexto, uma vez que as conexões diretas não podem ser feitas por razões éticas e práticas, e, em muitos casos, há uma dimensão cognitiva (processamento de nível superior) que é única para cada ouvinte. Relatos de Howard e Angus (2017, p. 413-414):

Ao realizar um **teste psicoacústico**, é importante observar que as respostas virão das opiniões dos ouvintes; ou seja, eles serão subjetivos, considerando que um teste objetivo envolve uma medição física direta, como dB, SPL, Hz ou componentes espectrais. Não há resposta certa para um teste subjetivo, uma vez que é a opinião de um determinado ouvinte, e cada ouvinte terá uma opinião que é única; o processo de teste psicoacústico é coletar essas opiniões do ouvinte de maneira não crítica. O teste subjetivo é diferente do teste objetivo, no qual medições diretas podem ser feitas de quantidades físicas, como nível de pressão sonora, nível de intensidade do som ou frequência fundamental; em um teste subjetivo, um ouvinte é solicitado a oferecer uma opinião ao responder a perguntas como “Qual som está mais alto?” “O tom aumenta ou diminui?” “Esses dois sons são iguais ou diferentes?” “Qual acorde está mais afinado?” ou “Qual versão você prefere?”

O teste psicoacústico envolve um projeto experimental cuidadoso para garantir que os resultados obtidos podem ser verdadeiramente atribuídos a qualquer aspecto do sinal que está sendo usado como a variável controlada. Este processo é denominado experimentação controlada. Um experimento controlado permite que tais experiências de escuta sejam cuidadosamente exploradas em termos de quais aspectos de um som os afetam e como. Psicólogos denominam de resposta comportamental, como sendo uma experiência de escuta a variável dependente, enquanto que os aspectos que podem afetá-lo, são chamados de variáveis independentes. Devidamente o teste psicoacústico controlado envolve o controle de todas as variáveis independentes de modo que quaisquer efeitos observados possam ser atribuídos a mudanças na variável sendo testada.

Podemos observar que a psicoacústica é um campo em desenvolvimento de pesquisa. No entanto, os resultados de tais experimentos fornecem uma base sólida para compreensão da natureza da percepção humana de sons musicais e fornecem orientações úteis para aqueles que exploram as sutilezas da síntese de som (HOWARD e ANGUS, 2017, p. 72).

4 SÍNTESE DIGITAL DE SONS

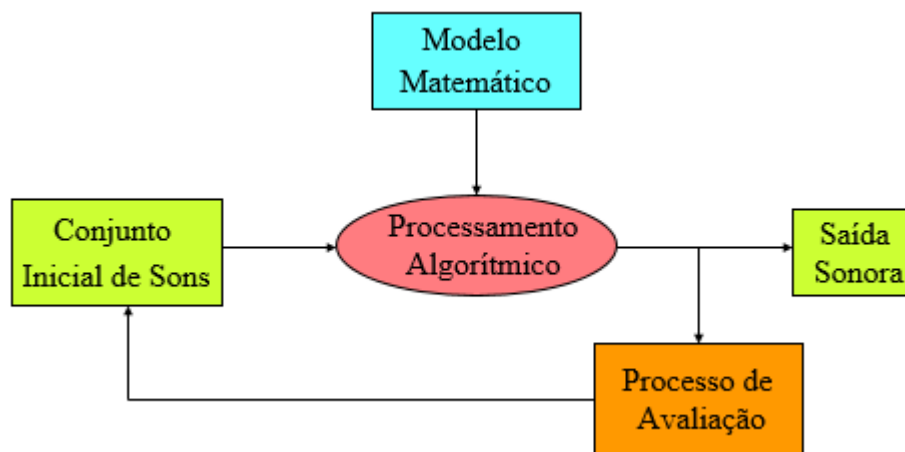
A síntese sonora digital é o processo de produzir sons e consiste na criação eletrônica de timbres baseada em parâmetros matemáticos da forma de onda armazenados na memória do dispositivo responsável por essa criação, podendo obviamente ser alterados e manipulados pelo usuário conforme uma desejada sensação acústica (DODGE e JERSE, 1985, p. 72; RUSS, 2009, p. 4; SERRA, 2002, p. 16).

Segundo a história da síntese digital de sons descrita por Roads (1996, p. 87),

O primeiro experimento em síntese digital de sons iniciou em 1957 por pesquisadores no Bell Telephone Laboratories localizada em Murray Hill, New Jersey. Nos primeiros experimentos, Max V. Mathews e seus colegas provaram que um computador (giant IBM 704) pode sintetizar sons de acordo com qualquer escala de altura ou forma de onda, incluindo frequência variando no intervalo de tempo e envelopes de amplitudes.

Além de matemática, a base de conhecimentos da síntese de sons engloba acústica, psicoacústica, cognição, física, performance, processamento de sinais digitais, ciência da computação, engenharia elétrica que reúne arte e ciência em uma mistura de habilidade musical e especialização técnica (ROADS, 1996, p. xiv; RUSS, 2009, p. 4). Assim, uma pedagogia equilibrada na síntese sonora deve refletir em espírito de interdisciplinaridade.

Figura 4.1 – Processamento de síntese de sons.



Fonte: Adaptado de Maia e Manzolli (2002).

A Figura 4.1 mostra um fluxograma que representa o processamento da síntese digital de sons. Esse processamento recebe um conjunto inicial de sons na entrada, faz uso de algum modelo matemático para um determinado algoritmo, passa por um processo de avaliação e emite sons na saída.

4.1 Instrumento

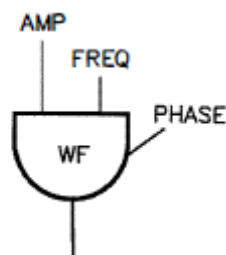
Em música computacional, ou mais especificamente em síntese digital de sons, o termo *instrumento* se refere ao algoritmo que realiza um evento musical. O algoritmo (instrumento) calcula os valores das amostras de um sinal de áudio usando os parâmetros de entrada do programa. Ao projetar um instrumento, o músico determina o número e a natureza dos parâmetros a serem passados. Estes são baseados na escolha de quais atributos do som serão controlados externamente durante a geração do som. Um instrumento também pode ser projetado para aceitar um sinal de áudio em formato digital como uma entrada a ser processada pelo algoritmo (DODGE e JERSE, 1985, p. 72).

4.2 Oscilador

O gerador de unidade fundamental para quase toda a síntese de som de computador é o oscilador que é denotado por *osc*. O oscilador é um instrumento de síntese que gera uma forma de onda periódica. Cada oscilador tem parâmetros de entrada e pelo menos um de saída (DODGE e JERSE, 1985, p. 75; ROADS, p. 96).

Note na Figura 4.2 que seus principais controles são amplitude, frequência, fase e tipos de forma de onda (WF) que produz.

Figura 4.2 – Notação gráfica para um oscilador.



Fonte: Dodge e Jerse (1985, p. 75).

É válido frisar que o conjunto inicial de sons (Figura 4.1) requer uma quantidade adequada de osciladores.

Frequentemente, buscamos um determinado efeito musical, mas os parâmetros físicos do som são tudo o que podemos manipular. Compreender a relação entre as propriedades objetivas e subjetivas do som é o coração da síntese sonora (MOORER, p. 24).

4.3 GeoGebra como Sintetizador¹⁶

4.3.1 O software GeoGebra

O **GeoGebra** (aglutinação das palavras **Geometria** e **Álgebra**) é um programa educativo de geometria dinâmica que conjuga geometria e álgebra em uma única interface gráfica do utilizador. Segundo Hohenwarter (2007, p. 1), “a característica mais destacável do GeoGebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na *janela de Álgebra* corresponde a um objeto da *zona de Gráficos* e vice-versa”.

GeoGebra é um software, escrito na linguagem *Java*¹⁷, de código aberto e disponível gratuitamente em <<https://www.geogebra.org/download>>. Nesse site há vários programas aplicativos (apps) os quais são possíveis usar diretamente da internet na opção START ou baixar instaladores em múltiplas plataformas para computadores pessoais (*Windows, Linux, Mac, etc*) ou para dispositivos móveis (*Android, iOS, Windows, etc*).

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, como parte de sua tese em educação matemática e ciência da computação, na Universidade de Salzburgo, especialmente para ensino e aprendizagem de matemática nos vários níveis [do Ensino Fundamental ao Ensino Superior] (HOHENWARTER e PREINER, 2007).

O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o software tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (BITTENCOURT, 2014, p. 12)

Para Basniak e Estevam (2014, p. 13), “o GeoGebra possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros”.

Applets

Applet é um pequeno software que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior. Os applets GeoGebra baseados na *web* podem ser

¹⁶ A palavra ‘sintetizador’ significa um instrumento eletrônico que é capaz de produzir uma ampla gama de sons diferentes (RUSS, 2009, p. 5).

¹⁷ *Java* é uma linguagem de programação baseada na orientação a objetos. Para o funcionamento do GeoGebra é necessário que uma Java Virtual Machine (JVM) esteja instalada para o sistema operacional em uso.

executados em qualquer navegador (*Chrome, Firefox, Internet Explorer, Safari, etc*) e em qualquer sistema operacional, desde que o plug-in Java esteja instalado.

Não é necessário criar um applet para usá-lo. Eles podem ser manipulados online ou off-line. Sua principal função é de auxiliar o entendimento de conteúdos relacionados a diversas áreas como Matemática, Física, Engenharia, etc.

No desenvolvimento desta pesquisa, os applets foram carregados em páginas da *web* após o compartilhamento das construções realizadas pelo autor, sobre funções periódicas e síntese de sons, no software GeoGebra Classic 5 (veja APÊNDICE A). Com este recurso, as páginas tornam-se dinâmicas e os usuários podem interagir com as páginas da *web* sem a necessidade do GeoGebra estar instalado no computador ou dispositivo. Caso o programa esteja instalado, os leitores (estudantes e professores) podem dar downloads dos applets, estudá-los de maneira off-line e realizar desejadas modificações.

4.3.2 O uso do GeoGebra no Ensino

De acordo com Almeida (2014, p. 28), o estudo de instrumentos de aprendizagem interativos através do uso de computadores e dispositivos portáteis é um avanço no processo de ensino-aprendizagem, no momento em que o estudante deixa de ser um mero observador e passa a interagir com a máquina, fazendo-a de ferramenta em processos investigativos. Formar conjecturas, elaborar questionamentos, realizar trabalhos apontam para a interatividade, tornando o processo de aquisição do conhecimento mais agradável.

Os softwares educacionais podem auxiliar na solução de problemas encontrados no âmbito educacional em todos os níveis de ensino. O Geogebra é recomendado para ser utilizado no currículo escolar porque tem potencial na educação matemática (HOHENWARTER e JONES, 2007, p. 126, p. 129). Para esta prática, os alunos podem usar cálculos algébricos e funções geométricas simultaneamente com dinâmicas interativas que irão melhorar suas habilidades cognitivas (ZETRIUSLITA; NOFRIYANDI; ISTIKOMAH, 2020, p. 42).

O GeoGebra é apresentado como uma sugestão pedagógica utilizada para a motivação da aprendizagem e a participação mais ativa dos alunos, pois tem mostrado ser um importante recurso pedagógico ao permitir estudantes e professores fazer uso de applets e realizar construções que auxiliam na resolução de situações problemas (HALLAL et al, 2020, p. 4).

Applets GeoGebra podem ser usados para ensinar física e matemática de forma dinâmica, visual e auditiva. Um applet é um manipulador virtual <<https://applet.visual-maths.com/>> que pode ser usado como uma ferramenta eficaz para visualizar ideias e conceitos físicos e matemáticos. O repositório no APÊNDICE A desta dissertação, promove uma

abordagem conceitual, funcional, numérica, visual e auditiva para funções periódicas e experimentos com síntese de som. Os professores e estudantes são incentivados a usar esses applets para aprimorar e enriquecer seus repertórios de ensino e aprendizagem.

Com os applets GeoGebra, a aula tem a possibilidade de transfigurar em formato dinâmico, pois o aluno visualiza a matemática em movimento e percebe as características físicas. O professor debate em torno dos parâmetros ao movimentar o gráfico e modificar seu som. O aluno tem a possibilidade de conceber a essência da física e da matemática. Neste caso, temos como fator favorável para aprendizagem a viabilidade da visualização gráfica com a possibilidade de ouvir seu som, a qual é uma forma de representação que contribui fortemente para a compreensão e abstração dos conceitos físicos e matemáticos, favorecendo a superação de várias dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Atualmente, o GeoGebra oferece uma plataforma online com mais de um milhão de recursos de sala de aula gratuitos desenvolvidos por uma comunidade multilíngue. Esses recursos podem ser facilmente compartilhados por meio da plataforma de colaboração GeoGebra Classroom no link <<https://www.geogebra.org/materials>>, onde o progresso do estudante pode ser monitorado em tempo real. É possível usá-lo para ensino ativo e orientado a problemas, pois promove experimentos e descobertas matemáticas tanto em sala de aula quanto em casa.

4.3.3 Produção de som no GeoGebra

Neste trabalho, utiliza-se uma vertente pouco explorada do GeoGebra, que é a capacidade de emitir sons. Mais que isso, junta-se essa possibilidade ao estudo de funções periódicas, podendo não só visualizar as funções graficamente, como também executá-las sonoramente.

O uso do GeoGebra se dará não apenas como elemento gerador de gráficos, mas também como forma de trazer o som para a sala de aula, tornando mais atrativo e curioso o ensino da física e da matemática para o aprendizado de funções periódicas. Salienta-se, portanto, a possibilidade do GeoGebra de alterar os parâmetros por manipulação de controles deslizantes, modificar as formas de ondas, (re) produzir sons e apresentar timbres diferentes.

Ao pesquisar “síntese de som” no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES) verificou-se que é incomum o material que aborda o tema e muito precisa ser construído para possibilitar a realização de experimentos e atividades no software GeoGebra. No entanto, ao mudar o descritor para “experimentos sonoros” na base de busca, encontra-se a dissertação de mestrado intitulada de

“A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros” (ALMEIDA, 2014). Em conjunção a esta, o artigo “Um estudo sobre a execução de sons e criação de músicas no software GeoGebra” (SILVA, GROENWALD e HOMA, 2017) serviram de suporte para o desenvolvimento da síntese de som no GeoGebra.

Considerando, então, o uso dessa vertente neste trabalho, segue alguns comandos de como executar sons e/ou utilizar o GeoGebra como instrumento ou sintetizador.

Selecionando o comando de programação do GeoGebra

TocarSom(<Função>, <Valor Mínimo>, <Valor Máximo>)

temos a possibilidade de emitir um sinal sonoro definido por uma função em um determinado intervalo de tempo de maneira que cada entrada representa (SILVA, GROENWALD e HOMA, 2017, p. 32):

- <Função>: função que se deseja produzir os sons;
- <Valor Mínimo>: tempo inicial, ou seja, em qual valor de t (que representa o tempo em segundos) o som será iniciado;
- <Valor Máximo>: tempo final, ou seja, em qual valor de t (que representa o tempo em segundos) o som será interrompido.

Para início da construção do objeto de estudo que possa gerar o som, primeiramente, insere-se quatro controles deslizantes representando os parâmetros nível de deslocamento A_0 , Amplitude A , frequência $\omega_0/2\pi = f_0$ em hertz e o ângulo de fase da onda ϕ_0 .

Figura 4.3 – Controle deslizante para frequência.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que um determinado som emitido seja ouvido, necessita-se que a função periódica possua períodos condizentes com a frequência captada pelo ouvido humano. Por isso, definimos

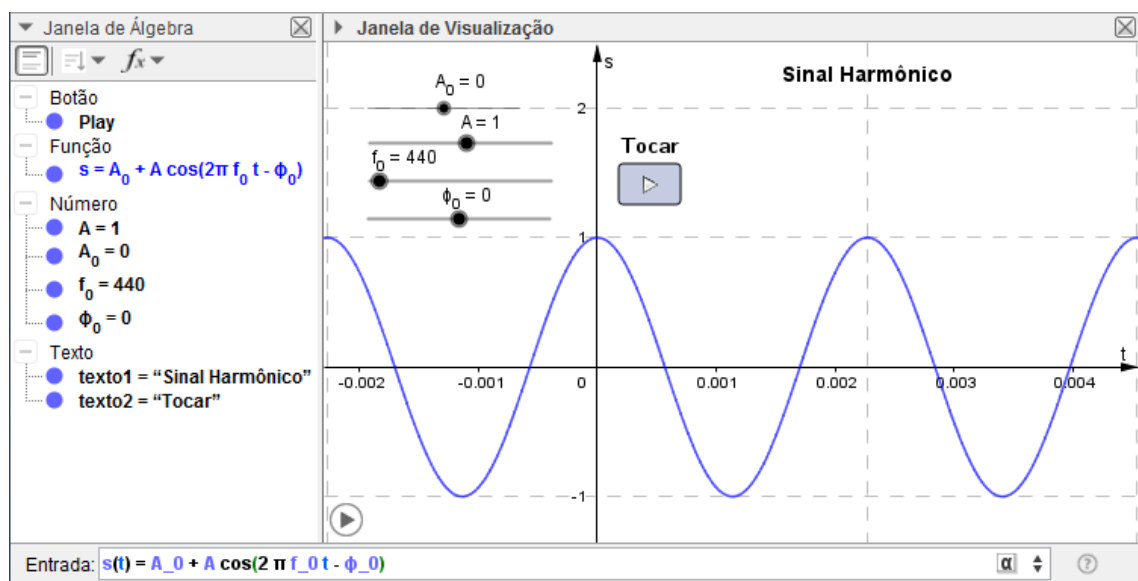
o controle deslizante f_0 no intervalo de $[20, 20000]$, de acordo com a Figura 4.3, para representar as possibilidades das frequências audíveis.

Em seguida, no campo Entrada na parte inferior do GeoGebra, conforme ilustra a Figura 4.4, insere-se o sinal harmônico

$$s(t) = A_0 + A \cos(2\pi f_0 t - \phi_0)$$

Esses controles deslizantes da Figura 4.4, ao serem manipulados, modificam a forma de onda da função, que por sua vez irá emitir um som diferente.

Figura 4.4 – Applet Sinal Harmônico¹⁸.



Fonte: Elaborado pelo autor.

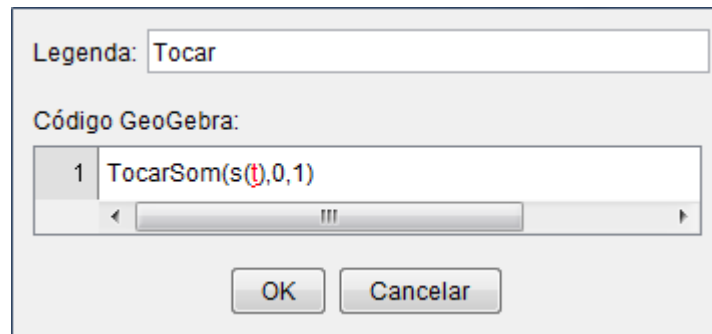
Como próximo passo, criamos um objeto com o propósito de Tocar o Som produzido pela função $s(t)$. Na barra de ferramentas na parte superior do software, no penúltimo grupo de elementos, escolhe-se a opção Botão para inserir um objeto programável (SILVA, GROENWALD e HOMA, 2017, p. 32). Este objeto foi nomeado como Tocar e funciona como um *trigger* de execução do comando TocarSom que foi programado conforme a Figura 4.5. A primeira entrada refere-se à função $s(t)$ criada, já a segunda e terceira entradas são sugeridas, pois tratam-se dos valores de início e fim da execução do som (em segundos) e podem ser alterados livremente.

Dessa maneira, toda vez que o objeto Tocar for clicado, aquele comando será executado, ou seja, toda vez que for clicado no botão criado, o som do sinal harmônico $s(t)$ será executado. A ideia é realizar a manipulação, através dos controles deslizantes, na forma desta onda, seja

¹⁸ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/jvzn8jdm>>.

aumentando a sua frequência ou amplitude para se obter sons diferentes, e discutindo os significados, tanto geométricos como sonoros, dos parâmetros que estão sendo manipulados.

Figura 4.5 – Código do botão Tocar.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para tocar a nota Lá central durante 1 segundo, que possui frequência de 440 Hz (ou seja, o período é $T_0 \cong 0,00227$ conforme a Figura 4.4), basta substituir as entradas:

<Função> = $\cos(2\pi 440 t)$, nesse caso, $A_0 = \phi_0 = 0$ e $A = 1$;

<Valor Mínimo> = 0, valor de início na abscissa;

<Valor Máximo> = 1, valor de término na abscissa (1 segundo depois).

Donde obtemos o comando:

$$\text{TocarSom}(\cos(2\pi 440 t), 0, 1)$$

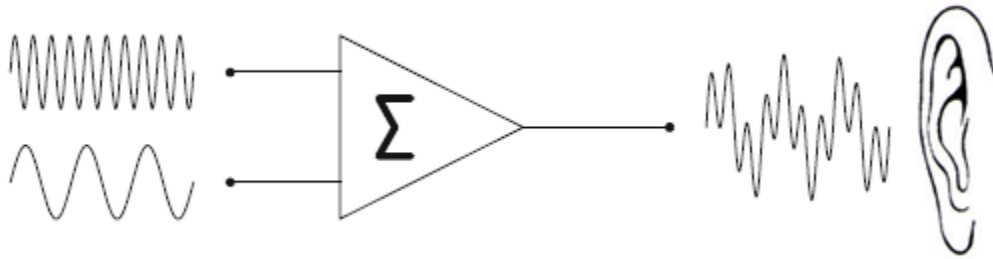
que emite a nota Lá central de 440 Hz, no intervalo de zero a um segundo.

4.4 Superposição de Sons Puros

Inicialmente vamos discutir o significado físico de “superposição de som”. O tímpano move-se para dentro e para fora segundo as variações de pressão do ar no canal auditivo. Se ele for posto a oscilar num movimento harmônico de amplitude e frequência definidas, ouviremos um som puro com intensidades e alturas definidas.

Mas, se fizermos soar juntos dois sons puros com características diferentes (por exemplo, ouvindo duas fontes independentes ao mesmo tempo), o tímpano reage como se estivesse executando simultaneamente dois comandos independentes, um para cada som puro. A vibração resultante é a soma das vibrações individuais que ocorreriam se cada som puro soasse sozinho, na ausência do outro. Este efeito é denominado **superposição linear** de duas

Figura 4.6 – A oscilação de saída é a superposição linear das duas oscilações de entrada.



Fonte: Adaptado de Hartmann (2013, p. 58).

vibrações individuais e normalmente é representado por uma *combinação linear* (KINSLER et al, 2000, p. 23) do tipo

$$s_2(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t - \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \phi_2). \quad (4.1)$$

A superposição linear de duas vibrações é um termo técnico que significa ‘coexistência pacífica’: uma vibração componente não interfere nos assuntos da outra, e a superposição resultante segue o que dita cada componente simultaneamente (ROEDERER, 2002, p. 53-54).

4.4.1 Soma de ondas de mesma frequência

Ao somar dois sinais harmônicos com a mesma frequência, obtêm-se um sinal harmônico resultante de mesma frequência. A amplitude do sinal harmônico resultante depende das amplitudes dos sinais componentes e sua fase relativa.

Vamos começar a discussão com a análise da superposição de duas oscilações harmônicas simples com frequências iguais e fases iguais (chamada *em fase*). Pode-se visualizar graficamente (Figura 4.7) uma **interferência construtiva**, neste caso, obtemos novamente uma oscilação harmônica simples com a mesma frequência, a mesma fase, mas com amplitude resultante que é a soma das amplitudes das duas vibrações componentes. Ou seja, analiticamente temos que

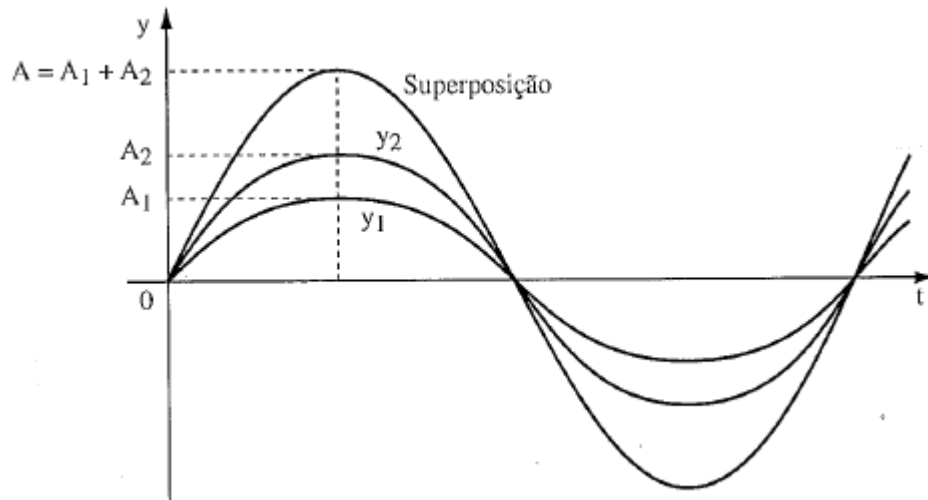
$$s_2(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \text{sen}(2\pi ft) + A_2 \text{sen}(2\pi ft) = (A_1 + A_2) \text{sen}(2\pi ft)$$

Denominando de A a amplitude da onda senoidal resultante $s_2(t)$, segue-se que

$$A = A_1 + A_2.$$

Note que se as duas amplitudes das ondas componentes são iguais, a amplitude da onda resultante é o dobro da amplitude da componente individual.

Figura 4.7 – Forma de onda combinada pela superposição de duas ondas senoidais em fase.

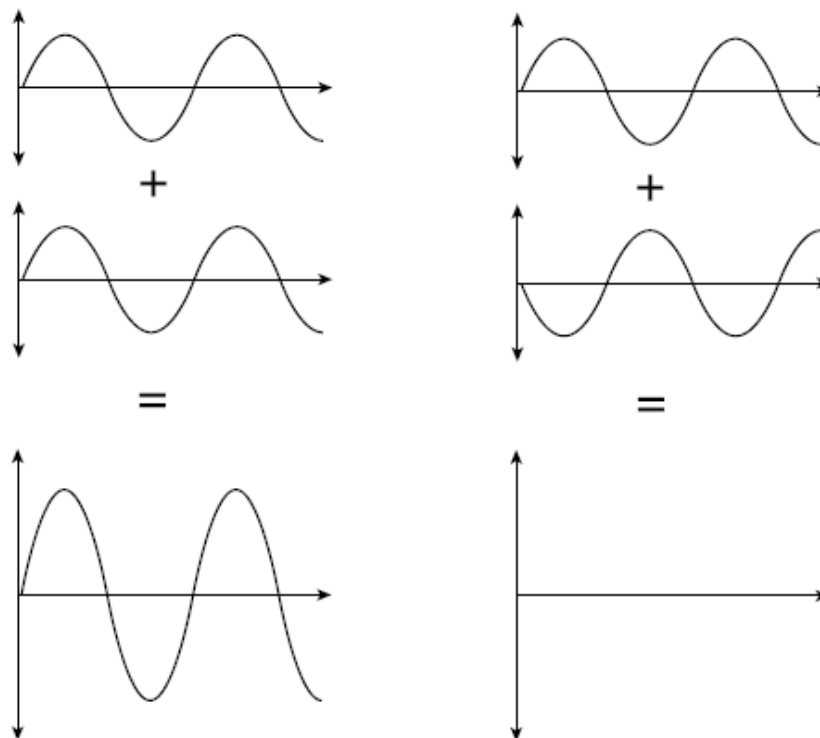


Fonte: Roederer (2002, p. 55).

Por outro lado, se as duas oscilações componentes de frequência fixada tiverem diferença de fase, a sua superposição ainda será uma oscilação harmônica simples com a mesma frequência, mas a amplitude já não será mais a soma das amplitudes. Se a diferença de fase ϕ for 180° (denominada *fora de fase*), a amplitude resultante será dada por

$$A = |A_1 - A_2|.$$

Figura 4.8 – Adição em fase à esquerda e adição fora de fase à direita.



Fonte: Adaptado de Howard e Angus (2017, p. 28).

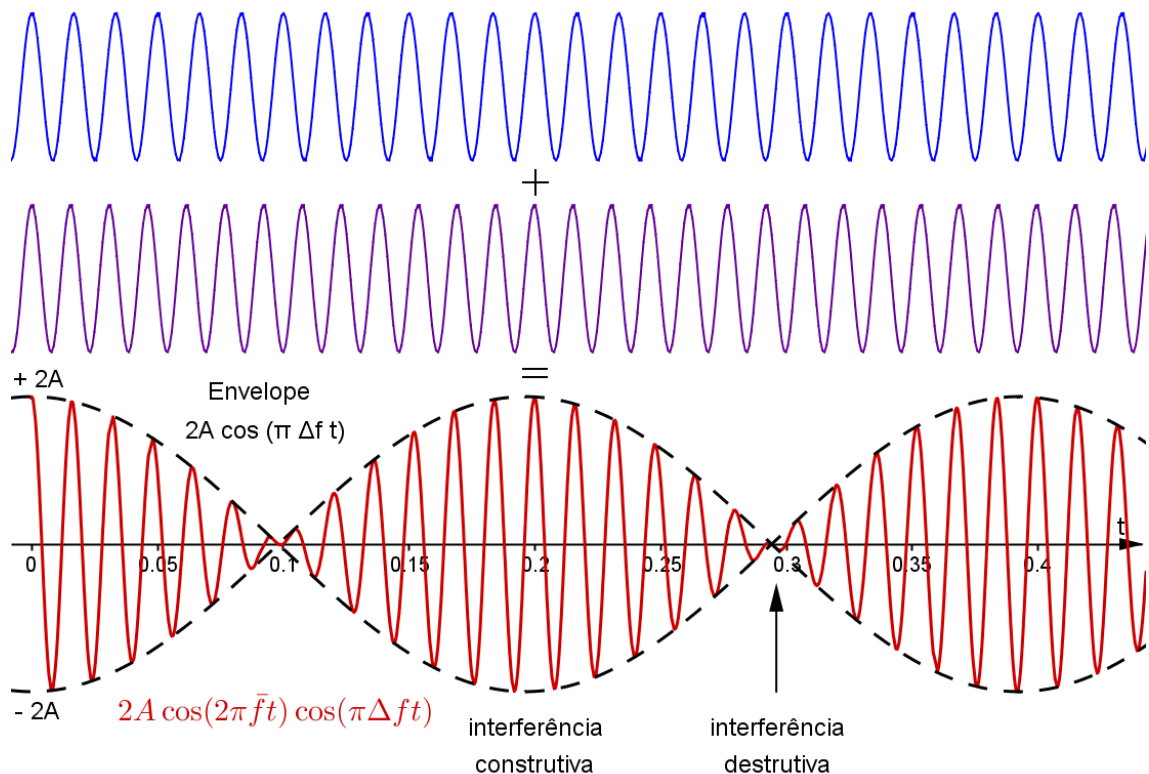
Em particular, se as amplitudes das oscilações componentes forem iguais segue-se que $A = 0$, de maneira que as oscilações se aniquilam uma à outra e não se ouvirá nenhum som. Isso também é chamado de **interferência destrutiva** (lado direito da Figura 4.8) e têm um papel importante em acústica de ambientes.

Em suma, quando dois sons puros de mesma frequência chegam ao tímpano, percebemos apenas um som de frequência definida (correspondente à frequência dos tons componentes) e volume igualmente definido (controlado pelas amplitudes dos tons superpostos e suas diferenças de fases).

4.4.2 Batimento

O batimento é um padrão de interferência entre dois sons de frequências ligeiramente diferentes ($f_1 \approx f_2$), percebido como uma variação em uma maneira regular da intensidade do som, cuja taxa é a diferença entre as duas frequências ($\Delta f = |f_1 - f_2|$).

Figura 4.9 – Batimentos gerados pela superposição de duas ondas de frequências próximas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Consideramos agora a superposição de dois sons simples de mesma amplitude A , mas com frequências ligeiramente diferentes, f_1 e $f_2 = f_1 + \Delta f$. A diferença de frequência Δf têm um valor pequeno; vamos assumir que ela seja positiva (o tom correspondente a f_2 é

ligeiramente mais nítido do que o de f_1). Na Figura 4.9, as linhas azul e roxo representam as oscilações de frequências f_1 e f_2 que geraram o batimento. O padrão de vibração do tímpano será dado pela soma dos padrões de cada som componente. O resultado da superposição (linha em vermelho) é uma oscilação de período e frequência intermediária entre f_1 e f_2 , e de amplitude modulada lentamente. Observe na Figura 4.9, a diferença de fase lentamente variável entre os tons componentes x_1 e x_2 : eles começam *em fase* (0° diferença de fase) no instante $t = 0$, então x_2 começa a liderar em fase (à frente de x_1) até que ambos estejam completamente *fora de fase* (180° diferença de fase) no instante correspondente a 0,1 s. A diferença de fase se mantém aumentando até atingir $360^\circ = 0^\circ$ no instante 0,2 s. Essa variação de fase contínua e lenta é responsável pela amplitude variável da oscilação resultante: as linhas tracejadas em preto na Figura 4.9 representam o envelope da modulação da amplitude.

Os sons do batimento são produzidos pela adição de dois sinais harmônicos de mesma amplitude com frequências próximas e pode ser descrita por

$$s_2(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t).$$

Usando a identidade trigonométrica da soma para o produto (STEWART; REDLIN; WATSON, 2007, p. 595), isto é,

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right).$$

Prova: Usando as identidades trigonométricas do cosseno da adição e do cosseno da diferença de arcos tem-se

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Somando membro a membro as duas equações obtém-se

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Fazendo $\theta_1 = \alpha + \beta$ e $\theta_2 = \alpha - \beta$ chega-se a

$$\alpha = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}.$$

Portanto,

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right).$$

Agora, substituindo $\theta_1 = \omega_1 t$ e $\theta_2 = \omega_2 t$ obtemos

$$\begin{aligned} s_2(t) &= 2A \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \\ &= 2A \cos \left(2\pi \left[\frac{f_1 + f_2}{2} \right] t \right) \cos \left(2\pi \left[\frac{|f_1 - f_2|}{2} \right] t \right) = 2A \cos(2\pi \bar{f} t) \cos(\pi \Delta f t). \end{aligned}$$

com $f_1 \neq f_2$, onde definimos uma **frequência média de oscilação**

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad (4.2)$$

e uma **frequência de batimento** (RAICHEL, 2006, p. 36; VISTNES, 2018, p. 196):

$$\Delta f = |f_1 - f_2| \quad (4.3)$$

Assim, podemos interpretar a onda resultante $s_2(t)$ como um som de frequência $\bar{f} = f_1 + \Delta f/2$ que oscila no intervalo $[-2A, +2A]$. O envelope $2A \cos(\pi \Delta f t)$ modula a curva $\cos(2\pi \bar{f} t)$ com uma frequência de batimento Δf de modo que a amplitude de $s_2(t)$ diminui e aumenta entre os limites 0 e $2A$ (BORTOLOSSI, 2012, p. 127; KINSLER et al, 2000, p. 24; PAIN, 2005, p. 14).

O físico e matemático francês Joseph Sauveur (1653-1716), apesar de ter sido surdo e mudo, foi quem descobriu pela primeira vez um meio de calcular o número absoluto de vibrações de um som. Considerado muitas vezes o fundador da acústica, foi o primeiro a calcular a frequência dos batimentos produzida por duas notas, resolvendo ainda o paradoxo estabelecido por Mersenne (Como poderia uma corda produzir mais que uma altura ao mesmo tempo?), ao explicar racionalmente o fenômeno dos sons harmônicos fundamentando-se no princípio da superposição (ABDOUNUR, 2003, p. 33).

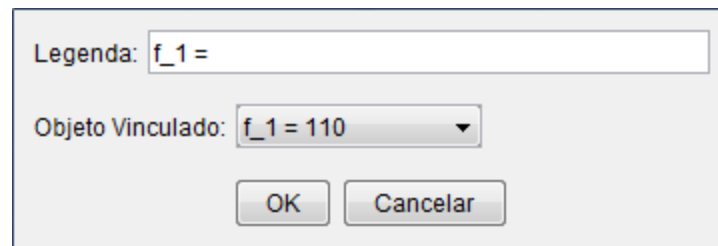
Para construir o experimento do Batimento, usamos o modelo de superposição de dois sinais harmônicos $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ e $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$ denominados sons componentes (desde que suas frequências estejam em intervalos audíveis). Assim,

$$s_2(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos(2\pi \bar{f} t) \cos(\pi \Delta f t) \quad (4.4)$$

será a componente resultante, ou seja, os sons sobrepostos.

No início da construção no GeoGebra, criamos um objeto com o propósito do aprendiz escolher as frequências próximas. Inserimos dois controles deslizantes f_1 e f_2 , no intervalo de $[20, 20000]$ para representar as possibilidades das frequências das oscilações. Na barra de ferramentas, no penúltimo grupo de elementos, escolhe-se a opção Campo de Entrada para inserir duas caixas de seleção nas quais o aprendiz pode escolher os valores das frequências. Posteriormente oculta-se os controles deslizantes.

Figura 4.10 – Campo de Entrada da f_1 .



The image shows a dialog box for setting the input field for f_1 . It contains a legend field with the text "Legenda: f_1 =", a dropdown menu for "Objeto Vinculado:" showing "f_1 = 110", and two buttons labeled "OK" and "Cancelar".

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, inserimos as funções

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t), \quad x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$$

e em Preferências – Janela de Visualização (botão direito do mouse: propriedades) configura-se as proporções de escala de maneira a propiciar uma visualização adequada ao referente estudo da construção do applet Batimento.

Nesta parte, inserimos a superposição de sons

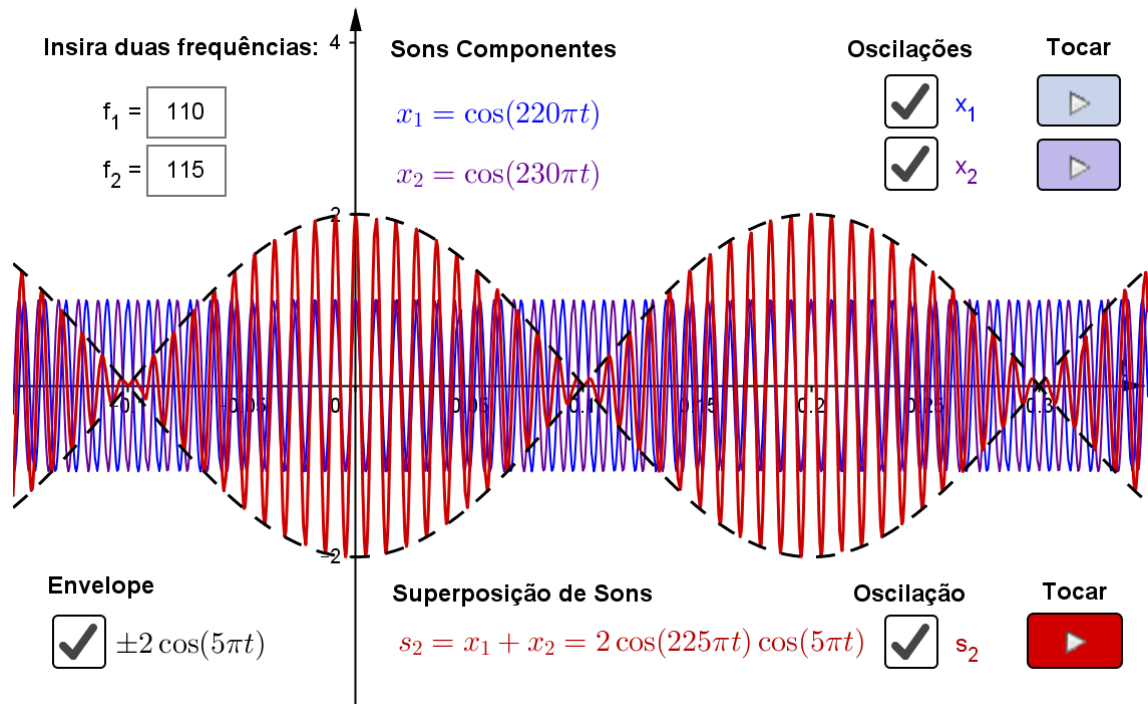
$$s_2(t) = x_1 + x_2 = 2 \cos(2\pi \bar{f} t) \cos(\pi \Delta f t)$$

e na barra de ferramentas, no penúltimo grupo de elementos, escolhe-se a opção Caixa para Exibir / Esconder Objetos para as três funções definidas.

No último passo, criamos três objetos com o símbolo “Play” com o propósito de Tocar o Som produzido pelas funções x_1 , x_2 e s_2 durante 1 segundo (tempo escolhido).

De acordo com Lago (2015, p. 1504-3) e Raichel (2006, p. 36), foi verificado experimentalmente no Applet Batimento (Figura 4.11) que, caso as frequências sejam suficientemente próximas, o período da modulação em amplitude (linha tracejada) será longo, de modo que esta modulação poderá ser facilmente percebida por quem escutar este batimento. A sensação é a de ouvir um som pulsante rítmico cujo volume varia com o tempo, aumentando e diminuindo sucessivamente.

Figura 4.11 – Applet Batimento¹⁹.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se as duas frequências forem ficando muito próximas, o batimento ficará gradualmente mais lento e desaparecerá quando elas forem idênticas (uníssono). Por isso, batimentos também são chamados de uníssonos desafinados.

Quando aumentamos ligeiramente a frequência f_2 , continuamos ouvindo um único som, mas com altura um pouco maior. O volume deste som sofrerá batimentos com uma frequência Δf . Conforme afirma Roederer (2002, p. 57) e por verificação empírica do autor, esses batimentos aumentarão em frequência à medida que f_2 afasta-se de f_1 (Δf aumenta). Desde que Δf seja menor que uns 10 Hz, esses batimentos serão percebidos claramente. Quando a diferença de frequência Δf exceder, digamos, 15 Hz, a sensação de batimento desaparece, dando lugar a um aspecto rude ou desagradável bem característico da sensação tonal resultante.

4.5 Síntese Aditiva

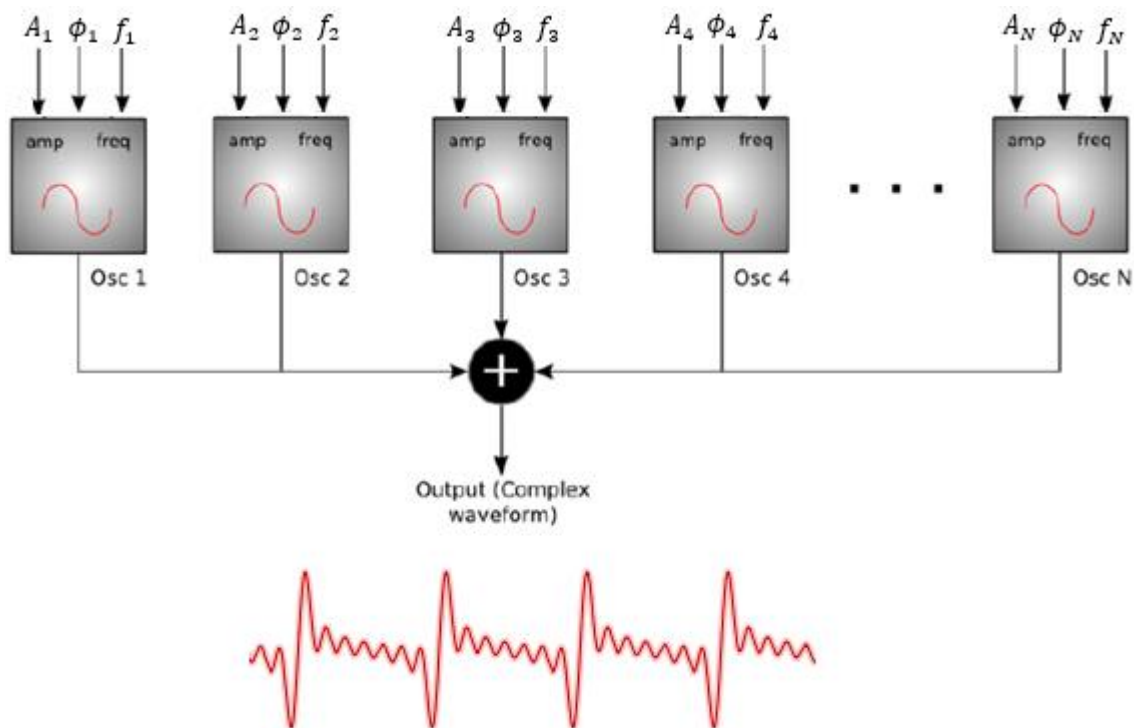
A **síntese aditiva**, como o próprio nome já sugere, é uma técnica que consiste em gerar um som através da adição dos sinais de saída de um número qualquer de osciladores utilizando

¹⁹ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/tsggfchv>>.

formas de ondas elementares²⁰ para criar uma forma de onda mais complexa [superposição linear] (DODGE e JERSE, 1985, p. 88; ROADS, 1998, p. 134).

Conforme explicado na Subseção 3.4.4 (Teoria clássica do Timbre), cada componente espectral de um som pode ser representado por suas próprias funções, com parâmetros de amplitude, frequência e fase independentes. A síntese de um som baseado no modelo da Figura 4.12 requer um oscilador (cos) senoidal separado para cada *parcial harmônico*, com as funções de amplitude, frequência e fase apropriadas aplicadas a ele. A saída de cada um dos osciladores é adicionada em conjunto para obter o som completo (DODGE e JERSE, 1985, p. 88; MOORER, 1990, p. 209).

Figura 4.12 – Configuração da síntese aditiva em um diagrama de bloco.



Fonte: Adaptado de Karras (2007).

O sinal sonoro s_N (ou áudio digital) gerado por este instrumento é uma *combinação linear* dos componentes harmônicos, de modo que pode ser calculado através da soma

$$s_N(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_1 t - \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t - \phi_2) + \dots + A_N \cos(2\pi f_N t - \phi_N).$$

Usando o símbolo de somatório e reescrevendo o som digital s_N normalizado obtemos

²⁰ As formas de ondas elementares são produzidas por sinais senoidais e fornecem a sensação de som puro.

$$s_N(t) = \frac{1}{\rho} \left[A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\overbrace{2\pi f_n}^{\omega_n} t - \phi_n) \right] \quad (4.5)$$

onde N é o número de osciladores senoidais. A soma das amplitudes A_n é normalmente normalizada (caso for de interesse) de forma que a amplitude de $s_N(t)$ não varie com o número e a intensidade (força) dos harmônicos (LOY, v. 2, 2007, p. 371). Isso é feito definindo

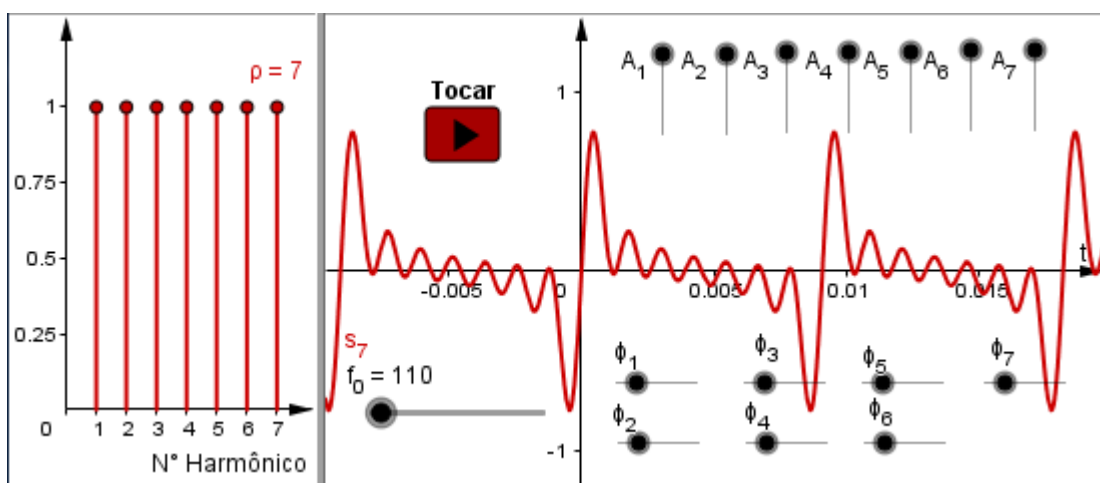
$$\rho = \sum_{n=1}^N A_n.$$

Uma maneira direta de controlar o timbre é especificar o espectro de um som controlando as amplitudes e frequências de um banco de osciladores como na Figura 4.12 (LOY, 2007, v. 2, p. 371). A síntese aditiva fornece ao músico computacional o máximo de flexibilidade nos tipos de som que podem ser sintetizados. Dados osciladores suficientes, qualquer conjunto de componentes espectrais independentes podem ser sintetizados e, portanto, praticamente qualquer som pode ser gerado (DODGE e JERSE, 1985, p. 88).

A escolha da forma de onda pode ser feita de várias maneiras. As primeiras tentativas de usar este instrumento para aproximar os sons naturais analisavam o espectro de estado estacionário do tom a ser correspondido (DODGE e JERSE, 1985, p. 88).

O espectro vai sendo construído através da adição dos parciais harmônicos. A Figura 4.13 mostra o espectro de frequências (esquerda) e a forma de onda (direita) do Applet Síntese

Figura 4.13 – Applet Síntese Aditiva de Sete Harmônicos²¹.



Fonte: Elaborado pelo autor.

²¹ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/dtsdza5h>>.

Aditiva dos Sete Harmônicos com controles deslizantes para amplitudes, fases e frequência fundamental, de maneira que possam ser manipulados e ouvido pelo músico computacional. É interessante deixar claro para o leitor, que a imagem do sinal sonoro gerado pelo instrumento de síntese, no lado direito da Figura 4.13, possui a forma de onda de um trem de impulsos, com fase $\phi_n = \pi/2$ para $n = 1, 2, \dots, 7$.

O som produzido por este instrumento difere do som natural em dois importantes aspectos. Primeiramente, as amplitudes de todos os componentes espectrais são variadas igualmente pelo envelope, de modo que as amplitudes dos componentes em relação uns aos outros não mudem durante o curso do tom. Assim, o som carece de evolução temporal independente dos harmônicos, uma característica importante do som natural. Em segundo lugar, todos os componentes espectrais são harmônicos inteiros exatos da frequência fundamental, não as parciais desafinadas que normalmente ocorrem em sons acústicos (DODGE e JERSE, 1985, p. 88).

A síntese aditiva produz som de alta qualidade, mas requer uma comparativamente grande quantidade de dados para descrever um som porque cada um dos muitos osciladores requer pelo menos dois parâmetros (DODGE e JERSE, 1985, p. 89).

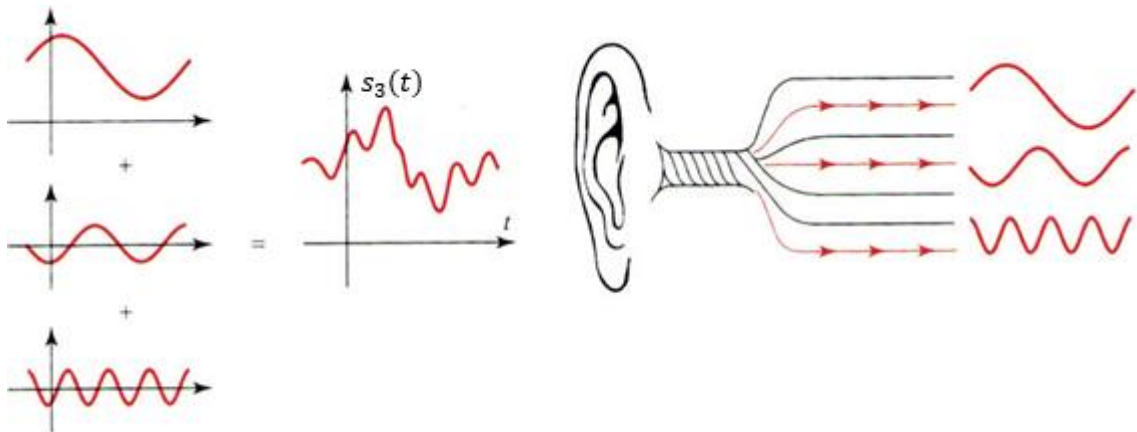
A vantagem da síntese aditiva é que ela fornece controle completo e independente sobre o comportamento de cada componente espectral. No entanto, um número tão grande de controles no timbre pode tornar difícil para o músico saber como alcançar um determinado som. Ao sintetizar sons complexos, não é incomum empregar 10 ou mais osciladores na síntese de uma única voz. Esta característica difere e motiva as técnicas de síntese apresentadas na Seção 4.6 que utilizam menos osciladores.

4.5.1 Resposta Auditiva para a Onda Sonora

Segundo Anton e Rorres (2010, p. 695) pode-se afirmar, com um grau razoável de exatidão, que o ouvido é um sistema linear. Um sistema linear apresenta duas importantes propriedades: proporcionalidade e aditividade (LEÃO FIGUEIREDO, 2005, p. 48).

Isso significa que se uma onda sonora complexa pode ser representada por um sinal de sonoro $s_N(t)$ produzido pela síntese aditiva, então a resposta do ouvido consiste em impulsos nervosos ao longo dos mesmos caminhos neurais que seriam estimulados pelos componentes individuais (Figura 4.14).

Figura 4.14 – Onda sonora complexa e a resposta do ouvido.



Fonte: Adaptado de Anton e Rorres (2010, p. 695).

Consideremos, agora, alguma onda sonora $s(t)$ de período T_0 [ou seja, $s(t) = s(t + T_0)$], que *não* seja uma soma finita de ondas senoidais. Se examinarmos a resposta do ouvido a uma tal onda periódica, veremos que ela coincide com a resposta do ouvido a alguma onda que é a soma finita de ondas senoidais. Ou seja, existe alguma onda sonora $s_N(t)$ como a dada pela síntese aditiva que produz a mesma resposta de $s(t)$, mesmo que $s(t)$ e $s_N(t)$ sejam funções diferentes do tempo.

Agora queremos determinar as frequências, amplitudes e ângulos de fase dos componentes senoidais de $s(t)$. Como $s(t)$ produz a mesma resposta da onda periódica $s_N(t)$, é razoável esperar que $s(t)$ tenha o mesmo período T_0 de $s_N(t)$. Isso requer que cada termo senoidal em $s(t)$ tenha período T_0 . Conseqüentemente, as frequências dos componentes senoidais devem ser um múltiplo inteiro das frequência fundamental $f_0 = 1/T_0$ da função $s_N(t)$.

Como o ouvido humano não percebe ondas senoidais com frequências acima de 20000 Hz, podemos omitir os valores de n com os quais $s(t)$ seja maior do que 20000. Assim, $s_N(t)$ é da forma

$$s_N(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t - \phi_1) + \dots + A_N \cos(2\pi N f_0 t - \phi_N)$$

onde N é o maior número inteiro tal que $N f_0 \leq 20000$.

Para um ‘Lá₄ central’ de 440 Hz, por exemplo, bastaria uma quantidade de $N = 46$ componentes cossenoidais para $s_N(t)$ produzir a mesma resposta auditiva que $s(t)$.

Agora voltamos a atenção para os valores das amplitudes A_0, A_1, \dots, A_N e dos ângulos de fase $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$ que aparecem na equação do sinal de audio. Existe um critério pelo qual

o sistema auditivo “escolhe” esses valores para fazer com que $s_N(t)$ tenha a mesma resposta de $s(t)$. Para examinar esse critério, denotamos

$$e(t) = s(t) - s_N(t).$$

Considerando $s_N(t)$ como uma aproximação de $s(t)$, $e(t)$ denota o erro dessa aproximação, um erro que o ouvido não consegue perceber. Em termos de $e(t)$, o critério para determinar as amplitudes e os ângulos de fase é que a quantidade

$$\int_0^{T_0} [e(t)]^2 dt = \int_0^{T_0} [s(t) - s_N(t)]^2 dt \quad (4.6)$$

seja a menor possível. Aqui não podemos investigar as razões fisiológicas para isso, mas podemos observar que essa expressão é **proporcional à energia acústica** da onda de erro $e(t)$ ao longo de um período. Em outras palavras, é a energia da diferença entre as duas ondas sonoras $s(t)$ e $s_N(t)$ que determina se um ouvido percebe alguma diferença entre elas. Se essa energia for tão pequena quanto possível, então as duas ondas produzem a mesma sensação de som (ANTON e RORRES, 2010, p. 695).

4.5.2 Representações de Séries de Fourier

É possível escrever a série de Fourier (SF) de uma função (ou sinal) periódica utilizando diferentes representações. A escolha da forma conveniente depende da aplicação desejada.

Forma Trigonométrica

Dada uma função $s(t)$ periódica, definida no intervalo $[0, T_0]$, denominamos *série de Fourier associada a $s(t)$* à série trigonométrica

$$s(t) \sim F[s](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sen \omega_n t] \quad (4.7)$$

se os seus coeficientes $\{a_n\}_0^\infty$ e $\{b_n\}_1^\infty$ forem dados pelas fórmulas de Euler–Fourier:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(\omega_n t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \operatorname{sen}(\omega_n t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

desde que as integrais existam e $\omega_n = n\omega_0 = 2\pi n/T_0$. Observando essas expressões, vemos que a notação $a_0/2$ para o termo constante da série de Fourier se justifica para que a expressão a_0 possa ser vista como caso particular da expressão a_n , quando considerarmos $n = 0$ em a_n , pois, assim, temos uma única fórmula para todos os a_n . O símbolo \sim denota que a SF é apenas associada a função periódica $s(t)$. A expressão $F[s](t)$ significa *série de Fourier associada a $s(t)$* (OLIVEIRA e TYGEL, 2005, p. 186; OLIVEIRA e VAZ JR, 2016, p. 2-3).

Forma Exponencial

Para relacionar a representação da forma trigonométrica com a forma exponencial, utilizam-se as fórmulas de Euler inversas (veja 2.11) as quais permitem escrever as funções cosseno e seno em termos de exponenciais complexa como

$$\cos \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} \quad \operatorname{sen} \omega_n t = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}.$$

Substituindo estas expressões na série de Fourier (4.7) segue-se que

$$F[s](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} \right) \right].$$

Reagrupando os termos e usando o fato que $1/i = -i$, temos:

$$F[s](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\omega_n t} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\omega_n t} \right].$$

Por outro lado, tomando-se

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad n = 1, 2, \dots$$

podemos escrever

$$F[s](t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{i\omega_n t} + c_{-n} e^{-i\omega_n t}] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Portanto, a **forma exponencial** da série de Fourier associada a função $s(t)$ é dada por

$$F[s](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}. \quad (4.10)$$

Os coeficientes de Fourier complexos c_n podem ser obtidos usando as expressões para a_n e b_n diretamente nas definições destes (OLIVEIRA e TYGEL, 2005, p. 194; OLIVEIRA e VAZ JR, 2016, p. 12-13). Dessa maneira, os *coeficientes de Fourier complexos* satisfazem à relação

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.11)$$

Forma Harmônica

No limite, quando $N \rightarrow \infty$, o sinal de áudio $s_N(t)$ produzido pela síntese aditiva pode ser expresso como uma série de Fourier na *forma amplitude-fase*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t) = F[s](t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \phi_n). \quad (4.12)$$

A série dada em (4.12) também é denominada **Forma Harmônica** da série de Fourier de uma função $s(t)$ porque pode ser entendida como uma *superposição de componentes harmônicas* de amplitude A_n , frequência ω_n e fase ϕ_n dados por valores reais.

Para relacionar a representação da forma harmônica com a forma trigonométrica, basta usar a identidade trigonométrica do cosseno da diferença de arcos

$$\cos(\omega_n t - \phi_n) = \cos \omega_n t \cos \phi_n + \sin \omega_n t \sin \phi_n.$$

Substituindo a identidade trigonométrica em (4.12) obtemos:

$$\begin{aligned} F[s](t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos \phi_n \cos \omega_n t + \sin \phi_n \sin \omega_n t] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \phi_n \cos \omega_n t + A_n \sin \phi_n \sin \omega_n t] \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t]. \quad (4.7)$$

Comparando os termos na última igualdade, temos que:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad a_n = A_n \cos \phi_n \qquad b_n = A_n \sin \phi_n$$

Note que

$$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2.$$

Desde que $A_n \geq 0$ temos

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (4.13)$$

Logo

$$\cos \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \qquad \sin \phi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

donde obtemos

$$\phi_n = \begin{cases} \tan^{-1}(b_n/a_n), & a_n \neq 0, \\ \pi/2, & a_n = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Observe que sempre é possível converter uma forma na outra e os ângulos de fase estão unicamente definidos em cada volta do ciclo trigonométrico (OLIVEIRA e TYGEL, 2005, p. 193; SAUTER e AZEVEDO, 2020, p. 26-27).

4.5.3 Formas de Onda Geométrica

As ondas complexas padrão (triangular, quadrada, dente de serra e trem de impulsos) podem ser sintetizadas a partir das notas da série harmônica, conforme mostrado nas Figuras 4.15 à 22. Cada figura contém, à esquerda, a sequência de harmônicos presentes na onda complexa, com amplitude adequada, e, à direita, a onda complexa formada pela adição de cada componente sucessiva. Observe que com a adição de cada harmônico mais alto, a onda complexa se parece mais com o formato padrão mostrado no topo das figuras.

Para referenciar, as amplitudes relativas dos harmônicos de cada uma das ondas padrão são mostradas na Tabela 4.1 no final desta seção. É válido destacar que as amplitudes são muito mais importantes do que as fases na determinação do timbre ou qualidade do som da onda. No entanto, mudanças nas fases altera a forma de onda mesmo que seu conteúdo harmônico permaneça o mesmo. A forma de onda determina unicamente o espectro de Fourier, mas o espectro não é unicamente determinado pela forma de onda (BERG e STORK, 1982, p. 84).

Devido a Fourier, os formatos de ondas padrão (triangular, quadrada, dente de serra e trem de impulsos) podem ser sintetizadas por combinações de ondas senoidais da (1) frequência fundamental da onda complexa e (2) alguns ou todos harmônicos, cada um com amplitude e fase apropriado (BERG e STORK, 1982, p. 94).

Teorema de Weierstrass²²: *Seja $s: [0, T_0] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua e periódica, definida no intervalo $[0, T_0]$. Então existe uma sucessão de polinômios trigonométricos $s_N(t)$ que converge uniformemente para s em $[0, T_0]$ (adaptado de (FIGUEIREDO, 2005, p. 77)).*

Com base na teoria de Fourier, no teorema de Weierstrass e na resposta auditiva para onda sonora realizaremos aproximações das formas de onda geométrica s com o uso de polinômios trigonométricos $s_N(t)$ e escutaremos os sons produzidos por ambos.

Nas construções do GeoGebra, usamos uma frequência fundamental de 110 Hz. Observe que o período é

$$T_0 = 1/110 \cong 0,009 = 9 \cdot 10^{-3} = 9 \text{ ms}^{23}.$$

Como $Nf_0 \leq 20\,000$, precisaremos de uma quantidade $N \leq 182$ de componentes senoidais. Ou seja, com 182 parciais harmônicos nossa percepção auditiva não distingue diferença entre a onda $s(t)$ [traçado azul] e a aproximação da onda $s_N(t)$ [traçado vermelho]. No entanto, de início, por questões de visualização, deixamos os traçados gráficos das formas de onda com os 10 primeiros harmônicos, podendo ser alterado com a vontade do leitor (ou aprendiz).

Como o ouvido não é muito sensível às fases relativas dos harmônicos, mas altera o formato da onda, mantivemos fixo $\phi_n = 0$ para $n = 1, \dots, N$ (FEYNMAN, 2008, p. 50-3).

Com o propósito de inserir uma lista de amplitudes relativas dos parciais harmônicos, usamos o comando (GEOGEBRA, 2022, p. 59)

Sequência(<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>)

²² A demonstração do Teorema de Weierstrass pode ser encontrada no livro do Figueiredo (2005, p. 78-80).

²³ ms é abreviação de milissegundos.

de maneira que:

- <Expressão>: é a expressão que fornece a sequência dependendo da variável;
- <Variável>: um número natural n ;
- <Valor Inicial>: primeiro valor atribuído a variável. Neste caso, $n = 1$.
- <Valor Final>: último valor atribuído a n . Neste caso, $n = N \in [1, 200]$.

Com o objetivo de construir os espectros de Fourier utilizamos o comando

DiagramaDeHastes(<Lista de abscissas>, < Lista de ordenadas >)

para gerar um gráfico de número harmônico versus amplitude (SOUZA, 2017, p. 51) de modo que:

- <Lista de abscissas>: é a Sequência($n, n, 1, N$);
- <Lista de ordenadas>: é a Sequência($A(n), n, 1, N$).

Por fim, criamos dois objetos com o símbolo “Tocar” com o propósito de Tocar o Som produzido pelas formas de onda $s_N(t)$ em vermelho e forma de onda ‘ideal’ $s(t)$ em azul e comparar visualmente e auditivamente durante 0,5 segundo (tempo escolhido).

O conteúdo harmônico das formas de onda é um ponto de partida útil para examinar esta relação entre forma e percepção (RUSS, 2009, p. 147).

Matematicamente e harmonicamente, a forma de onda “mais simples” é a onda senoidal. A onda senoidal é considerada a “mais simples” porque soa limpa e pura com apenas um único harmônico em seu espectro (RUSS, 2009, p. 147). Na perspectiva de Miletto et al (2004, p. 5), alguns sons que se assemelham ao da onda seno são o som do assovio ou o som da flauta. Vejamos as outras formas de onda e seus respectivos conteúdos harmônicos.

Onda Triangular

Adicionando pequenas quantidades de parciais harmônicos ímpares à onda senoidal e organizando suas amplitudes para serem inverso dos mesmos ímpares ao quadrado produz na saída uma forma de onda triangular, que possui harmônicos suficientes para impedir que soe tão puro quanto a onda senoidal, conforme ilustra a Figura 4.15.

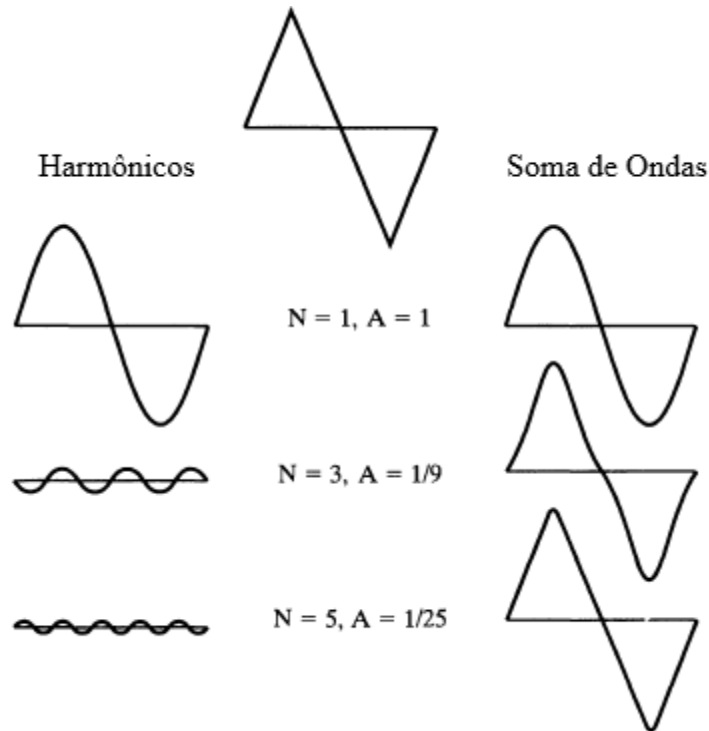
O sinal sonoro s_N sintetizado por esta forma de onda triangular é obtido pela soma

$$s_N(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{9} \cos(2\pi 3f_0 t) + \dots + \frac{1}{(2N-1)^2} \cos[2\pi(2N-1)f_0 t] \cdot$$

Normalizando o sinal e reescrevendo de maneira mais compacta, obtemos

$$s_N(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[2\pi(2n-1)f_0 t] \right]. \quad (4.15)$$

Figura 4.15 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda triangular que se têm a intenção de sintetizar.



Fonte: Adaptado de Berg e Stork (1982, p. 94).

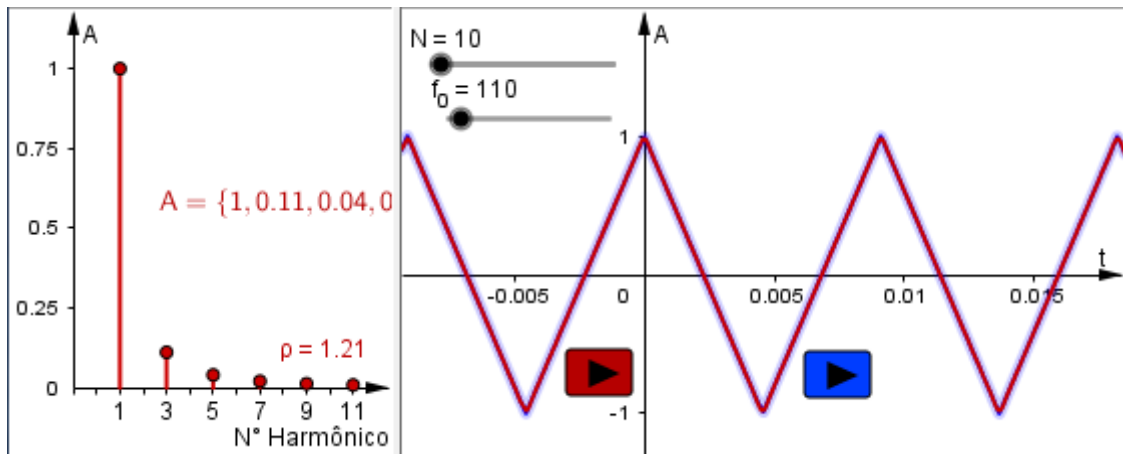
Quando $N \rightarrow \infty$, dizemos que a forma de onda do som digital $s_N(t)$ converge para uma onda triangular $s(t)$ de maneira ideal. A expansão da série para os primeiros termos é

$$s(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{9} \cos(2\pi 3f_0 t) + \frac{1}{25} \cos(2\pi 5f_0 t) + \frac{1}{49} \cos(2\pi 7f_0 t) + \dots \right].$$

A Figura 4.16 applet Síntese de Onda Triangular mostra a síntese aditiva dos 10 primeiros harmônicos para a onda triangular, podendo estender o valor de N para 200 harmônicos. No lado esquerdo, podemos ver o conteúdo harmônico. O espectro da onda triangular contém componentes que são harmônicos ímpares da fundamental. As amplitudes diminuem com o quadrado do número harmônico crescente. A maior parte da energia do sinal está nos harmônicos mais baixos. No lado direito, podemos visualizar as formas de ondas (azul: ideal e vermelho: aproximação) com controles deslizantes e botões Tocar.

A sensação produzida por uma forma de onda triangular é de um timbre “metálico” e “menos brilhante” (ROLLA; KESTENBERG; VELHO, 2017, p. 13).

Figura 4.16 – Applet Síntese de Onda Triangular²⁴.

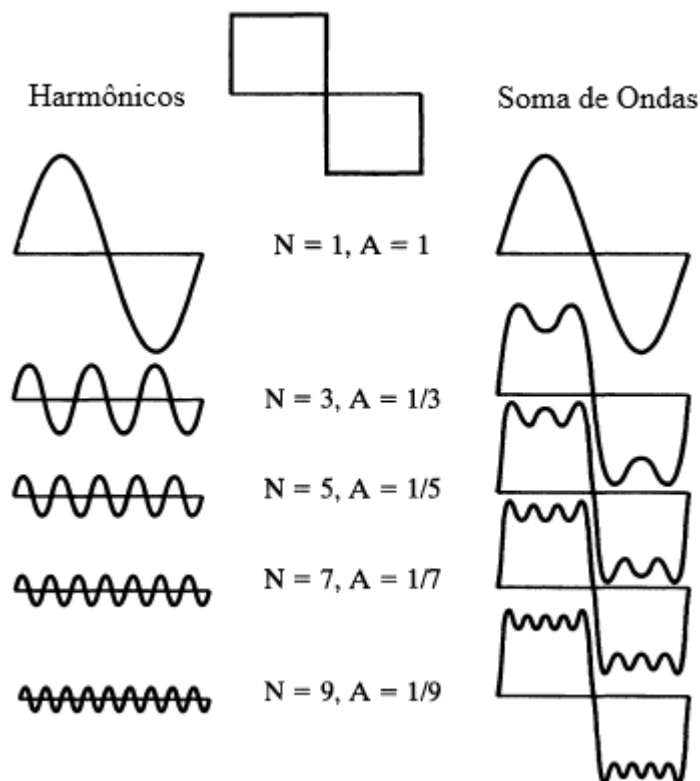


Fonte: Elaborado pelo autor.

Onda Quadrada

Adicionando pequenas quantidades de parciais harmônicos ímpares à onda senoidal e organizando suas amplitudes para serem inverso dos mesmos ímpares produz na saída uma forma de onda quadrada, conforme pode ser visualizado na Figura 4.17.

Figura 4.17 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda quadrada que se têm a intenção de sintetizar.



Fonte: Adaptado de Berg e Stork (1982, p. 95).

²⁴ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/dsubkc7e>>.

O sinal sonoro s_N sintetizado por esta forma de onda quadrada é obtido pela soma

$$s_N(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(2\pi 3f_0 t) + \dots + \frac{1}{2N-1} \text{sen}[2\pi(2N-1)f_0 t].$$

Normalizando o sinal e reescrevendo de maneira mais compacta, obtemos

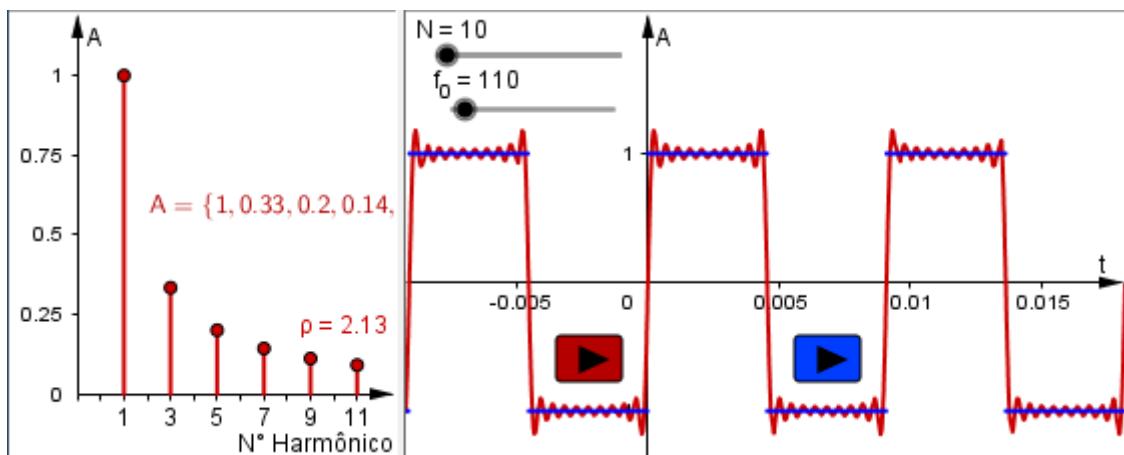
$$s_N(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}[2\pi(2n-1)f_0 t]}{2n-1} \right). \quad (4.16)$$

No limite, quando $N \rightarrow \infty$, dizemos que a forma de onda do som digital $s_N(t)$ converge para uma onda quadrada $s(t)$ de maneira ideal. A expansão da série para os primeiros termos é dada por

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\text{sen}(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(2\pi 3f_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(2\pi 5f_0 t) + \frac{1}{7} \text{sen}(2\pi 7f_0 t) + \dots \right).$$

A Figura 4.18 do applet Síntese de Onda Quadrada mostra a síntese aditiva dos 10 primeiros harmônicos, podendo estender para $N = 200$ harmônicos. No lado esquerdo, podemos ver o conteúdo harmônico. O espectro da onda quadrada contém componentes que são harmônicos ímpares da fundamental. As amplitudes diminuem com o aumento do número harmônico. No lado direito, podemos visualizar as formas de ondas (azul: ideal e vermelho: aproximação) com controles deslizantes e botões Tocar. Observe a rápida elevação e decaimento que ocorre nas extremidades deste formato de onda.

Figura 4.18 – Applet Síntese de Onda Quadrada²⁵.



Fonte: Elaborado pelo autor.

²⁵ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/tnqfs5yw>>.

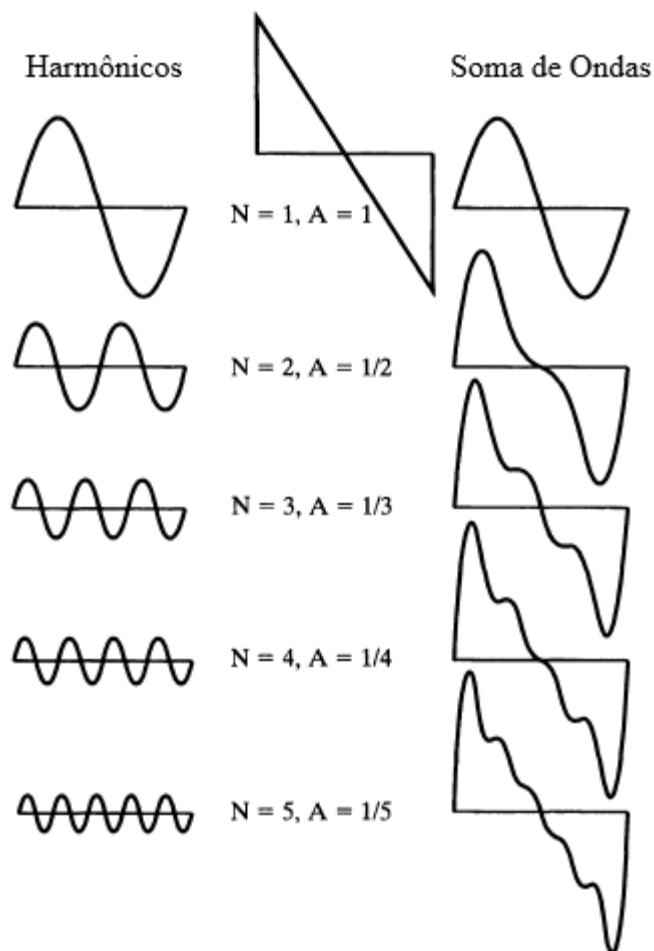
A sensação produzida por uma forma de onda quadrada é de um timbre “oco” (BERG e STORK, p. 100; RUSS, 2009, p. 147).

A produção de bordas quadradas em uma onda quadrada exigiria uma grande quantidade de harmônicos, mais acuradamente, um número infinito para uma onda quadrada “perfeita”. Conforme Russ (2009, p. 147-148), usar apenas alguns harmônicos pode produzir formas de onda que têm o suficiente do conteúdo harmônico para produzir o tipo correto de timbre, mesmo que a forma de onda possa não ser exatamente a esperada.

Onda Dente de Serra

Ao contrário das formas de onda anteriores, a onda dente de serra é criada adicionando pequenas quantidades de parciais harmônicos pares e ímpares à onda senoidal com amplitudes inversamente proporcionais, de maneira muito similar as notas da série harmônica, como pode ser visto na Figura 4.19.

Figura 4.19 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda dente de serra que se têm a intenção de sintetizar.



Fonte: Adaptado de Berg e Stork (1982, p. 95).

O sinal sonoro s_N sintetizado por esta forma de onda dente de serra é obtido pela soma

$$s_N(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi 2f_0 t) + \dots + \frac{1}{N} \text{sen}(2\pi N f_0 t) \cdot$$

Normalizando e escrevendo de maneira mais compacta, obtemos

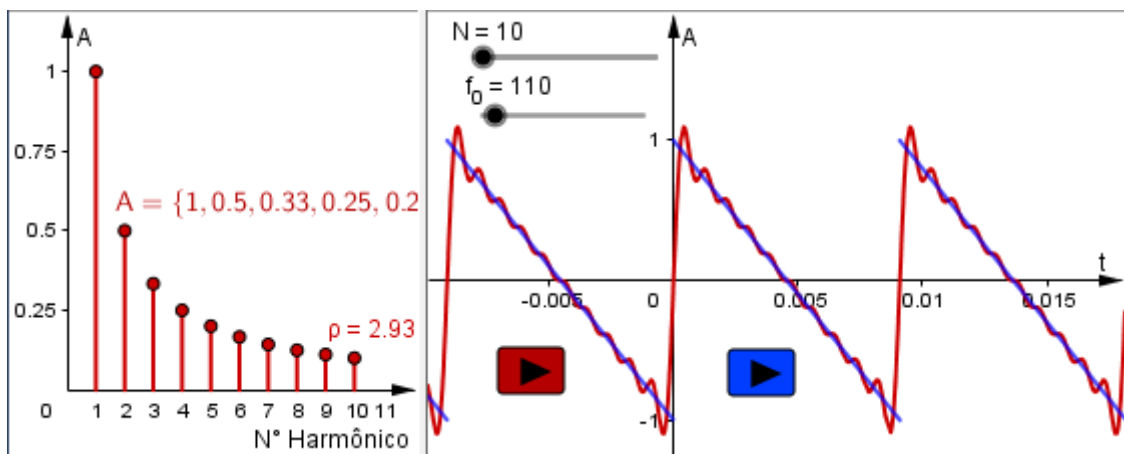
$$s_N(t) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \text{sen}(2\pi n f_0 t) \right]. \quad (4.17)$$

No limite, quando $N \rightarrow \infty$, dizemos que a forma de onda do áudio digital $s_N(t)$ converge para a onda dente de serra $s(t)$ de maneira ideal. A expansão da série para os primeiros termos é dada por

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \left(\text{sen}(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi 2f_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(2\pi 3f_0 t) + \frac{1}{4} \text{sen}(2\pi 4f_0 t) + \dots \right).$$

A Figura 4.20 do applet Síntese de Onda Dente de Serra mostra a síntese aditiva dos 10 primeiros harmônicos, podendo estender para $N = 200$ harmônicos. No lado esquerdo, podemos ver um conteúdo harmônico rico. O espectro da onda dente de serra contém componentes que são harmônicos múltiplos inteiros da fundamental. As amplitudes diminuem com o aumento do número harmônico. No lado direito, podemos visualizar as formas de ondas (azul: ideal e vermelho: aproximação) com controles deslizantes e botões Tocar.

Figura 4.20 – Applet Síntese de Onda Dente de Serra²⁶.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

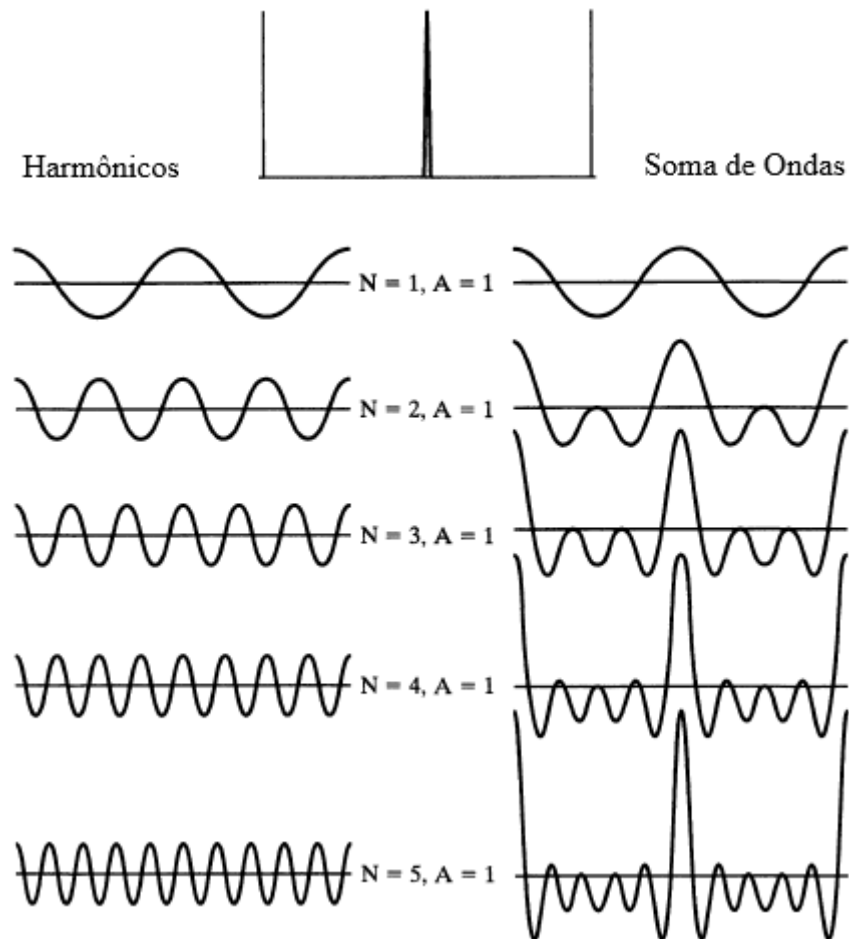
²⁶ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/agfcvexd>>.

A sensação produzida por esta forma de onda dente de serra é de um timbre “metálico” e “mais brilhante” visto que possui um conteúdo harmônico rico (MILETTO et al, p. 5; ROLLA; KESTENBERG; VELHO, 2017, p. 13; RUSS, 2009, p. 147).

Onda Trem de Impulso

Ao contrário das formas de onda anteriores, a onda trem de impulso é criada adicionando quantidades de parciais harmônicos pares e ímpares à onda senoidal com amplitudes de mesma magnitude unitária, conforme pode ser visto na Figura 4.21.

Figura 4.21 – O lado esquerdo são sucessivos parciais harmônicos. O lado direito é a soma dos sucessivos harmônicos. O topo central é a forma de onda trem de impulso que se têm a intenção de sintetizar.



Fonte: Adaptado de Berg e Stork (1982, p. 96).

O sinal sonoro s_N sintetizado por esta forma de onda trem de impulso é obtido pela soma de parciais harmônicos de mesma amplitude de maneira que

$$s_N(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi 2f_0 t) + \dots + \cos(2\pi N f_0 t).$$

Normalizando e escrevendo de maneira mais compacta, obtemos

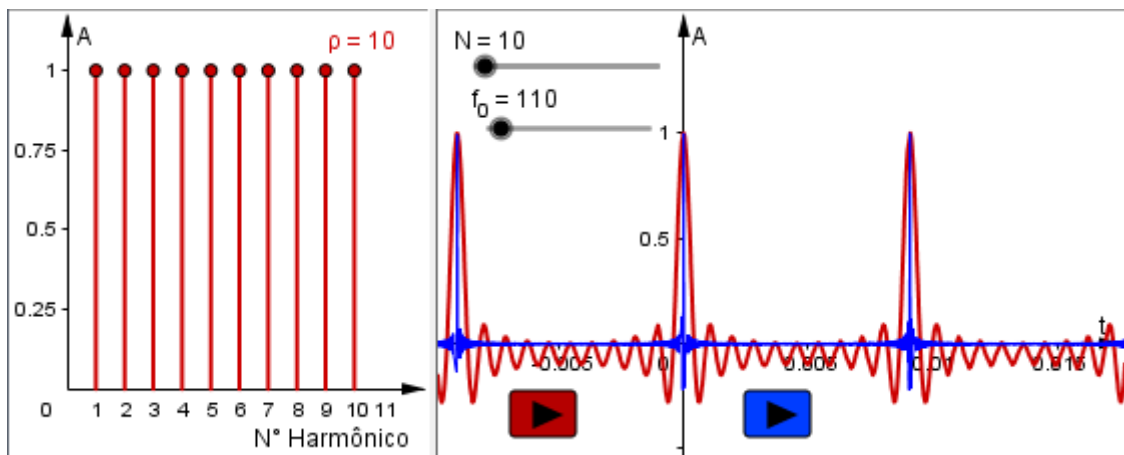
$$s_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n f_0 t) \cdot \quad (4.18)$$

Quando $N \rightarrow \infty$, dizemos que a forma de onda do som digital $s_N(t)$ converge para uma onda trem de impulso $s(t)$ de maneira ideal. A expansão da série para os primeiros termos é dada por

$$s(t) = \frac{1}{N} (\cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi 2f_0 t) + \cos(2\pi 3f_0 t) + \cos(2\pi 4f_0 t) + \dots) \cdot$$

A Figura 4.22 do applet Síntese de Trem de Impulso mostra a síntese aditiva dos 10 primeiros harmônicos, podendo estender para $N = 200$ harmônicos. No lado esquerdo, podemos ver o conteúdo harmônico rico. O espectro da onda trêm de impulso contém componentes que são harmônicos múltiplos inteiros da fundamental. As amplitudes permanecem constante com o aumento do número harmônico, o que indica bastante energia nos harmônicos superiores. No lado direito, podemos visualizar as formas de ondas (azul: ideal e vermelho: aproximação) com controles deslizantes e botões tocar.

Figura 4.22 – Applet Síntese de Trem de Impulsos²⁷.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A sensação deste caso extremo de formato de onda é de som “rouco” visto que possui um conteúdo harmônico rico e com bastante energia nos harmônicos superiores (BERG, 1982, p. 100; RUSS, 2009, p. 147).

²⁷ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/wsanykpc>>.

Uma correlação muito geral pode ser feita entre a estrutura harmônica, conforme observada no Espectro de Fourier, e a qualidade do som, ou timbre. A Tabela 4.1 mostra as amplitudes relativas de harmônicos presentes em cada forma de onda geométrica.

Tabela 4.1 – Amplitudes relativas de harmônicos presentes em ondas padrão.

Wave	Harmonic amplitudes										
	$N =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10, ...
Sine		1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0, ..., $N = 1$ only
Triangle		1,	0,	$\frac{1}{9}$,	0,	$\frac{1}{25}$,	0,	$\frac{1}{49}$,	0,	$\frac{1}{81}$,	0, ..., for odd N
Square		1,	0,	$\frac{1}{3}$,	0,	$\frac{1}{5}$,	0,	$\frac{1}{7}$,	0,	$\frac{1}{9}$,	0, ..., for odd N
Sawtooth (ramp)		1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{10}$, ..., for all N
Pulse train		1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, ..., equal for all N

Fonte: Berg e Stork (1982, p. 96).

A partir deste estudo dos sons dos instrumentos e seus espectros, vemos que há uma correlação entre os sons que soam puros e seus espectros de Fourier simples, que podem conter um harmônico. Também existe uma correlação entre sons ricos e complexos e seus espectros de Fourier, que contêm um grande número de harmônicos. Segundo Berg e Stork (1982, p. 104) também se percebe que os sons que contêm certos tipos de estrutura harmônica – caracterizados, por exemplo, por harmônicos ímpares apenas – podem ser identificados por um timbre particular.

Ao visualizar e escutar sons com timbres diferentes, nos applets GeoGebra, nota-se que as formas de onda diferem entre si. Conforme Miletto et al (2004, p. 4) e por verificação empírica do autor, em geral, formas de ondas arredondadas produzem um timbre mais suave (senoidal e triangular) enquanto que as formas de ondas ponteadas (quadrada, dente de serra e tem de impulso) fornecem um timbre mais penetrante e estridente. Além disso, pelas aproximações realizadas, percebe-se que quanto maior o número de harmônicos N mais estridente será o seu som.

4.5.4 Análise de Fourier

Joseph Fourier contribuiu com um *insight* significativo para o nosso conhecimento das formas de onda em geral e da música em particular:

Qualquer vibração periódica, por mais complicada que pareça, pode ser observada como um conjunto de senoides cujas frequências são harmônicos de uma frequência fundamental, com amplitudes e fases particulares (LOY, 2007, v. 2, p. 104).

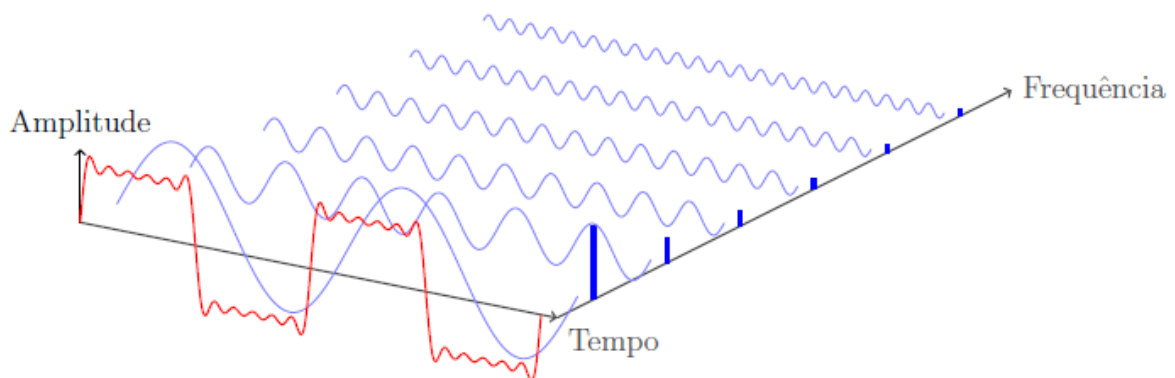
Este processo é chamado análise de Fourier, ou *análise de espectro*. A análise de Fourier fornece uma maneira de medir as forças dos componentes individuais de um sinal harmônico. A análise começa com um sinal $s(t)$ no domínio do tempo e o interpreta como uma espécie de receita que descreve as componentes espectrais e suas forças que devem ser combinadas para produzir o sinal $F(\omega)$ no domínio da frequência correspondente (LOY, 2007, v.2 , p. 104).

A análise de Fourier é uma família de técnicas matemáticas, todas baseadas na decomposição de formas de ondas ou sinais. Dado o sinal no domínio do tempo, o processo de cálculo do domínio da frequência é chamado de decomposição, análise ou **transformada de Fourier [TF]** (SMITH, 1997, p. 147).

Segundo Loy (2007, v. 2, p. 104), análise e síntese de Fourier são denominadas de par de transformadas porque (idealmente) a onda espectral criada pela síntese de Fourier pode ser perfeitamente analisada por análise de Fourier e vice-versa, sem perda de informação.

Observe na Figura 4.23 que a análise de Fourier recebe um sinal (em vermelho) no domínio do tempo e o converte em uma representação espectral equivalente (em azul) no domínio da frequência enquanto que a síntese de Fourier toma um espectro (em azul) e o converte em um sinal equivalente (em vermelho) no domínio do tempo. Assim, para cada frequência, existe um *coeficiente de Fourier* que dita a amplitude do seno e/ou cosseno relacionado a essa frequência. As representações no domínio do tempo e no domínio da frequência são equivalentes na transformação de Fourier e apresentam as mesmas informações.

Figura 4.23 – Análise/Síntese de uma Forma de Onda Quadrada em 6 harmônicos ímpares.



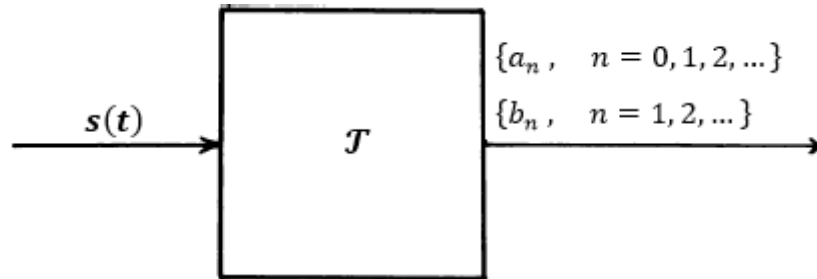
Fonte: Elaborado pelo autor.

O problema da *determinação dos coeficientes de Fourier* de uma função pode ser interpretado na linguagem de sistema (ou caixa) conforme ilustra a Figura 4.24. O papel da caixa designada por \mathcal{T} é o cálculo dos coeficientes de Fourier da função de entrada, enquanto a

saída é a coleção dos coeficientes de Fourier desde que $s(t)$ seja uma função integrável T_0 - periódica no intervalo $[0, T_0]$:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right) dt \quad (4.8) \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \text{sen}(\omega_n t) dt. \quad (4.9)$$

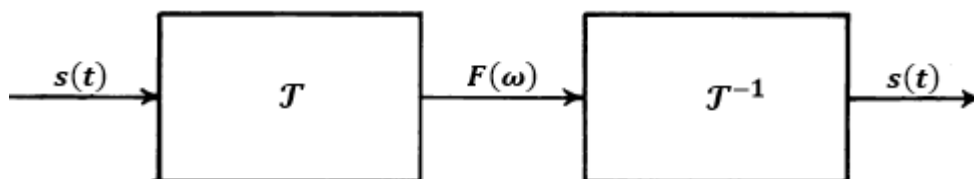
Figura 4.24 – Transformada de Fourier na linguagem de sistema.



Fonte: Adaptado de Figueiredo (2005, p. 194).

A Figura 4.25 mostra o sistema \mathcal{J} , conhecido como **Análise de Fourier**, que transforma uma função dependente do tempo $s(t)$ em uma função dependente da frequência $F(\omega)$, enquanto que o seu sistema inverso \mathcal{J}^{-1} , denominado de **Síntese de Fourier**, leva uma função $F(\omega)$ para uma função $s(t)$ novamente. O sistema inverso \mathcal{J}^{-1} consiste em, dados $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ e/ou $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, recompor a função $s(t)$ que tenha por coeficientes de Fourier esses números. Assim, se $F(\omega) = \mathcal{J}\{s(t)\}$, temos $s(t) = \mathcal{J}^{-1}\{F(\omega)\}$ (FIGUEIREDO, p. 193-194, 2005).

Figura 4.25 – Transformada de Fourier (Direta e Inversa).



Fonte: Adaptado de Figueiredo (2005, p. 193).

Definição 4. 1: Seja $s(t)$ uma função real (ou complexa), define-se a transformada de Fourier de $s(t)$ por:

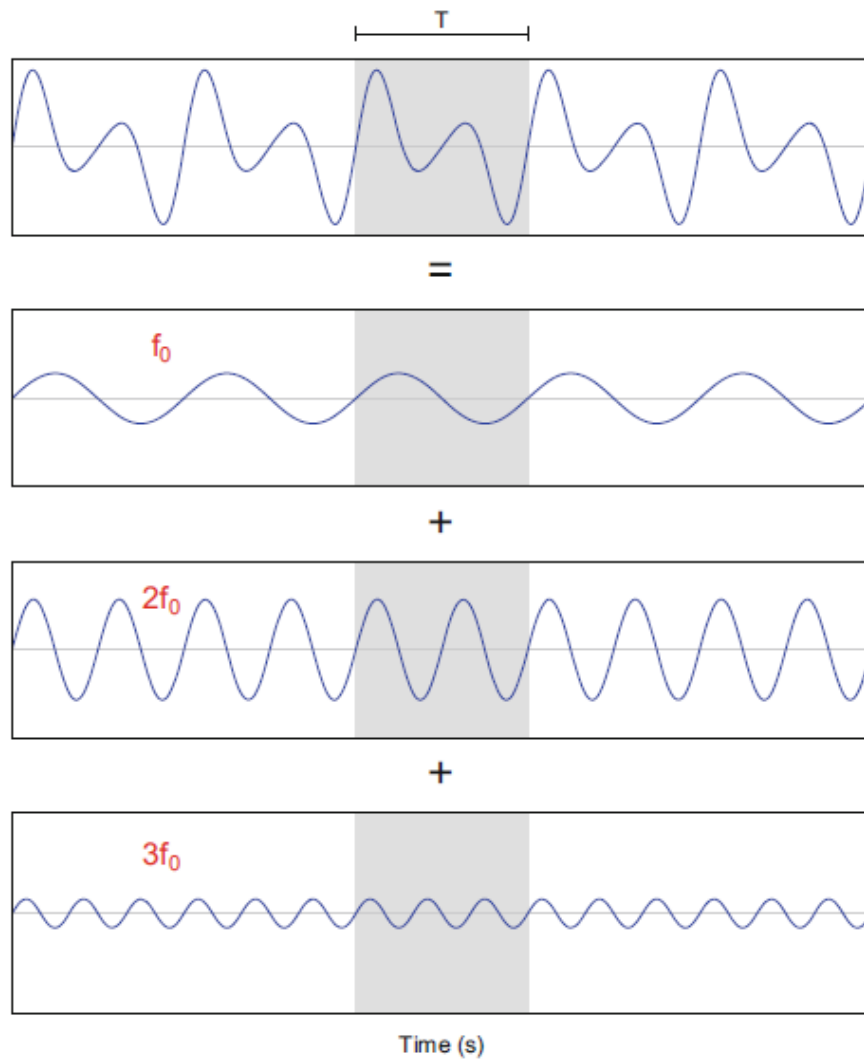
$$\mathcal{J}\{s(t)\} = A(\omega) - iB(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \text{sen}(\omega t) dt. \quad (4.19)$$

Ou na forma exponencial, como (SAUTER e AZEVEDO, 2020, p. 46):

$$\mathcal{T}\{s(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4.20)$$

Aqui, $A(\omega)$ e $B(\omega)$ ou $F(\omega)$ correspondem aos *coeficientes de Fourier*. A transformada de Fourier é comumente usada em análise sonora para produzir o *espectro de frequências*. O espectro de um acorde de instrumento musical, por exemplo, pode ser expresso como as amplitudes das suas notas constituintes. O espectro de frequências é obtido calculando o módulo da TF, isto é, $|F(\omega)|$ (SUEUR, 2018, p. 224, p. 244).

Figura 4.26 – Princípio da Transformada de Fourier. Qualquer forma de onda complexa pode ser decomposta em uma soma de formas de onda simples. Aqui, a forma de onda superior com um período T é decomposta na adição de três formas de onda simples ($n = 3$) relacionadas por uma frequência fundamental f_0 .



Fonte: Sueur (2018, p. 215).

A transformada de Fourier é, portanto, uma ponte construída entre o domínio do tempo e o domínio da frequência pois decompõe a forma de onda complexa $s(t)$ em adição de *parciais*

harmônicos $x_n(t) = A_n \text{sen}(2\pi n f_0 t - \phi_n)$ a partir do seu período conforme pode ser visualizado na Figura 4.26.

4.5.5 Síntese de Fourier

Fourier observou que também funciona ao contrário:

Qualquer vibração periódica, por mais complicada que pareça, pode ser construída a partir de senoides cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência fundamental, escolhendo as amplitudes e fases adequadas (LOY, 2007, v. 2, p. 103).

Este processo é denominado síntese de Fourier, ou *síntese espectral*. A síntese de Fourier nos permite criar uma forma de onda a partir de uma especificação das intensidades de seus vários harmônicos. Isto é, de fato, tudo que um espectro realmente é: uma especificação (na forma de uma função ou lista) das forças da forma de onda dos harmônicos. Se $s(t)$ representa uma forma de onda no domínio do tempo, onde t é o tempo, então seu espectro de domínio de frequência correspondente é denotado $F(\omega)$, onde ω é a frequência angular. A síntese de Fourier começa com um espectro $F(\omega)$ e o interpreta como uma receita que descreve as forças dos harmônicos que devem ser combinadas para produzir o sinal $s(t)$ correspondente no domínio do tempo (LOY, 2007, v. 2, p. 103).

Um grande número de vibrações é periódica ou quase periódica, incluindo todas as alturas (notas) de instrumentos musicais. Segundo Loy (2007, v. 2, p. 103), “todas as senoides são periódicas e as senoides são os blocos de construção a partir dos quais qualquer vibração arbitrária (periódica) pode ser construída pela síntese de Fourier”.

Para produzir o sinal periódico $s(t)$ utilizando a síntese de Fourier basta tomar as amplitudes $\{a_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ e/ou $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ especificadas. Assim, o som $s(t)$ pode ser *associado* a uma série de Fourier

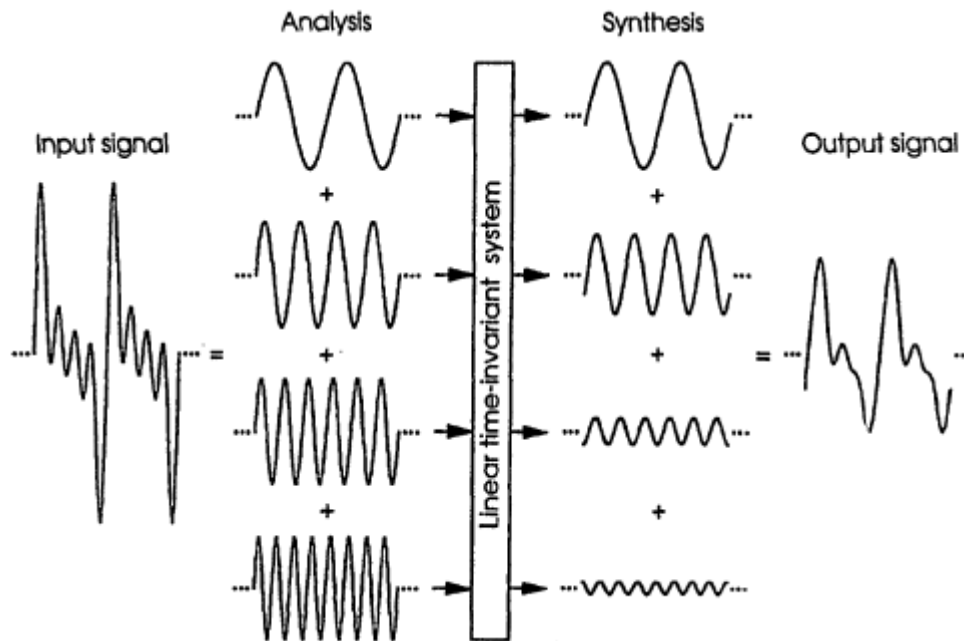
$$s(t) \sim F[s](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \text{sen } \omega_n t] \quad (4.7)$$

onde $F[s](t)$ denota a série de Fourier da função $s(t)$ (CAPELAS e VAZ JR, 2016, p. 4).

As amplitudes e frequências das funções periódicas podem ser obtidas a partir da análise de sons. O nome *recomposição de Fourier* às vezes é usado para descrever a síntese a partir da análise, porque pode ser pensado como a reconstituição dos componentes de Fourier de um som, variando no tempo (DODGE e JERSE, 1985, p. 88-89).

A coluna intitulada análise da Figura 4.27 mostra as componentes senoidais constituintes da onda de entrada original. Em seguida, elas são colocadas em um sistema linear que tem efeitos diferentes para cada uma das quatro senoides de frequências diferentes. O sinal de saída na coluna da extrema direita é obtido quando essas quatro senoides são somadas em pontos correspondentes no tempo.

Figura 4.27 – Recomposição de Fourier para quatro componentes.



Fonte: Rosen e Howell (2011, p. 68).

As técnicas de síntese linear, como é o caso da síntese aditiva ou de Fourier, geralmente podem ser usadas para reproduzir um som que é idêntico ao original. Conforme Dodge e Jerse (1985, p. 88-89), “a síntese aditiva provou ser capaz de produzir tons que são indistinguíveis de tons reais por músicos habilidosos”. A transformada inversa de Fourier (TIF), por exemplo, pode ser utilizada para reproduzir qualquer forma de onda periódica (LOY, 2007, v. 2, p. 363).

Definição 4. 2: Seja $F(\omega)$ uma função real (ou complexa), define-se a transformada inversa de Fourier $s(t)$ de $F(\omega)$ por:

$$s(t) = \mathcal{J}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega. \quad (4.21)$$

Ou na forma exponencial, como (SAUTER e AZEVEDO, 2020, p.47):

$$s(t) = \mathcal{J}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.22)$$

A integral de Fourier pode ser considerada como o limite formal da série de Fourier, pois o período tende a infinito (LIGHTHILL, 1959, p. 8).

A transformada inversa de Fourier é a maneira de voltar do domínio da frequência para o domínio do tempo. A TIF é, portanto, uma maneira de recuperar o sinal de tempo original $s(t)$ de sua transformação no domínio da frequência.

Alterações no domínio da frequência, como filtragem, podem ser aplicadas antes para processar a inversa, de modo que o som original possa ser modificado usando a variação de parâmetros. Isso abre possibilidades importantes para o *design de som* (SUEUR, 2018, p. 240).

4.5.6 Análise e Síntese de Fourier da Onda Quadrada

Exemplo: Determine a série de Fourier associada a onda quadrada definida (na sua forma analítica) por

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

com $s(t + \pi) = s(t)$.

O período desta onda quadrada é $T_0 = \pi$ e sua frequência angular fundamental é $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$. O cálculo dos coeficientes de Fourier pode ser obtido pelas fórmulas de Euler - Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(0) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(t) dt = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} 1 dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 1 dt \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(t) \cos 2nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos 2nt dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos 2nt dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n} (\sen 2nt) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n} (\sen 2nt) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{n\pi} [0 - 0] = 0 \end{aligned}$$

Note que $s(t)$ é uma função ímpar no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ sendo simétrica na origem.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \operatorname{sen}(\omega_n t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(t) \operatorname{sen} 2nt dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2nt dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} 2nt dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n} (-\cos 2nt) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n} (\cos 2nt) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} [(1 - \cos n\pi) + \cos 2n\pi - \cos n\pi] = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos n\pi]
 \end{aligned}$$

Como $\cos n\pi = (-1)^n$ segue que $b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$. Isto era esperado por causa da forma de onda ser quadrada (conforme a Subseção 4.5.3).

Substituindo os valores b_n , a expansão da série fica

$$s(t) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} 2t + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 6t + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 10t + \dots$$

Reescrevendo na forma de somatório obtemos

$$s(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(4n-2)t]}{2n-1}.$$

Dessa maneira, podemos tomar uma série de Fourier finita dada por

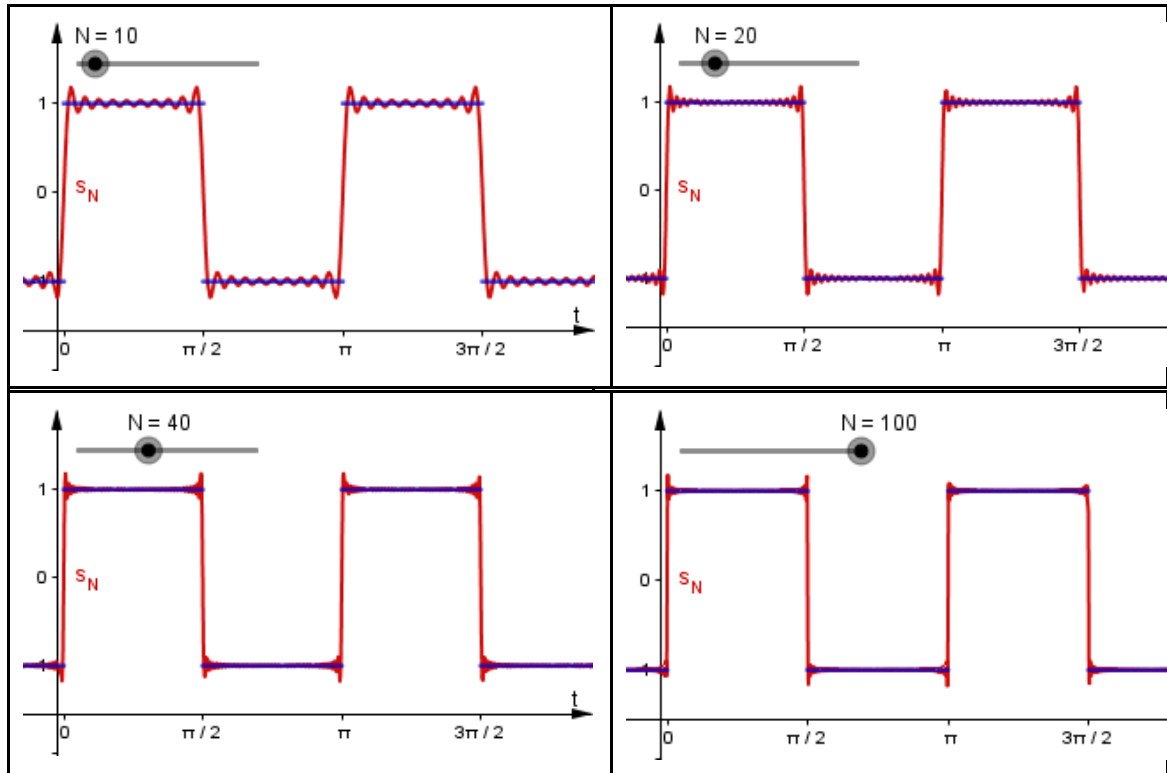
$$s_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\operatorname{sen}[2(2n-1)t]}{2n-1}$$

e aplicar a técnica de síntese aditiva para tentar reconstruir a onda quadrada, conforme mostram os traçados na Figura 4.28.

Por ter um conteúdo harmônico rico (ou seja, várias componentes harmônicas) é difícil realizar aproximações apuradas da onda “quadrada ideal” em azul na forma analítica $s(t)$. Isso acontece devido ao fato interessante que podemos observar na Figura 4.28 que são essas

oscilações pulsantes que aparecem na função aproximante $s_N(t)$ em vermelho, o qual é conhecido como *Fenômeno de Gibbs* (OLIVEIRA e TYGEL, 2005, p. 205; OLIVEIRA e VAZ JR, 2016, p. 40). Tal fenômeno ocorre sempre que se têm saltos na função $s(t)$ como podemos ver em $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$ da Figura 4.28. Nessas abscissas, o valor das somas parciais da Série de Fourier $s_N(t)$ se distancia do valor correspondente da função na forma analítica.

Figura 4.28 – Aproximações da onda quadrada para N parciais harmônicos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa maneira, é muito importante destacar que, os estudos de convergências de Séries Fourier e suas aplicações possibilitam desenvolver estruturas importantes para obtenção de aproximações bem acuradas de amostras de sinais sonoros contribuindo, portanto, com a compactação de áudio com baixas perdas de informações.

4.5.7 Recomposição do Áudio Digital

Com a introdução dos *compact discs* ou CD, o meio digital se tornou a forma mais comum de consumo de música no mundo. Sua concepção técnica foi feita com a intenção de se obter uma qualidade sonora semelhante as fitas magnéticas de alta qualidade, utilizadas dentro dos estúdios de gravação da época (IEC, 1999). Apesar dos CDs possuírem qualidade excepcional, o espaço ocupado em termos de gravação digital era alto, principalmente para os

computadores do final da década de 80. Em meados da década de 90, com a popularização da internet e com o aumento do poder computacional dos computadores caseiros, surgiu a necessidade de compactar os arquivos de áudio, principalmente para utilização em páginas da internet, pois devido a banda limitada da época, não era viável, em questão de tempo de *download*, o envio de sons através da rede.

Uma solução para esse problema foi a utilização da análise e da síntese de Fourier vistas nas Subseções 4.5.4 e 4.5.5 anteriores. Com esta recomposição de Fourier podemos não só reproduzir uma determinada amostra de áudio, como também podemos realizar uma compactação com perdas, descartando alguns componentes do som. Outra aplicação da compactação com perdas é nas telecomunicações, onde sistemas como telefones celulares trabalham, como o intuito é transmitir apenas voz, a qualidade de reprodução não necessita de alta definição. Assim, uma perda de qualidade é aceitável e a redução na quantidade de dados enviados impacta profundamente na infraestrutura das companhias de telefonia, uma vez que uma alta qualidade de transmissão seria economicamente inviável em alguns casos.

Para reduzir o tamanho do áudio, simplesmente reduzimos os números de coeficientes utilizado na síntese de som pela soma parcial da série de Fourier. Esta redução provoca uma perda de qualidade, cuja aceitabilidade dependerá da aplicação, sendo que no processamento de áudio, existem diversos requisitos à se levar em consideração e, na verdade, poderia haver um curso de graduação focado só nisso, por isso deixamos os detalhes como o teorema de Nyquist-Shannon, quantização, filtros entre outros. Tais assuntos, apesar de possuírem uma matemática interessante e que possui relação com as séries de Fourier, preferimos não incluir na discussão aqui, por desviar do foco do trabalho.

Para realizar os testes de compactação, foram utilizados dois arquivos como base, um contendo apenas voz, de duração de 1,5s e outro, um trecho de uma música instrumental de duração 30s. O áudio da voz foi gravado pelos autores e o formato utilizado foi o WAV sem compactação, com 16 bits de resolução e taxa de amostragem 44Khz, tentando se aproximar da qualidade de CD. A música utilizada foi um trecho de Hypnothis de Kevin MacLeod (2003), licenciada sobre a *Creative Commons*, também em formato WAV sem compactação 16 bits e 44KHz. Ambos os arquivos foram processados por um programa feito em linguagem de Python, mostrado no apêndice do trabalho.

Com os coeficientes das séries de Fourier a_n e b_n , as amostras de áudios foram reconstruídas utilizando síntese aditiva pelas somas parciais da série de Fourier, utilizando diferentes quantidades de coeficientes para cada um dos arquivos e salvos no mesmo formato

que as amostras. As Tabelas 4.2 e 4.3, mostram, para cada uma das amostras reconstruídas, o tamanho em bytes.

Tabela 4.2 – Tamanho do arquivo da amostra de voz de acordo com o N° de Coeficientes.

Amostra Voz (Duração: 1,5 s)	
Tamanho original 46,9 KiB (48.044 bytes)	
N° de Coeficientes	Tamanho
500	7,0 KiB (7.182 bytes)
750	7,6 KiB (7.827 bytes)
1000	7,8 KiB (7.967 bytes)
1500	9,0 KiB (9.255 bytes)
2000	9,7 KiB (9.922 bytes)
4000	12,3 KiB (12.602 bytes)
8000	17,5 KiB (17.884 bytes)
16000	21,6 KiB (22.112 bytes)
32000	24,6 KiB (25.174 bytes)

Fonte: Emídio et al (2020, p. 19).

Os arquivos foram gerados em um computador com sistemas de arquivos EXT4 e, como o tamanho do arquivo pode variar com tipo de formatação utilizada, os tamanhos dos arquivos podem variar um pouco de acordo com o tipo de formatação do disco rígido utilizada.

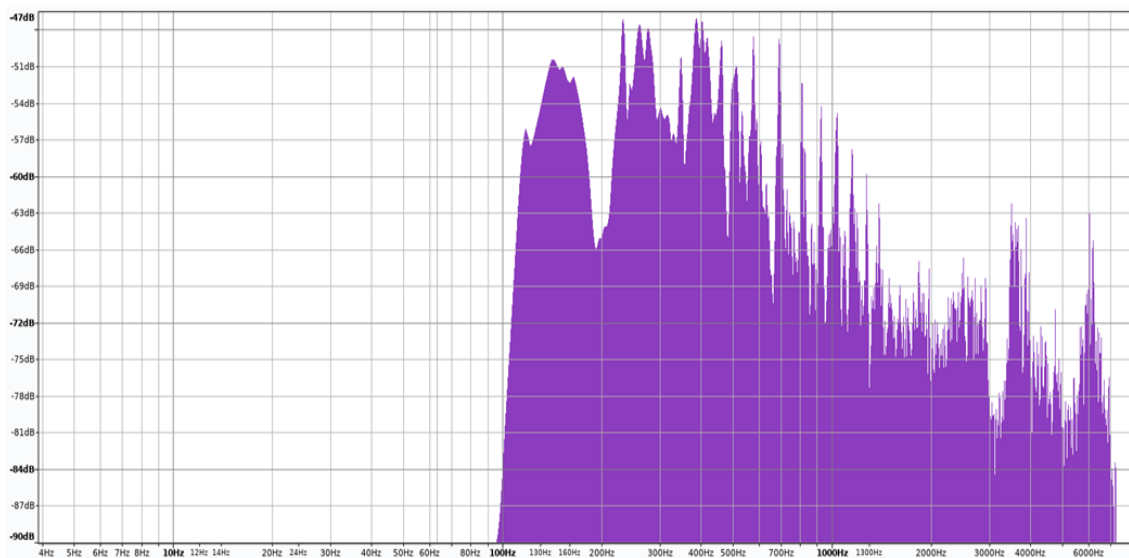
Tabela 4.3 – Tamanho do arquivo da amostra de música de acordo com o N° de Coeficientes.

Amostra Música (Duração: 5 s)	
Tamanho original 431,3 KiB (441.642 bytes)	
N° de Coeficientes	Tamanho
500	49,6 KiB (50.758 bytes)
750	56,3 KiB (57.610 bytes)
1000	61,6 KiB (63.092 bytes)
1500	70,5 KiB (72.208 bytes)
2000	71,6 KiB (73.280 bytes)
4000	74,7 KiB (76.491 bytes)
8000	88,6 KiB (90.763 bytes)
16000	101,2 KiB (103.594 bytes)
32000	125,1 KiB (128.116 bytes)

Fonte: Emídio et al (2020, p. 19).

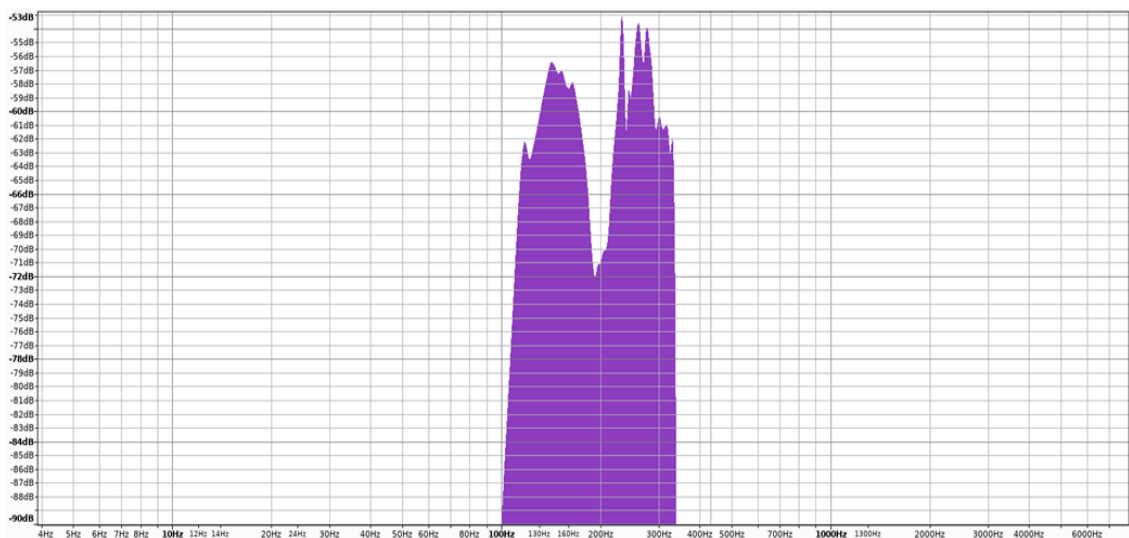
A perda de qualidade foi bem notada, principalmente quando utilizado um número baixo de coeficientes, mas como o termo qualidade de áudio é relativo à percepção, será mostrada a análise espectral de cada um dos arquivos para obter um parâmetro objetivo das mudanças no áudio. Com base em Smith (1997, p. 169), foi escolhida a análise espectral, o qual afirma que para seres humanos, a distribuição de frequências é a mais compatível com a percepção auditiva. As Figuras de 4.29 a 4.32 mostram os espectros das amostras de voz e as Figuras de 4.33 a 4.36 mostram os espectros das amostras de música.

Figura 4.29 – Espectro da amostra de voz original.



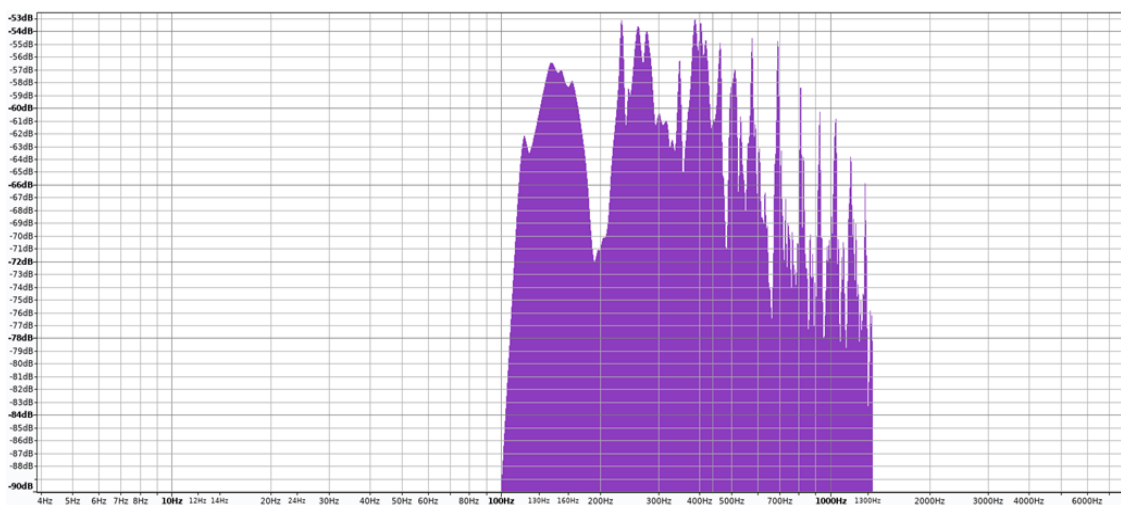
Fonte: Emídio et al (2020, p. 20).

Figura 4.30 – Espectro reconstruído da voz com 500 coeficientes.



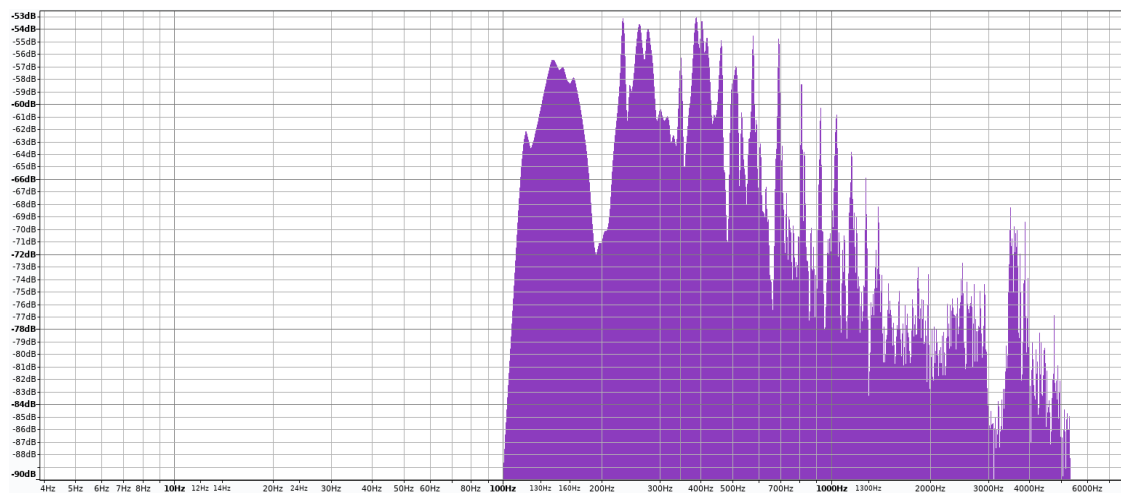
Fonte: Emídio et al (2020, p. 21).

Figura 4.31 – Espectro reconstruído da voz com 2000 coeficientes.



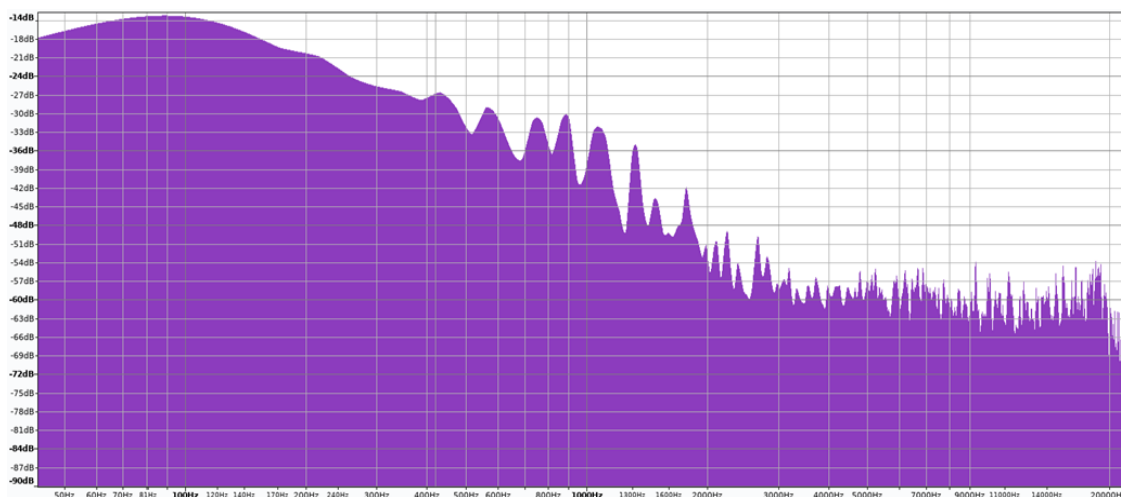
Emídio et al (2020, p. 23).

Figura 4.32 – Espectro reconstruído da voz com 8000 coeficientes.

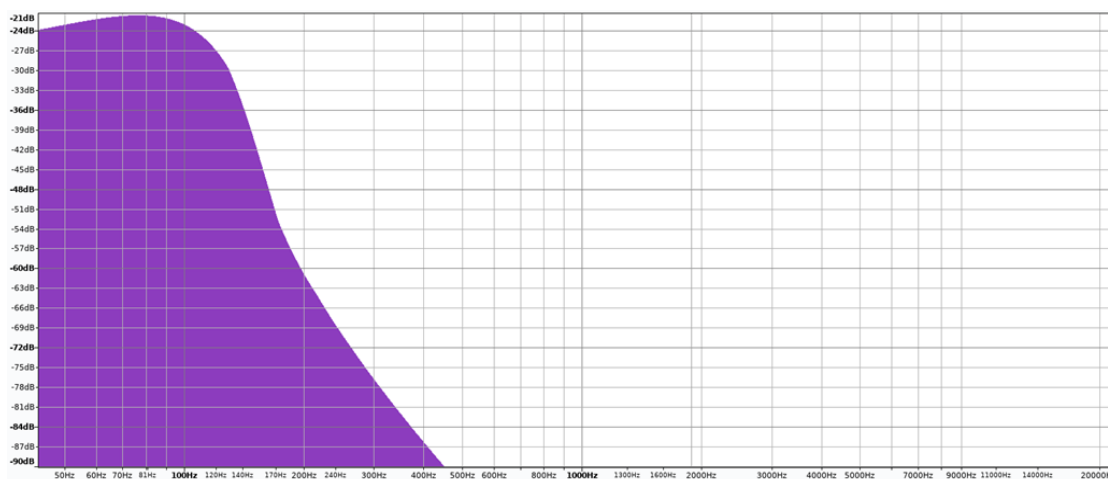


Fonte: Emídio et al (2020, p. 24).

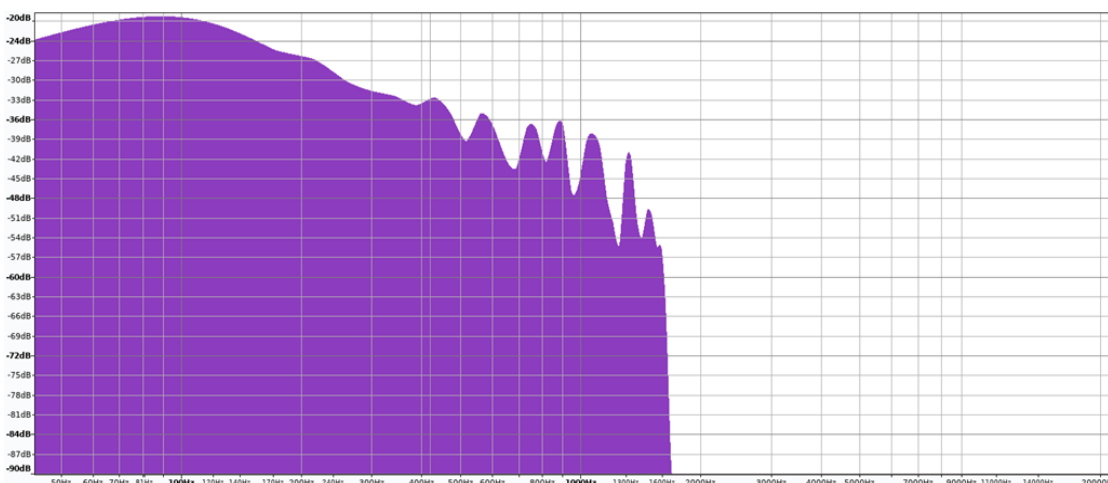
Figura 4.33 – Espectro da amostra de música original.



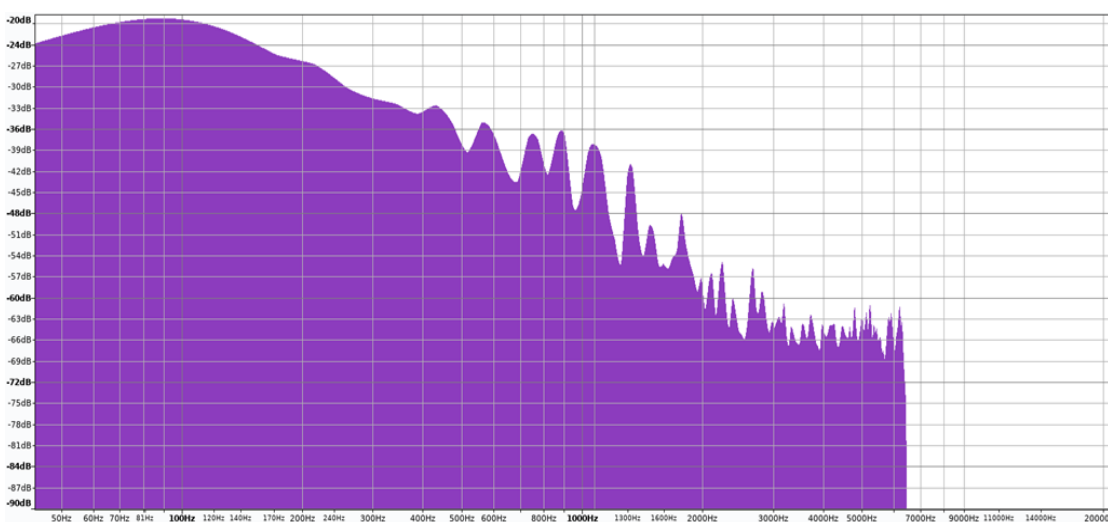
Fonte: Fonte: Emídio et al (2020, p. 25).

Figura 4.34 – Espectro reconstruído da música com 500 coeficientes.

Fonte: Emídio et al (2020, p. 26).

Figura 4.35 – Espectro reconstruído da música com 8000 coeficientes.

Fonte: Emídio et al (2020, p. 28).

Figura 4.36 – Espectro reconstruído da música com 32000 coeficientes.

Fonte: Emídio et al (2020, p. 29).

Observando o espectro da gravação da amostra de voz, percebe-se que a maior concentração do espectro vai até a frequência próxima de 8KHz. Fator interessante a se notar é que a utilização de um número baixo de coeficientes atua como um filtro passa baixa, ou seja, quanto maior o número de coeficientes utilizados para a reconstrução do áudio, maior é a quantidade das frequências representadas. Estes procedimentos de eliminação de frequências servem de base para algoritmos de compressão de áudio modernos, como o MP3 e WMA, obviamente que esses arquivos possuem muito mais procedimentos e informações além da análise das frequências, porém sua discussão foge ao escopo deste trabalho.

4.6 Síntese por Modulação

Conforme Dodge e Jerse (1985, p. 90), **modulação** é a alteração da amplitude, fase ou frequência de um oscilador em acordo com outro sinal. A modulação tem sido usada por muitos anos em comunicações de rádio para transmitir informações de forma eficiente. Músicos exploram várias técnicas de modulações em música eletrônica para criar sons distintos de forma apropriada.

O oscilador que está sendo modulado é chamado de oscilador da portadora. Se fosse executado sem modulação, ele geraria uma forma de onda contínua chamada **onda portadora** (sinal de frequência mais alta). Quando a modulação é aplicada, a onda portadora é alterada de alguma forma. As mudanças ocorrem em simpatia com o **sinal modulante** (sinal de frequência mais baixa), de modo que a saída do oscilador da portadora pode ser pensada como uma combinação dos dois sinais. A natureza desta combinação depende sobre a técnica de modulação usada e será examinada a seguir (BERG, 1982, p. 122; DODGE e JERSE, 1985, p. 90).

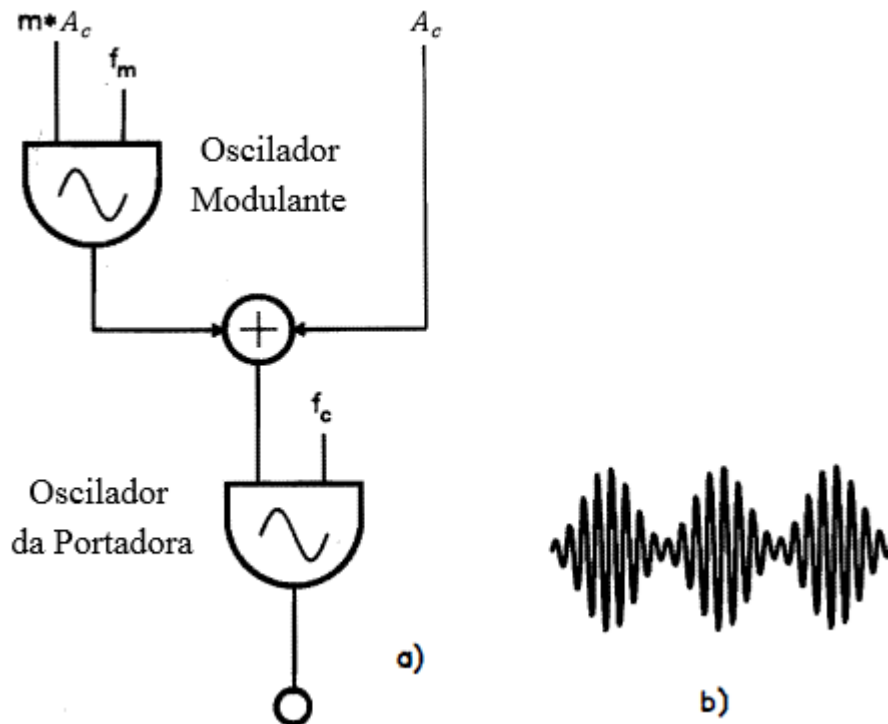
Os componentes espectrais de um sinal modulado são classificados em dois tipos: *componentes da portadora e bandas laterais*. A frequência de uma componente da portadora é determinada apenas pela frequência do oscilador da portadora. A frequência de uma banda lateral é determinada tanto pela frequência da portadora quanto pela frequência modulante (DODGE e JERSE, 1985, p. 90).

4.6.1 Modulação de Amplitude (AM)

A modulação de amplitude (AM) é uma técnica que varia a amplitude instantânea de um sinal, geralmente de maneira periódica (LOY, 2007, v. 2, p. 384).

O diagrama da Figura 4.37 mostra um instrumento básico que implementa a modulação de amplitude. O oscilador da portadora tem uma frequência constante f_c e o oscilador da modulante uma frequência f_m . Para este exemplo, a forma de onda de cada oscilador é uma senoide. A saída do oscilador modulante é adicionada a um valor que expressa a amplitude A_c do oscilador da portadora que teria, se não houvesse modulação. A amplitude do oscilador

Figura 4.37 – Instrumento a) que implementa a modulação de amplitude e sua forma de onda de saída b).



Fonte: Adaptado de Dodge e Jerse (1985, p. 91).

modulante é expressa como uma proporção da amplitude não modulada do oscilador da portadora, isto é, mA_c . Esta proporção denotada pela variável m , é chamada de *índice de modulação*. Desta forma, a amplitude do oscilador da portadora é controlada dinamicamente pelo oscilador modulante (DODGE e JERSE, 1985, p. 90; LOY, 2007, v. 2, p. 384).

O sinal AM, na saída do instrumento a), pode ser modelado por uma combinação

$$s_{AM}(t) = [A_c + x_m(t)] \text{sen}(2\pi f_c t)$$

das ondas portadora $x_c = A_c \text{sen}(2\pi f_c t)$ e modulante $x_m = A_m \text{sen}(2\pi f_m t)$. Substituindo $x_m(t)$ por $A_m \text{sen}(2\pi f_m t)$ na expressão do sinal AM obtemos

$$s_{AM}(t) = A_c [1 + m \text{sen}(2\pi f_m t)] \text{sen}(2\pi f_c t), \quad (4.23)$$

de modo que

$$m = \frac{A_m}{A_c} \quad (4.24)$$

é o índice de modulação. Fazendo as devidas multiplicações chegamos a

$$s_{AM}(t) = A_c \operatorname{sen}(2\pi f_c t) + A_c m \operatorname{sen}(2\pi f_m t) \operatorname{sen}(2\pi f_c t).$$

Usando a identidade trigonométrica do produto para soma (STEWART; REDLIN; WATSON 2007, p. 595), isto é,

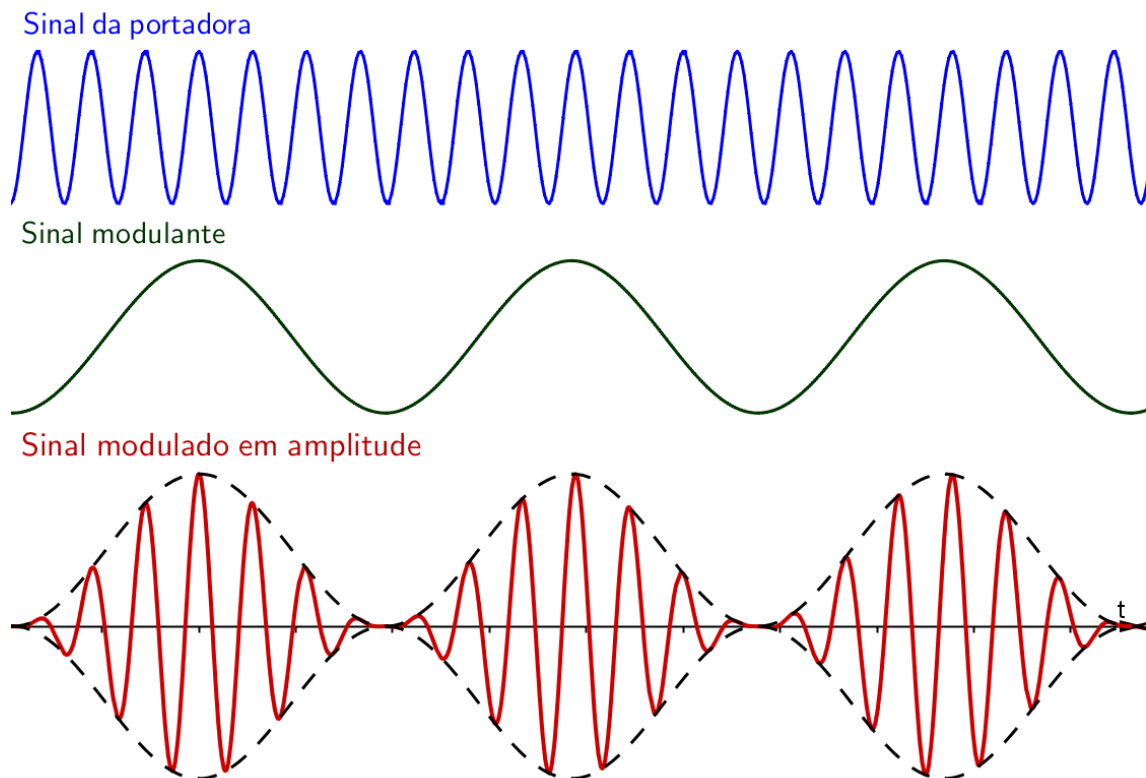
$$\operatorname{sen} \theta_c \operatorname{sen} \theta_m = \frac{1}{2} [\cos(\theta_c - \theta_m) - \cos(\theta_c + \theta_m)]$$

obtemos,

$$s_{AM}(t) = A_c \operatorname{sen}(2\pi f_c t) + \frac{mA_c}{2} \cos(2\pi[f_c - f_m]t) - \frac{mA_c}{2} \cos(2\pi[f_c + f_m]t) \quad (4.25)$$

A Figura 4.38 mostra um sinal da portadora em alta frequência sendo modulada em amplitude por um sinal modulante de baixa frequência de maneira que $f_c \gg f_m$. O envelope do

Figura 4.38 – Combinação do sinal da onda portadora com o sinal modulante formando um sinal AM com $m = 1$. A linha tracejada em preto representa a envoltória da modulação em amplitude.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sinal modulado, a curva que define sua forma geral, tem a forma do sinal modulante e seu eixo é deslocado para cima do eixo da portadora por um determinado valor, o nível de deslocamento. Como a amplitude de uma onda em qualquer instante define o limite da onda acima e abaixo do eixo, podemos desenhar a imagem espelhada da curva modulante deslocada para definir a envoltória abaixo do eixo. Dessa forma o envelope do sinal AM é obtido por

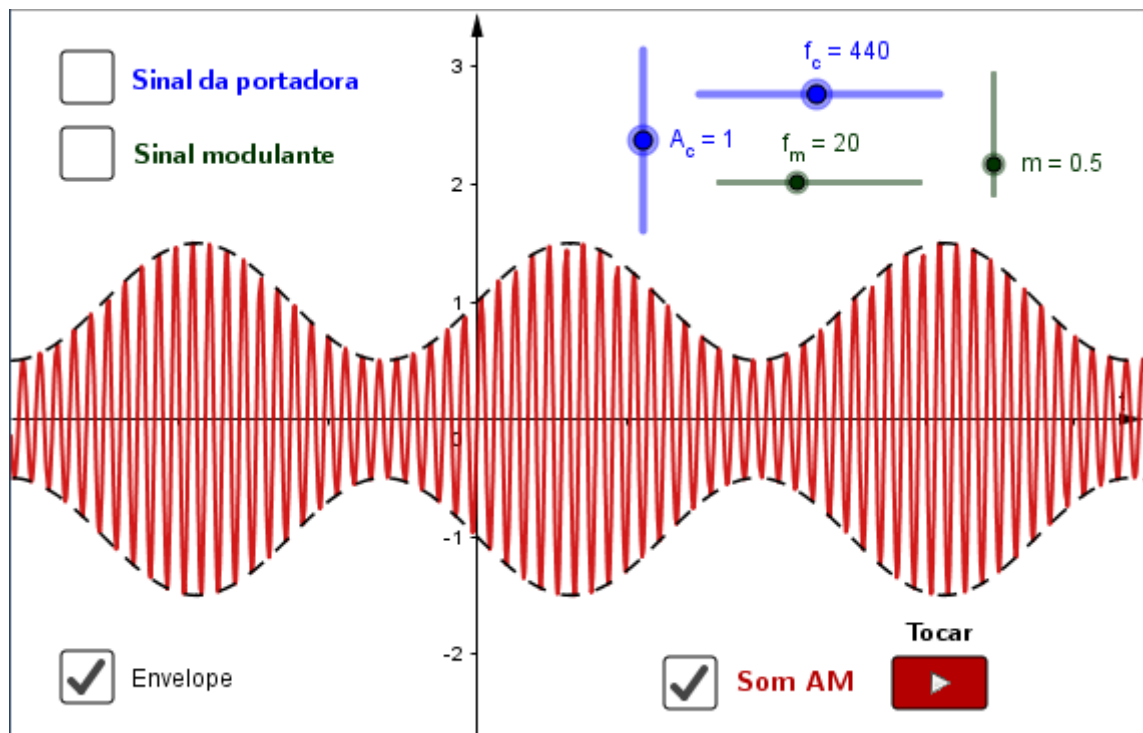
$$Env = \pm A_c [1 + m \text{sen}(2\pi f_m t)].$$

Para construir a implementação do som modulado em amplitude no GeoGebra, conforme a Figura 4.39, iniciamos inserindo 4 controles deslizantes: f_c , f_m , A_c e m responsáveis pela manipulação das frequências, amplitude e índice de modulação.

Em seguida, inserimos os sinais da portadora e modulante, bem como o sinal AM e seu envelope. Na barra de ferramentas, escolhe-se a opção Caixa para Exibir / Esconder Objetos, para as quatro funções definidas.

No último passo, criamos um objeto com o propósito de Tocar o Som, produzido pelo sinal AM durante 2 segundos e alteramos o nome do sinal modulado para som AM.

Figura 4.39 – Applet Síntese de Som por Modulação de Amplitude (AM)²⁸.



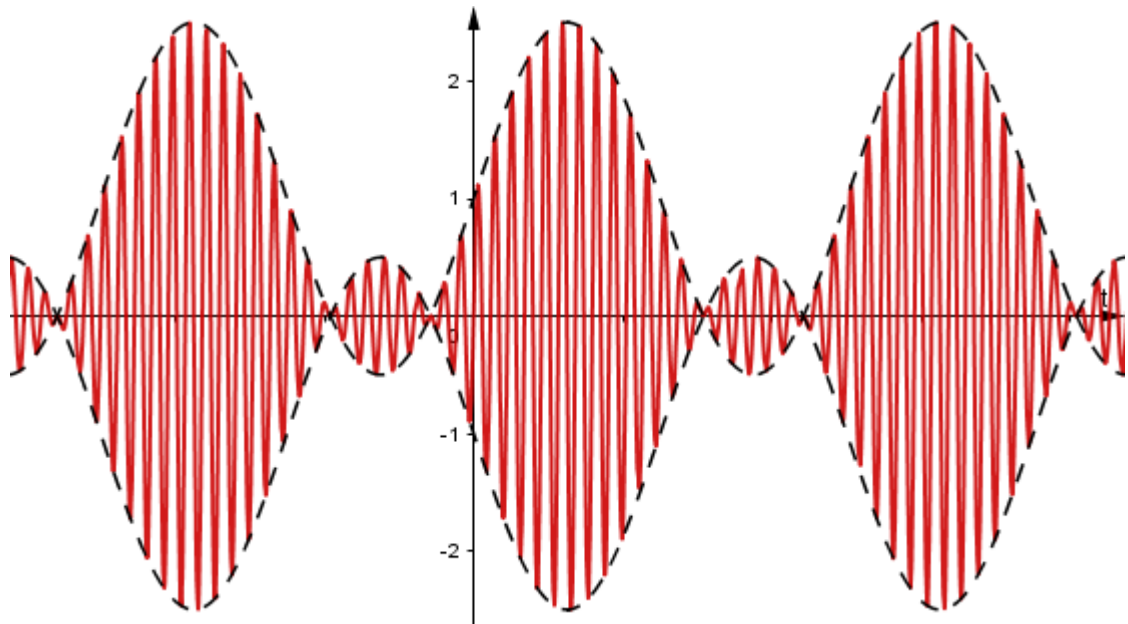
Fonte: Elaborado pelo autor.

²⁸ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/hkxuvy3h>>.

Ao analisar a variação do índice de modulação $m \in \mathbb{R}$ concluímos que caso:

- $m = 0$, têm-se que $A_m = 0$, de modo que não há modulação e o oscilador da portadora gera uma senoide com uma amplitude constante A_c e, conseqüentemente, o som AM e o sinal da portadora são coincidentes;
- $0 < m < 1$, segue-se que $A_m < A_c$ e o som AM assumirá um envelope com variação senoidal conforme pode ser visto na Figura 4.39. Nesse envelope, temos $m = 0,5$, o que implica, $A_c = 2A_m$, ou seja, a amplitude do sinal da portadora é o dobro da amplitude do sinal modulante;
- $m = 1$, têm-se que $A_m = A_c$, isto é, a amplitude do oscilador modulante é igual a amplitude não modulada do oscilador da portadora e 100% de modulação ocorre. Nesse caso, a amplitude do sinal AM atinge um valor máximo $2A_c$ e se reduz a zero em algum momento durante cada período (Figura 4.38);

Figura 4.40 – Traçado do som AM com índice de modulação $m = 1,5$.

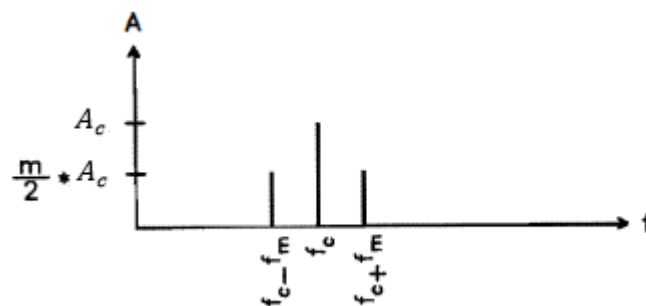


Fonte: Elaborado pelo autor.

- $m > 1$, implica que, $A_m > A_c$, ou seja, a amplitude do sinal modulante é maior que o nível de deslocamento do sinal da portadora. Nesse caso, dizemos que há uma sobremodulação e há perda de informação do som AM onde o envelope assume valores negativos como apresentado por Oliveira (2017 apud CHIARADIA, 2018, p. 31) (Figura 4.40).

Quando ambas as formas de onda portadora e modulante são senoidais, o espectro de um sinal AM (Figura 4.41) contém energia em três frequências: a frequência portadora (f_c) e duas bandas laterais ($f_c + f_m$ e $f_c - f_m$). A amplitude do componente na frequência da portadora não varia com o índice de modulação. A amplitude de cada banda lateral é um fator de $m/2$ menor que a amplitude da portadora, mostrando que esta modulação divide a energia entre as bandas laterais igualmente superior e inferior (observe a Equação (4.25)). Por exemplo, quando $m = 1$, as bandas laterais terão metade da amplitude da portadora.

Figura 4.41 – Espectro do sinal produzido pelo instrumento que implementa a modulação de amplitude.



Adaptado de Dodge e Jerse (1985, p. 91).

A frequência do sinal modulante determina como um ouvinte percebe o som AM. Quando f_m é maior que 10 Hz, mas pequeno o suficiente para que a portadora e ambas as bandas laterais caiam dentro da mesma banda crítica, o tom soará com um volume proporcional à metade da amplitude da onda modulante, isto é, $m A_c/2$. Um valor de f_m que excede a metade da banda crítica faz com que as bandas laterais sejam percebidas individualmente, criando a sensação de sonoridades (volumes) adicionais.

Os músicos têm usado a modulação de amplitude para simular o *tremolo* usando um pequeno índice de modulação e frequência subaudio. Quando o índice de modulação está próximo da unidade ($m \approx 1$) e f_m é menor que cerca de 10 Hz, um som marcadamente pulsante, continuamente aumentando e diminuindo em volume, é produzido (DODGE e JERSE, 1985, p. 91-92).

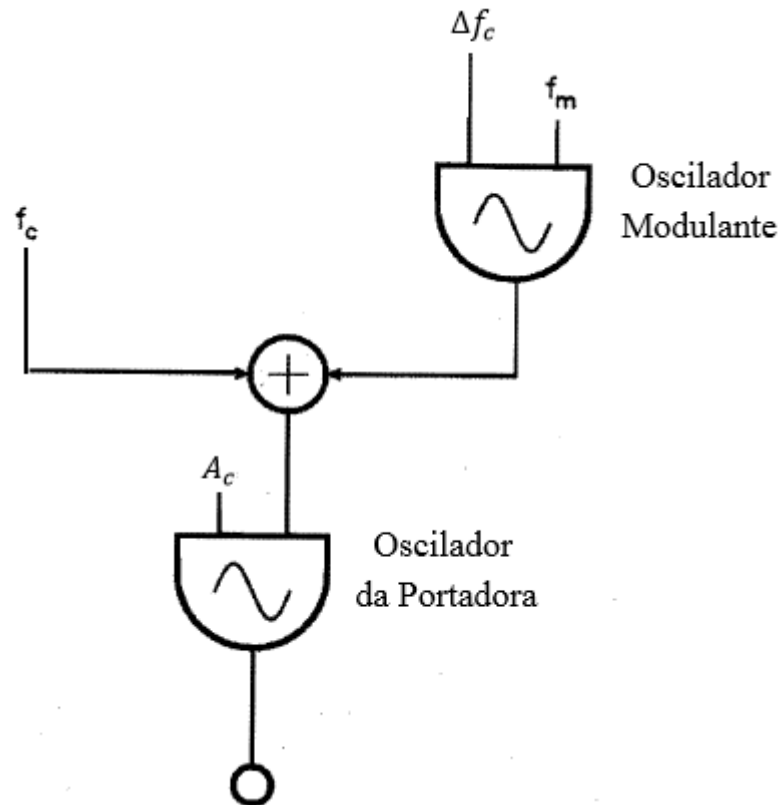
4.6.2 Modulação de Frequência (FM)

A modulação de frequência (ou síntese FM) é uma técnica que altera ou distorce a frequência instantânea de um sinal de maneira periódica (LOY, 2007, v. 2, p. 389).

O diagrama da Figura 4.42 mostra um instrumento básico que implementa a modulação em frequência. Este instrumento consiste de dois osciladores senoidais. Uma frequência

portadora constante f_c é adicionada à saída do oscilador modulante e o resultado é aplicado à entrada de frequência do oscilador da portadora.

Figura 4.42 – Instrumento básico de síntese FM.



Fonte: Adaptado de Dodge e Jerse (1985, p. 116).

Se a amplitude do sinal modulante é 0, não há modulação e a saída do oscilador da portadora é simplesmente uma onda senoidal com frequência f_c . Quando ocorre a modulação, o sinal do oscilador modulante, uma onda senoidal com frequência f_m , dirige a frequência do oscilador da portadora acima e abaixo da frequência da portadora. Quando, em uma determinada amostra, a saída do oscilador modulante é positiva, a frequência do oscilador da portadora é maior do que f_c . Por outro lado, uma amostra de saída negativa do oscilador modulante aciona a frequência do oscilador da portadora abaixo de f_c (DODGE e JERSE, 1985, p. 115-116).

O sinal FM, na saída do instrumento, pode ser modelado por uma combinação

$$s_{FM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + I \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.26)$$

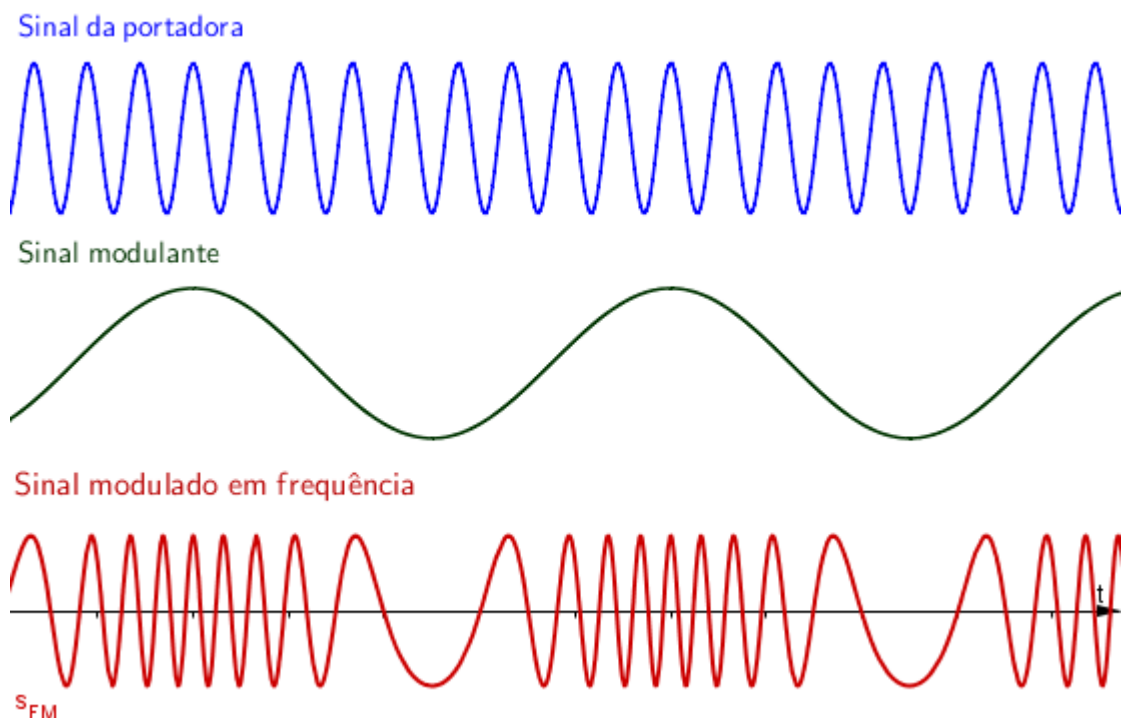
de modo que

$$I = \frac{\Delta f_c}{f_m} \quad (4.27)$$

é o *índice de modulação* (FARUQUE, 2017, p. 37). Note que $s_{FM}(t)$ é uma função não linear do sinal modulante. Por isso, a síntese por modulação de frequência é uma técnica de síntese de som não linear ou *síntese de distorção*. As técnicas não lineares geralmente não fornecem nenhuma maneira de reproduzir um som que seja idêntico a um original, mas podem ter outras vantagens atraentes, como economia de cálculo ou uso intuitivo (LOY, 2007, v. 2, p. 363).

A quantidade Δf_c é chamada de *desvio de frequência* (ou simplesmente, *desvio*) e representa o máximo afastamento que a frequência f_c de um oscilador de portadora sofre. O desvio, referido como Δf_c , é proporcional à amplitude do sinal do oscilador modulante de modo que $\Delta f_c = K A_m$. O sinal digital que sai do oscilador modulante representa uma frequência que deve ser combinada com a frequência da portadora. A frequência instantânea máxima que o oscilador da portadora assumirá é $f_c + \Delta f_c$ e o mínimo é $f_c - \Delta f_c$ (DODGE e JERSE, p. 116).

Figura 4.43 – Combinação do sinal da onda portadora em azul com o sinal modulante em verde formando um sinal em frequência modulada (FM) em vermelho com $I = 7$



Fonte: Elaborado pelo autor.

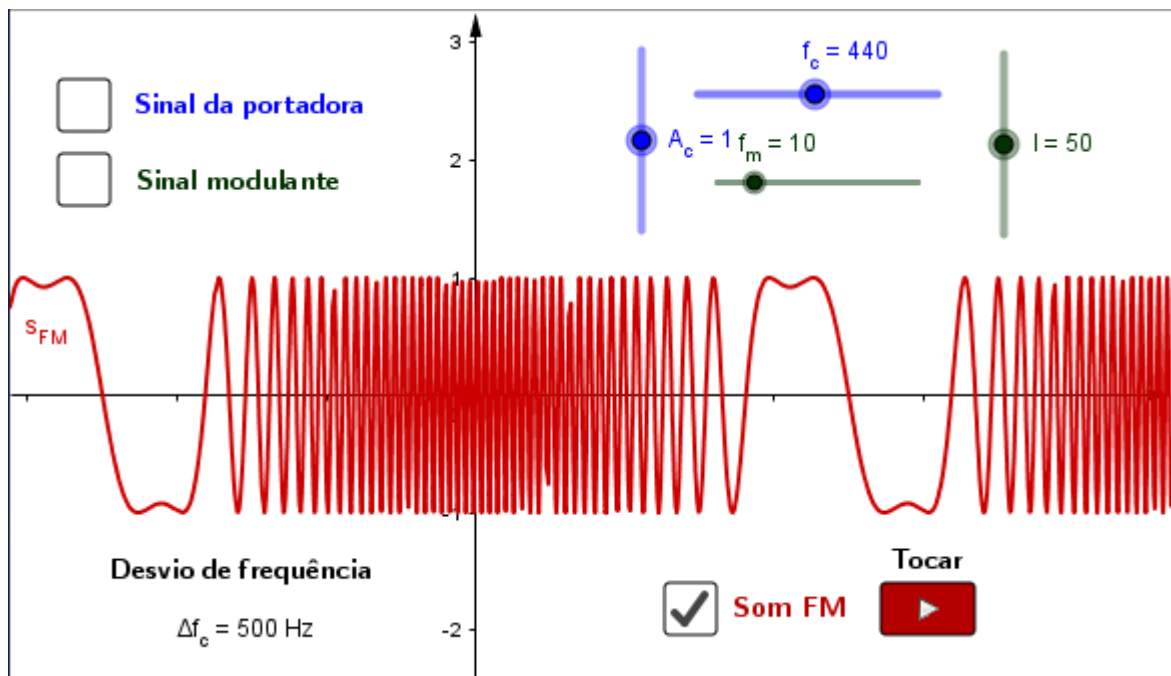
A Figura 4.43 mostra um sinal da portadora em alta frequência sendo modulada em frequência por um sinal modulante de baixa frequência, de maneira que $f_c \gg f_m$. Note que a amplitude é constante. O que é modulado é a própria frequência portadora. A frequência da

portadora é centrada como f_c , mas a modulação dá a esta portadora pequenas excursões acima e abaixo de f_c .

Para construir a implementação do som modulado em frequência no GeoGebra conforme a Figura 4.44, iniciamos inserindo 4 controles deslizantes: f_c , f_m , A_c e I responsáveis pela manipulação das frequências, amplitude e índice de modulação.

Na sequência, inserimos os sinais da portadora e modulante, bem como o sinal FM. Na barra de ferramentas, escolhe-se a opção Caixa para Exibir / Esconder Objetos, para as três funções definidas. Inserimos também o desvio de frequência como $\Delta f_c = I f_m$.

Figura 4.44 – Applet Síntese de Som por Modulação de Frequência (FM)²⁹.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No último passo, criamos um objeto com o propósito de Tocar o Som produzido pelo sinal FM durante 2 segundos e alteramos o nome do sinal modulado em frequência para som FM.

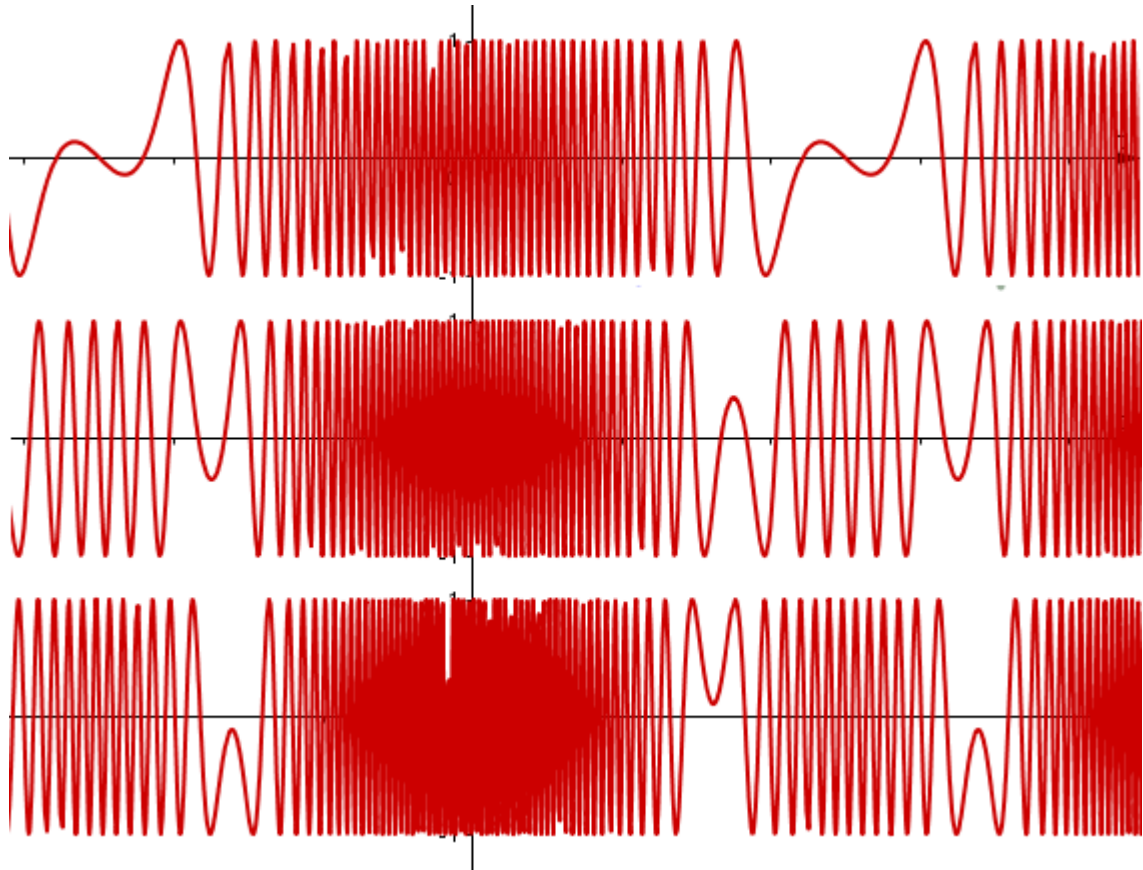
O instrumento que implementa a modulação de frequência (Figura 4.42) pode ser usado para simular o *vibrato*. O oscilador da portadora gera um som com especificada amplitude e frequência, o oscilador modulante varia essa frequência, e conseqüentemente a tonalidade do som gerado, na *taxa de vibrato*, em uma quantidade máxima igual à *largura de vibrato* (DODGE e JERSE, 1985, p. 105; SERRA, 2002, p. 21).

²⁹ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ftvtvmav>>.

A *taxa de vibrato* deve ser restrita às frequências abaixo da faixa de áudio, de modo que $f_m < 20$ Hz enquanto a *largura de vibrato* deve ser menos de um semitom, de maneira que $\Delta f_c < 28$ Hz. Assim, o som resultante tem uma velocidade perceptivelmente lenta na variação em sua frequência fundamental.

No entanto, quando a frequência modulante está na faixa de áudio permitindo o desvio ser muito maior, a síntese FM torna-se uma poderosa técnica capaz gerar uma ampla gama de timbres distintos usada para simular instrumentos acústicos, pianos elétricos e sons não tradicionais, proporcionando uma efetiva economia no processo computacional (DODGE e JERSE, 1985, p. 105).

Figura 4.45 – Três exemplos de modulações de frequência para uma mesma portadora de 440 Hz: uma frequência modulante de 10 Hz com índice de modulação de 45 (topo), uma frequência modulante de 10 Hz com um índice de modulação de 75 (meio) e uma frequência modulante de 10 Hz com um índice de modulação de 100 (abaixo).

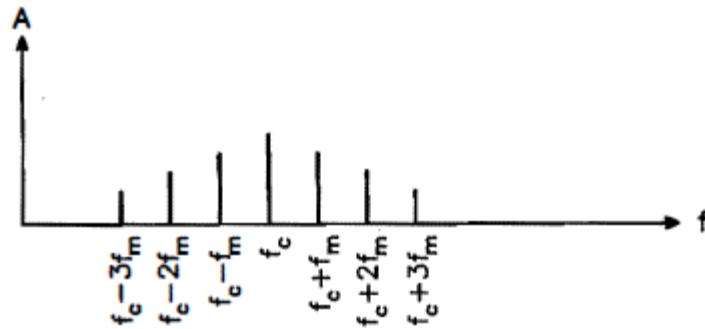


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4.46 ilustra o **espectro de um som FM**. É possível observar que o espectro contém muito mais componentes do que o número de osciladores. Existem componentes espectrais na frequência da portadora e bandas laterais compostas da soma e diferença de frequência da portadora, com múltiplos da frequência do sinal modulante. Essas bandas são agrupadas em pares na forma $f_c \pm n f_m$, onde n é um número inteiro que pode assumir qualquer

valor maior ou igual a 0. Note que a componente da portadora é indicado por $n = 0$ e o número de bandas laterais depende do índice de modulação.

Figura 4.46 – Espectro de síntese FM exibindo bandas laterais até $n = 3$.



Fonte: Dodge e Jerse (1985, p. 117).

A *distribuição de potência* entre os componentes espectrais depende em parte da quantidade do *desvio de frequência* produzida pelo oscilador modulante. Quando $\Delta f_c = 0$, nenhuma modulação ocorre e, portanto, toda a potência do sinal reside no componente da frequência da portadora. Aumentar o desvio faz com que as bandas laterais adquiram mais potência em detrimento da potência na frequência portadora. Quanto maior o desvio, mais amplamente distribuído é o poder entre as bandas laterais e maior é o número de bandas laterais que têm amplitudes significativas. Assim, o desvio pode atuar como um controle sobre a largura de banda do espectro de um sinal FM (DODGE e JERSE, 1985, p. 117).

Figura 4.47 – Yamaha DX-7.



Fonte: Carvalho; Velho; Krakowski (2012, p. 91).

A modulação de frequência foi inventada por John Chowning, no final da década de 60. Por causa da extrema eficiência de computação/memória comparada a outras técnicas, na década de 80, seu algoritmo foi utilizado nos sintetizadores musicais mais populares. Exemplo importante é o Yamaha DX-7 (Figura 4.47), lançado em 1983, o qual vendeu centenas de

milhares de unidades ao redor do mundo. Posteriormente, a técnica de FM também passou a ser utilizada nas primeiras placas de som de computador (CARVALHO; VELHO; KRAKOWSKI, 2012, p. 91, COOK, 2003, p. 119, MOORER, 1990, p. 318).

Para encerrar o Capítulo 4, é valoroso ressaltar o processamento da síntese sonora, o GeoGebra como Sintetizador e manipulador virtual, as diferentes técnicas de síntese, em especial, a síntese aditiva, a qual possui maiores potencialidades para o ensino de funções periódicas. Com essa perspectiva, a compreensão da manipulação dos parâmetros e das diferentes representações para descrever as formas de ondas dos fenômenos periódicos, contribuem para prosseguir com o capítulo 5, que desenvolve as atividades que almejam contribuir com o ensino da física e da matemática.

5 ATIVIDADES

Neste capítulo serão apresentadas atividades sugestivas para planos de aula que podem ser aplicadas a partir da 2ª Série do ensino médio, de preferência em um laboratório de informática, no intuito de enriquecer e dar significado principalmente ao estudo de funções periódicas com aplicações em síntese digital de sons.

Muitos aspectos dessas funções podem ser melhores entendidos, tais como amplitude, frequência e fase, sendo que neste caso estarão em um contexto de aplicabilidade e o ato de construir os gráficos, tabelas, funções, sintetizar seus sons, visualizá-los e escutá-los tornando o estudo mais sensorial e interessante, o que pode contribuir para o aprendizado do aluno.

O estudo do som, mais precisamente das ondas sonoras e suas oscilações, se apresenta como um importante argumento para alavancar e conectar diversos conceitos e que podem abrir um leque de possibilidades para o professor, propiciando uma conexão da física com a matemática, no trato do conteúdo de acústica contextualizada com funções periódicas.

Realizando experimentos com síntese de sons, os estudantes estarão investigando, produzindo e compreendendo fenômenos e aplicações reais. Identificando e interpretando, formulando hipóteses, prevendo resultados, bem como buscando estratégias e aguçando o senso crítico e analisando resultados, distinguindo e utilizando raciocínio dedutivo e indutivo (ALMEIDA, 2014, p. 15).

Uma abordagem introdutória que traz motivação para estudos das séries de Fourier que o professor pode aplicar a partir do ensino médio são a Síntese de Acordes Musicais e a Síntese de Formas de Ondas Geométricas (Atividades 3 e 4). Dessa maneira, os estudantes estarão tendo contato com novos tipos de funções e suas formas obtidas pela soma parcial da série de Fourier, também denominada polinômio trigonométrico, onde os alunos poderão aproximar funções e ouvir seus sons produzidos, ampliando assim, seu conhecimento sobre o assunto com a utilização de recursos tecnológicos.

A necessidade de abordar os conteúdos através de experimentos e levar para o estudante o uso prático, uma vez que a teoria não consegue trazer a vivência que um experimento possibilita, e dessa forma facilitar o aprendizado.

Como ponto de partida, deixemos suposto que as máquinas estejam em bom funcionamento, tanto o vídeo quanto o áudio. Para realizar a atividade 1 é necessário que o software GeoGebra esteja devidamente instalado no computador (ou dispositivo móvel) ou a internet do local geográfico tenha bom funcionamento.

5.1 Gráfico de Funções Trigonométricas

A primeira atividade foi elaborada com base no Caderno do Professor de Matemática da 2ª Série do Ensino Médio (2021), volume 1, SP Faz Escola, referente ao currículo paulista, que afirma na p. 12, “que a motivação pelo estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos”.

É preciso atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos (BRASIL, 2006, p. 74). Com essa perspectiva, é possível dizer que seno e cosseno no triângulo retângulo unido a seno e cosseno na circunferência de raio unitário são os pré-requisitos para o estudo de gráficos de funções trigonométricas.

Uma sugestão é aplicar esta atividade em um momento após a Situação de Aprendizagem 3: Gráficos de Funções Periódicas Envolvendo Senos e Cossenos, p. 28-36, pois seu objetivo é construir tabelas e gráficos de funções cosseno e seno interpretando seus dados. É importante observar a alteração da notação da variável x para a variável t que representará o tempo.

Dessa maneira, após observações e análises dos traçados e argumentos das funções, insere-se, indutivamente, o conceito de frequência angular que posteriormente é relacionado de maneira inversamente proporcional ao período das funções.

Segundo a Matriz de Avaliação Processual de Matemática do Governo do Estado de São Paulo (2016, p. 38), as Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 3: Gráficos de Funções Periódicas Envolvendo Senos e Cossenos são:

1. Construir o gráfico de uma função trigonométrica dada a equação que a representa.
2. Identificar alguns parâmetros importantes do modelo ondulatório para a descrição matemática de fenômenos periódicos.
3. Determinar a equação da função representada por um gráfico dado.

Outra sugestão, caso o docente achar que o tempo é curto para cumprir seu plano mensal e como a Atividade 1: Funções Cosseno e Funções Seno trabalha as três Habilidades referentes a Situação de Aprendizagem 3, é substituir a Situação de Aprendizagem 3: Gráficos de Funções Periódicas Envolvendo Senos e Cossenos pela Atividade 1: Funções Cosseno e Funções Seno.

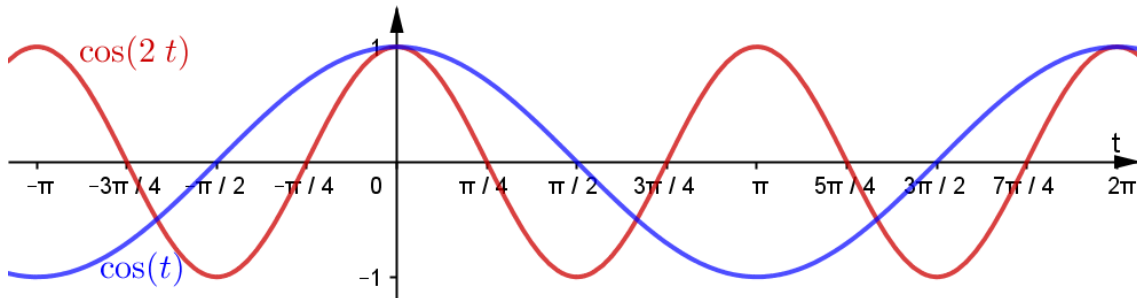
Atividade 1.1: Funções Cosseno

- a) Construa uma tabela de modo que o argumento da função $\cos(2t)$ seja constituído por valores que marcam a divisão entre os quadrantes da circunferência trigonométrica. Insira colunas para $2t$, t , $\cos(t)$ e $\cos(2t)$. Verifique a validade dos pontos obtidos pelas coordenadas na tabela, com os traçados de $\cos(t)$ e $\cos(2t)$ no gráfico.

1º Passo: Abra o GeoGebra, click em exibir planilha (ou digite o atalho Ctrl + Shift + S) e insira $2t$ na célula A1 e t na célula B1. Aparecerão duas retas. Selecione-as com o botão direito do mouse e em seguida selecione exibir objeto. Dessa maneira, as duas retas não ficarão visíveis.

2º Passo: Na célula C1, digite $\cos(B1)$ e na célula D1, digite $\cos(A1)$. Desse modo, as duas funções solicitadas serão traçadas em função da variável independente t no gráfico. Por isso, é importante clicar com o botão direito do mouse no eixo horizontal e na aba eixo x de Preferências – Janela de Visualização selecionar distância de $\pi/4$ e alterar o rótulo para t conforme a ilustração apresentada na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Funções cosseno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3º Passo: Na célula A2, digite 0 e na célula A3, digite $0 + \pi/2$. No canto inferior direito da célula A3, segure o botão do mouse e arraste até A6. Dessa maneira, temos os ângulos múltiplos de $\pi/2$ solicitados no enunciado. Na célula B2, digite $A2/2$ e na sequência arraste até B6 para construirmos a coluna de t . É indicado selecionar esses valores das colunas de $2t$ e t , clicar com o botão direito e ir na aba propriedades – álgebra e selecionar simbólico para alterar números decimais para números em função de π .

4º Passo: Na célula C2, digite $\cos(B2)$ e arraste até C6 e na célula D2, digite $\cos(A2)$ e arraste até D6. Podemos preencher a linha 1 com uma cor de fundo para obtermos a seguinte tabela:

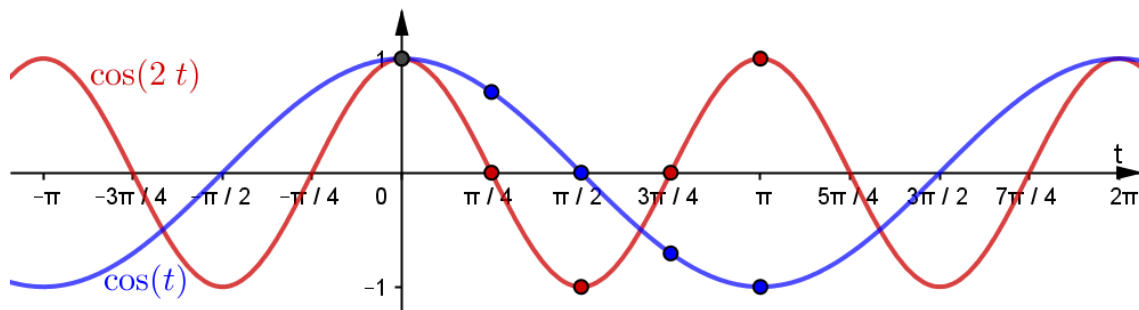
Tabela 5.1 – Dados das funções cosseno.

	A	B	C	D
1	$2t$	t	$\cos(t)$	$\cos(2t)$
2	0	0	1	1
3	$\pi/2$	$\pi/4$	0.71	0
4	π	$\pi/2$	0	-1
5	$3\pi/2$	$3\pi/4$	-0.71	0
6	2π	π	-1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma maneira prática de visualizar a validade dos pontos obtidos pelas coordenadas na tabela com os gráficos traçados será fornecida no próximo passo.

5º Passo: Selecione as colunas t e $\cos(t)$, click com o botão direito do mouse e selecione criar lista de pontos. Selecione as colunas t e $\cos(2t)$, click com o botão direito do mouse e selecione criar lista de pontos. Assim, a verificação é facilmente visualizada no gráfico da Figura 5.2.

Figura 5.2 – Lista de pontos das funções cosseno.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, além de visualizar os pontos da tabela com os traçados das funções trigonométricas, podemos selecionar células da tabela e estender a quantidade de linhas para visualizar mais pontos quanto achar necessário.

- b) Determine a *amplitude* e a *imagem* das funções $\cos(t)$ e $\cos(2t)$.

Basta observar o eixo vertical que em ambas as funções que a amplitude é $A = 1$ e a imagem é o intervalo $Im = [-1, 1]$.

- c) Determine o período fundamental das funções $\cos(t)$ e $\cos(2t)$.

Observando o eixo horizontal e os traçados no gráfico temos que o período de $\cos(t)$ é $T_0 = 2\pi$, enquanto o período de $\cos(2t)$ é $T_0 = \pi$.

- d) Determine a frequência angular fundamental das funções $\cos(t)$ e $\cos(2t)$.

Basta olhar os fatores multiplicativo inseridos nos argumentos das funções: $\cos(1 \cdot t)$ têm frequência angular $\omega = 1 \text{ rad/s}$, enquanto que $\cos(2 \cdot t)$ têm frequência angular $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Note que quanto maior é a frequência angular, maior é a quantidade de oscilações em um mesmo intervalo de tempo.

- e) Qual relação é possível obter entre período e frequência angular das funções periódicas?

Período fundamental e frequência angular fundamental são grandezas inversamente proporcionais de modo que

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

DICA: Esta relação é um modo prático de obter o período, sem olhar o gráfico. Basta observar na função o valor da frequência angular.

Atividade 1.2: Funções Seno

- a) Construa uma tabela de modo que o argumento da função $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ sejam os valores que marcam a divisão entre os quadrantes da circunferência trigonométrica. Insira colunas para $t/2$, t , $\sin(t)$ e $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Verifique a validade dos pontos obtidos pelas coordenadas na tabela com os traçados de $\sin(t)$ e $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ no gráfico.
- b) Determine a amplitude e a imagem das funções $\sin(t)$ e $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.
- c) Determine o período fundamental das funções $\sin(t)$ e $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.
- d) Determine a frequência angular fundamental das funções $\sin(t)$ e $3 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.
- e) Qual relação é possível obter entre período e frequência angular das funções periódicas?

5.2 Síntese de Sinais Sonoros

Em relação ao estudo das funções trigonométricas, vale evidenciar que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomendam que as funções seno e cosseno sejam associadas aos fenômenos periódicos, de modo a auxiliar os alunos a atribuir significado ao estudo dessas funções.

A segunda Atividade 2.1 foi elaborada com base no Caderno do Professor de Ciências da Natureza, mais especificamente Física, da 2º Série do ensino médio, 3º bimestre, referente ao currículo paulista com o objetivo visualizar graficamente e ouvir os sons sintetizados pela manipulação dos parâmetros físicos do sinal senoidal e contribuir com o desenvolvimento das habilidades de “associar diferentes características de sons a grandezas físicas como frequência e intensidade, para explicar, reproduzir, avaliar e controlar a emissão de sons por instrumentos musicais e outros sistemas” e “caracterizar ondas mecânicas (por meio dos conceitos de amplitude, comprimento de onda, frequência, velocidade de propagação e ressonância) a partir de exemplos de músicas e de sons cotidiano”, com o uso do applet Sinal Harmônico (Atividade 2.1)³⁰.

Dessa maneira, os estudantes poderão atribuir significados sensoriais, tanto visualmente quanto auditivamente, as funções cossenos e/ou senos, visto que estão sendo associadas ao fenômeno periódico do som.

Conforme o Caderno do Professor de Ciências da Natureza, da 2º Série do ensino médio, 3º bimestre (2021, p. 12), utilizar esse tipo de estratégia, com roteiros predefinidos pelo professor, possibilita o desenvolvimento da competência geral “exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas”. Por exemplo, o uso de softwares e experimentos permite uma maior aproximação do estudante ao entendimento de habilidades e conteúdos a serem desenvolvidos.

Atividade 2.1: Observando e Escutando manipulações dos Parâmetros

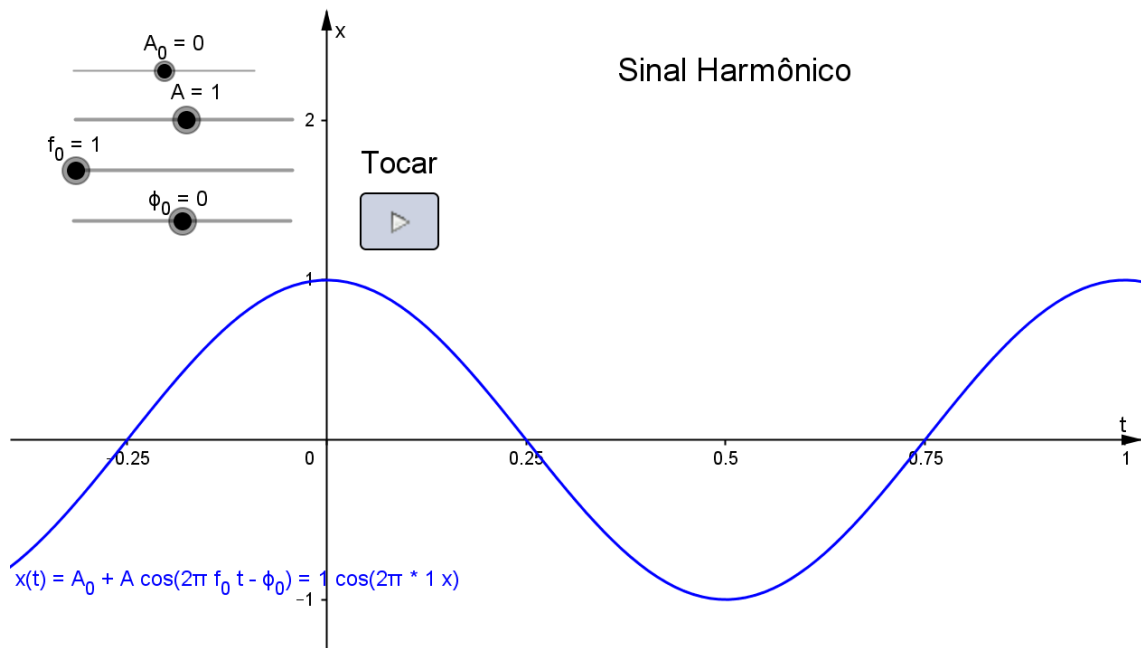
- a) Abra o applet sinal harmônico construído a partir da função

$$x(t) = A_0 + A \cos(2\pi f_0 t - \phi_0) \quad (2.12)$$

e atribua diferentes valores para o parâmetro A_0 (denominado *nível de deslocamento*) tais como $A_0 = -1, 0, 1, 2$, etc. Em seguida, utilize o controle deslizante para observar o efeito visual da variação de A_0 na oscilação harmônica. Descreva com suas palavras o que você observou no gráfico.

³⁰ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/mu3v6au3>>.

Figura 5.3 – Applet Sinal Harmônico (Atividade 2.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

- b) Agora, atribua valores diferentes para o parâmetro ϕ_0 tais como $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, etc. Na sequência, utilize o controle deslizante para observar o efeito visual da variação de ϕ_0 na oscilação harmônica. Descreva com suas palavras o que você observou graficamente.
- c) Atribua valores diferentes para o parâmetro f_0 , tais como $f_0 = 0, 1, 2, 3, 4$, etc. Na sequência, utilize o controle deslizante para observar o efeito visual da variação de f_0 na oscilação. Descreva com suas palavras o que você observou graficamente.

Atribua valores para f_0 , tais como $f_0 = 55, 110, 220, 330$, etc, aperte o botão tocar em cada valor atribuído e escute os sons produzidos correspondentes.

Ouçã novamente os sons produzidos por $f_0 = 110$ e por $f_0 = 330$. Qual destes sons é o mais agudo? O som mais agudo corresponde ao valor da frequência mais alta?

É possível chamar o som agudo de som alto?

Escreva o que você concluiu após observar os valores da frequência e escutar seus respectivos sons.

- d) Atribua valores diferentes para o parâmetro A tais como $A = -1, 0, 1, 2, 3, 4$, etc. Na sequência, utilize o controle deslizante para observar o efeito visual da variação de A na oscilação. Descreva com suas palavras o que você observou graficamente.

Para a frequência $f_0 = 110$ fixada, atribua valores para A tais como $A = 2, 4, 8, 16$, etc, aperte o botão tocar em cada valor atribuído e escute os sons produzidos correspondentes.

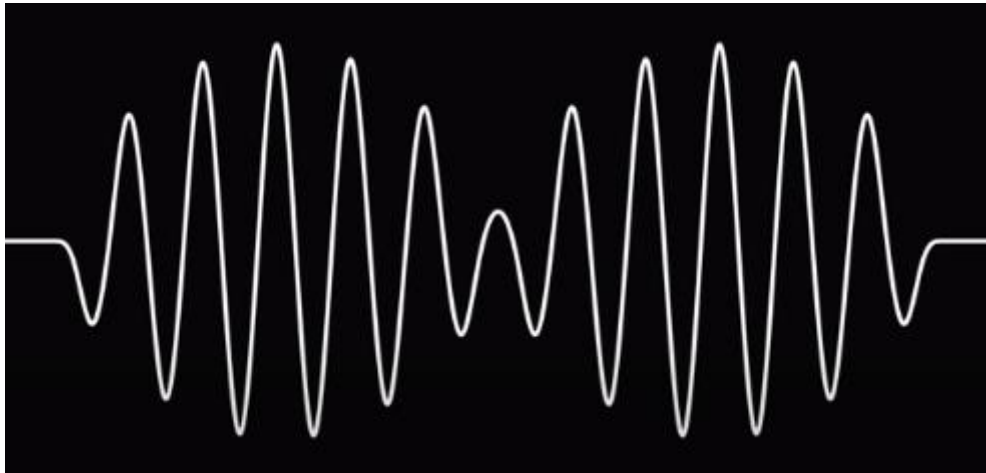
Ouçã novamente os sons produzidos por $A = 2$ e por $A = 8$. Qual destes sons têm o maior volume? O som de maior volume (ou intensidade) corresponde ao valor da amplitude mais alta? Podemos chamar o som de maior volume de som fraco?

Escreva o que você concluiu após observar os valores das amplitudes atribuídos e escutar seus respectivos sons.

Atividade 2.2: Observando e Escutando o fenômeno do Batimento

O vídeo clipe oficial para a canção Do I Wanna Know? da banda de rock britânica Arctic Monkeys, dirigido por David Wilson, foi lançado no Youtube em 2013 e atingiu a marca de 1 bilhão de visualizações em 2020. Esse vídeo foi todo feito em animação e possibilita visualizar as oscilações das ondas sonoras no decorrer da música. Em um determinado instante capturamos uma imagem descrita pela Figura 5.4.

Figura 5.4 – Instante 54 segundos de Arctic Monkeys - Do I Wanna Know? (Official Video).



Fonte: Disponível em:

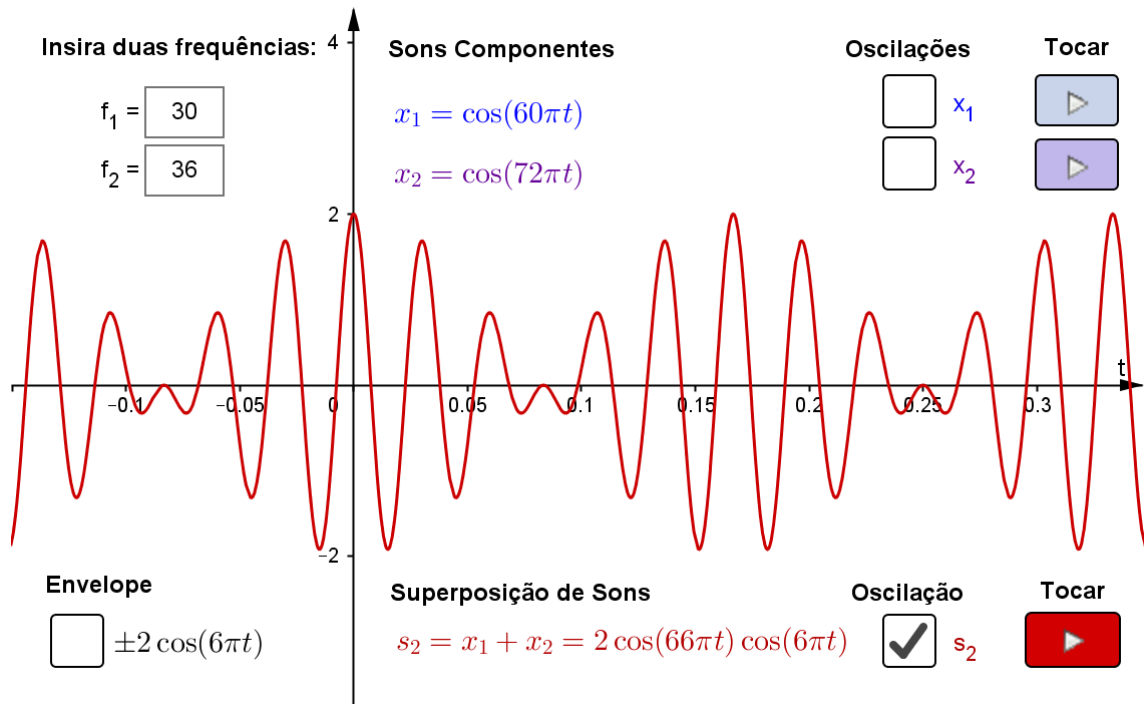
<https://www.youtube.com/watch?v=bpOSxM0rNPM&ab_channel=OfficialArcticMonkeys>

Acesso em: 6 de abril de 2022.

- Nesta figura é possível visualizar um fenômeno físico. Qual é esse fenômeno acústico?
- Descreva com suas palavras o que acontece com a amplitude da onda sonora.

- c) Para entender o que acontece (e o porquê?) com a amplitude da onda sonora abra o applet Batimento (Atividade 2.2)³¹:

Figura 5.5 – Applet Batimento (Atividade 2.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Escolha valores próximos para as duas frequências de preferência acima de 100 Hz para obter uma melhor percepção auditiva. Observe o gráfico de suas oscilações selecionando x_1 e x_2 e toque seus respectivos sons componentes.

- d) Aplique a fórmula abaixo para calcular o valor da frequência média de oscilação

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \cdot$$

- e) Calcule o valor da **frequência de batimento** (número de variações de amplitude por segundo) dada por

$$\Delta f = |f_1 - f_2|.$$

Observação 5.1: Caso o aprendiz não saiba o conceito de módulo, denotado por $| \quad |$, ou apresente dificuldade no item e) é deixado como sugestão a solicitação da diferença entre a maior e a menor frequência.

³¹ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/vurxqjdf>>.

- f) Compare as frequências encontradas nos itens d) e e) com a superposição de sons s_2 e o envelope. As frequências coincidem com os valores que multiplicam πt ?
- g) Mantenha s_2 selecionado, selecione o envelope e observe sua oscilação. Toque a superposição de sons s_2 e descreva com suas palavras o que você escuta.

Importância para os Músicos: Batimentos podem ser usados para afinar um instrumento musical. Por exemplo, para se afinar a nota Lá₃ da oitava central do piano, toca-se simultaneamente a tecla correspondente no piano e um diapasão de frequência 440 Hz. Se as cordas do piano para essa tecla estiverem desafinadas, batimentos serão ouvidos (BORTOLOSSI, 2012, p. 127).

5.3 Síntese de Acordes Musicais

Acorde é uma unidade harmônica com pelo menos três tons diferentes soando simultaneamente (BENWARD e SAKER, 2008, p. 73).

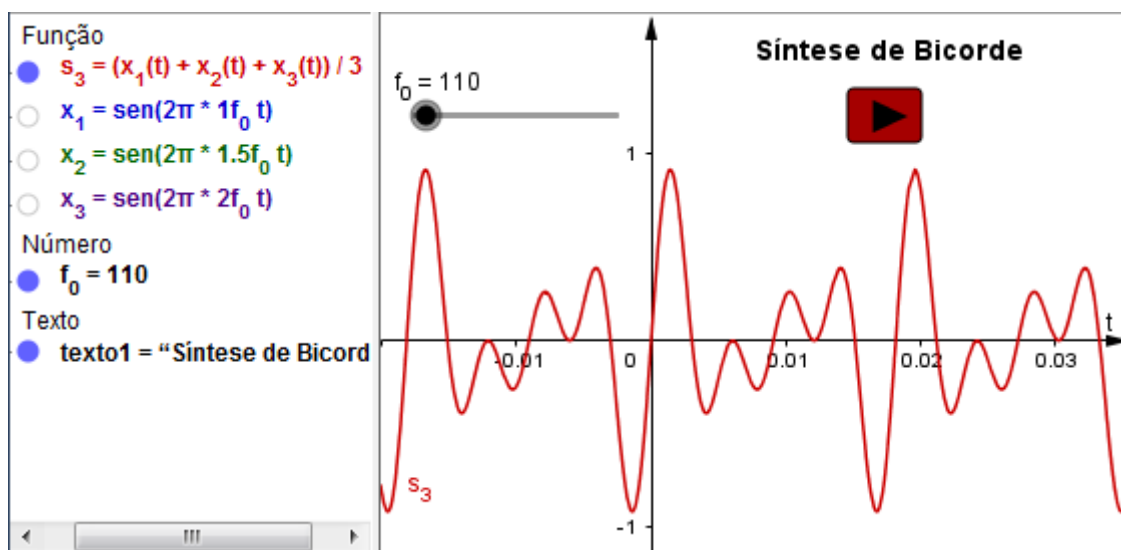
Atividade 3.1: Síntese Aditiva de Bicorde

Na guitarra, é muito comum o uso de *powerchord* por músicos de blues, rock e heavy metal. Como a própria tradução nos informa, são *acordes poderosos*, que transmitem uma sensação de peso a quem está ouvindo.

PowerChord é um acorde de simples execução formado por apenas duas notas. Devido a isto também pode ser chamado de *bicorde*. Os guitarristas geralmente o executam emitindo o som de três tons da série harmônica simultaneamente. Tomemos como exemplo o Lá₁ de frequência 110 Hz. Os seus três tons que formam o bicorde são Lá₁ – Mi₂ – Lá₂ cujas frequências correspondentes são, 110 Hz – 165 Hz – 220 Hz, respectivamente. Com essa perspectiva podemos facilmente sintetizar o Bicorde Lá₁ no Geogebra.

- a) Abra o GeoGebra e escreva as componentes senoidais referente aos três tons do Bicorde. Observe seu gráfico em uma escala horizontal de 10 milissegundos.
- b) Escreva a soma s_3 da adição das componentes senoidais e observe seu gráfico. É interessante normalizar amplitude dividindo a adição das componentes por 3.

Figura 5.6 – Applet Síntese de Bicorde (Atividade 3.1)³².



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) No campo Entrada escreva o comando

$$\text{TocarSom}(\text{"A1+E2+A2"}, 27)$$

para emitir o som de um bicorde de Lá₁ na guitarra elétrica do GeoGebra (SILVA, GROENWALD e HOMA, 2017, p. 36). Agora, escreva o comando

$$\text{TocarSom}(s_3, 0, 1/4)$$

Os dois sons soam parecidos?

Observação 5.2: Para obter um bicorde de Dó₂ basta alterar a frequência fundamental para $f_0 = 131 \text{ Hz}$. Dessa maneira, teremos frequências 131 Hz – 196 Hz – 262 Hz, correspondentes aos tons Dó₂ – Sol₂ – Dó₃. Portanto, o applet Síntese de Bicorde (Atividade 3.1), pode sintetizar qualquer tom no intervalo definido do controle deslizante f_0 .

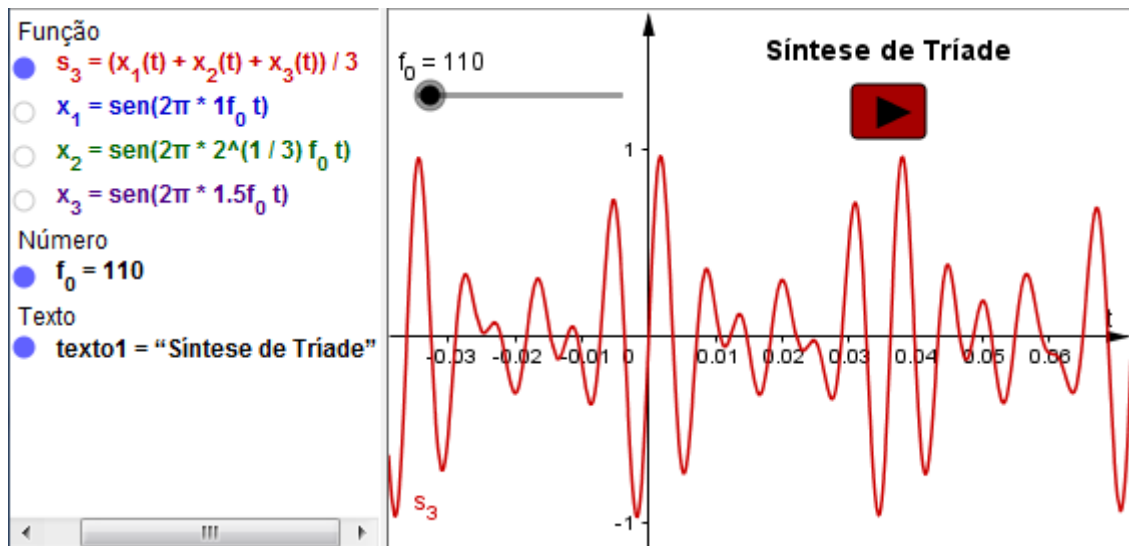
Atividade 3.2: Síntese Aditiva de Tríade

Tríade é um acorde de três notas musicais (BENWARD e SAKER, 2008, p 73). Tomemos como exemplo o Lá₁ de frequência 110 Hz. Os seus três tons que formam a tríade maior são Lá₁ – Dó#₂ – Mi₂ cujas frequências correspondentes são, 110 Hz – 139 Hz – 165 Hz, respectivamente. Com essa perspectiva podemos facilmente sintetizar o acorde de Lá₁ maior no GeoGebra.

³² Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/aznupdzs>>.

- a) Abra o GeoGebra e escreva as componentes senoidais referente aos três tons da tríade de Lá₁ maior. Observe seu gráfico em uma escala horizontal de 10 milisegundos.
- b) Escreva a soma s_3 da adição das componentes senoidais e observe seu gráfico. É interessante normalizar amplitude dividindo a adição das componentes por 3.

Figura 5.7 – Applet Síntese de Tríade (Atividade 3.2)³³.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- c) No campo Entrada escreva o comando

$$\text{TocarSom}(\text{"A1+C\#2+E2"}, 27)$$

para emitir o som de um acorde de Lá₁ maior na guitarra elétrica do GeoGebra. Agora, escreva o comando

$$\text{TocarSom}(s_3, 0, 1/4)$$

Os dois sons soam parecidos?

Observação 5.3: Para obter uma tríade de Dó₂ maior basta alterar a frequência fundamental para $f_0 = 131 \text{ Hz}$. Dessa maneira, teremos frequências 131 Hz – 165 Hz – 196 Hz, correspondentes aos tons Dó₂ – Mi₂ – Sol₂. Portanto, o applet Síntese de Tríade (Atividade 3.2), pode sintetizar qualquer tom no intervalo definido do controle deslizante f_0 .

³³ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ktuqs3td>>.

5.4 Síntese de Formas de Onda Geométrica

As formas de ondas padrão são classificadas em cinco tipos: senoidal, triangular, quadrangular, dente de serra e trem de impulso (BERG, 1982, p. 96).

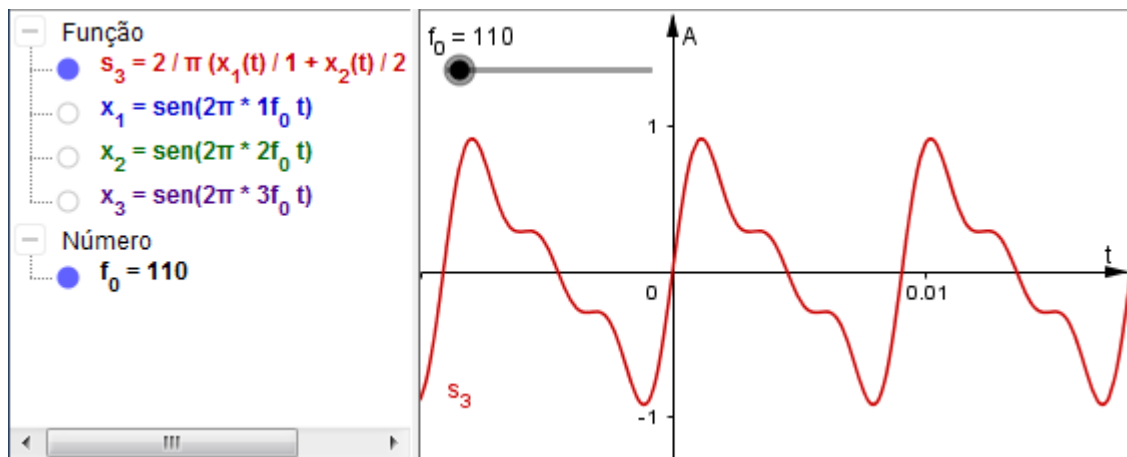
Atividade 4.1: Síntese Aditiva de Onda Dente de Serra

- Abra o GeoGebra e escreva as componentes senoidais referente aos três primeiros tons da série harmônica do Lá₁ de frequência $f_0 = 110$ Hz. Divida a amplitude da primeira componente por 1, da segunda por 2 e da terceira por 3 e observe seu gráfico em uma escala horizontal de 10 milisegundos.
- Escreva a soma s_3 da adição das componentes senoidais e observe seu gráfico. É interessante normalizar amplitude dividindo a adição das componentes por $\pi/2$. Qual é a forma de onda geométrica que começa a se aproximar?

Sugestão:

$$s_3(t) = \frac{2}{\pi} \left[\text{sen}(2\pi 1f_0 t) + \frac{\text{sen}(2\pi 2f_0 t)}{2} + \frac{\text{sen}(2\pi 3f_0 t)}{3} \right].$$

Figura 5.8 – Gráfico da soma s_3 .

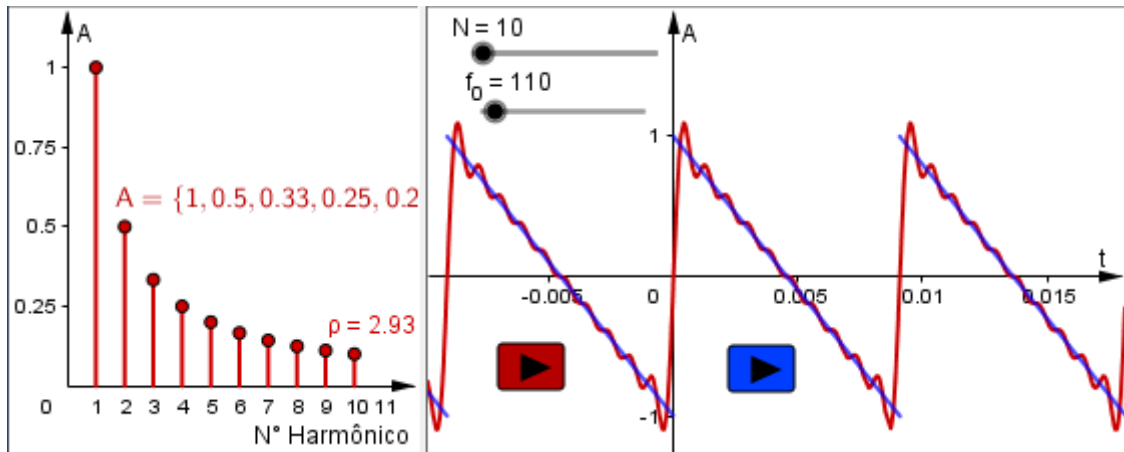


Fonte: Elaborado pelo autor.

- Agora, abra o applet Síntese de Onda Dente de Serra (Atividade 4.1)³⁴. Observe a soma s_{10} da adição das 10 componentes senoidais em vermelho e a forma onda dente de serra “ideal” em azul. Deslize N e escreva o que acontece ao aumentar o valor de N ?

³⁴ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/u7br3x7y>>.

Figura 5.9 – Applet Síntese de Onda Dente de Serra (Atividade 4.1).



Fonte: Elaborado pelo autor.

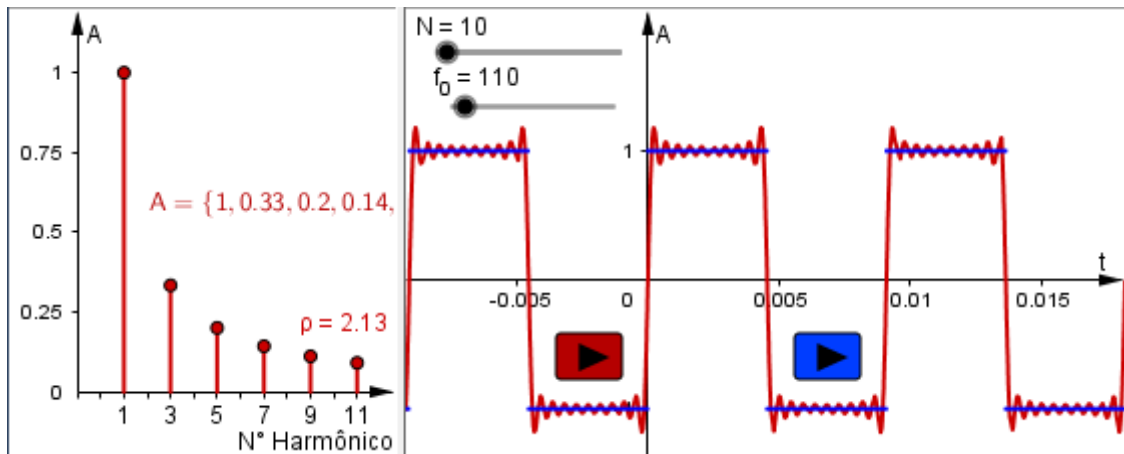
- d) Toque o botão vermelho e o botão azul. Os dois sons soam iguais ou parecidos? O que acontece com o gráfico e com o som ao diminuir o valor de N ? O que acontece com o som ao aumentar o valor de N ? Quando $N = 200$ os dois sons soam iguais?

Atividade 4.2: Síntese Aditiva de Onda Quadrada

- a) Abra o GeoGebra e escreva as componentes senoidais referente aos três primeiros tons ímpares da série harmônica do Lá₁ de frequência $f_0 = 110$ Hz. Divida a amplitude da primeira componente por 1, da segunda por 3 e da terceira por 5 e observe seu gráfico em uma escala horizontal de 10 milissegundos.
- b) Escreva a soma s_3 da adição das componentes senoidais e observe seu gráfico. É interessante normalizar amplitude dividindo a adição das componentes por $\pi/4$. Qual é a forma de onda geométrica que começa a se aproximar?
- c) Agora, abra o applet Síntese de Onda Quadrada (Atividade 4.2)³⁵. Observe a soma s_{10} da adição das 10 componentes senoidais em vermelho e a forma onda quadrada “ideal” em azul. Deslize N e escreva o que acontece ao aumentar o valor de N ?
- d) Toque o botão vermelho e o botão azul. Os dois sons soam iguais ou parecidos? O que acontece com o gráfico e com o som ao diminuir o valor de N ? O que acontece com o som ao aumentar o valor de N ? Quando $N = 200$ os dois sons soam iguais?

³⁵ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/wk9chfey>>.

Figura 5.10 – Applet Síntese de Onda Quadrada (Atividade 4.2).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar o Capítulo 5, é fundamental destacar que o estudo das ondas sonoras e suas oscilações propiciam uma contextualização entre acústica e funções periódicas. As atividades elaboradas com o uso dos applets GeoGebra para a manipulação dos sinais sonoros possibilitam uma maior aproximação do estudante ao entendimento das funções periódicas e seus parâmetros. Dessa maneira, os estudantes também estarão tendo contato com novos tipos de funções e suas formas obtidas pela combinação linear de parciais harmônicas com a perspectiva de alterar seus gráficos e ouvir seus sons, colaborando, portanto, com o desenvolvimento de diferentes Habilidades.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar o estudo frente à natureza do tema pesquisado, a compreensão do som como uma onda sonora longitudinal e periódica cuja forma, amplitude, frequência e fase refletem suas características, permitiu explorar os conceitos da série harmônica e, conseqüentemente, perceber a relação entre o timbre característico de um determinado som e a amplitude dos harmônicos gerados.

A busca do entendimento das series de Fourier aplicadas à síntese de sons mostram caminhos para a representação de sinais sonoros por várias formas de modelos matemáticos. Neste trabalho, os modelos mais desenvolvidos foram os polinômios trigonométricos para representar a superposição dos parciais harmônicos.

Por outro lado, a análise de Fourier fornece uma maneira de medir as forças dos componentes individuais de um sinal sonoro. Nesse sentido, segundo Zanato (2017, p. 67), com o avanço da tecnologia, as transformadas de Fourier permitiram a compactação de arquivos de áudio digital (formato MP3), através da análise espectral do sinal e a eliminação dos componentes de frequência praticamente imperceptíveis ao ouvido humano, reduzindo seu tamanho consideravelmente sem perda de qualidade aparente. Além disso, o surgimento da música eletrônica só foi possível devido à teoria apresentada por Fourier, visto que possibilitou a criação de timbres por meio dos sintetizadores de áudio.

Nessa perspectiva e com a objetividade de interdisciplinaridade houveram muitos debates por grupo de WhatsApp e troca de informações dos diferentes pontos de vistas de estudantes de diversos cursos (bacharelado em Física, ciência da Computação, engenharia Elétrica, engenharia Física, licenciatura em Física e mestrado em ensino de Ciências Exatas) na intenção da construção do conhecimento.

Esses debates foram consequência de um trabalho de Atividade Curricular de Integração Ensino, Pesquisa e Extensão (ACIEPE) - Introdução às Séries de Fourier e EDP's³⁶ ministrada pela Prof^a. Dr^a. Graciele P. Silveira no formato EAD pela UFSCar – Sorocaba no 1º semestre de 2020 e do projeto da dissertação de Ensino e Aprendizagem de Funções Periódicas com abordagens de Síntese de Sons, escrito em 2019 pelo autor para esta própria dissertação.

Neste trabalho de extensão, os arquivos de áudio digital foram processados por um programa feito em linguagem Python (ANEXO A) escrito pelo estudante de ciência da Computação Adriano Leite Emídio, bem como a Subseção 4.5.7 desta pesquisa, a

³⁶ EDP's é abreviação de Equações Diferenciais Parciais.

Recomposição do Áudio Digital. Os espectros de frequências foram obtidos pela análise dos áudios digitais no software de edição Audacity. Devido aos relatos do Adriano sobre pessoas investigadas observa-se que algumas pessoas com idades baixas é que percebem melhor a perda da qualidade do áudio. E quanto maior for a quantidade de coeficientes mais difícil é de perceber a perda da qualidade do áudio. No entanto, o custo computacional torna-se mais alto.

Os relatos do Adriano são confirmados por Howard e Angus (2017, p. 90), pelo fato que, “com a evolução etária a redução no limite de frequência superior da faixa de audição é acompanhada por um declínio na sensibilidade auditiva em todas as frequências, sendo este declínio menor para baixas frequências do que para altas frequências”. Essa perda de audição, comprometendo principalmente a detecção dos sons agudos, é conhecida como *presbiacusia*. Ela é consequência normal do processo de envelhecimento. Além disso, a perda natural da sensibilidade da audição e a perda de frequências altas são mais destacadas nos homens do que nas mulheres (HOWARD e ANGUS, 2017, p. 90).

A síntese de sons abrange diversos conceitos físicos, matemáticos e computacionais sendo um vasto campo a ser explorado por professores e estudantes de qualquer nível de ensino. Apesar da complexidade no estudo da série de Fourier, as atividades contextualizadas do Capítulo 5 possibilitam selecionar aplicações interessantes, que podem ser apresentadas aos estudantes a partir do Ensino Médio de forma didática e motivadora.

As teorias de Fourier apresentadas podem ser um meio para instigar o estudante a conceber modelos matemáticos como ferramenta para explicar fenômenos sonoros, além de mostrar sua aplicabilidade a qual é responsável pela existência de boa parte das tecnologias atuais. Este é, portanto, um importante caminho que potencializa a compreensão de saberes contextualizados e contribui efetivamente no processo de ensino e aprendizagem da matemática, da física e suas tecnologias na educação.

As atividades com a utilização dos applets GeoGebra como Objeto de Aprendizagem, introduz um novo conceito à investigação, motivando e gerando curiosidade. A aula tem a possibilidade de transfigurar em formato dinâmico, pois o aluno visualiza a matemática em movimento e percebe auditivamente as características físicas. Permite-se, então, através do GeoGebra um estudo mais atraente e interativo, muitas vezes com progressos próprios, proporcionando o desenvolvimento da autonomia e de diversas habilidades.

Através deste trabalho fica a perspectiva futura de que o tema seja inserido nas aulas e desperte o interesse de outros professores e pesquisadores, contribuindo com a ampliação do número de publicações e aprofundando ainda mais as discussões sobre funções periódicas e as teorias de Fourier, aplicadas à síntese sonora assim como as técnicas de síntese por modulação.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados**. 2ª Edição. Editoras Escrituras. São Paulo, 2003.
- AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE (ANSI). **USA Standard Acoustical Terminology (Including Mechanical Shock and Vibration) S1.1-1960 (R1976)**. New York: American National Standards Institute. 1960.
- ABRAMSON, Jay. **Algebra and Trigonometry**. OpenStax. Arizona State University, 2015.
- ALMEIDA, Mario Sérgio Mattos. **A Matemática de Alguns Experimentos Sonoros**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Instituto de Matemática. UFBA, 2014.
- ALVES FILHO, A.; OLIVEIRA, E. F. e ROBORTELLA, J. L. C. **Física: Eletricidade e Ondulatória**. Volume 3. Segundo Grau. Editora Ática, 1984.
- ANTON, H., RORRES, C., **Álgebra Linear com Aplicações**. Décima edição. Traduzido por Claus Ivo Doering. Porto Alegre: UFRGS, 2010.
- BARBOSA, Álvaro M., **Edição Digital de Som: Uma abordagem aos fundamentos da escultura sonora orientada para criadores**. Sebenta do curso de Som e Imagem da Universidade Católica Portuguesa, 1999.
- BASNIAK, Maria Ivete. ESTEVAM, Everton J. G., **O GeoGebra e a matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014.
- BENWARD, Bruce; SAKER, Marilyn. **Music. In Theory and Practice. Vol I**. 8ª ed. McGraw-Hill. 2008.
- BELK, Jim. **Unit circle angles color.svg**. 2010. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_circle_angles_color.svg>. Acesso em: 4 abr. 2022.
- BERG, R. E., STORK, D. G., **The Physics of Sound**, 2nd Edition. Prentice-hall, 1982.
- BITTENCOURT, P. M., **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos Pantógrafo**. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). 2014.
- BORTOLOSSI, José Humberto. **Projeto EM Ação - Ensino Médio em Ação - 3º Ano**. Vol. 2. Secretaria de Educação do Estado da Bahia, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, v. 2, p. 67-98. 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): Ensino Médio**. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. 1998.

BREGMAN, A.S. **Auditory Scene Analysis: The Perceptual Organization of Sound**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. 1990.

CADERNO DO PROFESSOR – SP Faz Escola. **Ciências da Natureza. Ensino Médio. Física. 2º Série. 3º Bimestre**. v. 3, p. 15-26. Material de apoio ao currículo paulista. 2021.

CADERNO DO PROFESSOR – SP Faz Escola. **Matemática. Ensino Médio. 2º Série. 1º bimestre**. v. 1, p. 11-42. Material de apoio ao currículo paulista. 2021.

CAETANO, Marcelo Freitas. **Síntese Sonora Auto-Organizável Através da Aplicação de Algoritmos Bio-Inspirados**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC). UNICAMP, 2006.

CAMILLERI; DUCOURNEAU; PUJOL, **Journey into the World of Hearing: Sound Exposure and Danger for the Ear!**, 2017. Disponível em: <<http://www.cochlea.org/en/noise>>. Acesso em: 26 mar. 2022.

CARVALHO, P. C.; VELHO, L.; KRAKOWSKI, S., **Métodos Matemáticos e computacionais em música**. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada (SBMAC). São Carlos, 2012.

CHETVORNO, **Sine and cosine animation**. 2,4 s. 2014. Disponível em: <<https://bit.ly/3gc0qB2>>. Acesso em: 2 mar. 2022.

CHIARADIA, José Ezequiel. **Sintetizando Funções: Uma Aplicação das Séries de Fourier**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. UFV, 2018.

COOK, Perry R., **Real Sound Synthesis for Interactive Applications**. CRC Press. First Edition. 2003.

DENBIGH, Philip. **System Analysis and Signal Processing: With emphasis on the use of Matlab**. Published by Addison-Wesley. Michigan University, 1998.

DOCA, Ricardo Helou. **Ondas**. Sistema de Métodos de Aprendizagem. Livro 11. Coleção Objetivo. Editora Sol. 2000.

DODGE, C.; JERSE, T. A. **Computer Music: Synthesis, Composition, and Performance**. Schirmer Books, 1985.

EMÍDIO, A. L.; FLORA FILHO, F.; PIGOZZI, G. C.; ASCENÇÃO, G. R.; ROCUMBA, L. V. R.; RODRIGUEZ, T. P. C. P., **Aplicação de equações diferenciais parciais em guias de ondas e aplicação da análise e síntese de Fourier ao processamento digital de som**. Trabalho de Extensão ACIEPE: Introdução às Séries de Fourier e EDP's. UFSCar – Sorocaba, 2020.

EVEREST, F Alton e POHLMAN, Kehn C., **Master Handbook of Acoustics**. Fifth Edition, 2009.

FARUQ, Saleth, **Radio Frequency Modulation Made Easy**. Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering. Springer, 2017.

FERNANDES, Fausto D. A. **Tópicos Iniciais de Trigonometria**. Matemática: 2º ano. Disponível em: <<https://bit.ly/3HeEbWJ>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

FEYNMAN, Richard P., **The Feynman Lectures on Physics. Volume I**. Traduzido por Adriana Válio e Kaline Rabelo Coutinho. Porto Alegre. BOOKMAN, 2008.

FIGUEIREDO, Djairo G., **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005.

FLETCHER, H. and MUNSON, W. A. **Loudness, its definition, measurement and calculation: Equal-Loudness Curves**. p. 82-108. Bell Telephonies Laboratories. The Journal of the Acoustical Society of America (JASA). 1933.

GEOGEBRA, **Comando Sequência (Textos: Capítulo 11)**. Disponível em <<https://ogeogebra.com.br/site/textos/11.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

GENUIT, Klaus. **Sound Quality Aspects for Environmental Noise**. The 2002 international Congress and Exposition on Noise Control Engineering Dearborn, MI, USA. 2002.

GUNTHER, Leon. **The physics in Music and Color**. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.

HALLAL, R.; PINHEIRO, N. A. M.; OLIVEIRA, R.; CIAPPINA, J. R.; ALVARISTO, E. F., **O Ensino de matemática e o software GeoGebra: apresentando potencialidades dessa relação como recurso para o ensino da derivada**. Revista Espacios. Educação. v. 41, n. 33. 2020.

HARTMANN, W. M. **Principles of Musical Acoustics**. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer. New York, 2013.

HELMHOLTZ, H. V. **On the Sensations of Tone: As a Physiological Basis for the Theory of Music**. Translated by Alexander J. Ellis. London, Longman, 1875.

HOHENWARTER, M. **GeoGebra Quickstart: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra**. 2007. Disponível em: <https://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2022.

HOHENWARTER, M. and JONES, K., **Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra**. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, v. 27, n. 3, p. 126-131. 2007.

HOHENWARTER, M. and PREINER, J., **Dynamic Mathematics with GeoGebra**. The Journal of Online Mathematics and Its Applications. v. 7. Article ID 1448. 2007. Disponível em: <https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html>. Acesso em: 5 abr. 2022.

HOWARD, David M. and ANGUS, Jamie A. S., **Acoustics and Psychoacoustics**. Fifth Edition published, 2017.

HUCKVALE, Mark. Speech, Hearing & Phonetic Sciences: **3. Audio signals and systems – Topics: Types of sound**. Division of Psychology and Language Sciences. University College London (UCL), 2021. Disponível em <<https://www.phon.ucl.ac.uk/courses/pals0009/week3.php>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION (IEC). **Audio Recording - Compact Disc Digital Audio System**, 16908. Londres, 1999.

KADIS, Jay. **The Science of Sound Recording**. First Edition. Focal Press is an imprint of Elsevier. 2012.

KARRAS, Damien, **SSadditiveblock**. 2007. Disponível em <<https://bit.ly/3s1VCDG>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS J. V., **Fundamentals of Acoustics**. Fourth Edition. Jon Wiley & Sons, Inc. 2000.

LAGO, B. L., **A guitarra como um instrumento para o ensino de física ondulatória**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 1, 2015.

LEÃO FIGUEIREDO, Fábio. **Parâmetros Acústicos Subjetivos: Critérios para Avaliação da Qualidade Acústica de Salas de Música**. Dissertação de Mestrado em Musicologia. Universidade Estadual de São Paulo (USP), 2005.

LIGHTHILL, M. J., **Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions**. Published by Cambridge University Press. 1959.

LIMA, Elon Lages, **Funções Trigonométricas (Números e Funções Reais)**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.

LPSA (LINEAR PHYSICAL SYSTEMS ANALYSIS). **Phasor Introduction and Demo**. Department of Engineering at Swarthmore College. 2005 to 2021. Disponível em: <<https://lpsa.swarthmore.edu/BackGround/phasor/phasor.html>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

LOY, D. Gareth, **Musimathics: The Mathematical Foundations of Music, Volume 1**. The MIT Press. Cambridge, Massachussets, 2006.

LOY, D. Gareth, **Musimathics: The Mathematical Foundations of Music, Volume 2**. Foreword by John Chowning. The MIT Press. Cambridge, Massachussets, 2007.

MAIA Jr, Adolfo; MANZOLLI, Jônatas. **Modelagem Matemática em Composição Musical**. Núcleo Interdisciplinar de comunicação Sonora (NICS) – UNICAMP – Apresentação em 2002. Disponível em: <<https://slideplayer.com.br/slide/3960267/>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

MACLEOD, K. **Hypnothis**. Disponível em: <<https://incompetech.com/music/royalty-free/index.html?isrc=USUAN1100634>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

MICHAELIS, **Minidicionário Escolar da Língua Portuguesa**. São Paulo. Companhia Melhoramentos, 2000.

MILETTO, E. M., COSTALONGA, L. L., FLORES, L. V., FRITSCH, E. F., PIMENTA, M. S. e VICARI, R. M., **Introdução a Computação Musical**. IV Congresso Brasileiro de Computação – UFRS. 2004.

MONTEIRO JUNIOR, F. N. & CARVALHO, W. L. P. **O Ensino de Acústica nos Livros Didáticos de Física Recomendados pelo PNLEM: Análise das ligações entre a Física e o Mundo do Som e da Música**. Artigo, 2011.

MOORER, F. Richard, **The Elements of Computer Music**. University of California, San Diego, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

MOORER, J. A. and GREY, J. M. **Lexicon of Analyzed Tones (Part 3: The Trumpet)**. Computer Music Journal, v. 2, n. 2, p. 23-31. 1977.

MCCLELLAN, James H.; SCHAFER, Ronald W.; YODER, Mark A.; **DSP First: A Multimedia Approach**. Prentice Hall, 1998.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física de Básica 2: Oscilações e ondas**. p. 39-151. Quarta edição. Editora blucher, 1984.

OLIVEIRA, Adriana T. E., **Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/SBM. Universidade Federal do Mato Grosso - UFMG, 2019.

OLIVEIRA, Edmundo C. e TYGEL, Martin, **Métodos Matemáticos para Engenharia**. Editora UNICAMP, 2005.

OLIVEIRA, Edmundo C. e VAZ JR, Jayme, **Métodos Matemáticos**. v. 2. Editora UNICAMP, 2016.

PAIN, H. J. **The physics of vibrations and waves**. Sexta edição. Formerly of Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK, 2005.

PASCO Scientific. **Frequencies of sound and average range of hearing (figure)**. Disponível em: <<https://bit.ly/3u9ZncY>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

PLACK, Christopher. J. **The Sense of Hearing**. Second Edition. Psychology Press. 2014.

PLOMP, Reinier. **The Intelligent Ear: On the Nature of Sound Perception**. University Amsterdam. Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

PLOS Biology. **Computation Provides a Virtual Recording of Auditory Signaling**. PLOS Biology. v. 3, n. 1, e26. 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0030026.g001>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

PEREIRA, Rupert. **Fasores e Números Complexos**. Departamento da área e Eletro-Eletrônica. Instituto Federal do Mato Grosso. 2017.

PSICOACÚSTICA e qualidade sonora. Engenharia Acústica (EAC). Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Disponível em: <<https://www.eac.ufsm.br/pesquisa/qualidade-sonora>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

RAICHEL, D. R. **The Science and Applications of Acoustics**. Second edition. Springer, 2006.

RIGDEN, J. S., **Physics and the Sound of Music**, 2ª Edition. John Wiley and Sons, 1985.

ROADS, C., **The Computer Music Tutorial**. Massachusetts Institute of Technology, 1996.

ROEDERER, Juan G., **Introdução à Física e Psicofísica da Música**. Springer, 1975. Tradução por Alberto Luiz da Cunha. Editora da universidade de São Paulo (EDUSP), primeira edição, primeira reimpressão: 2002.

ROEDERER, Juan G., **The Physics and Psychophysics of Music An Introduction**. Fourth edition. Springer, 2008.

- ROLLA, V. G.; KESTENBERG, J.; VELHO, L., **Música, Matemática e Computação**. Relatório Técnico. Laboratório VISGRAF. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). 2017.
- ROSEN, S. & HOWELL, P., **Signals and Systems for Speech and Hearing**. Second edition, Emerald Press, 2011.
- RUSS, M., **Sound Synthesis and Sampling**. Department in Oxford, Third Edition, 2009.
- SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. São Paulo: SEE, 2011.
- SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Matriz de Avaliação Processual: Matemática**. São Paulo: SE, 2016.
- SÁNCHEZ, Jaime, A. M., **Controle Ativo Acústico Estrutural: Projeto, Simulação e Análise de Qualidade Sonora**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.
- SAUTER, Ezequia e AZEVEDO, Fábio Souto, **Análise de Fourier: Um Livro Colaborativo**. Licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. UFRJ, 2020. Acesso em: 5 abr. 2022.
- SERRA, F. L. F., **Áudio digital: a tecnologia aplicada a música e ao tratamento de som**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2002.
- SOBRE O NICS, **Núcleo Interdisciplinar de comunicação Sonora (NICS) – UNICAMP**. Disponível em: <<https://www.nics.unicamp.br/institucional/sobre-o-nics/>>. Acesso em: 17 abr. 2022.
- SHEPARD, Brian K., **Refining Sound: A Practical Guide to Synthesis and Synthesizers**. Published in the United States of America by Oxford University Press, 2013.
- SILVA, Lucas T.; GROENWALD, Claudia L. O.; HOMA, Agostinho I. R., **Um estudo sobre a execução de sons e criação de músicas no software GeoGebra**. Artigo da Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, p. 25-45, v.6, n.2, 2017.
- SOUZA, Uender B., **Guia de Comandos do GeoGebra: Exemplos e Problemas**. Instituto GeoGebra de Góias (IGGoiás), 2017.
- SMITH, S. **The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing**. San Diego: California Technical Pub, 1997.
- STEVENS, S. S. **Measurement of Loudness**. Journal of the Acoustical Society of America (JASA), 27:815. 1955.

STEWART, James; REDLIN, Lothar; WATSON, Saleem., **Algebra and Trigonometry**. Segunda edição. Thomson Brooks/Cole, 2007.

SUEUR, J. **Sound Analysis and Synthesis with R**. Springer, 2018.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE, M. C. J. M.; GRANDO, A. R.S.; KONRATH, M. L. P. **Objetos de Aprendizagem para M-Learning**. Florianópolis: SUCESU - Congresso Nacional de Tecnologia da Informação e Comunicação. 2004.

TAYLOR, F. J., **Principles of Signals and Systems**. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. New York: McGraw- Hill, 1994.

U(iki)TFPR. **Representação da Onda Sonora**. 2019. Disponível em <<https://bit.ly/3udRhZR>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

VISTNES, Arnt Inge. **Physics of Oscillations and Waves With use of Matlab and Python**. Undergraduate Texts in Physics. Translated by Razi Naqvi. Springer, 2018.

WHEELER, R. M., **The Science of Sound**. Pearson New International Edition. Third edition, 2014.

WISNICK, José Miguel. **O som e o sentido: uma outra história das músicas**. Companhia das Letras, 2006.

YAMAHA, Corporation. **Figure 4.13: psycho acoustics: main parameters of the perception of audio characteristics**. 2019. Disponível em: <<https://yamaha.io/344HXnp>>. Acesso em: 5 abr. 2022.

ZANATO, Fernando da Silva. **Matemática e Música: Relações entre as Séries e Tranformadas de Fourier e a Teoria Musical**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Instituto de Matemática. Sinop, 2017.

ZETRIUSLITA, Z.; NOFRIYANDI, N.; ISTIKOMAH, E., **The Effect of Geogebra-Assisted Direct Instruction On Students' Self-Efficacy And Self-Regulation**. Infinity Journal of Mathematics Education, v. 9, n. 1. 2020.

ZWICKER, E.; FASTL, H., **Psychoacoustics - Facts and Models**, Springer, 1999.

APÊNDICE A – Applets construídos no GeoGebra

Forma de Onda Cosseno: <<https://www.geogebra.org/m/h3tndntu>>.

Forma de Onda Seno: <<https://www.geogebra.org/m/qhpnjnkr>>.

Sinal Harmônico: <<https://www.geogebra.org/m/jvnz8jdm>>.

Batimento: <<https://www.geogebra.org/m/tsggfchv>>.

Síntese Aditiva de Sete Harmônicos: <<https://www.geogebra.org/m/dtsdza5h>>.

Síntese de Onda Triangular: <<https://www.geogebra.org/m/dsubkc7e>>.

Síntese de Onda Quadrada: <<https://www.geogebra.org/m/tnqfs5yw>>.

Síntese de Onda Dente de Serra: <<https://www.geogebra.org/m/agfcvexd>>.

Síntese de Onda Trem de Impulsos: <<https://www.geogebra.org/m/wsanykpc>>.

Síntese por Modulação de Amplitude (AM): <<https://www.geogebra.org/m/hkxuvy3h>>.

Síntese por Modulação de Frequência (FM): <<https://www.geogebra.org/m/ftvtvmav>>.

Sinal Harmônico (Atividade 2.1): <<https://www.geogebra.org/m/mu3v6au3>>.

Batimento (Atividade 2.2): <<https://www.geogebra.org/m/vurxqdjf>>.

Síntese de Bicorde (Atividade 3.1): <<https://www.geogebra.org/m/aznupdzs>>.

Síntese de Tríade (Atividade 3.2): <<https://www.geogebra.org/m/ktuqs3td>>.

Síntese de Onda Dente de Serra (Atividade 4.1): <<https://www.geogebra.org/m/u7br3x7y>>.

Síntese de Onda Quadrada (Atividade 4.2): <<https://www.geogebra.org/m/wk9chfey>>.

ANEXO A – Código do programa Reconposição do Áudio Digital

```

from scipy.io import wavfile
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d, Axes3D
import sounddevice as sd
import soundfile as sf

"""
    Calcula os coeficientes até o enésimo valor
    Recebe: Array com os dados da função
    Retorna: Array de duplas contendo os coeficientes An e Bn
"""
def CoefCalc(func, N):
    result = []
    T = len(func)
    t = np.arange(T)
    for n in range(N+1):
        an = 2/T*(func * np.cos(2*np.pi*n*t/T)).sum()
        bn = 2/T*(func * np.sin(2*np.pi*n*t/T)).sum()
        result.append((an, bn))
    return np.array(result)

"""
    Função que calcula a soma parcial da série de Fourier
    Recebe: Array de duplas contendo os valores de an e bn
    Retorna: Array contendo os dados da função reconstruída até len(anbn)
"""
def Reconstroi(P, anbn):

    result = 0
    t = np.arange(P)
    for n, (a, b) in enumerate(anbn):
        if n == 0:
            a = a/2
    result = result + a*np.cos(2*np.pi*n*t/P) + b*np.sin(2*np.pi*n*t/P)
    return result

"""
    Função que normaliza a matriz em inteiro de 16 bits
    Recebe: Array com dados a serem normalizados
    Retorna: Array com os dados normalizados
"""
def Nomalize16Bit(func):

    output = []

    for n in func:
        output.append(n/0x10000)

    return output

#Solicita do usuário o nome do arquivo de entrada
f_name = input("Digite no arquivo:")

```

```
#Solicita do usuário o número de coeficientes a serem calculados
nc = input("No de coeficientes a serem calculados:")

#Normaliza o áudio de entrada
norm = Nomalize16Bit(data)

#Calcula os coeficiente e os salva em vetor de duplas
coef = CoefCalc(norm,nc)

#Reconstrói os dados com No de coeficientes
rec = Reconstroi(len(data),coef)

#Grava em disco o novo arquivo compactado
sf.write((str(nc)+".flac"), rec, fs)
```