

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA (CCN)  
*CAMPUS LAGOA DO SINO*

GUILHERME DA CUNHA E SILVA

SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA UM MODELO DE  
SECAGEM DA BANANA VIA MÉTODO DE  
DIFERENÇAS FINITAS

BURI-SP

2022

GUILHERME DA CUNHA E SILVA

SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA UM MODELO DE SECAGEM DA BANANA VIA  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Centro de Ciências da Natureza (CNN) da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Alimentos.

Orientador(a): Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Júlia Silva Silveira Borges

BURI –SP

2022

GUILHERME DA CUNHA E SILVA

SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA UM MODELO DE SECAGEM DA BANANA VIA  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Centro de Ciências da Natureza (CNN) da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Alimentos.

Aprovado em: 1º/04/2022.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr.ª Júlia Silva Silveira Borges  
(Orientadora)  
Universidade Federal de São Carlos

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MOYSES NAVES DE MORAES  
Data: 04/04/2022 14:31:16 -0300  
Verifique em <https://verificador.itl.br>

---

Prof. Dr. Moysés Naves de Moraes  
Universidade Federal de Viçosa



---

Prof. Dr. Gabriel Lopes da Rocha  
Universidade Federal do Maranhão

## FICHA CATALOGRÁFICA

Cunha e Silva, Guilherme da

Soluções numéricas para um modelo de secagem da banana via método das diferenças finitas / Guilherme da Cunha e Silva -- 2022.

44f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Lagoa do Sino, Buri

Orientador (a): Júlia Silva Silveira Borges

Banca Examinadora: Júlia Silva Silveira Borges, Moysés

Naves de Moraes, Gabriel Lopes da Rocha

Bibliografia

1. Secagem de Banana. 2. Modelagem Matemática. 3. Método das Diferenças Finitas. I. Cunha e Silva, Guilherme da. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Lissandra Pinhatelli de Britto - CRB/8 7539

## **AGRADECIMENTO**

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e condições para realização dessa graduação, também agradeço aos amigos que tive o privilégio de conhecer ao longo desses anos, aos profissionais da área que contribuíram com toda sua experiência para o meu aprendizado, a todos os professores que contribuíram de alguma forma na minha trajetória, a minha orientadora do TCC, Julia Silva Silveira Borges, com suas orientações, dicas e ensinamentos para obter um trabalho de excelência, e aos meus familiares que sempre me apoiaram e foram meu porto seguro.

## RESUMO

Devido a banana ser um alimento de alto valor energético, possuir produção de baixos índices tecnológicos e apresentar grande importância socioeconômica para o Brasil, o aumento da vida de prateleira é almejado. A secagem é um dos processos mais usados na conservação e a manutenção de suas qualidades, cujo objetivo máximo é obtenção de um produto com maior vida de prateleira, isenção de refrigeração pós-processamento, menor degradação enzimática e oxidativa. Por outro lado, para o dimensionamento de equipamentos e controle ótimos dos processos, é necessário um claro entendimento dos fenômenos de transporte, transferência de calor e massa, das propriedades envolvidas e da escolha correta do método numérico para a resolução das equações oriundas da discretização. Neste sentido, foram desenvolvidos e estudados dois métodos numéricos, Métodos das Diferenças Finitas Progressiva e Método das linhas, com o objetivo de se estudar as transferências. Simulações no *Software Octave* foram realizadas a fim de aferir a ordem de convergência do método aplicado a um problema simplificado.

Palavras chaves: Banana. Secagem. Diferenças Finitas. Estabilidade. Convergência.

## **ABSTRACT**

Since banana is a food of high energy value, has low production technological indexes and has great socioeconomic importance for Brazil, the increase in shelf life is desired. Drying is one of the most used processes in conservation and maintenance of its guarantees, whose main objective is the quality of a product with longer shelf life, post-processing refrigeration exemption and shorter enzymatic and oxidative degradation. On the other hand, for the dimensioning of equipments and optimal process control, is required a clear understanding of the transport phenomena, heat and mass transfer, the properties involved and the correct choice of the numerical method for solving the equations derived from the discretization. In this sense, two numerical methods were developed and studied, Progressive Finite Difference Method and Method of Lines, in order to study the transfers. Simulations in Octave Software were performed in order to check the convergence order of the method applied to a simplified problem.

**Keywords:** Banana. Drying. Finite Differences. Stability. Convergence.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Diferença entre os três métodos de diferenças finitas.....	20
Figura 2 - Método Explícito. ....	22
Figura 3 - Método Implícito. ....	23
Figura 4 - Método de Crank-Nicholson.....	24
Figura 5 - Representação geométrica de uma fatia de banana considerando um modelo unidimensional para secagem. ....	26
Figura 6 - Discretização do intervalo $l = [0,1]$ . ....	30
Figura 7 - Soluções aproximadas para $h = 0,1$ . ....	30
Figura 8 - Soluções aproximadas para $h = 0,05$ . ....	31
Figura 9 - Soluções aproximadas para $h = 0,0125$ . ....	31
Figura 10 - Erro gráfico das soluções aproximadas usando ode45 com AbsTol e RelTol alterados.....	33
Figura 11 - Ajuste de curva usando métodos de mínimos quadrados lineares.....	34
Figura 12 - Distribuição da umidade na banana. ....	35
Figura 13 - Distribuição da temperatura na banana.....	35

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Parâmetros de entrada usados nas simulações de secagem de fatias de banana. .....	28
Quadro 2 - Erro das soluções aproximadas usando ode45. ....	32
Quadro 3 - Erro das soluções aproximadas usando ode45 com AbsTol e RelTol alterados. .....	33

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>2 OBJETIVO</b> .....	13
2.1 OBJETIVO GERAL.....	13
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	13
<b>3 REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	13
3.1 MATÉRIA PRIMA E SECAGEM.....	13
3.2 SECAGEM DE ALIMENTOS.....	14
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	15
3.4 DEFINIÇÕES BÁSICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	16
<b>3.4.1 Equação Diferencial</b> .....	16
<b>3.4.2 Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem</b> .....	16
3.6 ERRO DE TRUNCAMENTO .....	17
3.7 DISCRETIZAÇÃO .....	18
<b>3.7.1 Condições de Contorno</b> .....	18
3.8 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (FDM).....	19
3.9 SÉRIE DE TAYLOR .....	20
3.10 CONSISTÊNCIA, CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE .....	20
<b>3.10.1 Consistência</b> .....	21
<b>3.10.2 Convergência</b> .....	21
<b>3.10.3 Estabilidade</b> .....	21
<b>3.10.4 Aplicação do Método Explícito na Equação do Calor</b> .....	21
<b>3.10.5 Aplicação do Método Implícito na Equação do Calor</b> .....	22
<b>3.10.6 Método de Crank - Nicholson</b> .....	23
<b>3.10.7 Método das Linhas</b> .....	24
<b>4 METODOLOGIA DA PESQUISA</b> .....	25

<b>5 PROBLEMA PROPOSTO</b> .....	25
5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA .....	25
5.2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO .....	25
5.3 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA E CALOR .....	25
<b>6 RESULTADOS</b> .....	27
6.1 APLICAÇÃO .....	28
6.2 APLICAÇÃO MÉTODO DAS LINHAS (MOL) .....	29
6.3 ERRO COMPUTACIONAL .....	31
6.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO NA SECAGEM DA BANANA .....	34
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	36
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	38
<b>APÊNDICE A – Rotina principal do problema simplificado.</b> .....	41
<b>APÊNDICE B – Rotina que calcula o sistema de equações diferenciais do problema simplificado.</b> .....	42
<b>APÊNDICE C – Rotina principal do código da banana.</b> .....	43
<b>APÊNDICE D – Rotina que calcula o sistema de equações diferenciais do problema da secagem da banana.</b> .....	44

## 1 INTRODUÇÃO

Todos os processos naturais conhecidos ou desenvolvidos pela humanidade podem ser descritos quanto suas características, peculiaridades e limitações através da matemática, e desse modo, com o intuito de conservar a espécie frutífera banana (*Musa ssp.*) do ramo frutífero do Brasil, pois estudos apontam inúmeras perdas ao longo da cadeia produtiva, é necessário aplicar métodos de conservação (BI et al., 2017).

Neste contexto, a secagem, a qual também é um processo natural, pode ser aplicada de forma otimizada para contribuir na preservação dos alimentos, sendo este, um processo simples, barato e de fácil aplicação para a indústria alimentícia. Tal processo visa a eliminação de água da banana, contribuindo positivamente na preservação contra microrganismos, pois este é um meio indispensável para reprodução e desenvolvimento dos mesmos. Além deste principal ponto, a secagem reduz o peso do produto final, reduzindo custos quanto embalagens, armazenamento e transporte, e ainda, oferta o alimento processado durante um longo período (MELONI, 2003).

Para escolher o método de secagem adequado para o objeto de estudo deste trabalho, deve-se analisar inúmeros fatores junto ao desenvolvimento da modelagem matemática, como tempo de processo, velocidade de troca de calor entre ar e matéria prima. Tais fatores podem ser avaliadas através das características físico-químicas do alimento, como a difusividade efetiva, térmica, coeficiente de transferência de massa, temperatura e etc. Segundo Bassanezi (2011), um modelo matemático “é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno em análise”, e dessa forma, o presente trabalho busca encontrar uma solução numérica para a cinética de secagem de fatias de banana (*Musa ssp.*) através do método de diferença finita, o qual é utilizado para resolver equações diferenciais, aproximando-as com equações de diferença, nas quais as diferenças finitas se aproximam de tais derivadas.

Iniciamos este trabalho no capítulo 3 com uma revisão de literatura acerca dos conteúdos relevantes para o entendimento do processo de secagem da banana. Dessa forma, as equações que regem o problema da secagem da banana, se classificam como equações diferenciais parabólicas de segunda ordem. Para a transferência de massa, a equação é regida pela segunda Lei de Fick enquanto a de difusão de calor segue a Lei de Fourier. O modelo matemático apresenta condições de contorno no eixo de simetria e na

superfície sendo que estas dependem da derivada de massa e temperatura, sendo classificadas, portanto, como condições de Neumann.

Serão apresentados no capítulo 6 os resultados dos métodos numéricos primeiramente aplicado a um problema parabólico simples e posteriormente a secagem da banana onde pode-se observar graficamente o comportamento da umidade e temperatura nos pontos da malha.

## **2 OBJETIVO**

### **2.1 OBJETIVO GERAL**

Desenvolver um método numérico que resolva o problema da secagem da banana através de uma modelagem matemática com umidade e calor transferidos simultaneamente.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Estudar os fenômenos de transporte durante a secagem da banana;
- Compreender as equações diferenciais parabólicas que descrevem a transferência de temperatura e umidade da banana;
- Estudar um modelo de secagem da banana;
- Compreender o Método de Diferenças Finitas;
- Estudar os conceitos de consistência, convergência e estabilidade dos métodos numéricos;
- Desenvolver um modelo matemático unidimensional, aplicando resolução numérica;
- Desenvolver um código para aplicação do método e simulação da secagem;
- Comparar resultados numéricos com experimentais encontrados na literatura;

## **3 REVISÃO DE LITERATURA**

O modelo matemático de secagem de banana utilizado envolve um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) cujas equações são equações de transferência de calor. Neste sentido, o objeto do estudo da revisão de literatura é uma breve introdução da matéria prima, das EDPs, da equação do calor e dos métodos numéricos para obter as soluções aproximadas.

### **3.1 MATÉRIA PRIMA E SECAGEM**

Atualmente o Brasil se encontra como um dos principais produtores de banana (*Musa ssp.*) do mundo, disputando com Índia, China e Indonésia, e praticamente toda sua produção é destinada para o mercado nacional, sendo aproximadamente 1% exportado

para outros países, segundo dados do IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2017). Além de possuir enorme importância econômica no Brasil, se destaca entre as produções frutíferas no território.

A cultura da banana ganha esse destaque no âmbito mundial e nacional, pois apresenta inúmeras vantagens em termos econômicos e nutricionais, das quais se destacam: a cultura ocupa o segundo lugar em volume de produção em território nacional, o cultivo é distribuído por todas as regiões do país apresentando melhores condições climáticas nas regiões Norte e Nordeste, possui baixo custo de produção, alto índice energético com alto teor de carboidratos (amido e açúcares), além de conter teores consideráveis de vitaminas A, B1, B2 e C e de sais minerais como potássio, fósforo, cálcio, sódio e magnésio (BORGES, A. 2006).

Em contrapartida, por mais que o Brasil esteja classificado como um grande produtor e consumidor, a bananicultura apresenta sérios problemas de pós colheita, sendo que aproximadamente 15% das bananas não apresentam valor comercial, impactando ainda mais no desperdício (BI et al., 2017). Corroborando com os altos índices de perdas, a banana é um alimento com rápida deterioração, acarretando em uma vida de prateleira (*shelf life*) curta (SOUZA, 1993). Esse breve *shelf life* é justificado por Castro Júnior & Arenillo (2016), que afirmam que o escurecimento da banana é causado pela enzima polifenoloxidase, responsável por catalisar a oxidação dos fenóis, dando origem às quininas, sendo que estas se polimerizam, dando origem à melanina. Esta melanina é conhecida como os pigmentos escuros, e durante o processamento dos alimentos, é necessário inibir este escurecimento e, conseqüentemente, a degradação do alimento. Para isto, a indústria normalmente utiliza aditivos, como antioxidantes, para manter a qualidade ao final do processamento.

### 3.2 SECAGEM DE ALIMENTOS

Na mesma perspectiva de manter a qualidade final do produto, como os antioxidantes, ganha destaque o processo de secagem de alimentos, do qual pesquisas apontam constantes evoluções para alcançar métodos e otimizar os já existentes, a fim de produzir alimentos com mínimas alterações sensoriais e nutritivas, quando comparadas com frescos (PARK et al., 2004).

A operação de secagem de frutas, no geral, é um dos processos mais simples e econômicos na relação custo benefício, cujo objetivo principal é a eliminação de água por evaporação. O processo consiste em submeter ar quente na superfície do alimento para

remoção de boa parte da água após sua maturidade fisiológica (SOUSA et al., 2015). Esse ar causa uma evaporação da água superficial e, conseqüentemente, gera um gradiente de concentração entre o interior e a superfície, acarretando na migração da água para o ambiente.

Dessa forma, de acordo com as considerações mencionadas anteriormente, verificamos que, o estudo da influência das variáveis do processo de secagem é de extrema importância. Há uma necessidade de descrever matematicamente o processo de secagem, pois a precisão das características físico-químicas do material em determinados pontos, fornecerá as condições ideais ao processo, possibilitando um desenvolvimento apropriado ou aperfeiçoamento de equipamentos, acarretando na diminuição de custos (DOYMAZ & GÖL, 2011; OZUNA et al., 2014; STURM et al., 2014; RUSSO et al., 2013).

### 3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A linguagem matemática é comumente utilizada para estudar diversas áreas do conhecimento, tais como física, engenharia e biologia, nas quais os problemas envolvendo movimento de fluidos, transferência de calor, e etc., podem ser descritos através das equações diferenciais.

As equações diferenciais têm grande relevância por serem ferramentas poderosas e apresentarem inúmeras possibilidades de soluções e não apenas uma que a satisfaça. Porém, dependendo da aplicação, seu resultado pode se tornar complexo, o que dificulta ou até mesmo impossibilita sua solução exata por meio de métodos analíticos. Dessa forma, mediante a grande necessidade de obter soluções cada vez mais complexas alinhadas com o avanço computacional, tem-se o surgimento dos métodos numéricos.

Existem diversos tipos de métodos numéricos utilizados para encontrar a solução. Dentre eles, esta pesquisa utilizará o método das diferenças finitas. Esse método é uma abordagem que se baseia na aproximação das derivadas por diferenças finitas, o qual consiste em substituir equações diferenciais por equações algébricas, obtendo resultados nos pontos discretos do intervalo considerado (INCROPERA et. al., 2008).

Problemas que envolvam transferência de calor causado por um gradiente de temperatura, podem ser retratados por essas equações diferenciais parciais. Tais equações determinam como ocorre a distribuição de temperatura em um corpo, e dessa forma, neste trabalho, será abordado o método das diferenças finitas progressivas e o método das linhas

aplicado a um problema mais simplificado e posteriormente ao de maior complexidade, afim de verificar as limitações das simplificações dos modelos e a ordem do erro.

### 3.4 DEFINIÇÕES BÁSICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma vez que as equações do modelo matemático que descreve a secagem da banana são equações diferenciais parciais parabólicos de segunda ordem, descreveremos nos próximos itens a definição e classificação de tais equações.

#### 3.4.1 Equação Diferencial

Em matemática, as equações diferenciais são aquelas cujas incógnitas são funções e ao menos uma derivada ou diferencial destas funções. Elas podem ser divididas em dois tipos: as EDOs e as EDPs. As equações diferenciais ordinárias (EDOs) contêm apenas funções de uma variável e derivadas desta mesma variável e possui a seguinte forma:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad (1)$$

sendo  $x$  a variável independente,  $y$  a dependente e  $n$  a maior ordem da derivada presente na equação. Já as equações diferenciais parciais (EDPs) contêm funções com mais do que uma variável e suas derivadas parciais, sendo representada por:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (2)$$

sendo  $(x_1, \dots, x_n)$  variáveis independentes e  $u$  a variável dependente. Por fim, as EDPs podem ser classificadas de acordo com sua linearidade, ou seja, podem ser lineares ou não lineares. Já a ordem da equação é determinada pela maior ordem da derivada presente.

#### 3.4.2 Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem

Muitos fenômenos que ocorrem nas diversas áreas, como mecânica, fluidos e biologia, podem ser expressos através de uma equação diferencial parcial, por exemplo a lei física de Newton para resfriamento dos corpos.

As equações diferenciais de segunda ordem podem ser classificadas em três tipos: hiperbólicas, parabólicas e elípticas, e possuem tal formato:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F(u) = G(x, y), \quad (3)$$

sendo, A, B, C, D, E e G constantes ou funções que dependem de  $x$  e  $y$ . Os coeficientes A, B e C são tais que:

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (4)$$

Se tais coeficientes forem constantes, pode-se classificar as EDPs lineares de forma análoga às curvas cônicas tridimensionais, através das seguintes relações:

$$\text{EDPs **Hiperbólicas**: } B^2 - 4AC > 0, \quad (5)$$

$$\text{EDPs **Parabólicas**: } B^2 - 4AC = 0, \quad (6)$$

$$\text{EDPs **Elípticas**: } B^2 - 4AC < 0. \quad (7)$$

### 3.5 EQUAÇÃO DO CALOR

De acordo com a seção anterior, a equação de difusão do calor unidimensional se classifica como uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem a qual determina como a temperatura se comporta com a variação da posição do meio e tempo através da lei de Fourier. (INCROPERA et. al., 2008). A equação envolve duas variáveis independentes  $t$  e  $x$ , e uma varável dependente  $u(t, x)$  e é dada por

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R} \quad (8)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  e representa a difusividade térmica, ou seja, um parâmetro que depende apenas do material estudado. Através da equação do calor é possível expressar que a taxa de calor que entra em qualquer parte do objeto de estudo é igual à taxa de absorção de calor naquela parte.

A forma geral da equação do calor no espaço tridimensional, em coordenadas cartesianas, é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q = \rho s \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (9)$$

sendo,  $k, \rho$  e  $s$  constantes que representam a condutividade térmica, densidade e calor específico do material em estudo, respectivamente. Dessa forma, a equação explicita um balanço de energia, sendo que em qualquer ponto do interior, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somada a taxa volumétrica de geração de energia térmica é igual a taxa de variação da energia acumulada no interior.

### 3.6 ERRO DE TRUNCAMENTO

Erro é entendido como a diferença entre o valor real, ou exato, e aquele valor aproximado obtido. Dessa forma, a noção de erro está presente em todos os campos do cálculo numérico e são inerentes aos modelos construídos e não apenas da realização de seus cálculos. De um lado, os dados em si nem sempre são exatos e, de outro lado, as manipulações desses mesmos valores não exatos resultam na propagação até seus

resultados. Por outro lado, o erro de truncamento é proveniente da parte que é desconsiderada na aproximação, ou seja, do truncamento de expressões para transformar uma modelagem matemática analítica em uma modelagem matemática numérica (CHAPRA, 2010).

### 3.7 DISCRETIZAÇÃO

Para trabalhar computacionalmente um problema de caráter diferencial, é preciso escolher de forma adequada um método de discretização, de maneira que este resulte em uma equação de diferença estável e consistente (CUMINATO, 2013). Nesse contexto, ganham-se destaque os métodos de diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos, sendo que, a convergência das soluções numéricas está intrinsicamente relacionada com a consistência e a estabilidade da equação discretizada (FERZIGER, 2002).

Para o problema diferencial, sua discretização é realizada através da substituição das derivadas existentes na equação por operadores discretos. Primeiramente, gera-se uma malha, ou seja, uma representação da região ou domínio do problema, dividindo-o em pequenas regiões finitas, chamados de nós ou pontos nodais. Dependendo do problema proposto, pode-se utilizar um sistema de coordenadas cartesianas, esféricas, cilíndricas ou generalizadas para que assim, seja possível adequar melhor a geometria de problemas reais (FORTUNA, 2000; CUMINATO, 2013; MALISKA, 1995).

A distância entre os nós é chamada passos e a exatidão da solução vai depender da dimensão escolhida, pois, conforme esses espaçamentos tendem a zero, espera-se a convergência das soluções aproximadas para a solução exata. Porém, quanto menor o espaçamento entre os pontos nodais, maior será o número de interações, influenciando diretamente na memória computacional (QIN, 2010).

#### 3.7.1 Condições de Contorno

Além da equação diferencial envolvendo a derivada da função, a resolução de Problemas de Valor de Contorno necessita que determinadas condições de contorno também sejam consideradas em determinados pontos do domínio. Dessa forma, são apresentados a seguir os tipos de condições que são comumente encontradas nos problemas envolvendo equações diferenciais parciais:

- Condição de Dirichlet: um valor específico da variável dependente é apresentado no contorno.
- Neumann: um valor específico para a derivada da variável dependente, ou gradiente, é apresentado no contorno;

- Cauchy (Robin): uma combinação dos dois tipos de condições anteriores.

### 3.8 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (FDM)

Como uma alternativa rápida e barata computacionalmente, a resolução numérica dos fenômenos de interesse acadêmico ou industrial são de extrema importância, pois na engenharia, dificilmente se conhece a solução matemática analítica do fenômenos físicos, de modo a serem limitadas a problemas simplificados com geometria simples, ou seja, o problema deve ser ajustado em sistema de coordenadas conhecidas. Dessa forma, utiliza-se o método de diferença finita (FDM – *Finite Difference Method* em inglês), o qual é um método numérico para resolver equações diferenciais, aproximando-as com equações de diferença, nas quais as diferenças finitas se aproximam das derivadas. O método de diferença finita é, portanto, um método de discretização que depende da malha citada nos tópicos anteriores.

Sobre o método das diferenças finitas, Ruggiero & Lopes (1996, p. 357) afirmam:

A ideia básica do método de diferenças finitas é transformar o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isso aproximações das derivadas que aparecem na equação, por diferenças finitas.

Por definição, a derivada de uma função  $u(x)$  em um ponto  $x_i$  é dada por:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{h}. \quad (10)$$

De forma aproximada, utilizando-se um incremento  $h$ , porém finito, pode-se escrever de três formas:

- Progressiva

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x_i) \cong \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad (11)$$

- Centrada

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x_i) \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad (12)$$

- Regressiva

$$\frac{\partial u}{\partial x} (x_i) \cong \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad (13)$$

onde,

$$h = \Delta x = \frac{x_n - x_1}{n-1}, \quad (14)$$

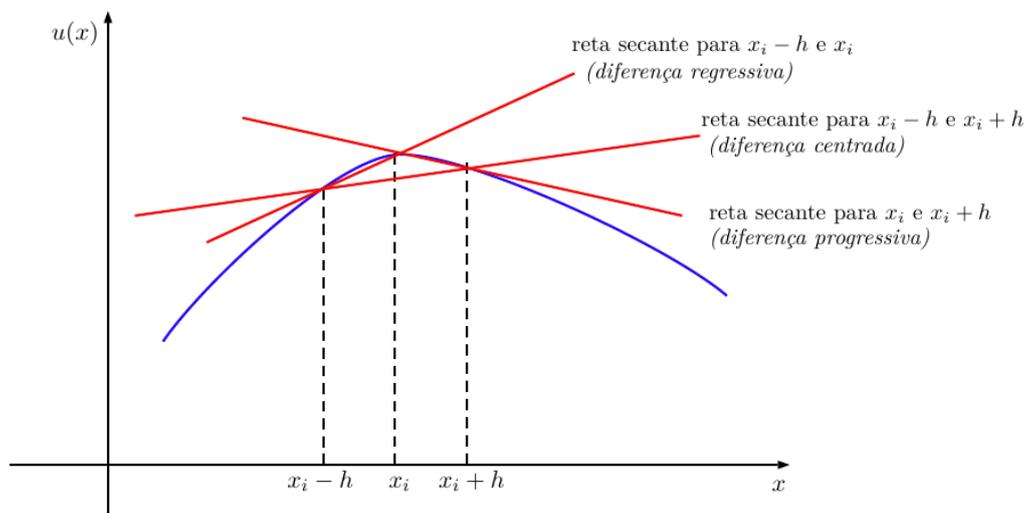
$$x_i = x_1 + (i - 1)h, \quad (15)$$

$$u_{i+1} = u(x_i + h), \quad (16)$$

$$u_i = u(x_i), \quad (17)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h). \quad (18)$$

Figura 1- Diferença entre os três métodos de diferenças finitas.



Fonte: Adaptado de ALVES, 2007, p.33.

Dessa forma, conforme  $h$  tende a zero, espera-se a convergência das soluções aproximadas, ou seja, o valor numérico se aproxima do valor real.

### 3.9 SÉRIE DE TAYLOR

A aproximação de uma função através da série de Taylor se dá pela substituição das derivadas por diferenças finitas que são obtidas pela expansão em série de Taylor. Dessa forma, o objetivo principal é determinar, de acordo com a função estudada, a melhor aproximação por meio de um polinômio (CHAPRA, 2010). O método de aproximação polinomial que melhor representa o entorno de um ponto  $a$  é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{n-1}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n. \quad (19)$$

Na teoria, poderia expandir infinitamente, desde que as derivadas de ordem superior permitissem, porém, na prática ocorre um erro de truncamento, sendo este conhecido como a forma derivada de resto, ou Resto de Lagrange, e sua representação numérica é:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}; \quad a \leq \varepsilon \leq x. \quad (20)$$

### 3.10 CONSISTÊNCIA, CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE

De modo a resolver uma equação diferencial parcial numericamente, é pertinente questionar o quanto a solução calculada se aproxima da realidade, pois o erro de truncamento local influencia na qualidade da aproximação numérica. Dessa forma, para

assegurar tal questionamento, é necessário que o esquema utilizado apresente consistência das equações discretas associadas às expressões diferenciais parciais, além de sua estabilidade e convergência, sendo esses três parâmetros, propriedades relacionadas a solução numérica e da função erro (LEVEQUE, 1992).

### 3.10.1 Consistência

De acordo com o Teorema de Equivalência de Lax, o conceito de consistência se dá quando uma equação linear de diferenças finitas é consistente com um problema de valor inicial linear, ou seja, à medida que ocorre um refinamento das aproximações, em seu limite, tais equações se tornam equivalentes às equações diferenciais originais (HIRSCH, 2007). Em outras palavras, uma equação discreta é consistente se a norma de seu erro de truncamento local tende a zero quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ .

### 3.10.2 Convergência

Como dito no tópico anterior, se a discretização for consistente, quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , o erro de truncamento local se anula e a equação diferencial parcial volta ao original. Dessa forma, caso a solução numérica no domínio de interesse se aproxime da solução exata da equação diferencial parcial, dizemos que o método numérico empregado é convergente (HIRSCH, 2007).

### 3.10.3 Estabilidade

Tal propriedade está intrinsicamente relacionada com o erro numérico, ou seja, um método de diferenças finitas será dito estável à medida que os erros gerados em um passo de tempo do cálculo não provocam perturbações (condições de fronteira ou iniciais aproximadas de forma incorreta) ou aumento dos erros (acúmulo dos erros de arredondamento) conforme progridem. De maneira geral, para a solução numérica de um problema linear adequado, através de uma discretização consistente, a estabilidade do método numérico é condição suficiente para o método ser convergente.

$$\textit{Consistência} + \textit{Estabilidade} \implies \textit{Convergência}.$$

### 3.10.4 Aplicação do Método Explícito na Equação do Calor

Como visto anteriormente, para obter a solução de uma equação diferencial, pode-se utilizar o método das diferenças finitas, cujo objetivo central é aproximar a equação por um conjunto de valores da função em um determinado número de pontos. Dessa forma, as diferenças finitas podem ser classificadas em duas formas: explícitas e implícitas. No primeiro caso, elas são mais simples e de fácil usabilidade, pois a

determinação do passo do tempo da discretização temporal é dependente da condição de estabilidade.

A equação do calor demanda de aproximações para a segunda e primeira derivada no espaço e tempo, respectivamente. Dessa forma, para representar a aproximação de segunda ordem no espaço, utiliza-se uma diferença finita centrada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) \cong \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2}. \quad (21)$$

Para a primeira derivada no tempo, utiliza-se uma diferença finita progressiva:

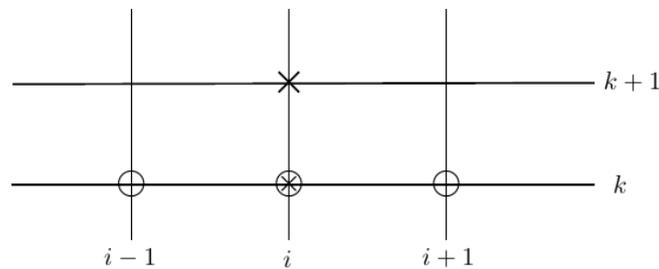
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) \cong \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}. \quad (22)$$

Por meio das aproximações, obtemos a equação final a seguir, sendo esta, utilizada para todos pontos nodais internos afim de obter valores futuros, baseando-se nos valores atuais do problema.

$$u_i^{k+1} = \beta u_{i+1}^k + (1 + 2\beta)u_i^k + \beta u_{i-1}^k, \quad (23)$$

onde  $\beta$  representa o termo adimensional de Fourier, sendo  $\beta = \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right)$ .

Figura 2 - Método Explícito.

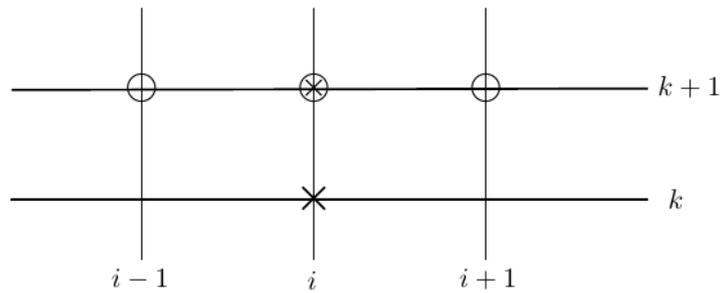


Fonte: Adaptado de CHAPRA et al. p.724.

### 3.10.5 Aplicação do Método Implícito na Equação do Calor

Como visto, o método explícito apresenta problemas relacionados com a estabilidade do método. Dessa forma, o método implícito supera essa dificuldade por ser absolutamente estável ao custo de algoritmos mais complexos, pois o passo do tempo independe da conformação espacial da grade estabelecida. Por outro lado, vale ressaltar que a estabilidade assegurada pelo método, não garante a precisão dos resultados, pois estes dependem da discretização espacial, temporal e condições de contornos.

Figura 3 - Método Implícito.



Fonte: Adaptado de CHAPRA et al. p.729.

No método implícito, a derivada temporal, de primeira ordem, é aproximada em um nível de tempo avançado

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) \cong \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad (24)$$

e a segunda derivada é aproximada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) \cong \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2}. \quad (25)$$

Por meio das aproximações, obtemos a equação final a seguir.

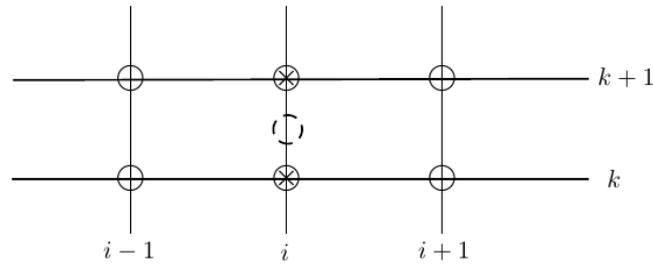
$$u_i^k = -\beta u_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\beta)u_i^{k+1} - \beta u_{i-1}^{k+1}. \quad (26)$$

Essa tem acurácia de segunda ordem e quando é substituída por completo, a equação de diferenças resultantes contém inúmeras incógnitas, sendo impossível resolver por uma simples reorganização, como ocorre no explícito, ou seja, o sistema de equações deve ser resolvido simultaneamente em cada ponto de tempo.

### 3.10.6 Método de Crank - Nicholson

Sendo o método de Crank – Nicholson uma forma de resolução das equações diferenciais parciais, exclusivamente neste caso, de transferência de calor. Este método apresenta acurácia de segunda ordem tanto no espaço quanto no tempo, implícito no tempo e é numericamente estável. Neste método é proposta uma alternativa para alcançar tal acurácia, é usado aproximações por diferenças finitas no ponto médio do incremento de tempo.

Figura 4 - Método de Crank-Nicholson.



Fonte: Adaptado de CHAPRA et al. p.746.

Para isto, a primeira derivada no tempo pode ser aproximada em  $u^{k+1/2}$  por

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}, \quad (27)$$

e a segunda derivada no espaço é a combinação do método de Euler explícito em  $k$  e do método de Euler implícito em  $k + 1$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right) \right]. \quad (28)$$

Aplicado na equação do calor, a discretização de Crank-Nicholson é dada por:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2(\Delta x^2)} \left[ (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + (u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) \right]. \quad (29)$$

Fazendo,  $\beta = \left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right)$ , obtém-se:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \beta \left[ (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + (u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}) \right]. \quad (30)$$

Então:

$$-\beta u_{i+1}^{k+1} + (1 + 2\beta)u_i^{k+1} - \beta u_{i-1}^{k+1} = \beta u_{i+1}^k + (1 - 2\beta)u_i^k + \beta u_{i-1}^k. \quad (31)$$

### 3.10.7 Método das Linhas

O método das linhas consiste em discretizar a equação diferencial parcial somente no espaço usando operadores adequados para cada termo, obtendo assim, um sistema que ainda depende da derivada temporal  $U'(t) = F(U(t))$ , onde  $F$  representa a discretização espacial. No caso da equação do calor unidimensional para malhas uniformes temos  $U'_i(t) = \frac{\alpha}{h^2} [U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)]$  para cada ponto da malha espacial  $x_i$ .

A partir da discretização espacial podemos aplicar um método de resolução de EDOs, obtendo um método completamente discreto. Podemos aplicar, por exemplo, os Métodos de Euler, o Método dos Trapézios, ou um método *multistep* como o Método de

Runge-Kutta. Para este último podemos utilizar um pacote de resolução de EDOs para aproximar a solução do problema tais como `ode23` ou `ode45` no *software Octave*.

#### **4 METODOLOGIA DA PESQUISA**

Neste projeto realizamos uma pesquisa exploratória e descritiva a fim de compreender as equações que modelam o processo de secagem da banana. Para tal estudamos as equações parabólicas e em particular a equação do calor utilizando literaturas clássicas (CHAPRA, 2010). Realizamos um estudo teórico de conceitos como estabilidade e convergência e utilizamos um problema simples de troca de calor para aplicar o Método das Diferenças Finitas e estudar a convergência das aproximações.

#### **5 PROBLEMA PROPOSTO**

##### **5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA**

Da mesma forma utilizado por Davila (2016), na sua tese de doutorado, o estudo presente trata-se da análise de secagem de banana, porém com diferenças nos métodos aplicados. O estudo também assume rodela de banana em um sistema bifásico, sendo composto por duas fases. A sólida é considerada a matriz alimentar com parte minoritária de água adsorvida, e a fase líquida, na qual abrange majoritário a água e solutos do alimento (FITO *et al.*, 1996). Por outro lado, algumas considerações iniciais foram levantadas para o estudo da secagem: propriedades físicas, térmicas e condições de secagem são consideradas constantes durante a secagem; temperatura da banana considerada praticamente constante durante o processo; o fenômeno de transporte de massa durante a secagem é descrito pela segunda Lei de Fick; o mecanismo de transferência de calor e massa é unidirecional e simétrico; encolhimento e redução de massa desconsiderados.

##### **5.2 DESENVOLVIMENTO DO MODELO**

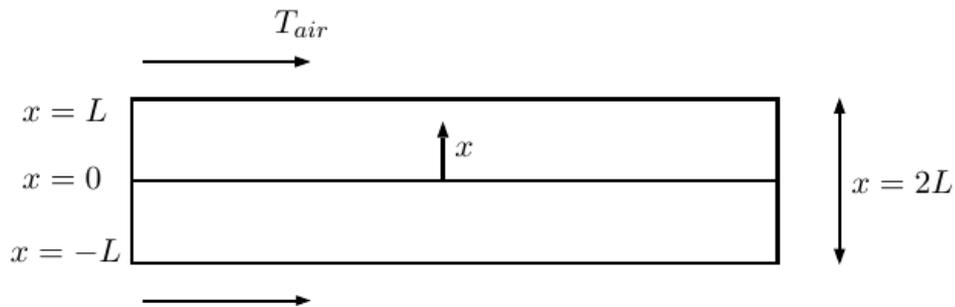
O estudo deste projeto realizou um mecanismo de transferência de massa e calor unidirecional e simétrico, como citado anteriormente, pois na medida que chegamos a casos isolados, ou de fronteira, temos um fluxo igual a zero, sendo este um ponto de máxima ou mínima temperatura e umidade.

##### **5.3 EQUAÇÃO DE BALANÇO DE MASSA E CALOR**

O problema proposto envolveu uma fatia de banana com espessura  $2L$ , inicialmente em temperatura  $T_0$  e teor de umidade uniforme  $M_0$ . A secagem é considerada entre as superfícies  $x = \pm L$ . Dessa forma,  $L$  está em contato com a corrente de ar com

temperatura  $T_{air}$ , fornecendo uma condição de contorno convectiva para o teor de umidade  $M$ , conforme mostrado na figura a seguir.

Figura 5 - Representação geométrica de uma fatia de banana considerando um modelo unidimensional para secagem.



Fonte: Próprio autor, 2021.

Durante o processo, o calor é transferido por convecção do ar para a superfície do produto e posteriormente por condução ao centro da banana. Esse mecanismo impacta diretamente na transferência de massa, pois inicialmente a massa é evaporada em  $L$ , gerando um gradiente de concentração entre superfície e centro da geometria considerada.

A equação de conservação de massa pode ser escrita da seguinte forma e os principais parâmetros de entrada e suas unidades se encontram no Quadro 1 da seção seguinte (BIRD et al.,1960; CARSLAW; JAEGER, 1959):

$$\rho \left\{ \frac{\partial M}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} M \right\} = \vec{\nabla} (\rho D \vec{\nabla} M), \quad (32)$$

onde,  $\rho$  é a densidade,  $\vec{v}$  o deslocamento da base sólida,  $\vec{\nabla} M$  o vetor diferencial de massa e  $D$  a constante para determinar a pressão de vapor da água pura.

No mesmo sentido, a equação de conservação de calor pode ser escrita como:

$$\rho \left\{ \frac{\partial C_p T}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} C_p T \right\} = \vec{\nabla} (k \vec{\nabla} T), \quad (33)$$

onde,  $C_p$  é o calor específico,  $T$  a temperatura absoluta e  $k$  o coeficiente de condução.

Dessa forma, o deslocamento mencionado nas equações anteriores  $\vec{v}$  é desconsiderado e para um sistema de geometria unidimensional (direção axial) com propriedades termofísicas e difusividade ( $D_e$ ) constantes, além das hipóteses mencionadas no Seção 5.1, obtemos as equações para calor e umidade simultâneas:

$$\rho \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_e \rho \frac{\partial M}{\partial x} \right); \quad 0 < x < L, \quad (34)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad 0 < x < L. \quad (35)$$

Para tempo inicial, o teor de umidade, temperatura e espessura da matéria prima são uniformes e possuem condições iniciais de:

$$M = M_0, \quad T = T_0, \quad L = L_0; \quad t = t_0. \quad (36)$$

E como foi mencionado anteriormente, em pontos de simetria, não há variação de temperatura e umidade, portando, suas condições são:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = 0. \quad (37)$$

Para a superfície, um gradiente de condução dela para o ar que envolve a pressão parcial e a temperatura, são considerados condições de contorno. Dessa forma, a força motriz para o fluxo de vapor de água é a diferença entre a umidade absoluta do ar ( $C_{air}$ ) e o teor de água na superfície, conhecida como filme de água. Neste sentido, a condição de contorno na superfície fica:

$$-D_e \rho \frac{\partial M}{\partial x} = h_m \left( C_{sur} \overline{MW} - C_{air} \frac{1}{v_e} \right); \quad x = L, \quad (38)$$

onde  $D_e$  representa a difusividade efetiva,  $\rho$  a densidade,  $h_m$  o coeficiente de transferência de massa,  $\overline{MW}$  o peso molecular da água,  $v_e$  o volume específico do ar e  $C_{sur}$  a concentração de umidade da superfície, a qual é calculada através da pressão de vapor da água a temperatura de secagem com auxílio da equação modificada de Antonie (REID; PRAUSNITZ; SHERWOOD, 1977).

Por outro lado, a transferência de calor na superfície ocorre por convecção, modelada pelo coeficiente de transferência de calor ( $h$ ). Neste modelo, a umidade é removida da superfície quando à temperatura do ar ( $T_{air}$ ) e elevada quando comparada com a temperatura inicial ( $T_0$ ). A condição de contorno na superfície é dada por:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda D_e \rho \frac{\partial M}{\partial x} = h(T_{sur} - T_{air}); \quad x = L, \quad (39)$$

onde,  $k$  é coeficiente de condução da banana,  $\lambda$  o calor latente de vaporização,  $h$  o coeficiente convectivo e  $T_{sur}$  a temperatura da superfície.

## 6 RESULTADOS

Trabalhamos com um método com operadores centrados no espaço com o qual foi possível obter ordem de convergência igual a 2 ao ser aplicado ao problema simplificado de solução conhecida. Neste sentido, tal método foi aplicado ao nosso problema da secagem da banana onde pudemos observar o comportamento da umidade e temperatura nos pontos da malha.

## 6.1 APLICAÇÃO

Para estudo da convergência do método numérico envolvido, foi programado dentro do *Software Octave* a secagem de uma placa plana utilizando o método das diferenças finitas progressivas. A placa com sistema de transferência unidimensional possui espessura de 5 milímetros ( $L$ ), uma umidade inicial com valor de 0,7 em massa ( $M_0$ ) e temperatura inicial de 293,15 Kelvin ( $T_0$ ). Os principais parâmetros de entrada usados na simulação de secagem são resumidos no quadro a seguir.

Quadro 1 - Parâmetros de entrada usados nas simulações de secagem de fatias de banana.

Símbolo	Parâmetro	Unidade	Valor
$\lambda$	Calor latente de vaporização	$J \cdot kg^{-1}$	$2,345 \times 10^6$
$C_p$	Calor específico	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	4854
$h$	Coefficiente convectivo	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$	80
$k$	Coefficiente de condução	$J \cdot s^{-2} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	0,894
$h_m$	Coefficiente de transferência de massa	$m \cdot s^{-1}$	$4 \times 10^{-4}$
$R$	Constante ideal dos gases	$Pa \cdot m^3 \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	8,3144
$\rho$	Densidade da banana	$kg \cdot m^{-3}$	1045
$D_e$	Difusividade efetiva	$m^2 \cdot s^{-1}$	$3,054 \times 10^{-10}$
$\alpha$	Difusividade térmica	$m^2 \cdot s^{-1}$	$1,8 \times 10^{-7}$
$L$	Espessura da fatia de banana	$m$	0.005
$C$	Parâmetro isotérmico de dessorção	—	5,4
$K$	Parâmetro isotérmico de dessorção	—	0,93
$X_m$	Parâmetro isotérmico de dessorção	$kg \cdot kg^{-1}$	0,053
$C_{air}$	Teor de umidade no ar de secagem	$kg \cdot kg^{-1} dry ar$	$2,345 \times 10^6$
$T_{air}$	Temperatura do ar de secagem	$K$	333,15

Fonte: Adaptado de Davila (2016, p.73)

Além disto, foi necessário também realizar a dedução do método do balanço de energia em volume de controle ao redor do nó interior. A equação geral do balanço de energia pode ser representada por

$$E_{Entra} + E_{Gerada} = E_{Acumulada}, \quad (40)$$

e fazendo os devidos ajustes e considerações como transferência de calor por convecção de um fluido adjacente e geração nula, chegamos a tal formato

$$1 - 2Fo - 2BiFo \geq 0. \quad (41)$$

Sendo assim, para assegurar a estabilidade em todos os nós, a equação anterior foi utilizada para encontrar o valor máximo do Fourier, e conseqüentemente, para passo no tempo dos cálculos. Primeiramente, foi testado algumas hipóteses em relação ao passo do espaço na qual as curvas de temperatura se comportaram dentro do esperado para tempos relativamente pequenos, porém, tratando os dados com tempos maiores, as curvas apresentaram oscilações. Como consequência de tais comportamentos, foi necessário estudar novas formas de resolução da EDOs, como o método das linhas, pois possivelmente existe um problema de rigidez do método, mesmo satisfazendo os critérios de estabilidade.

## 6.2 APLICAÇÃO MÉTODO DAS LINHAS (MOL)

Para estudo inicial da ordem de convergência do método utilizado, será praticado a modelagem matemática para um problema parabólico simples, utilizando o Método das Linhas (MOL), afim de verificar as limitações dos métodos e suas ordens de convergências, e posteriormente, desenvolver o objetivo central do trabalho. Consideremos o problema do calor

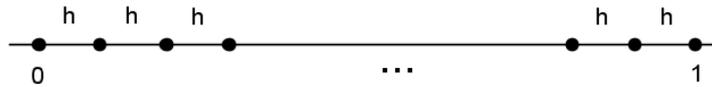
$$u_t = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, \quad (42)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, t > 0, \quad (43)$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1, \quad (44)$$

que é apresentado no livro *Numerical Analysis* de Burden (1993), e cuja solução exata é conhecida e dada por  $u(x, t) = \exp(-\pi^2 t) \sin(\pi x)$ .

Tomemos uma discretização uniforme do intervalo  $I = [0, 1]$  que considera  $N$  subintervalos de comprimento  $h$ .

Figura 6 - Discretização do intervalo  $l = [0,1]$ .

Fonte: Próprio autor, 2021.

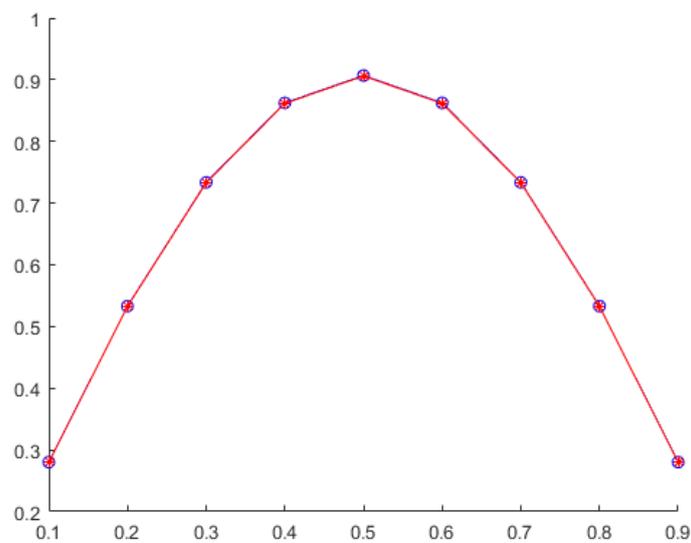
Para desenvolvermos o Método das Linhas (MOL), consideramos  $U_i(t)$  a aproximação para  $u(x_i, t)$ . Notemos que  $U_0 = U_{N+1} = 0$  e, para cada  $i = 1, \dots, N$ , temos:

$$U'_i(t) = \frac{1}{h^2}(U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)). \quad (45)$$

Assim, podemos escrever o problema da forma  $U'(t) = AU(t) + g(t)$ , onde  $g(t) = [000 \dots 0]^t$  e

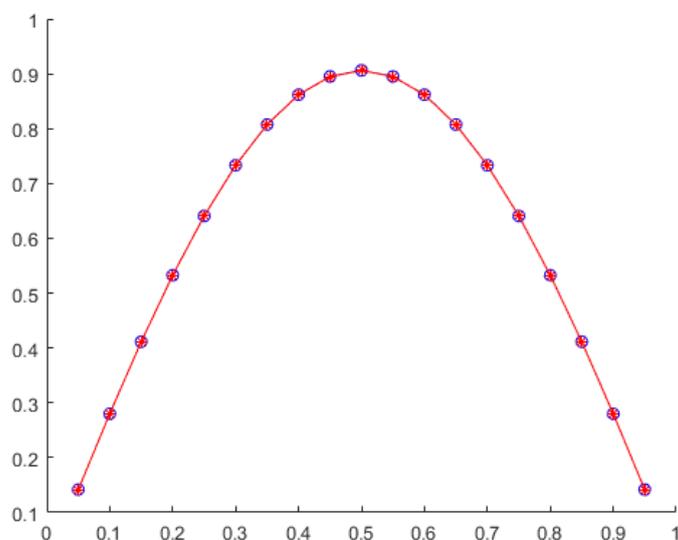
$$\begin{bmatrix} U'_1(t) \\ U'_2(t) \\ \vdots \\ U'_N(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_N(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Para resolvermos o sistema acima consideremos a rotina `ode45` do *Octave* para resolução de sistemas de EDOs. Fixemos o tempo final em  $T = 0.01$  e consideremos diferentes comprimentos de malha  $h$ . As figuras abaixo ilustram a solução aproximada em comparação com a solução exata conhecida para  $h = 0,1; 0,05; 0,0125$ , respectivamente.

Figura 7 - Soluções aproximadas para  $h = 0,1$ .

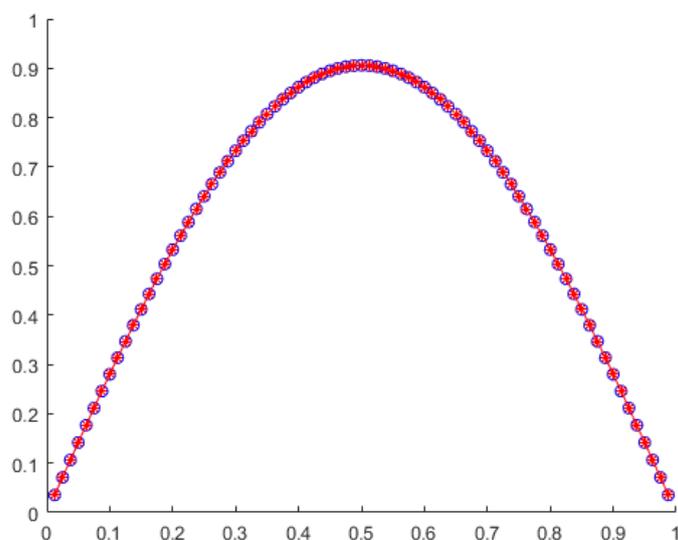
Fonte: Próprio autor, 2021.

Figura 8 - Soluções aproximadas para  $h = 0,05$ .



Fonte: Próprio autor, 2021.

Figura 9 - Soluções aproximadas para  $h = 0,0125$ .



Fonte: Próprio autor, 2021.

Nas figuras acima, os gráficos descritos em vermelho ilustram a solução exata calculada nos pontos da malha e os gráficos descritos em azul ilustram a solução aproximada calculada nos pontos da malha.

### 6.3 ERRO COMPUTACIONAL

O erro cometido em cada uma das aproximações descritas acima será dado por

$$Erro = \sqrt{h \sum u(x_i, T) - U_i(T)}, \quad (47)$$

onde  $u(x_i, T)$  é a solução exata no ponto  $x_i$  no tempo  $T$  e  $U_i(T)$  é a solução numérica no mesmo ponto e tempo.

Vejamos o comportamento de tal erro ao tomarmos diferentes malhas espaciais com o espaçamento  $h$  decrescente:

Quadro 2 - Erro das soluções aproximadas usando ode45.

<b>n</b>	<b>h</b>	<b>Erro</b>
5	0,2	$2,0563 \times 10^{-3}$
10	0,1	$5,1855 \times 10^{-4}$
20	0,05	$1,2992 \times 10^{-4}$
40	0,025	$6,4696 \times 10^{-5}$
80	0,0125	$3,8177 \times 10^{-5}$
160	0,00625	$1,5088 \times 10^{-4}$
320	0,003125	$7,9026 \times 10^{-6}$
640	0,0015625	$1,7236 \times 10^{-5}$

Fonte: Próprio autor, 2021.

É possível notar que na maioria dos casos para malhas mais finas temos um erro absoluto menor. Notemos também que existem oscilações nos testes realizados. Neste caso, ao calcularmos a ordem do erro linearizando e utilizando o Método dos Mínimos Quadrados obtemos o valor aproximado de **0.9355**.

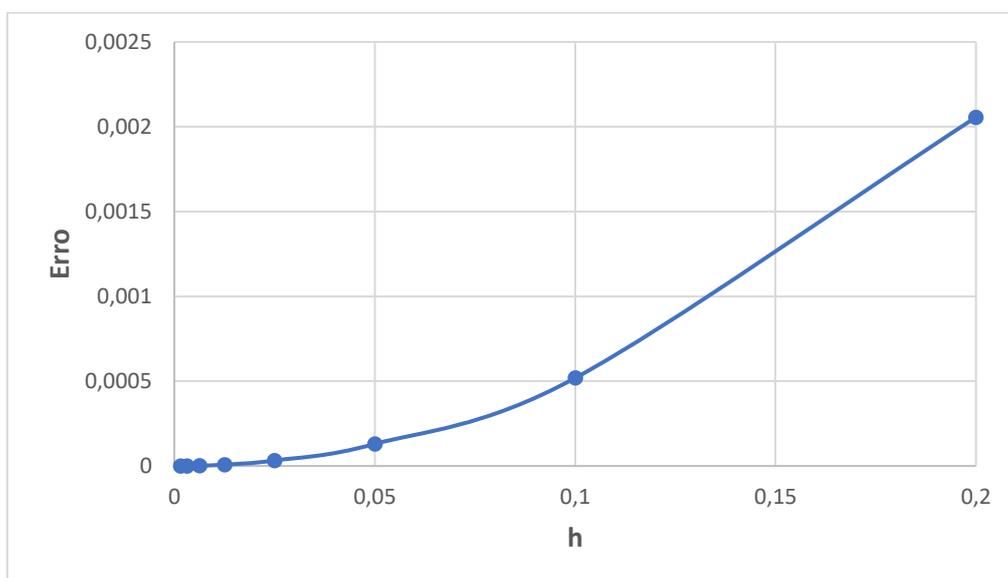
Consideremos agora a mesma rotina de resolução de EDOs ode45, mas realizando alterações nas opções 'RelTol' e 'AbsTol' de tal rotina. Inicialmente o parâmetro 'RelTol' era considerado como  $10^{-3}$ . Consideremos um valor menor a fim de obtermos maior precisão em cada aproximação da solução. Tomemos, assim, 'RelTol' =  $10^{-8}$ . Além disso, consideremos 'AbsTol' =  $10^{-10}$  que antes era tomado como  $10^{-6}$ . Vejamos o comportamento de tal erro ao tomarmos diferentes malhas espaciais com o espaçamento  $h$  decrescente:

Quadro 3 - Erro das soluções aproximadas usando ode45 com AbsTol e RelTol alterados.

n	h	Erro
5	0,2	$2,0563 \times 10^{-3}$
10	0,1	$5,1855 \times 10^{-4}$
20	0,05	$1,2992 \times 10^{-4}$
40	0,025	$3,2497 \times 10^{-5}$
80	0,0125	$8,1253 \times 10^{-6}$
160	0,00625	$2,0314 \times 10^{-6}$
320	0,003125	$5,0786 \times 10^{-7}$
640	0,0015625	$1,5625 \times 10^{-7}$

Fonte: Próprio autor, 2021.

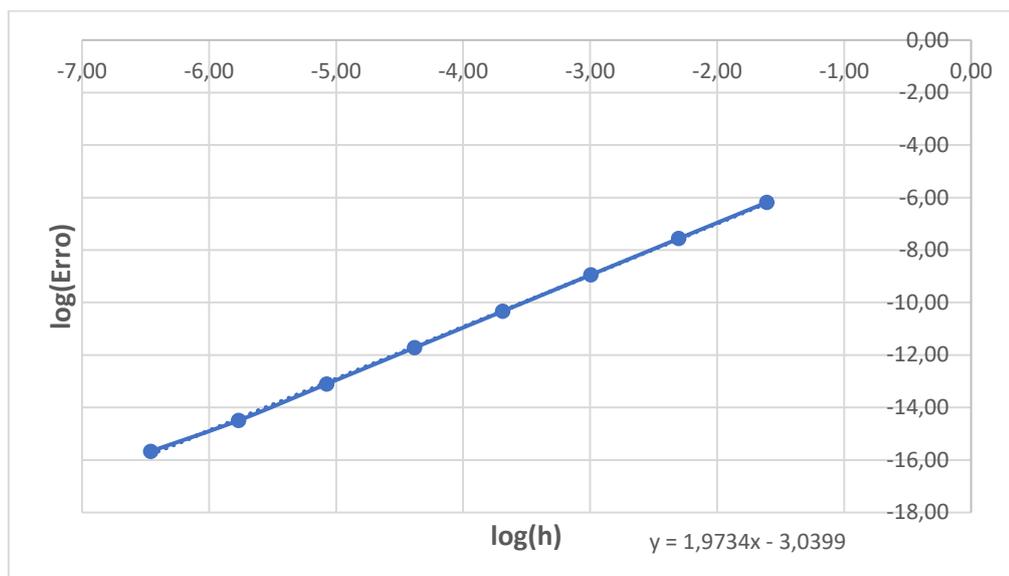
Figura 10 - Erro gráfico das soluções aproximadas usando ode45 com AbsTol e RelTol alterados.



Fonte: Próprio autor, 2021.

Notemos que é possível observar um comportamento decrescente do erro e, neste caso, os erros são menores do que aqueles obtidos anteriormente. Já a ordem do erro será aproximadamente **1.9734**, como esperado uma vez que os operadores diferenciais são de ordem 2. O gráfico abaixo mostra a linearização de tal erro:

Figura 11 - Ajuste de curva usando métodos de mínimos quadrados lineares.



Fonte: Próprio autor, 2021.

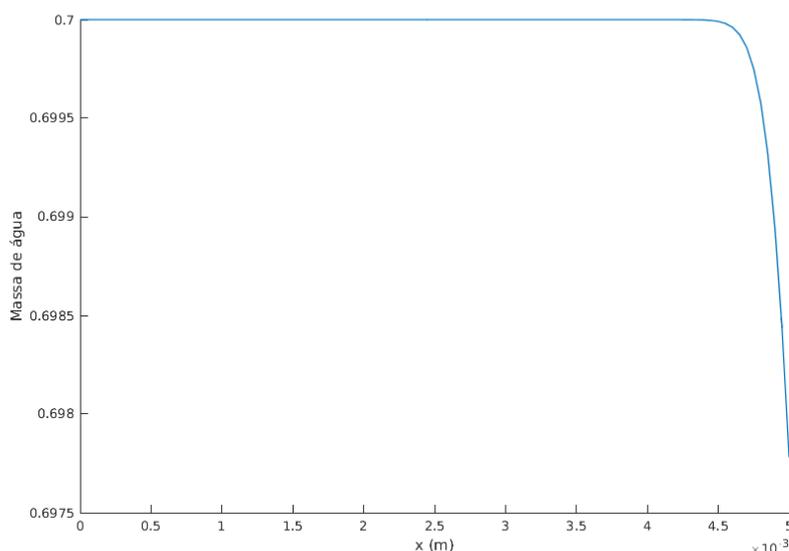
#### 6.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO NA SECAGEM DA BANANA

O mesmo método utilizado para a equação do calor, foi aplicado ao problema da secagem da banana. Obtivemos assim, para  $T = 60s$ , os resultados apresentados nas Figuras 8 e 9 para a temperatura (K) e a massa de água.

Para as simulações realizadas abaixo consideramos a umidade inicial da banana igual a 70%. Consideramos também que a fatia da banana está inicialmente à temperatura ambiente (295,15 K) e que sua temperatura é totalmente homogênea, e além disso, o ar de secagem está fixo em 333,15K. É importante ressaltar que os dados acima e os parâmetros do quadro 1 foram extraídos de Davila (2016) a fim de compararmos as soluções obtidas.

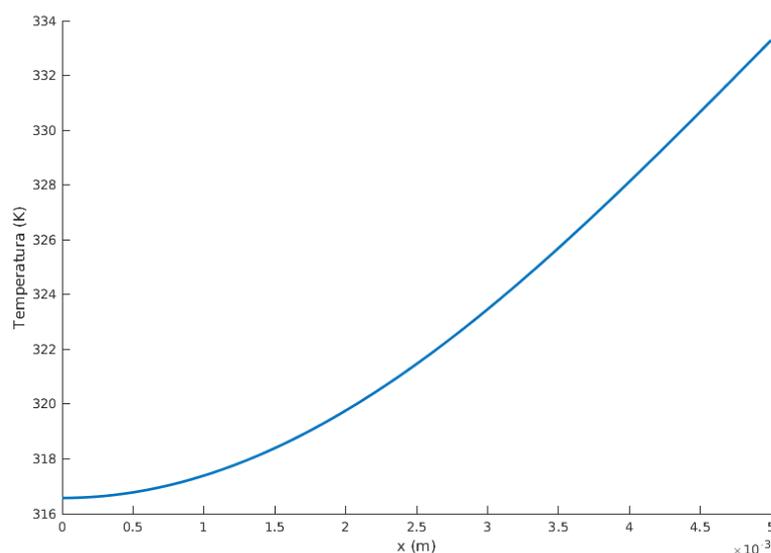
É possível notar graficamente que a umidade da fatia da banana começa a diminuir em sua superfície enquanto no centro da fatia ainda temos a umidade inalterada. Para a distribuição do calor, percebemos um cenário inverso, pois temos um gradiente de temperatura da superfície ao centro, sendo essa a energia necessária para evaporar a umidade da matéria prima. Os gráficos abaixo mostram o comportamento das variáveis ao longo da espessura da banana, nos quais após 60 segundos encontramos uma pequena variação de umidade próxima à superfície. Em contrapartida, a temperatura apresenta uma variação mais expressiva no tempo. Notemos que a temperatura na superfície está próxima da temperatura do ar (333,15K) enquanto o centro apresenta 317K aproximadamente.

Figura 12 - Distribuição da umidade na banana.



Fonte: Próprio autor, 2021.

Figura 13 - Distribuição da temperatura na banana.



Fonte: Próprio autor, 2021.

A análise de resultados do método das linhas foi fixada com tempo de simulação em 60 segundos, pois, para tempos relativamente curtos, quando comparados ao tempo total de secagem, os resultados apresentam os comportamentos esperados. Porém, quando tratamos de tempos maiores, os resultados de temperatura na fronteira apresentam oscilações que podem estar relacionadas com a maneira que abordamos sua discretização. Uma vez que não foi possível corrigir tais oscilações neste trabalho, será necessário

investigar em trabalhos futuros novas formas de abordagem para o problema de secagem da banana.

## 7 CONCLUSÃO

Foi desenvolvido um método numérico unidimensional no qual descreveu o processo de transferência de calor e massa simultâneo com propriedades termofísicas e domínio constantes durante todo o processo de simulação. Para isto, foi aplicada uma solução numérica no modelo inicialmente com métodos das diferenças finitas progressivas e foi observado que as curvas de temperatura se comportaram dentro do esperado para tempos relativamente pequenos, porém, tratando os dados com tempos maiores de simulação, as curvas apresentaram oscilações. Mesmo atendendo critérios de estabilidade no método anterior, a hipótese de um problema de rigidez foi levantada e por consequência disto, foi necessário estudar e desenvolver a simulação aplicada a novas formas de resolução da EDOs, como o método das linhas.

Para estudo inicial da ordem de convergência, o método das linhas foi aplicado a um problema parabólico simples de solução exata conhecida. Dessa forma, aplicando a rotina de resolução de EDOs, ode45, no *software* Octave e realizando alterações necessárias nas opções 'RelTol' e 'AbsTol' com valores de  $10^{-8}$  e  $10^{-10}$ , respectivamente, a fim de obter maior precisão em cada aproximação da solução e uma queda contínua no erro, à medida que a malha se tornasse mais fina. Dessa forma, foi possível observar tal comportamento decrescente do erro, e através do cálculo da ordem do erro linearizado, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, o valor obtido foi de 1.9734, o qual era esperado, visto que os operadores diferenciais são de ordem 2.

Por fim, o mesmo método utilizado para a o problema parabólico simples, foi aplicado ao problema da secagem da banana. Através da análise gráfica da simulação para o tempo de 60 segundos, foi possível notar que a umidade da fatia da banana começa a reduzir lentamente na superfície, gerando um gradiente de concentração da superfície ao interior, acarretando na migração da umidade em sentido superficial. Em contrapartida, para a distribuição de calor, percebe-se um cenário inverso e muito mais expressivo em um curto espaço de tempo. A superfície apresentava uma temperatura já próxima ao ar (333, 15K), enquanto o centro apresentava temperatura relativamente mais baixa (317K).

Ainda vale destacar que a diferença entre a efetividade de transferência de calor e massa já era prevista, visto que a resistência do calor está relacionada com os coeficientes convectivo e de condução, e a evaporação da umidade está relacionada ao coeficiente de

transferência de massa. Os parâmetros de transferência de calor apresentam valores de ordem  $10^1$  e  $10^{-1}$ , respectivamente, enquanto o coeficiente de transferência de massa, apresenta valor de ordem  $10^{-4}$ . Tais parâmetros e valores podem ser comparados no Quadro 1.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, Lucas M. Introdução aos métodos aproximados em engenharia. **Universidade Federal do Paraná**, 2007.
- BASSANEZI, RODNEY CARLOS. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, 3. ed., São Paulo, 2011.
- BI, Y.; ZHANG, Y.; JIANG, H.; HONG, Y.; CHENG, Z. G. L.; LI, Z.; LI, C. Molecular structure and digestibility of banana flour and starch. **Food Hydrocolloids**, 72, p. 219-227, 2017.
- BIRD, R.; STEWART, W.; LIGHTFOOT, E. **Transport phenomena**. John Wiley, 2002.
- BORGES, Ana Lúcia et al. **A cultura da banana**. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica, 2006., 2006.
- BURDEN, R.L., **Numerical Analysis**, 5th ed., 1993.
- CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of Heat in Solids**. Clarendon OxfordSciences Publication, 2th edition, 1959.
- CASTRO JÚNIOR, M.A.; ARENILLO, S.A. Acceptability of Musa Balbisiana (saba banana) puree in two treatments in making ice cream. **Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research**, v.4, n.4, p.29-33, 2016.
- CHAPRA, Steven C. et al. **Numerical methods for engineers**. Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2010.
- CUMINATO, J. A; JUNIOR, M. M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**. SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2013.
- DAVILA, Rosa Fabiana Zabalaga. **Mathematical modeling of drying process of unripe banana slices**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2016.
- DOYMAZ, I., GÖL, E. Convective drying characteristics of eggplant slices. **Journal of Food Process Engineering**, v.34, n.1, p.1234– 1252, 2011.
- FERZIGER, J. H; PERIC, M. **Computational Methods for Fluids Dynamics**. SpringerVerlag, Berlin, 3rd edition, 2002.
- FITO, P.; CHIRALT, A.; BARAT, J. M.; ALVARRUIZ, A. **An Approach to the Modelling of Osmotic Dehydration Operations**. Departamento de Tecnología de Alimentos. Universidad Politécnica de Valencia. Process Optimisation and Minimal Processing of Foods, p. 1-17, Valencia, Spain. 1996.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. Edusp, São Paulo, SP, 2000.

HIRSCH, Charles. **Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics**. Elsevier, 2007.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Levantamento sistemático da produção agrícola**: Pesquisa mensal de previsão e acompanhamento das safras agrícolas no ano civil. Rio de Janeiro: IBGE, 2017.

INCROPERA, Frank P. et al. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEVEQUE, Randall J. **Numerical methods for conservation laws**. Basel: Birkhäuser, 1992.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos. Computacional**. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1995.

MELONI, P. L. S. **Desidratação de frutas e Hortaliças**. Fortaleza: Instituto Frutal, 2003. 87p.

OZUNA, C.; CÁRCEL, J.A.; WALDE, P.M.; GARCIA-PEREZ, J.V. Low-temperature drying of salted cod (*Gadus morhua*) assisted by high power ultrasound: Kinetics and physical properties. **Innovative Food Science and Emerging Technologies**, v.23, n.1, p.146- 155, 2014.

PARK, K.J.; TUBONI, C.T.; OLIVEIRA, R.A.; PARK, K.J.B. Estudo da secagem de caqui giombo com encolhimento e sem encolhimento. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, v.6, n.1, p.71-86, 2004.

QIN, J. The new alternating direction implicit difference methods for solving threedimensional parabolic equations. **Applied Mathematical Modelling**, 34:890–897, April 2010.

REID, R. C.; PRAUSNITZ, J. M.; SHERWOOD T. K. **The properties of gases and liquids**. 3th ed. McGraw-Hill, 1977.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.

RUSSO, P.; ADILETTA, G.; MATTEO, M. The influence of drying air temperature on the physical properties of dried and rehydrated eggplant. **Food and Bioproducts Processing**, v. 91, n.3, p. 249-256, 2013.

SOUSA, F. C. et al. Predição de modelos sobre a cinética de secagem de folhas de *Ziziphus joazeiro* Mart. **Revista brasileira de plantas medicinais**, v. 17, p. 195-200, 2015.

SOUZA, J.S. Mercado e comercialização de frutas. **1 ENCONTRO ESTADUAL DE FRUTICULTURA**, v. 39, 1993.

STURM, B.; VEGA, A.M.N.; HOFACKER, W.C. Influence of process control strategies on drying kinetics, colour and shrinkage of air dried apples. **Applied Thermal Engineering**, v.62, n.2, p. 455-460, 2014.

## APÊNDICE A – Rotina principal do problema simplificado.

```

0001 % Guilherme da Cunha e Silva - TCC/2022
0002 % Equacao do Calor - Ut = Uxx , 0<x<1, t>0
0003 % Condicoes de Fronteira - U(0,t) = U(1,t) = 0
0004 % Condiacao Inicial - U(x,0) = sin(pi*x), 0<=x<=1
0005 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0006
0007 close all
0008 clear
0009 clc
0010
0011 % Tempo Final
0012 T = 1e-02;
0013
0014 % Discretizacao do Intervalo Espacial
0015 n = 50;      % quantidade de subintervalos
0016 m = n-1;    % quantidade de pontos interiores
0017 h = 1/n;    % espacamento
0018
0019 u0 = zeros(1,m);
0020 x = zeros(1,m);
0021
0022 % Condicoes Iniciais
0023 for i = 1:m
0024     x(i)= i*h;
0025     u0(i) = sin(pi*x(i));
0026 end
0027
0028 % Solucao do Sistema de EDOs
0029 options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);
0030 [t,u] = ode45(@(t,u) sistEDO(t,u,m,h^2), [0 T], u0,options);
0031
0032 z = size(t,1);
0033 V = u(z,:);
0034
0035 % Solucao Exata - U(x,t) = exp(-pi^2*t)*sin(pi*x)
0036 xsol = 0:0.0001:1;
0037 usol = exp(- pi^2 *T) * sin(pi*xsol);
0038
0039 % Graficos
0040 figure
0041 hold on
0042 plot(x,V,'-bo');
0043 plot(xsol,usol,'-r');
0044
0045
0046 % Erro
0047 erro = sqrt(h)*norm(usol-V);
0048 %erro = norm(usol-V);

```

**APÊNDICE B – Rotina que calcula o sistema de equações diferenciais do problema simplificado.**

```
0001 function dudt = sistEDO(t,u,m,h2)
0002
0003     dudt=zeros(m,1);
0004     dudt(1) = (-2*u(1)+u(2))/h2;
0005
0006
0007     for i = 2:(m-1)
0008         dudt(i) = (u(i-1)-2*u(i)+u(i+1))/h2;
0009     end
0010
0011     dudt(m) = (u(m-1)-2*u(m))/h2;
0012
0013 end
```

## APÊNDICE C – Rotina principal do código da banana.

```

0001 % Guilherme da Cunha e Silva - TCC/2022
0002 % Principal
0003 tempo=0;
0004 tic,
0005 close all %Apagar todas as figuras
0006 clear %Limpar o workspace de variaveis
0007 clc %Limpar a area de trabalho e janela de comando
0008
0009
0010 % Insercao dos parametros geometricos
0011 L = 0.005; %Espessura da banana (Unidade: Confirmar unidade de medida)
0012 NO = 256; %quantidade de subintervalos
0013 N = NO+1; %pontos na malha
0014 deltax = L/NO;
0015 x = 0:deltax:L; %Geracao de intervalos de pontos em "L"
0016 Tf = 60; %tempo total (Unidade de tempo: Segundos)
0017
0018 % Insercao das constantes de massa da banana e do meio(PAGINA 73)
0019 alfa=0.00000018; %Difusividade termica da banana (Unidade: m^2/s)
0020 hm=0.0004; %Coeficiente de transf. de massa(Unidade: m/s)
0021 de=0.0000000003054; %Difusividade efetiva da banana (Unidade: m^2/s)
0022 fom=de/((deltax)^2); %Fourier de massa (Adimensional)
0023 ro=1045; %Densidade da banana (Unidade: kg/m^3)
0024 cair=0.013; %Concentracao de umidade do ar (Verificar)
0025 tair=60+273.15; %Temperatura do ar (Unidade: Kelvin)
0026 bim=(hm*deltax)/(de*ro); %Biot de massa (Unidimensional)
0027 lambda= 2345000; %Calor latente de vaporizacao (Unidade: J/kg)
0028
0029 %Constantes termicas da banana(PAGINA 73)
0030 h=80; %coeficiente de transf.de calor (Unidade: W/m^2*K)
0031 k=0.894; %Condutividade termica (Unidade: J/s*m*K)
0032 fo= alfa/((deltax)^2); %Fourier (Unidimensional)
0033 bi=(h*deltax)/k; %Biot (Unidimensional)
0034 R= 8.3144; %Constante universal dos gases (Unidade: J/mol*K)
0035 MW= 18; % (Unidade: Kg/Kmol)
0036 ve= 0.8;
0037
0038 %Constantes para aw (Parametros de isoterma de dessorcao) (PAGINA 73)
0039 C= 5.4; %Parametros isotermico de dessorcao
0040 xm= 0.053;%Parametros isotermico de dessorcao (Unidade: Kg/kg)
0041 K=0.93; %Parametros isotermico de dessorcao
0042
0043 %Constantes da pressao de vapor (pv0t)(LIVRO: The properties of GASES AND
0044 %LIQUIDS - PAGINA 70)
0045 tc= 647.3; %Temperatura critica = 647,3 (Unidade: K)
0046 pc=221.2; %Pressao de vapor saturado = 221.2 (Unidade: bar)
0047 P=0.926; %Pressao total de vapor = 0.926 (Unidade: bar)
0048 A=-3.805560000000001;%[Formula-> A=-K*K*(C-1)]
0049 A1=-7.77224;
0050 A2=1.45684;
0051 A3=-2.71942;
0052 A4=-1.41336;
0053
0054
0055 % Declaracao de matrizes
0056 m = zeros(1, N);
0057 m(1:N) = 0.7;
0058 v = zeros(1, N);
0059 v(1:N)= 22+273.15; %Temperatura homogenea inicial
0060
0061 y0 = [m v]; % Solucao Inicial
0062
0063 options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10);
0064 [t,y] = ode45(@(t,y) sistEDO(t,y,N,fo,fom,hm,h,lambda,ro,deltax,cair),...
...[0 Tf],y0,options);

0065 tempo = toc

```

## APÊNDICE D – Rotina que calcula o sistema de equações diferenciais do problema da secagem da banana.

```

0001 function dydt = sistEDO(t,y,N,fo,fom,hm,h,lambda,ro,deltax,cair)
0002
0003
0004 ro=1045;           %Densidade da banana (Unidade: kg/m^3)
0005 tair=60+273.15;   %Temperatura do ar (Unidade: Kelvin)
0006
0007 C= 5.4;           %Parametros isotermico de dessorcao (Unidimensional)
0008 xm= 0.053;        %Parametros isotermico de dessorcao (Unidade: Kg/kg)
0009 K=0.93;           %Parametros isotermico de dessorcao (Unidimensional)
0010
0011 %Constantes da pressao de vapor (pv0t)
0012 %(LIVRO: The properties of GASES AND LIQUIDS - PAGINA 70)
0013 tc= 647.3;        %Temperatura critica = 647,3 (Unidade: K)
0014 pc=221.2;         %Pressao de vapor saturado = 221.2 (Unidade: bar)
0015 P=0.926;          %Pressao total de vapor = 0.926 (Unidade: bar)
0016 A=-3.805560000000001; %[Formula-> A=-K*K*(C-1)]
0017 A1=-7.77224;
0018 A2=1.45684;
0019 A3=-2.71942;
0020 A4=-1.41336;
0021
0022 MW= 18;            % (Unidade: Kg/Kmol)
0023 ve= 0.8;
0024 R= 8.3144;        %Constante universal dos gases (Unidade: J/mol*K)
0025 k=0.894;          %Condutividade termica (Unidade: J/s*m*K)
0026
0027
0028
0029 %Calculo de aw --> Nao pedende de n
0030 if y(N)~=0
0031     if y(N)>0.2143
0032         aw = 0.0426*(y(N)/(1-y(N)))+0.8884; %Nao seria aw(j-1,N+1)?
0033     else
0034         B = (K*(C-2)-(xm*C*K))/y(N); %Julia
0035         delta= B*B-4*A;
0036         aw1= (-B+delta^(0.5))/(2*A);
0037         aw2= (-B-delta^(0.5))/(2*A);
0038         if (aw1>=0) && (aw2<=0)
0039             aw=aw1;
0040         elseif (aw2>=0) && (aw1<=0)
0041             aw=aw2;
0042         end
0043     end
0044 end
0045
0046 %Calculo de csur --> Não pedende de n
0047     y1 = 1-(y(2*N)/tc);
0048     a0 = 1/(1-y1);
0049     a1 = A1*y1;
0050     a2 = A2*y1^(1.5);
0051     a3 = A3*y1^3;
0052     a4 = A4*y1^6;
0053     pv0t = pc*exp(a0*(a1+a2+a3+a4));
0054     csur = (((aw*pv0t)/P)/(1-(aw*pv0t)/P))*(P/(R*tair))*MW*ve;
0055
0056
0057
0058 dydt=zeros(2*N,1);
0059
0060 %Massa
0061 dydt(1) = 2*fom*(y(2)-y(1));
0062 for i = 2:(N-1)
0063     dydt(i) = fom*(y(i+1)-2*y(i)+y(i-1));
0064 end
0065 dydt(N) = 2*fom*(y(N-1)-y(N)) + 2*hm*(csur-cair)/(ro*deltax);
0066
0067 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0068 %Temperatura
0069 dydt(N+1) = 2*fo*(y(N+2)-y(N+1));
0070 for i = N+2:(2*N-1)
0071     dydt(i) = fo*(y(i+1)-2*y(i)+y(i-1));
0072 end
0073 dydt(2*N) = 2*fo*(y(2*N-1)-y(2*N)) -2*(h*(y(2*N)-tair) ...
...+ lambda*hm*(csur-cair))/(k*deltax);
0074
0075 end

```