

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Equações diferenciais estocásticas e as estratégias de
hedging no mercado de opções**

Matheus de Oliveira Souza

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de
Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Matheus de Oliveira Souza

Equações diferenciais estocásticas e as estratégias de *hedging* no mercado de opções

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Felipe Ferreira

USP – São Carlos
Julho de 2022

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d719e de Oliveira Souza, Matheus
Equações diferenciais estocásticas e as
estratégias de hedging no mercado de opções /
Matheus de Oliveira Souza; orientador Ricardo
Felipe Ferreira. -- São Carlos, 2022.
214 p.

Dissertação (Mestrado - Programa
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2022.

1. Opções Financeiras. 2. Hedging (Finanças). 3.
Probabilidade Aplicada. I. Felipe Ferreira,
Ricardo, orient. II. Título.

Matheus de Oliveira Souza

Stochastic differential equations and *hedging* strategies in
option market

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP
and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Master Interagency Program Graduate in Statistics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Ricardo Felipe Ferreira

USP – São Carlos
July 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Matheus de Oliveira Souza, realizada em 24/06/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Ricardo Felipe Ferreira (UFSCar)

Profa. Dra. Danila Maria Silva Fernandes de Almeida (-)

Prof. Dr. Francys Andrews de Souza (-)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais, minha namorada, demais familiares e meus amigos,
os quais me ajudaram na conclusão deste trabalho, de forma direta ou indireta.
Dedico também aos estudantes, cientistas e curiosos que virão ler este trabalho em algum
momento.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço carinhosamente aos meus pais e a minha tia, que me incentivaram durante todo o mestrado. Sou grato por todos os ensinamentos e "puxões de orelha". Apesar de não saberem o que é uma integral de Itô, garanto que todos os modelos que estudei são, com certeza, inspirados em vocês de alguma forma.

Agradeço de forma geral a todos os meus amigos e conhecidos. Apesar de não ser tão presente na vida todos, garanto que sem vocês nada disso seria possível. Agradeço aos meus colegas do COEFE, do time de natação do Clube de Campo, da República Arapuça, do time de DS da Raccoon (underline no boneco aos íntimos), do GEP e da Softable. Mando um agradecimento especial aos amigos que o CAASO me deu: Ygor, Paola, Letícia, André, Clayton, Marcos e Willian.

Não podia deixar de agradecer a minha namorada, Mariane. Cada capítulo desta dissertação é uma fase do nosso relacionamento (menos o Capítulo 3, que pode ser dividido em pelo menos mais 3 fases). Muito obrigado por não me deixar varar noites e beber muito café, por ouvir todas as minhas apresentações, por tentar aceitar a palavra de Kiyoshi Itô e por tecer críticas que foram de suma importância para o trabalho e para minha vida.

Agradeço de forma geral a todos os professores que tive contato na pós, especialmente aos professores Vicente, Sandro, Katiane, Daiane e Pablo. Vocês guiarem meu caminho dentro da universidade, me ensinaram e incentivaram, de forma direta ou indireta. Agradeço ao meu orientador Ricardo, pois você, além de idealizador desta dissertação, foi paciente, didático e muito cuidadoso comigo ao longo de todo o processo. Me ensinou que os detalhes são muito importantes, ou se não, o mais importante. Me sinto honrado de ser seu primeiro aluno de mestrado (e seu amigo também).

Agradeço a todos que concordaram em participar nas bancas. Agradecimentos especiais aos membros Danila, Francys e Leão pelos comentários feitos na qualificação e na defesa. Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e a agradeço por isso.

“Não se pode aprender algo de uma lição sem dor, já que não se pode ganhar algo sem algum sacrifício. Mas quando essa dor é superada e a lição incorporada, o resultado é um coração infalível, de aço.”
(Edward Elric)

RESUMO

SOUZA, M. O. **Equações diferenciais estocásticas e as estratégias de *hedging* no mercado de opções**. 2022. 214 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

Os modelos de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) assumem um papel fundamental em finanças. A maioria desses modelos buscam ajudar os investidores no gerenciamento do risco das atividades financeiras e utilizam as EDEs para descrever a evolução de certas variáveis como o preço e a volatilidade dos ativos. Nesse sentido, um dos propósitos dessa dissertação é estudar o funcionamento do mercado financeiro, com especial atenção para precificação de opções e estratégias de *hedging*. O segundo objetivo é apresentar o processo de modelagem matemática via EDEs e, então, explorar modelos como o de Black - Scholes - Merton e a sua versão com múltiplos ativos. Por fim, concluímos apresentando aplicações em dados reais e possibilidades de extensões dos modelos de apreçamento de opções.

Palavras-chave: Equações diferenciais estocásticas; Apreçamento de opções; Modelo de Black - Scholes - Merton.

ABSTRACT

SOUZA, M. O. **Stochastic differential equations and *hedging* strategies in option market.** 2022. 214 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2022.

The Stochastic Differential Equation models (SDEs) assume an important role in finances. The major part of these models try to help the investors with the risk management of the financial activities and they use SDEs for describing the evaluation of certain variables such as the price and the volatility of assets. In this sense, one of our goals for this dissertation is to study how the financial market works, with special attention to option price and hedging strategies. The second goal is to show the mathematical modeling process with SDEs and, then, explore the models as Black - Scholes - Merton and its version with many assets. Finally, we conclude by presenting applications in real data and some possibilities to extend the option price models.

Keywords: Stochastic Differential Equation; Options pricing; Black - Scholes - Merton model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Retornos do investidor na posição comprada sobre a opção de compra do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.	34
Figura 2 – Retornos da investidora na posição vendida sobre a opção de compra do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.	34
Figura 3 – Retornos do investidor na posição comprada sobre a opção de venda do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.	35
Figura 4 – Retornos do investidor na posição vendida sobre a opção de venda do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.	36
Figura 5 – Valores assumidos por $S(t)$ ao longo do tempo $t \in \{t_0, t_1, t_2\}$	51
Figura 6 – Valor da ação ao longo do tempo do Exemplo 14.	55
Figura 7 – Valor do portfólio descontado ao longo do tempo do Exemplo 14.	55
Figura 8 – Preço e retorno do ativo VALE3 no ano de 2018.	66
Figura 9 – Gráficos quantil-quantil.	66
Figura 10 – Histogramas dos retornos comparados com suas respectivas funções de densidade de probabilidade.	67
Figura 11 – Gráficos da dinâmica do preço da opção de compra e da quantidade de ações da estratégia de hedging calculados para o ativo VALE3 que vence em 19/11/2018.	177
Figura 12 – Preço médio diário do ativo VALE3 até a data de exercício da opção.	177
Figura 13 – Gráficos de comparação dos log - retornos do ativo VALE3 do ano de 2018 com uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 0,00033.	178
Figura 14 – Série histórico do preço da ação PETR3 em 2018.	194
Figura 15 – Gráficos de comparação dos log - retornos do ativo PETR3 do ano de 2018 com uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 0,00036.	195

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo para o cálculo do preço de uma opção de compra 187

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultado do teste Anderson - Darling e Ljung - Box com lag 10.	66
Tabela 2 – Interpretação das gregas.	173

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	MERCADO DE OPÇÕES	29
2.1	Mercado Financeiro	29
2.2	Mercado de Derivativos	30
2.2.1	<i>Hedging, especulação e arbitragem</i>	31
2.2.2	<i>Opções</i>	32
2.2.3	<i>Taxa de Juros</i>	38
2.2.4	<i>Precificação de opções</i>	41
2.2.4.1	<i>Limites para os prêmios das opções</i>	41
2.2.4.2	<i>Estratégias de hedging</i>	44
2.2.4.2.1	Modelo binomial de um período	47
2.2.4.2.2	Modelo binomial de n-períodos	50
2.3	Modelo de Mercado	56
3	INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA DE ITÔ	59
3.1	Processos Estocásticos	59
3.2	Movimento Browniano	60
3.2.1	<i>Propriedades do Movimento Browniano</i>	62
3.2.2	<i>O movimento Browniano e os dados financeiros.</i>	65
3.3	Integral estocástica de Itô	67
3.3.1	<i>Integral de Riemann</i>	68
3.3.2	<i>Integral de Riemann-Stieltjes</i>	68
3.3.3	<i>Integral de Wiener</i>	70
3.3.4	<i>Integral de Itô</i>	75
3.3.4.1	<i>Construção da integral de Itô</i>	79
3.3.4.1.1	Integral de Itô para processos simples	80
3.3.4.1.2	Aproximação por processos simples	83
3.3.4.1.3	Integral de Itô para processos mais gerais	86
3.3.4.2	<i>Exemplos de integral de Itô</i>	87
3.3.5	<i>Integral indefinida de Itô</i>	91
3.3.6	<i>Uma possível extensão da definição da integral de Itô</i>	95
3.4	Fórmula de Itô	96

3.4.1	<i>Exemplos da fórmula de Itô</i>	105
3.5	Equações diferenciais estocásticas	108
3.6	Fórmula de Itô multidimensional e sistema de EDEs	121
3.7	Integrais estocásticas múltiplas	127
3.7.1	<i>Integral dupla de Wiener-Itô</i>	130
3.7.2	<i>Integral múltipla de Wiener-Itô</i>	137
3.7.3	<i>Teorema de Wiener-Itô e representação de martingales</i>	139
4	MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON	145
4.1	Dinâmicas dos ativos	145
4.2	Precificação de opção pelo hedging	147
4.2.1	<i>Medida neutra ao risco</i>	148
4.2.2	<i>Estratégias admissíveis em um mercado livre de arbitragem</i>	154
4.2.3	<i>Mercado completo</i>	160
4.2.4	<i>Preço de uma opção no mercado de Black-Scholes-Merton</i>	165
4.2.5	<i>Gregas</i>	172
4.3	Aplicação	175
5	MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON MULTIDIMENSI- ONAL	179
5.1	Estratégia com dois ativos de risco	179
5.1.1	<i>Os movimentos Brownianos</i>	179
5.1.2	<i>Os ativos do mercado</i>	181
5.1.3	<i>Estratégias no modelo bidimensional</i>	183
5.1.3.1	<i>Mercado completo em livre de arbitragem</i>	185
5.1.4	<i>Derivação do preço da opção e estimação da matriz de covariâncias</i> 186	
5.1.4.1	<i>Algoritmo para o cálculo do preço de uma opção</i>	186
5.1.4.2	<i>Estimação da matriz de covariâncias</i>	187
5.1.4.3	<i>Aplicação</i>	188
5.1.5	<i>Estratégias no modelo d-dimensional</i>	190
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	193
6.1	Modelo de Black - Scholes - Merton e suas limitações	194
	REFERÊNCIAS	199
ANEXO A	BASE MATEMÁTICA	203
ANEXO B	TÓPICOS DE PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTO- CÁSTICOS	207
B.1	Existência do Movimento Browniano	207

B.2	Desigualdades	211
B.3	Decomposição Doob - Meyer e a representação de martingales . .	213

INTRODUÇÃO

Desde os tempos medievais, acordos contratuais entre indivíduos para pagamento e entrega em uma data futura são negociados. Desde então, houve a necessidade do gerenciamento do risco causado por alterações que os preços dos ativos contratados sofriam ao longo do tempo. A busca pela proteção às oscilações e aleatoriedade dos preços dos ativos levaram ao surgimento dos mercados futuros.

Embora, inicialmente, nos mercados futuros eram acordados produtos agrícolas, atualmente operações com uma série de bens ou mercadorias são realizadas. Estes bens ou mercadorias são conhecidos como *commodities*, as quais são negociadas em uma bolsa de valores quando se tornam um ativo bursátil, i.e., com grande mercado à vista, volatilidade de preços e atualizações frequentes de oferta e demanda.

Os derivativos são operações financeiras contratadas que derivam seu valor econômico de um ativo bursátil qualquer, o qual é denominado ativo base ou ativo subjacente. Entre os derivativos mais populares encontram-se as opções. Uma opção fornece ao seu comprador ou vendedor o direito, mas não a obrigação, de respectivamente comprar ou vender um ativo de risco (ação), em uma data futura (tempo de maturidade), por um preço pré-estabelecido (preço de exercício). O comprador paga ao vendedor um determinado valor pelo contrato, o qual é denominado prêmio. Atualmente, diversos tipos de opções são comercializados no mercado, sendo os mais populares: as opções americanas e as opções europeias. Nas opções do tipo americana o direito de compra ou venda pode ser exercido em qualquer momento até o tempo de maturidade, enquanto nas opções do tipo europeia o direito só pode ser exercido na data de expiração.

No mercado de derivativos, os modelos matemáticos baseados em equações diferenciais estocásticas (EDEs) são bem difundidos. O primeiro modelo para precificação de opções foi proposto por [Black e Scholes \(1973\)](#) e aperfeiçoado por [Merton \(1973\)](#). Este modelo modificou as dinâmicas do mercado financeiro e a forma de se trabalhar com derivativos. A partir deste modelo,

é possível calcular rapidamente o preço de uma opção através de uma fórmula matemática, necessitando, apenas, da estimação de dois parâmetros: a média do retorno e a volatilidade histórica do ativo de risco.

Posteriormente, alternativas mais adequadas para as suposições do modelo de Black-Scholes-Merton de volatilidade constante e de normalidade da distribuição dos log-retornos foram buscadas. A função de distribuição de probabilidade dos log-retornos geralmente é observada com excesso de curtose e assimetria negativa quando comparada a função densidade da distribuição normal e a volatilidade não é constante, possuindo, na verdade, uma dinâmica de reversão à média, resultante dos preços dos ativos acompanharem a média de longo prazo (ver, por exemplo, [Mandelbrot, 1967](#); [Cont, 2001](#)). Neste contexto, verifica-se ainda que, em geral, um aumento nos valores da volatilidade resulta em um decréscimo nos preços dos ativos, i.e., eles são correlacionados negativamente, fenômeno conhecido na literatura como efeito alavanca (ver [Bakshi, Ju e Ou-Yang, 2006](#)).

A partir do relaxamento das hipóteses do modelo de Black-Scholes-Merton surgem os modelos de volatilidade estocástica (MVEs). Nesse contexto, autores como [Hull e White \(1987\)](#), [Stein e Stein \(1991\)](#), [Heston \(1993\)](#) e [Ahn e Gao \(1999\)](#) propuseram descrever a dinâmica da volatilidade através de uma EDE. Dessa forma, tais modelos são compostos por um sistema de duas EDEs, em que a primeira equação descreve a dinâmica do preço do ativo de risco e a segunda descreve a dinâmica da volatilidade desse ativo. Entretanto, diferente do modelo de Black-Scholes-Merton, os MVEs não possuem solução analítica e suas soluções devem, portanto, ser aproximadas por métodos numéricos (ver, por exemplo, [Kloeden, Platen e Schurz, 2012](#); [Milstein, 1994](#)).

Podemos, então, precificar uma opção usando quaisquer dos modelos de mercados citados anteriormente. Além disso, como muitos dos participantes de mercados futuros realizam essa precificação a fim de proteger o capital com respeito às oscilações do mercado, é natural precificar uma opção de acordo com uma estratégia de investimento na qual o capital inicial investido pelo outorgador da opção seja igual ao valor recebido pelo contrato da opção e, no tempo de maturidade do contrato, o outorgador consiga os mesmos ganhos que o detentor da opção. Em outras palavras, uma estratégia de *hedging* (ver [Hull, 2015](#)).

Esta dissertação tem a finalidade de estudar a modelagem via EDEs, voltada para a precificação de opções e estratégias de *hedging* em mercado de opções. Nesse sentido, no Capítulo 2, apresentamos os primeiros conceitos sobre o mercado de derivativos e de opções, onde nos baseamos principalmente no livro de [Hull \(2015\)](#). Além disso, estudamos o primeiro tipo de modelo de precificação de opções proposto por [Cox, Ross e Rubinstein \(1979\)](#), que utiliza processos estocásticos a tempo discreto. No Capítulo 3, estudamos a teoria do cálculo estocástico. A luz do que fez [Kuo \(2006\)](#), construímos a integral de Itô partindo das integrais determinísticas, mostramos e utilizamos a fórmula de Itô e apresentamos sobre quais condições há a existência e unicidade de uma solução de uma EDE. No Capítulo 4, reunimos o que foi apresentado nos

Capítulos 2 e 3 para trabalhar com o modelo de apreçamento de opções de Black - Scholes - Merton, seguindo os passos de [Capiński e Kopp \(2012\)](#) e [Shiryaev \(1999\)](#). No Capítulo 5, apresentamos a extensão do modelo de Black - Scholes - Merton, em que consideramos mais de uma ação no portfólio do investidor e mostramos uma aplicação em dados reais. Por fim, no Capítulo 6, concluimos mostrando que nem sempre os pressupostos do modelo são satisfeitas, sendo necessário uma modelagem mais robusta como por exemplo os MVEs.

MERCADO DE OPÇÕES

Neste capítulo, introduzimos os conceitos relacionados ao mercado de opções, tais como as definições de alguns objetos financeiros e dos termos técnicos relacionados. Diferente do que ocorre no mercado de ações à vista, o mercado de opções negocia o valor especulado de um ativo, possibilitando para o investidor diversificar seu portfólio, se proteger em relação a volatilidade dos preços dos ativos no mercado à vista e ganhar tanto na valorização, quanto na desvalorização do ativo. Explicamos, na Seção 2.1, o funcionamento do mercado financeiro e o seu contexto histórico. Na Seção 2.2, explicamos o funcionamento do mercado de derivativos, seus tipos de investidores e contratos, em particular, estudamos o mercado de opções e apresentamos uma introdução à precificação de opções. Por fim, na Seção 2.3, definimos sobre quais condições do mercado trabalhamos nesta dissertação.

2.1 Mercado Financeiro

As civilizações antigas viviam em pequenas comunidades, cujas atividades realizadas eram de subsistência e com uma economia baseada basicamente em favores e obrigações. Com a evolução do transporte, comunidades puderam trocar favores e produtos uma com as outras através do escambo. Entretanto, em uma economia de troca, os preços relativos das mercadorias eram baseados na percepção subjetiva de cada indivíduo. A fim de facilitar as trocas muitas sociedades criaram uma medida comum de valor entre as mercadorias a serem negociadas. Essa medida é o que conhecemos hoje como dinheiro.

Dinheiro é o meio utilizado para representar sistematicamente o valor de mercadorias permitindo a troca de bens e serviços. A criação do dinheiro permitiu o acúmulo do excedente de produção sendo, portanto, um meio de poupança. O armazenamento de dinheiro possibilitou o seu empréstimo sobre o pagamento de uma taxa de juros, fazendo do dinheiro uma mercadoria rentável. Da intermediação financeira entre agentes superavitários (poupadores) e agentes deficitários (emprestadores) surgem os bancos, cuja criação permitiu que recursos ociosos se

tornassem produtivos.

O mercado financeiro é o ambiente no qual os agentes econômicos negociam de forma eficiente a renda excedente, a qual é direcionada para o financiamento de setores da economia que necessitam de recursos, promovendo investimento e crescimento econômico. A intermediação financeira nesse mercado contribui para a conciliação dos interesses dos agentes econômicos, através do equilíbrio de prazos, magnitude de capital e riscos.

O mercado financeiro é subdividido em mercado monetário, mercado de crédito, mercado de capitais e mercado cambial. Neste trabalho, estamos interessados nas atividades desenvolvidas no mercado de capitais, no qual os recursos poupadores são utilizados para financiar projetos de empresas sem intermediação bancária. Nesse mercado, as empresas carentes por recursos emitem títulos representativos do seu capital que são vendidos diretamente aos agentes superavitários (investidores).

Os títulos emitidos pelas empresas podem ser títulos de dívida ou ações. Títulos de dívida dão ao investidor o direito de receber a quantia emprestada acrescida de uma taxa de juros previamente determinada. Em contraste, as ações não garantem uma remuneração fixa aos investidores, uma vez que essa remuneração é parte do lucro (dividendos) que a empresa distribui aos seus acionistas. Quando são negociados título de dívidas, o mercado de capitais é denominado mercado de renda fixa, enquanto no caso em que são negociadas ações, o mercado é o de renda variável.

Os investidores podem comprar e vender ações de empresas que estejam listadas nas bolsas de valores – organizações livres e abertas onde valores mobiliários são negociados. Quando listadas na bolsa, essas empresas passam a ser denominadas empresas de capital aberto. As ações são, portanto, uma fração do capital desse tipo de empresa e os detentores das ações são seus sócios. Além disso, as negociações das ações podem ser realizadas à vista ou à prazo. O mercado à vista é o conjunto de operações em que as negociações são realizadas e liquidadas à vista com preços estabelecidos em pregão, enquanto o mercado à prazo são as operações realizadas para liquidação em data futura. Nesta monografia, nosso interesse é o mercado à prazo, em particular, o mercado de derivativos.

2.2 Mercado de Derivativos

O termo ativo se refere a bens ou direitos de uma empresa ou fundos de investimento. Derivativos são instrumentos financeiros contratados cujo valor econômico se deriva de ativos bursáteis (ativos listados na bolsa de valores), sejam eles ativos não-financeiros como ativos agropecuários, petróleo, gás e energia elétrica, ou sejam eles ativos financeiros como índices, taxa de juros, moedas e ações. Estes ativos utilizados como referência para estabelecer o preço dos derivativos são conhecidos como ativo base ou ativo subjacente. A formação de preços no mercado de derivativos é, portanto, resultante dos preços dos ativos base negociados no mercado

à vista.

Os principais contratos de derivativos são a termo, de *swap*, futuros e de opções. Todos possuem suas características específicas, mas compartilham a negociação, no presente, pelas partes, de ativos que serão pagos ou vendidos em uma data futura pré-estabelecida (data de vencimento ou tempo de maturidade) a um preço pré-determinado (preço de exercício). Além disso, esses contratos podem ser padronizados ou não-padronizados. Derivativos padronizados são administrados pela bolsa de valores e, portanto, possuem garantias para sua liquidação por meio da Câmara de Compensação. Os derivativos não-padronizados, por sua vez, são negociados diretamente entre as partes e, dessa forma, possuem um maior risco de inadimplência.

O mercado de derivativos foi criado com o objetivo de proteger os preços da agricultura contra as oscilações de mercado. Neste sentido, muitos contratos e bolsas foram criados no mundo para suprir essa necessidade. No Brasil, foi criada a Bolsa de Mercadorias de São Paulo em 1918, responsável pelas negociações de contratos a termo de café, algodão e boi gordo. Em 1991, a Bolsa de Mercadorias de São Paulo uniu-se com a Bolsa Mercantil de Futuros originando a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), tornando-se a maior negociadora de derivativos do MERCOSUL. Atualmente, BM&F faz parte da Brasil Bolsa e Balcão (B3), a oitava maior bolsa do mundo em capitalização de mercado.

Devido aos riscos e variações do mercado financeiro, os derivativos são instrumentos que oferecem proteção ao investidor. Por exemplo, contratos cambiais futuros de compra não expõem o comprador aos riscos de futuras valorizações da moeda. O investidor que usa estratégias de proteção (*hedging*) é chamado de *hedger* e este compõe o mercado de derivativos em conjunto com o especulador e o arbitrador. O especulador assume riscos para lucrar com as oscilações futuras. O arbitrador, por sua vez, lucra com a diferença entre preços do mesmo ativo em mercados diferentes.

2.2.1 Hedging, especulação e arbitragem

Os papéis dos investidores são fundamentais para o funcionamento saudável e equilibrado do mercado de derivativos. Neste sentido, temos os arbitrades, que são os intermediadores de negociações entre mercados e lucram na diferença dos preços de um ativo. A lei da oferta e da demanda faz das estratégias de arbitragem um meio de regularização do valor do ativo entre mercados, evitando o impasse entre os preços. Estas são, em sua maioria, aplicadas por investidores institucionais, pois as exigências e taxas das estratégias são inviáveis para pessoas físicas. As arbitragens com derivativos operam a partir das inconsistências entre o mercado à vista e o mercado à prazo, ou entre inconsistências entre diferentes bolsas. Essa é uma operação com um baixo nível de risco, uma vez que os arbitrades conhecem exatamente os preços de compra e venda.

Os especuladores buscam lucros com as oscilações dos preços dos derivativos e, para

isso, assumem posições de alto risco. Além disso, os investidores que usufruem das estratégias de especulação assumem os riscos dos *hedgers*, contribuindo com o balanceamento e a liquidez do mercado. Normalmente, as especulações são realizadas por investidores com alto conhecimento de mercado e, ainda, suas negociações podem ser realizadas no mesmo dia (*day trade*).

Por fim, temos os *hedgers*, que operam visando a proteção de seus investimentos e, portanto, usam os derivativos para evitar as oscilações do mercado à vista. As operações de derivativos foram criadas com o propósito de aplicar estratégias de *hedging*, logo a maneira mais comum de *hedging* é adotar uma posição contrária à do mercado à vista no mercado a prazo. Nessa monografia, em particular, estamos interessados em estudar as estratégias de *hedging* no mercado de opções.

2.2.2 Opções

Opções são derivativos que dão ao contratante (titular) o direito de compra ou venda de ativos, a um preço pré-fixado e com prazo de exercício pré-estabelecido. Já a contraparte, o contratado (lançador), por sua vez, recebe uma quantia prévia (prêmio), que o obriga, caso o titular exerça a opção, a comprar ou vender os ativos negociados pelo preço estipulado pela opção na data em que o contrato expirar. No caso em que o titular decide não exercer sua opção, ele perde o prêmio pago ao lançador, embora possa negociar o seu valor.

As opções podem ser de compra ou de venda. As opções de compra (*call options*) oferecem ao titular o direito de adquirir o ativo base ao qual a opção está atrelada, pelo preço de exercício até a data de maturidade do contrato. As opções de venda (*put options*) confere ao seu titular o direito de vender o ativo base, pelo preço de exercício até a data de maturidade do contrato. Opções também se diferenciam com relação às datas de exercício, sendo a opção que pode ser exercida em qualquer momento até a data de vencimento denominada de opção do tipo americana, enquanto, a opção que é exercida apenas na data de vencimento é denominada opção do tipo europeia. Na prática, a maioria das opções são do tipo americana, uma vez que fornecem ao seu titular maior liberdade, permitindo-o escolher o tempo de exercício.

Existem duas posições que podem ser tomadas pelos investidores: a posição vendida (*short position*) e a posição comprada (*long position*). Investidores na posição comprada são aqueles que compraram a opção (i.e., os titulares), enquanto investidores na posição vendida são aqueles que venderam ou “escreveram” a opção (i.e., os lançadores). Portanto, existem quatro posições que um investidor pode assumir em um contrato de opções: (i) posição comprada em opção de compra; (ii) posição comprada em opção de venda; (iii) posição vendida em opção de compra e (iv) posição vendida em opção de venda.

O ganho do titular de uma opção de compra acontece quando o preço do ativo base está maior do que o preço de exercício, em caso contrário, não há ganho para o titular, logo ele não exerce sua posição. Portanto, o titular de uma opção de compra especula que o preço à vista

do ativo base irá se valorizar no futuro. Para o titular de uma opção de venda, por outro lado, o ganho acontece quando o preço do ativo base está menor do que o preço de exercício, em caso contrário, também não exerce seu direito, já que não irá obter lucros. Assim, o titular de opção de venda especula que o preço à vista do ativo base irá se desvalorizar no futuro.

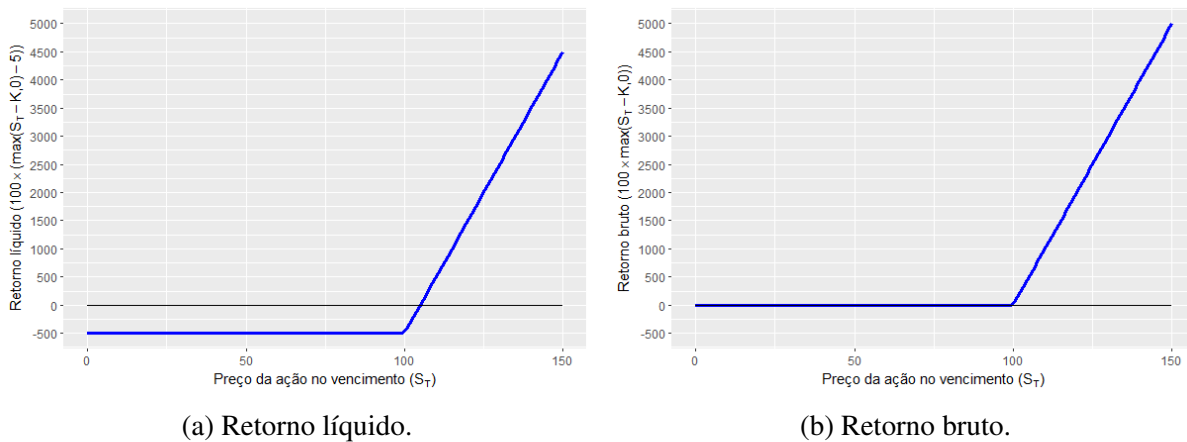
Consideramos, para definição, opções do tipo europeia. Sejam $T > 0$ o tempo de maturidade de uma opção e $[0, T]$ o intervalo real no qual as transações ocorrem. Considere $S = \{S(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico com espaço de estados $\mathcal{S} = [0, +\infty)$, em que $S(t)$ representa o valor do ativo base no tempo t . Se $K > 0$ é o preço de exercício do contrato, então o retorno bruto de um titular de uma opção de compra europeia no tempo T é dado por $\max(S(T) - K, 0)$. Logo, a opção será exercida se $S(T) > K$; e não será exercida se $S(T) \leq K$. Por outro lado, o retorno bruto do lançador de uma opção de compra europeia no tempo T é dado por $-\max(S(T) - K, 0)$.

Exemplo 1. Considere a situação em que um investidor esteja interessado em comprar ações de uma determinada empresa. Suponha que o investidor especula que o preço das ações dessa empresa irá subir no curto prazo. Neste caso, ele pode, por exemplo, comprar uma opção de compra do tipo europeia de ações dessa empresa por um prêmio, por ação, no valor de R\$5,00. Assuma que sejam negociadas 100 ações com um preço de exercício de $K = R\$100,00$ por ação com vencimento do contrato no tempo de maturidade $T = 30$ dias. O vendedor desta opção é o lançador e o investidor que está adquirindo a opção é o titular. Através dessa negociação entende-se que o titular adquiriu o direito, e não a obrigação, de comprar as ações da empresa por R\$100,00 cada, na data de maturidade, em 30 dias. A expectativa do titular da opção é de valorização do preço da ação para um valor superior ao preço de exercício de R\$100,00.

Se na data de vencimento da opção o preço da ação é $S(T) = R\$115,00$, então o investidor na posição comprada (titular da opção), possui um retorno bruto de $100 \times \max(S(T) - K, 0) = R\$1500,00$ e o retorno líquido de $100 \times (\max(S_T - K, 0) - 5) = R\$1000,00$. Caso, na data de maturidade, o preço da ação esteja fixado no mercado a $S(T) = R\$85,00$, o mesmo investidor não exerce o direito de compra, possuindo, portanto, um retorno bruto de $100 \times \max(S(T) - K, 0) = R\0 e um retorno líquido de $100 \times (\max(S(T) - K, 0) - 5) = -R\500 . Na Figura 1, são apresentados dois gráficos. O gráfico (a) é o diagrama de posição para a posição comprada sobre a opção de compra do tipo europeia na data de vencimento, o qual mostra os possíveis cenários de lucros e/ou perdas resultantes do fechamento do negócio. O gráfico (b) mostra o retorno bruto do titular da opção de compra do tipo europeia na data de vencimento em função dos possíveis valores da ação da empresa.

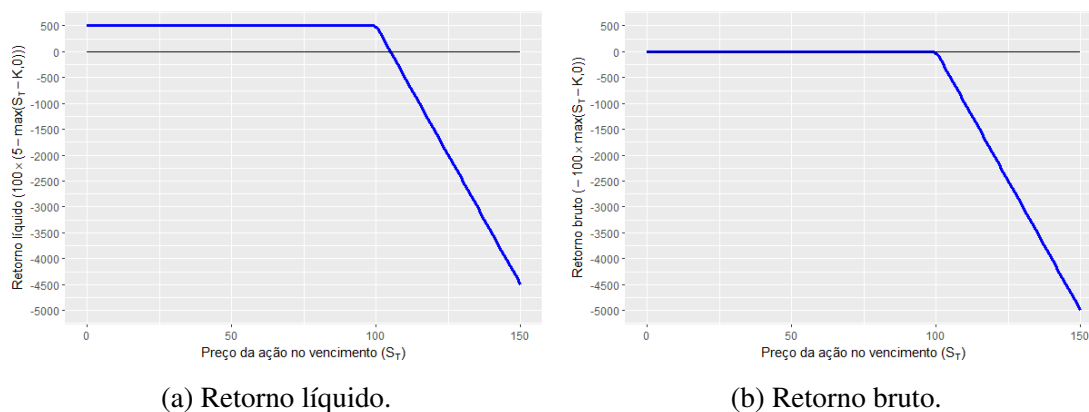
Exemplo 2. Considere a mesma situação do Exemplo 1, i.e., a negociação de uma opção de compra do tipo europeia de 100 ações de uma determinada empresa, com o valor do prêmio sendo de R\$5,00 por ação, preço de exercício de $K = R\$100,00$ cada ação e tempo de maturidade do contrato em $T = 30$ dias. No entanto, vamos analisar o retorno de uma investidora na posição vendida. Através dessa negociação entende-se que a lançadora possui a obrigação,

Figura 1 – Retornos do investidor na posição comprada sobre a opção de compra do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.



sempre que exigida pelo titular, de entregar as ações da empresa por R\$100,00 cada, na data de maturidade, em 30 dias. No caso de valorização ($S(T) = R\$115,00$), o titular exerce a opção e, portanto, a lançadora possui retorno bruto de $-100 \times \max(S(T) - K, 0) = -R\$1500,00$ e retorno líquido de $100 \times (5 - \max(S(T) - K, 0)) = -R\$1000,00$. No caso de desvalorização ($S(T) = R\$85,00$), o titular não exerce a opção e, portanto, a lançadora possui retorno bruto de $-100 \times \max(S(T) - K, 0) = R\$0,00$ e retorno líquido de $100 \times (5 - \max(S(T) - K, 0)) = R\$500,00$. Na Figura 2, são apresentados os gráficos dos retornos líquido (a) e bruto (b) da investidora na posição vendida sobre a opção de compra do tipo europeia em questão.

Figura 2 – Retornos da investidora na posição vendida sobre a opção de compra do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.



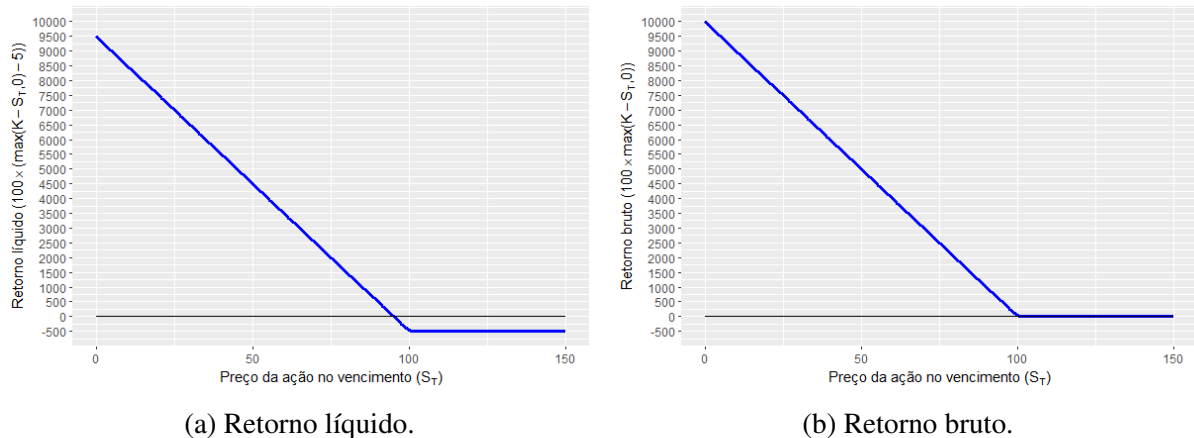
Agora, vamos considerar opções de venda do tipo europeia. Neste caso, se $K > 0$ é o preço de exercício do contrato, então o retorno bruto de um titular de uma opção de venda europeia no tempo T é dado por $\max(K - S(T), 0)$. Logo, a opção será exercida se $S(T) < K$;

e não será exercida se $S(T) \geq K$. Por outro lado, o retorno bruto do lançador de uma opção de venda europeia no tempo T é dado por $-\max(K - S(T), 0)$.

Exemplo 3. Novamente, vamos considerar a negociação descrita no Exemplo 1, ou seja, 100 ações com o prêmio por ação no valor de R\$5,00, preço de exercício $K = 100,00$ cada e tempo de vencimento do contrato em $T = 30$ dias. Todavia, agora, a opção em negociação é uma opção de venda do tipo europeia. Através dessa negociação entende-se que o titular adquiriu o direito, e não a obrigação, de vender as ações da empresa por R\$100,00 cada, na data de maturidade, em 30 dias. A expectativa do titular da opção é de desvalorização do preço da ação para um valor inferior ao preço de exercício de R\$100,00 por ação.

Se na data de vencimento da opção o preço da ação é $S(T) = R\$85,00$, então o investidor na posição comprada (titular da opção), possui um retorno bruto de $100 \times \max(K - S(T), 0) = R\$1500,00$ e um retorno líquido de $100 \times (\max(K - S(T), 0) - 5) = R\$1000,00$. Caso, na data de maturidade, o preço da ação esteja fixado no mercado a $S(T) = R\$115,00$, o mesmo investidor não exerce o direito de compra, possuindo, portanto, um retorno bruto de $100 \times \max(K - S(T), 0) = R\$0,00$ e o um retorno líquido de $100 \times (\max(K - S(T), 0) - 5) = -R\$500,00$. Na Figura 3 apresentamos gráficos análogos aos da Figura 1 considerando, entretanto, a negociação de uma opção de venda do tipo europeia ao invés de uma opção de compra.

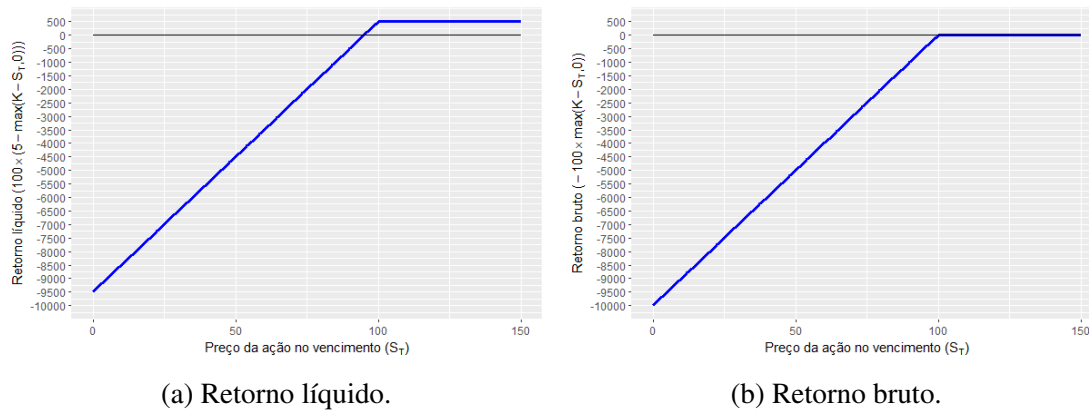
Figura 3 – Retornos do investidor na posição comprada sobre a opção de venda do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.



Exemplo 4. Considere a negociação da opção de venda do tipo europeia descrita no Exemplo 3. No entanto, vamos analisar o retorno de uma investidora na posição vendida. Através dessa negociação entende-se que a lançadora possui a obrigação, sempre que exigida pelo titular, de comprar as ações da empresa por R\$100,00 cada, na data de maturidade, em 30 dias. No caso de valorização ($S(T) = R\$115,00$), a lançadora possui retorno bruto de $-100 \times \max(K - S(T), 0) = R\$0,00$ e o retorno líquido de $100 \times (5 - \max(K - S(T), 0)) = R\$500,00$. No caso da desvalorização ($S(T) = R\$85,00$), a lançadora possui retorno bruto de $100 \times \max(S(T) - K, 0) = -R\$1500,00$ e retorno líquido de $100 \times (5 - \max(K - S(T), 0)) = -R\$1000,00$. Na Figura 4

são apresentados gráficos análogos aos da Figura 2 considerando, entretanto, a posição vendida sobre uma opção de venda do tipo europeia.

Figura 4 – Retornos do investidor na posição vendida sobre a opção de venda do tipo europeia de 100 ações de uma certa empresa, na data de vencimento, de acordo com o valor do ativo base negociado.



Em todos os casos supracitados, o titular pagou um prêmio para a aquisição da opção. No caso de uma opção de compra vamos denotar esse valor por $C(0)$ e no caso de uma opção de venda denotaremos o prêmio por $P(0)$. Assim, o retorno líquido de um titular de uma opção de compra no tempo T é dado por $\max(S(T) - K, 0) - C(0)$ e o retorno líquido de um lançador de uma opção de compra no tempo T é dado por $C(0) - \max(S(T) - K, 0)$. Por outro lado, o retorno líquido de um titular de uma opção de venda no tempo T é dado por $\max(K - S(T), 0) - P(0)$ e o retorno líquido de um lançador de uma opção de venda no tempo T é dado por $P(0) - \max(K - S(T), 0)$.

Dividendos são pagamentos proporcionais aos lucros de alguma instituição, feitos aos acionistas em uma data especificada, com isso, o retorno líquido das opções sobre ativos que pagam com dividendos se altera. Seja $D(T) > 0$ a quantidade paga por um ativo base de dividendos até o tempo T , assim, um lançador de uma opção de compra tem retorno líquido de $C(0) + D(T) - \max(S(T) - K, 0)$ e um titular de uma opção de venda tem retorno líquido de $\max(K - S(T), 0) + D(T) - P(0)$. O retorno líquido das demais posições não se altera.

As opções do tipo americana podem ser exercidas antes do tempo de maturidade. Assim, seja $\tau \in [0, T]$ o tempo de exercício de uma opção do tipo americana. Se a opção for de compra, então o retorno bruto e líquido do titular são dados, respectivamente, por $\max(S(\tau) - K, 0)$ e $\max(S(\tau) - K, 0) - C(0)$; enquanto o retorno bruto e líquido do lançador são dados, respectivamente, por $-\max(S(\tau) - K, 0)$ e $C(0) - \max(S(\tau) - K, 0)$. No caso de uma opção de venda, o retorno bruto e líquido do titular são dados, respectivamente, por $\max(K - S(\tau), 0)$ e $\max(K - S(\tau), 0) - P(0)$; enquanto o retorno bruto e líquido do lançador são dados, respectivamente, por $-\max(K - S(\tau), 0)$ e $P(0) - \max(K - S(\tau), 0)$.

O retorno bruto do titular em um instante de tempo $t \in [0, T]$ também é conhecido como valor intrínseco da opção, i.e., o valor que a opção valeria no instante t . Logo, o valor intrínseco de uma opção no instante de tempo t é o valor mínimo que deve ser pago pelo prêmio dessa opção nesse instante. É mais vantajoso para o lançador que o exercício da opção seja executado do que revender essa opção por um prêmio menor. Na prática, entretanto, a opção no instante de tempo t é negociada por um valor superior ao valor intrínseco. Logo, a opção possui também um valor extrínseco que corresponde a diferença entre o valor da opção que está sendo negociada no mercado no instante t e o seu valor intrínseco naquele instante. O valor extrínseco de uma opção no instante de tempo t é, portanto, a parcela do prêmio da opção influenciada por quão longe o instante t está da data de maturidade da opção, pela taxa básica de juros do país e pela volatilidade do ativo base negociado.

Exemplo 5. Para exemplificar, vamos assumir a opção de compra dos Exemplos 1 e 2, nos quais o preço de exercício da opção de compra do tipo europeia é negociada por R\$100,00, pelo preço de R\$5,00, para ser exercida em 30 dias. Sendo o preço do ativo base $S(t) = R\$103,00$ em um tempo qualquer $t \in [0, T]$, o valor intrínseco é dado por $\max(S(t) - K, 0) = R\$3,00$. Suponha que nesse instante t a opção esteja cotada no mercado a R\$3,50, i.e., $C(t) = R\$3,50$. Neste caso, o valor extrínseco é dado por $C(t) - \max(S(t) - K, 0) = R\$0,50$. Por outro lado, caso o valor do ativo base no tempo t seja $S(t) = R\$97,00$, o valor intrínseco do ativo é $\max(S(t) - K, 0) = R\$0,00$ (não há valor intrínseco) e o valor extrínseco é o valor da opção que está sendo negociado no mercado no instante t , ou seja, $C(t) = R\$3,50$. Por outro lado, assumindo a opção de venda dos Exemplos 3 e 4 negociada no mercado no tempo t por $P(t) = R\$3,50$, temos os resultados inversos. No caso em que $S_t = R\$103,00$, os valores intrínseco e extrínseco são dados, respectivamente, por $\max(K - S(t), 0) = R\$0,00$ e $P(t) - \max(K - S(t), 0) = R\$3,50$. Em contraste, no caso $S(t) = R\$97,00$, são dados, respectivamente, por $\max(K - S(t), 0) = R\$3,00$ e $P(t) - \max(K - S(t), 0) = R\$0,50$.

Exemplo 6. Devido à volatilidade e ao tempo até o exercício, opções com o mesmo valor intrínseco podem possuir prêmios diferentes ao longo do tempo. Como exemplo, suponha duas opções de compra do tipo europeia distintas, i.e., opções vindas de ativos base diferentes (ativo A e ativo B). Porém, ambas estão sendo negociadas com o preço de exercício de R\$100,00, com o vencimento do contrato em 30 dias e o preço atual do ativo base sendo R\$103,00. O ativo A possui um histórico de grande variação dos seus preços, podendo atingir preços maiores que o atual, enquanto o ativo B possui os preços históricos mais constantes. Em ambos os casos, o valor intrínseco é R\$3,00, porém o prêmio da opção A negociado no mercado é de R\$7,00 devido a sua volatilidade, possuindo, portanto, valor extrínseco de R\$4,00. Por outro lado, o prêmio da opção B é negociado a R\$5,00, por ser menos volátil, possuindo, dessa forma, valor extrínseco de R\$2,00.

O mesmo acontece com o tempo de exercício. Supondo o mesmo ativo base A, com o preço atual de R\$103,00, e duas opções de compra do tipo europeia com preço de exercício

de R\$100,00, porém com tempos de vencimento dos contratos distintos, sendo eles 30 dias e 60 dias. Por possuir um tempo de maturidade maior, o contrato de 60 dias aumenta a incerteza de qual será o valor do ativo na data de exercício. Sendo assim, apesar de ambas as opções possuírem valores intrínsecos iguais, o prêmio do contrato de 60 dias negociado no mercado pode ser de R\$10,00, enquanto a opção de 30 dias pode ser R\$7,00, ou seja, o valor extrínseco da opção de 60 dias é maior, em consequência da quantidade de tempo remanescente para a maturidade do contrato.

Podemos também classificar as opções com relação ao seu valor intrínseco. Quando o preço atual do ativo base é igual ou próximo ao preço de exercício, dizemos que uma opção está no dinheiro (*at-the-money*). Se o valor intrínseco é zero, então dizemos que uma opção está fora do dinheiro (*out-the-money*). Por fim, dizemos que uma opção está dentro do dinheiro (*in-the-money*) quando o valor intrínseco maior que zero.

Exemplo 7. Utilizando os casos demonstrados no Exemplo 5, temos para a opção de compra, no qual o preço do ativo está sendo negociado no valor de R\$103,00 e, também, para a opção de venda, no qual o ativo está sendo negociada no valor R\$97,00, estão dentro do dinheiro. Isto significa que, além do valor intrínseco ser positivo, que as opções estão sendo negociadas de forma que os titulares tenham vantagem da situação, podendo conseguir retorno positivo. Por outro lado, os outros dois casos, nos quais o ativo da opção de compra está sendo negociado no valor de R\$97,00 e o ativo da opção de venda está sendo negociado R\$103,00, o valor está fora do dinheiro. Neste caso, ambos possuem retorno bruto igual a R\$0,00, e ainda, os titulares não possuem vantagem em exercer este tipo de opção. Se os ativos das opções de compra e venda estivessem valendo R\$100,00, teríamos valor intrínseco igual a 0 e as opções estariam no dinheiro, ou seja, neste caso teríamos um empate entre os valores, não implicando em vantagem ou desvantagem claras para os titulares.

Um dos objetivos das opções é proteger o titular de um futuro incerto. Como vimos, quanto mais distante estivermos da data de maturidade de uma opção, maior será o prêmio dessa opção naquele instante, uma vez que o futuro mais distante é também mais incerto. Além disso, vimos que o preço de uma opção depende também da volatilidade do preço do ativo base, ativos mais voláteis implicam em opções mais caras. Outro fator que influencia na precificação das opções é a taxa básica de juros do país, cujo estudo desenvolvemos em mais detalhes na seção seguinte.

2.2.3 Taxa de Juros

No mercado financeiro, os agentes econômicos negociam a renda excedente, i.e., os agentes deficitários emprestam dinheiro aos agentes superavitários via um intermediário financeiro por um preço que reflete uma dimensão temporal. O preço do dinheiro emprestado é, a grosso modo, o que chamamos de taxa de juros. Na economia, a taxa de juros é definida pelas políticas

macroeconômicas de um país. No Brasil, as principais taxas utilizadas como referência para a maioria dos títulos são taxa de crédito entre bancos (DI) e a taxa básica de juros brasileira (SELIC), conhecidas, em finanças, como taxas livre de risco. Em geral, quando a taxa de juros apresenta um comportamento de alta, os investidores são atraídos pelo mercado de renda fixa, uma vez que espera-se, neste caso, uma remuneração maior pelo investimento. Em períodos de queda na taxa de juros, os investidores preferem o mercado de renda variável.

Títulos emitidos por um país ou por empresas, pagos de acordo com taxas livre de risco são denominados ativos livre de risco (*bonds*). No Brasil, por exemplo, temos os tesouros SELIC e IPCA, onde o detentor do título faz o papel do credor, emprestando dinheiro, enquanto o governo faz o papel do mutuário, devolvendo o valor emprestado mais a taxa de juros atrelada ao investimento. Ativos livre de risco, portanto, são ativos negociados no mercado de renda fixa. Sejam r uma taxa anual livre de risco e $A' = \{A'(t) : t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ uma sequência de números reais positivos tal que $A'(t)$ representa o preço, no instante t , do ativo livre de risco atrelado à taxa r . Se a taxa for composta uma vez por ano, após t anos, o valor do ativo livre de risco é

$$A'(t) = A'(0)(1+r)^t.$$

Em geral, as taxas de juros se dividem em várias parcelas denominadas como frequência composta. Com isso, sendo $m \in \mathbb{N}$ a frequência composta anual, segue que o pagamento do ativo livre de risco em t anos é dado por

$$A'(t) = A'(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Podemos propor uma aproximação contínua para o valor do ativo livre de risco tomando a frequência composta como sendo infinita. Assim, se $A = \{A(t) : t \in [0, \infty)\}$ é uma sequência de valores reais positivos tal que $A(t)$ é o valor pago pelo ativo livre de risco no tempo $t \geq 0$, em que $A(0) = A'(0)$, então

$$A(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} A'(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = A(0)e^{rt},$$

em que $e = 2,71828\dots$

Em geral, se r é a taxa anual livre de riscos com m frequências por ano e r^* é a taxa livre de risco associada à aproximação contínua, então, para todo $t \in \mathbb{N}$, podemos escrever r em função de r^* , ou r^* em função de r . Utilizando o fato de que

$$A'(t) = A'(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \approx A(0)e^{tr^*}$$

para m suficientemente grande, a equação para r é dada por

$$\begin{aligned} A'(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = A(0)e^{tr^*} &\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = e^{tr^*} \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{m}\right) = e^{\frac{r^*}{m}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{r}{m}\right) = e^{\frac{r^*}{m}} - 1 \\ &\Rightarrow r = m(e^{\frac{r^*}{m}} - 1). \end{aligned}$$

De forma equivalente, a equação para r^* é dada por

$$\begin{aligned} A(0)e^{tr^*} &= A(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \Rightarrow e^{tr^*} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \\ &\Rightarrow e^{r^*} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \\ &\Rightarrow r^* = m \ln \left(1 + \frac{r}{m}\right), \end{aligned}$$

em que $\ln(e^x) = x$.

Exemplo 8. Um investidor compra um título público (ativo livre de risco) que não paga cupons (sem juros semestrais) com data de exercício de $T = 2$ anos, que custa $A(0) = R\$1000,00$. Este título possui taxa de juros anual de $r = 4\%$, o qual é pago $m = 2$ vezes no ano. Logo, ao final de 2 anos, o investidor receberá o valor nominal de $A'(2) = 1000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 2} \approx R\$1082,43$. Caso este investidor, para controle do seu portfólio ¹, queira saber qual a taxa de juros composto contínua, basta utilizar a equação $r^* = 2 \ln \left(1 + \frac{0,04}{2}\right) \approx 0,04$. Logo a taxa anual do juros composta contínua é $r^* \approx 4\%$.

A taxa livre de risco no mercado financeiro não é constante ao longo do tempo. Entretanto, neste trabalho, vamos supor que seja. É importante salientar que ativos que pagam dividendos ao longo do tempo devem ter essa quantia levada em conta no cálculo do seu valor futuro. Além disso, a taxa livre de risco é levada em conta para o valor presente de uma ação. De fato, esperasse que o mercado acionário seja mais rentável, ou ao menos igual, ao de renda fixa. Então, podemos calcular o quanto precisamos ter de uma ação hoje para ter determinada quantidade a posteriori, usando a taxa de juros livre de risco.

Assumindo uma ação que pague dividendos, sejam $S := \{S(t); t \in [0, T]\}$, $r > 0$ e $D(0) > 0$, respectivamente, um processo estocástico que representa o preço do ativo ao longo do tempo, a taxa de juros livre de risco e o valor antecipado de dividendos que será pago por uma ação. Então, um investidor que compra hoje $S(0) = s_0$, espera receber ao menos a rentabilidade da taxa de juros

$$S(T) = S(0)e^{rT} + D(0)e^{rT}.$$

Então, é fácil derivar a formula do valor presente usando o valor futuro. Assim, um investidor que deseja receber $S(T) = s_t$ de uma determinada ação, deve investir

$$S(0) = S(T)e^{-rT} - D(0).$$

Exemplo 9. Suponha o caso no qual a taxa de juros anual seja $r = 3\%$. Uma investidora deseja investir seu dinheiro em ações de uma empresa, a qual pagará por ação $D(0) = R\$5,00$ de dividendos. Contudo ela espera que após $T = 1$ ano ela receba no mínimo $R\$100,00$ por ação. Para isso, ela deve investir um valor que somado aos dividendos, e ainda, multiplicado a rentabilidade da taxa de juros de ambos deve ser igual a $R\$100,00$. Sendo assim, ela deve investir $S(0) = 100e^{-0,03} - 5 \approx R\$92,04$ por ação. Logo, o valor presente da ação é $R\$92,04$.

¹ Conjunto de todos os ativos de um investidor.

Como vimos, a taxa livre de risco afeta o preço futuro de ativos e, conseqüentemente, o preço de opções sobre esses ativos. Na próxima seção, estudamos os principais fatores que afetam o preço das opções e apresentamos duas técnicas, a tempo discreto, para precificação de opções.

2.2.4 Precificação de opções

O interesse desta dissertação é estudar modelos para precificação de opções via estratégias de *hedging*, i.e., estratégias que visam a proteção do capital com respeito a oscilações do mercado. Nesta subseção, explicamos em mais detalhes o que queremos dizer com “precificar uma opção” e apresentamos dois modelos a tempo discreto, os quais não são, de fato, o foco deste trabalho, mas são importantes para o entendimento dos modelos subsequentes.

Os fatores que afetam diretamente ou indiretamente o preço de uma opção são: (i) o preço do ativo no mercado à vista e o preço de exercício, que afetam o valor intrínseco da opção (ver Exemplo 5) e (ii) o tempo até a maturidade e a volatilidade do ativo, que influenciam no valor extrínseco (ver Exemplo 6). Com o aumento do tempo até o exercício ou da variação do preço do ativo, aumenta-se também o preço a ser pago pela opção. Outro fator influenciador é o pagamento de dividendos, que aumenta o preço da opção de venda, pois o lançador não recebe os proventos do ativo. Por outro lado, o pagamento de dividendos diminui o preço da opção de compra, pois, neste caso, o lançador recebe os rendimentos do ativo. A taxa livre de risco também afeta o valor da opção, uma vez que ela possui uma relação negativa com o preço da opção de compra e uma relação positiva com a opção de venda. Isso se deve, no caso da opção de compra, ao quanto o lançador está ganhando ao aplicar seu dinheiro em um ativo sem risco e, no caso da opção de venda, o quanto ele está deixando de ganhar não fazendo isso.

2.2.4.1 Limites para os prêmios das opções

Sabendo quais fatores influenciam o preço de uma opção, podemos propor limites para tais preços. Esses limites são baseados no funcionamento do mercado financeiro, no qual os fatores que afetam o preço dos portfólios devem ser as mesmas para qualquer instante de tempo $t \in [0, T]$.

Sejam $C(0) \geq 0$ o prêmio de uma opção de compra do tipo europeia que não paga dividendos, $S(0) > 0$ o valor, no instante $t = 0$, do preço de um ativo no mercado à vista, $K > 0$ o preço de exercício, $T > 0$ o tempo de maturidade e $r > 0$ a taxa de juros de um ativo livre de risco. Com a finalidade de neutralizar o benefício de arbitradores, segue que o limite superior para $C(0)$ é dado por $S(0)$ e seu inferior é dado por $\max(S(0) - Ke^{-rT}, 0)$. Por outro lado, se $P(0) > 0$ é o preço de uma opção de venda do tipo europeia, então o limite superior de $P(0)$ é dado por Ke^{-rT} e seu limite inferior é $\max(Ke^{-rT} - S(0), 0)$. Fora desses limites há inconsistências, onde arbitradores se beneficiam (ver capítulo 11 de Hull, 2015).

Exemplo 10. Utilizando o caso dos Exemplos 1 e 2, temos uma opção de compra que será exercida em $T = 1/12$ de um ano (30 dias) com o preço de exercício $K = R\$100,00$. Suponha que, o preço no mercado à vista em $t = 0$ é $S(0) = R\$103,00$ e a taxa livre de risco anual é $r = 3\%$. O limite superior e o inferior do preço da opção são respectivamente $S(0) = R\$103,00$ e $\max(S(0) - Ke^{-rT}, 0) = \max(103 - 100e^{-\frac{0,03}{12}}, 0) \approx R\$3,25$.

Se $C(0) = R\$104,00$, arbitradores compram o ativo no mercado à vista e o vendem como ativo base de uma opção de compra, lucrando inicialmente $C(0) - S(0) = R\$1,00$. Os arbitradores continuarão com o lucro de $R\$1,00$ qualquer que seja o cenário de queda, uma vez que estão na posição vendida da opção. De maneira equivalente, caso $C(0) = R\$3,00$, arbitradores compram a opção, vendem o ativo no mercado à vista e, por fim, investem o dinheiro em um ativo livre de risco. Inicialmente, ganham $(S(0) - C(0))e^{rT} = (103 - 3)e^{\frac{0,03}{12}} \approx R\$100,25$ e em uma eventual queda na data do exercício, por exemplo $S(T) = R\$99,00$, não vão exercer a opção e comprarão no mercado à vista, lucrando $(S(0) - C(0))e^{rT} - S(T) = R\$1,25$. No caso de um aumento de $S(T)$, por exemplo $S(T) = R\$103,00$, irão exercer a opção e vender no mercado à vista, recebendo $(S(0) - C(0))e^{rT} - K + S(T) = R\$103,25$ de lucro.

Exemplo 11. Utilizando o caso do Exemplos 3 e 4, no qual temos uma opção de venda com $T = 1/12$ de um ano (30 dias) e com preço de exercício de $R\$100,00$. Se $S(0) = R\$103,00$ e $r = 3\%$, então o limite superior do preço $P(0)$ para esta opção de venda é $Ke^{-rT} \approx R\$99,75$. Para valores acima deste limite, como $P(0) = 100,00$, arbitradores vendem a opção. Assim, irão investir em um ativo livre de risco, obtendo lucro em qualquer situação, dado que o rendimento na data da maturidade $P(0)e^{rT} \approx 100,25$ é maior que o preço de exercício. O limite inferior para o preço $P(0)$ é dado por $\max(Ke^{-rT} - S(0), 0) = 0$.

Denomina-se paridade a relação de equivalência entre os preços das opções de compra e venda que são derivadas de um mesmo ativo base e negociadas com o mesmo preço de exercício e maturidade. Usualmente, precifica-se apenas um tipo de opção e obtém-se a outra pela paridade. Utilizando a notação anterior, estabelecemos a relação de paridade da opção de compra e de venda europeia conforme a seguinte proposição.

Proposição 1. Considere uma negociação em que o ativo base não pague dividendos no período $[0, T]$ e que não haja possibilidade de arbitragem neste período. Seja $S(0)$ o preço do ativo base no instante de tempo $t = 0$, r a taxa livre de risco e $C(0)$ e $P(0)$ os prêmios pagos, respectivamente, pela obtenção das opções do tipo europeia de compra e venda com preço de exercício K e data de maturidade T . Então, vale a relação de paridade

$$C(0) + Ke^{-rT} = P(0) + S(0).$$

Demonstração. Considere que no instante de tempo $t = 0$ montamos um portfólio comprando o ativo base no mercado à vista, comprando uma opção de venda atrelada a este ativo e vendendo

uma opção de compra. Definindo $X(t)$ o valor deste portfólio no instante de tempo $t \in [0, T]$ segue que

$$X(0) = S(0) + P(0) - C(0). \quad (2.1)$$

Por outro lado, no vencimento dos contratos, duas situações podem ocorrer: $S(T) > K$ ou $S(T) \leq K$. Se $S(T) > K$, então o valor do portfólio $X(T)$ é tal que

$$X(T) = S(T) + 0 - (S(T) - K) = K.$$

No caso contrário, quando $S(T) \leq K$, temos

$$X(T) = S(T) + (K - S(T)) + 0 = K.$$

Logo, $X(T) = K$ qualquer que seja a situação. Como não há possibilidade de arbitragem, em $t = 0$ devemos ter K descontado pela taxa de juros r no período $[0, T]$, i.e.,

$$X(0) = Ke^{-rT}. \quad (2.2)$$

Das igualdades (2.1) e (2.2) concluímos que

$$S(0) + P(0) - C(0) = Ke^{-rT}.$$

Portanto, vale a relação de paridade. □

Exemplo 12. Adotamos as opções dos Exemplos 10 e 11. Logo, temos pela relação de paridade

$$\begin{aligned} C(0) + 100e^{-\frac{0,03}{12}} &= P(0) + 103 \Rightarrow C(0) - P(0) = 103 - 99,75 \\ &\Rightarrow C(0) - P(0) = 3,25. \end{aligned}$$

Caso $C(0) = R\$5,00$, temos pela paridade, $P(0) = R\$1,75$. Se $P(0) \neq R\$1,75$, arbitradores irão se beneficiar.

O pagamento de dividendos, como explicado anteriormente, altera o funcionamento do preço das opções. Neste sentido, sendo $D(0) > 0$ o valor antecipado do dividendos durante a vida da opção, segue que os limites de uma opção de compra europeia que paga dividendos são

$$\max(S(0) - Ke^{-rT} - D(0), 0) \leq C(0) \leq S_0.$$

De forma equivalente, segue que os limites de uma opção de venda do tipo europeia que paga dividendos são

$$\max(D(0) + Ke^{-rT} - S(0), 0) \leq P(0) \leq Ke^{-rT}.$$

Por fim, segue que a relação de paridade é dada por

$$C(0) + Ke^{-rT} + D(0) = P(0) + S(0)$$

(ver, para mais detalhes, Capítulo 11, [Hull, 2015](#)).

As relações do preço das opções do tipo americana são influenciadas pelo tempo, e.g., é vantajoso para o titular de uma opção de compra exercer apenas na data de vencimento, porém, para o titular de uma opção de venda, é vantajoso exercer seu direito antes do tempo de exercício. Com isso, os limites de uma opção de compra americana que não paga dividendos é equivalente a europeia, ou seja, é dada por $\max(S(0) - Ke^{-rT}, 0) \leq C(0) \leq S(0)$. Porém, os limites de uma opção de venda americana são dadas por $\max(K - S(0), 0) \leq P(0) \leq K$. Em razão do valor do tempo, a paridade das opções de compra e de venda não pode ser definida como uma igualdade, mas podemos defini-la por um intervalo, ou seja,

$$S(0) - K \leq C(0) - P(0) \leq S(0) - Ke^{-rT}$$

(ver, para mais detalhes, Capítulo 11, [Hull, 2015](#)).

2.2.4.2 Estratégias de hedging

Estratégias financeiras, no caso do lançador das opções, são feitas utilizando ativos de risco e obrigações (*bonds*). Com isso, podemos definir uma estratégia no tempo $t \in [0, T]$, como sendo um processo estocástico previsível $\pi(t) = (\phi(t), \psi(t))$, em que $\phi(t)$ é a quantidade de aportes do ativo base (de risco) no instante de tempo t e $\psi(t)$ é a quantidade de aportes de uma determinada obrigação neste mesmo instante de tempo. É importante observar que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ podem ser qualquer número real, ou seja, valores não-negativos equivalem à quantidade dos ativos e valores negativos equivalem a venda de ações (ou empréstimo no caso das obrigações).

Neste contexto, dada uma estratégia financeira podemos construir um portfólio. Por esta razão, π é também conhecido na literatura como processo portfólio. Ao portfólio π podemos atrelar um processo que modela a variação do valor do portfólio ao longo do intervalo $[0, T]$.

Definição 1. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ e $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ dois processos estocásticos definidos sobre um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que representam, respectivamente, o valor de um ativo de risco e da obrigação ao longo do intervalo $[0, T]$. Dada uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ e supondo que não há taxas sobre as transações de valores entre os ativos, o processo estocástico $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito ser o **processo do valor do portfólio** π quando

$$X^\pi(t) := \phi(t)S(t) + \psi(t)A(t), \quad (2.3)$$

em que $X^\pi(t)$ é o valor deste portfólio no instante de tempo $t \in [0, T]$.

Note que se a taxa livre de risco é $r > 0$ então podemos reescrever a equação (2.3) da seguinte forma

$$X^\pi(t) = \phi(t)S(t) + \psi(t)A(0)e^{rt}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ao longo desta dissertação, estaremos interessados em estratégias financeiras tais que se não houver infusão ou retirada de dinheiro no portfólio, a compra de um novo ativo deve

ser financiada pela venda de um outro. Assim, alterações no valor do portfólio ao longo do tempo se devem somente às variações dos preços dos ativos. Essas estratégias são chamadas autofinanciáveis.

Definição 2. Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ e $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ dois processos estocásticos definidos sobre um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que representam, respectivamente, o valor de um ativo de risco e da obrigação ao longo do intervalo $[0, T]$. Uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ é dita ser **autofinanciável** quando

$$S(t)\Delta\phi(t) + A(t)\Delta\psi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

em que $\Delta\phi(t) := \phi(t) - \phi(t - \delta t)$ e $\Delta\psi(t) := \psi(t) - \psi(t - \delta t)$ com $0 < \delta \leq 1$ uma constante real.

Dessa forma um portfólio baseado em uma estratégia autofinanciável é aquele no qual nenhum recurso monetário é adicionado ou retirado. Adotando uma estratégia autofinanciável e ciente da necessidade de cumprir com o acordo da opção, o lançador elabora uma estratégia de investimento a qual realiza a precificação da opção de modo a se proteger das oscilações do mercado — estratégia de *hedging*.

Definição 3. Sejam $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos sobre um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que representam, respectivamente, o preço de uma opção de compra e o portfólio associado à estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ ao longo do período $[0, T]$. Se $C(0) = c > 0$ dizemos que π é uma estratégia de *hedging* para o prêmio c quando

- (i) o valor inicial do portfólio deve ser o prêmio da opção, i.e., $X^\pi(0) = c$.
- (ii) o valor do portfólio na data de maturidade deve ser igual ao retorno bruto do titular, ou seja, $X^\pi(T) = \max(S(T) - K, 0)$ quase-certamente, em que $S(T)$ é o preço do ativo na data de maturidade T e K é o preço de exercício.

Note que uma vez determinado o prêmio de uma opção de compra podemos utilizar a relação de paridade para encontrar o preço da respectiva opção de venda. Desta forma, sem perda de generalidade, optamos por tratar neste trabalho apenas do apreçamento de opções de compra. Além disso, a partir de agora denominamos o retorno bruto do titular de uma opção de compra de função custo (ou função *payoff*), a qual é uma variável aleatória H definida em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. No caso de uma opção de compra do tipo europeia temos

$$H := \max(S(T) - K, 0),$$

em que $S(T)$ é o preço do ativo na data de vencimento T e K é o preço de exercício.

Se para todas as opções do mercado existe uma estratégia de *hedging* autofinanciável, então o portfólio baseado nesta estratégia consegue replicar a função de custo (item (ii) da Definição 3). Neste caso, dizemos que o mercado é **completo**. De modo análogo, quando não existe esta estratégia, chamamos o mercado de **incompleto**.

Uma estratégia de *hedging* é adotada a fim estabelecer um preço justo para o prêmio de uma opção. Neste contexto, dada uma função de custo H e $c > 0$ definimos $\Pi(c, H)$ como a classe de todas as estratégias de *hedging* autofinanciáveis para o prêmio c associada à função H . O preço justo $\hat{c} > 0$ de uma opção é o menor prêmio que pode ser pago pela opção que permite a construção de uma estratégia de *hedging*. Em outras palavras,

$$\hat{c} := \inf \{c > 0 : \Pi(c, H) \neq \emptyset\}.$$

Como estamos interessados em estratégias autofinanciáveis temos apenas que nos preocupar com a quantidade de aportes dos ativos de riscos como mostramos na proposição seguinte.

Proposição 2. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos em um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que representam, respectivamente, o preço do ativo de risco, o preço da obrigação e o valor do portfólio associado à estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ ao longo do período $[0, T]$. Considere também $\bar{X}^\pi := \{\bar{X}(t)^\pi : t \in [0, T]\}$ como sendo o processo portfólio descontado, i.e.,

$$\bar{X}^\pi(t) := \frac{X^\pi(t)}{A(t)}, \quad \forall t \in (0, T].$$

Se π é autofinanciável então

$$\bar{X}^\pi(t) = \bar{X}^\pi(t - t\delta) + \phi(t - t\delta)\Delta\bar{S}(t), \quad \forall \delta \in (0, 1] \text{ e } \forall t \in [0, T], \quad (2.4)$$

em que $\Delta\bar{S}(t) := \bar{S}(t) - \bar{S}(t - t\delta)$ com $\bar{S} := \{\bar{S}(t) : t \in [0, T]\}$ sendo o processo do preço do ativo descontado pelo valor da obrigação, i.e., $\bar{S}(t) := S(t)/A(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

Demonstração. Podemos escrever a variação do portfólio $X^\pi(t)$, $\forall \delta \in (0, 1]$ e $\forall t \in [0, T]$, como

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}^\pi(t) &= \bar{X}^\pi(t) - \bar{X}^\pi(t - t\delta) = \phi(t)\bar{S}(t) + \psi(t) - (\phi(t - t\delta)\bar{S}(t - t\delta) + \psi(t - t\delta)) \\ &= \phi(t)\bar{S}(t) + \psi(t) - (\phi(t - \delta t)\bar{S}(t - t\delta) + \psi(t - t\delta)) + \\ &\quad + (\phi(t - t\delta)\bar{S}(t) + \psi(t - t\delta)) - (\phi(t - t\delta)\bar{S}(t) + \psi(t - t\delta)) \\ &= \phi(t - t\delta)\Delta\bar{S}(t) + S(t)\Delta\phi(t) + \Delta\psi(t). \end{aligned}$$

Como π é autofinanciável, segue que

$$S(t)\Delta\phi(t) + A(t)\Delta\psi(t) = 0 \iff (S(t)\Delta\phi(t) + A(t)\Delta\psi(t))/A(t) = \bar{S}(t)\Delta\phi(t) + \Delta\psi(t) = 0.$$

Logo,

$$\Delta\bar{X}^\pi(t) = \phi(t - t\delta)\Delta\bar{S}(t).$$

Por fim, como $\bar{X}^\pi(t) = \bar{X}^\pi(t - t\delta) + \Delta\bar{X}^\pi(t)$, temos

$$\bar{X}^\pi(t) = \bar{X}^\pi(t - t\delta) + \phi(t - t\delta)\Delta\bar{S}(t),$$

finalizando a demonstração. □

Note que utilizando uma estratégia autofinanciável o investidor não precisa se preocupar com a quantidade de aportes do ativo livre de risco. Assim, se π é uma estratégia autofinanciável então $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$.

Para finalizar essa subseção, apresentamos o cálculo da estratégia de *hedging* baseado em uma aproximação para o tempo discreto. Consideramos, inicialmente, o modelo de um período, i.e., uma aproximação na qual avaliamos o valor do ativo na data inicial e na data de vencimento da opção. Posteriormente, consideramos o modelo generalizado de n períodos.

2.2.4.2.1 Modelo binomial de um período

Considere a negociação de uma opção de compra do tipo Europeia com data de maturidade $T > 0$ e preço de exercício $K > 0$. Para exemplificar como definir uma estratégia de *hedging* consideramos um modelo bem simples, assuma o tempo discreto e tal que $t \in \{t_0, t_1\}$. Os tempos considerados neste modelo são o tempo inicial e a data de exercício, logo $0 = t_0 < t_1 = T$. Seja $S := \{S(t) : t \in \{t_0, t_1\}\}$ um processo estocástico definido em um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de forma que $S(t)$ representa o valor do ativo de risco no tempo $t \in \{t_0, t_1\}$, em que $S(t_1)/S(t_0) \in \{u, d\}$, $u, d \in [0, \infty)$. Assim, segue que a distribuição de probabilidades de $S(t_1)/S(t_0)$ é dada por

$$\mathbb{P}(S(t_1)/S(t_0) = u|S(t_0)) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(S(t_1)/S(t_0) = d|S(t_0)) = 1 - p,$$

em que $0 \leq p \leq 1$. Interpretamos u como a taxa de valorização do ativo em $\Delta t_1 := t_1 - t_0$ e d a taxa de desvalorização do ativo em Δt_1 , os quais satisfazem $d < e^{r\Delta t_1} < u$. Esta relação ocorre, pois o ativo com taxa livre de risco precisa ser mais rentável do que a queda da ação e menos que a subida da mesma. Este modelo é denominado **modelo binomial de um período**.

Vamos assumir que estamos em um mercado completo e, portanto, existe uma estratégia de *hedging* $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$ autofinanciável que replica a função de custo H , a qual é, neste caso, dada por

$$H := \max(S(t_1) - K, 0).$$

Da proposição 2, segue que o portfólio descontado associado à estratégia π do modelo binomial de um passo é dado por

$$\bar{X}^\pi(t_1) = \bar{X}^\pi(t_0) + \phi(t_0)\Delta\bar{S}(t_1).$$

Da Definição 3, segue que π é tal que

$$\bar{X}^\pi(t_0) = \frac{c}{A(t_0)} \text{ e } \bar{X}^\pi(t_1) = \frac{H}{A(t_1)}$$

em que $\bar{X}^\pi := \{\bar{X}^\pi(t) : t \in \{t_0, t_1\}\}$ e $A := \{A(t) : t \in \{t_0, t_1\}\}$ são, respectivamente, os processos estocásticos que descrevem o valor do portfólio descontado e o valor do ativo livre de risco, $H \in \{H^u, H^d\}$ é a variável aleatória que representa a função custo, todos definidos no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e $c > 0$ é o prêmio da opção. Os valores assumidos por H são o custo na valorização do ativo $H^u := \max(uS(t_0) - K, 0)$ e o custo na desvalorização do ativo $H^d := \max(dS(t_0) - K, 0)$. Por estarmos interessados no valor de c , é intuitivo utilizar o valor médio de $X^\pi(t_1)$ para calcular $X^\pi(t_0)$. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} c &= A(t_0)\bar{X}^\pi(t_0) = A(t_0)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\bar{X}^\pi(t_1)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[A(t_0)\bar{X}^\pi(t_1)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-r\Delta t_1}H] \\ &= e^{-r\Delta t_1} [H^u p + H^d(1-p)], \end{aligned}$$

em que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ é o valor esperado calculado na medida \mathbb{P} . Contudo, dependemos do valor de p (equivalentemente, da distribuição \mathbb{P}), o qual altera o valor da opção de forma arbitrária. Então, precisamos determinar o valor de $\bar{X}^\pi(t_0)$ de forma que ele não dependa de p .

Proposição 3. Sejam, respectivamente, $H \in \{H^u, H^d\}$ e $S := \{S(t) : t \in \{t_0, t_1\}\}$ a variável aleatória que representa o valor da função custo e o processo estocástico que representa o valor do ativo de risco no tempo $t \in \{t_0, t_1\}$, ambos definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que H é tal que

$$H^u := \max(uS(t_0) - K, 0) \text{ e } H^d := \max(dS(t_0) - K, 0),$$

em que $u, d \in [0, \infty)$ são, respectivamente, a taxa de subida e descida em $\Delta t_1 := t_1 - t_0$. A estratégia de *hedging* $\pi = \phi(t_0)$ é dada por

$$\phi(t_0) = \frac{(H^u - H^d)}{S(t_0)(u - d)},$$

e o prêmio $\hat{c} > 0$ da opção, considerando a estratégia de *hedging* π , é

$$\hat{c} = e^{-r\Delta t_1} \left[H^u \frac{(e^{r\Delta t_1} - d)}{(u - d)} + H^d \frac{(u - e^{r\Delta t_1})}{(u - d)} \right], \quad (2.5)$$

em que $r > 0$ é a taxa de juros livre de risco.

Demonstração. Pelo fato do mercado ser completo, podemos deduzir o seguinte sistema

$$\begin{cases} A(t_1)^{-1}H^u = \bar{X}^\pi(t_0) + (uA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\phi(t_0)S(t_0), & \text{se } \bar{S}(t_1) = uS(t_0)A(t_1)^{-1} \\ A(t_1)^{-1}H^d = \bar{X}^\pi(t_0) + (dA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\phi(t_0)S(t_0), & \text{se } \bar{S}(t_1) = dS(t_0)A(t_1)^{-1} \end{cases}$$

Subtraindo as equações que compõem o sistema, segue que

$$A(t_1)^{-1}(H^u - H^d) = \bar{X}^\pi(t_0) + (uA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\phi(t_0)S(t_0) - \bar{X}^\pi(t_0) - (dA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\phi(t_0)S(t_0),$$

o que implica em

$$(H^u - H^d) = \phi(t_0)S(t_0)(u - d).$$

Logo,

$$\phi(t_0) = \frac{(H^u - H^d)}{S(t_0)(u - d)}.$$

Substituindo $\phi(t_0)$ na primeira equação do sistema, temos

$$A(t_1)^{-1}H^u = \bar{X}^\pi(t_0) + (uA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\phi(t_0)S(t_0),$$

o que implica em

$$A(t_1)^{-1}H^u = \bar{X}^\pi(t_0) + (uA(t_1)^{-1} - A(t_0)^{-1})\frac{(H^u - H^d)}{(u - d)}.$$

Usando o fato de que $A(t) = A(0)e^{tr}$, segue que

$$\begin{aligned} \bar{X}^\pi(t_0) &= A(t_1)^{-1} \left[\frac{H^u(A(t_1)A(t_0)^{-1} - d)}{u - d} - \frac{H^d(u - A(t_1)A(t_0)^{-1})}{u - d} \right] \\ &= A(t_1)^{-1} \left[\frac{H^u(e^{r(t_1-t_0)} - d)}{u - d} - \frac{H^d(u - e^{r(t_1-t_0)})}{u - d} \right] \\ &= A(t_1)^{-1} \left[\frac{H^u(e^{r\Delta t_1} - d)}{u - d} - \frac{H^d(u - e^{r\Delta t_1})}{u - d} \right]. \end{aligned}$$

Por fim, substituímos o valor de \hat{c}

$$\begin{aligned} \hat{c} &= A(t_0)\bar{X}^\pi(t_0) = A_{t_0}A(t_1)^{-1} \left[\frac{H^u(e^{r\Delta t_1} - d)}{u - d} - \frac{H^d(u - e^{r\Delta t_1})}{u - d} \right] \\ &= e^{-r\Delta t_1} \left[\frac{H^u(e^{r\Delta t_1} - d)}{u - d} - \frac{H^d(u - e^{r\Delta t_1})}{u - d} \right], \end{aligned}$$

e finalizamos a prova. □

Note que, além de obter um prêmio que não depende de \mathbb{P} , podemos definir uma medida de probabilidade \mathbb{Q} sobre (Ω, \mathcal{F}) tal que

$$\mathbb{Q}(S(t_1)/S(t_0) = u | S(t_0)) = q \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}(S(t_1)/S(t_0) = d | S(t_0)) = 1 - q,$$

em que

$$q := \frac{(e^{r\Delta t_1} - d)}{(u - d)}.$$

Logo,

$$\hat{c} = e^{-r\Delta t_1} [qH^u + (1-q)H^d]$$

e, portanto,

$$\hat{c} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r\Delta t_1} H],$$

tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ é o valor esperado associado à medida \mathbb{Q} . Assim, encontramos uma medida que não é, a grosso modo, tendenciosa com relação às probabilidades assumidas pelo ativo de risco. Esta medida é denominada **medida neutra ao risco**.

Exemplo 13. Vamos supor uma ação que está sendo negociado no mercado à vista por $S(0) = R\$100,00$ e uma opção de compra europeia derivada deste ativo com preço de exercício de $K = R\$105,00$ e vencimento em um mês. Neste exemplo, temos $t \in \{t_0, t_1\}$, em que $t_0 = 0$ e $t_1 = 1/12$ de um ano (30 dias). A taxa de juros anual livre de risco tem valor de $r = 3\%$ e o ativo possui a probabilidade $\mathbb{P}(S(t_1)/S(t_0) = u) = p = 0,60$ de se valorizar para $S_{t_1} = uS(t_0) = R\$110,00$ e $\mathbb{P}(S(t_1)/S(t_0) = d) = (1-p) = 0,40$ de se desvalorizar para $S(t_1) = dS(t_0) = R\$90,00$. Logo, o valor da função de custo é $H^u = \max(uS(0) - K, 0) = R\$5,00$ na valorização e na desvalorização é $H^d = \max(dS(0) - K, 0) = R\$0,00$. Assim, a taxa de valorização é dada por $u = 1,1$ e a de desvalorização é dada por $d = 0,9$. Portanto, a medida neutra ao risco é dada por

$$\mathbb{Q}(S(t_1)/S(t_0) = u|S(t_0)) = q = \frac{e^{\frac{0,03}{12}} - 0,9}{1,1 - 0,9} \approx 0,51 \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}(S(t_1)/S(t_0) = d|S(t_0)) = 1 - q = 0,49.$$

Consequentemente, o preço da opção de compra é

$$\hat{c} = e^{-\frac{0,03}{12}} (5 \times 0,51 + 0 \times 0,49) = R\$2,54.$$

2.2.4.2.2 Modelo binomial de n-períodos

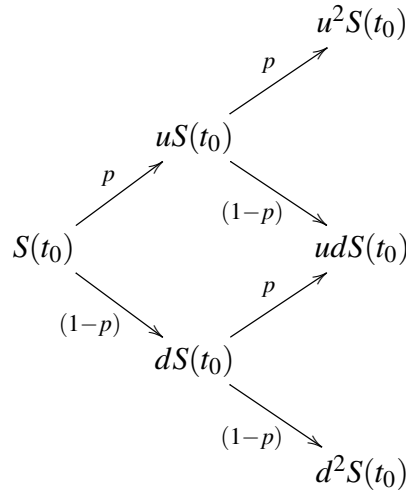
Podemos generalizar o modelo anterior, aumentando a quantidade de tempos até a maturidade T . Denominamos este modelo como **modelo de n-períodos** ou **árvore binomial**. Neste caso, $t \in \{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$, em que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Seja $S := \{S(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$ o processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que representa o valor da ação ao longo do conjunto de tempos $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de forma que $S(t_i)/S(t_{i-1}) \in \{u, d\}$, $u, d \in [0, \infty)$. Logo, segue que a distribuição de probabilidade de $S(t_i)/S(t_{i-1})$ condicionada à observação $(s_{t_0}, \dots, s_{t_{i-1}})$ do vetor aleatório $(S(t_0), \dots, S(t_{i-1}))$ é dada por

$$\mathbb{P}(S(t_i)/S(t_{i-1}) = u|S(t_{i-1}), \dots, S(t_0)) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(S(t_i)/S(t_{i-1}) = d|S(t_{i-1}), \dots, S(t_0)) = 1 - p,$$

em que $i = 1, \dots, n$ e $0 \leq p \leq 1$.

É possível ilustrar os valores assumidos pelo processo S por meio de árvores de valores, no qual cada nó representa uma taxa que multiplica $S(t_0)$. Por este motivo, o modelo também é

Figura 5 – Valores assumidos por $S(t)$ ao longo do tempo $t \in \{t_0, t_1, t_2\}$.

denominado de árvore binomial. Na Figura 5, mostramos um exemplo dos valores das taxas para o modelo de 2–períodos.

Vamos assumir novamente que estamos em um mercado completo e, portanto, existe uma estratégia de *hedging* $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$ autofinanciável que replica a função de custo H , a qual é, neste caso, dada por

$$H := \max(S(t_n) - K, 0).$$

Da proposição 2, segue que o portfólio descontado associado à estratégia π do modelo binomial de n passos é dado por

$$\bar{X}^\pi(t_i) = \bar{X}^\pi(t_{i-1}) + \phi(t_{i-1})\Delta\bar{S}(t_i), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

De maneira análoga ao modelo de 1 período, queremos encontrar o preço da opção respeitando os princípios do *hedging*, ou seja, $X^\pi(t_0)$ deve ser o preço da opção e $X^\pi(t_n)$ deve ser igual a função de custo.

Proposição 4. Sejam H , $S := \{S(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$, $A := \{A(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$ e $\bar{X}^\pi := \{\bar{X}(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$, respectivamente, a variável aleatória que representa o valor da função custo, o processo estocástico que representa o valor do ativo de risco, o processo estocástico que representa o valor da obrigação e o processo estocástico que representa o portfólio descontado da estratégia $\pi := \{\phi(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$, todos definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considere também $r > 0$ a taxa de juros livre de risco, o conjunto $V := \{u^j d^{i-j} : j \in \{0, 1, \dots, i\} \text{ e } i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$ de valores assumidos pelos nós do modelo de n –períodos, tal que $u \in [0, \infty)$ é a taxa de subida em Δt_i e $d \in [0, \infty)$ é a taxa de descida em Δt_i , em que $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}, \forall i = 1, \dots, n$. Sendo $v = u^j d^{i-j}$ com $j \in \{0, 1, \dots, i-1\}$, o valor do portfólio descontado do nó v no tempo t_{i-1} , denotado por $\bar{X}^{\pi, v}(t_{i-1})$, é dado por

$$\bar{X}^{\pi, v}(t_{i-1}) = \left[\bar{X}^{\pi, vu}(t_i) \frac{(e^{r\Delta t_i} - d)}{(u - d)} + \bar{X}^{\pi, vd}(t_i) \frac{(u - e^{r\Delta t_i})}{(u - d)} \right] \quad (2.6)$$

com a seguinte condição inicial

$$\bar{X}^{\pi,v}(t_{n-1}) = A(t_n)^{-1} \left[H^{vu} \frac{(e^{r\Delta t_n} - d)}{(u - d)} + H^{vd} \frac{(u - e^{r\Delta t_n})}{(u - d)} \right],$$

em que H^v é o valor da função custo referente ao nó v , que é dada por

$$H^v := \max(vS(t_0) - K, 0), \text{ para algum } v = u^j d^{n-j} \text{ com } j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

Note que este resultado garante uma formula recursiva para o valor do prêmio, que é dado por

$$\hat{c} = A(t_0) \bar{X}^{\pi}(t_0)$$

Demonstração. Para encontrar o valor do preço da opção, precisamos solucionar o sistema

$$\begin{cases} \bar{X}^{\pi}(t_0) = \frac{c}{A(t_0)}, \\ \bar{X}^{\pi}(t_n) = \frac{H}{A(t_n)} \end{cases}$$

regredindo da data de vencimento até no instante 0. Seja então $\bar{S} := \{\bar{S}(t) : t \in \{t_0, t_1, \dots, t_n\}\}$ o valor descontado do processo S . O valor referente ao nó $v \in V$ que é dado por

$$\bar{S}^v(t_i) = uS^{v/u}(t_{i-1})A(t_i)^{-1} = dS^{v/d}(t_{i-1})A(t_i)^{-1} = u^j d^{i-j} S(t_0)A(t_i)^{-1}$$

Obtemos pela Definição 3 para o portfólio descontado $\bar{X}^{\pi}(t_n)$, o sistema de equações para $i = n$ e $v = u^j d^{i-j}$ com $j \in \{0, 1, 2, \dots, i-1\}$, o qual é dado por

$$\begin{cases} \bar{X}^{\pi,vu}(t_n) = A(t_n)^{-1} H^{vu} \\ \bar{X}^{\pi,vd}(t_n) = A(t_n)^{-1} H^{vd}. \end{cases}$$

Usando o resultado da Proposição 2, temos

$$\begin{cases} A(t_n)^{-1} H^{vu} = \bar{X}^{\pi,v}(t_{n-1}) + (uA(t_n)^{-1} - A(t_{n-1})^{-1})\phi^v(t_{n-1})S^v(t_{n-1}) \\ A(t_n)^{-1} H^{vd} = \bar{X}^{\pi,v}(t_{n-1}) + (dA(t_n)^{-1} - A(t_{n-1})^{-1})\phi^v(t_{n-1})S^v(t_{n-1}) \end{cases}$$

Resolvendo as equações de maneira análoga ao modelo de um período, temos

$$\phi^v(t_{n-1}) = \frac{H^{vu} - H^{vd}}{S^v(t_{n-1})(u - d)}.$$

Obtemos também que o valor do portfólio descontado no tempo $n-1$, dado por

$$\bar{X}^{\pi,v}(t_{n-1}) = A(t_n)^{-1} \left[H^{vu} \frac{(e^{r\Delta t_n} - d)}{(u - d)} + H^{vd} \frac{(u - e^{r\Delta t_n})}{(u - d)} \right].$$

Agora, recursivamente, resolvemos os sistemas gerados pela Proposição 2, para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $v = u^j d^{i-j}$ com $j \in \{0, 1, 2, \dots, i-1\}$

$$\begin{cases} \bar{X}^{\pi,vu}(t_i) = \bar{X}^{\pi,v}(t_{i-1}) + (uA(t_i)^{-1} - A(t_{i-1})^{-1})\phi^v(t_{i-1})S^v(t_{i-1}) \\ \bar{X}^{\pi,vd}(t_i) = \bar{X}^{\pi,v}(t_{i-1}) + (dA(t_i)^{-1} - A(t_{i-1})^{-1})\phi^v(t_{i-1})S^v(t_{i-1}) \end{cases}$$

De maneira equivalente

$$\phi^v(t_{i-1}) = \frac{X^{\pi,vu}(t_i) - X^{\pi,vd}(t_i)}{S^v(t_{i-1})(u-d)}.$$

e

$$\bar{X}^{\pi,v}(t_{i-1}) = \left[\bar{X}^{\pi,vu}(t_i) \frac{(e^{r\Delta t_i} - d)}{(u-d)} + \bar{X}^{\pi,vd}(t_i) \frac{(u - e^{r\Delta t_i})}{(u-d)} \right].$$

Do item (i) da Definição 3, o valor do preço da opção \hat{c} é dado por

$$\begin{aligned} \hat{c} &= A(t_0)\bar{X}(t_0) \\ &= A(t_0) \left[\bar{X}^{\pi,u}(t_1) \frac{(e^{r\Delta t_1} - d)}{(u-d)} + \bar{X}^{\pi,d}(t_1) \frac{(u - e^{r\Delta t_1})}{(u-d)} \right] \\ &= A(t_0)A(t_1)^{-1} \left[X^{\pi,u}(t_1) \frac{(e^{r\Delta t_1} - d)}{(u-d)} + X^{\pi,d}(t_1) \frac{(u - e^{r\Delta t_1})}{(u-d)} \right] \\ &= e^{-r\Delta t_1} \left[X^{\pi,u}(t_1) \frac{(e^{r\Delta t_1} - d)}{(u-d)} + X^{\pi,d}(t_1) \frac{(u - e^{r\Delta t_1})}{(u-d)} \right]. \end{aligned}$$

□

Assumindo sem perda de generalidade $\Delta t_i := 1$, obtemos

$$\bar{X}^{\pi,v}(t_{i-1}) = \left[\bar{X}^{\pi,vu}(t_i) \frac{(e^r - d)}{(u-d)} + \bar{X}^{\pi,vd}(t_i) \frac{(u - e^r)}{(u-d)} \right].$$

Assuma também $q := \frac{e^r - d}{u-d}$ e para $n = 1$

$$\begin{aligned} \hat{c} &= A(t_0)\bar{X}(t_0) \\ &= A(t_0) \left[\bar{X}^{\pi,u}(t_1)q + \bar{X}^{\pi,d}(t_1)(1-q) \right] \\ &= e^{-r} \left[H^u q + H^d(1-q) \right], \end{aligned}$$

obtemos o resultado do caso de 1 período. Vamos avaliar $n = 2$

$$\begin{aligned} \hat{c} &= A(t_0)\bar{X}(t_0) \\ &= A(t_0) \left[\bar{X}^{\pi,u}(t_1)q + \bar{X}^{\pi,d}(t_1)(1-q) \right] \\ &= A(t_0) \left[\left[\bar{X}^{\pi,u^2}(t_2)q + \bar{X}^{\pi,ud}(t_2)(1-q) \right] q + \left[\bar{X}^{\pi,ud}(t_2)q + \bar{X}^{\pi,d^2}(t_2)(1-q) \right] (1-q) \right] \\ &= \frac{A(t_0)}{A(t_2)} \left[\left[H^{u^2} q + H^{ud}(1-q) \right] q + \left[H^{ud} q + H^{d^2}(1-q) \right] (1-q) \right] \\ &= e^{-2r} \left[H^{u^2} q^2 + 2H^{ud}(1-q)q + H^{d^2}(1-q)^2 \right]. \end{aligned}$$

Esse padrão se repete para os demais períodos. Logo, \hat{c} para n períodos

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \frac{A(t_0)}{A(t_n)} \sum_{i=0}^n H^{u^i d^{n-i}} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \\ &= e^{-nr} \sum_{i=0}^n H^{u^i d^{n-i}} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}. \end{aligned}$$

Equivalente ao modelo de 1-período, conseguimos obter um prêmio que não depende de \mathbb{P} e podemos definir a medida livre ao risco \mathbb{Q} sobre (Ω, \mathcal{F}) tal que

$$\mathbb{Q}(S(t_i)/S(t_{i-1}) = u | S(t_{i-1}), \dots, S(t_0)) = q \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}(S(t_i)/S(t_{i-1}) = d | S(t_{i-1}), \dots, S(t_0)) = 1 - q,$$

em que

$$q := \frac{(e^r - d)}{(u - d)}.$$

Logo,

$$\bar{X}^{\pi, v}(t_{i-1}) = \left[\bar{X}^{\pi, vu}(t_i)q + \bar{X}^{\pi, vd}(t_i)(1 - q) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi, v}(t_i) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \quad (2.7)$$

em que $v = u^j d^{i-j}$, com $j \in \{0, 1, \dots, i-1\}$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ é o valor esperado associado à medida \mathbb{Q} . Além disso, $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \in \mathcal{F}$ e representa, a grosso modo, a informação passada do processo até o tempo t_{i-1} . Formalizaremos a estrutura $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ no próximo capítulo. Podemos interpretar a Equação (2.7) como: tendo a informação passada até o tempo t_{i-1} , podemos esperar que o valor da estratégia no tempo t_i se comporte como o valor da estratégia no tempo t_{i-1} . Processos com tal propriedade são chamados de martingales e aprofundaremos no seu estudo no próximo capítulo.

Podemos reescrever \hat{c} como

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \frac{A(t_0)}{A(t_n)} \sum_{i=0}^n H^{u^i d^{n-i}} \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i} \\ &= A(t_0) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X^{\pi}(t_n)}{A(t_n)} \right]. \end{aligned}$$

Assim, é possível encontrar o preço de uma opção utilizando o valor esperado do portfólio descontado calculado no tempo final.

Exemplo 14. Neste exemplo, vamos supor a opção de compra do Exercício 13 anterior, que era derivada de um ativo negociado a $S(t_0) = R\$100,00$, com preço de exercício de $R\$105,00$. Neste caso, será exercido em um mês e vamos levar em conta uma obrigação (*bond*) com valor inicial de $A(t_0) = R\$100,00$ e com taxa anual de juros $r = 3\%$. Temos a cada quinze dias que a probabilidade do ativo valorizar com taxa $u = 1,05$ é de $p = 0,60$ e de desvalorizar com taxa $d = 0,95$ é $(1 - p) = 0,40$. Este problema está exemplificado na Figura 6. Logo, $t \in \{t_0, t_1, t_2\}$, em que $t_0 = 0$, $t_1 = 1/24$ e $t_2 = 1/12$. Com isso, temos um modelo de 2 períodos.

A medida neutra ao risco é dada por

$$q = \frac{e^{\frac{0,03}{24}} - 0,95}{1,05 - 0,95} \approx 0,51.$$

Assim, $H^{u^2} = \max(S^{u^2}(t_2) - K, 0) = \max(110,25 - 105,0) = R\$5,25$ e $H^{ud} = \max(S^{ud}(t_2) - K, 0) = \max(99,75 - 105,0) = R\$0,00$. Logo,

$$\bar{X}^{\pi, u}(t_1) = \left(100e^{\frac{0,03}{24}} \right)^{-1} (5,25 \times 0,51 + 0 \times 0,49) \approx 0,027.$$

De maneira equivalente temos $H^{ud} = \max(S^{ud}(t_2) - K, 0) = \max(99,75 - 105, 0) = R\$0,00$ e $H^{d^2} = \max(S^{d^2}(t_2) - K, 0) = \max(90,25 - 105, 0) = R\$0,00$. Assim,

$$\bar{X}^{\pi,d}(t_1) = \left(100e^{\frac{0,03}{24}}\right)^{-1} (0 \times 0,51 + 0 \times 0,49) = 0$$

Os valores do portfólio descontado para t_1 são $\bar{X}^{\pi,u}(t_1) = 0,027$ e $\bar{X}^{\pi,d}(t_1) = 0$. Portanto,

$$\bar{X}^{\pi}(t_0) = (0,027 \times 0,51 + 0 \times 0,49) \approx 0.0136.$$

Desta forma, preço da opção de compra é dado por

$$\hat{c} = A(t_0)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi}(t_3)] = 100 \frac{e^{-\frac{0,03}{12}}}{100} \times 5,25 \times (0,51)^2 \approx R\$1,36.$$

Na Figura 7 mostramos os valores adquiridos pelo portfólio descontado deste exemplo.

Figura 6 – Valor da ação ao longo do tempo do Exemplo 14.

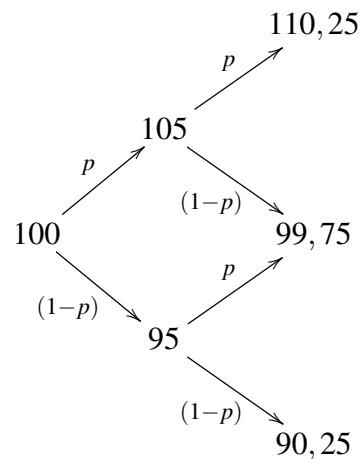
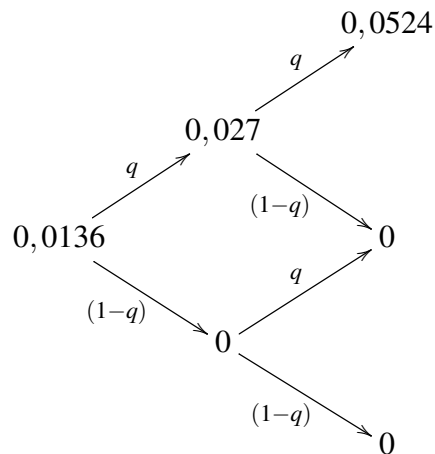


Figura 7 – Valor do portfólio descontado ao longo do tempo do Exemplo 14.



2.3 Modelo de Mercado

Neste trabalho, consideramos o problema de precificação e *hedging* de opções do tipo europeia com função de custo H em mercados completos e incompletos. Os portfólios a serem considerados são dinâmicos e compostos pelos ativos com risco e sem risco, os quais serão negociados continuamente. Quando o mercado é completo, existe uma única medida neutra ao risco e, portanto, uma única estratégia de *hedging* autofinanciável que replica a função de custo H . Entretanto, em mercados incompletos, não temos a unicidade da medida neutra ao risco e, portanto, não existe uma estratégia que seja replicável e autofinanciável simultaneamente. Neste contexto, quando estivermos trabalhando com mercados incompletos, vamos realizar a precificação utilizando uma estratégia de *hedging* baseada no critério de média-variância, que considera que as estratégias são autofinanciáveis e minimiza o erro quadrático entre o valor final do portfólio e a função de custo H sobre todos valores iniciais do portfólio (prêmios) e todas as estratégias admissíveis.

Ao longo deste trabalho, vamos considerar mercados livres de arbitragem, que é, como descrito anteriormente, a estratégia financeira que aproveita das inconsistências do mercado para a obtenção de lucro. Podemos formalizar este conceito com a seguinte definição.

Definição 4 (Arbitragem). Seja $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que representa o valor do portfólio atrelado à estratégia autofinanciável $\pi_t := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$. Dizemos que a estratégia π é uma **estratégia de arbitragem** quando

- (i) $X^\pi(0) = 0$,
- (ii) $\mathbb{P}(X^\pi(T) \geq 0) = 1$,
- (iii) $\mathbb{P}(X^\pi(T) > 0) > 0$.

Das condições descritas, segue que a estratégia de arbitragem consiste em uma estratégia que (i) inicialmente não há valores gastos, (ii) não há perda no portfólio na data de vencimento e (iii) possui probabilidade positiva de ter lucro no exercício.

Como vimos na seção anterior, a existência de uma medida neutra ao risco é fundamental para o apreamento de opções. Assim, é de nosso interesse trabalhar em mercados em que essa medida existe. Neste contexto, afirmamos os Teoremas 1 e 2 a seguir, cujas demonstrações podem ser vistas no Capítulo V de [Shiryayev \(1999\)](#).

Teorema 1 (Primeiro teorema fundamental das finanças). Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que, $S(t)$ é o preço de uma ação no tempo t e $A(t)$ é o preço de uma obrigação no tempo t . Um mercado formado pelos ativos S e A é dito livre de estratégias de arbitragem, quando existe ao menos uma medida de probabilidade \mathbb{Q} , neutra ao risco.

Teorema 2 (Segundo teorema fundamental da finanças). Um mercado formado pelos ativos S e A é dito completo se, e somente se, a medida \mathbb{Q} é única.

Portanto, nesta dissertação, a medida neutra ao risco sempre existe. Além disso, a não-arbitragem nos permite definir as relações entre os preços do mercado pela paridade entre as opções de compra e venda. Desta forma, vamos desenvolver nossa teoria considerando apenas as opções de compra.

A última consideração que faremos com respeito aos modelos de mercado que estudaremos nos próximos capítulos é que eles são sempre Brownianos, i.e., o processo estocástico que representa a evolução do preço do ativo de risco é solução de uma equação diferencial estocástica de Itô. Assim, antes de apresentarmos tais modelos, formalizamos a ideia de movimento Browniano e fixamos todas as noções necessárias para o desenvolvimento de uma teoria de integração estocástica e, conseqüentemente, de equações diferenciais estocásticas.

INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA DE ITÔ

O risco é inerente às operações do mercado financeiro e se modifica ao longo do tempo de acordo com diversas variáveis. Desta forma, é natural considerar modelos estocásticos com dinâmica temporal para descrever a evolução de variáveis como, por exemplo, o preço do ativo, a taxa de juros ou a volatilidade das ações. Nesta dissertação, os modelos que consideramos são baseados em equações diferenciais estocásticas (EDEs), os quais serão utilizados para o apreçamento e gerenciamento do risco. A solução dessas equações envolvem integrais de processos estocásticos em respeito à processos estocásticos, logo a teoria de integração estocástica é fundamental para teoria das finanças quantitativas. Embora possamos definir integrais estocásticas de processos estocásticos com respeito à processos martingales locais ou semimartingales, vamos considerar o caso particular de integrais estocásticas com respeito ao movimento Browniano, que é um processo martingale quadrado integrável. Esta integral é conhecida na literatura como integral de Itô e as EDEs definidas por integrais deste tipo são ditas EDEs de Itô. Neste trabalho, todos os modelos considerados são baseados em EDEs de Itô. Assim, introduzimos, neste capítulo, alguns conceitos fundamentais para a formalização da teoria de integração estocástica de Itô.

3.1 Processos Estocásticos

Um **processo estocástico** é uma coleção de variáveis aleatórias $X := \{X(t) : t \in \mathbb{T}\}$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e indexadas por um conjunto não-vazio \mathbb{T} . Para cada $\omega \in \Omega$ fixo, dizemos que a função $X(., \omega) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é a **trajetória** do processo X correspondente a ω . Nesta dissertação, eventualmente escrevemos $X(t, \omega) = X(t)$ e assumimos $\mathbb{T} := [0, T]$, com $T > 0$ uma constante.

Dados o processo $X := \{X(t) : t \in [0, T]\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $t, s \in [0, T]$, o **valor esperado (média)** de $X(t)$ com relação à medida \mathbb{P} é dado por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)] = \int_{\Omega} X(t, \omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

e a **covariância** entre $X(t)$ e $X(s)$ é definida como

$$\text{Cov}_{\mathbb{P}}(X(t), X(s)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(X(t) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)])(X(s) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(s)])].$$

Como caso particular, se $t = s$ temos a **variância** de $X(t)$, a qual é denotada por $\text{Var}_{\mathbb{P}}(X(t))$. Se $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$, podemos definir a **função média** de X , a qual é uma aplicação $m_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $m_X(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)]$. Se $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|^2] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$, podemos definir também a **função covariância** de X , a qual é uma aplicação $C_X : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $C_X(t, s) = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(X(t), X(s))$.

Definição 5 (Continuidade). Seja $X := \{X(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

i) Dizemos que X **possui quase certamente (q.c.) trajetórias contínuas** quando

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\cdot, \omega) \text{ é contínua em } [0, T]\}) = 1.$$

ii) Dizemos que X é **contínuo em probabilidade** em $t, t \in [0, T]$, quando para toda sequência $\{t_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ em $[0, T]$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X(t_n, \omega) - X(t, \omega)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

iii) Dizemos que X é **contínuo em média quadrática** em $t \in [0, T]$, quando para toda sequência $\{t_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$ em $[0, T]$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X(t_n) - X(t)|^2) \rightarrow 0.$$

Um processo $X := \{X(t) : t \in [0, T]\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|^2] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$ é um processo cujas variáveis aleatórias pertencem ao espaço

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y|^2] < \infty\}.$$

O espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de Hilbert, pois a sequência de Cauchy induzida pela métrica é convergente. Neste caso, a métrica induzida é dada pelo produto interno definido por $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XY]$, em que X e Y são variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Assim, quando X satisfaz o item (iii) da Definição 5 dizemos que a aplicação $t \rightarrow X(t)$ com valores no espaço de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é contínua. Para mais detalhes sobre métrica e espaço de Hilbert, indicamos ao leitor o Anexo A.

3.2 Movimento Browniano

Movimento Browniano, na física, é o processo que descreve o movimento aleatório de partículas em algum fluido. Esse processo é denominado Browniano, pois o botânico Robert

Brown foi o primeiro a estudar este fenômeno em partículas de pólen na água (ver [Brown, 1828](#)). Einstein mostrou que a fórmula que descreve o movimento Browniano é a solução da equação do processo de difusão (ver [Einstein, 1905](#)) e ainda, mostrou que o caminho do processo é não diferenciável e não depende dos passos anteriores, ou seja, possui propriedade da falta de memória (ver [Einstein, 1908](#)).

O movimento Browniano foi fundamentado matematicamente por vários pesquisadores contemporâneos de Einstein, dentre eles, temos Norbert Wiener e Paul Pierre Lévy. Wiener propôs um processo estocástico que se encaixava no movimento das partículas e por esse motivo o movimento Browniano também é conhecido como processo de Wiener (ver [Wiener, 1923](#)). Lévy estudou uma classe de processos infinitamente divisíveis (ver capítulo 1 de [Bertoin, 1996](#)), no qual, o movimento Browniano é um dos mais conhecidos e ainda, mostrou outra caracterização para o processo (Ver Teorema 5.12 de [Gall, 2016](#)).

Na economia, Louis Bachelier, na sua tese de doutorado (ver [Bachelier, 1900](#)), utilizou o movimento Browniano em uma modelagem no mercado financeiro e, baseado nessa ideia, outros cientistas propuseram outros métodos, nos quais eventualmente viriam a utilizar equações diferenciais estocásticas. Tendo em vista a importância deste processo estocástico no âmbito das finanças quantitativas, dedicamos esta seção para o seu estudo.

Definição 6. O processo estocástico $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito ser um movimento Browniano se satisfazer as seguintes condições:

- i) $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : B(0, \omega) = 0\}) = 1$.
- ii) Para qualquer $0 \leq s < t \leq T$ a variável aleatória $B(t) - B(s)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $t - s$, i. e.,

$$\mathbb{P}(B(t) - B(s) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{\frac{-u^2}{2(t-s)}\right\} du,$$

em que $x \in \mathbb{R}$.

- iii) B possui incrementos independentes, i.e, para qualquer $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, as variáveis aleatórias $B(t_1)$, $B(t_2) - B(t_1)$, \dots , $B(t_n) - B(t_{n-1})$ são independentes.
- iv) B possui quase certamente trajetórias contínuas, i. e.,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : B(\cdot, \omega) \text{ é contínua em } [0, T]\}) = 1.$$

O movimento Browniano definido como a Definição 6 partiu de uma construção baseada em conceitos físicos e matemáticos, como falamos anteriormente. No Anexo B, Seção B.1, mostramos a construção proposta por [Wiener \(1923\)](#), em que o autor utiliza argumentos de teoria da medida para provar a existência do processo. Na próxima seção, trabalhamos algumas das suas propriedades.

3.2.1 Propriedades do Movimento Browniano

Nesta subsecção, listamos algumas propriedades que são consequências da definição do movimento Browniano.

Proposição 5. Seja o movimento Browniano $B = \{B(t) : t \in [0, \infty)\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, temos as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] = \min\{t, s\}$ com $t, s \in [0, \infty)$;
2. para um $t_0 \in [0, \infty)$ fixo, o processo estocástico $\tilde{B}^1 = \{\tilde{B}^1(t) : t \in [0, \infty)\}$, definido como $\tilde{B}^1(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$, também é um movimento Browniano (invariância de translação);
3. para qualquer número real $\lambda > 0$, o processo estocástico $\tilde{B}^2 = \{\tilde{B}^2(t) : t \in [0, \infty)\}$, definido como $\tilde{B}^2(t) = B(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$, também é um movimento Browniano (invariância de escala).

Demonstração. Para provar a propriedade 1, basta usar o fato de que $B(t)$ é um movimento Browniano e segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância t . Supondo sem perda de generalidade que $0 \leq s < t < \infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s) - B(s)^2 + B(s)^2] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))B(s) + B(s)^2] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))B(s)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^2] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^2] \\
 &= s = \min\{s, t\},
 \end{aligned}$$

concluindo a prova da propriedade 1.

Para provar as propriedades 2 e 3 precisamos mostrar que as condições i) a iv) da Definição 6 são satisfeitas. O processo \tilde{B}^1 satisfaz i) e iv), pois $\tilde{B}_0^1 = B(t_0) - B(t_0) = 0$ e $B(t_0 + t) - B(t_0)$ é contínuo em todo $t \in [0, \infty)$. Ainda, para $0 \leq s < t < \infty$, $\tilde{B}^1(t) - \tilde{B}^1(s) = B(t_0 + t) - B(t_0 + s)$ segue uma distribuição Gaussiana, com média 0 e variância $t + t_0 - s - t_0 = t - s$, satisfazendo a condição ii). Por fim, é fácil ver que, para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$, os processos $\tilde{B}_{t_1}^1, \tilde{B}^1(t_2) - \tilde{B}^1(t_1), \dots, \tilde{B}^1(t_k) - \tilde{B}^1(t_{k-1})$ são independentes pelo fato de $B(t_1 + t_0) - B(t_0), B(t_2 + t_0) - B(t_1 + t_0), \dots, B(t_k + t_0) - B(t_{k-1} + t_0)$ serem independentes, provando o item iii) e terminando a prova para \tilde{B}^1 .

De maneira análoga, \tilde{B}^2 satisfaz i) e iv), pois $\tilde{B}^2(0) = B(0)/\sqrt{\lambda} = 0$ e $B(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ é contínua em todo $t \in [0, \infty)$. Para $0 \leq s < t < \infty$, o processo $\tilde{B}^2(t) - \tilde{B}^2(s) = (B(\lambda t) - B(\lambda s))/\sqrt{\lambda}$, como $B(\lambda t) - B(\lambda s)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\lambda(t - s)$, $\tilde{B}^2(t)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\lambda(t - s)/\lambda = t - s$, satisfazendo ii). Para $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$, os processos $\tilde{B}^2(t_1), \tilde{B}^2(t_2) - \tilde{B}^2(t_1), \dots, \tilde{B}^2(t_k) - \tilde{B}^2(t_{k-1})$ são independentes, pois $B(\lambda t_1), B(\lambda t_2) - B(\lambda t_1), \dots, B(\lambda t_k) - B(\lambda t_{k-1})$ são independentes e uma

constante $1/\sqrt{\lambda}$ multiplicada em variáveis aleatórias independentes preserva a independência, garantindo a propriedade ii) e provando que \tilde{B}^2 é um movimento Browniano. \square

Proposição 6. Seja o movimento Browniano $B := \{B(t) : t \in [0, \infty)\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, então para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e $0 \leq s < t < \infty$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^{2n}] = (t - s)^n \frac{(2n)!}{n!2^n} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^{2n+1}] = 0$$

Demonstração. Seja uma variável aleatória Z gaussiana com média 0 e variância 1 definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sabemos que a função geradora de momentos de Z é dado por

$$M_Z(\xi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{Z\xi}] = e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2^n n!}, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}.$$

Avaliando as derivadas de ordem par com $\xi = 0$, obtemos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z^{2n}] = \frac{\partial M_Z(0)}{\partial \xi} = \frac{(2n)!}{n!2^n}, \quad \text{para } n \in \{1, 2, \dots\}.$$

Por outro lado, avaliando as derivadas ímpares com $\xi = 0$ obtemos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z^{2n+1}] = \frac{\partial M_Z(0)}{\partial \xi} = 0, \quad \text{para } n \in \{1, 2, \dots\}.$$

Sabemos pelo item (ii) da Definição 6 que $B(t) - B(s)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $t - s$, então podemos reescrevê-lo como $B(t) - B(s) = (t - s)^{1/2}Z$. Por fim, usamos a propriedade do valor esperado

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^n] = (t - s)^{\frac{n}{2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z^n], \quad \text{para } n \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

e concluímos a prova. \square

Proposição 7. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, seja $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Então

$$\sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \rightarrow b - a$$

em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ quando $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$.

Demonstração. Tomando $b - a = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})$ e assumindo

$$\begin{aligned} \phi_n &= \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (b - a) \\ &= \sum_{i=1}^n [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n X_i, \end{aligned}$$

em que $X_i = [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})]$. Então

$$\phi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{i,j=1}^n X_i X_j.$$

Pela condição (iii) da Definição 6, os incrementos do movimento Brownianos são independentes, implicando que X_i é independente de X_j , para $i \neq j$. Portanto, para $i \neq j$ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i X_j] = 0$ e, para $i = j$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})]^2 \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4 - 2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2(t_i - t_{i-1})] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(t_i - t_{i-1})^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] (t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Pela Proposição 7, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] (t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 3(t_i - t_{i-1})^2 - 2(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 2(t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\phi_n^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i,j=1}^n X_i X_j \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X_i X_j] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X_i^2] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2 \|\Delta_n\| (b - a). \end{aligned}$$

Assim, quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\phi_n^2] \rightarrow 0$, implicando em convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. \square

O resultado a seguir não é explicitamente uma propriedade do movimento Browniano, todavia será importante quando trabalharmos com a convergência da integral de Wiener, que é a integral de uma função determinística com relação ao movimento Browniano.

Proposição 8. Seja $X := \{X_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ uma sequência de variáveis aleatórias Gaussianas com média μ_n e variância σ_n^2 definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que $X_n \rightarrow X$ em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, então X segue uma distribuição Gaussiana com média $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ e variância $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$.

Demonstração. Para provar este resultado precisamos mostrar qual a distribuição X e qual o valor da sua média e variância, Sabemos que se X_n converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para X , conseqüentemente convergindo em $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \mu$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mathbb{P}}(X_n) = \text{Var}_{\mathbb{P}}(X) = \sigma^2$, garantindo a primeira parte da prova. A convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ também implica que X_n converge em distribuição para X . Tomando o limite da função característica de X_n

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{X_n}(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{iX_n \xi}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{2} \xi^2} \\ &= e^{i\mu - \frac{\sigma^2}{2} \xi^2} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{iX \xi}] \\ &= \Phi_X(\xi) \end{aligned}$$

concluimos que X segue uma distribuição Gaussiana com média μ e variância σ^2 . \square

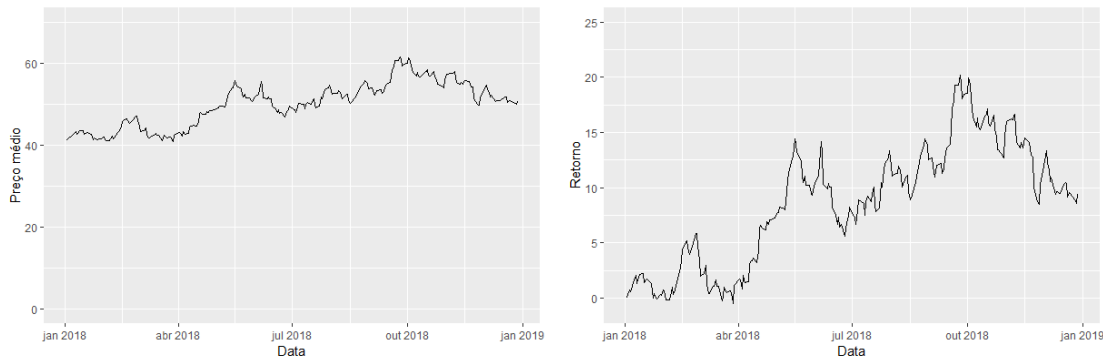
3.2.2 O movimento Browniano e os dados financeiros.

Nesta seção, mostramos uma aplicação simples do movimento Browniano no mercado financeiro para apresentar nossa motivação em utilizar equações diferenciais estocásticas de Itô para modelar o apreamento de opções, isto é, equações diferenciais que são regidas pelo movimento Browniano. Para isso, utilizamos dados dos preços diários do ativo VALE3 no ano de 2018, disponíveis publicamente no site da [B3 \(2018\)](#). Analisamos a aderência dos retornos às condições que definem o movimento Browniano.

O conjunto de dados é referente ao preço do ativo VALE3 ao longo de 245 dias úteis. Assim, seja $S = \{S(t) : t \in [0, 244]\}$ o processo estocástico que representa o valor do ativo no tempo t (em dias). Com isso, $t = 0$ é o primeiro dia observado e $S(0) = s_0$, com $s_0 = R\$41,28$, não partindo de 0 como exigido pela Definição 6. Contudo, podemos olhar para o retorno no tempo t como um movimento Browniano, i.e., $S(t) - s_0 = B(t)$, com $B = \{B(t) : t \in [0, 244]\}$ sendo um movimento Browniano pela invariância por translação, enunciada na Proposição 5. Mostramos o comportamento do valor do ativo e do seu retorno na Figura 8.

Para avaliar se os retornos seguem um movimento Browniano, vamos utilizar o teste Anderson - Darling (AD) para testar se os incrementos seguem uma distribuição Gaussiana e o teste Ljung - Box (LB) para testar se os incrementos são independentes. Testamos dois casos, nos quais $B(1) - B(0)$, $B(2) - B(1)$, ... comparamos com uma distribuição Gaussiana de média

Figura 8 – Preço e retorno do ativo VALE3 no ano de 2018.



(a) Preço do ativo VALE3 ao longo do tempo. (b) Retorno do ativo VALE3 ao longo do tempo.

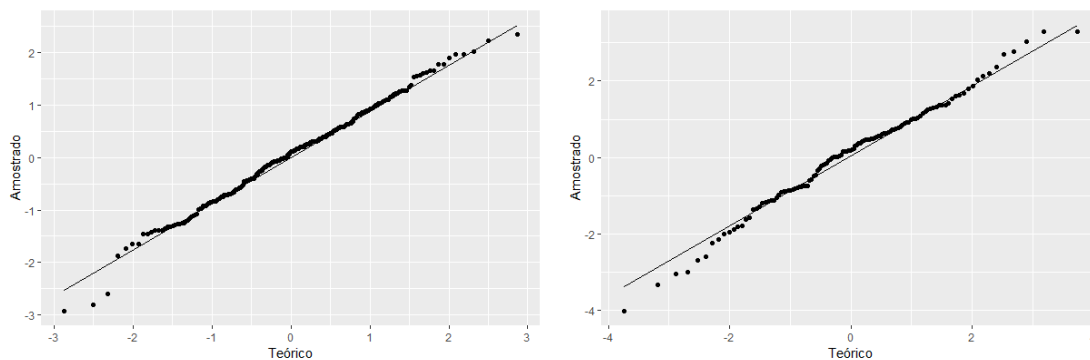
0 e variância 1 e $B(2) - B(0)$, $B(4) - B(2)$, ... com uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 2. Aplicando os testes para os dois casos e assumindo o nível de significância de 5%, obtivemos valores p contidos na Tabela 1, não rejeitando as hipótese que $B(1) - B(0)$, $B(2) - B(1)$, ... e $B(2) - B(0)$, $B(4) - B(2)$, ... são independentes e seguem, respectivamente, uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1 e uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 2.

Distribuição	AD	LB
N(0,1)	0,2178	0,1460
N(0,2)	0,4464	0,2104.

Tabela 1 – Resultado do teste Anderson - Darling e Ljung - Box com lag 10.

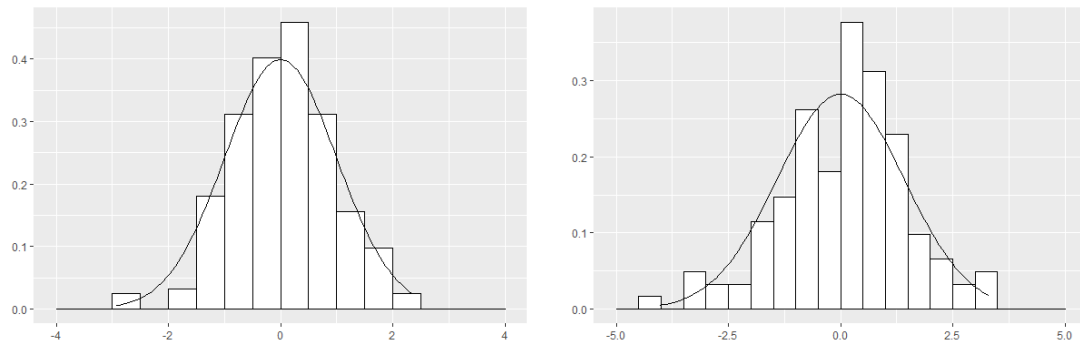
Além desse teste, usamos os gráficos quantil-quantil (QQ-plot) e os histogramas para validarem nossos resultados. Na Figura 9 vemos que os gráficos se aproximam de retas, indicando uma boa aproximação para as distribuições propostas. O mesmo pode ser observado na Figura 10 com os histogramas dos incrementos, nos quais são semelhantes a suas respectivas distribuições.

Figura 9 – Gráficos quantil-quantil.



(a) Gráfico quantil-quantil de uma Gaussiana com média 0 e variância 1. (b) Gráfico quantil-quantil de uma Gaussiana com média 0 e variância 2.

Figura 10 – Histogramas dos retornos comparados com suas respectivas funções de densidade de probabilidade.



(a) Histograma dos dados comparados com a função de densidade de uma Gaussiana com média 0 e variância 1. (b) Histograma dos dados comparados com a função de densidade de uma Gaussiana com média 0 e variância 2.

Por tanto, concluímos que os retornos da VALE3 podem ser considerados independentes entre si e se ajustam a suas respectivas distribuições normais, como exigido nas condições ii) e iii) da Definição 6. Logo, os retornos do ativo se assemelham a um movimento Browniano. O intuito desta modelagem é apenas uma motivação para mostrar que, a primeira vista, podemos supor que o movimento Browniano pode representar o retorno de um ativo ou parte dele. Ressaltamos que o mercado financeiro possui muitos fatores que afetam o preço de um ativo, sendo na maioria das vezes necessário a utilização de modelagens mais robustas.

3.3 Integral estocástica de Itô

Para trabalhar com martingales e, posteriormente, com a integral de Itô, precisamos considerar alguns objetos matemáticos e impor algumas condições sobre os processos estocásticos que vamos trabalhar.

Definição 7 (Filtragem). Uma **filtragem** (ou filtração) \mathbb{F} definida em $[0, T]$ é uma família crescente de σ -álgebras de \mathcal{F} , i.e., $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ com $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definição 8 (Base estocástica). Uma **base estocástica** é um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado com uma filtragem \mathbb{F} . Denotamos a base estocástica como a quadrupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Definição 9. Dizemos que uma base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ satisfaz as **condições usuais** quando

1. Para qualquer $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(B) = 0$, temos $A \in \mathcal{F}$ sempre que $A \subset B$ (espaço de probabilidade é completo);
2. \mathcal{F}_0 contém todos os subconjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathcal{F} (\mathbb{F} é \mathbb{P} -completada);
3. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u, \forall t \in [0, T]$ (\mathbb{F} é contínua à direita).

Consideramos nesta dissertação processos estocásticos definidos em bases estocásticas que satisfazem as condições usuais. Além disso, vamos assumir que todo processo estocástico é adaptado à filtragem.

Definição 10. Um processo estocástico $X = \{X(t); t \in [0, T]\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito ser **adaptado** à filtragem \mathbb{F} quando para cada $t \in [0, T]$, $X(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável.

Antes de apresentarmos a definição da integral de Itô, seguimos a mesma organização de [Kuo \(2006\)](#) e fazemos uma breve revisão sobre as integrais Riemann e Riemann-Stieltjes.

3.3.1 Integral de Riemann

Dizemos que uma função real f limitada definida em um intervalo compacto $[a, b]$ é Riemann integrável quando existir o limite

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

em que $\Delta_n := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\|\Delta_n\| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ e τ_i é um ponto do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. É bem conhecido que se f é uma função contínua em $[a, b]$, então ela é Riemann integrável (ver, Teorema 7.2.9, página 222, [Abbott, 2001](#)).

3.3.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Dada uma função g monótona crescente no intervalo compacto $[a, b]$. Dizemos que uma função f limitada definida em $[a, b]$ é Riemann-Stieltjes integrável com respeito a g quando existir o limite

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})),$$

em que $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ e τ_i um ponto do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. É bem conhecido que funções contínuas em $[a, b]$ são Riemann-Stieltjes integráveis com relação a qualquer função monótona crescente em $[a, b]$. Se assumirmos ainda que f é monótona crescente e g é contínua temos

$$\int_a^b f(t) dg(t) = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t) df(t).$$

Assim, surge uma pergunta natural: a integral de Riemann-Stieltjes pode ser definida para qualquer função contínua em $[a, b]$?

Para responder essa pergunta considere uma partição $\Delta_n = \{a = t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e considere as seguintes somas de Riemann

$$L_n := \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})),$$

$$R_n := \sum_{i=1}^n f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})).$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_n - L_n &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n + L_n &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) + f(t_{i-1}))(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i)^2 - f(t_{i-1})^2) \\ &= f(b)^2 - f(a)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_n = \frac{1}{2} \left[(f(b)^2 - f(a)^2) + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right]$$

$$L_n = \frac{1}{2} \left[(f(b)^2 - f(a)^2) - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right].$$

O limite $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$ é chamado variação quadrática de f em $[a, b]$. Então, $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n \neq \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n$, se e somente se, a variação quadrática for diferente de 0. Logo, f não será Riemann-Stieltjes integrável com relação a f caso a variação quadrática for diferente de 0.

Exemplo 15. Vamos reproduzir o resultado anterior para um movimento Browniano. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Utilizando a notação utilizada anteriormente, suponha $\Delta_n = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ a partição do intervalo $[a, b]$ e $f(t) = B(t)$, então

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2.$$

Tomando o limite $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, temos, pela Proposição, 7

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} (R_n - L_n) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \rightarrow b - a.$$

Note que $b - a \neq 0$, implicando que B não é Riemann-Stieltjes integrável para B . Nesse sentido, precisamos definir outro tipo de integral, que consiga lidar com a integral de movimento Browniano.

3.3.3 Integral de Wiener

Vimos na seção anterior que a integral

$$\int_a^b f(t) dg(t),$$

não pode, em geral, ser definida como uma integral de Riemann-Stieltjes para qualquer função f e g . Precisamos, em particular, que g tenha variação quadrática nula. No exemplo 15, vimos que o movimento Browniano possui variação quadrática diferente de zero. Neste sentido, nosso primeiro objetivo é dar sentido à integrais de funções determinísticas com relação ao movimento Browniano. Assim, vamos assumir, em um primeiro momento, a seguinte integral,

$$\int_a^b f(t) dB(t, \omega), \quad (3.1)$$

para f definida em $[a, b]$ determinística, i.e., que não depende de $\omega \in \Omega$; e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Quando trabalhamos com integrais de Riemann-Stieltjes, a função f que se está integrando deve ser uma função contínua de variação quadrática igual a 0. Todavia, queremos definir a integral (3.1) para qualquer função $f \in L^2[a, b]$, em que

$$L^2[a, b] := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

é o espaço de Hilbert com produto interno dado por $\langle g, h \rangle := \int_a^b g(t)h(t) dt$, em que g e h são funções definidas no intervalo $[a, b]$. Assim, a integral (3.1) estaria definida também para a classe das funções f de variação limitada (variação quadrática diferente de zero). As integrais deste tipo são conhecidas como integrais de Wiener e podemos contruí-las a partir dos dois passos seguintes:

(i) O primeiro passo é considerar uma função simples f definida em $[a, b]$, isto é,

$$f(t) := \sum_{i=1}^n c_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

em que $1_{[t_{i-1}, t_i)}$ é a função indicadora no intervalo $[t_{i-1}, t_i)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$; e $c_i \in \mathbb{R}$ é uma constante para todo $i = 1, \dots, n$. Neste caso, definimos

$$I(f) := \sum_{i=1}^n c_i (B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

em que $B = \{B(t) : t \in [a, b]\}$ é um movimento Browniano.

Observe que, para quaisquer funções simples $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}$ e $g = \sum_{i=1}^n d_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}$, ambas definidas no intervalo $[a, b]$, e quaisquer constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=1}^n (\alpha c_i + \beta d_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha c_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n (\beta d_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n c_i(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \beta \sum_{i=1}^n d_i(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \alpha I(f) + \beta I(g), \end{aligned}$$

ou seja, I é linear. Além disso, $I(f)$ é uma variável aleatória, uma vez que é função do movimento browniano. Assim, algumas informações com respeito à distribuição de $I(f)$ podem ser deduzidas.

Lema 1. Para a função simples $f = \sum_{i=1}^n c_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}$, $I(f)$ é uma variável aleatória Gaussiana com média 0 e variância

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Demonstração. Como B é um movimento Browniano, segue que $B(t_i) - B(t_{i-1})$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $t_i - t_{i-1}$, logo $I(f)$ é a combinação linear de variáveis aleatórias normais independentes e, desta forma, $I(f)$ possui distribuição Gaussiana com média 0. Para encontrar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2]$, usamos as propriedades do movimento Browniano e de variância de variáveis aleatórias independentes. Neste sentido,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\sum_{i=1}^n c_i (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(c_i (B(t_i) - B(t_{i-1})))^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i)^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[((B(t_i) - B(t_{i-1})))^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i)^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt, \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

- (ii) Seja $f \in L^2[a, b]$ e $\{f_n : n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ uma sequência de funções simples, tais que $f_n \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$. Pelo Lema 1, a sequência $\{I(f_n) : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ é uma sequência de Cauchy

em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pois

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|I(f_n) - I(f_m)|^2] = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt = 0.$$

Logo, $I(f_n) \rightarrow I(f)$ em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Agora, vamos verificar se $I(f)$, dada como o limite anterior, está bem definida. De fato, $I(f)$ independente da sequência de funções simples que escolhermos a sequência converge, ou seja, dada as sequências de funções simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ e $\{g_m : m \in \{1, 2, \dots\}\}$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $g_m \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|I(f_n) - I(g_m)|^2] &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - g_m(t)|^2 dt \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b [(f_n(t) - f(t)) - (g_m(t) - f(t))]^2 dt \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b [(f_n(t) - f(t)) - (g_m(t) - f(t))]^2 dt \\ &\leq 2 \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b [(f_n(t) - f(t))^2 + (g_m(t) - f(t))^2] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que $I(f)$ está bem definido.

Definição 11. (Integral de Wiener) Seja a função $f \in L^2[a, b]$ e a sequência de funções simples $\{f_n : n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$. O limite

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad \text{em } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

é chamado de **integral de Wiener** de f , que será denotada por

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t) dB(t) \right) (\omega), \quad \omega \in \Omega, \text{ q.c.}$$

ou, simplesmente, por $I(f)(\omega) = \int_a^b f(t) dB(t, \omega) = \int_a^b f(t) dB(t)$.

A integral de Wiener $I(f)$ de f é uma variável aleatória e podemos, assim como no caso das funções simples, deduzir sua distribuição.

Teorema 3. Para $f \in L^2[a, b]$, a integral de Wiener $I(f)(\omega) = \int_a^b f(t) dB(t, \omega)$ segue uma distribuição Gaussiana, com média 0 e variância

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Demonstração. Dado uma sequência de funções simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$, sabemos pelo Lema 1, que $I(f_n)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f_n)^2] = \int_a^b f_n(t)^2 dt$. Como $f_n \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$ e $I(f_n) \rightarrow I(f)$ em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, usando a Proposição 8, provamos o resultado. \square

Assim, $I : L^2[a, b] \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma isometria.

Corolário 1. Se $f, g \in L^2[a, b]$, então

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Em particular, se f e g são ortogonais, $I(f)$ e $I(g)$ são variáveis aleatórias Gaussianas independentes.

Demonstração. Suponha $f, g \in L^2[a, b]$. Utilizando a linearidade de I e o Teorema 3

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f+g)^2] &= \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 + 2f(t)g(t) + g(t)^2 dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2 \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Usando novamente o Teorema 3 obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f+g)^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(g)^2] \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Para f e g ortogonais, temos

$$\langle I(f)I(g) \rangle = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle = 0.$$

Como $I(f)$ e $I(g)$ seguem uma distribuição Gaussiana, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] = 0$ garante a independência. \square

O resultado anterior mostra que o produto interno é preservado. Para mais detalhes sobre isometria e ortogonalidade referenciamos o leitor ao Anexo A.

Exemplo 16. Suponha

$$I(f) = \int_0^1 t dB(t, \omega),$$

uma integral de Wiener. Então, a $I(f)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

Teorema 4. Seja f uma função com variação limitada. Então, para quase todo $\omega \in \Omega$

$$\left(\int_a^b f(t)dB(t) \right) (\omega) = \int_a^b f(t)dB(t, \omega),$$

no qual, no lado esquerdo é a integral Wiener de f e no lado direito é a integral de Riemann-Stieltjes definida pela integral por partes.

Demonstração. Seja a partição $\Delta_n = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, definimos a função simples

$$f_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})1_{[t_i, t_{i-1})},$$

que converge em $L^2[a, b]$ para f , para $n \rightarrow \infty$, ou equivalente, $\|\Delta_n\| = \max_{0 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$. Da Definição 11, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(t) dB(t) \right) (\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})), \text{ em } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \end{aligned}$$

Integrando por partes para cada $\omega \in \Omega_0$, em que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ o seguinte limite vale

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dB(t, \omega) &= f(b)B(b, \omega) - f(a)B(a, \omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(t_i, \omega)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(b)B(b, \omega) - f(a)B(a, \omega) - \sum_{i=1}^n B(t_i, \omega)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (B(t_i, \omega)f(t_i) - B(t_{i-1}, \omega)f(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n B(t_i, \omega)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)). \end{aligned}$$

Convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ implica na existência de uma subsequência que converge quase certamente. Então, tomamos uma subsequência de f_n que convirja e concluímos a prova. \square

Exemplo 17. Suponha a integral de Riemann

$$\int_0^1 B(t, \omega) dt,$$

no qual, $B := \{B(t) : t \in [0, 1]\}$ é um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\omega \in \Omega$. Para cada $\omega \in \Omega$, podemos usar a regra do produto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(t, \omega) dt &= tB(t, \omega) \Big|_0^1 + \int_0^1 t dB(t, \omega) \\ &= B(1, \omega) - \int_0^1 t dB(t, \omega) \\ &= \int_0^1 dB(t, \omega) - \int_0^1 t dB(t, \omega) \\ &= \int_0^1 (1-t) dB(t, \omega). \end{aligned}$$

Como $g(t) = (1-t)$ é contínua e com variação limitada em $[0, 1]$, pelo Teorema 4, para quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^1 B(t, \omega) dt = \int_0^1 (1-t) dB(t, \omega),$$

sendo a integral do lado direito da igualdade Riemann-Stieltjes integrável. Então, $\int_0^1 B(t) dt$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}$.

3.3.4 Integral de Itô

Como visto no capítulo anterior, podemos integrar uma função determinística com relação a um movimento Browniano. Agora, vamos definir uma integral de um processo estocástico adaptado a filtragem \mathbb{F} com relação a um movimento Browniano B , em que $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ é tal que $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s) : s \leq t\}$. Esta integral é denominada integral de Itô, pois foi introduzida pelo mesmo em 1944 (ver Itô, 1944). Vamos fornecer uma motivação sobre sua formulação e, para isso, precisamos definir o que é um martingale.

Definição 12. Seja $M := \{M(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptado a filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ e tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$. Dizemos que M é um **martingale** quando

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s), \quad \mathbb{P} - \text{q.c.},$$

para qualquer $0 \leq s \leq t \leq T$. De forma equivalente, dizemos que M é um supermartingale ou um submartingale, quando $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)|\mathcal{F}_s] \leq M(s)$, $\mathbb{P} - \text{q.c.}$, ou $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)|\mathcal{F}_s] \geq M(s)$, $\mathbb{P} - \text{q.c.}$, respectivamente, para qualquer $0 \leq s \leq t \leq T$.

Quando não especificado, assumimos $\mathcal{F}_t := \sigma\{M(s) : s \leq t\}$, i.e., a σ -álgebra gerada pelo processo M até o tempo $t \in [0, T]$.

Exemplo 18. Vamos apresentar, neste exemplo, um processo estocástico a tempo discreto, assim, ilustrando o conceito de martingale. Suponha então os processos estocásticos $X := \{X(n), n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ e $M := \{M(n), n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X é uma sequência de variáveis aleatórias não-negativas e independentes com média $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n] = 1$ e M é dado por

$$M(n) := \prod_{i=0}^n X(i),$$

em que $\mathcal{F}_n = \sigma\{M(m) : m \leq n\}$. É fácil ver que o M é \mathcal{F}_n -mensurável e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(n)|] = \prod_{i=0}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(i)] = 1 \leq \infty,$$

então, usando as propriedades de variáveis independentes, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n)|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n-1)X(n)|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n-1)|\mathcal{F}_{n-1}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(n)|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= M(n-1)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(n)] \\ &= M(n-1), \end{aligned}$$

logo, M é um martingale. Interessante notar que pelas condições de um martingale implicam que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n)]$ não varie com n , pois

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n)|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(n-1)].$$

Proposição 9. Um movimento Browniano é um martingale.

Demonstração. Seja o movimento Browniano $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sabemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)] = 0$, então assumindo $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : s \leq t\}$, temos para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t) - B(s)] + B(s) \\ &= B(s),\end{aligned}$$

pois $B(t) - B(s)$ não depende de \mathcal{F}_s e, por outro lado, $B(s)$ é \mathcal{F}_s -mensurável. Assim, provamos que um movimento Browniano é um martingale. \square

Teorema 5. Seja $f \in L^2[a, b]$, $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ e $M := \{M(t) : t \in [a, b]\}$, respectivamente, uma função determinística, um movimento Browniano e um processo estocástico definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O processo M dado por

$$M(t) := \int_a^t f(s)dB(s),$$

é um martingale com respeito a $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : s \leq t\}$.

Demonstração. Para provar este teorema, precisamos mostrar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|] < \infty, \quad \text{em que } a \leq t \leq b,$$

e que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s), \quad \text{q.c., em que } a \leq s \leq t \leq b.$$

Do Teorema 3, temos para todo $t \in [a, b]$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|^2] = \int_a^t |f(s)|^2 ds \leq \int_a^b |f(s)|^2 ds < \infty,$$

pois $f \in L^2[a, b]$. Pela desigualdade $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|^2]^{1/2}$, concluímos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|M(t)|] < \infty$, o que finaliza a primeira parte.

Por outro lado, para $a \leq s \leq t \leq b$,

$$M(t) = M(s) + \int_s^t f(u) dB(u).$$

Como $M(s)$ é \mathcal{F}_s -mensurável

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s\right].$$

Logo, precisamos mostrar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s\right] = 0. \quad (3.2)$$

Suponha $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{[t_{i-1}, t_i]}$ uma função simples, com $t_0 = s$ e $t_n = t$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n a_i (B(t_i) - B(t_{i-1})) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1})) | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Note que, pelas condições ii) e iii) da Definição 6, $B(t_i) - B(t_{i-1})$, em que $t_i \in [s, t]$, não depende de \mathcal{F}_s , para todo $i = 1, \dots, n$, e possui média 0, logo

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1})) | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1}))] = 0.$$

Agora, precisamos verificar se a Equação (3.2) se mantém para qualquer $f \in L^2[a, b]$. Seja $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$, uma sequência de funções simples que convergem em $L^2[a, b]$ para f . Pela desigualdade de Jensen, temos

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB(u) \right|^2 \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Tomando a esperança, utilizando que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X | \mathcal{F}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ e o Teorema 3, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB(u) \right|^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB(u) \right|^2 \right] \\ &\leq \int_s^t (f_n(u) - f(u))^2 du \end{aligned}$$

Como $f_n \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_s^t (f_n(u) - f(u))^2 du = 0,$$

implicando que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f_n(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right]$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right]$. Convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ implica em convergência em probabilidade, que implica na existência de uma subsequência que converge quase certamente. Tomando alguma subsequência específica, se necessário, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f_n(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right], \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Como mostrado anteriormente, a Equação (3.2) vale para funções simples, então, do resultado acima

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0,$$

i.e., Equação (3.2) vale para qualquer função $f \in L^2[a, b]$, concluindo, assim, que M é um martingale. \square

Podemos motivar a construção da integral de Itô através do ponto de vista de processos martingales. Vimos no Teorema 5 que, para qualquer $f \in L^2([a, b])$ o processo

$$M(t) = \int_a^t f(s)dB(s), \quad t \in [a, b]$$

é um martingale. Agora, queremos definir a integral estocástica

$$\int_a^b f(t, \omega)dB(t, \omega)$$

para o processo estocástico f de tal forma que

$$X(t, \omega) = \int_a^t f(s, \omega)dB(s, \omega), \quad t \in [a, b]$$

seja também um martingale.

Retomando o Exemplo 15, onde estávamos interessados na integral estocástica

$$\int_a^b B(t)dB(t).$$

Sabemos que

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} (R_n - L_n) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \rightarrow b - a.$$

Neste caso, as integrais a direita e a esquerda são dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n &= \frac{1}{2} [B(b)^2 - B(a)^2 + (b - a)] \\ \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n &= \frac{1}{2} [B(b)^2 - B(a)^2 - (b - a)]. \end{aligned}$$

Como não podemos utilizar a integral de Riemann-Stieltjes, podemos escolher algum destes limites para ser a integral de Itô $\int_a^b B(t)dB(t)$. Mas qual deles? Para responder está questão, tomamos $a = 0$ e $b = t$ e assumimos os processos estocásticos $R := \{R(t) : t \in [0, T]\}$ e $L := \{L(t) : t \in [0, T]\}$, definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nos quais

$$\begin{aligned} R(t) &:= \frac{1}{2} [B(t)^2 + t] \\ L(t) &:= \frac{1}{2} [B(t)^2 - t]. \end{aligned}$$

Como queremos uma integral que seja um martingale, precisamos checar qual destas satisfaz as suas condições. Se um processo estocástico $X := \{X(t) : t \in \mathbb{T}\}$ é um martingale, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(s)]$, para qualquer $s, t \in \mathbb{T}$. Assim, é fácil notar que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R(t)] = t$, logo, como t não é uma constante, R não é um martingale. Basta checar, agora, o processo L . Tomando $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : s \leq t\}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{2} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^2|\mathcal{F}_s] - t], \text{ em que } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Usando o item iii) da Definição 6, é fácil ver que $B(t) - B(s)$ é independente de $B(u)$, para $u \leq s$, então $B(t) - B(s)$ não depende de \mathcal{F}_s . Obtemos então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s) + B(s))^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^2 | \mathcal{F}_s] + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)(B(t) - B(s)) | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^2] + 2B(s)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))] + B(s)^2 \\ &= t - s + B(s)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L(t) | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{2} [B(s)^2 - s] = L(s), \text{ em que } 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (3.3)$$

Logo, L é um martingale. Deste exemplo, temos um indicativo que a integral $\int_a^b f(t, \omega) dB(t, \omega)$ precisa ser avaliada no limite inferior dos intervalos da soma de Riemann para possuir as propriedades de um processo martingale.

Por fim, vamos ressaltar a importância da utilização de um processo adaptado à filtragem para a obtenção de um martingale, e conseqüentemente, da integral de Itô. Suponha o processo $X := \{X(t) : t \in [0, 1]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, no qual X é dado por

$$X(t) := \int_0^t B(1) dB(t),$$

em que $B := \{B(t) : t \in [0, 1]\}$ é um movimento Browniano definido no mesmo espaço. Esperamos que o resultado desta integral seja $X(t) = B(1)B(t)$, contudo $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(1)B(t)] = \min\{1, t\} = t$, que não é uma constante, logo X não é um martingale. Isso ocorre, pois $B(1)$ não é adaptado a filtragem, i.e., $B(1)$ não é \mathcal{F}_t -mensurável, com $t \in [0, 1)$. Assim, se quisermos definir a integral estocástica $\int_a^b f(t, \omega) dB(t, \omega)$ de forma que $\int_a^b f(t, \omega) dB(t, \omega)$ seja um martingale para $a \leq t \leq b$ precisamos exigir que o processo f seja adaptado à filtragem \mathcal{F}_t .

3.3.4.1 Construção da integral de Itô

Nesta seção, damos sentido à integral

$$\int_a^b f(t) dB(t),$$

em que $f := \{f(t) : t \in [a, b]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ são respectivamente um processo estocástico e um movimento Browniano definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. De maneira similar à integral de Wiener, definimos, primeiramente, a integral em questão, considerando f um processo estocástico simples e, posteriormente, considerando f qualquer processo estocástico definido em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Seguindo a notação de Kuo (2006), $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ é o espaço de todos os processos estocásticos $\{f(t, \omega) : t \in [a, b], \omega \in \Omega\}$ em que

- $f(t, \omega)$ é adaptado a filtragem \mathbb{F} ;
- $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t)|^2] dt < \infty$.

Nesse sentido, consideramos um movimento Browniano $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adaptado à filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [a, b]\}$, em que

- $B(t)$ é \mathcal{F}_t -mensurável, para $t \in [a, b]$;
- Para $a \leq s < t \leq b$, $B(t) - B(s)$ é independente de \mathcal{F}_s .

3.3.4.1.1 Integral de Itô para processos simples

Para definir a integral em relação ao movimento Browniano é natural começarmos com os processos simples de $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Um processo estocástico $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dito simples em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ quando existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo real $[a, b]$ tal que

$$f(t, \omega) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

em que ξ_{i-1} é uma variável aleatória $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mensurável e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}] < \infty$. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com as características fixadas, podemos definir a seguinte soma de Riemann

$$I(f) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Lembremos que há uma dificuldade quando tentamos estender a definição da integral de Itô para processos mais gerais procedendo por aproximação conforme a integral de Riemann-Stieltjes. Esta dificuldade está relacionada com o fato das trajetórias do movimento Browniano serem de variação limitada assim como constatamos na Equação (3.3), na qual estamos utilizando $\tau_i = t_{i-1}$ para a obtenção de uma integral que seja um martingale, a luz do que ocorre no caso da integral de Wiener.

Lema 2 (Propriedades da integral de Itô para processos simples). Sejam $f := \{f(t), t \in [a, b]\}$ e $g := \{g(t), t \in [a, b]\}$ processos estocásticos simples definidos em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e dados por

$$f(t) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

$$g(t) := \sum_{i=1}^n \phi_{i-1} 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t).$$

Considere $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido neste mesmo espaço de probabilidade com as características fixadas anteriormente e seja $I(h)$ a integral de Itô de

qualquer função simples $h \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, i.e.,

$$I(h) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

em que ξ_{i-1} é uma variável aleatória $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mensurável, $\forall i = 1, \dots, n$. Se α e β contantes reais, então

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t) dB(t) = \alpha \int_a^b f(t) dB(t) + \beta \int_a^b g(t) dB(t) \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b f(t) dB(t) \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\int_a^b f(t) dB(t) \right)^2 \right] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [f(t)^2] dt. \quad (3.6)$$

Demonstração. Para qualquer processo simples $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ denotamos por $I(f)$ a integral de Itô de f , i.e.,

$$I(f) := \int_a^b f(t) dB(t).$$

1. Assim, a Equação (3.4) diz que I é linear. De fato,

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=1}^n (\alpha \xi_{i-1} + \beta \phi_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n \beta \phi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) + \beta \sum_{i=1}^n \phi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \alpha I(f) + \beta I(g). \end{aligned}$$

2. Para $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, temos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \quad (3.7)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))]] \quad (3.8)$$

$$= 0, \quad (3.9)$$

A Equação (3.7) segue de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|Y]]$. Além disso, ξ_{i-1} é \mathcal{F}_t -mensurável e $(B(t_i) - B(t_{i-1}))$ é independente de \mathcal{F}_t , resultando na Equação (3.8). Por fim, a Equação (3.9) segue do item *ii*) da Definição 6. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Tomando o segundo momento de $I(f)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f)|^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))].\end{aligned}$$

Vamos avaliar o caso em que $i \neq j$. Sem perda de generalidade assumamos $i < j$, então, pelas propriedades do movimento Browniano e de esperança condicional, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] &= \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))]] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assumimos agora $i = j$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}^2] (t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f)|^2] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}^2] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\sum_{j=1}^n \xi_{j-1} 1_{[t_{j-1}, t_j)}(t) \right)^2 \right] \times (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)^2] (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)^2] dt,\end{aligned}$$

e concluímos a prova. □

3.3.4.1.2 Aproximação por processos simples

O lema seguinte mostra que o conjunto dos processos simples são densos em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Esse fato, juntamente com a isometria (3.6), nos permitirá estender a definição da integral de Itô para toda classe $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Lema 3. Seja $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então, existe uma sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}\}$ em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f_n(t)|^2] dt = 0.$$

Demonstração. Na prova, consideramos os processos estocásticos f semelhantes aos considerados nos casos anteriores, i.e., contínuos, processos estocásticos limitados e, por fim, processos pertencentes a $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. O terceiro caso é o mais geral e basta ele para provar o lema. Entretanto, decidimos seguir e apresentar a estratégia de [Kuo \(2006\)](#), provando, primeiramente, os casos especiais, por julgarmos mais didático.

Caso 1. Vamos provar para o caso em que a função $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)f(s)]$ é contínua em $(t, s) \in [a, b]^2$. Seja $\Delta_n = \{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e definimos a sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$, dado por

$$f_n(t, \omega) = f(t_{i-1}, \omega), \quad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Desta forma, $f_n(t)$ é adaptado a filtragem e, pela continuidade de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)f(s)]$, temos

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f(s)|^2] = 0$$

que pela definição dos elementos da sequência f_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f_n(t)|^2] = 0.$$

Usando a desigualdade $|a - b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ e o fato de que, se X e Y são variáveis aleatórias, $X \leq Y$ implica $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$, obtemos para todo $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f_n(t)|^2] &\leq 2(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t)|^2] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t)|^2]) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(s)|^2]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f_n(t)|^2]$ é majorado por $4 \sup_{a \leq s \leq b} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(s)|^2]$ e converge para 0 quando $n \rightarrow \infty$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (para mais detalhes, ver Teorema 1.4.49 de [Tao, 2011](#)),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - f_n(t)|^2] dt = \int_a^b 0 dt = 0,$$

concluindo o primeiro caso.

Caso 2. Vamos provar para um processo estocástico f limitado, i.e., $|f(t, \omega)| \leq M < \infty$ para qualquer $t \in [a, b]$ e $\omega \in \Omega$. Seja a sequência de funções contínuas e reais $\{\phi_n : n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}\}$, denominadas sucessões de núcleos de Dirac, tais que

- i) $\phi_n(t) = 0$, se $t \in (-\infty, \frac{1}{n}) \cup [0, \infty)$;
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) dt = 1$;
- iii) $\lim_n \rightarrow \infty \phi_n(t) = \delta(t)$, em que δ é a distribuição delta de Dirac.

Vamos definir a sequência $\{g_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$

$$g_n(t, \omega) = \int_0^t \phi_n(s-t) f(s, \omega) ds.$$

Como o f é limitado, logo $g_n(\cdot, \omega)$, que é uma integral do produto de uma função contínua e uma função limitada, também é contínua em t para todo $\omega \in \Omega$ e $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Além disso, g_n é limitado, pois

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \phi_n(s-t) f(s, \omega) ds \right| &\leq \int_0^t \phi_n(s-t) |f(s, \omega)| ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(s-t) |f(s, \omega)| ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(s-t) ds = M. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ e a integral que define em $g_n(t, \cdot)$ não envolve valores de $f(s, \cdot)$, para $s > t$, implicando que g_n é adaptado a filtragem. Então, $g_n \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Além disso, como $\int_0^{\infty} \phi_n(s-t) ds = 1$, então, podemos escrever que

$$\begin{aligned} f(t) - g_n(t) &= f(t) - \int_0^t \phi_n(s-t) f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_n(s-t) ds - \int_0^t \phi_n(s-t) f(s) ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(s-t) [f(t) - f(s)] ds. \end{aligned}$$

$\phi_n(s) ds$ é uma medida de probabilidade, logo, estamos lidando com uma esperança de $[f(t) - f(s)]$. Assim, podemos aplicar a desigualdade de Jensen

$$\begin{aligned} |f(t) - g_n(t)|^2 &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(s-t) [f(t) - f(s)] ds \right|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(s-t) [f(t) - f(s)]^2 ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) [f(t) - f(u+t)]^2 du. \end{aligned}$$

Tomando a integral de t e usando o teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt &\leq \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) [f(t) - f(u+t)]^2 du dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) \int_a^b [f(t) - f(u+t)]^2 dt du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) h(u) du, \end{aligned}$$

em que $h(u) = \int_a^b [f(t) - f(u+t)]^2 dt$. Por fim, como $\phi_n \rightarrow \delta$, para $n \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(u) h(u) du = h(0) = 0.$$

Logo, pela desigualdade, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 = 0$. Como $|g_n(t, \omega)| < M$, então $|f(t, \omega) - g_n(t, \omega)| < 2M$, implicando em

$$\int_a^b |f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2 dt = (b-a)4M^2.$$

Pela convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt \right] = 0,$$

provando que g_n converge para f em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Como $g_n(\cdot, \omega)$ é contínuo em t para todo ω e n , $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g_n(t)g_n(s)]$ é contínuo em $(t, s) \in [a, b]^2$. Tomamos uma sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ semelhante ao caso 1 e concluímos a prova.

Caso 3. Assumimos agora $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Definimos

$$g_n(t, \omega) = \begin{cases} f(t, \omega), & \text{se } |f(t, \omega)| \leq n; \\ n, & \text{se } |f(t, \omega)| > n \end{cases}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, \omega) = f(t, \omega)$ e $g_n(t, \omega) = f(t, \omega)$, podemos usar o teorema da convergência dominada de Lebesgue para $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t) - g_n(t)|^2] dt = 0.$$

Como $g_n(t, \omega)$ é limitado, escolhemos um processo estocástico simples do 2º caso tomamos $n \rightarrow \infty$ e concluímos a prova do lema.

□

3.3.4.1.3 Integral de Itô para processos mais gerais

Agora, estamos aptos a definir a integral de Itô para toda classe $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ e $f := \{f(t) : t \in [a, b]\}$, respectivamente, um movimento Browniano e um processo estocástico definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Pelo Lema 3, existe uma sequência $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ de processos estocásticos simples e adaptados a filtragem, também definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tais que convergem em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ para f .

Temos uma outra sequência $\{I(f_n) : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, em que cada valor de n é dado por

$$I(f_n) := \int_a^b f_n(t) dB(t),$$

definido no passo (i). Temos então do Lema 2 que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f_n) - I(f_m)|^2] dt = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t) - f_m(t)|^2] dt = 0,$$

provando que $I(f_n)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então, $I(f_n) \rightarrow I(f)$ em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, portanto precisamos avaliar se $I(f)$ é bem definido. A verificação é semelhante a da integral de Wiener. Dada as sequências processos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ e $\{g_m : m \in \{1, 2, \dots\}\}$ definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tais que $f_n \rightarrow f$ e $g_m \rightarrow f$ em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f_n) - I(g_m)|^2] &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t) - g_m(t)|^2] dt \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|(f_n(t) - f(t)) - (g_m(t) - f(t))|^2] dt \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|(f_n(t) - f(t)) - (g_m(t) - f(t))|^2] dt \\ &\leq 2 \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t) - f(t)|^2] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|g_m(t) - f(t)|^2]] dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que $I(f)$ está bem definido.

Definição 13 (Integral de Itô). Seja o processo estocástico $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e a sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O limite dado anteriormente, i.e.,

$$I(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \text{ em } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

é chamado de **integral de Itô** na qual denotamos por

$$I(f) := \int_a^b f(t) dB(t).$$

Como consequência direta da Definição 13 e do Lema 2, temos

Teorema 6. Seja um processo estocástico $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então a integral de Itô $I(f)$ é uma variável aleatória com $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)] = 0$ e

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f)|^2] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t)|^2] dt.$$

Demonstração. Do Lema 3, existe uma sequência $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$ de processos simples que converge em $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ para f . O Lema 2, por sua vez, nos diz que $I(f_n)$ é uma variável aleatória com $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f_n)] = 0$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f_n)|^2] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t)|^2]$. Sabemos, por fim, que $I(f_n)$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $I(f)$, logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f)|^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I(f_n)|^2] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f_n(t)|^2] dt \\ &= \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t)|^2] dt. \end{aligned}$$

Concluimos a prova utilizando o fato de que a convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ implica em convergência em $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, logo $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f_n)] = 0$. \square

Semelhante a integral de Wiener, a integral de Itô é uma isometria, i.e., o mapeamento $I : L^2_{ad}([a, b] \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ preserva o produto interno. Isso pode ser visto no seguinte corolário:

Corolário 2. Seja $g, f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ processos estocásticos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seja I a integral de Itô, dada por $I(f) := \int_a^b f(t) dB(t)$, então

$$\langle I(f), I(g) \rangle = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)I(g)] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)g(t)] dt.$$

Demonstração. Utilizando a linearidade da integral de Itô I e das demais integrais envolvidas, e seguindo os passos da demonstração do Corolário 1, concluimos a demonstração. \square

3.3.4.2 Exemplos de integral de Itô

A seguir mostramos alguns exemplos da aplicação da integral de Itô. Em geral, estamos interessados em mostrar que os processos são martingales, ou que os resultados são os mesmos que obtivemos na motivação no início da seção, porém, usando os casos do Lema 3.

Exemplo 19 (Exemplo 4.4.1 de Kuo, 2006). Seja $f := B$, em que $B := \{B(t), t \in [a, b]\}$ é um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vamos retomar ao Exercício 15 e ao resultado que obtido anteriormente para o que chamamos de L_n , com $n \rightarrow \infty$.

Nosso interesse era obter uma integral que fosse um martingale e vimos que a melhor opção para a integral é a seguinte integral seria

$$I(f) = \int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2} [B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)].$$

Vamos verificar que esse também é o valor obtido ao aplicarmos a definição da integral de Itô. É fácil ver que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] = \min\{t, s\}$ é contínuo, para $t, s \in [0, \infty)$, pois para $t \leq s$ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] = t$ é contínuo e para $t > s$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] = s$ que também é contínuo. Então, tomando o processo estocástico simples f_n como dado por $f_n(t, \omega) = B(t_{i-1}, \omega)$, com $t_{i-1} < t \leq t_i$ podemos definir a integral de Itô como

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_n(t)(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_n(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n, \end{aligned}$$

concluindo assim o desejado. O interessante é que ambas as representações seguem a mesma distribuição. Pela Definição 6, $I(f)$ segue uma distribuição com média 0 e variância $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^2] dt = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Analogamente,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{1}{2} (B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)) \right] = \frac{b-a+a-b}{2} = 0$$

e, também,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{1}{4} (B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a))^2 \right] &= \\ \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [B(b)^4 + B(a)^4 - 2B(b)^2B(a)^2 - 2(b-a)(B(b)^2 - B(a)^2) + (b-a)^2]}{4}. \end{aligned}$$

Vamos trabalhar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^2B(s)^2]$, pois os demais valores esperados são constantes ou vindas da Proposição 6. Adotando, sem perda de generalidade, $a \leq s < t \leq b$ e usando o item *ii*) e *iii*) da Definição 6 e os momentos do movimento Browniano obtidos na Proposição 6, podemos ver que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^2B(s)^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[((B(t) - B(s)) + B(s))^2B(s)^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2]B(s)^2 \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^2(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)^3(B(t) - B(s)) + B(s)^4] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^2]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^4] + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^3]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(s)^4] \\ &= (t-s)s + (s)^2 \frac{4!}{2!2^2} \\ &= ts - s^2 + 3s^2 \\ &= st + 2s^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{1}{4} (B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)^2)^2 \right] &= \frac{3b^2 + 3a^2 - 2ab - 4a^2 - 2(b-a)(b-a) + (b-a)^2}{4} \\ &= \frac{3b^2 + 3a^2 - 2ab - 4a^2 - (b-a)^2}{4} \\ &= \frac{2b^2 + 2a^2 - 4a^2}{4} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2},\end{aligned}$$

obtendo o mesmo resultado obtido pela integral de Itô.

Exemplo 20 (Exemplo 4.4.2 de [Kuo, 2006](#)). Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vamos provar que, para $f(t, \omega) := B(t, \omega)^2$, temos

$$I(f) = \int_a^b B(t)^2 dB(t) = \frac{1}{3}(B(b)^3 - B(a)^3) - \int_a^b B(t) dt, \mathbb{P} - q.c.$$

em que $\int_a^b B(t, \omega) dt$ é a integral de Riemann para quase todo $\omega \in \Omega$ (provado no Teorema 4).

Como vimos no Exemplo 19, para $a \leq s < t \leq b$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)B(s)] = st + 2s^2$ é uma função contínua. Logo, podemos usar o primeiro caso da prova do Lema 3, ou seja, $f_n(t, \omega) = B(t_{i-1}, \omega)^2$, com $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Então,

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(t_{i-1}, \omega)^2 (B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)).$$

De modo análogo ao que foi feito na Seção 3.3.2, definimos

$$R_n := \sum_{i=1}^n B(t_i)^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

$$L_n := \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Tomamos,

$$\begin{aligned}R_n - 2L_n &= \sum_{i=1}^n B(t_i)^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})) - 2 \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n [B(t_i)^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})) - 2B(t_{i-1})^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))] \\ &= \sum_{i=1}^n (B(t_i)^2 - 2B(t_{i-1})^2) (B(t_i) - B(t_{i-1})),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_n + L_n &= \sum_{i=1}^n B(t_i)^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})^2 (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n (B(t_i)^2 + B(t_{i-1})^2) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n (B(t_i)^3 - B(t_{i-1})^3) - \sum_{i=1}^n (B(t_i)B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
&= B(b)^3 - B(a)^3 - \sum_{i=1}^n (B(t_i)B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1})).
\end{aligned}$$

Por fim, com algumas manipulações algébricas obtemos

$$3L_n = B(b)^3 - B(a)^3 - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^3 - 3 \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2.$$

Vamos provar a convergência em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ analisando em duas partes:

i) vamos avaliar a convergência de $\sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^3$. Usando a Proposição 6, vemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^6] = 15(t - s)^3$, para $t > s$, e pela independência do movimento Browniano, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^3 \right|^2 \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[|B(t_i) - B(t_{i-1})|^6 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n 15(t_i - t_{i-1})^3 \\
&\leq \sum_{i=1}^n 15 \|\Delta_n\|^2 (t_i - t_{i-1}) \\
&= \leq 15 \|\Delta_n\|^2 (b - a),
\end{aligned}$$

em que $\|\Delta_n\| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \geq (t_j - t_{j-1}), \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Logo, tomando $n \rightarrow \infty$ é fácil ver que $\sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^3$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para 0.

ii) vamos analisar $\sum_{i=1}^n B(t_{i-1}, \omega)(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2$. Usando os argumentos da prova da Proposição 7, porém comparando com $\sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$. Então,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right|^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B(t_{i-1})^2 |(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})|^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n 2t_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 \\
&\leq 2b \|\Delta_n\| (b - a).
\end{aligned}$$

Então, tomando $n \rightarrow \infty$, vemos que $\sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $\int_a^b B(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$. Logo, L_n converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $\frac{1}{3}(B(b)^3 - B(a)^3) - \int_a^b B(t) dt$, então existe um subsequência de Ω , tal que $L_n \rightarrow \frac{1}{3}(B(b)^3 - B(a)^3) - \int_a^b B(t) dt$ $\mathbb{P} - q.c.$, concluindo o que queríamos. Vale lembrar que em ambos os casos $I(f)$ segue uma distribuição de média 0 e variância $b^3 - a^3$

Exemplo 21 (Exemplo 4.4.3 de Kuo, 2006). Usando os resultados obtidos no Exemplo 20, vamos mostrar que essa integral também é um martingale como L_n nos Exemplos 19 e 15. Seja $M := \{M(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $a = 0$. Definimos M como

$$M(t) := \int_0^t B(u)^2 dB(u) = \frac{B(t)^3}{3} - \int_0^t B(u) du.$$

Vamos analisar primeiramente $B(t)^3$. Então, usando as condições fixadas ao movimento Browniano no começo da seção e da propriedades de esperança condicional, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t)^3 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s) + B(s))^3 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^3 + 3B(s)(B(t) - B(s))^2 + 3B(s)^2(B(t) - B(s)) + B(s)^3 | \mathcal{F}_s] \\ &= 3B(s)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t) - B(s))^2] + B(s)^3 \\ &= 3B(s)(t - s) + B(s)^3, \end{aligned}$$

em que \mathcal{F}_s é uma σ -álgebra contida na filtragem. Analisando $\int_0^t B(u) du$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^t B(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^s B(u) du + \int_s^t B(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \int_0^s B(u) du + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t B(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \int_0^s B(u) du + \int_s^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(u) | \mathcal{F}_s] du \\ &= \int_0^s B(u) du + \int_s^t B(s) du \\ &= \int_0^s B(u) du + (t - s)B(s). \end{aligned}$$

Por fim, podemos provar que M é um martingale com respeito a \mathcal{F}_s ,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t) | \mathcal{F}_s] = \frac{B(s)^3}{3} - \int_0^s B(u) du = M(s).$$

3.3.5 Integral indefinida de Itô

Como vimos no Exemplo 21, a integral de Itô,

$$\int_0^t B(u)^2 dB(u)$$

é um processo martingale. Agora, vamos mostrar para o caso mais geral, em que a integral de Itô de qualquer processo f é um processo estocástico martingale. Para isso, vamos definir a integral de Itô como sendo um processo estocástico. Desde que $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, segue que

$$\int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(s)|^2] ds \leq \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(s)|^2] ds < \infty.$$

Logo, $f \in L_{ad}^2([a, t] \times \Omega)$, então a integral estocástica de Itô pode ser aplicada. Seja $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que

$$X(t) := \int_a^t f(u) dB(u). \quad (3.10)$$

Então, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)^2] = \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(u)^2] du < \infty$ e, pela desigualdade de Cauchy - Schwarz, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|] \leq \sqrt{|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)^2]|} < \infty$. Como para cada $t \in [a, b]$, $X(t)$ é uma variável aleatória integrável, podemos calcular a esperança condicional em respeito a uma σ -álgebra. Como fixamos no início da seção, essa σ -álgebra será, em geral, \mathcal{F}_t , que é um elemento da filtragem \mathbb{F} .

Teorema 7 (Propriedade martingale da integral de Itô). Seja $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Seja $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que X é dado pela Equação (3.10). Então, X é um martingale em respeito a filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [a, b]\}$.

Demonstração. Como $X(t)$ é função de $f(t)$ e $B(t)$, que por hipótese, são \mathcal{F}_t mensuráveis, então $X(t)$ é \mathcal{F}_t mensurável. Usando Cauchy-Schwarz, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|] &\leq \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)^2]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\int_a^t f(u) dB(u) \right)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\left(\int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(u)^2] du \right)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

satisfazendo a segunda condição de um processo martingale. Agora, precisamos mostrar que para $a \leq s < t \leq b$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \quad \mathbb{P} - q.c.$$

Consequimos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^s f(u) dB(u) + \int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \int_a^s f(u) dB(u) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= X(s) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Basta provar que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right]$ converge quase certamente para 0. Semelhante a prova da integral de Itô, suponha o processo estocástico simples $f(u, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(u)$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $\xi_{i-1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e é $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mensurável. Como visto anteriormente, definimos sua integral da seguinte forma

$$\int_s^t f(u) dB(u) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\cdot) (B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Tomando qualquer $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) \middle| \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \middle| \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi_{i-1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))] \middle| \mathcal{F}_s] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_s^t f(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0$. Assuma agora $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ e tome uma sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(u) - f_n(u)|^2] du.$$

Vamos definir o seguinte processo estocástico

$$X_n(t) := \int_a^t f_n(u) dB(u),$$

que provamos anteriormente ser um martingale. Então, para $a \leq s < t \leq b$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X(s) \middle| \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X(t) - X_n(t)) + (X_n(t) - X_n(s)) - (X(s) - X_n(s)) \middle| \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X(t) - X_n(t)) \middle| \mathcal{F}_s] + X_n(s) - X_n(s) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X(s) - X_n(s)) \middle| \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X(t) - X_n(t)) \middle| \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(X(s) - X_n(s)) \middle| \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Jensen e o Teorema 6, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X_n(t) \middle| \mathcal{F}_s]|^2] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X_n(t) \middle| \mathcal{F}_s]|^2] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t) - X_n(t)|^2] \\ &= \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(u) - f_n(u)|^2] du \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(u) - f(u)|^2] du. \end{aligned}$$

Logo, para $n \rightarrow \infty$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X_n(t) \middle| \mathcal{F}_s]$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para 0. Então, tomando uma subsequência se necessário, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X_n(t) \middle| \mathcal{F}_s]$ converge quase certamente para 0, concluindo que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t) - X(s) \middle| \mathcal{F}_s]$ converge quase certamente para 0, que é o resultado desejado. \square

Podemos falar sobre a continuidade do processo X . Em geral, no cálculo clássico, estuda-se a continuidade das integrais de Riemann, que por sua vez, é intuitiva e cuja demonstração não é difícil de ser obtida (para mais detalhes ver Teorema 7.5.1 [Abbott, 2001](#)). As integrais de Itô e Wiener não estão necessariamente definidas para todo $\omega \in \Omega$ fixo como as integrais determinísticas, então devemos tratá-las de maneira diferente para provar sua continuidade.

Teorema 8. Seja $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Seja $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que X é dado pela Equação (3.10). Então, X possui quase certamente trajetórias contínuas.

Demonstração. Seja $f(u, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(u)$ um processo estocástico simples definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, $\xi_{i-1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e é $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mensurável. Fixado $\omega \in \Omega$, $X(t, \omega)$ é dado por

$$X(t, \omega) = \sum_{n=1}^{k-1} \xi_{i-1}(\omega)(B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)) + \xi_{i-1}(\omega)(B(t, \omega) - B(t_{n-1}, \omega)),$$

em que $t_{k-1} \leq t \leq t_k$. Como $B(\cdot, \omega)$ possui quase certamente trajetórias contínuas, segundo o item iv) da Definição 6, então, $X(\cdot, \omega)$ possui quase certamente trajetórias contínuas em $[a, b]$.

Considere agora uma sequência de processos estocásticos simples $\{f_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, tais que $f_n \in L^2([a, b] \times \Omega)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(u) - f_n(u)|^2] du = 0.$$

Tomando uma sequência, tal que

$$\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(u) - f_n(u)|^2] du \leq \frac{1}{n^6}.$$

Definimos a sequência $\{X_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, que para cada $n \leq 1$

$$X_n(t) := \int_a^t f_n(u) dB(u).$$

Pelo Teorema 7, X e X_n são martingales, conseqüentemente $X - X_n$ também. Logo, podemos usar a desigualdade de Doob para (sub)martingales contínuos (ver Anexo B, Seção B.2). Então,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} |X(b) - X_n(b)|.$$

Analisando $n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} |X(b) - X_n(b)|$, podemos usar a desigualdade de Cauchy - Schwarz e o Teorema 6 para obter

$$\begin{aligned} n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} |X(b) - X_n(b)| &\leq n \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|X(b) - X_n(b)|^2] \right)^{1/2} \\ &= n \left(\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|f(u) - f_n(u)|^2] du \right)^{1/2} \\ &\leq n \left(\frac{1}{n^6} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{1}{n^2}$. Usando o lema de Borel-Cantelli (ver por exemplo o Lema 1.5 de Magalhães, 2006), se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

então

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| \geq \frac{1}{n} \text{ infinitas vezes} \right\} = 0,$$

ou,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| \geq \frac{1}{n} \text{ finitas vezes} \right\} = 1.$$

Outra maneira de enxergar esse resultado é que existe um evento Ω_0 , tal que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ que para cada $\omega \in \Omega_0$ existe um inteiro $N(\omega)$, que

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X(t) - X_n(t)| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq N(\omega).$$

Então, para $\omega \in \Omega_0$, $X_n(\cdot, \omega)$ converge uniformemente para $X(\cdot, \omega)$ em $[a, b]$. Como provamos anteriormente, para $\omega \in \Omega_n$, em que $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$, $X_n(\cdot, \omega)$ possui trajetórias contínuas quase certamente. Logo, tomando $\tilde{\Omega} := \bigcap_{i=0}^{\infty} \Omega_i$, vemos que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$. Além disso, para $\omega \in \tilde{\Omega}$, a sequência $X_n(\cdot, \omega)$ é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para $X(\cdot, \omega)$ em $[a, b]$. Então, $X(\cdot, \omega)$ é contínua, implicando que para $\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ possui trajetórias quase certamente contínuas. \square

3.3.6 Uma possível extensão da definição da integral de Itô

Os resultados anteriores podem ser adaptados para uma classe mais ampla de processos estocásticos, na qual, denominamos $\mathfrak{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$. As funções $f \in \mathfrak{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ são adaptadas a filtragem e

$$\int_a^b f(t)^2 dt < \infty, \quad \mathbb{P} - q.c.$$

Para ver que $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ também é $f \in \mathfrak{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$, usamos o fato que

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)^2] dt &= \int_a^b \int_{\Omega} f(t, \omega)^2 d\mathbb{P}(\omega) dt \\ &= \int_a^b \int_{\mathbb{R}} x(t)^2 g_X(x) dx dt, \end{aligned}$$

em que, g_X é a função de distribuição de probabilidade de X . Então, pelo teorema de Fubini $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(t)^2] dt = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b f(t)^2 dt \right] < \infty$. Para que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b f(t)^2 dt \right] < \infty$ seja verdade, não pode ocorrer $\mathbb{P} \left(\int_a^b f(t)^2 dt = \infty \right) > 0$. Logo, temos $\mathbb{P} \left(\int_a^b f(t)^2 dt < \infty \right) = 1$, mostrando o resultado desejado. O contrário não é verdade, basta tomar $f(t, \omega) = e^{B(t, \omega)^2}$, como o Exemplo 5.1.2 de Kuo (2006).

Para mais detalhes sobre essa generalização, podemos ver no Capítulo 5 de [Kuo \(2006\)](#) e Capítulo 3.3 de [Øksendal](#). Em geral, estamos interessados em $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, contudo é importante o conhecimento do(a) leitor(a) sobre essa extensão.

3.4 Fórmula de Itô

Análogo a continuidade, podemos avaliar outras propriedades semelhantes ao cálculo clássico, como a regra da cadeia ou o teorema fundamental do cálculo. Em notação diferencial, queremos ver se

$$\frac{df(B(t))}{dt} = \frac{df(B(t))}{dB(t)} \frac{dB(t)}{dt} = f'(B(t))B'(t), \quad (3.11)$$

ou, se

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(u))B'(u) du. \quad (3.12)$$

Ao tentar dar sentido a esse problema nos deparamos com o fato de usarmos movimentos Brownianos, que não são diferenciáveis (ver discussão no Capítulo 7 de [Kuo, 2006](#)). Com isto, [Itô \(1944\)](#) propôs sua solução para o problema, com o seguinte resultado

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(u)) dB(u) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(u)) du. \quad (3.13)$$

Em que B é um movimento Browniano e f uma função com primeira e segunda derivadas contínuas. Vamos desenvolver mais profundamente a prova e generalização deste resultado.

Vamos motivar a construção da Equação (3.13), a partir da regra da cadeia. Então, a escrita em forma de diferencial da Equação (3.11) não faz sentido. Porém, quando tratamos $\frac{dB(t)}{dt} dt = dB(t)$ na integral da Equação (3.12), recaímos sobre uma integral de Itô. Porém, a Equação (3.12) é verdade para todo f diferenciável?

Para responder essa pergunta, assuma um movimento Browniano $B := \{B(t), t \in [a, b]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e seja f uma função diferenciável. Neste primeiro momento, precisamos que $f' \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, pelas condições impostas sobre a integral na seção anterior. Tomando $f(t) := t^2$, da Equação (3.12)

$$B(t)^2 - B(a)^2 = 2 \int_a^t B(t) dB(t),$$

que contradiz o que provamos no Exemplo 19. Neste sentido, precisamos propor uma formula que respeite os resultados obtidos nas seções anteriores. Considere então f , uma função pertencente a classe C^2 , i.e., classe das funções com primeira e segunda derivada contínuas. Assuma a partição $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = t\}$ do intervalo $[a, t]$. Então,

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^n [f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1}))].$$

Usando o polinômio de Taylor

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2, \text{ em que } \lambda \in (0, 1),$$

obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} f(B(t)) - f(B(a)) &= \sum_{i=1}^n [f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1}))] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} f''(B(t_{i-1}) + \lambda_i(B(t_i) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \right], \end{aligned}$$

em que $\lambda_i \in (0, 1)$. Como $f'(B(s, \omega))$ é contínuo em $s \in [a, t]$, segue que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f'(B(s))f'(B(u))]$ é contínuo para $(s, u) \in [a, t]^2$. Por fim, assumindo $f_n(s, \omega) = f'(B(t_{i-1}, \omega))$, para $t_{i-1} < s < t_i$, obtemos pelo Lema 3 que

$$\sum_{i=1}^n [f'(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1}))] \rightarrow \int_a^t f'(B(s)) dB(s), \text{ em } L_{ad}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

em um primeiro momento, parece razoável assumir que

$$\sum_{i=1}^n [f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t_i) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] \rightarrow \int_a^t f''(B(s)) ds, \text{ em } L_{ad}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

por argumentos semelhantes aos utilizados na Proposição 7, idealizando, dessa forma, uma fórmula para a regra da cadeia. Essa parte que se diferencia da regra da cadeia clássica é devido a variação do movimento Browniano não ser 0. Formalizamos o resultado anterior nos lemas a seguir, a luz dos resultados de Kuo (2006), posteriormente, esses resultados são usados para provar a fórmula de Itô.

Lema 4. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para $n \in \{1, 2, \dots\}$, seja $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, t]$ e $\lambda_i \in (0, 1)$. Então, existe uma subsequência em que

$$\sum_{i=1}^n (g(B(t_{i-1}) + \lambda_i(B(t_i) - B(t_{i-1}))) - g(B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 = 0, \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

com $\|\Delta_n\| := \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$.

Demonstração. Assuma

$$X_n = \sum_{i=1}^n (g(B(t_{i-1}) + \lambda_i(B(t_i) - B(t_{i-1}))) - g(B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2$$

e

$$\xi_n = \max_{1 \leq i \leq n} |g(B(t_{i-1}) + \lambda_i(B(t_i) - B(t_{i-1}))) - g(B(t_{i-1}))|.$$

Então,

$$|X_n| \leq \xi_n \sum_{i=1}^n ((B(t_i) - B(t_{i-1}))).$$

Como g e B são quase certamente contínuos, então quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, ξ_n converge quase certamente para 0. Da Proposição 7, sabemos que existe uma subsequência de $\sum_{i=1}^n ((B(t_i) - B(t_{i-1})))$ que converge quase certamente para $(t - a)$. Logo, existe uma subsequência de $\xi_n \sum_{i=1}^n ((B(t_i) - B(t_{i-1})))$ que converge quase certamente para 0, o que implica na existência de uma subsequência de X_n que converge quase certamente para 0. \square

Lema 5. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para $n \in \{1, 2, \dots\}$, seja $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, t]$ e $\lambda_i \in (0, 1)$. Então, existe uma subsequência em que

$$\sum_{i=1}^n g(B(t_{i-1})) ((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})) = 0, \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

com $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$.

Demonstração. Definimos os eventos

$$A_{i-1}^{(L)} := \{|B(t_j)| < L, \text{ para todos } j < i - 1\}, \text{ em que } L > 0 \text{ e } i \in [1, n].$$

Adotamos

$$S_n := \sum_{i=1}^n g(B(t_{i-1})) ((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})),$$

e

$$\begin{aligned} S_{n,L} &:= \sum_{i=1}^n g(B(t_{i-1})) 1_{A_{i-1}^{(L)}} ((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n g(B(t_{i-1})) 1_{A_{i-1}^{(L)}} X_i \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i, \end{aligned}$$

em que, $X_i = ((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1}))$ e $Y_i = g(B(t_{i-1})) 1_{A_{i-1}^{(L)}} X_i$. Seja $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(t) : t \leq s\}$. Assumindo, sem perda de generalidade $i < j$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i Y_j] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i Y_j | \mathcal{F}_{j-1}]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_j | \mathcal{F}_{j-1}]] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i g(B(t_{j-1})) 1_{A_{j-1}^{(L)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_j]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_j] = (t_j - t_{j-1}) - (t_j - t_{j-1}) = 0$. Da definição de $A_{i-1}^{(L)}$, podemos tomar a seguinte desigualdade

$$Y_i^2 \leq \max_{|x| < L} (|g(x)|^2) X_i^2,$$

que por sua vez, permanece ao tomar o valor esperado

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_i^2] \leq 2(t_i - t_{i-1}) \max_{|x| < L} (|g(x)|^2),$$

em que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i^2] = 2(t_i - t_{i-1})$, como visto na prova da Proposição 7. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_{n,L}^2] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i^2] \\ &\leq 2 \max_{|x| < L} (|g(x)|^2) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2 \|\Delta_n\| (t - a) \max_{|x| < L} (|g(x)|^2) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } \|\Delta_n\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Provamos, então, que $S_{n,L}^2$ converge em $L_{ad}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para 0 quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Consequentemente, provamos que converge em probabilidade também. Da definição de $A_{i-1}^{(L)}$, vemos que é uma sequência monótona não crescente, i.e., $A_i^{(L)} \subset A_{i-1}^{(L)}$. Além disso, temos $A_{i-1}^{(L)} \subset \{S_n = S_{n,L}\}$, então

$$\{S_n \neq S_{n,L}\} \subset (A_{i-1}^{(L)})^c \subset \left\{ \max_{a \leq s \leq t} |B(s)| > L \right\},$$

logo,

$$\mathbb{P}(S_n \neq S_{n,L}) \leq \mathbb{P} \left\{ \max_{a \leq s \leq t} |B(s)| > L \right\}.$$

Como $|\cdot|$ é uma função convexa e $B(t)$ um martingale, pela desigualdade de Jensen, $|B(t)|$ é um submartingale. Logo, usando a desigualdade de submartingales de Doob (para mais detalhes da desigualdade de Doob, ver Seção B.2 do Anexo B), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \max_{a \leq s \leq t} |B(s)| > L \right\} &\leq \frac{1}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|B(t)|] \\ &= \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2t}{\pi}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbb{P}(S_n \neq S_{n,L}) \leq \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2t}{\pi}},$$

para qualquer $n \geq 1$. Então, para $\varepsilon > 0$, temos a seguinte relação de eventos

$$\{|S_n| > \varepsilon\} \subset \{|S_{n,L}| > \varepsilon\} \cup \{S_n \neq S_{n,L}\},$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|S_{n,L}| > \varepsilon) + \mathbb{P}(S_n \neq S_{n,L}) \\ &\leq \mathbb{P}(|S_{n,L}| > \varepsilon) + \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2t}{\pi}}. \end{aligned}$$

Por fim, tomamos um L suficientemente grande para que $\frac{1}{L} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, provamos inicialmente que $S_{n,L}$ converge em probabilidade para 0, quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, para qualquer

L. Logo, existe um $n_0 \geq 1$, tal que $\mathbb{P}(|S_{n,L}| > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$. Então, existe um $n_0 \geq 1$ tal que $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, provando a convergência em probabilidade de S_n para 0. Logo, concluímos que existe uma subsequência de S_n que converge quase certamente para 0. \square

Com isso, podemos enunciar formalmente a fórmula de Itô.

Teorema 9 (Fórmula de Itô). Seja f uma função de classe C^2 e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Temos então

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s)) ds,$$

em que a primeira integral é a integral de Itô e a segunda é integral de Riemann para os caminhos de $f''(B(t))$.

Demonstração. Partimos do resultado obtido na motivação. Neste, mostramos o resultado para a primeira integral, vamos mostrar agora para a segunda usando os lemas enunciados anteriormente. Com um pouco de manipulação algébrica, obtemos

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n [f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t_i) - B(t_{i-1}))) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] \\ &= \sum_{i=1}^n [f''(B(t_{i-1}) + \lambda(B(t_i) - B(t_{i-1}))) - f''(B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f''(B(t_{i-1})) [(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f''(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Tomando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, sabemos que as primeiras duas somatórias de T_n possuem uma subsequência que convergem quase certamente para 0, dos Lemas 4 e 5. A terceira somatória, e consequentemente T_n , possui uma subsequência que converge quase certamente para a integral de Riemann $\int_a^t f''(B(s)) ds$, concluindo a prova. \square

Vamos mostrar alguns exemplos que nos retornam resultados conhecidos.

Exemplo 22 (Exemplo 7.1.3 de Kuo, 2006). Assuma a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) := x^2$. f é de classe C^2 , então, temos o seguinte valor para fórmula de Itô

$$\begin{aligned} B(t)^2 - B(a)^2 &= 2 \int_a^t B(s) dB(s) + \int_a^t 1 ds \\ &= 2 \int_a^t B(s) dB(s) + (t - a). \end{aligned}$$

Tomando $t = b$ retornamos ao resultado do Exemplo 19. Tomando $a = 0$, temos

$$B(t)^2 = 2 \int_0^t B(s) dB(s) + t,$$

que pela desigualdade de Jensen, $B(t)^2$ é um submartingale. Além disso, sabemos pelo Teorema 7 que a integral de Itô é um martingale e t é um processo que chamamos de previsível e que satisfaz certas condições (para mais detalhes, ver Capítulo 6.4 de Kuo, 2006 e suas referências). Então, este resultado é a decomposição de submartigales de Doob-Meyer de $B^2(t)$ (ver Capítulo 6.4 de Kuo, 2006).

Exemplo 23. Tomamos agora $f(x) = x^3$, que também é de classe C^2 . A fórmula de Itô é dado por

$$B(t)^3 - B(a)^3 = 3 \int_a^t B(s)^2 dB(s) + 3 \int_a^t B(s) ds.$$

Tomando $t = b$ retornamos ao resultado do Exemplo 20. Tomando $a = 0$ retornamos ao processo martingale obtido no Exemplo 21.

Nos Exemplos 23 e 22, trabalhamos apenas com funções que dependem do movimento Browniano. Uma pergunta natural é: será que conseguimos estender o resultado anterior para uma função que dependa tanto do movimento Browniano, quanto do tempo? Se respondermos a essa pergunta, podemos calcular a formula de Itô para a função $f(t, x) = tx^2$. Ou ainda, será que conseguimos estender para funções que dependem de diferentes tipos de processos estocásticos? Assim, conseguimos trabalhar com uma classe mais ampla de processos estocásticos, não se restringindo apenas ao movimento Browniano.

Podemos responder essas perguntas generalizando o resultado anterior para um processo estocástico $\theta(X(t), t)$, em que $X(t)$ seja outro processos estocástico, no qual definimos a seguir:

Definição 14 (Processo de Itô). Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano e $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$, $g := \{g(t) : t \in [a, b]\}$ e $f := \{f(t) : t \in [a, b]\}$ processos estocásticos, todos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Um **processo de Itô** é um processo estocástico X adaptado a filtragem e dado por

$$X(t, \omega) := X(a, \omega) + \int_a^t f(s, \omega) dB(s) + \int_a^t g(s, \omega) ds,$$

em que f e g são adaptados a filtragem e satisfazem $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(t)|^2] dt < \infty$ e $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|g(t)|] dt < \infty$, ou simplesmente $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $g \in L_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Podemos escrever o processo de Itô usando a notação de diferenciais da seguinte forma,

$$dX(t) = f(t)dB(t) + g(t)dt.$$

Contudo, é importante lembrar que essa notação não tem sentido diferencial, pois o movimento Browniano não é diferenciável. Essa notação é interessante por ser simples, pois, a partir dela,

podemos retornar ao processo de Itô original e obter a forma de integral, que possui seu sentido, como descrito ao longo deste capítulo.

O caso geral para a formula de Itô é dada por:

Teorema 10. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano e $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo de Itô, definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha a função contínua $\theta(t, x)$ com derivadas $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2}$ contínuas. Então, $\theta(t, X(t))$ é um processo de Itô dado por

$$\begin{aligned} \theta(t, X(t)) &= \theta(t, X(a)) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial x} \theta(s, X(s)) f(s) dB(s) \\ &\quad + \int_a^t \left[\frac{\partial}{\partial t} \theta(s, X(s)) + \frac{\partial}{\partial x} \theta(s, X(s)) g(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(s, X(s)) f(s)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos dar o esboço da prova separando em 4 casos. A prova original pode ser vista em [Itô \(1951b\)](#).

Caso 1. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O movimento Browniano é um caso particular de um processo de Itô, em que $f(t, \omega) = 1$ e $g(t, \omega) = 0$, claramente, satisfazendo $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $g \in L_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Vamos provar os seguintes igualdades

$$B(t)^2 = B(a)^2 + 2 \int_a^t B(s) dB(s) + \int_a^t ds, \quad (3.14)$$

$$tB(t) = aB(a) + \int_a^t t dB(t) + \int_a^t B(t) dt. \quad (3.15)$$

Note que, em (3.14) $\theta(t, x) = x^2$ e em (3.15) $\theta(t, x) = tx$. A Equação (3.14) é provada utilizando o Teorema 9. Do resultado obtido no Teorema 4, mais especificamente, uma modificação dos limites de integração do Exercício 17, provamos a igualdade da Equação (3.15).

Caso 2. Vamos provar a regra do produto para um processo de Itô. Para simplificar a computação do resultado, vamos trabalhar com os diferenciais, mas enfatizamos que este, não possui significado sozinho. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano e $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ e $Z := \{Z(t) : t \in [a, b]\}$ processos de Itô, todos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Podemos escrever

$$\begin{cases} dX(t) = f_1(t)dB(t) + g_1(t)dt, \\ dZ(t) = f_2(t)dB(t) + g_2(t)dt, \end{cases}$$

em que $f_1, f_2 \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $g_1, g_2 \in L_{ad}([a, b] \times \Omega)$. A regra do produto é dada por

$$d(X(t)Z(t)) = Z(t)d(X(t)) + X(t)d(Z(t)) + dX(t)dZ(t). \quad (3.16)$$

Pode-se provar que $(dt)^2 = dB(t)dt = 0$ e que $(dB(t))^2 = dt$, logo $dX(t)dZ(t) = f_1(t)f_2(t)dt$ (ver Itô, 1951b). Então, precisamos mostrar que

$$X(t)Z(t) - X(a)Z(a) = \int_a^t Z(s)dX(s) + \int_a^t X(s)dZ(s) + \int_a^t f_1(s)f_2(s)ds.$$

Usando $dX(t)$ e $dZ(t)$ na equação acima, e com manipulações algébricas, chegamos em

$$X(t)Z(t) - X(a)Z(a) = \int_a^t (X(s)g_2(s) + Z(s)g_1(s) + f_1(s)f_2(s)) dt + \int_a^t (X(s)f_2(s) + Z(s)f_1(s)) dB(t). \quad (3.17)$$

Vamos considerar, sem perda de generalidade, $a = 0$. Além disso, suponha caso em que f_1, f_2, g_1 e g_2 são processos estocásticos constantes no tempo (ou simplesmente variáveis aleatórias), logo

$$\begin{cases} X(t) = X(0) + f_1B(t) + g_1t, \\ Z(t) = Z(0) + f_2B(t) + g_2t. \end{cases}$$

Substituindo no lado direito da Equação (3.17), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t (g_2X(0) + f_1g_2B(s) + g_1g_2s + g_1Z(0) + g_1f_2B(s) + g_1g_2s + f_1f_2) dt \\ & + \int_0^t (f_2X(0) + f_1f_2B(s) + g_1f_2s + f_1Z(0) + f_1f_2B(s) + f_1g_2s) dB(t) \\ & = X(0)(tg_2 + B(t)f_2) + Z(0)(tg_1 + B(t)f_1) + g_1g_2t^2 \\ & + (f_1g_2 + g_1f_2) \left[\int_0^t B(s) ds + \int_0^t s dB(s) \right] + 2f_1f_2 \int_0^t B(t)dB(t) + f_1f_2t. \end{aligned}$$

Do caso 1, sabemos que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t B(s) dB(s) &= B(t)^2 - \int_0^t ds, \\ \int_0^t t dB(t) + \int_0^t B(t) dt &= tB(t), \end{aligned}$$

Aplicando na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} & X(0)(tg_2 + B(t)f_2) + Z(0)(tg_1 + B(t)f_1) + g_1g_2t^2 \\ & + (f_1g_2 + g_1f_2)(tB(t)) + f_1f_2(B(t)^2 - \int_0^t ds) + f_1f_2t. \\ & = X(0)(tg_2 + B(t)f_2) + Z(0)(tg_1 + B(t)f_1) + g_1g_2t^2 \\ & + (f_1g_2 + g_1f_2)(tB(t)) + f_1f_2B(t)^2 \\ & = X(0)(Z(t) - Z(0)) + Z(0)(X(t) - X(0)) + (X(t) - X(0))(Z(t) - Z(0)) \\ & = Z(0)(X(t) - X(0)) + X(t)(Z(t) - Z(0)) \\ & = X(t)Z(t) - X(0)Z(0), \end{aligned}$$

logo, a igualdade é válida. A prova segue para o caso em que f_1, f_2, g_1 e g_2 são processos estocásticos simples. Isso é verdade, pois para cada sub intervalo os processos são constantes, logo, podemos usar o resultado anterior e, somando as integrais resultantes, retornamos a Equação (3.16). Por fim, podemos usar a aproximação por processos simples, provando o caso mais geral.

Caso 3. Vamos provar que a fórmula de Itô é válido para funções polinomiais. Primeiro, vamos avaliar $\theta(t, x) := x^m$. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano e $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo de Itô, dado pela Definição 14. Logo, a fórmula de Itô, segundo o Teorema 10, para $\theta(t, x) := x^m$ é dada por

$$d(X(t)^m) = mX(t)^{m-1}dX(t) + \frac{1}{2}m(m-1)X(t)^{m-2}f(t)^2dt, \quad (3.18)$$

em que $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x) = mx^{m-1}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x) = m(m-2)x^{m-2}$. Vamos provar por indução, por tanto, é fácil ver que

$$\begin{cases} (0) & 1, \\ (1) & dX(t) = f(t)dB(t) + g(t)dt, \\ (2) & dX(t)^2 = dX(t)X(t) = 2X(t)dX(t) + f(t)^2dt, \\ & \dots, \end{cases}$$

em que (2) é consequência da regra do produto do Caso 2. Assumindo que (3.18) é válido para $m-1$, temos

$$\begin{aligned} dX(t)^{m-1} &= (m-1)X(t)^{m-2}dX(t) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X(t)^{m-3}f(t)^2dt \\ &= \left((m-1)X(t)^{m-2}g(t) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X(t)^{m-3}f(t)^2 \right) dt \\ &\quad + (m-1)X(t)^{m-2}f(t)dB(t). \end{aligned}$$

Vamos usar a regra do produto para provar que $d(X(t)^m) = d(X(t)^{m-1}X(t))$, logo

$$\begin{aligned} dX(t)^m &= X(t)dX(t)^{m-1} + X(t)^{m-1}dX(t) + (m-1)X(t)^{m-2}f(t)^2dt \\ &= X(t) \left((m-1)X(t)^{m-2}dX(t) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X(t)^{m-3}f(t)^2dt \right) \\ &\quad + X(t)^{m-1}dX(t) + (m-1)X(t)^{m-2}f(t)^2dt \\ &= mX(t)^{m-1}dX(t) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X(t)^{m-2}f(t)^2dt + (m-1)X(t)^{m-2}f(t)^2dt \\ &= mX(t)^{m-1}dX(t) + \frac{1}{2}m(m-1)X(t)^{m-2}f(t)^2dt. \end{aligned}$$

concluindo a prova da Equação (3.18). Vamos expandir para $\theta(t, x) := p(x)q(t)$, em que p e q são polinômios. Pela linearidade da integral de Itô, podemos adaptar a Equação (3.18) da seguinte maneira

$$dP(X(t)) = p'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}p''(X(t))f(t)^2dt,$$

em que X é um processo de Itô. q é um polinômio determinístico, então $q(t) = q(a) + \int_a^t q'(s)ds$, ou $dq = q'ds$. Usando a regra do produto obtido na Equação (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} dp(X(t))q(t) &= p(X(t))dq(t) + q(t)dp(X(t)) \\ &= p(X(t))q'(t)dt + q(t) \left(p'(X(a))dX(t) + \frac{1}{2}p''(X(t))f(t)^2dt \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\theta(t, X(t))dt + \frac{\partial}{\partial x}\theta(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, X(t))f(t)^2dt. \end{aligned}$$

Tomando o valor de $dX(t)$, retornamos a fórmula do Teorema 10. Por fim, utilizando a linearidade da integral de Itô, podemos concluir que a fórmula de Itô vale para $\theta(t, x) := \sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(t)$, em que p_i e q_i , para $i \in \{1, 2, \dots\}$, são polinômios. Logo, para funções polinomiais, a fórmula dada pelo Teorema 10 é válida.

Caso 4. Como θ é, por hipótese, contínuo, segundo a versão forte teorema de Weierstrass, existe uma sequência $\{\theta_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ de funções polinomiais, tais que

$$\theta_n \rightarrow \theta, \quad \frac{\partial \theta_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \theta_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

para um subconjunto $[a, b] \times \mathbb{R}$. Tomando uma sequência de funções polinomiais θ_n , do resultado obtido no caso 4, obtemos que

$$\begin{aligned} \theta_n(t, X(t)) &= \theta_n(t, X(a)) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial x}\theta_n(s, X(s))f(s) dB(s) \\ &\quad + \int_a^t \left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_n(s, X(s)) + \frac{\partial}{\partial x}\theta_n(s, X(s))g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta_n(s, X(s))f(s)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Logo, tomando o limite, concluímos a prova. \square

Na próxima seção, trabalhamos com algumas aplicação da fórmula de Itô.

3.4.1 Exemplos da fórmula de Itô

As aplicações da fórmula de Itô são feitas em diversas áreas do conhecimento, como física, matemática e economia. Nesse sentido, mostramos alguns exemplos de sua utilização.

Exemplo 24. Vamos reconstruir os Exemplos 22 e 23, utilizando a fórmula do Teorema 10. Podemos reescrever o movimento Browniano como um processo de Itô descrito na Definição 14

$$X(t, \omega) := B(t, \omega) = B(a, \omega) + \int_a^t dB(s, \omega),$$

em que $f(t, \omega) = 1$ e $g(t, \omega) = 0$. Também, é fácil ver que $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $g \in L_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Tomando $\theta^1(t, x) := x^2$, temos $\frac{\partial}{\partial t}\theta^1(t, x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta^1(t, x) = 2x$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta^1(t, x) = 2$. Usando a fórmula de Itô, $\theta^1(t, X(t))$ é dado por

$$B(t)^2 = B(a)^2 + 2 \int_a^t B(s) dB(s) + (t - a),$$

computando o resultado do Exemplo 22. Tomando $\theta^2(t, x) := x^3$, temos $\frac{\partial}{\partial t}\theta^2(t, x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta^2(t, x) = 3x^2$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta^2(t, x) = 6x$. Utilizando novamente a fórmula de Itô, $\theta^2(t, x(t))$ é dado por

$$B(t)^3 = B(a)^3 + 3 \int_a^t B(s)^2 dB(s) + 3 \int_a^t B(s) ds.$$

Subtraindo em ambos os lados $B(t)^3$, chegamos no resultado do Exemplo 23.

Exemplo 25 (Equação de Langevin). Assuma um processo de Itô $X := \{X(t) : t \in [0, b]\}$, dado por

$$dX(t) = \alpha dB(t) - \beta X(t) dt,$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, \infty)$ e $X(0) = x_0$ constante. Chamamos esta equação diferencial de equação de Langevin e $X(t)$ representa a velocidade de uma partícula que segue um movimento Browniano, que não é o mesmo da equação. É fácil ver que $f(t, \omega) = \alpha$ e $g(t, \omega) = -\beta X(t)$. Retornando à integral original, obtemos

$$X(t) = X(0) + \alpha B(t) - \beta \int_0^t X(s) ds,$$

que, de certa forma, pode-se achar a solução integrado em cada trajetória, o que seria inviável. Neste caso, podemos usar a fórmula de Itô para resolver este problema. Assumindo a função $\theta(t, x) := xe^{\beta t}$, em que $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) = \beta xe^{\beta t}$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(t, x) = e^{\beta t}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x) = 0$. Para simplificar, usamos a notação de diferencial. Usando o caso geral da fórmula de Itô, obtemos

$$\begin{aligned} dX(t)e^{\beta t} &= \frac{\partial}{\partial x}\theta(t, X(t))f(t) dB(t) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, X(t))dt + \frac{\partial}{\partial x}\theta(t, X(t))g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, X(t))f(t)^2 \right] dt \\ &= \alpha e^{\beta t} dB(t) + \left[\beta X(t)e^{\beta t} - \beta X(t)e^{\beta t} \right] ds \\ &= \alpha e^{\beta t} dB(t). \end{aligned}$$

Então, a forma de integral é dada por

$$X(t)e^{\beta t} = X(0) + \alpha \int_0^t e^{\beta s} dB(s).$$

Por fim, obtemos o seguinte processo

$$X(t) = e^{-\beta t}X(0) + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB(s),$$

no qual é denominado processo de Ornstein-Uhlenbeck. Essa equação foi resolvida como uma equação diferencial ordinal (EDO) (ver por exemplo Ornstein, 1919 e Uhlenbeck e Ornstein, 1930). Doob (1942) formalizou o resultado utilizando a integral de Wiener. Parecido com o método de variação de parâmetros para achar soluções de EDOs de ordem 1, $\theta(t, x) = xe^{t\beta}$ é utilizado para encontrar a solução desta EDE.

Exemplo 26 (Teorema fundamental do cálculo). Para escrever resultados de integrais no cálculo clássico, podemos utilizar o teorema fundamental do cálculo, que diz que

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a),$$

em que F é a anti-derivada de f definido em $[a, b]$. No cálculo de Itô, podemos usar a fórmula de Itô para encontrar tal resultado. Seja $\theta(t, x) = F(t, x)$ a anti-derivada da função contínua f em respeito a x , seja também $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}F(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(t, x) = f(t, x)$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}f(t, x)$. Assuma que X seja um movimento Browniano B , podemos escrever

$$\int_a^b f(s, B(s))dB(s) = F(s, B(s))\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}F(s, B(s)) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}f(s, B(s)) \right) ds,$$

obtendo o resultado desejado.

Exemplo 27 (Movimento Browniano Geométrico). Seja $S := \{S(t) : t \in [0, b]\}$ um processo de Itô dado por

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t),$$

em que, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in [0, \infty)$ e $S(0) = s_0 > 0$. Para resolver esta equação, adotamos $\theta(t, x) = \ln(x)$. Logo $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(t, x) = \frac{1}{x}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, x) = -\frac{1}{x^2}$. Da fórmula de Itô, temos

$$\begin{aligned} d\ln(S(t)) &= \frac{\partial}{\partial x}\theta(t, X(t))f(t) dB(t) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\theta(t, X(t))dt + \frac{\partial}{\partial x}\theta(t, X(t))g(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(t, X(t))f(t)^2 \right] dt \\ &= \frac{\sigma}{S(t)}S(t) dB(t) + \left[\frac{\mu}{S(t)}S(t) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{S(t)^2}S(t)^2 \right] ds \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t). \end{aligned}$$

Retornando a integral, obtemos

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) &= \ln(S(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dB(s) \\ &= \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t). \end{aligned}$$

Tomando o exponencial de $\ln(S(t))$, obtemos o resultado desejado

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\}.$$

S é um movimento Browniano geométrico e será usado futuramente para calcular o valor de ação no tempo t . Uma motivação da utilização de $\theta(t, x) = \ln(x)$, parte da resolução de EDOs. Uma EDO da forma $\frac{df(t)}{dt} \times \frac{1}{f(t)} = h(t)$ possui um método de resolução que utiliza sua integral, que é dada por $\ln(f(t)) - \ln(f(0)) = \int_0^t h(s) ds$.

Exemplo 28. Seja $X := \{X(t) : t \in [0, b]\}$ um processo de Itô definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e dado por

$$\begin{aligned} X(t, \omega) &:= X(0, \omega) - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t du + \sigma \int_0^t dB(u, \omega) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t, \omega), \end{aligned}$$

em que $\sigma \in (0, \infty)$ e $X(0, \omega) = 0$. Para esse exemplo, estamos lidando com um processo de Itô com $f(t, \omega) = \sigma$ e $g(t, \omega) = -\frac{\sigma^2}{2}$. Então, o processo $\theta(t, X(t)) = e^{X(t)}$ pode ser escrito usando a fórmula de Itô. Como $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} = e^x$ e $\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} = e^x$, temos

$$\begin{aligned} \theta(t, X(t)) &= \theta(t, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \theta(s, X(s)) f(s) dB(s) \\ &\quad + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} \theta(s, X(s)) + \frac{\partial}{\partial x} \theta(s, X(s)) g(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(s, X(s)) f(s)^2 \right] ds \\ &= 1 + \sigma \int_0^t e^{\sigma B(s) - \frac{\sigma^2}{2}s} dB(s) + \int_0^t \left[-\frac{\sigma^2}{2} e^{\sigma B(s) - \frac{\sigma^2}{2}s} + \frac{\sigma^2}{2} e^{\sigma B(s) - \frac{\sigma^2}{2}s} \right] ds \\ &= 1 + \sigma \int_0^t e^{\sigma B(s) - \frac{\sigma^2}{2}s} dB(s). \end{aligned}$$

A integral de Itô contida em $\theta(t, X(t))$ é um martingale pelo Teorema 7, além disso, adicionando a constante 1 ainda continuamos com um processo martingale. Logo, $\theta(t, X(t)) = e^{\sigma B(t) - \frac{\sigma^2}{2}t}$ é um martingale.

A fórmula de Itô é uma ferramenta que enriqueceu o campo teórico do cálculo estocástico. Com isso, podemos usar uma versão da regra da cadeia para o cálculo estocástico e também ter uma ideia de como construir soluções para as EDEs. Assim, nos falta entender sobre os resultados e propriedades das EDEs para que possamos utilizá-las no mercado de opções. Portanto, dedicamos a próxima seção para o seu estudo.

3.5 Equações diferenciais estocásticas

As equações diferenciais estocásticas (EDEs) são, a grosso modo, equações que envolvem "diferenciais" com processos estocásticos. Porém, em que momento podemos utilizar tal abordagem? Para isso, assumimos uma função determinística $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que descreve a quantidade de indivíduos de uma determinada população, com o número de indivíduos inicial dado por $X(a) = x_a > 0$. No modelo de crescimento populacional, assume-se a variação da quantidade de indivíduos $\Delta X(t_i) := X(t_i) - X(t_{i-1})$ em um intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de tempo é igual à função de taxa de crescimento $a(t_{i-1})$ multiplicado pela quantidade de indivíduos no tempo t_i e pela variação do tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Matematicamente, temos

$$\Delta X(t_i) = \Delta t_i a(t_{i-1}) X(t_{i-1}), \text{ em que } t_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } a(t) \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Dividindo Δt_i em ambos os lados e tomando $\Delta t_i \rightarrow 0$, temos a seguinte equação diferencial ordinária (EDO)

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t), & \text{em que } t \in [a, b] \text{ e } a(t) \in \mathbb{R}, \\ X(a) = x_a, & \text{em que } x_a > 0. \end{cases}$$

Esta equação possui solução dada por $X(t) = x_a e^{\int_a^t a(u) du}$ (ver, por exemplo, Capítulo 10 do Guidorizzi, 2000).

O modelo acima não consegue abordar eventos inesperados na população, como por exemplo: pandemias, falta ou excesso de alimentos, catástrofes ou crescimentos desregulados. Nesse sentido, é interessante utilizar componentes aleatórios, a fim de considerar os possíveis efeitos de tais eventos inesperados. Assim, assumimos que a taxa de crescimento $a(t)$ possui uma parte determinística e uma parte aleatória atribuída a ω , i.e., $a(t, \omega) := r(t) + s(t, \omega)$, em que $\omega \in \Omega$. Retomando a Equação (3.19), podemos reescreve-la como

$$\begin{aligned} \Delta X(t_i, \omega) &= \Delta t_i a(t_{i-1}, \omega) X(t_{i-1}, \omega) \\ &= \Delta t_i r(t_{i-1}) X(t_{i-1}, \omega) + \Delta t_i s(t_{i-1}, \omega) X(t_{i-1}, \omega), \\ &= f(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta t_i + \sigma(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta t_i s(t_{i-1}, \omega), \end{aligned}$$

em que $t_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $\omega \in \Omega$. Neste primeiro momento, assumamos que $s(t_i)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $1/\Delta t_i$, assim, obtemos $\Delta t_i s(t_i) = B(t_i) - B(t_{i-1})$, em que B é um movimento Browniano. Somando todos os incrementos, temos uma soma telescópica $\sum_{i=1}^n \Delta X(t_i, \omega) = X(t, \omega) - X(a, \omega)$. Logo,

$$X(t, \omega) = X(a, \omega) + \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta B(t_i, \omega).$$

Por fim, tomamos o limite

$$\begin{aligned} X(t, \omega) &= X(a, \omega) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta t_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(t_{i-1}, X(t_{i-1}, \omega)) \Delta B(t_i, \omega) \\ &= X(a, \omega) + \int_a^t f(u, X(u, \omega)) du + \int_a^t \sigma(u, X(u, \omega)) dB(u, \omega). \end{aligned}$$

Além disso, podemos reescrever a equação anterior utilizando a notação de diferenciais, obtendo uma EDE

$$dX(t) = f(t)dt + \sigma(t)dB(t), \text{ para } t \in [a, b]. \quad (3.20)$$

Assim, podemos utilizar os resultados da fórmula de Itô para encontrar o valor de $X(t)$. Para formalizar o estudo, vamos definir o que é uma solução forte de uma EDE.

Definição 15 (Solução forte). Seja o processo estocástico $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ e movimento Browniano $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$, definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X tomando valores em \mathbb{R} , é a **solução forte** da EDE (3.20) quando

- (i) X é adaptado à filtragem \mathbb{F} ;
- (ii) $\sigma \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $f \in L_{ad}^1([a, b] \times \Omega)$;
- (iii) $X(t) = X(a) + \int_a^t f(t, X(t)) dt + \int_a^t \sigma(t, X(t)) dB(t)$, $\mathbb{P} - q.c$ para todo $t \in [a, b]$.

Dizer que uma solução é forte, segundo a Definição 15, significa que a solução X é dada em função do movimento Browniano B , em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com a filtragem \mathbb{F} , fixados anteriormente na EDE (3.20). Dados $\sigma(t, \tilde{X})$ e $f(t, \tilde{X})$, dizemos que a solução \tilde{X} é fraca, por sua vez, quando precisamos encontrar um movimento Browniano \tilde{B} em um espaço de probabilidade $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ com filtragem $\tilde{\mathbb{F}}$, de tal forma que \tilde{X} seja adaptado e dado da forma

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(a) + \int_a^t f(t, \tilde{X}) dt + \int_a^t \sigma(t, \tilde{X}) d\tilde{B}(t) \quad \tilde{\mathbb{P}} - q.c \text{ para todo } t \in [a, b],$$

e que $\sigma \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e $f \in L_{ad}^1([a, b] \times \Omega)$. Um exemplo de solução fraca é a Equação de Tanaka, em que, a solução de $dX(t) = \text{sign}(X(t))dB(t)$ não é dado em função de B definido previamente, porém é dado por um outro movimento Browniano \tilde{B} (ver detalhes no Exercício 5.3.2 de Øksendal, 2004). Na dissertação, nos restringimos as provas da existência e unicidade para soluções fortes. Contudo, os detalhes da existência e unicidade da solução fraca podem ser encontrados no Capítulo 5.3 de Øksendal (2004).

Exemplo 29. No Exemplo 25, temos a equação de Langevin dado por

$$dX(t) = \alpha dB(t) - \beta X(t)dt, \text{ em que } t \in [0, b].$$

Em forma de integral, temos

$$X(t) = X(0) + \alpha \int_0^t dB(u) - \beta \int_0^t X(u)du, \quad \mathbb{P} - q.c \text{ para todo } t \in [0, b].$$

Nesse caso, $f(t, X(t)) = \beta X(t)$ e $\sigma(t, X(t)) = \alpha$. É fácil ver que $\sigma \in L_{ad}^2([0, b] \times \Omega)$, vamos agora avaliar se $f \in L_{ad}^1([0, b] \times \Omega)$. Usando a fórmula de Itô, encontramos o processo de Ornstein-Uhlenbeck, dado por

$$X(t) = e^{-\beta t} X(0) + \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB(s).$$

Logo, X é adaptado a filtragem, pois depende da integral de Itô, que é adaptado à filtragem. Dessa maneira, podemos calcular o segundo momento

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(t)|^2] = e^{-2\beta t} X(0)^2 + \alpha^2 \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} ds < \infty.$$

Como a integral de Riemann mantém a desigualdade e tomando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(s)|] ds \leq \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(s)|^2]^{\frac{1}{2}} ds < \infty.$$

Logo, $f \in L_{ad}^1([0, b] \times \Omega)$, concluindo que X é uma solução forte.

Exemplo 30. Considere X um processo de Itô, dado por

$$d(X(t)) = X(t)^2 dB(t) + X(t)^3 dt,$$

em que $X(0) = 1$. Neste caso, $f(t, X(t)) = X(t)^3$ e $\sigma(t, X(t)) = X(t)^2$. Logo, tomando $\theta(t, x) = 1/x$, obtemos, $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ e $\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$. Pela fórmula de Itô

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{X(t)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \theta(t, X(t)) \sigma(t) dB(t) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t} \theta(t, X(t)) dt + \frac{\partial}{\partial x} \theta(t, X(t)) f(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(t, X(t)) \sigma(t)^2 \right] dt \\ &= -\frac{1}{X(t)^2} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{X(t)^3} (dX(t))^2 \\ &= -\frac{1}{X(t)^2} (X(t)^2 dB(t) + X(t)^3 dt) + \frac{1}{X(t)^3} X(t)^4 dt \\ &= -dB(t). \end{aligned}$$

Assim, $\frac{1}{X(t)} = -B(t) + C$. Da condição inicial $X(0) = 1$, obtemos $C = 1$. Portanto, a solução da EDE é

$$X(t) = \frac{1}{1 - B(t)}.$$

$X(t)$ explode no primeiro momento em que B sair do intervalo $(-\infty, 1)$.

No Exemplo 29 temos uma solução para a equação de Langevin, e no Exemplo 30 temos uma solução que não é global. Precisamos, então, fixar algumas condições sobre f e σ para que as EDEs tenham soluções que existam e, além disso, garantir que esta seja única. Para isso, vamos postular, seguindo Kuo (2006), alguns lemas e definir essas condições.

Lema 6 (Desigualdade de Bellman-Gronwall). Suponha $\phi \in L^1[a, b]$ satisfaça

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \phi(s) ds, \quad (3.21)$$

em que $f \in L^1[a, b]$ e β uma constante positiva. Então, temos

$$\phi(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

Em particular, se $f(t)$ é uma constante α , temos

$$\phi(t) \leq \alpha e^{(t-a)\beta}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração. A ideia deste resultado é encontrar um estimador para ϕ em função de f e β . Assuma

$$g(t) := \beta \int_a^t \phi(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Usando o teorema fundamental do cálculo e a Equação (3.21), obtemos

$$g'(t) = \beta \phi(t) \leq \beta f(t) + \beta g(t), \quad \text{quase em todo lugar.}$$

Subtraímos ambos os lados por $\beta g(t)$ e multiplicamos por $e^{-t\beta}$, obtendo

$$e^{-t\beta} g'(t) - \beta e^{-t\beta} g(t) \leq \beta e^{-t\beta} f(t).$$

O lado esquerdo é a regra da derivada do produto de duas funções, i.e., $\frac{d}{dt}(e^{-t\beta} g(t))$. Logo, integrando ambos os lados, obtemos

$$e^{-t\beta} g(t) \leq \beta \int_a^t e^{-s\beta} f(s) ds.$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{t\beta}$ e adicionando $f(t)$, obtendo

$$f(t) + g(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t e^{(t-s)\beta} f(s) dt.$$

Pela definição de g , podemos usar a Equação (3.21), concluindo a prova

$$\phi(t) \leq f(t) + g(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t e^{(t-s)\beta} f(s) dt.$$

Se $f(t) = \alpha$, temos

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t e^{(t-s)\beta} f(s) dt \\ &= \alpha + \beta \alpha \int_a^t e^{(t-s)\beta} dt \\ &= \alpha + \alpha e^{-t\beta} (e^{-a\beta} - e^{-t\beta}) \\ &= \alpha e^{(a-t)\beta}. \end{aligned}$$

□

Lema 7. Seja $\{\theta_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ uma sequência de funções $L^1[a, b]$, em que θ_n satisfaz

$$\theta_{n+1}(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_n(s) ds, \quad (3.22)$$

em que $f \in L^1$ e β uma constante positiva. Então,

$$\theta_{n+1}(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) e^{\beta(t-s)} ds + \beta^n \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \theta_1(u) du.$$

vale para $n \leq 1$. Quando $f(t) = \alpha$ e $\theta_1 = c$ são constantes, então

$$\theta_{n+1}(t) \leq \alpha e^{(t-a)\beta} + c \frac{\beta^n (t-a)^n}{n!}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração. A ideia deste resultado é semelhante ao Lema 6, pois, queremos estimar um valor para θ_n , utilizando f , β , θ_1 e n . Contudo, não conseguimos aplicar a estratégia semelhante a prova anterior. Vamos provar por indução. Assuma θ_2 , i.e.,

$$\theta_2(t) \leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_1(s) ds.$$

Tomando θ_3 , obtemos

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_2(s) ds \\ &\leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \beta^2 \int_a^t \int_a^s \theta_1(u) dud s \\ &= f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \beta^2 \int_a^t (t-s)\theta_1(s) ds. \end{aligned}$$

Tomamos agora θ_4 , para deixar mais claro os próximos passos

$$\begin{aligned} \theta_4(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_3(s) ds \\ &\leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \beta^2 \int_a^t \int_a^s f(u) dud s + \beta^3 \int_a^t \int_a^s (t-u)\theta_1(u) dud s \\ &= f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \beta^2 \int_a^t (t-s)f(s) ds + \beta^3 \int_a^t \frac{(t-s)^2}{2} \theta_1(s) ds. \end{aligned}$$

Logo, assumamos que vale para n , então

$$\theta_n \leq f(t) + \sum_{i=0}^{n-3} \beta \int_a^t \frac{\beta^i (t-s)^i}{i!} f(s) ds + \beta^{n-1} \int_a^t \frac{(t-s)^{n-2}}{(n-2)!} \theta_1(s) ds.$$

Calculando para $n+1$, temos

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(t) &\leq f(t) + \beta \int_a^t \theta_n(s) ds \\ &\leq f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \beta \int_a^t \sum_{i=0}^{n-3} \beta \int_a^s \frac{\beta^i (t-u)^i}{i!} f(u) dud s \\ &\quad + \beta \int_a^t \beta^{n-1} \int_a^s \frac{(t-u)^{n-2}}{(n-2)!} \theta_1(u) dud s \\ &= f(t) + \beta \int_a^t f(s) ds + \sum_{i=0}^{n-3} \beta \int_a^t \frac{\beta^{i+1} (t-s)^{i+1}}{(i+1)!} f(s) ds \\ &\quad + \beta^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta_1(s) ds \\ &= f(t) + \sum_{i=0}^{n-2} \beta \int_a^t \frac{\beta^i (t-s)^i}{i!} f(s) ds + \beta^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta_1(s) ds \\ &= f(t) + \beta \int_a^t \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\beta^i (t-s)^i}{i!} f(s) ds + \beta^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta_1(s) ds. \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=0}^{n-2} \frac{\beta^i (t-s)^i}{i!} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i (t-s)^i}{i!} = e^{\beta(t-s)}$, obtemos

$$\theta_{n-1} \leq f(t) + \beta \int_a^t e^{\beta(t-s)} f(s) ds + \beta^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta_1(s) ds,$$

concluindo a primeira parte da prova. Tomando $f(t) = \alpha$ e $\theta_1 = c$ e integrando a equação acima, finalizamos a prova

$$\begin{aligned}\theta_{n-1} &\leq \beta e^{\beta(t-a)} + \beta^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} c \, ds \\ &= \beta e^{\beta(t-a)} + c \frac{\beta^n (t-a)^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

Definimos a seguir as condições que serão utilizadas para a existência e unicidade da solução.

Definição 16 (Condição de Lipschitz). Dizemos que uma função mensurável $g(t, x)$, em $[a, b] \times \mathbb{R}$, satisfaz a **condição de Lipschitz** em x , quando existir uma constante K , tal que

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall t \in [a, b] \text{ e } x, y \in \mathbb{R}.$$

Definição 17 (Condição de crescimento linear). Dizemos que uma função mensurável $g(t, x)$, em $[a, b] \times \mathbb{R}$, satisfaz a **condição de crescimento linear** em x , quando existir uma constante K , tal que

$$|g(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad \forall t \in [a, b] \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Ou, de forma equivalente, existe um $C > 0$, tal que

$$|g(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2), \quad \forall t \in [a, b] \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Enfatizamos que os processos estocásticos e movimento Brownianos, satisfazem as condições impostas na Seção 3.3.4. Logo, podemos escrever o lema que garante que uma EDE possua no máximo uma solução.

Lema 8. Seja $\sigma(t, x)$ e $f(t, x)$ funções mensuráveis que satisfazem condição de Lipschitz em x . Suponha $X(a)$ uma variável aleatória com $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(a)^2] < \infty$ e \mathcal{F}_a -mensurável. Então a EDE dada pela Equação (3.20) possui, no máximo, uma solução contínua dada por $X(t)$.

Demonstração. Sejam $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ e $Y := \{Y(t) : t \in [a, b]\}$ processos estocásticos definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que X e Y são soluções contínuas para a EDE. Definimos $Z(t) := X(t) - Y(t)$, também contínuo, dado por

$$Z(t) = \int_a^t (\sigma(u, X(u)) - \sigma(u, Y(u))) \, dB(u) + \int_a^t (f(u, X(u)) - f(u, Y(u))) \, du.$$

Usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}Z(t)^2 &\leq 2 \left(\int_a^t (\sigma(u, X(u)) - \sigma(u, Y(u))) \, dB(u) \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\int_a^t (f(u, X(u)) - f(u, Y(u))) \, du \right)^2.\end{aligned}$$

Tomando a esperança da primeira integral, e usando a condição de Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\int_a^t (\sigma(u, X(u)) - \sigma(u, Y(u))) dB(u) \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\int_a^t (K|X(u) - Y(u)|) dB(u) \right)^2 \right] \\ &= \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (K^2 |X(u) - Y(u)|^2) du \\ &= K^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(u)^2] du. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_a^t (f(u, X(u)) - f(u, Y(u))) du \right)^2 &\stackrel{(a)}{\leq} (t-a) \int_a^t (|f(u, X(u)) - f(u, Y(u))|)^2 du \\ &\stackrel{(b)}{\leq} (b-a) \int_a^t K^2 |X(u) - Y(u)|^2 du \\ &= (b-a)K^2 \int_a^t |Z(u)|^2 du, \end{aligned}$$

em que, em (a) utilizamos Cauchy-Schwarz e em (b) utilizamos a condição de Lipschitz. Retornando a desigualdade de $Z(t)^2$, aplicando o valor esperado, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(t)^2] &\leq 2K^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(u)^2] du + 2(b-a)K^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(u)^2] du \\ &= 2K^2(1+b-a) \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(u)^2] du. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Bellman - Gronwall do Lema 6, vemos que $f(t)$ da desigualdade é 0, logo, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Z(t)^2] = 0$. Então, $Z(t)$ converge para 0 quase certamente para $t \in [a, b]$. Seja $\{r_1, r_2, \dots\}$ uma sequência de números racionais no intervalo $[a, b]$. Então, para cada r_n , existe um Ω_n , tal que $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$, com $Z(r_n, \omega) = 0, \forall \omega \in \Omega_n$. Portanto, $\Omega' := \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, tem probabilidade $\mathbb{P}(\Omega') = 1$. Além disso, $Z(t)$ é um processo estocástico contínuo em $t \in [a, b]$, logo, existe um Ω'' , tal que $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$, em que $Z(t, \omega)$ é contínuo em $t \in [a, b], \forall \omega \in \Omega''$. Assuma $\Omega_0 := \Omega' \cap \Omega''$, logo, $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Para cada $\omega \in \Omega_0$, $Z(t, \omega)$ é uma função contínua que é igual a 0 em todos os números racionais de $[a, b]$. Logo, para cada $\omega \in \Omega_0$, $Z(t, \omega) = 0, \forall t \in [a, b]$. Concluindo que X e Y são o mesmo processo estocástico contínuo, concluindo que a solução da EDE é única. \square

Agora que sabemos em quais condições podemos obter no máximo uma única solução, nos resta saber em quais condições essa solução existe.

Lema 9. Seja $\sigma(t, x)$ e $f(t, x)$ funções mensuráveis que satisfazem as condições de Lipschitz e de crescimento linear em x . Suponha $X(a)$ uma variável aleatória com $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X(a)^2] < \infty$ e \mathcal{F}_a -mensurável. Então a solução da EDE (3.20) existe e é única.

Demonstração. Pelas condições de Lipschitz e de crescimento linear, existe um $C > 0$, tal que vale as seguintes desigualdades para todo $t \in [a, b]$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|; \quad (3.23)$$

$$|\sigma(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2), \quad |f(t, x)|^2 \leq C(1 + x^2). \quad (3.24)$$

Seja a sequência $\{X_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ de processos estocásticos contínuos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos indutivamente $X_1(t) = X(a)$ e para $n > 1$

$$X_{n+1}(t) := X(a) + \int_a^t \sigma(s, X_n(s)) dB(t) + \int_a^t f(s, X_n(s)) ds.$$

Por hipótese, $X_1(t) \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, por indução, $X_n(t) \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, em que $n > 1$. Usando a Equação (3.24), de forma semelhante a demonstração do Lema 8, obtemos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b \sigma(s, X_n(s))^2 ds \right] \leq C(a-b) + C \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_a^b |X_n(s)|^2 ds \right] < \infty, \quad (3.25)$$

$$\int_a^b |f(s, X_n(s))| ds \leq \sqrt{C(b-a)} \left(\int_a^b (1 + X_n(s)^2) ds \right)^{1/2} < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (3.26)$$

X_{n+1} é composto de uma integral de Itô e uma integral de Lebesgue em t para quase todo ω . Então, X_{n+1} é um processo estocástico contínuo e adaptado a filtragem. Como $|a + b + c|^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, temos

$$\begin{aligned} |X_{n+1}(t)|^2 &= \left| X(a) + \int_a^t \sigma(s, X_n(s)) dB(t) + \int_a^t f(s, X_n(s)) ds \right|^2 \\ &\leq 3 \left(X(a)^2 + \left(\int_a^t \sigma(s, X_n(s)) dB(s) \right)^2 + \left(\int_a^t f(s, X_n(s)) ds \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Tomando a esperança e usando as Equações (3.25) e (3.26), vemos que

$\int_a^b \mathbb{E}[X_{n+1}(s)] ds < \infty$. Logo, $X_{n+1} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Por tanto, por indução, a sequência X_n pertence ao espaço $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Vamos estimar o valor de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2]$. Para simplificar a notação, assuma

$$Y_{n+1}(t) := \int_a^t \sigma(s, X_n(s)) dB(s), \quad Z_{n+1}(t) := \int_a^t f(s, X_n(s)) ds.$$

Logo, $X_{n+1}(t) = X(a) + Y_{n+1}(t) + Z_{n+1}(t)$. Usamos a desigualdade $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ em $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2]$, logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] \\ \leq 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2] + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2]. \end{aligned}$$

Usando na primeira esperança o critério de Lipschitz, i.e., a Equação (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)|^2] &= \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\sigma(s, X_n(s)) - \sigma(s, X_{n-1}(s))|^2] ds \\ &\leq C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds. \end{aligned}$$

Usando o critério mais uma vez em conjunto com a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2$, obtemos

$$|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2 \leq (b-a)C^2 \int_a^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds.$$

Colocando as desigualdades juntas obtemos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2] \leq 2C^2(1+b-a) \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds.$$

Avaliando $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_2(t) - X_1(t)|^2]$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_2(t) - X_1(t)|^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_a^t f(s, X_1(t)) dt + \int_a^t \sigma(s, X_1(t)) dB(t) \right|^2 \right] \\ &\stackrel{(a)}{\leq} 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_a^t f(s, X_1(t)) dt \right|^2 + \left| \int_a^t \sigma(s, X_1(t)) dB(t) \right|^2 \right] \\ &\stackrel{(b)}{\leq} 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(b-a) \int_a^t f(s, X_1(t))^2 dt \right] + 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_a^t \sigma(s, X_1(t)) dB(t) \right|^2 \right] \\ &\stackrel{(c)}{=} 2(b-a) \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(s, X_1(t))^2] dt + 2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\sigma(s, X_1(t))^2] dt \\ &\stackrel{(d)}{\leq} 2(b-a)C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 + X_1(t)^2] dt + 2C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 + X_1(t)^2] dt \\ &= 2(1+b-a)C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 + X(a)^2] dt, \end{aligned}$$

em que, (a) vem da desigualdade $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ e (b) de Cauchy-Schwarz e do teorema de Fubini. A igualdade (c) vem da isometria da integral de Itô e, por fim, (d) parte da condição de crescimento linear. Assumindo uma sequência de funções $\{\theta_n : n \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$, em que $\theta_n(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_n(t) - X_n(t)|^2]$, para $n > 1$ e $\theta_1(t) := \rho = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1 - X(a)^2]$. Como a sequência θ_n satisfaz as condições do Lema 7, temos a seguinte desigualdade

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_{n+1} - X_n|^2] \leq \rho \frac{\beta^n (t-a)^n}{n!}, \quad (3.27)$$

em que, $\beta = 2C^2(1+b-a)$. Para qualquer $t \in [a, b]$, vale a seguinte desigualdade triangular

$$|X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| + |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|.$$

Logo, vale

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|,$$

implicando que

$$\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2} \right\} \subset \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\} \cup \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\}.$$

Ou ainda

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2} \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\}. \quad (3.28)$$

Da definição de Y , estamos lidando com uma integral de Itô, que por sua vez é um martingale, segundo o Teorema 7. Além disso, como subtração de martingales é ainda um martingale e $|\cdot|$ é uma função convexa, pela desigualdade de Jensen, $|X_{n+1}(t) - X_n(t)|$ é um submartingale. Podemos aplicar a desigualdade de Doob (ver Anexo B, Seção B.2) na primeira probabilidade, obtendo

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Y_{n+1}(t) - Y_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\} &\leq 2n^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y_{n+1}(b) - Y_n(b)|^2] \\ &\leq 4n^4 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y_{n+1}(b) - Y_n(b)|^2] \\ &\leq 4n^4 C^2 \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds \\ &\stackrel{(a)}{\leq} 4n^4 C^2 \rho \int_a^b \frac{\beta^{n-1}(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} ds \\ &= 4n^4 C^2 \rho \frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!}, \end{aligned}$$

em que, a desigualdade (a) segue da Equação (3.27). Usando a Equação (3.27) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2$, obtemos

$$|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2 \leq (b-a)C^2 \int_a^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)| ds.$$

Logo,

$$\sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2 \leq (b-a)C^2 \int_a^b |X_n(s) - X_{n-1}(s)| ds.$$

Da desigualdade de Markov e da desigualdade acima é fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\} &\leq 4n^4 \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)|^2 \right] \\ &\leq 4n^4 \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[(b-a)C^2 \int_a^b |X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2 ds \right] \\ &= 4n^4 (b-a)C^2 \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|X_n(s) - X_{n-1}(s)|^2] ds. \end{aligned}$$

Usando mais uma vez a desigualdade (3.27), obtemos

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |Z_{n+1}(t) - Z_n(t)| > \frac{1}{2n^2} \right\} \leq 4n^4 (b-a)C^2 \int_a^b \rho \frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!} ds.$$

Colocando as desigualdades na Equação (3.28), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2} \right\} &\leq 4n^4(b-a)C^2 \int_a^b \rho \frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!} ds \\ &\quad + 4n^4C^2\rho \frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!} \\ &\leq (1+b-a)4n^4C^2\rho \frac{\beta^{n-1}(b-a)^n}{n!} \\ &= 2\rho \frac{n^4\beta^n(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Pelo teste da razão, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\beta^n(b-a)^n}{n!}$ converge, logo, pelo lema de Borel - Cantelli

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| > \frac{1}{n^2}, \text{ infinitas vezes} \right\} = 0.$$

Portanto, a série $X(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (X_{n+1}(t) - X_n(t))$ converge uniformemente em $[a, b]$, com probabilidade 1 para um $X(t)$. Note que, a soma parcial $X(a) + \sum_{i=1}^n (X_{i+1}(t) - X_i(t)) = X_n(t)$ e X_n é contínuo e adaptado a filtragem, logo, X também é, provando o item (i) da Definição 15. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t), \text{ uniformemente para } t \in [a, b],$$

com probabilidade 1. Da Equação (3.27), temos

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \sqrt{\rho} \frac{\beta^{n/2}(t-a)^{n/2}}{\sqrt{n!}}, \quad (3.29)$$

em que $\|\cdot\| := \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot^2]}$, é a norma no espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Logo, da desigualdade acima, vemos que $x_a + \sum_{n=1}^{\infty} (X_{n+1}(t) - X_n(t))$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e também, pela subaditividade da norma, temos

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &\leq \|X(a)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \\ &\leq \|X(a)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\rho} \frac{\beta^{n/2}(t-a)^{n/2}}{\sqrt{n!}}. \end{aligned}$$

Então, $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)^2] dt < \infty$, implicando que $X \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, logo, pela Equação (3.29) e o lema de Fatou (ver por exemplo, Corolário 1.4.47 de Tao, 2011), temos

$$\begin{aligned} \int_b^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X(u) - X_n(u)|^2] du &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_b^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_m(u) - X_n(u)|^2] du \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_b^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X_m(u) - X_n(u)|^2] du \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $n \rightarrow \infty$. Então, tomamos o resultado anterior, a condição de Lipschitz em σ e a isometria de Itô,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_a^t \sigma(u, X(u)) - \sigma(u, X_n(u)) dB(u) \right|^2 \right] &= \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[|\sigma(u, X(u)) - \sigma(u, X_n(u))|^2 \right] du \\ &\leq C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[|X(u) - X_n(u)|^2 \right] du \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $n \rightarrow \infty$. Logo, $\int_a^t \sigma(t, X_n(u)) dB(u)$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $\int_a^t \sigma(t, X(u)) dB(u)$. Então, existe uma subsequência de índices em que $\int_a^t \sigma(t, X_n(u)) dB(u)$ converge quase certamente para $\int_a^t \sigma(t, X(u)) dB(u)$. Além disso, tomando $t = b$ na desigualdade anterior e usando o fato que σ depende de X , o qual é adaptado a filtragem, concluímos que $\sigma \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

De forma equivalente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \int_a^t f(u, X(u)) - f(u, X_n(u)) du \right|^2 \right] &\leq (b-a) \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[|f(u, X(u)) - f(u, X_n(u))|^2 \right] du \\ &\leq (b-a)C^2 \int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[|X(u) - X_n(u)|^2 \right] du \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $n \rightarrow \infty$. Logo, $\int_a^t f(u, X_n(u)) dB(u)$ converge em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $\int_a^t f(u, X(u)) du$. Logo, existe uma subsequência de índices em que $\int_a^t f(u, X_n(u)) du$ converge quase certamente para $\int_a^t f(u, X(u)) du$. Note que provamos também que

$$\int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [f(u, X(u))^2] du < \infty,$$

então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\int_a^t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|f(u, X(u))|] du < \infty$. Logo, tomando $t = b$ e usando o fato que f depende de X , o qual é adaptado a filtragem, concluímos que $f \in L_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Assim, provamos os itens (ii) e (iii) da Definição 15, concluindo que X é uma solução. Então, as EDEs que satisfazem as condições do Lema 9, possuem solução. Por fim, como f e σ satisfazem a condição de Lipschitz, pelo Lema 8 concluímos que a solução existe e é única. □

Exemplo 31. Vamos retomar aos Exemplos 29. Assumindo a equação de Langevin

$$dX(t) = \alpha dB(t) - \beta X(t) dt, \text{ em que } t \in [0, b].$$

Neste caso, sabemos que $\sigma(t, X(t)) = \alpha$ e $f(t, X(t)) = -\beta X(t)$. Para f , assumimos $C = |\beta|$ obtendo

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq |\beta| |x - y| \\ |f(t, x)| &\leq |\beta| (1 + |x|) \end{aligned}$$

e para σ , assumimos $|\alpha|$ obtendo

$$\begin{aligned} |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq |\alpha||x-y| \\ |\sigma(t,x)| &\leq |\alpha|(1+|x|). \end{aligned}$$

Então, f e σ satisfazem as condições de Lipschitz e crescimento linear. Nesse caso, o processo de Ornstein - Uhlenbeck é a única solução para a equação de Langevin.

Exemplo 32. Assuma agora o Exemplo 30. Nesse caso, temos

$$d(X(t)) = X(t)^2 dB(t) + X(t)^3 dt, \text{ em que } t \in [0, b] \text{ e } X(0) = 1.$$

Sabemos que $f(t, X(t)) = X(t)^3$ e $\sigma(t, X(t)) = X(t)^2$. Tomando f , vemos que estamos lidando com um polinômio de terceiro grau. Como $x \in \mathbb{R}$, então, para $x \leq 1$ $f(t, x) \leq x$ e para $x \geq 1$ $f(t, x) \geq x$. Nesse caso, não importa a constante C que fixarmos, pois, sempre vamos encontrar um $x > 1$ e um $y < 1$ distantes o suficiente para a condição de Lipschitz deixa de valer. Para deixar mais claro, assuma a situação em que $x > 1$ e $y = -x$. Então, vamos tentar encontrar o C que satisfaça a desigualdade da condição de Lipschitz. Obtemos

$$2x^3 \leq C2x,$$

que com um pouco de manipulação, torna-se $x^2 \leq C$. A função x^2 para $x > 1$ sempre é crescente, então, nunca vamos conseguir fixar um C que satisfaça a condição para este caso em específico. Como deve valer para todos x e todo y , não conseguimos achar o C que faça com que f satisfaça a condição de Lipschitz. Então, não conseguimos garantir uma solução global única para a EDE do Exemplo 30.

Nessa seção, estudamos as soluções das EDEs. Além disso, apresentamos as condições para que a solução de uma EDE exista e seja única. Para complementar esse tópico, na próxima seção apresentamos a fórmula de Itô multidimensional. Apresentamos também os sistema de EDEs, que por sua vez, também possui condições para a existência e unicidade das soluções, que são semelhantes ao caso de apenas uma equação apresentados nessa seção.

3.6 Fórmula de Itô multidimensional e sistema de EDEs

A fórmula de Itô nos dá uma maneira de escrever funções que dependam de um único processo de Itô. Assim, se X e Y são dois processos de Itô, as funções $\theta_1(t, X(t)) := e^{X(t)} - t$ e $\theta_2(t, Y(t)) := Y(t)$, podem ser escritas usando o Teorema 10. Contudo, a função $\theta(t, X(t), Y(t)) = e^{X(t)} + Y(t)^2 - t$ depende de dois processos de Itô, sendo necessário outra maneira de escrever θ . Nesse sentido, uma extensão natural da fórmula de Itô é sua versão multidimensional.

Vamos assumir $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que

$$X(t, \omega) = \begin{pmatrix} X_1(t, \omega) \\ X_2(t, \omega) \\ \dots \\ X_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \text{ com } n \in \{1, 2, \dots\}.$$

Cada processo estocástico X_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, é um processo de Itô da seguinte forma

$$X_i(t, \omega) := X_i(a, \omega) + \sum_{j=1}^m \int_a^t f_{i,j}(s, \omega) dB_j(s, \omega) + \int_a^t g_i(s, \omega) ds,$$

em que, $f_{i,j} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, $g_i \in L_{ad}^1([a, b] \times \Omega)$ e os B_j 's são movimentos Brownianos independentes. Ainda, de forma matricial

$$B(t, \omega) = \begin{pmatrix} B_1(t, \omega) \\ B_2(t, \omega) \\ \dots \\ B_m(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad g(t, \omega) = \begin{pmatrix} g_1(t, \omega) \\ g_2(t, \omega) \\ \dots \\ g_n(t, \omega) \end{pmatrix},$$

$$f(t, \omega) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(t, \omega) & \dots & f_{1,m}(t, \omega) \\ f_{2,1}(t, \omega) & \dots & f_{2,m}(t, \omega) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n,1}(t, \omega) & \dots & f_{n,m}(t, \omega) \end{pmatrix},$$

obtemos

$$X(t, \omega) = X(a, \omega) + \int_a^t f(s, \omega) dB(s, \omega) + \int_a^t g(s, \omega) ds.$$

Teorema 11 (Fórmula de Itô multidimensional). Seja $X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$, em que os $X_i(t)$'s, com $i \in \{1, \dots, n\}$, são processos de Itô definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seja $\theta(t, x_1, \dots, x_n)$ uma função contínua em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, em que

$$\frac{\partial \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t}, \frac{\partial \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \text{ e } \frac{\partial^2 \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ com } i, j \in 1, \dots, n$$

existem. Então, θ é dado por

$$\begin{aligned} d\theta(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) &:= \frac{\partial \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dX_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \theta(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} dX_i(t) dX_j(t), \end{aligned}$$

em que, $dB_i(t)dB_j(t) = \delta_{i,j}dt$ e $dB_i(t)dt = dt dB_i(t) = (dt)^2 = 0$.

Demonstração. A demonstração desse resultado foi apresentada em Itô (1951b). □

Esse resultado tem como caso particular a regra do produto, i.e., se X e Y são dois processos de Itô, então

$$dX(t)Y(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dY(t)dX(t).$$

Exemplo 33. Seja $X := \{X(t) : t \in [0, b]\}$ e $Y := \{Y(t) : t \in [0, b]\}$ dois processos de Itô definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Os valores de X e Y são dados por $X(t) := \cos(B(t))$ e $Y(t) := \sin(B(t))$. Assumindo $V(t) := (X(t), Y(t))^T$ e definindo $f_1(x) := \cos(x)$ e $f_2(x) := \sin(x)$, obtemos pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{df_1(x)}{dx} dB(t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \\ &= -\sin(B(t)) dB(t) - \frac{1}{2} \cos(B(t)) dt \\ &= -Y(t) dB(t) - \frac{1}{2} X(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{df_2(x)}{dx} dB(t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} \\ &= \cos(B(t)) dB(t) - \frac{1}{2} \sin(B(t)) dt \\ &= X(t) dB(t) - \frac{1}{2} Y(t) dt. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos a condição inicial $V(0) = (0, 1)^T$ e a equação de $V(t)$, que é dado por

$$\begin{aligned} dV(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(B(t)) \\ \cos(B(t)) \end{pmatrix} dB(t) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(B(t)) \\ -\sin(B(t)) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V(t) dB(t) - \frac{1}{2} V(t) dt. \end{aligned}$$

Vamos supor $\theta(t, V(t)) := \theta(t, X(t), Y(t)) = e^{X(t)} + Y(t)^2 - t$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(t, x, y)}{\partial t} &= -1, \\ \frac{\partial \theta(t, x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \theta(t, x, y)}{\partial x^2} = e^x, \\ \frac{\partial \theta(t, x, y)}{\partial y} &= 2y, \\ \frac{\partial^2 \theta(t, x, y)}{\partial y^2} &= 2, \\ \frac{\partial^2 \theta(t, x, y)}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 11, conseguimos o seguinte equação

$$\begin{aligned}
d\theta(t, X(t), Y(t)) &:= \frac{\partial\theta(t, x, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial\theta(t, x, y)}{\partial x} dX(t) + \frac{\partial\theta(t, x, y)}{\partial y} dY(t) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta(t, x, y)}{\partial x_i \partial x_i} dX(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta(t, x, y)}{\partial x_i \partial x_i} dY(t)^2 \\
&+ \frac{\partial^2\theta(t, x, y)}{\partial x_i \partial x_i} dX(t) dY(t) \\
&= -1 dt + e^{X(t)} dX(t) + 2Y(t) dY(t) \\
&+ \frac{1}{2} e^{X(t)} dX(t)^2 + dY(t)^2 \\
&= -1 dt - Y(t) e^{X(t)} dB(t) - \frac{1}{2} X(t) e^{X(t)} dt \\
&+ 2Y(t) X(t) dB(t) - 2Y(t) \frac{1}{2} Y(t) dt \\
&- \frac{1}{2} Y(t)^2 e^{X(t)} dt + X(t)^2 dt. \\
&= [X(t)^2 - \frac{1}{2} X(t) e^{X(t)} - \frac{1}{2} Y(t)^2 e^{X(t)} - Y(t)^2 - 1] dt \\
&+ [2Y(t) X(t) - Y(t) e^{X(t)}] dB(t) \\
&\stackrel{(a)}{=} Y(t) [2X(t) - e^{X(t)}] dB(t) - \frac{1}{2} e^{X(t)} [X(t) + Y(t)^2] dt,
\end{aligned}$$

em que, usamos $X(t)^2 + Y(t)^2 = 1$ em (a).

Note que $V(t)$ do Exemplo 33 é a solução do sistema de EDE's

$$dV(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V(t) dB(t) - \frac{1}{2} V(t) dt.$$

Algumas perguntas naturais surgem desse exemplo: V é a única solução desse sistema? Quais as condições para que um sistema de EDE's possua alguma solução?

De modo geral, considere $B_k := \{B_k(t) : t \in [a, b]\}$, com $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, em que os B_k 's são movimentos Brownianos independentes e as funções mensuráveis $f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\sigma_{i,j} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Então, temos o seguinte sistema de EDEs

$$dX_i(t) = \sum_{k=1}^m \sigma_{i,j}(t, X_1(t), \dots, X_n) dB_k(t) + f_i(t, X_1(t), \dots, X_n) dt,$$

em que $X_i(a) = x_{i,a}$ é a condição inicial. De forma matricial, como no começo da seção, pode ser feita assumindo

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \dots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ \dots \\ B_m(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, X_1(t), \dots) = \begin{pmatrix} f_1(t, X_1(t), \dots) \\ f_2(t, X_1(t), \dots) \\ \dots \\ f_n(t, X_1(t), \dots) \end{pmatrix},$$

$$\sigma(t, X_1(t), \dots) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}(t, X_1(t), \dots) & \dots & \sigma_{1,m}(t, X_1(t), \dots) \\ \sigma_{2,1}(t, X_1(t), \dots) & \dots & \sigma_{2,m}(t, X_1(t), \dots) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1}(t, X_1(t), \dots) & \dots & \sigma_{n,m}(t, X_1(t), \dots) \end{pmatrix}, \quad x_a = \begin{pmatrix} x_{1,a} \\ x_{2,a} \\ \dots \\ x_{n,a} \end{pmatrix}$$

obtendo

$$dX(t) = \sigma(t, X_1(t), \dots) dB(s) + f(t, X_1(t), \dots) ds, \quad (3.30)$$

com condição inicial $X(a) = x_a$. Assuma $|\cdot|$ como a norma euclidiana de um vetor e $\|\cdot\|$ a norma de Hilbert-Schmidt (ou norma $L^{2,2}$), que é dada por

$$\|\sigma(t, X_1(t), \dots)\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}(t, X_1(t), \dots)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então, temos o seguinte teorema:

Teorema 12. Assuma a notação da Equação (3.30), assumo também que σ e f satisfaçam as seguintes condições

- **(Condição de Lipschitz)**

$$\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K|x - y|, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|,$$

- **(Condição de crescimento linear)**

$$\|\sigma(t, x)\|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad |f(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

em que $K > 0$. O sistema de EDE's

$$dX(t) = \sigma(t, X_1(t), \dots) dB(s) + f(t, X_1(t), \dots) ds,$$

com qualquer condição inicial $X(a) = x_a$ \mathcal{F}_a -mensurável e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|x_a|^2] < \infty$, possui uma única solução contínua dada por

$$X(t) = X(a) + \int_a^t \sigma(s, X_1(s), \dots) dB(s) + \int_a^t f(s, X_1(s), \dots) ds.$$

Demonstração. A demonstração é semelhante aos dos Teorema 8 e 9, fazendo as devidas alterações das condições de Lipschitz e crescimento linear. \square

Exemplo 34. Assuma o sistema de EDEs do Exemplo 33. Nesse exemplo, temos $V(t) = (X(t), Y(t))^T$, em que $V(t) \in [-1, 1]^2$. As funções são dadas por $\sigma_{1,2}(t, V(t)) = \sigma_{2,1}(t, V(t)) = 0$, $\sigma_{1,1}(t, V(t)) = -Y(t)$, $\sigma_{2,2}(t, V(t)) = X(t)$, $f_1(t, V(t)) = \frac{X(t)}{2}$ e $f_2(t, V(t)) = \frac{Y(t)}{2}$. Assumindo

dois vetores $V_1(t) = (X_1(t), Y_1(t))$ e $V_2(t) = (X_2(t), Y_2(t))$, vamos calcular as normas euclidiana e de Hilbert-Schmidt

$$\begin{aligned} |f(t, V_1(t)) - f(t, V_2(t))| &= \left(\sum_{i=1}^2 |f_i(t, V_1(t)) - f_i(t, V_2(t))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left(\frac{X_1(t)}{2} - \frac{X_2(t)}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y_1(t)}{2} - \frac{Y_2(t)}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} |V_1(t) - V_2(t)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, V_1(t)) - \sigma(t, V_2(t))\| &= \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |\sigma_{i,j}(t, V_1(t)) - \sigma_{i,j}(t, V_2(t))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((Y_2(t) - Y_1(t))^2 + (X_1(t) - X_2(t))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= |V_1(t) - V_2(t)|. \end{aligned}$$

Assumindo $K = 1$, a condição de Lipschitz é satisfeita por f e σ . Vamos calcular mais uma vez as normas

$$\begin{aligned} |f(t, V(t))|^2 &= \sum_{i=1}^2 |f_i(t, V(t))|^2 \\ &= \left(\frac{X(t)}{2} \right)^2 + \left(\frac{Y(t)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} |V(t)|^2 \\ &< \frac{1}{4} (1 + |V(t)|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, V(t))\|^2 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 |\sigma_{i,j}(t, V(t))|^2 \\ &= (-Y(t))^2 + (X_1(t))^2 \\ &= |V(t)|^2 \\ &< 1 + |V(t)|^2. \end{aligned}$$

Assumindo novamente $K = 1$, a condição de crescimento linear também é satisfeita por f e σ . Logo, o sistema de EDEs do Exemplo 33 possui, pelo Teorema 12, apenas uma solução, que no caso, é dado por $V(t) = (\cos(B(t)), \sin(B(t)))^T$.

Nessa seção, apresentamos a generalização da fórmula de Itô para o caso multidimensional e as condições para a existência e unicidade da solução de um sistema de EDEs. Outra generalização importante para o cálculo estocástico é a integral estocástica múltipla. Assim, na próxima seção, apresentamos a construção e propriedades das integrais estocásticas múltiplas de Wiener-Itô.

3.7 Integrais estocásticas múltiplas

Ao trabalhar com caos homogêneo, Wiener estudou um tipo de estrutura que Itô, posteriormente, demonstrou que podia ser escrita como uma integral estocástica múltipla. Como consequência desse estudo, é possível obter o teorema da representação de martingais, no qual utilizamos para demonstrar a completude do mercado de Black-Scholes-Merton. Assim, vamos mostrar nesta seção a construção da integral múltipla de Wiener-Itô.

Para motivar o leitor, vamos considerar uma integral estocástica dupla. Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $f : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função determinística, tal que $f \in L^2([a, b]^2)$, i.e.,

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s)^2 ds dt < \infty.$$

Nosso objetivo é dar sentido à integral

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(s) dB(t).$$

Wiener (1938) definiu a integral múltipla seguindo dois passos: *i*) avaliando a integral de uma função simples e *ii*) avaliando sua convergência, como fizemos na Seção 3.3.3. Dessa forma, seja $f \in L^2([a, b]^2)$ uma função simples dada por

$$f(t, s) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} 1_{[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]},$$

em que $\{a = t_0, \dots, t_n = b\}$ e $\{a = s_0, \dots, s_m = b\}$ são partições do intervalo $[a, b]$ e $a_{i,j}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, uma constante real. A integral dupla idealizada por Wiener é dada

$$I_W^2(f) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(s_j) - B(s_{j-1})).$$

Tomando por exemplo $f(t, s) = 1_{[0,1] \times [0,1]}$, a integral é dada por

$$\begin{aligned} I_W^2(f) &= \int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(s_j) - B(s_{j-1})) \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m (B(s_j) - B(s_{j-1})) \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= B(1)^2. \end{aligned}$$

Contudo, assumindo duas funções $g(t, s) = h(t, s) = 1_{[0,1] \times [0,1]}$, temos $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I_W^2(gh)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(1)^2] = 1$, o que implicando em uma não ortogonalidade de g e h . Assim, esse resultado nos mostra que nem todas as integrais múltiplas de constantes, partindo da ideia de Wiener,

são ortogonais. No intuito de escrever o caos homogêneo, o qual é ortogonal, como integrais múltiplas, Itô (1951a) propôs outra maneira de construir as integrais múltiplas.

Como na Seção 3.3.3, a proposta de Itô também é feito em dois passos: *i*) avaliamos a integral para funções simples, contudo, desconsiderando os valores das diagonais e *ii*) avaliamos os limites dessas integrais de funções simples. Assim, obtemos uma integral em que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] = 0$.

Seja $f \in L^2([a, b]^2)$ uma função simples que assume valores fora das diagonais, i.e., se

$$[a, b]^2 = \bigcup_{i, j=1}^n [t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j),$$

sua diagonal é dada por

$$\bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i)^2,$$

sendo assim, a função f pode possuir valores diferentes de 0 em

$$[a, b]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i)^2 = \bigcup_{i \neq j} [t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j).$$

Dessa forma, f é dado por

$$f(t, s) := \sum_{i \neq j} a_{i, j} 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j)},$$

em que $\{a = t_0, \dots, t_n = b\}$ é a partição do intervalo $[a, b]$ e $a_{i, j}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, uma constante real.

Seja $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a integral dupla é dada por

$$I^2(f) := \sum_{i \neq j} a_{i, j} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})).$$

A integral $I^2(f)$ é chamada de integral dupla de Wiener-Itô e aprofundaremos sua discussão mais a diante.

Dessa forma, assumindo $f(t, s) := 1_{[0, 1] \times [0, 1]}$, podemos escrever a seguinte integral

$$\begin{aligned} I_n^2(f) &= \sum_{i \neq j}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) \\ &= \sum_{i, j=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2, \end{aligned}$$

em que, a primeira somatória é a somatória obtida no primeiro exemplo dessa seção e a segunda somatória é a variação quadrática de um movimento Browniano. Logo, a convergência em

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dado por

$$\begin{aligned} I^2(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^2(f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \\ &= B(t)^2 - 1, \end{aligned}$$

em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dessa forma, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] = 0$.

Uma propriedade de interesse é saber se podemos escrever a integral estocástica dupla como 2 aplicações sucessivas das integrais estocásticas trabalhadas nas Seções 3.3.3 e 3.3.4. Para avaliar isso, considere mais uma vez a integral de $f(t, s) = 1_{[0,1] \times [0,1]}$, que é dada por

$$\begin{aligned} I^2(f) &= \int_0^1 \int_0^1 1 \, dB(t)dB(s) \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 1 \, dB(t) \right] dB(s) \\ &= \int_0^1 B(1) \, dB(s), \end{aligned}$$

obtendo uma integral de Itô. Porém, como vimos na Seção 3.3.4, $B(1)$ não é adaptado a filtragem, logo, não é Itô integrável. Nesse sentido, precisamos fazer algumas alterações para obter esta propriedade. Assim

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^1 \int_0^1 1 \, dB(s)dB(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^1 \left[\int_0^t 1 \, dB(s) \right] dB(t) \\ &= 2 \int_0^1 B(t) \, dB(t) \\ &\stackrel{(b)}{=} B(t)^2 - 1, \end{aligned}$$

em que, usamos o fato das funções não possuírem valores nas diagonais e de $(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) = (B(t_j) - B(t_{j-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1}))$, com $i \neq j$, para reescrever a integral em (a) e usamos o resultado obtido no Exemplo 19 em (b), obtendo, assim, o resultado desejado.

Para finalizar a motivação, nos resta avaliar a convergência em $L^2([a, b]^2)$ da função simples com valores fora da digonal. Seja $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ uma sequência de funções simples que não possuem valores nas diagonais, em que $f_n \in L^2([a, b]^2)$ é dado por

$$f_n(t, s) := \sum_{i \neq j}^n 1_{[t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]}.$$

Vamos avaliar a convergência de f_n para 1. Tomando a integral dupla de Riemman, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 [1 - f_n(t,s)]^2 dt ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \left[1 - \sum_{i \neq j}^n 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j)} \right]^2 (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \neq j}^n [0]^2 (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [1]^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0.
\end{aligned}$$

em que $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$. Logo, f_n converge em $L^2([a, b]^2)$ para 1. Usando as ideias apresentadas, na próxima seção, vamos construir de forma geral a integral dupla de Wiener-Itô.

3.7.1 Integral dupla de Wiener-Itô

Vamos definir a seguinte integral

$$\int_a^b \int_a^b f(t,s) dB(t)dB(s),$$

em que $f \in L^2([a, b]^2)$, $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e denotamos as diagonais de $[a, b]^2$ como $D := \{(t, s) \in [a, b]^2 : t = s\}$. Vamos dividir em duas partes como na Seção 3.3.3

i) Vamos definir formalmente as funções simples com valores fora das diagonais.

Definição 18 (Caso de duas variáveis). Dizemos que $f \in L^2([a, b]^2)$ é uma **função simples com valores fora da diagonal**, quando

$$f(t,s) := \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j)},$$

em que $a = t_0 < \dots < t_n = b$ e $a_{i,j}$ uma constante real. Quando não houver ambiguidade nesta seção, podemos chamar apenas de funções simples.

Funções simples com valores fora da diagonal possuem propriedades lineares, assim, se $f, g \in L^2([a, b]^2)$ são duas funções, como dado pela Definição 18 e $c, d \in \mathbb{R}$, então $cf(t,s) + dg(t,s)$ também é uma função simples com valores fora da diagonal. O conjunto dessas funções é um espaço vetorial.

Definimos a integral para as funções simples $f \in L^2([a, b]^2)$ da seguinte maneira,

$$I^2(f) := \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})),$$

em que $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Como nas Seções 3.3.3 e 3.3.4, a integral I^2 é linear. A representação da função simples não é única, mas a representação da integral é única, e.g., considere duas funções simples $f_1, f_2 \in L^2([0, 2]^2)$, dadas por

$$\begin{aligned} f_1(t, s) &:= c1_{[0,1] \times [0,2]} + d1_{[0,2] \times [0,1]}, \\ f_2(t, s) &:= d1_{[0,1] \times [0,2]} + c1_{[0,2] \times [0,1]}, \end{aligned}$$

em que $c, d \in \mathbb{R}$. É fácil ver que $f_1(t, s) = f_2(s, t)$, porém

$$I^2(f_1) = (c + d)(B(1) - B(0))(B(2) - B(1)) = I^2(f_2). \quad (3.31)$$

Uma operação importante nesse contexto é a simetrização. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$, sua simetrização é dada por

$$\hat{f}(t, s) := \frac{1}{2}(f(t, s) + f(s, t)).$$

De fato, a simetrização é uma operação linear, i.e, se $f \in L^2([a, b]^2)$ e $c, d \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} (cf(t, s) + dg(t, s))\hat{\ } &= \frac{1}{2}(cf(t, s) + dg(t, s) + cf(s, t) + dg(s, t)) \\ &= \frac{c}{2}(f(t, s) + f(s, t)) + \frac{d}{2}(g(t, s) + g(s, t)) \\ &= c\hat{f}(t, s) + d\hat{g}(t, s). \end{aligned}$$

É fácil ver que \hat{f} é simétrico e se f for simétrico, $\hat{f} = f$. Além disso, se f for uma função simples com valores fora da diagonal, \hat{f} também é. Por fim, considerando a norma para $f \in L^2([a, b]^2)$

$$\|f(t, s)\| = \left(\int_a^b \int_a^b f(t, s) dt ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(t, s)\| &\stackrel{(a)}{\leq} \left| \frac{1}{2} \right| (\|f(t, s)\| + \|f(s, t)\|) \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2} 2 \|f(t, s)\| \\ &= \|f(t, s)\|, \end{aligned}$$

em que, usamos as propriedades da norma em (a), que podem ser checadas no Anexo A e usamos a simetria da integral de Lebesgue em (b), i.e,

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s) dt ds = \int_a^b \int_a^b f(s, t) dt ds.$$

Lema 10. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$ é uma função simples com valores fora da diagonal. Então,

$$I^2(f) = I^2(\hat{f}).$$

Demonstração. Vamos assumir a função simples $f \in L^2([a, b]^2)$, que é dada por

$$f(t, s) := 1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]},$$

em que, $a = t_1 < t_2 < s_1 < s_2 = b$ e $[t_1, t_2] \cap [s_1, s_2] = \emptyset$. A simetrização de f é dada por

$$\hat{f}(t, s) := \frac{1}{2}(1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]} + 1_{[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]}).$$

As integrais são dadas por

$$I^2(f) = (B(t_1) - B(t_2))(B(s_1) - B(s_2)),$$

$$\begin{aligned} I^2(\hat{f}) &= \frac{1}{2}((B(t_1) - B(t_2))(B(s_1) - B(s_2)) + (B(s_1) - B(s_2))(B(t_1) - B(t_2))) \\ &= \frac{1}{2}2(B(t_1) - B(t_2))(B(s_1) - B(s_2)) \\ &= (B(t_1) - B(t_2))(B(s_1) - B(s_2)) \\ &= I^2(f), \end{aligned}$$

obtendo o resultado desejado. É suficiente provar apenas para f , pois funções simples, simetrizações e integrais são operações lineares. \square

No próximo lema, apresentamos os momentos de I^2 .

Lema 11. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$ uma função simples com valores fora da diagonal, então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] &= 0, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] &= \int_a^b \int_a^b f(t, s)^2 dt ds. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos provar que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] = 0$. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$ uma função simples e com a seguinte integral

$$I^2(f) = \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} (B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})),$$

em que, $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Temos para $i \neq j$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))] &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))] \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(t_j) - B(t_{j-1}))] \\ &\stackrel{(b)}{=} 0, \end{aligned}$$

em que, usamos o item *iii*) da Definição 6 em (a) e usamos o item *ii*) da Definição 6 em (b). Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i \neq j}^n a_{i,j} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right] \\ &= \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] \\ &= 0,\end{aligned}$$

concluindo a primeira parte da prova. Vamos provar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] = \int_a^b \int_a^b f(t,s)^2 dt ds.$$

Vamos assumir uma função simples e simétrica $f \in L^2([a,b]^2)$. Dessa forma, $f = \hat{f}$ e $a_{i,j} = a_{j,i}$, $\forall i \neq j$. Assumindo $\xi_i := (B(t_i) - B(t_{i-1}))$, temos a seguinte integral

$$I^2(f) = \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \stackrel{(a)}{=} 2 \sum_{i < j}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j,$$

em que (a) usamos a simetria de f . Tomando o segundo momento, obtemos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(f)^2] = 4 \sum_{i < j}^n \sum_{p < q}^n a_{i,j} a_{p,q} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q]$$

Vamos avaliar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q]$ fixando $i < j$. Assumindo $i \neq p$, temos as seguintes possibilidades de valores

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i^2 \xi_j \xi_p] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i^2] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_j] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_p] = 0, \text{ se } i = q, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j^2 \xi_p] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_j^2] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_p] = 0, \text{ se } j = q, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j^2 \xi_q] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_j^2] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_q] = 0, \text{ se } j = p, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_j] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_p] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_q] = 0, \\ \text{se } i, j, q \text{ e } p \text{ forem diferentes.} \end{cases}$$

Assim, para $i \neq p$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = 0$, $\forall p < q$. De forma equivalente, é fácil ver que, para

$j \neq q$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = 0$, $\forall p < q$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] &= 4 \sum_{i < j}^n \sum_{p < q}^n a_{i,j} a_{p,q} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] \\ &= 4 \sum_{i < j}^n a_{i,j}^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i^2 \xi_j^2] \\ &= 4 \sum_{i < j}^n a_{i,j}^2 \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_i^2] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\xi_j^2] \\ &= 4 \sum_{i < j}^n a_{i,j}^2 (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &= 2 \sum_{i \neq j}^n a_{i,j}^2 (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &= 2 \int_a^b \int_a^b f(t,s)^2 dt ds \\ &\stackrel{(a)}{=} 2 \int_a^b \int_a^b \hat{f}(t,s)^2 dt ds, \end{aligned}$$

em que, usamos o fato de $f = \hat{f}$ se f for simétrico em (a) . Assuma uma função simples $f \in L^2([a,b]^2)$ qualquer. Do Lema 10, $I^2(f) = I^2(\hat{f})$. Como \hat{f} é simétrico, podemos usar o resultado anterior, logo

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(\hat{f})^2] = 2 \int_a^b \int_a^b \hat{f}(t,s)^2 dt ds,$$

concluindo a prova. □

ii) Vamos aproximar a integral de uma função simples para a integral de interesse. Isso nos é garantido devido ao próximo lema.

Lema 12. Seja $f \in L^2([a,b]^2)$ uma função. Existe uma sequência $\{f_n(t,s) : n \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ de funções simples com valores fora da diagonal, em que $f_n \in L^2([a,b]^2)$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b |f(t,s) - f_n(t,s)|^2 dt ds = 0.$$

Demonstração. Suponha $f \in L^2([a,b]^2)$ e que D_δ seja o conjunto de pontos em $[a,b]^2$ que possuem a distância menor que δ da diagonal D . Tomando um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, segue que existe um $\varepsilon := \varepsilon(\delta) > 0$, tal que

$$\int \int_{D_\delta} f(t,s)^2 dt ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assuma $D_\delta^c := [a,b]^2 \setminus D_\delta$. Em teoria da medida, existe uma função $\phi(t,s) := \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ (ver Capítulo 9 de [Kuo, 2006](#)), em que $A_i \subset D_\delta^c$ são retângulos disjuntos, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, tal que

$$\int \int_{D_\delta^c} |f(t,s) - \phi(t,s)|^2 dt ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, podemos somar as duas desigualdades e obter,

$$\int_a^b \int_a^b |f(t,s) - \phi(t,s)|^2 dt ds < \varepsilon.$$

Sabemos que ϕ não possui valores na diagonal, além disso, ϕ é escrito como na Definição 18. Assim, ϕ é uma função simples com valores fora da diagonal. Logo, concluímos a prova. \square

Dessa forma, dado uma sequência de funções simples $\{f_n : n \in \{1, \dots\}\}$, em que f_n converge em $L^2([a, b]^2)$ para $f \in L^2([a, b]^2)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|I^2(f_n) - I^2(f_m)|^2] &\stackrel{(a)}{=} \lim_{n,m \rightarrow \infty} 2\|\hat{f}_n(t,s) - \hat{f}_m(t,s)\|^2 \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \lim_{n,m \rightarrow \infty} 2\|f_n(t,s) - f_m(t,s)\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que, usamos a linearidade de I^2 e o Lema 11 em (a) e usamos $\|\hat{f}\| < \|f\|$ em (b). Dessa forma, a sequência $\{I^2(f_n) : n \in \{1, \dots\}\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Além disso, definindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^2(f_n) = I^2(f), \text{ em } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

podemos ver que I^2 é bem definido.

Definição 19. Seja $\{f_n : n \in \{1, \dots\}\}$ uma sequência de funções simples com valores fora da diagonal, em que $f_n \in L^2([a, b]^2)$ converge em $L^2([a, b]^2)$ para $f \in L^2([a, b]^2)$. Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I^2(f_n) = I^2(f), \text{ em } L^2([a, b]^2),$$

é a integral dupla de Wiener-Itô.

Teorema 13. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$, então

- (1) $I^2(f) = I^2(\hat{f})$;
- (2) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] = 0$;
- (3) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] = \int_a^b \int_a^b \hat{f}(t,s)^2 dt ds$.

Demonstração. A demonstração é equivalente ao Teorema 6. \square

Teorema 14. Seja $f \in L^2([a, b]^2)$, então

$$\int_a^b 2 \left(\int_a^t \hat{f}(t,s) dB(s) \right) dB(t),$$

em que, $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ é um movimento Browniano definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Note que, se tomarmos $X(t) := \int_a^t 2\hat{f}(t,s) dB(s)$, X é uma integral de Wiener e a integral de fora do Teorema 14 é uma integral de Itô, i.e.,

$$I(X) := \int_a^b X(t) dB(t).$$

Além disso, X é adaptado à filtragem Browniana e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I(X)^2] &= \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X(t)^2] dt \\ &= 4 \int_a^b \int_a^t \hat{f}(t,s)^2 ds dt \\ &\stackrel{(a)}{=} 4 \|\hat{f}\|^2 \\ &\stackrel{(b)}{\leq} 4 \|f\|^2 \\ &\stackrel{(c)}{<} \infty, \end{aligned}$$

em que, que usamos a definição da norma em $L^2([a,b]^2)$ em (a), usamos a desigualdade $\|\hat{f}\| < \|f\|$ em (b) e usamos a definição de uma função $f \in L^2([a,b]^2)$ em (c). Logo, $X \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Então, X é um processo estocástico que de fato é Itô integrável, como visto na Seção 3.3.4.

Demonstração. Vamos assumir a função simples $f \in L^2([a,b]^2)$ dada por

$$f(t,s) := 1_{[t_1,t_2] \times [s_1,s_2]},$$

em que, $a = s_1 < s_2 < t_1 < t_2 = b$. A integral de dupla de Wiener-Itô de f é dada por

$$\begin{aligned} I^2(f) &= \int_a^b \int_a^b f(t,s) dB(t) dB(s) \\ &= (B(t_2) - B(t_1))(B(t_2) - B(t_1)). \end{aligned}$$

Por outro lado, se \hat{f} é a simetrização de f , dada por

$$\hat{f}(t,s) := \frac{1}{2}(1_{[t_1,t_2] \times [s_1,s_2]} + 1_{[s_1,s_2] \times [t_1,t_2]}),$$

temos a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_a^b 2 \left(\int_a^t \hat{f}(t,s) dB(s) \right) dB(t) &= \int_{t_1}^{t_2} 2 \left(\int_{s_1}^{s_2} 1 dB(s) \right) dB(t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (B(s_2) - B(s_1)) dB(t) \\ &= (B(t_2) - B(t_1))(B(s_2) - B(s_1)). \end{aligned}$$

Dessa forma, provamos o Teorema 14 para o caso em que $f(t,s) := 1_{[t_1,t_2] \times [s_1,s_2]}$. Essa prova é suficiente, sendo o teorema válido para as demais funções simples. Isso ocorre, pois as funções simples, suas simetrizações e as integrais dupla possuem propriedades lineares. Por fim, basta utilizar a aproximação de funções simples para $L^2([a,b]^2)$ e concluimos a prova. \square

Assim, terminamos a construção da integral dupla de Wiener-Itô. No exemplo a seguir retomamos ao exemplo mostrado na motivação.

Exemplo 35. Queremos integrar a função $f(t, s) := 1_{[0,1] \times [0,1]}$. A função $f \in L^2([a, b]^2)$, então a integral dupla de Wiener-Itô é dada por

$$I^2(f) = \int_0^1 \int_0^1 1 dB(s) dB(t).$$

Já mostramos que $I^2(f) = B(1)^2 - 1$ utilizando a sequência de funções simples $\{f_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$, em que, $f_n(t, s) := \sum_{i \neq j}^n 1_{[t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]}$. Agora, vamos provar utilizando o Teorema 14, i.e.,

$$\begin{aligned} I^2(f) &= \int_0^1 \left(2 \int_0^t 1 dB(s) \right) dB(t) \\ &= \int_0^1 B(t) dB(t) \\ &= B(1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Além disso, do Teorema 13,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)] &= 0, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^2(f)^2] &= 2 \int_0^1 \int_0^1 1 dt ds = 2. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(1)^2 - 1] &= 0, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(B(1)^2 - 1)^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(1)^4] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(1)^2]^2 \stackrel{(a)}{=} 1^2 \frac{4!}{2!2^2} - 1 = 2. \end{aligned}$$

Nessa seção, contruímos a integral dupla de Wiener-Itô, como também, estudamos suas propriedades. Uma pergunta natural é: como ficaria os resultados apresentados anteriormente para uma integral estocástica de ordem n ? Na próxima seção, mostramos isso ao apresentar a integral múltipla de Wiener-Itô.

3.7.2 Integral múltipla de Wiener-Itô

Nesta seção, vamos apresentar a integral múltipla de Wiener-Itô. Como a construção da integral é feita da mesma maneira da seções anterior com algumas alterações, omitiremos as provas e nos concentraremos em seus resultados. Para mais detalhes do desenvolvimento, consultar a Seção 9.6 de [Kuo \(2006\)](#).

Assuma $T := [a, b]$, $f \in L^2(T^n)$, com $n \in \{1, 2, \dots\}$, quando

$$\int \cdots \int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n)^2 dt_1 \dots dt_n < \infty.$$

Uma função simples com valores fora da diagonal $f \in L^2(T^n)$ é dada por

$$f(t_1, \dots, t_n) := \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \leq k} a_{i_1, \dots, i_n} 1_{[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}] \times \dots \times [\tau_{i_{n-1}-1}, \tau_{i_n}]},$$

em que $a_{i_1, \dots, i_n} = 0$, se $i_p = i_q$, para $q \neq p$ e $a = \tau_0 < \dots < \tau_k = b$. Por conveniência, vamos chamar apenas de função simples.

A simetrização \hat{f} de uma função $f \in L^2(T^n)$ é dada por

$$\hat{f}(t_1, \dots, t_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}),$$

em que σ é a permutação de $\{1, \dots, n\}$. De forma análoga a seção anterior $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$.

A integral de ordem n de uma função simples $f \in L^2(T^n)$ é dada por

$$I^n(f) := \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \leq k} a_{i_1, \dots, i_n} (B(\tau_{i_1}) - B(\tau_{i_1-1})) \dots (B(\tau_{i_n}) - B(\tau_{i_n-1})),$$

em que $a_{i_1, \dots, i_n} = 0$, se $i_p = i_q$, para qualquer $q \neq p$ e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ é um movimento Browniano definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 20. Seja $f \in L^2(T^n)$, com $n \in \{1, 2, \dots\}$ e $\{f_k : k \in \{1, 2, \dots\}\}$ funções simples com valores fora da diagonal, em que $f_k \in L^2(T^n)$, com $k \in \{1, 2, \dots\}$, em que f_k converge em $L^2(T^n)$ para f . Denominamos a integral múltipla de Wiener-Itô o seguinte limite

$$I^n(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} I^n(f_k), \quad \text{em } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

A integral múltipla de Wiener-Itô é denotada por

$$I^n(f) := \int \dots \int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1) \dots dB(t_n).$$

Esta definição é possível, devido a existência de uma sequência de funções simples $\{f_k : k \in \{1, 2, \dots\}\}$ que converge para uma função $L^2(T^n)$ (ver Seção 9.6 de [Kuo, 2006](#)). Assim, temos os seguintes relações para a integral múltipla:

Teorema 15. Seja $f \in L^2(T^n)$, com $n \in \{1, 2, \dots\}$, então

- i) $I^n(f) = I^n(\hat{f})$;
- ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^n(f)] = 0$;
- iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(I^n(f))^2] = n! \|\hat{f}\|^2$, em que $\|f\|$ é a norma em $L^2(T^n)$ de f , dada por

$$\|f\| := \left(\int \dots \int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n)^2 dt_1 \dots dt_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De maneira análoga a seção anterior, podemos escrever a integral múltipla de Wiener-Itô como n integrais de Itô aplicadas iterativamente.

Teorema 16. Seja $f \in L^2(T^n)$, com $n \in \{2, 3, \dots\}$, então

$$\begin{aligned} I^n(f) &= \int \cdots \int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_n) \\ &= n! \int_a^b \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \cdots dB(t_1). \end{aligned}$$

Por fim, no próximo teorema, apresentamos que a correlação de integrais múltiplas de ordens diferentes é nula. Dessa forma, I^n e I^m , com $n \neq m$, são ortogonais no espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Teorema 17. Seja $n \neq m$, então, para todo $f \in L^2(T^n)$ e $g \in L^2(T^m)$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^n(f)I^m(g)] = 0.$$

As provas dos resultados dessa seção são semelhantes aos da seção anterior, por isso os omitimos. Para mais detalhes sobre as provas, o(a) leitor(a) pode checar a Seção 9.6 do livro de Kuo (2006). Na próxima seção, apresentamos o teorema de Wiener-Itô, o qual utiliza as integrais múltiplas em sua composição. A partir dele, vamos provar o teorema de representação de martingais, que utilizamos Capítulo 4 para mostrar a completude do mercado.

3.7.3 Teorema de Wiener-Itô e representação de martingales

Um resultado importante para o caos homogêneo e que utiliza as integrais estocásticas múltiplas, é o teorema de Wiener-Itô. Como consequência, a partir disso, conseguimos derivar o teorema de representação de martingales, em que qualquer martingale pode ser escrito utilizando uma integral de Itô.

Seja $B : \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$, em que $\mathcal{F}^B := \sigma\{B(t) : t \in [a, b]\}$. Mais uma vez, seja $T := [a, b]$ e seja $L_{sim}^2(T^n)$ a classe das funções $f \in L^2(T^n)$ que são simétricas.

Teorema 18 (Teorema de Wiener-Itô). Podemos decompor o espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$ na seguinte soma direta ortogonal

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P}) = K_0 \oplus K_1 \oplus \cdots \oplus K_n \oplus \cdots,$$

em que, K_n é o conjunto de integrais de Wiener-Itô de ordem n , em que $n \in \{1, 2, \dots\}$ e K_0 qualquer função determinística real. Além disso, se $\phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$, ϕ pode ser escrito unicamente da seguinte forma

$$\phi := \sum_{n=0}^{\infty} I^n(f_n), \text{ em que } f_n \in L^2_{sim}(T^n), \text{ com } n \in \{1, 2, \dots\}$$

e segue que

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2.$$

Omitiremos a prova, contudo, ela pode ser checada no 9.6 Kuo (2006). O teorema de Wiener-Itô relaciona o caos homogêneo com as integrais múltiplas. O caos de ordem n é dado pelo conjunto K_n , em que K_n é o conjunto das integrais de Wiener-Itô de ordem n (ver Kuo, 2006).

Vamos assumir $f \in L^2(T^n)$ e $B := \{B(t) : t \in [a, b]\}$ um movimento Browniano definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$. A integral de f é dada por

$$\int \cdots \int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_n).$$

Assumindo a variável aleatória X e usando o Teorema 16, obtemos

$$X = \int_a^b \left(n! \int_a^{t_1} \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \cdots dB(t_2) \right) dB(t_1).$$

Tomando

$$\theta(t) = n! \int_a^t \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \cdots dB(t_2),$$

obtemos

$$X = \int_a^b \theta(t) dB(t)$$

.

Por θ ser uma integral de Wiener-Itô, θ é adaptado a filtragem. Além disso, podemos escrever θ como

$$\begin{aligned} \theta(t) &= n! \int_a^t \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \cdots dB(t_2) \\ &= n(n-1)! \int_a^t \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \cdots dB(t_2) \\ &= n \int \cdots \int_{[a,t]^{n-1}} f(t, \dots, t_n) dB(t_n) dB(t_{n-1}) \cdots dB(t_2). \end{aligned}$$

Tomando o segundo momento de θ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\theta(t)^2] &= n^2(n-1)! \int \cdots \int_{[a,t]^{n-1}} \hat{f}(t, \dots, t_n)^2 dt_n dt_{n-1} \cdots dt_2 \\ &\leq n^2(n-1)! \int \cdots \int_{[a,b]^{n-1}} \hat{f}(t, \dots, t_n)^2 dt_n dt_{n-1} \cdots dt_2. \end{aligned}$$

Por fim, tomando a integral de t , vemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\theta(t)^2] dt &= n^2(n-1)! \int \cdots \int_{[a,t]^n} \hat{f}(t, \dots, t_n)^2 dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt \\
&\leq n^2(n-1)! \int \cdots \int_{[a,b]^n} \hat{f}(t, \dots, t_n)^2 dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt \\
&= nn! \int \cdots \int_{[a,b]^n} \hat{f}(t, \dots, t_n)^2 dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt \\
&= n\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X^2] \\
&\stackrel{(a)}{<} \infty,
\end{aligned}$$

em que, usamos o fato de $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$ em (a). Logo, $\theta \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, então θ é Itô integrável. Usando essa ideia, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 19. Seja $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$, em que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = 0$. Então existe $\theta \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, tal que

$$X = \int_a^b \theta(t) dB(t).$$

Demonstração. Do Teorema 18, X é dado por

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I^n(f_n), \text{ em que } f_n \in L^2_{sim}(T^n).$$

Por hipótese, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = 0$, logo $f_0 = 0$, então

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{n=1}^{\infty} I^n(f_n) \\
\|X\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n! \|f_n\|^2.
\end{aligned}$$

Definimos

$$\theta_n(t) := n! \int_a^t \cdots \left(\int_a^{t_{n-2}} \left(\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}_n(t, \dots, t_n) dB(t_n) \right) dB(t_{n-1}) \right) \dots dB(t_2),$$

em que, $n \in \{1, 2, \dots\}$. De maneira análoga, podemos escrever

$$\theta_n(t) = n \int \cdots \int_{[a,t]^{n-1}} f_n(t, \dots, t_n) dB(t_n) \dots dB(t_2).$$

Da definição de θ_n , temos

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \theta_n(t) dB(t).$$

Do Teorema 17, obtemos que a sequência θ_n é ortogonal e definimos S_n como

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^n \theta_k(t).$$

Temos $I^n(f_n) = \int_a^b \theta(t) dB(t)$, então $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^n(f_n)^2] = \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\theta_n(t)^2] dt$. Assim, obtemos para $n > m$

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(S_n(t) - S_m(t))^2] &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\sum_{k=1}^n \theta_k(t) - \sum_{k=1}^m \theta_k(t) \right)^2 \right] dt \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(\sum_{k=m+1}^n \theta_k(t) \right)^2 \right] dt \\ &\stackrel{(a)}{=} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^n \int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [(\theta_k(t))^2] dt \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[I^k(f_k)^2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que, usamos a ortogonalidade da sequência θ_k em (a). Dessa forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \theta(t)$ existe em $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} X &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b \theta_k(t) dB(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n \theta_k(t) dB(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(t) dB(t) \\ &= \int_a^b \theta(t) dB(t), \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Para o próximo teorema, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 21. Seja $X := \{X(t) : t \in [a, b]\}$ e $\tilde{X} := \{\tilde{X}(t) : t \in [a, b]\}$ dois processos estocásticos definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que \tilde{X} é **versão de** X quando $\mathbb{P}(\tilde{X}(t) = X(t)) = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

Teorema 20 (Representação de martingales com média 0). Sejam $M := \{M(t) : t \in [0, T]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, um processo estocástico e um movimento Browniano definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$. Se $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$ e é um martingale em respeito à filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$, em que $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : t > s\}$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(0)] = 0$, então M possui uma versão contínua dada por

$$\tilde{M}(t) = \int_0^t \theta(s) dB(s),$$

em que, $\theta \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Demonstração. Como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(0)] = 0$ e M é um martingale, então, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(b)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(0)]$, para qualquer $t \in [a, b]$. Como $M \in L^2([a, b] \times \Omega)$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(b)] = 0$, então, pelo Teorema 19

$$M(b) = \int_a^b \theta(t) dB(t).$$

Definimos o processo \tilde{M} como

$$\tilde{M}(t) := \int_b^t \theta(s) dB(s),$$

que por sua vez, é um martingale em respeito a \mathbb{F} e contínuo quase certamente, devido aos Teoremas anteriores. Dessa forma,

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(b) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{M}(b) | \mathcal{F}_t] \\ &= \tilde{M}(t), \text{ q.c.}, \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Teorema 21 (Representação de martingales). Sejam $M := \{M(t) : t \in [0, T]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, um processo estocástico e um movimento Browniano definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e é um martingale em respeito à filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$, em que $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : t > s\}$, então M possui uma versão contínua dada por

$$\tilde{M}(t) = M(0) + \int_0^t \theta(s) dB(s),$$

em que, $\theta \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Demonstração. Assuma o processo $Z(t) := M(t) - M(0)$, que por sua vez possui $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z(t)] = 0$. Do Teorema 20, temos

$$\tilde{Z}(t) = \int_0^t \theta(s) dB(s).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(t) = \tilde{Z}(t)) &= \mathbb{P}(M(t) = M(0) + \tilde{Z}(t)) \\ &= \mathbb{P}(M(t) = \tilde{M}(t)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

concluindo a prova. □

O Teorema 21 não exclui a possibilidade de martingales não contínuos possuírem uma versão contínua. Um exemplo de martingale descontínuo pode ser visto no Exemplo 3.9 de Capiński e Kopp (2012).

Nesse capítulo, estudamos os conceitos de processos estocásticos que utilizamos ao longo da dissertação. Além disso, introduzimos o(a) leitor(a) ao cálculo estocástico de Itô, construímos

a integral de Itô e avaliamos algumas de suas propriedades. Além disso, estudamos as EDEs e sob quais condições possuímos uma única solução forte. Por fim, estudamos a fórmula de Itô multidimensional e a integral múltipla de Wiener-Itô. No próximo capítulo, usamos esses conceitos para trabalhar com o apreamento de opções via modelo de Black - Scholes - Merton.

MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON

[Bachelier \(1900\)](#) foi um dos primeiros a descrever a dinâmica dos preços das ações utilizando modelos baseados em movimentos Brownianos e, a partir desses modelos, apresentou cálculos para determinar os prêmios de opções. O modelo linear de Bachelier é descrito por um movimento Browniano linear com *drift*. Nesse modelo, os preços podem assumir valores negativos, o que não reflete o que ocorre na vida real. Um modelo mais realístico é baseado em um movimento Browniano geométrico (ver [Samuelson, 1965](#)), no qual se baseia o modelo de Black-Scholes-Merton. Neste capítulo, estudamos uma das maneiras de se obter a fórmula de apreçamento de opções de compra Europeia proposta por [Black e Scholes \(1973\)](#). Diferente do modelo de n -períodos, proposto por [Cox, Ross e Rubinstein \(1979\)](#), o modelo de Black-Scholes-Merton é mais robusto, uma vez que a dinâmica dos preços é dada por processos estocásticos a tempo contínuo e que seguem um processo de Itô. Este capítulo explica também como os parâmetros do modelo de Black-Scholes-Merton podem ser estimados a partir de dados históricos.

4.1 Dinâmicas dos ativos

Considere a negociação de opções de compra europeia em um mercado livre de arbitragem, no qual consideramos uma carteira baseada em dois tipos de ativos: ativo de risco (ação) e o ativo livre de risco (títulos do tesouro). Além disso, assuma que as transações, nesse mercado, podem ser realizadas em qualquer instante de tempo e são livres de impostos, ou seja, podem ser fracionadas da forma que quisermos.

Nesse mercado, a dinâmica do ativo livre de risco é descrita por uma função determinística $A : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$A(t) = A(0)e^{rt}, \quad (4.1)$$

em que $A(0)$ e r são constantes reais positivas que representam, respectivamente, o valor inicial do ativo livre de risco e a taxa de juros em consideração. Essa função é solução da seguinte

equação diferencial ordinária

$$dA(t) = rA(t)dt, \quad 0 \leq t \leq T$$

com valor inicial $A(0) > 0$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, $A(0) = 1$ e, assim,

$$A(t) = e^{rt}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como mencionamos, [Bachelier \(1900\)](#) propôs que a dinâmica do preço de uma ação seguisse um movimento Browniano linear com *drift*. Contudo, esse processo permite que o preço de uma ação assumia valores negativos. Para sanar esse problema, [Samuelson \(1965\)](#) propôs que o preço de um ativo fosse um movimento Browniano geométrico, assumindo, desta forma, apenas valores positivos. [Black e Scholes \(1973\)](#) usaram o modelo proposto por [Samuelson \(1965\)](#) para derivar a fórmula do preço de uma opção. Seja, então, $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano geométrico definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i.e.,

$$S(t) := S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.2)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são os parâmetros do modelo, e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ é um movimento Browniano definido no mesmo espaço de probabilidade no qual o processo S está definido. A variável aleatória $S(t)$ representa o valor da ação no instante de tempo $t \in [0, T]$. Mostramos, no Exemplo 27, que S é a solução da seguinte EDE

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), & 0 \leq t \leq T \\ S(0) > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Além disso, assumindo $f(t, S(t)) = \mu S(t)$ e $\sigma'(t, S(t)) = \sigma S(t)$, para todo $t \in [0, T]$ segue que

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq |\mu||x - y|, & |f(t, x)| &\leq |\mu|(1 + |x|), \\ |\sigma'(t, x) - \sigma'(t, y)| &\leq \sigma|x - y|, & |\sigma'(t, x)| &\leq \sigma(1 + |x|). \end{aligned}$$

Logo, f e σ' satisfazem as condições de Lipschitz e de crescimento linear, implicando, pelo Lema 9, que S é a única solução para a EDE (4.3).

Ao assumir uma filtragem \mathbb{F}^S , em que $\mathcal{F}_t^S := \sigma\{S(s) : s \leq t\}$, com $\mathcal{F}_t^S \in \mathbb{F}^S$, coincidimos com uma filtragem \mathbb{F} , em que, $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : s \leq t\}$, com $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$. Isso ocorre pois nossa única fonte de aleatoriedade parte do Movimento Browniano B . A partir disso, também podemos concluir a distribuição de $S(t)$. Como $B(t)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância t , então, $\ln(S(t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)$ segue uma distribuição Gaussiana com média $\ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ e variância $t\sigma^2$. Se uma variável X segue uma distribuição Gaussiana com média a e variância b , logo e^X segue uma distribuição log-normal com parâmetros a e b . Assim, $S(t)$ segue uma distribuição log-normal com parâmetros $\ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ e $\sigma^2 t$. A função densidade de probabilidade de $S(t)$ é dada por

$$f_{S(t)}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2t\pi}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(x) - \ln(S(0)) - (\mu - \sigma^2/2)t]^2}{2t\sigma^2} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Além disso, o valor esperado e variância de $S(t)$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(t)] &= S(0) \exp\{\mu t\}, \\ \text{Var}_{\mathbb{P}}(S(t)) &= S(0)^2 (\exp\{t\sigma^2\} - 1) \exp\{2\mu t\}.\end{aligned}$$

Podemos manipular o valor esperado $S(t)$ e obter $\mu = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(t)]}{S(0)}\right)$, o que implica que μ é o valor do log-retorno do preço médio de uma ação dividido pelo tempo. Além disso, como $\text{Var}_{\mathbb{P}}(\ln(S(t)/S(0))) = t\sigma^2$, segue que $t\sigma^2$ é a variação do log-retorno de uma ação. Chama-se σ de volatilidade do preço de uma ação por período de tempo, que em geral é assumido ano. Além disso, para esse modelo assumi-se que a volatilidade seja constante.

4.2 Precificação de opção pelo hedging

Considere a negociação de uma opção de compra de um ativo financeiro. Nesse tipo de contrato, o titular possui a opção de comprar, na data de maturidade, o ativo base por um preço que foi pré-estabelecido quando o contrato foi assinado, enquanto o lançador possui o dever de cumprir sua parte do acordo atendendo à vontade do titular. A fim de se proteger das oscilações do mercado, os lançadores constroem estratégias financeiras que (i) inicialmente, custem o preço da opção e, (ii) na data de maturidade, custem o retorno bruto do titular. Essas estratégias são denominadas estratégias de *hedging*. Para encontrar essa estratégia, precisamos assumir que o mercado se comporte de forma “justa” e, para isso, assumimos que esse mercado é completo e livre de arbitragem. Portanto, pelos Teoremas 1 e 2, é necessário e suficiente que exista uma única medida neutra ao risco.

Uma estratégia (ou processo portfólio) $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ é um processos estocástico previsível definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $\phi(t)$ é a quantidade de aportes um ativo base (no caso de opções, uma ação) no tempo t e $\psi(t)$ a quantidade de aportes de um determinado ativos livre de risco (*bond*). Na filtragem browniana, bastaria que $\pi \in L^2([0, T] \times \Omega)$, contudo, é necessário que a estratégia π seja um processo estocástico previsível, para que possamos utilizar integrais estocásticas mais gerais, i.e., integrais em respeito a martingales ou semimartingales.

Dada uma estratégia π , podemos associar a ela, um processo estocástico que modela a variação do do portfólio no intervalo de tempo $[0, T]$. Nesse sentido, seja $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ o processo estocástico em questão, o qual é definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que, $X^\pi(t)$, com $t \in [0, T]$, é dado por

$$X^\pi(t) := \phi(t)S(t) + \psi(t)A(t),$$

e representa o preço da estratégia π no tempo t .

A função de custo (*payoff*) de uma opção de compra é utilizada para avaliar os ganhos do titular da opção. Essa função é uma variável aleatória H definida no espaço de probabilidade

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que

$$H := \max(S(T) - K, 0)$$

em que $T > 0$ é a data de maturidade da opção de compra e $K > 0$ é o preço de exercício da opção. Em outras palavras, H representa o retorno bruto do titular da opção de compra.

Dessa forma, dizemos que uma estratégia π é uma estratégia de *hedging* quando $X^\pi(0) = c$ e $X^\pi(T) = H$, em que $c > 0$ é o prêmio a ser pago pela opção, i.e., $C(0) = c > 0$ com $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$, definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $C(t)$ representa o preço da opção no tempo t . Nesta seção, vamos determinar a estratégia de *hedging* π atrelado a um processo portfólio cujo ativo de risco é dado por um movimento Browniano geométrico e, a partir dela, vamos calcular o preço justo de uma opção.

4.2.1 Medida neutra ao risco

O próximo passo é definir as ferramentas que usamos para o cálculo do preço de uma opção. Para isso, vamos falar inicialmente sobre a medida neutra ao risco, cuja existência está atrelada à existência das estratégias de *hedging*. A medida neutra ao risco executa um papel fundamental na teoria de apreçamento de opções. Com ela, conseguimos calcular o valor esperado do valor de um portfólio a partir das variáveis obtidas no mercado, sem o viés do investidor (ver Seção 15.7 de Hull, 2015). Além disso, é relacionado com o mercado completo e livre de arbitragem, como visto no primeiro e no segundo teorema fundamental das finanças descritos, respectivamente, nos Teoremas 1 e 2.

Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$, $\bar{S} := \{\bar{S}(t) : t \in [0, T]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $S(t)$ representa o preço da ação no tempo $t \in [0, T]$ e $A(t)$ representa o preço do ativo livre de risco no tempo $t \in [0, T]$, B é um movimento Browniano e $\bar{S}(t)$ é o preço da ação descontado no instante de tempo t , o qual é dado por

$$\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{A(t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dessa forma, o valor esperado de $\bar{S}(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\bar{S}(t)|] &\stackrel{(a)}{\leq} \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\bar{S}(t)|^2]} \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|S(t)|^2]}}{A(t)} \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}_{\mathbb{P}}(S(t)) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(t)]^2}}{A(t)} \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{\sqrt{S(0)^2 (\exp\{t\sigma^2\} - 1) \exp\{2\mu t\} + S(0)^2 \exp\{2\mu t\}}}{A(t)} \\ &= \frac{S(0) \exp\left\{2\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right)t\right\}}{A(t)} < \infty, \end{aligned}$$

em que, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (a), a definição do processo descontado $\bar{S} = S/A$ em (b) e, por fim, usamos o valor esperado e a variância do movimento Browniano geométrico em (c).

Logo, o valor esperado condicionado à $\mathcal{F}_s := \sigma\{B(u) : u \leq s\}$, com $t > s$, é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\bar{S}(t) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{S(t)}{A(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\}}{\exp\{rt\}} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} S(0) \exp\{(\mu - r)t\} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ \sigma B(t) - \frac{\sigma^2}{2} t \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= S(0) \exp\{(\mu - r)t\} \exp \left\{ \sigma B(s) - \frac{\sigma^2}{2} s \right\} \\ &= \exp\{(\mu - r)(t - s)\} \bar{S}(s), \end{aligned}$$

em que usamos a propriedade do processo martingale do Exemplo 28 em (a). Logo, \bar{S} não é um martingale com respeito à medida \mathbb{P} .

A fim de determinar uma medida de probabilidade \mathbb{Q} para o qual o processo descontado \bar{S} seja um martingale, reescrevemos $\bar{S}(t)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \bar{S}(t) &= \frac{S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\}}{\exp\{rt\}} \\ &= S(0) \exp \left\{ \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\} \\ &\stackrel{(a)}{=} S(0) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} t + \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + B(t) \right) \right\}, \end{aligned}$$

qualquer que seja $t \in [0, T]$. Definindo $B_{\mathbb{Q}}(t) := \left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + B(t) \right)$ segue que

$$\bar{S}(t) = S(0) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t) \right\}.$$

De fato, o processo $B_{\mathbb{Q}} = \{B_{\mathbb{Q}}(t) : t \in [0, T]\}$ satisfaz os itens *i*), *iii*) e *iv*) da Definição 6. Contudo, $B_{\mathbb{Q}}(t) - B_{\mathbb{Q}}(s) = \left(\frac{\mu - r}{\sigma} (t - s) + (B(t) - B(s)) \right)$, para $t > s$, segue uma distribuição Gaussiana com média $\frac{\mu - r}{\sigma} (t - s)$ e variância $(t - s)$. Para que $B_{\mathbb{Q}}$ seja um movimento Browniano, precisamos que $\frac{\mu - r}{\sigma} (t - s)$ seja igual a 0. Na tentativa de eliminar o *drift*, assumimos que $b = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_{\mathbb{Q}}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{B_{\mathbb{Q}}(t)}(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\frac{(y-bt)^2}{2t}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(bt+x)}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (bt+x) f_{B(t)}(x) dx
 \end{aligned}$$

Queremos encontrar uma medida \mathbb{Q} tal que $B_{\mathbb{Q}}(t) = bt + B(t)$ seja um movimento Browniano com média 0. Em outras palavras, queremos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(bt+x)}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\frac{(x^2+2xbt+b^2t^2)}{2t}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(bt+x)}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\left(xb+\frac{b^2t}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (bt+x) e^{-\left(xb+\frac{b^2t}{2}\right)} f_{B(t)}(x) dx \\
 &= \int_{\Omega} (bt+B(t,\omega)) e^{-\left(B(t,\omega)b+\frac{b^2t}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega).
 \end{aligned}$$

Assim, podemos definir uma medida \mathbb{Q} da seguinte forma

$$\mathbb{Q}(A) := \int_A e^{-\left(xb+\frac{b^2t}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_{\mathbb{Q}}(t)] &= \int_{\Omega} B_{\mathbb{Q}}(t, \omega) d\mathbb{Q}(\omega) \\
 &= \int_{\Omega} (bt+B(t, \omega)) d\mathbb{Q}(\omega) \\
 &= \int_{\Omega} (bt+B(t, \omega)) e^{-\left(xb+\frac{b^2t}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por fim, vamos avaliar se \mathbb{Q} define, de fato, uma probabilidade. Note que, se alterarmos os sinais das constantes do processo de Itô do Exemplo 28, continuamos ainda com um processo martingale. Nesse sentido, considere o processo estocástico $M := \{M(t) : t \in [0, T]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que

$$M(t, \omega) := e^{-\left(B(t,\omega)b+\frac{b^2t}{2}\right)} > 0.$$

Pelo Exemplo 28, segue que M é um martingale e, portanto, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)]$ é constante. Como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(0)] = M(0) = 1$, obtemos $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t)] = 1$. Portanto,

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \int_{\Omega} e^{-\left(B(t,\omega)b+\frac{b^2t}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega) = 1, \text{ em que } t \in [0, T].$$

Com isso, conseguimos ver que a medida de probabilidade \mathbb{Q} possui os mesmos elementos de medida 0 de \mathbb{P} . Formalizaremos essa relação entre as medidas nas definições a seguir.

Definição 22. Suponha um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que a medida \mathbb{Q} , definida sobre o espaço (Ω, \mathcal{F}) , é **absolutamente contínua em respeito à medida \mathbb{P}** , quando $\mathbb{Q}(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$, em que $\mathbb{P}(A) = 0$. Nesse caso, escrevemos $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Além disso, dizemos que **a medida \mathbb{Q} é equivalente à medida \mathbb{P}** , quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Nesse caso, escrevemos $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Definição 23 (Medida neutra ao risco). Suponha um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que uma medida \mathbb{Q} , em que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, é **uma medida neutra ao risco**, quando os processos estocásticos que representam os preços dos ativos descontados são martingales em respeito à \mathbb{Q} .

O resultado obtido nessa motivação é o caso simples do Teorema de Girsanov, em que mudamos a medida de tal forma que obtemos uma medida Gaussiana equivalente, i.e., $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$. Dessa forma, o processo do preço da ação descontado \bar{S} é um martingale em respeito à medida \mathbb{Q} , o que implica que \mathbb{Q} é uma medida neutra ao risco para o modelo de Black-Scholes-Merton. Formalizamos o teorema de Girsanov para o caso simples a seguir.

Teorema 22 (Teorema de Girsanov - caso simples). Seja $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seja \mathbb{Q} uma medida definida sobre o espaço (Ω, \mathcal{F}) , em que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ e dada por

$$\mathbb{Q}(A) := \int_A e^{-\left(B(T, \omega)b + \frac{b^2 T}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

O processo estocástico $B_{\mathbb{Q}} := \{B_{\mathbb{Q}}(t) : t \in [0, T]\}$, dado por $B_{\mathbb{Q}}(t) := bt + B(t)$, em que $b = \frac{\mu - r}{\sigma}$, com $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \infty)$ e $r \in (0, \infty)$, é um movimento Browniano em respeito à medida \mathbb{Q} .

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, basta provar que $B_{\mathbb{Q}}$ satisfaz os itens da Definição 6. De fato, $B(0) = 0$, logo $B_{\mathbb{Q}}(0) = b0 + B(0) = 0$ satisfazendo o item *i*) da Definição 6. As funções $B(t)$ e t são quase certamente contínuas em $[0, T]$, portanto, $B_{\mathbb{Q}}(t)$ é quase certamente contínuo para $t \in [0, T]$, satisfazendo o item *iv*) da Definição 6.

Vamos provar a independência e distribuição dos incrementos para concluir a prova. Assuma uma partição $\Delta := \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ e o evento

$$A := \bigcap_{i=1}^n \{B_{\mathbb{Q}}(t_i, \omega) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1}, \omega) \leq a_i\}, \text{ em que } a_i \in \mathbb{R} \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Calculando a probabilidade do evento A , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(A) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_A] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left(B(T)b + \frac{b^2 T}{2}\right)} 1_A \right] \\
&\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left(B(T)b + \frac{b^2 T}{2}\right)} \prod_{i=1}^n 1_{\{B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1}) \leq a_i\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\prod_{i=1}^n e^{-\left((B(t_i) - B(t_{i-1}))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} 1_{\{B(t_i) - B(t_{i-1}) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \right] \\
&\stackrel{(b)}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left((B(t_i) - B(t_{i-1}))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} 1_{\{B(t_i) - B(t_{i-1}) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \right],
\end{aligned}$$

em que usamos a propriedade da função indicadora em (a) e a independência dos incrementos de B em (b). Ao avaliar o valor esperado de um elemento com índice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left((B(t_i) - B(t_{i-1}))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} 1_{\{B(t_i) - B(t_{i-1}) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \right] \\
&= \int_{\{B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} e^{-\left((B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} d\mathbb{P}(\omega) \\
&\stackrel{(a)}{=} \int_{\{x + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} e^{-\left(xb + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{(t_i - t_{i-1})2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}} dx \\
&= \int_{\{x + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \frac{1}{\sqrt{(t_i - t_{i-1})2\pi}} e^{-\frac{(x + b(t_i - t_{i-1}))^2}{2(t_i - t_{i-1})}} dx \\
&\stackrel{(b)}{=} \int_{\{y_i \leq a_i\}} \frac{1}{\sqrt{(t_i - t_{i-1})2\pi}} e^{-\frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}} dy \\
&= \mathbb{P}(y_i \leq a_i),
\end{aligned}$$

em que, usamos o fato de $B(t_i) - B(t_{i-1})$ seguir uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(t_i - t_{i-1})$ em (a) e realizamos a substituição $y_i = x + b(t_i - t_{i-1})$ em (b). Desse resultado, sabemos que y_i segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(t_i - t_{i-1})$. Contudo, temos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left((B(t_i) - B(t_{i-1}))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} 1_{\{B(t_i) - B(t_{i-1}) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \right] = \mathbb{Q}(B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1}) \leq a_i).$$

Então, $\mathbb{Q}(B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1}) \leq a_i) = \mathbb{P}(y_i \leq a_i)$, implicando que $B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1})$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(t_i - t_{i-1})$, satisfazendo o item *ii*) da Definição 6.

Por fim, tomamos $\mathbb{Q}(A)$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A) &= \mathbb{Q}\left(\bigcap_{i=1}^n \{B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1})\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\left((B(t_i) - B(t_{i-1}))b + \frac{b^2(t_i - t_{i-1})}{2}\right)} \mathbf{1}_{\{B(t_i) - B(t_{i-1}) + b(t_i - t_{i-1}) \leq a_i\}} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{Q}(B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1}) \leq a_i).\end{aligned}$$

Assim, conseguimos escrever a probabilidade acumulada da intersecção dos eventos como o produto das probabilidades conjuntas, concluindo que os incrementos de $B_{\mathbb{Q}}$ são independentes, satisfazendo o item *iii*) da Definição 6. Logo, $B_{\mathbb{Q}}$ é um movimento Browniano em respeito à medida \mathbb{Q} . \square

Com esse resultado, conseguimos tirar algumas conclusões sobre o processo do preço de uma ação.

Teorema 23. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, um movimento Browniano geométrico que representa a dinâmica do preço de uma ação, a função que descreve o ativo livre de risco e um movimento Browniano, todos definidos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Seja $B_{\mathbb{Q}} := \{B_{\mathbb{Q}}(t) : t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano definido pelo Teorema 22. Podemos escrever as seguintes equações

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB_{\mathbb{Q}}(t), \quad (4.4)$$

$$d\bar{S}(t) = \sigma \bar{S}(t)dB_{\mathbb{Q}}(t), \quad (4.5)$$

em que $r \in (0, \infty)$, $\sigma \in (0, \infty)$ e $\bar{S}(t) = S(t)/A(t)$ é o preço da ação descontado no tempo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Do Teorema 22, sabemos que $B_{\mathbb{Q}}(t) = \frac{(\mu-r)}{\sigma}t + B(t)$, logo, $B(t) = B_{\mathbb{Q}}(t) - \frac{(\mu-r)}{\sigma}t$. Reescrevendo na fórmula do movimento Browniano geométrico S , obtemos

$$\begin{aligned}S(t) &= S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma}{2} \right) t + \sigma B(t) \right\} \\ &= S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma}{2} \right) t + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t) - (\mu - r)t \right\} \\ &= S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma}{2} \right) t + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t) \right\}.\end{aligned}$$

Conseguimos reescrever $S(t)$ como um movimento Browniano geométrico que dependa dos parâmetros r e σ e do movimento Browniano $B_{\mathbb{Q}}(t)$, logo, S é a solução da EDE da Equação

(4.4). Tomando o preço da ação descontado, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{S}(t) &= \frac{S(t)}{A(t)} \\ &= \frac{S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma}{2} \right) t + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t) \right\}}{\exp \{rt\}} \\ &= \bar{S}(0) \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2} t + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t) \right\},\end{aligned}$$

em que $\bar{S}(0) = S(0)/A(0) = S(0)$. Note que $\bar{S}(t)$ é um movimento Browniano geométrico com parâmetros 0 e σ e com o movimento Browniano $B_{\mathbb{Q}}(t)$, definido pelo Teorema 22. Portanto, \bar{S} é a solução da Equação (4.5). \square

No Teorema 23, não utilizamos μ na representação dos preços, pois μ é associado à interpretação do investidor sobre o mercado (ver Seção 15.7 de Hull, 2015). Riscos que partem dos investidores não são considerados em um mercado que possui uma medida neutra ao risco. Isso não significa que nenhum risco está sendo tomado, mas que os riscos são apenas atrelados as variáveis do mercado, como a taxa de juros r e a volatilidade da ação σ .

Para o cálculo do preço de uma opção, precisamos trabalhar com estratégias autofinanciáveis em um mercado livre de risco, como vimos no Capítulo 2. Contudo, devemos adaptar suas definições para trabalhar com processos estocásticos em tempos contínuos, semelhante ao que foi feito com a medida neutra ao risco. Na próxima seção, apresentamos a adaptação de tais estratégias para o modelo de Black-Scholes-Merton.

4.2.2 Estratégias admissíveis em um mercado livre de arbitragem

Uma estratégia auto-financiável é uma estratégia, na qual, a variação do valor do preço do portfólio só ocorre devido a variação dos preços dos ativos. Trabalhar com essa estratégia, nos permite construir um portfólio, no qual a compra de um ativo deve ser financiada pela venda de um outro. Sabendo da importância dessa estratégia para o apreçamento de opções, apresentamos, nesta seção, estratégias autofinanciáveis em tempos contínuo.

Seja $X^{\pi} := \{X^{\pi}(t) : t \in [0, T]\}$ o processo estocástico que representa o preço de um portfólio atrelado a uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$, ambos definidos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Em modelos de tempos discretos, se a estratégia π é autofinanciável significa que

$$S(t)\Delta\phi(t) + A(t)\Delta\psi(t) = 0,$$

em que $\Delta\phi(t) = \phi(t) - \phi(t - \delta t)$, $\Delta\psi(t) = \psi(t) - \psi(t - \delta t)$ e $\delta \in (0, 1]$, com $t \in [0, T]$. Como consequência, obtemos que a variação do preço de um portfólio $X^{\pi} := \{X^{\pi}(t) : t \in [0, T]\}$ atrelada a essa estratégia π é dado por

$$\Delta X^{\pi}(t) = \phi(t)\Delta S(t) + \psi(t)\Delta A(t),$$

em que $\Delta X^\pi(t) = X^\pi(t) - X^\pi(t - \delta t)$ e $\delta \in (0, 1]$, com $t \in [0, T]$. Assim, para o caso com tempo contínuo, essa definição é dada pelos diferenciais estocásticos.

Definição 24 (Estratégia autofinanciável - tempo contínuo). Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $S(t)$ representa o preço da ação no tempo $t \in [0, T]$, $A(t)$ representa o preço do ativo livre de risco no tempo $t \in [0, T]$ e $X^\pi(t)$ é o preço do portfólio no tempo $t \in [0, T]$ atrelado a uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$. Dizemos que π é autofinanciável, quando

$$dX^\pi(t) = \phi(t)dS(t) + \psi(t)dA(t),$$

em que $t \in [0, T]$.

Sendo π uma estratégia autofinanciável obtemos, em um cenário em que a dinâmica dos ativos do mercado seguem o modelo de Black-Scholes-Merton, que

$$dX^\pi(t) = \phi(t)[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)] + \psi(t)[rA(t)dt],$$

em que $r \in (0, \infty)$, $\sigma \in (0, \infty)$, $t \in [0, T]$ e $\mu \in \mathbb{R}$. A propriedade de uma estratégia autofinanciável faz com que X^π seja um processo de Itô.

Ao trabalhar com uma estratégia autofinanciável, um investidor pode considerar em sua estratégia π apenas a quantidade de ações ϕ para calcular o preço de uma opção. Demonstramos esse resultado no Teorema 24.

Teorema 24. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $S(t)$ representa o preço da ação no tempo $t \in [0, T]$, $A(t)$ representa o preço do ativo livre de risco no tempo $t \in [0, T]$ e $X^\pi(t)$ o preço do portfólio no tempo $t \in [0, T]$ atrelado a uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$. A estratégia π é autofinanciável se, e somente se,

$$d\bar{X}^\pi(t) = \phi(t)d\bar{S}(t),$$

em que $\bar{X}^\pi(t) = X^\pi(t)/A(t)$ e $\bar{S}(t) = S(t)/A(t)$.

Demonstração. Vamos assumir inicialmente que a estratégia π é autofinanciável. Retomando a fórmula de Itô para multiplicação de dois processos de Itô, vista na prova do Teorema 10, i.e.,

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt, \quad (4.6)$$

em que $X_i(t) = f_i(t)dt + \sigma_i(t)dB(t)$, com $i \in \{1, 2\}$. Então, segue que

$$\begin{aligned}
d\bar{X}^\pi(t) &= d(e^{-rt}X^\pi(t)) \\
&= e^{-rt}dX^\pi(t) - re^{-rt}X^\pi(t) \\
&\stackrel{(a)}{=} e^{-rt}[\phi(t)dS(t) + \psi(t)dA(t)] - re^{-rt}[\phi(t)S(t) + \psi(t)A(t)] \\
&\stackrel{(b)}{=} e^{-rt}[\phi(t)dS(t) + r\psi(t)e^{rt}] - re^{-rt}[\phi(t)S(t) + \psi(t)e^{rt}] \\
&= e^{-rt}\phi(t)dS(t) - re^{-rt}\phi(t)S(t) \\
&\stackrel{(c)}{=} \phi(t)d(e^{-rt}S(t)) \\
&= \phi(t)d\bar{S}(t),
\end{aligned}$$

em que, utilizamos a definição de $X^\pi(t)$ e de $dX^\pi(t)$ em (a), a definição de $A(t)$ e de $dA(t)$ em (b) e a Equação (4.6) em (c). Vamos assumir que

$$d\bar{X}^\pi(t) = \phi(t)d\bar{S}(t),$$

e vamos provar que π é uma estratégia autofinanciável. Utilizando a Equação (4.6) para $dX^\pi(t) = d(e^{rt}\bar{X}^\pi(t))$, obtemos

$$\begin{aligned}
dX^\pi(t) &= d(e^{rt}\bar{X}^\pi(t)) \\
&= e^{rt}d\bar{X}^\pi(t) + re^{rt}\bar{X}^\pi(t) \\
&\stackrel{(a)}{=} e^{rt}\phi(t)d\bar{S}(t) + re^{rt}[\phi(t)\bar{S}(t) + \psi(t)] \\
&\stackrel{(b)}{=} \phi(t)d(e^{rt}\bar{S}(t)) + re^{rt}\psi(t) \\
&\stackrel{(c)}{=} \phi(t)dS(t) + dA(t)\psi(t),
\end{aligned}$$

em que usamos a definição de $\bar{X}(t) := X(t)/A(t) = \phi(t)\bar{S}(t) + \psi(t)$ e de $d\bar{X}(t)$ em (a), a Equação (4.6) em (b) e a definição de $S(t)$ e $A(t)$ em (c). Assim, concluímos a prova. \square

A estratégia de arbitragem, como vimos no Capítulo 2, é uma estratégia, na qual uma investidora sabe o quanto vai ganhar ao final de sua execução e não correndo risco. Contudo, a existência dessa estratégia contradiz a suposição de um mercado “justo”. Assim, assumindo um portfólio $X^\pi(t) := \{X(t) : t \in [0, T]\}$, atrelado a uma estratégia autofinanciável de arbitragem $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$, definidos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, temos pela Definição 4 que

$$(i) \quad X^\pi(0) = 0,$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(X^\pi(T) \geq 0) = 1,$$

$$(iii) \quad \mathbb{P}(X^\pi(T) > 0) > 0.$$

Além disso, para uma estratégia de arbitragem para tempos contínuo, precisamos assumir que $X^\pi(t) \geq -L$, em que $t \in [0, T]$ e $L \in [0, \infty)$. Limitar o valor do portfólio com $-L$ possui um papel importante na prova de resultados teóricos de estratégias de arbitragem em tempos contínuos (ver Seção 2.5 de [Capiński e Kopp, 2012](#)). Damos mais detalhes sobre essa condição ao falar de estratégias admissíveis.

Segundo o Teorema 1, a existência de uma estratégia de arbitragem não permite a existência de uma medida neutra ao risco (ver Capítulo 7, Seção 2a de [Shiryaev, 1999](#)). Dessa forma, um mercado com uma medida neutra ao risco é um mercado “justo”. Da Seção 4.2.1, possuímos pelo menos uma uma medida neutra ao risco, dada pelo Teorema 22. Logo, o modelo de Black-Scholes-Merton é livre de arbitragem.

Seja $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ um processo de Itô definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $C(t)$ representa o preço de uma opção de compra no tempo t . Temos $C(T) = H$, em que H é uma variável aleatória \mathcal{F}_T -mensurável, a qual representa a função de custo da opção de compra. Ao utilizar os Teoremas 1 e 2 é suficiente para que, no caso de tempos discretos, $X^\pi(t) = C(t)$, para $t \in [0, T]$ (ver Capítulo 6, Seção 1a e [Shiryaev, 1999](#)). Contudo, para tempos contínuos, precisamos ser mais cautelosos, pois nem sempre esta igualdade é válida.

Teorema 25. Seja $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ processos de Itô definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $C(t)$ é o preço da opção no tempo t e $X^\pi(t)$ é o valor de um portfólio no tempo t , atrelado a uma estratégia autofinanciável $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$ que replica H . Em um mercado livre de estratégias de arbitragem segue que

$$C(t) = X^\pi(t), \text{ em que } t \in [0, T].$$

Omitimos a prova, contudo, ela pode ser checada na Seção 2.5 de [Capiński e Kopp \(2012\)](#). Logo, para o caso em que C e X^π sejam processos de Itô, a igualdade $X^\pi(t) = C(t)$ é verdade.

As estratégias autofinanciáveis em um mercado livre de arbitragem bastavam para montar um portfólio para precificar uma ação para tempos discretos. Contudo, para precificar em tempos contínuos precisamos assumir condições adicionais para que isso seja possível. Nesse sentido, precisamos de estratégias que sejam admissíveis. Mas o que consideramos como uma estratégia admissível ou não admissível?

Suponha um jogo, em que um jogador aposta inicialmente R\$1,00 em um dos lados de uma moeda. Caso ele ganhe, ele recebe R\$2,00; caso ele perca, ele dobra a aposta e o jogo continua até o jogador ganhar e recuperar o dinheiro gasto. Por exemplo, caso o jogador ganhe no primeiro jogo: ele apostou R\$1,00 e recebeu R\$2,00, obtendo o lucro de R\$1,00. Caso ele perca o primeiro jogo e ganhe o segundo: ele apostou R\$1,00 + R\$2,00 = R\$3,00 e recebendo R\$4,00, com lucro de R\$1,00. Caso seja permitido infinitos jogos, o jogador consegue recuperar

a perda obtida no jogo e lucrar R\$1,00. Contudo, precisamos assumir que o jogador tenha uma quantidade de dinheiro suficientemente grande para conseguir apostar em todos os jogos até obter uma vitória. Chamamos este problema de paradoxo do jogo de São Petesburgo.

De forma equivalente, podemos assumir uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ semelhante ao jogo de São Petesburgo. Caso o valor do portfólio no tempo $t \in [0, T]$ seja $X^\pi(t) = M$, em que $M \geq 0$ seja um valor desejado, o investidor finaliza sua estratégia; se não, ele reajusta a quantidade dos seus ativos para, no próximo instante, atingir M e cobrir a perda obtida no seu portfólios (ver Exemplo 2.19 de Capiński e Kopp, 2012). Semelhante ao jogador, o investidor precisaria emprestar uma quantidade muito grande de dinheiro para praticar essa estratégia, o que, na prática, é impossível. Nesse sentido, essa estratégia não é admissível.

Definição 25 (Estratégia Admissível). Seja $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $X^\pi(t)$ é o preço de um portfólio atrelado a estratégia autofinanciável $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$. Dizemos que π é uma estratégia admissível, quando:

- (i) $X^\pi(t) \geq -L$, em que $L \in [0, \infty)$;
- (ii) \bar{X}^π é um processo martingale em respeito à medida \mathbb{Q} , em que $\bar{X}^\pi(t) = X^\pi(t)/A(t)$ e \mathbb{Q} é uma medida neutra ao risco definida sobre (Ω, \mathcal{F}) .

A condição (i) limita o prejuízo que o valor de uma estratégia pode ter, evitando a estratégia semelhante ao jogo São Petesburgo. Estratégias ao não satisfazerem as condições da Definição 25, podem contradizer a condição de um mercado livre de arbitragem (ver Capítulo 2 de Capiński e Kopp, 2012).

Dizemos que uma estratégia admissível π replica a função custo H quando $X^\pi(T) = H$. Nesse sentido, podemos estudar a unicidade da estratégia π que replica a função de custo H .

Teorema 26. Sejam H e $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, uma variável aleatória e um processo estocástico, definidos em um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que H é a função custo de uma opção de compra e $X^{\pi_i}(t)$ o preço de um portfólio no tempo $t \in [0, T]$ atrelado a estratégia admissível $\pi_i := \{(\phi_i(t), \psi_i(t)) : t \in [0, T]\}$, com $i \in \{1, 2\}$. Se π_1 e π_2 replicam a função de custo H , então $\pi_1 = \pi_2$, i.e.,

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) \text{ e } \psi_1(t) = \psi_2(t),$$

em que $t \in [0, T]$.

Demonstração. Assumindo as estratégias admissíveis π_1 e π_2 , nas quais replicam H , temos os seguintes processos descontados

$$\bar{X}^{\pi_1}(T) = \frac{X^{\pi_1}(T)}{A(T)} = He^{-rT} \quad \text{e} \quad \bar{X}^{\pi_2}(T) = \frac{X^{\pi_2}(T)}{A(T)} = He^{-rT}.$$

Da condição (i) da Definição 25, conseguimos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\bar{X}^{\pi_1}(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi_1}(T)|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[He^{-rT}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi_2}(T)|\mathcal{F}_t] \\ &= \bar{X}^{\pi_2}(t).\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que $X^{\pi_1}(t) = X^{\pi_2}(t)$. Como π_1 e π_2 são estratégias autofinanciáveis, obtemos

$$\begin{aligned}dX^{\pi_1}(t) &= \phi_1(t)dS(t) + \psi_1(t)dA(t), \\ dX^{\pi_2}(t) &= \phi_2(t)dS(t) + \psi_2(t)dA(t).\end{aligned}$$

Definimos $Z(t) := X^{\pi_1}(t) - X^{\pi_2}(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$. Assim

$$\begin{aligned}dZ(t) &\stackrel{(a)}{=} dX^{\pi_1}(t) - dX^{\pi_2}(t) \\ &\stackrel{(b)}{=} \phi_1(t)dS(t) + \psi_1(t)dA(t) - \phi_2(t)dS(t) - \psi_2(t)dA(t) \\ &\stackrel{(c)}{=} \phi_1(t)[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)] + \psi_1(t)rA(t)dt \\ &\quad - \phi_2(t)[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)] - \psi_2(t)rA(t)dt \\ &= [\phi_1(t) - \phi_2(t)]\mu S(t)dt + [\phi_1(t) - \phi_2(t)]\sigma S(t)dB(t) + [\psi_1(t) - \psi_2(t)]rA(t)dt \\ &\stackrel{(d)}{=} [[\phi_1(t) - \phi_2(t)]\mu S(t) + [\psi_1(t) - \psi_2(t)]rA(t)]dt + [\phi_1(t) - \phi_2(t)]\sigma S(t)dB(t), \\ &= [\phi_1(t) - \phi_2(t)]dS(t) + [\psi_1(t) - \psi_2(t)]dA(t),\end{aligned}$$

em que, usamos a linearidade da integral estocásticas em (a), a definição de uma estratégia autofinanciável em (b) e a definição de $dS(t)$ e $dA(t)$ para o modelo de Black-Scholes-Merton em (c). De (d), vemos que Z é um processo de Itô, no qual, só possui uma única representação, i.e.,

$$dZ(t) = f(t)dt + g(t)dB(t) = 0, \text{ com } t \in [0, T],$$

então, $f(t) = 0$ e $g(t) = 0$. Logo,

$$\begin{cases} [\phi_1(t) - \phi_2(t)]\mu S(t) + [\psi_1(t) - \psi_2(t)]rA(t) = f(t) = 0 \\ [\phi_1(t) - \phi_2(t)]\sigma S(t) = g(t) = 0, \end{cases}$$

implicando que $[\phi_1(t) - \phi_2(t)] = 0$ e $[\psi_1(t) - \psi_2(t)] = 0$. Portanto, $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ e $\psi_1(t) = \psi_2(t)$, para $t \in [0, T]$, concluindo a prova. \square

Para dar continuidade ao estudo do modelo de Black-Scholes-Merton, avaliamos a sua completude. Um mercado completo está diretamente relacionado com a unicidade da medida neutra ao risco, o que implica que não há ambiguidade ao derivar o preço de uma opção. Assim, dedicamos a próxima seção ao seu estudo.

4.2.3 Mercado completo

Dizemos que um mercado é completo quando nossa estratégia de *hedging* consegue replicar a função custo. Segundo o teorema fundamental das finanças, um mercado completo garante a unicidade de uma medida neutra ao risco. Afim de obter um mercado completo, precisamos que a função custo satisfaça algumas condições. Dessa forma, apresentamos, nesta seção, as condições da função custo, a existência de uma estratégia que replique a função custo e a unicidade da medida neutra ao risco.

A função custo de uma opção de compra H é uma variável aleatória, definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para garantir os próximos resultados, H deve satisfazer os seguintes condições:

(i) $H \in [0, \infty)$;

(ii) $\mathbb{E}[H^\alpha] < \infty$, para algum $\alpha \in (2, \infty)$.

Pelo Teorema 22, obtemos a seguinte medida neutra ao risco para o modelo de Black-Scholes-Merton

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \exp\left(-bB(T, \omega) - \frac{1}{2}Tb^2\right) d\mathbb{P}(\omega), \quad (4.7)$$

em que $b = \frac{\mu - r}{\sigma}$, com $r \in (0, \infty)$, $\sigma \in (0, \infty)$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Como $H := \max(S(T) - K, 0)$ depende de $S(T)$, podemos calcular o segundo momento de H em respeito à \mathbb{Q} como

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H^2] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H^2 \exp\left(-bB(T) - \frac{1}{2}Tb^2\right)\right].$$

Precisamos do segundo momento de H , em respeito à medida neutra ao risco, para utilizar o teorema de representação de martingales (ver Teorema 21 no Capítulo 3). Nesse sentido, temos o seguinte lema.

Lema 13. Seja H a função custo definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e \mathbb{Q} uma medida definida sobre (Ω, \mathcal{F}) , dada pela Equação (4.7). Se $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H^\alpha] < \infty$ para algum $\alpha \in (2, \infty)$, então $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H^2] < \infty$.

Demonstração. Tomamos inicialmente o segundo momento de H em respeito à \mathbb{Q}

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H^2] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[H^2 \exp\left(-bB(T) - \frac{1}{2}Tb^2\right)\right].$$

Assumimos $X = H^2$, $Y = \exp(-bB(T) - \frac{1}{2}Tb^2)$, $p = \frac{\alpha}{2}$ e $q = \frac{\alpha}{\alpha-2}$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para aplicar a desigualdade de Hölder (ver Apêndice B),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [H^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|XY|] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X^p]^{1/p} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [Y^q]^{1/q} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H^\alpha]^{\alpha/2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(-qbB(T) - \frac{1}{2}qb^2T \right) \right]^{1/q} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H^\alpha]^{\alpha/2} \exp \left(-\frac{1}{2}Tb^2 \right) \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\exp(-qbB(T))]^{1/q} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H^\alpha]^{\alpha/2} \exp \left(-\frac{1}{2}Tb^2 \right) \exp \left(\frac{1}{2}qb^2T \right) \\
&\stackrel{(a)}{<} \infty,
\end{aligned}$$

em que, usamos $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H^\alpha] < \infty$ em (a). Logo, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [H^2] < \infty$. \square

Teorema 27. Seja H uma variável aleatória que representa a função custo e seja $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico que representa a dinâmica do valor de uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$, todos definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O modelo de Black-Scholes-Merton é completo no seguinte sentido: para cada H não-negativo e \mathbb{F}_T -mensurável, em que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H^\alpha] < \infty$, para algum $\alpha \in (2, \infty)$, existe uma estratégia π admissível e que replica H , tal que

$$X^\pi(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (4.8)$$

em que $r \in (0, \infty)$ é a taxa de juros e \mathbb{Q} é a medida neutra ao risco dada pelo Teorema 22.

Demonstração. Precisamos encontrar uma estratégia π , a partir da Equação (4.8), que seja admissível e que replique H para concluir a prova. Tomando $t = T$ na Equação (4.8), conseguimos replicar a função custo H , i.e.,

$$\begin{aligned}
X^\pi(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [H | \mathcal{F}_t] \\
&\stackrel{(a)}{=} H
\end{aligned}$$

em que, usamos o fato de H ser \mathcal{F}_T -mensurável em (a). Como $A(t) = e^{rt}$ e assumindo $M(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} H | \mathcal{F}_t]$, podemos escrever $X^\pi(t)$ como

$$\begin{aligned}
X^\pi(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= e^{rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} H | \mathcal{F}_t] \\
&= A(t)M(t).
\end{aligned}$$

O processo estocástico M é um martingale, pois, com $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H\middle|\mathcal{F}_s\right] \\ &= M(s).\end{aligned}$$

Além disso, $X^\pi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pois

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M(t)^2] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}H\middle|\mathcal{F}_t\right]^2\right] \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-2rT}H^2\middle|\mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-2rT}H^2\right] \\ &= e^{-2rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H^2\right] \\ &\stackrel{(b)}{<} \infty,\end{aligned}$$

em que, usamos a desigualdade de Jensen em (a) e o Lema 13 em (b). Pelo teorema da representação de martingales (ver Teorema 21 no Capítulo 3), existe um único processo $f \in L^2_{\text{ad}}([0, T] \times \Omega)$ tal que

$$M(t) = M(0) + \int_0^t f(s) dB_{\mathbb{Q}}(s),$$

ou, de forma equivalente,

$$dM(t) = f(t)dB_{\mathbb{Q}}(t).$$

Nosso objetivo é encontrar uma estratégia admissível π , que vale a seguinte igualdade

$$X^\pi(t) = A(t)M(t), \text{ em que } t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Para isso, escrevemos o lado esquerdo da Equação (4.9) em forma de diferencial em conjunto com Definição 24, i.e.

$$\begin{aligned}dX^\pi(t) &= \phi(t)dS(t) + \psi(t)dA(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} \phi(t)[rS(t)dt + \sigma S(t)dB_{\mathbb{Q}}(t)] + \psi(t)[rA(t)dt] \\ &= [\phi(t)rS(t) + \psi(t)rA(t)]dt + \sigma\phi(t)S(t)dB_{\mathbb{Q}}(t),\end{aligned}$$

em que, usamos o Teorema 23 e $dA(t) = rA(t)dt$ em (a). Por outro lado, escrevemos o lado direito da Equação (4.9) usando a regra do produto para a fórmula de Itô, i.e.

$$\begin{aligned}d(A(t)M(t)) &= A(t)dM(t) + M(t)dA(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} A(t)f(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) + rA(t)M(t)dt,\end{aligned}$$

em que, usamos a representação de martingales em (a). Podemos reescrever a Equação (4.9) como

$$[\phi(t)rS(t) + \psi(t)rA(t)]dt + \sigma\phi(t)S(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) = A(t)f(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) + rA(t)M(t)dt.$$

Como um processo de Itô possui apenas uma única representação, podemos igualar os elementos que estão contidos nos mesmos diferenciais, i.e.,

$$\begin{cases} \phi(t)rS(t) + \psi(t)rA(t) = rA(t)M(t), \\ \sigma\phi(t)S(t) = A(t)f(t), \end{cases} \quad (4.10)$$

em que $t \in [0, T]$. Tomamos a segunda equação de (4.10), obtemos

$$\phi(t) = \frac{A(t)f(t)}{\sigma S(t)}. \quad (4.11)$$

Podemos substituir $\phi(t)$ na primeira equação de (4.10), assim, temos

$$\frac{rA(t)f(t)}{\sigma} + \psi(t)rA(t) = rA(t)M(t).$$

Resolvendo, encontramos que $\psi(t)$ é dado por

$$\psi(t) = M(t) - \frac{f(t)}{\sigma}. \quad (4.12)$$

Conseguimos encontrar uma estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$ que pode ser a estratégia admissível e que replique H .

Agora, vamos checar se a estratégia é de fato admissível e realmente pode replicar H . Aplicando as Equações (4.11) e (4.12) em $X^\pi(t)$, temos

$$\begin{aligned} X^\pi(t) &= \phi(t)S(t) + \psi(t)A(t) \\ &= \frac{A(t)f(t)}{\sigma S(t)}S(t) + \left(M(t) - \frac{f(t)}{\sigma}\right)A(t) \\ &= \frac{A(t)f(t)}{\sigma} + A(t)M(t) - \frac{f(t)A(t)}{\sigma} \\ &= A(t)M(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)}H \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

em que, usamos as definições de $A(t)$ e $M(t)$ em (a). Tomando $t = T$, concluímos que $X^\pi(T) = H$, pois H é \mathcal{F}_T -mensurável. Assim, a estratégia π replica a função de custo H . Avaliando o valor da estratégia descontado, i.e., $\bar{X}^\pi(t) = X^\pi(t)/A(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{X}^\pi(t) &= A(t)M(t)A(t)^{-1} \\ &= M(t). \end{aligned}$$

Logo, \bar{X}^π é um processo martingale. Da Equação (4.11), podemos encontrar o valor de $f(t)$, que é dado por

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sigma\phi(t)S(t)}{A(t)} \\ &= \sigma\phi(t)\bar{S}(t), \end{aligned}$$

em que $\bar{S}(t) = S(t)/A(t)$. Da representação de martingales, conseguimos escrever $d\bar{X}^\pi(t)$ como

$$\begin{aligned} d\bar{X}^\pi(t) &= dM(t) \\ &= f(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) \\ &= \sigma\phi(t)\bar{S}(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) \\ &\stackrel{(a)}{=} \phi(t)d\bar{S}(t), \end{aligned}$$

em que, usamos o Teorema 23 em (a). Pelo Teorema 24, concluímos que π é uma estratégia autofinanciável. Retomamos que $H \geq 0$, o que implica que $X^\pi(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H \mid \mathcal{F}_t \right] \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$. Como a estratégia π é autofinanciável, $X^\pi(t) \geq 0$, para todo $t \in [0, T]$, e \bar{X}^π é um processo martingale, então π é uma estratégia admissível, concluindo a prova. \square

Como estamos considerando uma opção de compra europeia, a função de custo é dada por $H := \max(S(T) - K, 0)$. Além disso, $H \leq S(T)$, o que implica que $0 \leq H^\alpha \leq S(T)^\alpha$, para qualquer $\alpha \in (2, \infty)$. Tomando a esperança, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H^\alpha] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S(T)^\alpha] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left(S(0) \exp \left\{ \mu T - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma B(t) \right\} \right)^\alpha \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[S(0)^\alpha \exp \left\{ \alpha \mu T - \frac{\sigma^2}{2} T \right\} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\exp \{ \alpha \sigma B(t) \}] \\ &= S(0)^\alpha \exp \left\{ \alpha \mu T - \frac{\sigma^2}{2} T \right\} [\exp \{ \alpha \sigma B(t) \}] \\ &\stackrel{(a)}{=} S(0)^\alpha \exp \left\{ \alpha \mu T - \frac{\sigma^2}{2} T \right\} \exp \left\{ \frac{T}{2} \alpha^2 \sigma^2 \right\} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, H pode ser replicado por uma estratégia admissível. Além disso, por ser completo, o modelo de Black-Scholes-Merton possui apenas uma única medida neutra ao risco.

Teorema 28. Suponha o modelo de Black-Scholes-Merton definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A medida neutra ao risco \mathbb{Q} é única para o modelo de Black-Scholes-Merton.

Demonstração. Considere $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$ uma estratégia admissível que replica a função de custo H e duas medidas neutras ao risco \mathbb{Q} e \mathbb{Q}' para o modelo de Black-Scholes-Merton.

Considere também, sem perda de generalidade, $H := 1_B$, em que $B \in \mathcal{F}_T$. Temos

$$\begin{aligned}
 e^{-rT} \mathbb{Q}(B) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[1_B] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} H] \\
 &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi}(T)] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{X}^{\pi}(0)] \\
 &= X^{\pi}(0) \\
 &\stackrel{(c)}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[\bar{X}^{\pi}(T)] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[e^{-rT} H] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{Q}'(B),
 \end{aligned}$$

em que, usamos a replicabilidade de H em (a), a propriedade martingale de $\bar{X}^{\pi}(t)$ em respeito à medida \mathbb{Q} em (b) e a propriedade martingale de $\bar{X}^{\pi}(t)$ em respeito à medida \mathbb{Q}' em (c). Portanto, \mathbb{Q} e \mathbb{Q}' são a mesma medida, implicando que \mathbb{Q} é única. \square

Dessa forma, pelo Teorema 26, conseguimos uma estratégia admissível que replica H que é única e, pelo Teorema 28, conseguimos uma única medida neutra ao risco. Dessa forma, não há ambiguidades ao derivar o preço de uma opção.

Estudado a dinâmica dos ativos, a existência de uma medida neutra ao risco, a completude do mercado e as estratégias admissíveis, nos resta encontrar o preço de uma opção para o mercado de Black-Scholes-Merton. Nesse sentido, dedicamos a próxima seção para derivar a fórmula para o preço de uma opção de compra.

4.2.4 Preço de uma opção no mercado de Black-Scholes-Merton

Nesta seção, encontramos o preço de uma opção de compra europeia, a partir dos resultados estudados nas seções anteriores. Além disso, apresentamos a estratégia que o lançador deve seguir para se proteger e, por fim, apresentamos um estimador para o parâmetro de volatilidade do modelo de Black-Scholes-Merton.

Teorema 29. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^{\pi} := \{\bar{X}(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, o processo estocástico que representa o valor do ativo de risco, o processo estocástico que representa o valor da opção e o processo estocástico que representa o valor do portfólio atrelado à estratégia admissível $\pi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$, todos definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considere também $r \in (0, \infty)$ a taxa de juros livre de risco e $\sigma \in (0, \infty)$ a volatilidade. Para

$t \in [0, T]$, $C(t)$ é dado por

$$C(t) = X^\pi(t) := S(t)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \quad (4.13)$$

em que $\Phi(x)$ é a distribuição acumulada de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1, $K \in (0, \infty)$ é o preço de exercício e $T \in (0, \infty)$ é a data de maturidade. Além disso, o prêmio $\hat{c} = C(0) > 0$ de uma opção de compra é dado por

$$\hat{c} := S(0)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Demonstração. Vamos provar o prêmio de uma opção usando a definição de uma estratégia de hedging admissível π , ou seja,

$$X^\pi(0) = \hat{c} \text{ e } X^\pi(T) = H.$$

Do Teorema 27, obtemos

$$\begin{aligned} X^\pi(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \max(S(T) - K, 0) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \max\left(S(0) \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma B_{\mathbb{Q}}(T) \right\} - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \max\left(S(0) \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T-t+t) + \sigma(B_{\mathbb{Q}}(T) - B_{\mathbb{Q}}(t) + B_{\mathbb{Q}}(t)) \right\} - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} \max\left(S(t) \exp\left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T-t) + \sigma(B_{\mathbb{Q}}(T) - B_{\mathbb{Q}}(t)) \right\} - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max\left(a \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(B_{\mathbb{Q}}(T) - B_{\mathbb{Q}}(t)) \right\} - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

em que $a := S(t) \exp\{r(T-t)\}$. Note que a é \mathcal{F}_t -mensurável, $B_{\mathbb{Q}}(T) - B_{\mathbb{Q}}(t)$ é independente de \mathcal{F}_t e de a , logo, $X^\pi(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} X^\pi(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max\left(a \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(B_{\mathbb{Q}}(T) - B_{\mathbb{Q}}(t)) \right\} - K, 0 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max\left(a \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + Z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K, 0 \right) \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \max\left(a \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K, 0 \right) f_Z(z) dz, \end{aligned}$$

em que, Z é uma variável aleatória que segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1 e $f_Z(z)$ é sua função de densidade de probabilidade. Como

$$\max \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K, 0 \right) \geq 0,$$

podemos reduzir os limites de integração da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K \geq 0 \\ &\Rightarrow \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} \geq \frac{K}{a} \\ &\Rightarrow z\sigma(T-t)^{1/2} \geq \ln \left(\frac{K}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \\ &\Rightarrow z \geq d_1(t, a) = \frac{\ln \left(\frac{K}{a} \right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} X^\pi(t) &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \max \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K, 0 \right) f_Z(z) dz \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{d_1(t, a)}^{\infty} \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} - K \right) f_Z(z) dz \\ &= S(t) \int_{d_1(t, a)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} f_Z(z) dz - e^{-r(T-t)} \int_{d_1(t, a)}^{\infty} K f_Z(z) dz. \end{aligned}$$

Tomando o valor de $f_Z(z)$ na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{d_1(t, a)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2} \right\} f_Z(z) dz &= \int_{d_1(t, a)}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + z\sigma(T-t)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{d_1(t, a)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-z^2 + 2z\sigma(T-t)^{1/2} - \sigma^2(T-t)}{2}} dz \\ &= \int_{d_1(t, a)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(z - \sigma\sqrt{(T-t)})^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Assumindo $y = z - \sigma\sqrt{(T-t)}$ continuamos com uma distribuição Gaussiana, porém com o limite de integração dado por $d_1(t, a) - \sigma\sqrt{(T-t)}$. Usamos a simetria da distribuição Gaussiana

em $X^\pi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
X^\pi(t) &= S(t) \int_{d_1(t,a) - \sigma\sqrt{(T-t)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - e^{-r(T-t)} \int_{d_1(t,a)}^{\infty} K f_Z(z) dz \\
&= S(t) \int_{-\infty}^{\sigma\sqrt{(T-t)} - d_1(t,a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{-d_1(t,a)} K f_Z(z) dz \\
&= S(t) \Phi\left(\sigma\sqrt{(T-t)} - d_1(t,a)\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_1(t,a)) \\
&= S(t) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \sigma\sqrt{(T-t)}\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\
&= S(t) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\
&= S(t) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\
&\quad - Ke^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right),
\end{aligned}$$

em que, $\Phi(z)$ é a distribuição acumulada de uma distribuição Gaussiana, com média 0 e variância 1, calculada em z . Por fim, pelo Teorema 25, concluímos que $C(t) = X^\pi(t)$. De maneira análoga, pela definição de uma estratégia de hedging

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= X^\pi(0) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} H \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max(S(T) - K, 0) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max \left(S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_{\mathbb{Q}}(T) \right\} - K, 0 \right) \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\max \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma T^{1/2} Z \right\} - K, 0 \right) \right] \\
&= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \max \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T + z \sigma T^{1/2} \right\} - K, 0 \right) f_Z(z) dz \\
&= e^{-rT} \int_{d_1(a)}^{\infty} \left(a \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T + z \sigma T^{1/2} \right\} - K \right) f_Z(z) dz \\
&= S(0) \int_{d_1(a)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} T + z \sigma T^{1/2} \right\} f_Z(z) dz - e^{-rT} \int_{d_1(a)}^{\infty} K f_Z(z) dz,
\end{aligned}$$

em que, $a := S(0)e^{rT}$ e $d_1(a) := \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$. Por fim, usando a simetria da distribuição

Gaussiana encontramos o preço de uma opção de compra

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= X^\pi(0) \\
&= S(0) \int_{d_1(t,a)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}T + z\sigma T^{1/2}\right\} f_Z(z) dz - e^{-rT} \int_{d_1(t,a)}^{\infty} K f_Z(z) dz \\
&= S(0) \int_{d_1(t,a) - \sigma T^{1/2}}^{\infty} f_Y(y) dy - e^{-rT} \int_{d_1(t,a)}^{\infty} K f_Z(z) dz \\
&= S(0) \int_{-\infty}^{\sigma T^{1/2} - d_1(t,a)} f_Y(y) dy - e^{-rT} \int_{-\infty}^{-d_1(t,a)} K f_Z(z) dz \\
&= S(0) \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - d_1(a)\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(-d_1(a)\right) \\
&= S(0) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S(0) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= S(0) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

□

De fato, calculando $C(0)$, obtemos o valor de \hat{c} . Como o mercado de Black-Scholes-Merton é livre de arbitragem, podemos usar a relação de paridade para encontrar o preço da opção de venda. Ou seja, pela Proposição 1, temos

$$P(0) = e^{-rT}K - S(0) + C(0),$$

em que, $P(0)$ é o preço da opção de venda.

Exemplo 36. Vamos supor a opção de compra do Exemplo 14 e aplicar o Teorema 29 para encontrar o preço da opção. Nesse exemplo, o preço inicial de uma ação é $S(0) = R\$100,00$, sua volatilidade de 20% por ano e a taxa de juros é de 3% ao ano. Além disso, uma lançadora está negociando uma opção de compra europeia com preço de exercício de $K = R\$105,00$ para ser exercido após um mês, i.e., $T = \frac{1}{12}$. Do Teorema 29, obtemos o seguinte preço da opção de compra

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= S(0) \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= 100 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{105}\right) + \left(0,03 + \frac{0,1^2}{2}\right)\frac{1}{12}}{0,1\sqrt{1/12}}\right) - 105e^{-\frac{0,03}{12}} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{105}\right) + \left(0,03 - \frac{0,1^2}{2}\right)\frac{1}{12}}{0,1\sqrt{1/12}}\right) \\
&\approx 100\Phi(-1,59) - 104,74\Phi(-1,62) \\
&\approx R\$0,08.
\end{aligned}$$

A partir do processo C , conseguimos encontrar a estratégia de hedging na qual o lançador deve seguir para se proteger. Sabemos que

$$C(t) = X^\pi(t), \text{ para qualquer } t \in [0, T].$$

Como π é autofinanciável, temos

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= \phi(t)dS(t) + \psi(t)dA(t) \\ &= \phi(t)\sigma S(t)dB_{\mathbb{Q}}(t) + r[\phi(t)S(t) + \psi(t)A(t)]dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, como C depende do valor de $S(t)$, podemos tomar a fórmula de Itô em C , obtendo

$$\begin{aligned} dC(t, S(t)) &= \sigma \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) S(t) dB(t) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t} C(t, S(t)) dt + r \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) S(t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} C(t, S(t)) S(t)^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Sabemos que C e X^π são processos de Itô, logo, eles só possuem uma única representação. Assim, obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) S(t) = \phi(t) \sigma S(t) \\ r[\phi(t)S(t) + \psi(t)A(t)] = \frac{\partial}{\partial t} C(t, S(t)) dt + r \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) S(t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} C(t, S(t)) S(t)^2. \end{cases}$$

Da primeira equação, encontramos que

$$\phi(t) = \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)).$$

Agora, basta tomar $\psi(t)A(t) = C(t) - \phi(t)S(t)$ para encontrar a parte da estratégia referente ao ativo livre de risco. Da segunda equação, substituímos o valor de $C(t) = X^\pi(t) = \phi(t)S(t) + \psi(t)A(t)$ e encontramos

$$rC(t, S(t)) = \frac{\partial}{\partial t} C(t, S(t)) dt + rS(t) \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} C(t, S(t)). \quad (4.14)$$

A Equação (4.14) é chamado de equação fundamental e foi utilizada por [Black e Scholes \(1973\)](#) para encontrar o preço da opção. Sua solução é dada utilizando os métodos de resolução das equações Feynman-Kac (ver Capítulo VIII, de [Shiryaev, 1999](#)).

Definindo $d(t, s) := \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ e do Teorema 29, concluímos que

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{\partial}{\partial s} C(t, S(t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} [S(t)\Phi(d(t, s)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d(t, s) - \sigma\sqrt{T-t})] \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) - Ke^{-r(T-t)}f_Z(d(t, s) - \sigma\sqrt{T-t})\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) - Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(d(t, s) - \sigma\sqrt{T-t})^2/2}\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&\quad - Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(d(t, s))^2/2}e^{d(t, s)\sigma\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2}\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&\quad - Ke^{-r(T-t)}f_Z(d(t, s))e^{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) - Kf_Z(d(t, s))e^{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)}\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)) + S(t)f_Z(d(t, s))\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) - Kf_Z(d(t, s))\frac{S(t)}{K}\frac{\partial}{\partial s}d(t, s) \\
&= \Phi(d(t, s)),
\end{aligned}$$

em que, $f_Z(\cdot)$ é a função de densidade de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1. Por fim, obtemos

$$\begin{aligned}
A(t)\psi(t) &= C(t) - S(t)\phi(t) \\
&= S(t)\Phi(d(t, s)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d(t, s) - \sigma\sqrt{T-t}) - S(t)\Phi(t) \\
&= -Ke^{-r(T-t)}\Phi(d(t, s) - \sigma\sqrt{T-t}).
\end{aligned}$$

Com os valores de ϕ e ψ , um lançador consegue corrigir seu portfólio para a cada instante de tempo para se proteger. Como $\phi(t) \in [0, 1]$, o lançador sempre vai possuir alguma quantidade do ativo base, i.e., sempre está na posição comprado da ação. Por outro lado, ao olhar o valor de $A(t)\psi(t)$, vemos que o valor emprestado pelo lançador é limitado pelo preço de exercício, ou seja, o lançador nunca empresta valores maiores que K (para mais detalhes sobre a análise da estratégia, ver Seção 3.8 de [Baxter e Rennie, 1996](#)).

A partir do histórico de uma ação, conseguimos estimar o parâmetro de volatilidade. Porém, para estimar a volatilidade de um movimento Browniano geométrico, o qual é um processo estocástico a tempo contínuo, utilizamos observações obtidas em tempos discretos. Isso ocorre, pois os dados fornecidos pelas corretoras ou softwares especializados em finanças são dadas em intervalos de tempo fixo, e.g., dias, horas ou minutos. Então, precisamos avaliar a série histórica dos preços de forma discretizada.

Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ o preço da ação, definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tomando o logaritmo, obtemos

$$\ln(S(t)) = \ln(S(0)) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_{\mathbb{Q}}(t),$$

em que, $B_{\mathbb{Q}}$ é o movimento Browniano obtido pela medida neutra ao risco. Dessa forma, assumindo uma partição $\Delta = \{0 = t_0, \dots, t_n = T\}$, em que $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ é o tamanho fixo entre os intervalos, obtemos as seguintes n variáveis aleatórias

$$u_i := \ln(S(t_i)) - \ln(S(t_{i-1})) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(B_{\mathbb{Q}}(t_i) - B_{\mathbb{Q}}(t_{i-1})), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dos itens (ii) e (iii) da Definição 6, obtemos que as variáveis aleatórias u_i 's, em que $i \in [1, \dots, n]$, são independentes e seguem uma distribuição Gaussiana com média $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ e variância $\sigma^2\Delta t$. Assim, podemos utilizar o estimador não enviesado para o desvio padrão

$$\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{n-1}},$$

em que, $\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$. Por fim, o estimador $\hat{\sigma}$ é dado por

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{\Delta t(n-1)}}.$$

Na prática, escolha da quantidade de observações n é importante para uma boa estimação. Em geral, em estimações estatísticas, a precisão da nossa estimativa fica melhor quanto maior o valor de n . Porém, no nosso caso, valores muito antigos não são “bons” para explicar valores atuais, influenciando na qualidade da estimação de σ . Isso ocorre, pois, embora assumido por Black-Scholes-Merton, a volatilidade não é constante ao longo do tempo, o que mostramos com mais detalhes na próxima seção. Assim, segundo a Seção 15.4 de Hull (2015), assumir $n = 90$ ou $n = 180$ é uma boa quantidade para estimar σ , pois não há alteração na volatilidade.

Com os resultados apresentados nessa seção, conseguimos encontrar o prêmio de uma opção de compra, no mercado de Black-Scholes-Merton, a partir do histórico do preço de uma ação. Mais precisamente, estimamos o valor da volatilidade usando dados do ativo base e encontramos o valor para o preço de uma opção, utilizando o Teorema 29. Para complementar a apresentação do modelo de Black-Scholes-Merton, mostramos as métricas do o preço da opção chamadas de gregas, na seção seguinte.

4.2.5 Gregas

Como uma das ferramentas mais utilizadas no mercado de opções, as gregas são métricas que auxiliam na tomada de decisão dos investidores. Com esses valores, é possível assumir alguma posição com indicativos simples sobre os preços das opções.

As gregas ajudam os investidores a ajustarem suas posições com as alterações das variáveis de mercado. São chamadas gregas, pois, em geral, é utilizado letras gregas para denota-las. Nesse primeiro momento, assumiremos $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ o processo estocástico, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que representa o valor do portfólio atrelado à estratégia $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$. Nosso portfólio será composto de dois ativos, ou seja, $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ e $A := \{A(t) : t \in [0, T]\}$ são dois processos estocásticos que representam, respectivamente, o preço do ativo base e o preço do ativo livre de risco, atrelado à taxa de juros $r \in (0, \infty)$.

As gregas avaliam o quanto o valor do preço da opção se altera com a variação de $S(0)$, r , T e σ . De maneira genérica, assumamos $\hat{x} := X^\pi(0)$ como o preço de opção, então as gregas e suas interpretações estão descritas na tabela abaixo:

Gregas	Interpretação
$\Delta_{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial S}$	Representa o aumento de \hat{x} para o aumento de 1 real de S ;
$\Gamma_{\hat{x}} = \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial S^2}$	Representa o aumento de $\Delta_{\hat{x}}$ para o aumento de 1 real de S ;
$\Theta_{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial T}$	Representa a sensibilidade de \hat{x} em relação a T ;
$V_{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \sigma}$	Representa o aumento de \hat{x} para o aumento de 0,01 de σ ;
$\rho_{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial r}$	Representa o aumento de \hat{x} para o aumento de 0,01 de r .

Tabela 2 – Interpretação das gregas.

Vega ($V_{\hat{x}}$) não é de fato uma letra grega, mas é comumente utilizado nesse contexto de derivativos. A grega $\Theta_{\hat{x}}$ é normalmente parametrizado com $\tau := T - t$ e é chamado de decaimento temporal, i.e., quanto mais perto da data de exercício, menor é a variação do preço da opção. Da maneira que foi formulada por [Black e Scholes \(1973\)](#), o preço da opção de compra é encontrado utilizando a estratégia de delta hedging, em que $\Delta_{\hat{x}}$ é a quantidade de ativos base que precisamos comprar, i.e., $\Delta_{\hat{x}} = \phi(0)$.

Proposição 10. Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$, $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ e $X^\pi := \{\bar{X}(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, o processo estocástico que representa o valor do ativo de risco, o processo estocástico que representa o valor da opção e o processo estocástico que representa o valor do portfólio atrelado à estratégia admissível $\pi := \{(\phi(t), \psi(t)) : t \in [0, T]\}$, todos definidos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considere também $r \in (0, \infty)$ a taxa de juros livre de risco e $\sigma \in (0, \infty)$ a volatilidade.

As gregas para o preço $\hat{c} = C(0)$ no mercado de Black-Scholes-Merton é dado por

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{c}} &= \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right), & \Gamma_{\hat{c}} &= \frac{1}{S(0) \sigma \sqrt{T}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right), \\ \Theta_{\hat{c}} &= -\frac{S(0) \sigma}{\sqrt{T}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - r K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right), \\ V_{\hat{c}} &= S \sqrt{T} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right), & \rho_{\hat{c}} &= T K e^{-rT} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right),\end{aligned}$$

em que, f_Z e Φ são, respectivamente, a função de densidade de probabilidade e a função de densidade acumulada de uma distribuição Gaussiana, com média 0 e variância 1.

Demonstração. Demonstramos o resultado para $\Delta_{\hat{c}}$ quando provamos o valor da estratégia $\phi(t)$ na seção anterior. Os demais resultados são dados de forma equivalente, alterando para as suas respectivas derivadas. \square

Exemplo 37. Suponha a opção de compra do Exemplo 36. Nesse exemplo, o preço do ativo base no tempo 0 é dado por $S(0) = R\$100,00$ e estamos negociando uma opção de compra com o preço de exercício de $K = R\$105,00$ para ser exercida em 1 mês, i.e., $T = \frac{1}{12}$ ano. Nessa época, a volatilidade é de 20% ao ano e a taxa de juros é de 3% ao ano. Assim, assumindo o mercado de Black-Scholes-Merton, as gregas são dadas por

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{c}} &= \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 + \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \approx 0,228, \\ \Gamma_{\hat{c}} &= \frac{1}{100 \times 0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 + \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \approx 0,052, \\ \Theta_{\hat{c}} &= -\frac{100 \times 0,2}{\sqrt{\frac{1}{12}}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 + \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \\ &\quad - 0,03 \times 105 e^{-\frac{0,03}{12}} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 - \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \approx -21,569, \\ V_{\hat{c}} &= 100 \sqrt{\frac{1}{12}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 + \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \approx 8,732, \\ \rho_{\hat{c}} &= \frac{105}{12} e^{-\frac{0,03}{12}} f_Z \left(\frac{\ln \left(\frac{100}{105} \right) + \left(0,03 - \frac{0,2^2}{2} \right) \frac{1}{12}}{0,2 \sqrt{\frac{1}{12}}} \right) \approx 1,702.\end{aligned}$$

Como o nosso exemplo é uma opções de compra, o $\Delta_{\hat{c}}$ possui valor positivo. Podemos ver que tanto $\Delta_{\hat{c}}$ quanto $\Gamma_{\hat{c}}$ possuem valores muito próximos de 0, indicando que a variação do preço do ativo base não altera o preço dessa opção. O valor de $\Theta_{\hat{c}}$ alta, indicando que ao passar do tempo o preço da opção irá se desvalorizar muito.

Como estamos trabalhando com uma opção de compra, o valor do $\rho_{\hat{c}}$ é positivo, indicando que a variação da taxa de juros impacta positivamente no preço. A grosso modo, o lançador deixa de investir em um ativo de renda fixa, sendo necessário compensar com o preço da opção. Por fim, $V_{\hat{c}}$ é relativamente alto, indicando que em um aumento da volatilidade do ativo base, vai haver um aumento no preço da opção. A grosso modo, o crescimento da incerteza do mercado sobre o ativo faz com que mais investidores venham a procura de opções para se proteger, aumentando o preço.

Nessa seção, estudamos as gregas, métricas utilizadas para entender o comportamento do preço de uma opção. Dessa forma, os investidores conseguem entender o preço das opções dado as variações das variáveis de mercado. Por fim, na próxima seção apresentamos algumas aplicações para complementar o estudo do modelo de Black-Scholes-Merton.

4.3 Aplicação

Com uma fórmula para o preço da opção e um método de estimação do parâmetro de volatilidade, conseguimos, a partir de dados reais, calcular o preço de uma opção. A partir dos dados de VALE3 do ano de 2018, vamos apresentar o preço de uma opção de compra. Além disso, analisamos a aderência dos log - retornos empíricos a uma distribuição Gaussiana, mostrando, dessa forma, se a distribuição assumida por Black - Scholes - Merton é uma boa aproximação para a distribuição dos preços de uma ação.

Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ o preço do ativo VALE3, o qual obtivemos no site da [B3 \(2018\)](#). Consideramos o dia atual como 15/10/2018, em que, o preço médio da ação foi R\$57,73, i.e., $S(0) = R\$57,73$. Além disso, para nossa aplicação, queremos encontrar o valor de uma opção de compra europeia do ativo Vale, com preço de exercício $K = R\$57,54$, o qual será exercido na data de 19/11/2018. Em anos, temos o seguinte intervalo de tempo $[0, \frac{23}{245}]$, em que 245 é o número total de dias úteis no ano de 2018. Nosso interesse é em simular a precificação da opção levando em conta as terceiras segundas - feiras dos meses de Outubro e Novembro, i.e., seguindo as datas de exercício do mercado brasileiro. ¹

Vamos considerar o Tesouro SELIC (LFT) 2023 como nosso ativo livre de risco. Em Outubro de 2018, esse ativo rendia 0,05% ao dia, como pode ser checado em [SELIC \(2018\)](#), ou de forma equivalente, possuía taxa de juros de $r = 12,25\%$ ao ano. A partir dos 90 preços

¹ Até Maio de 2021, o exercício de uma opção no mercado brasileiro era feito na terceira segunda-feira do mês negociado. Após Maio de 2021, o exercício é feito na terceira sexta-feira do mês negociado.

médios anteriores à 15/10/2018, estimamos a volatilidade como

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{\Delta t (n-1)}} \\ \approx 0,285,$$

em que, $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{245}}$ e $u_i := \ln(S(t_i)) - \ln(S(t_{i-1}))$, com $i \in \{1, \dots, 90\}$. Com o valor estimado para σ , obtemos o seguinte preço para a opção de compra

$$\hat{c} = S(0) \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S(0)}{K} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ = 57,73 \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{57,73}{57,54} \right) + \left(0,1225 + \frac{0,285^2}{2} \right) \frac{23}{245}}{0,285 \sqrt{23/245}} \right) \\ - 57,54 e^{-0,1225 \frac{23}{245}} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{57,73}{57,54} \right) + \left(0,1225 - \frac{0,285^2}{2} \right) \frac{23}{245}}{0,285 \sqrt{23/245}} \right) \\ \approx 57,73 \Phi(0,213) - 56,88 \Phi(0,126) \\ \approx R\$2,45.$$

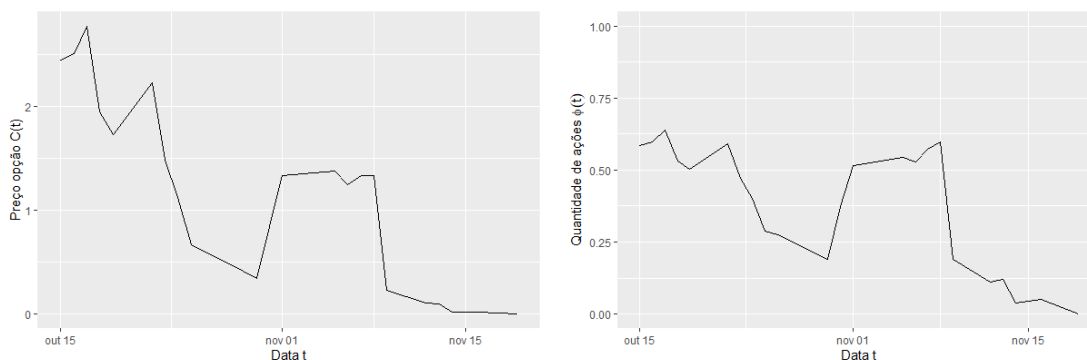
Em 15/10/2018, a opção de compra europeia que possuía essas características era a VALEK588, opção cujo ativo base é a VALE3. O valor de \hat{c} está próximo do preço médio R\$3,03 (dado obtido em B3, 2018), o que indica que \hat{c} poderia ser um dos possíveis preços para VALEK588 nessa data. Além disso, com o histórico do preço de VALE3, conseguimos calcular o preço da opção e a quantidade de ações que devemos ter em uma estratégia de hedging, até o vencimento da opção. Esse resultado é apresentado na Figura 11.

Seja $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ o preço da opção e $\phi := \{\phi(t) : t \in [0, T]\}$ a quantidade de ações de uma estratégia de hedging, ao longo do tempo. Na Figura 11 (a), mostramos a evolução de $C(t)$ calculado ao longo do tempo e na Figura 11 (b), apresentamos a evolução de $\phi(t)$ ao longo do tempo.

Na Figura 12, vemos o comportamento do preço do ativo VALE3 até a data de exercício da opção. Neste gráfico, ao se aproximar da data de maturidade T , vemos que $S(t)$ é menor que K , dando indícios que o titular da opção não vai exercê-la. Isso afeta o comportamento de $C(t)$, o qual vai se aproximando de 0 ao se aproximar da data de maturidade, como visto na Figura 11 (a). De forma equivalente, a quantidade de ações em uma estratégia de estratégia de hedging também se aproxima de 0, como vimos na Figura 11 (b).

Como pressuposto para o modelo de Black-Scholes-Merton, o preço da ação deve ser um movimento Browniano geométrico. Como visto na seção passada, isso significa que o log-retorno $u_i := \ln(S(t_i)) - \ln(S(t_{i-1}))$, para $i \in 0, \dots, n$, deve seguir uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $\Delta t \sigma^2$. Para o ativo VALE3, conseguimos estimar $\hat{\sigma} \approx 0,285$ a partir dos preços

Figura 11 – Gráficos da dinâmica do preço da opção de compra e da quantidade de ações da estratégia de hedging calculados para o ativo VALE3 que vence em 19/11/2018.



(a) Gráfico de $C(t)$ ao longo do tempo t .

(b) Gráfico de $\phi(t)$ ao longo do tempo t .

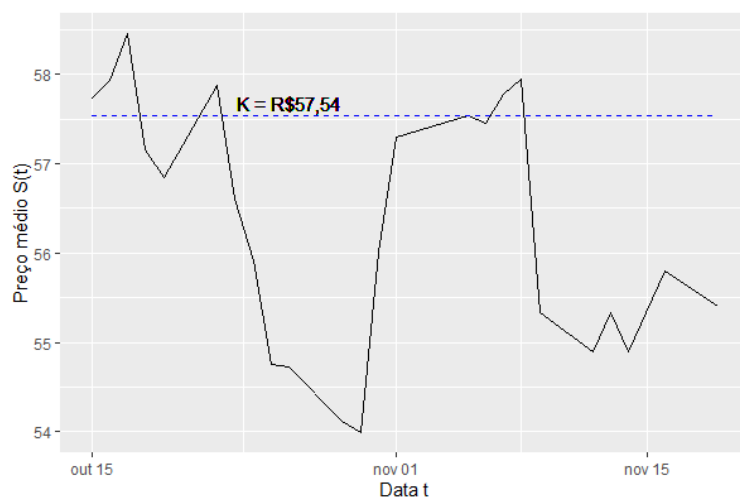
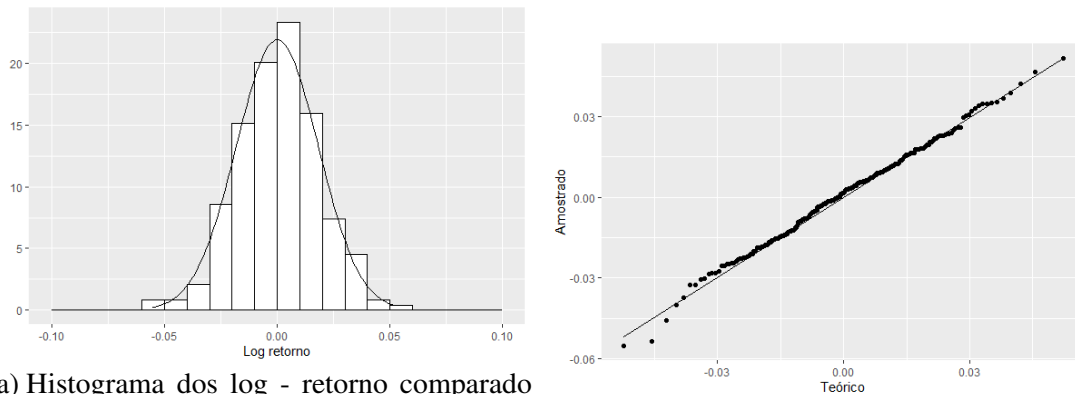


Figura 12 – Preço médio diário do ativo VALE3 até a data de exercício da opção.

médios de 90 dias até (e incluso) 15/10/2018, o que implica que $\Delta t = 1/245$. Uma pergunta natural é: será que os log-retornos do ativo VALE3 seguem realmente uma distribuição Gaussiana com média $\mu = \left(0,1225 - \frac{(0,285)^2}{2}\right) \frac{1}{245} \approx 0$ e variância $\Delta t \hat{\sigma}^2 \approx (0,285)^2/245 \approx 0,00033$?

Assumimos os log-retornos do ano de 2018, aplicamos o teste Anderson - Darling de aderência. Com o nível de significância fixado em 5% e valor p de 0,6179, não rejeitamos a hipótese dos log-retornos u_i 's, para $i \in \{1, \dots, 244\}$, seguirem uma distribuição Gaussiana, com média 0 e variância 0,00033. Isso pode ser confirmado ao avaliar o gráfico quantil - quantil (QQ - plot) e o gráfico de densidade dos log-retornos na Figura 13. Além disso, as medidas de curtose e assimetria são dados, respectivamente, por 3,196 e $-0,104$, as quais se aproximam dos valores teóricos, i.e., curtose e assimetria, respectivamente, iguais à 3 e 0.

Figura 13 – Gráficos de comparação dos log - retornos do ativo VALE3 do ano de 2018 com uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 0,00033.



(a) Histograma dos log - retorno comparado com a função de densidade de uma Gaussiana com média 0 e variância 0,00033.

(b) Gráfico quantil-quantil de uma Gaussiana com média 0 e variância 0,00033.

Uma pergunta natural é como podemos estender esse resultado quando temos mais ações dentro de nossa carteira? Nesse sentido, no próximo Capítulo apresentamos o modelo de Black-Scholes-Mertons multidimensional, como é formado as estratégias e como podemos obter o preço de uma opção nesse mercado.

MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON MULTIDIMENSIONAL

Uma extensão natural do modelo de Black-Scholes-Merton é a que considera, além de um ativo base e um ativo de renda fixa, outros ativos de riscos cujas dinâmicas dos preços seguem um movimento Browniano geométrico. Iniciamos este capítulo, apresentando uma discussão detalhada de alguns efeitos decorrentes da adição de um segundo ativo na composição de uma carteira de investimento. Em seguida, generalizamos os resultados obtidos no mercado de ações bidimensional, para o caso em que a carteira de investimento é composta por mais de dois ativos de risco. Por fim, apresentamos como obter a medida de probabilidade neutra ao risco para esse modelo de Black, Scholes e Merton multidimensional. Finalizamos o capítulo, apresentando a fórmula de apreçamento de opções de compra Europeia para o mercado de ações multidimensional juntamente com aplicações em dados reais.

5.1 Estratégia com dois ativos de risco

5.1.1 Os movimentos Brownianos

Considere dois movimentos Brownianos independentes $B_1 := \{B_1(t) : t \in [0, T]\}$ e $B_2 := \{B_2(t) : t \in [0, T]\}$ definidos, respectivamente, nos espaços de probabilidade $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. Seja $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ um movimento browniano bidimensional, ou seja,

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

qualquer que seja $t \in [0, T]$. Podemos definir B no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ é a σ -álgebra produto e $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ é a medida de probabilidade produto. Em outras palavras, \mathcal{F} é a menor σ -álgebra que contém todos os retângulos $A_1 \times A_2$ em que $A_1 \in \mathcal{F}_1$ e $A_2 \in \mathcal{F}_2$; e a medida de probabilidade produto \mathbb{P} é tal

que

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2),$$

quaisquer que sejam os retângulos $A_1 \times A_2$ de \mathcal{F} .

De forma análoga ao caso unidimensional, podemos considerar a filtragem natural

$$\mathbb{F} := \{ \mathcal{F}_t^B : t \in [0, T] \},$$

em que

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma \{ B(s) : s \leq t \} = \sigma \left\{ \begin{pmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix} : s \leq t \right\}.$$

Note que a \mathcal{F}_t^B é a σ -álgebra gerada pelos retângulos $A \times B$, em que $A \in \mathcal{F}_t^{B_1}$ e $B \in \mathcal{F}_t^{B_2}$, sendo $\mathcal{F}_t^{B_1} := \sigma \{ B_1(s) : s \leq t \}$ e $\mathcal{F}_t^{B_2} := \sigma \{ B_2(s) : s \leq t \}$.

Utilizamos em outros momentos da dissertação a propriedade martingale de um movimento Browniano em respeito a sua filtragem, i.e., $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{B_i}] = B_i(s)$, em que $0 \leq s < t \leq T$ $i \in \{1, 2\}$. Mas será que obtemos uma propriedade semelhante com um movimento Browniano bidimensional $\mathcal{F}^{(B_1, B_2)}$? Nesse sentido, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 11. Se $B_i := \{B_i(t) : t \in [0, T]\}$ são movimentos Brownianos definidos sobre $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, em que $i \in \{1, 2\}$, então

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \right] = B_i(t), \text{ com } 0 \leq s < t \leq T \text{ e } i \in \{1, 2\}.$$

Demonstração. Vamos manipular as esperanças condicionais. Para $s \leq t$ temos a seguinte igualdade

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i} \right],$$

pois

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \right] \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_i(t)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i} \right] \right]. \end{aligned}$$

Nos resta provar que $\mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i} = \mathcal{F}_s^{B_i}$. É fácil ver que $\mathcal{F}_s^{B_i} \subset \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i}$, agora vamos avaliar a volta. A sub σ -álgebra $\mathcal{F}_t^{B_i}$ é gerada por retângulos formados por um Ω_j , com $j \neq i$, i.e., $\mathcal{F}_t^{B_i} = \{A \times \Omega_j : A \in \sigma \{ B_i(u) : u \leq t \} \}$. Além disso, a intersecção $\mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i}$ também é gerada por retângulos dessa forma.

Para $\mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)}$, temos a menor σ -álgebra gerada por $B(u) := (B_1(u) B_2(u))^T$, com $u \leq s$. Dessa forma, $\mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i}$ gera retângulos com um fator de Ω_j e outro fator gerados pelo movimento Browniano $B_i(s)$, em que $u \leq s$, logo $\mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i} \subset \mathcal{F}_s^{B_i}$. Por fim,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{(B_1, B_2)} \cap \mathcal{F}_t^{B_i} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[B_i(t) | \mathcal{F}_s^{B_i} \right] \stackrel{(a)}{=} B_i(s),$$

em que, em (a) usamos a propriedade martingale de B_i e concluímos a prova. \square

Com isso, conseguimos uma propriedade martingale para o movimento Browniano bidimensional. Na próxima seção, vamos avaliar o mercado formado por duas ações que seguem um movimento Browniano geométrico.

5.1.2 Os ativos do mercado

Nesta seção, vamos apresentar os ativos desse mercado. Apresentamos as EDEs que descrevem cada ativo e os processos estocásticos que são suas soluções. Seja $A : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ uma função determinística, em que $A(t)$ representa o valor do ativo livre de risco no tempo t , dado por

$$A(t) := A(0)e^{rt},$$

em que, $r \in (0, \infty)$ é a taxa (anual) de juros e, sem perda de generalidade, $A(0) = 1$. Além disso, A é a solução da EDO $dA(t) = rA(t)dt$, com condição inicial $A(0) = 1$.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade definido na seção anterior e sejam $S_1 := \{S_1(t) : t \in [0, T]\}$ e $S_2 := \{S_2(t) : t \in [0, T]\}$ dois processos estocásticos que são definidos nesse espaço, em que $S_1(t)$ e $S_2(t)$ representam os preços de dois ativos de risco no tempo t . Dessa forma, as EDEs de $S_1(t)$ e $S_2(t)$ são dados por

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= \mu_1 S_1(t)dt + S_1(t)c_{11}dB_1(t) + S_1(t)c_{12}dB_2(t), \\ dS_2(t) &= \mu_2 S_2(t)dt + S_2(t)c_{21}dB_1(t) + S_2(t)c_{22}dB_2(t), \end{aligned}$$

em que, $S_i(0)$ é dado, $\mu_i \in \mathbb{R}$ e $c_{ij} \in (0, \infty)$, para $i, j \in \{1, 2\}$. Além disso, a matriz

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

é invertível.

Como no caso unidimensional, a filtragem $\mathbb{F}^{(S_1, S_2)}$, i.e., a filtragem natural de $S := (S_1 \ S_2)^T$, é igual à $\mathbb{F}^{(B_1, B_2)}$. De fato isso ocorre, pois a única fonte de variação de S é dada por B , o que fica claro quando olhamos para a versão matricial do sistema de EDEs

$$dS(t) = \mu S(t)dt + S(t)CdB(t),$$

em que,

$$S(t) := \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}, \mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}.$$

Cada EDE é composto por dois movimentos Brownianos. É interessante ter apenas um para que voltemos ao caso em que a equação se assemelhe a de um movimento Browniano geométrico, como trabalhado no capítulo anterior. Para obter tal resultado, utilizamos a seguinte proposição:

Proposição 12. Seja $B_1 := \{B_1(t) : t \in [0, T]\}$ e $B_2 := \{B_2(t) : t \in [0, T]\}$ dois movimentos Brownianos independentes definidos sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O processo estocástico $X := aB_1 + bB_2$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, é um movimento Browniano se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1$.

Demonstração. Seja X um movimento Browniano. Da Definição 6, precisamos que $X(t) - X(s)$ siga uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $t - s$. Avaliando a variável aleatória $X(t) - X(s) = a(B_1(t) - B_1(s)) - b(B_2(t) - B_2(s))$, temos uma soma de variáveis aleatórias independentes e que seguem uma distribuição Gaussiana, logo $X(t) - X(s)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(a^2 + b^2)(t - s)$. Por hipótese, X é um movimento Browniano, logo $a^2 + b^2 = 1$.

Seja $a^2 + b^2 = 1$. Vamos avaliar a distribuição de $X(t) - X(s)$. Como na primeira parte da prova, estamos lidando com soma de variáveis aleatórias que seguem uma distribuição Gaussiana, logo, $X(t) - X(s)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(a^2 + b^2)(t - s) = t - s$. Os demais itens da Definição 6 são triviais, dado que estamos fazendo operações lineares. Logo X é um movimento Browniano. \square

Da Proposição 12, conseguimos escrever o seguinte movimento Browniano

$$B'_i(t) = \frac{c_{i1}}{\sqrt{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}} B_1(t) + \frac{c_{i2}}{\sqrt{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}} B_2(t),$$

em que, $i \in \{1, 2\}$. Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} dS_1(t) = \mu_1 S_1(t) dt + \sigma_1 S_1(t) B'_1(t), \\ dS_2(t) = \mu_2 S_2(t) dt + \sigma_2 S_2(t) B'_2(t), \end{cases}$$

em que, $\sigma_i = \sqrt{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}$, para $i \in \{1, 2\}$. Dessa forma, voltamos as equações clássicas de um movimento Browniano Geométrico. Dos Teoremas 9 e 8, sabemos que existe uma única solução contínua para cada EDE e pela fórmula de Itô, sabemos que as soluções são dadas por

$$\begin{aligned} S_i(t) &= S_i(0) \exp \left\{ \mu_i t - \frac{1}{2} \sigma_i^2 t + \sigma_i B'_i(t) \right\} \\ &= S_i(0) \exp \left\{ \mu_i t - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1(t) + c_{i2} B_2(t) \right\} \end{aligned}$$

em que, $i \in \{1, 2\}$.

Vamos considerar que S_1 seja o ativo base, que no nosso caso, é uma ação e que S_2 seja um seja uma segunda ação. Vamos trabalhar apenas com opções do tipo vanilha¹ e, conseqüentemente, com ativos de risco que vão ser ações. Contudo, podemos utilizar os

¹ As opções que trabalhamos ao longo da dissertação são chamadas do tipo vanilha. Elas são opções que dão ao seu comprador o direito de comprar/vender uma ação em uma data futura por um preço préfixado.

processos estocásticos e os resultados adiante para outros tipos de opções e derivativos com outros tipos de ativos de risco, e.g., opção de troca e opção spread (ver [Souza et al., 2008](#)).

Na próxima seção, falamos sobre a composição da estratégia com 2 ativos de risco. Como no caso unidimensional, vamos considerar admissível em um mercado completo e livre de estratégias de arbitragem.

5.1.3 Estratégias no modelo bidimensional

Seja $\pi := \{\pi(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico, definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que representa uma estratégia no mercado bidimensional. Nesse caso, a estratégia no tempo t é dada por $\pi(t) := (\phi_1(t), \phi_2(t), \psi(t))$, em que $\phi_1(t)$ é a quantidade de aportes do ativo S_1 , $\phi_2(t)$ é a quantidade de aportes do ativo S_2 e $\psi(t)$ é a quantidade de aportes do ativo A . Além disso, ϕ_1 , ϕ_2 e ψ são processos estocásticos previsíveis.

Dessa forma, temos o processo estocástico $X^\pi := \{X^\pi(t) : t \in [0, T]\}$ que representa o valor atrelado a estratégia π , o qual é dado por

$$X^\pi(t) := \phi_1(t)S_1(t) + \phi_2(t)S_2(t) + \psi(t)A(t), \text{ com } t \in [0, T].$$

Se π é uma estratégia autofinanciável, então

$$dX^\pi(t) = \phi_1(t)dS_1(t) + \phi_2(t)dS_2(t) + \psi(t)dA(t), \text{ com } t \in [0, T].$$

Vamos assumir $\bar{S} := \{\bar{S}_i(t) : t \in [0, T]\}$, com $i \in \{1, 2\}$, o processo descontado, que é dado por $\bar{S}_i(t) = \frac{S_i(t)}{A(t)}$. No nosso caso, obtemos que

$$\begin{aligned} \bar{S}_i(t) &= \frac{S_i(t)}{A(t)} \\ &= S_i(0) \exp \left\{ \mu_i t - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1(t) + c_{i2} B_2(t) \right\} \exp\{-rt\} \\ &\stackrel{(a)}{=} S_i(0) \exp \left\{ -(r - \mu_i)t - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1(t) + c_{i2} B_2(t) \right\}. \end{aligned}$$

Não é trivial para encontrar uma maneira de eliminar μ_i e obter um martingale em (a). Vamos apresentar de forma heurística neste primeiro momento e posteriormente formalizamos com o Teorema de Girsanov. Assuma o sistema de EDEs para os preços das ações

$$\begin{aligned}
 dS(t) &= \mu S(t)dt + S(t)CdB(t) \\
 &= \mu S(t)dt + rS(t)dt - rS(t)dt + S(t)CdB(t) \\
 &= (\mu - r)S(t)dt + rS(t)dt + S(t)CdB(t) \\
 &= rS(t)dt + S(t)[(\mu - r)dt + CdB(t)] \\
 &\stackrel{(a)}{=} rS(t)dt + S(t)C[C^{-1}(\mu - r)dt + dB(t)],
 \end{aligned}$$

em que, usamos o fato de de C ser invertível em (a). Tomando $B^{\mathbb{Q}}(t) := C^{-1}(\mu - r)t + B(t)$, podemos reescrever o sistema de EDEs como

$$dS(t) := rS(t)dt + S(t)CdB^{\mathbb{Q}}(t).$$

Usando os mesmo argumentos da seção anterior, obtemos que a única solução desse sistema é dado por

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left\{ rt - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2}t + c_{i1}B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{i2}B_2^{\mathbb{Q}}(t) \right\},$$

então

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_i(t) &= \frac{S_i(t)}{A(t)} \\
 &= S_i(0) \exp \left\{ rt - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2}t + c_{i1}B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{i2}B_2^{\mathbb{Q}}(t) \right\} \exp\{-rt\} \\
 &= S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2}t + c_{i1}B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{i2}B_2^{\mathbb{Q}}(t) \right\},
 \end{aligned}$$

em que $i \in 1, 2$. Tomando

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{S}_i(t) | \mathcal{F}_s^{B_1, B_2}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(t) \right\} \middle| \mathcal{F}_s^{B_1, B_2} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[S_i(0) \exp \left\{ c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} (B_1^{\mathbb{Q}}(t) - B_1^{\mathbb{Q}}(s)) + c_{i2} (B_2^{\mathbb{Q}}(t) - B_2^{\mathbb{Q}}(s)) \right\} \middle| \mathcal{F}_s^{B_1, B_2} \right] \\
&\stackrel{(a)}{=} S_i(0) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right\} \middle| \mathcal{F}_s^{B_1, B_2} \right] \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ c_{i1} (B_1^{\mathbb{Q}}(t) - B_1^{\mathbb{Q}}(s)) + c_{i2} (B_2^{\mathbb{Q}}(t) - B_2^{\mathbb{Q}}(s)) \right\} \middle| \mathcal{F}_s^{B_1, B_2} \right] \\
&\stackrel{(b)}{=} S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right\} \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ c_{i1} (B_1^{\mathbb{Q}}(t) - B_1^{\mathbb{Q}}(s)) + c_{i2} (B_2^{\mathbb{Q}}(t) - B_2^{\mathbb{Q}}(s)) \right\} \right] \\
&\stackrel{(c)}{=} S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right\} \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ c_{i1} (B_1^{\mathbb{Q}}(t) - B_1^{\mathbb{Q}}(s)) \right\} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ c_{i2} (B_2^{\mathbb{Q}}(t) - B_2^{\mathbb{Q}}(s)) \right\} \right] \\
&\stackrel{(d)}{=} S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} t + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{c_{i1}(t-s)}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{c_{i2}(t-s)}{2} \right\} \\
&= S_i(0) \exp \left\{ -\frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} s + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(s) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(s) \right\} \\
&= S_i(s),
\end{aligned}$$

em que, usamos a independência de B_1 e B_2 e o item (iii) da Definição 6 em (a), usamos a Proposição 11 em (b), usamos a independência de B_1 e B_2 em (c) e usamos a fórmula da função geradora de momentos de uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $c_{i,j}^2(t-s)$, para $i, j \in \{1, 2\}$ em (d). Dessa forma, \mathbb{Q} é uma medida neutra ao risco.

5.1.3.1 Mercado completo em livre de arbitragem

O mercado com dois ativos que segue movimentos Brownianos geométricos é um mercado completo e livre de estratégias de arbitragem, quando consideramos uma estratégia admissível. Os passos para esse desenvolvimento são os mesmos do Capítulo 4. Contudo, precisamos que a matriz C seja invertível e a versão mais geral do teorema da representação de martingales, que é dado por

Teorema 30 (Representação de martingales - caso geral). Sejam $M := \{M(t) : t \in [0, T]\}$ e $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$, respectivamente, um processo estocástico e um movimento Browniano d -dimensional definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e é um martingale em respeito à filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$, em que $\mathcal{F}_t := \sigma\{B(s) : t > s\}$, então M possui uma versão contínua dada por

$$\tilde{M}(t) = M(0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \theta_i(s) dB_i(s),$$

em que, $\theta_i \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

A prova pode ser vista no Capítulo 4 de Protter (2005). A prova da completude do mercado segue os mesmos passos do Capítulo 4, o que pode ser checada no Capítulo VII de Shiryaev (1999). A importância de C ser invertível está ligado ao mercado que estamos buscando, pois, caso a matriz seja singular, ocorre a não completude e as estratégias de arbitragem. Podemos ver mais detalhes na Seção 6 de Capiński e Kopp. Por fim, de modo geral,

$$C(0) = X^\pi(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-Tr}H] \quad (5.1)$$

que $C := \{C(t) : t \in [0, T]\}$ é um processo estocástico que representa o preço de uma opção, em que $C(t)$ é o preço da opção e H é uma variável aleatória $\mathcal{F}_T^{B_1, B_2}$ -mensurável que representa a função custo. Para o nosso caso, $H := \max(S_1(T) - K, 0)$.

5.1.4 Derivação do preço da opção e estimação da matriz de covariâncias

Encontrar uma fórmula fechada para o preço da opção pode ser uma tarefa difícil quando trabalhamos com estratégias com mais de um ativo de risco. Nesse caso, podemos utilizar simulações para aproximar o valor da Equação (5.1). Além disso, como estamos trabalhando com ativos que seguem um movimento Browniano geométrico, o logaritmo natural do vetor segue uma distribuição Gaussiana multivariada, sendo possível estimar a matriz de covariâncias utilizando os log-retornos das ações, assim, sendo possível calcular C .

5.1.4.1 Algoritmo para o cálculo do preço de uma opção

Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, dado por $S(t) := (S_1(t) \ S_2(t))^T$, em que $S_1^{\mathbb{Q}}(t)$ representa o preço do ativo base no tempo t e $S_2^{\mathbb{Q}}(t)$ é o preço de um outro ativo no tempo t . Além disso, seja $A : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ uma função dada por $A(t) = e^{rt}$, em que $A(t)$ representa preço de um ativo livre de risco no tempo t , que é atrelado á uma taxa de juros $r \in (0, \infty)$.

Sabemos que

$$S_i(t) := S_i(0) \exp \left\{ rt - t \frac{c_{i1}^2 + c_{i2}^2}{2} + c_{i1} B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{i2} B_2^{\mathbb{Q}}(t) \right\},$$

em que $i \in \{1, 2\}$. Então, S depende do valor de $B^{\mathbb{Q}} := (B_1^{\mathbb{Q}} \ B_2^{\mathbb{Q}})^T$, dessa forma podemos simular valores de S simulando valores de $B^{\mathbb{Q}}$. Assim, podemos encontrar o preço da opção de compra, que é dado por

$$\begin{aligned}\hat{c} = C(0) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \max\left(S_1^{\mathbb{Q}}(T) - K, 0\right)\right] \\ &\approx e^{-rT} \sum_{k=1}^n \frac{\max\left(S_{1k}^{\mathbb{Q}}(T) - K, 0\right)}{n},\end{aligned}$$

em que, $S_{11}(T), \dots, S_{1n}(T)$ são valores simulados.

Sabemos que o vetor aleatório $B^{\mathbb{Q}}(t)$ segue uma distribuição Gaussiana multivariada com vetor de médias $\mathbf{0} = (0 \ 0)^T$ e matriz de covariâncias, dado por

$$\mathbf{t} := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

A forma de calcular o preço da opção está descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1 – Algoritmo para o cálculo do preço de uma opção de compra

- 1: **procedimento** PREÇO DA OPÇÃO($S_1(0), r, T, k, C, n$)
 - 2: Gere $B_k^{\mathbb{Q}}(T) = (B_{1,k}^{\mathbb{Q}}(T) \ B_{2,k}^{\mathbb{Q}}(T))^T$, com $k \in \{1, \dots, n\}$, que seguem $MVN(\mathbf{0}, \mathbf{T})$;
 - 3: Calcule $S_{1k}(T) = S_1(0) \exp\left\{rT - \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2}t + c_{11}B_1^{\mathbb{Q}}(T) + c_{12}B_2^{\mathbb{Q}}(T)\right\}$;
 - 4: Calcule $X_k = \max(S_{1k}(T) - K, 0)$;
 - 5: Calcule $\hat{c} = e^{-rT} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}$;
 - 6: **retorna** \hat{c} ▷ O preço da opção de compra europeia
 - 7: **fim procedimento**
-

Para gerar os valores de S , precisamos saber o valor de C . Na próxima seção, vamos apresentar uma maneira de estimar C utilizando os log-retorno de S . Além disso, apresentamos na próxima seção uma aplicação desse resultado.

5.1.4.2 Estimação da matriz de covariâncias

Nesta seção vamos apresentar a estimação da matriz C . Para isso, vamos avaliar os log-retornos de S . Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, dado por $S := (S_1 \ S_2)^T$, em que $S_1(t)$ é o preço do ativo base no tempo t e S_2 é o preço de

outra ação no tempo t . Tomando o logaritmo de S , obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ln(S_1(t)) \\ \ln(S_2(t)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ln(S_1(0)) + \left(r + \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2}\right)t + c_{11}B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{12}B_2^{\mathbb{Q}}(t) \\ \ln(S_2(0)) + \left(r + \frac{c_{21}^2 + c_{22}^2}{2}\right)t + c_{21}B_1^{\mathbb{Q}}(t) + c_{22}B_2^{\mathbb{Q}}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \ln(S_1(0)) + \left(r + \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2}\right)t \\ \ln(S_2(0)) + \left(r + \frac{c_{21}^2 + c_{22}^2}{2}\right)t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^{\mathbb{Q}}(t) \\ B_2^{\mathbb{Q}}(t) \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\mu}(t) + C\mathbf{B}^{\mathbb{Q}}(t), \end{aligned}$$

em que,

$$\boldsymbol{\mu}(t) := \begin{pmatrix} \ln(S_1(0)) + \left(r + \frac{c_{11}^2 + c_{12}^2}{2}\right)t \\ \ln(S_2(0)) + \left(r + \frac{c_{21}^2 + c_{22}^2}{2}\right)t \end{pmatrix}.$$

Assim, tomando o log-retorno de t e s

$$\begin{pmatrix} \ln(S_1(t)) - \ln(S_1(s)) \\ \ln(S_2(t)) - \ln(S_2(s)) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}(t) - \boldsymbol{\mu}(s) + C(\mathbf{B}^{\mathbb{Q}}(t) - \mathbf{B}^{\mathbb{Q}}(s))$$

em que $0 \leq s < t \leq T$. Avaliando a distribuição do log-retorno, vemos que ele segue uma distribuição Gaussiana bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}(t) - \boldsymbol{\mu}(s)$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = (t - s)CC^T$.

Seja $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, em que \mathbf{u}_i é um log-retorno observado no tempo t_i , i.e.,

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \ln(S_1(t_i)) - \ln(S_1(t_{i-1})) \\ \ln(S_2(t_i)) - \ln(S_2(t_{i-1})) \end{pmatrix}.$$

Além disso, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podemos utilizar o estimador não enviesado para a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$, que é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})^T.$$

Assim, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\Delta t^{-1} = \hat{C}\hat{C}^T$ e obtemos \hat{C} de fato utilizando as decomposições de Cholesky, caso $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\Delta t^{-1}$ seja positiva e definida, ou a decomposição espectral, que é computacionalmente mais custosa.

5.1.4.3 Aplicação

Seja $S_1 := \{S_1(t) : t \in [0, T]\}$ o preço do ativo VALE3 e $S_2 := \{S_2(t) : t \in [0, T]\}$ o preço do ativo JBSS3, os quais obtivemos no site da B3 (2018). Como no Capítulo 4, consideramos o dia atual como 15/10/2018. Queremos encontrar o valor de uma opção de compra europeia do ativo Vale, com preço de exercício $K = R\$57,54$, o qual será exercido na data de 19/11/2018. Em anos, temos o seguinte intervalo de tempo $[0, \frac{23}{245}]$, em que 245 é o número total de dias úteis no ano de 2018, logo $\Delta t = \frac{1}{245}$. Além disso, estamos considerando o valor da taxa de juros como $r = 12,25\%$, a taxa SELIC anual da época e $S_1(0) = R\$57,73$.

Dessa forma, tomando os dados de 90 dias úteis anteriores ao dia 15/10/2018, obtemos os valores de

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}})^T \\ &\approx \begin{pmatrix} 0,00033 & -0,000014 \\ -0,000014 & 0,00042 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}CC^T &= \frac{\hat{\Sigma}}{\Delta t} \\ &= 245 \times \hat{\Sigma} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0,0812 & -0,00366 \\ -0,00366 & 0,102 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Conseguimos escrever a decomposição espectral da seguinte forma $CC^T = V\lambda V^T$, em que

$$\begin{aligned}V &\approx \begin{pmatrix} -0,1684 & -0,9857 \\ 0,9857 & -0,1684 \end{pmatrix} \\ \lambda &\approx \begin{pmatrix} 0,1026 & 0 \\ 0 & 0,0806 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos que \hat{C} é dado por

$$\begin{aligned}\hat{C} &= V\lambda^{1/2} \\ &\approx \begin{pmatrix} -0,054 & -0,2798 \\ 0,3158 & -0,0478 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como estimamos o valor de C , podemos simular valores de $S_1(T)$, para assim, calcular o valor de \hat{c} . Simulando 100 valores de $S_1(T)$ e aplicando o Algoritmo 1, obtemos o seguinte resultado para o preço da opção de compra europeia do ativo VALE3

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H] \\ &\approx R\$1,42.\end{aligned}$$

Utilizamos no nosso portfólio o ativo JBSS3, pois, os log-retornos ao longo do ano seguem uma distribuição Gaussiana. Isso pode ser visto quando tomamos $u_{2,1}, \dots, u_{2,n}$, em que $u_{2i} = \ln(S_2(t_i)) - \ln(S_2(t_{i-1}))$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, em que $n = 244$ e aplicamos o teste de Anderson-Darling. Com o nível de significância de 5% e valor p de 0,1836 não rejeitamos a hipótese dos log-retornos de S_2 seguirem uma distribuição Gaussiana. Além disso, a curtose de 3,5929 e assimetria de 0,3903 da amostra se assemelha ao de uma distribuição Gaussiana, i.e., curtose 3 e assimetria 0.

Nessa seção, apresentamos os resultados sobre o modelo de Black-Scholes-Merton com dois ativos de risco. Mostramos a adaptação dos passos do Capítulo 4 e uma maneira de estimar o preço da opção. Na próxima seção, apresentamos o modelo de Black-Scholes-Merton para d ativos de risco, em que $d > 2$.

5.1.5 Estratégias no modelo d -dimensional

Nesta seção, vamos apresentar o modelo de Black-Scholes-Merton d -dimensional. Como os resultados são semelhantes aos da seção anterior vamos apenas mostrar sua adaptação. Como na seção anterior, temos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$. Além disso, seja $B_i := \{B_i(t) : t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano definido em Ω_i , para $i \in \{1, \dots, d\}$ e em que B_i é independente de B_j , com $i \neq j$. Dessa forma, $B := \{B(t) : t \in [0, T]\}$ é um movimento Browniano d -dimensional definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e dado por $B(t) = (B_1(t)B_2(t) \cdots B_d(t))^T$. Definindo $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ como a filtragem natural de B , como na Proposição 11, pode-se provar por argumentos semelhantes que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_i(t) | \mathcal{F}_s] = B_i(s)$, para $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ e $0 \leq s < t \leq T$.

Seja $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dado por $S(t) := (S_0(t)S_1(t) \cdots S_d(t))$, em que $S_i(t)$ é o preço de um ativo de risco no tempo t , em que $i \in \{1, \dots, d\}$ e $S_0(t)$ é o preço de um ativo de renda fixa, que é dado por

$$S_0(t) = S_0(0)e^{rt},$$

em que $r \in (0, \infty)$ é a taxa de juros e $S_0(0) = 1$. Além disso,

$$dS_i(t) := \mu_i S_i(t) dt + S_i(t) \sum_{j=1}^d c_{ij} dB_j(t), \text{ com } i \in \{1, \dots, d\},$$

em que $\mu_i \in \mathbb{R}$,

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d1} & \cdots & c_{dd} \end{pmatrix},$$

e C é invertível. Como na seção anterior, vamos considerar S_1 como o ativo base da opção.

Usando do Teorema 12 sabemos que a EDE anterior possui uma única solução. Usando a fórmula de Itô multidimensional, descrita no Teorema 11, e usando a mesma ideia da EDE de um movimento Browniano Geométrico, obtemos

$$S_i(t) := S(0) \exp \left\{ \mu_i t - t \frac{\sum_{j=1}^d c_{ij}^2}{2} + \sum_{j=1}^d c_{ij} B_j(t) \right\},$$

em que $i \in \{1, \dots, d\}$.

Usando a mesma ideia do capítulo anterior, podemos utilizar o teorema de Girsanov para encontrar uma medida neutra ao risco. Nesse sentido, apresentamos o teorema a seguir:

Teorema 31 (Teorema de Girsanov - caso geral). Seja $X : \{X(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que é dado por $X(t) := (X_1(t) \cdots X_d(t))^T$, em que

$$X_i(t) := \int_0^t a_i(s) ds + B_i(s),$$

em que B_i é um movimento Browniano e a_i um processo estocástico. Seja

$$M(t) := \exp \left\{ - \sum_{i=1}^d \int_0^t a_i(s) dB_i(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t a_i^2(s) ds \right\}$$

um martingale, em que

$$\mathbb{Q}(A) := \int_A M(t) d\mathbb{P},$$

é uma medida equivalente à \mathbb{P} , com $A \subset \Omega$. Então, X é um movimento Browniano d -dimensional no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

A prova pode ser obtida no Capítulo 6 de [Capiński e Kopp \(2012\)](#). Para complementar o Teorema de Girsanov, temos o seguinte teorema.

Teorema 32. Seja $\theta := \{\theta(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dado por $\theta(t) := (\theta_1(t)\theta_2(t) \cdots \theta_d(t))^T$ e que

1. $\sum_{j=1}^d c_{ij}\theta_j(t) = \mu_i - r$;
2. e $M(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j=1}^d \theta_j^2(s) ds - \int_0^t \sum_{j=1}^d \theta_j(s) dB_j(t) \right\}$ é um martingale.

Então, a medida $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[1_A M(T)]$ é a medida neutra ao risco.

A prova também pode ser vista no Capítulo 6 de [Capiński e Kopp \(2012\)](#). Então, pelo Teorema de Girsanov,

$$B_i^{\mathbb{Q}}(t) := \int_0^t \theta_i(s) ds + B_i(t),$$

para $i \in \{1, \dots, d\}$, implicando em

$$\begin{aligned} S_i(t) &= S(0) \exp \left\{ \mu_i t - t \frac{\sum_{j=1}^d c_{ij}^2}{2} + \sum_{j=1}^d c_{ij} B_j(t) \right\} \\ &= S(0) \exp \left\{ \mu_i t - t \frac{\sum_{j=1}^d c_{ij}^2}{2} - \sum_{j=1}^d c_{ij} \int_0^t \theta_j(s) ds + \sum_{j=1}^d c_{ij} B_j^{\mathbb{Q}}(t) \right\} \\ &\stackrel{(a)}{=} S(0) \exp \left\{ \mu_i t - t \frac{\sum_{j=1}^d c_{ij}^2}{2} + (r - \mu_i)t + \sum_{j=1}^d c_{ij} B_j^{\mathbb{Q}}(t) \right\} \\ &= S(0) \exp \left\{ r t - t \frac{\sum_{j=1}^d c_{ij}^2}{2} + \sum_{j=1}^d c_{ij} B_j^{\mathbb{Q}}(t) \right\}. \end{aligned}$$

em que, usamos o Teorema 32 em (a).

Por fim, como possuímos a medida neutra ao risco, podemos calcular o preço de uma opção de compra europeia utilizando a fórmula

$$\hat{c} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H],$$

em que, H é a função custo de uma opção de compra europeia que é dada por $H := \max(S(T) - K, 0)$. Como discutido na seção anterior, \hat{c} não possui forma fechada, logo, para achar o preço da opção, podemos adaptar o Algoritmo 1.

Como considerações finais, ressaltamos que os passos para a construção de um mercado completo e livre de arbitragem seguem os mesmos do Capítulo 4, a não ser pelo fato de que a matriz C seja invertível. Para estimar a matriz C podemos utilizar o processo descrito na seção anterior. E por fim, no próximo capítulo apresentamos outros modelos para precificar opções, como os modelos de volatilidade estocástica, os modelos com taxa de juros estocástica e modelos que utilizam processos não exclusivamente Browniano, como os processos de Levy.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No Capítulo 2, introduzimos o leitor ao mercado financeiro. Apresentamos o mercado de derivativos, com foco no funcionamento do mercado de opções e de suas terminologias. Além disso, mostramos uma maneira de modelar os ativos livre de risco, que usamos ao longo de toda a dissertação. Com o objetivo de precificar uma opção, apresentamos uma primeira aproximação para o preço utilizando o modelo de n -períodos, que utiliza processos estocásticos a tempo discreto (ver por exemplo [Cox, Ross e Rubinstein, 1979](#)).

No Capítulo 3, estudamos a teoria do cálculo estocástico, com a finalidade de encontrar o preço de uma opção usando processos estocásticos em tempo contínuo. Nesse sentido, construímos a integral estocástica de Itô, partindo das integrais determinísticas de Riemann e Riemann-Stieljes e a integral estocástica de Wiener (Ver Capítulo 2 de [Kuo, 2006](#)). Com o intuito de resolver equações diferenciais estocásticas (EDEs), estudamos as condições de Lipschitz e de crescimento linear, que nos garantem a existência e unicidade das soluções. Por fim, apresentamos a fórmula de Itô, a qual é a regra da cadeia para o cálculo estocástico e, também, é utilizada para encontrar a solução de uma EDE.

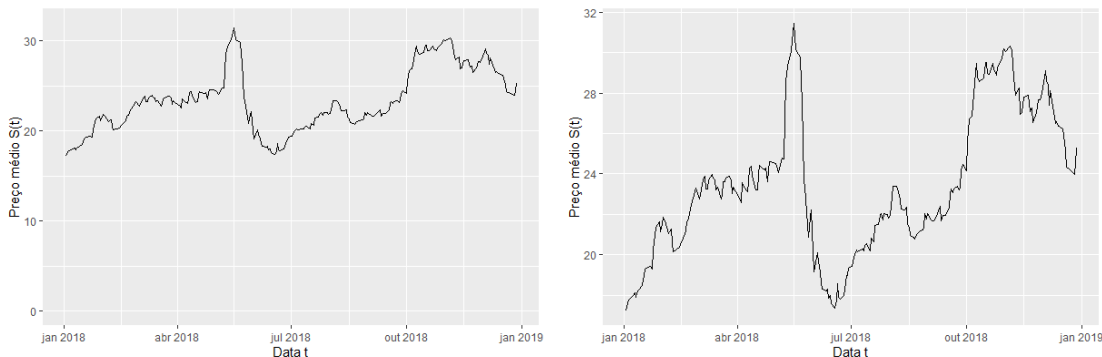
Reunimos os conceitos vistos nos Capítulos 2 e 3 no Capítulo 4, para trabalhar com o modelo de apreçamento de opções de Black - Scholes - Merton. Esse modelo, utiliza um movimento Browniano geométrico para modelar o preço de um ativo, i.e., usamos um processo estocástico em tempo contínuo para sua formulação, o que resulta na necessidade de trabalhar com os resultados de EDEs. Mostramos a existência e a unicidade de uma medida neutra ao risco para o mercado de Black - Scholes - Merton, o que implica em um mercado completo e livre de arbitragem. Dessa forma, conseguimos derivar o preço de uma opção e estimar o parâmetro de volatilidade.

6.1 Modelo de Black - Scholes - Merton e suas limitações

Apesar de ser amplamente utilizado, o modelo de Black - Scholes - Merton possui suas limitações. Para modelar uma ação, assumir a normalidade dos log - retornos não abrange todos os casos na realidade. Em geral, a distribuição dos log - retornos possui excesso de curtose e assimetria negativa, como obtido na Seção 4.3. Além disso, a volatilidade não é constante, tendo a dinâmica de reversão a média (ver Cont, 2001 e Mandelbrot, 1967).

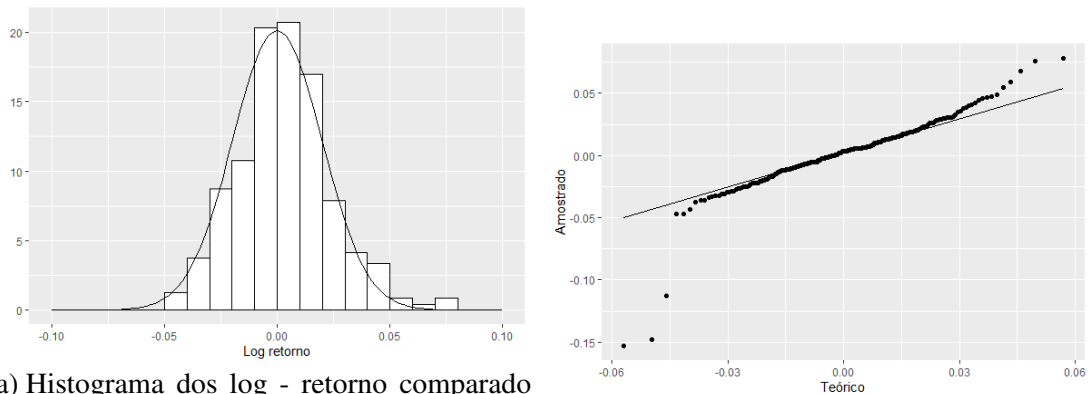
Vamos considerar uma outra ação. Seja $S' := \{S'(t) : t \in [0, T]\}$ o preço da ação PETR3, o qual, pode ser obtida em B3 (2018) e visto na Figura 14. Para se assemelhar ao exemplo anterior, com os 90 preços médios anteriores à 15/10/2018, estimamos a seguinte volatilidade $\hat{\sigma}' \approx 0,31$. Dessa forma, assumindo os log - retorno do ano de 2018, vamos testar se eles seguem uma distribuição Gaussiana com média 0 e $\Delta t \hat{\sigma}'^2 \approx (0,31)^2/245 \approx 0,00039$. Aplicando o teste de Anderson - Darling, obtemos o valor p de 0,03195 e fixado o nível de significância em 5%, rejeitamos a hipótese de que os log - retornos seguem uma distribuição Gaussiana, com média $\mu = \left(0,1225 - \frac{(0,31)^2}{2}\right) \frac{1}{245} \approx 0$ e variância 0,00039. Isso pode ser observado nas medidas de curtose e assimetria dados, respectivamente, por 12,637 e $-1,6$. Além disso, podemos observar tais resultados nos gráficos da Figura 15.

Figura 14 – Série histórico do preço da ação PETR3 em 2018.



- (a) Gráfico da variação de $S'(t)$ ao longo do tempo. (b) Gráfico da variação de $S'(t)$ ao longo do tempo, com escala aumentada.

Figura 15 – Gráficos de comparação dos log - retornos do ativo PETR3 do ano de 2018 com uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 0,00036.



(a) Histograma dos log - retorno comparado com a função de densidade de uma Gaussiana com média 0 e variância 0,00039.

(b) Gráfico quantil-quantil de uma Gaussiana com média 0 e variância 0,00039.

Com esse exemplo, podemos supor que os log - retornos das ações não seguem, necessariamente, uma distribuição Gaussiana. Isso ocorre, pois, a volatilidade não é constante ao longo do tempo (ver, por exemplo, Seção 15.4 de Hull, 2015). Dessa forma, para ter uma maior adequabilidade, podemos assumir um modelo em que sua volatilidade é dada por um processo estocástico. Esses modelos são chamados de modelos de volatilidade estocástica (MVEs) e há vários tipos dentro da literatura. Podemos assumir diferentes processos estocásticos para a volatilidade, aumentando a proximidade com a realidade. Em geral, para esses tipos de modelos se faz necessário a utilização de métodos computacionais para encontrar a solução da EDE.

Sejam $S := \{S(t) : t \in [0, T]\}$ e $V := \{V(t) : t \in [0, T]\}$ processos estocásticos definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que $S(t)$ e $V(t)$ são, respectivamente, o preço de uma ação e sua volatilidade no tempo t . De modo geral, esses modelos são da seguinte forma

$$\begin{cases} dS(t) = f(t, S(t), V(t))dt + \sqrt{V(t)}S(t)dB_1(t), \\ dV(t) = g(t, S(t), V(t))dt + h(t, S(t), V(t))dB_2(t), \end{cases}$$

em que B_1 e B_2 são dois movimentos Brownianos com coeficiente de variação $\rho \in [-1, 1]$ e f , g e h são funções reais que dependem de t , S e V .

Uma primeira alternativa foi a proposta por Hull e White (1987), no qual a EDE para o preço de uma ação é dada por

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dB_1(t), \\ dV(t) = \theta V(t)dt + \varepsilon V(t)dB_2(t), \end{cases}$$

em que $\mu \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \infty)$. Além disso, B_1 e B_2 são dois movimentos Brownianos independentes. Com esse modelo, conseguimos obter uma volatilidade variável, contudo, não possuímos coeficiente de reversão a média e os processos S e V não são dependentes entre si.

Dessa forma, [Stein e Stein \(1991\)](#) propuseram o seguinte modelo

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + V(t)S(t)dB_1(t), \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon dB_2(t), \end{cases}$$

em que, $\kappa \in (0, \infty)$. Assim, o modelo de [Stein e Stein \(1991\)](#) possui um coeficiente de reversão a média, porém, os processos V e S ainda são processos independentes. Tentando tratar a dependência entre os processos, [Heston \(1993\)](#) propôs que

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dB_1(t), \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dB_2(t), \end{cases}$$

em que, B_1 e B_2 podem ser correlacionados e possuem um coeficiente de correlação $\rho \in [-1, 1]$. De forma equivalente, [Ahn e Gao \(1999\)](#) propuseram que

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dB_1(t), \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))V(t)dt + \varepsilon V(t)^{\frac{3}{2}}dB_2(t), \end{cases}$$

em que B_1 e B_2 podem ser correlacionados. O modelo de [Ahn e Gao \(1999\)](#) foi utilizado inicialmente para modelar bonds, posteriormente, foi utilizado por [Lewis \(2000\)](#) para precificar opções e é chamado de **modelo $\frac{3}{2}$** . Devido a correlação entre os movimentos Brownianos da equação, os modelos de [Heston \(1993\)](#) e [Ahn e Gao \(1999\)](#) possuem V e S dependentes.

Esses modelos não possuem soluções fechadas, sendo necessário o estudo de métodos computacionais para a aproximação da solução (ver por exemplo [Kloeden, Platen e Schurz, 2012](#)). Além disso, os modelos de volatilidade estocástica podem ser modelos de mercados incompletos, i.e., não sendo possível encontrar uma estratégia que replique o função custo na data de maturidade. Dessa forma, precisamos utilizar métodos para encontrar o preço da opção como a minimização de riscos (ver por exemplo [Föllmer, Schweizer *et al.*, 1990](#)) entre outros métodos (ver por exemplo [Zhang e Han, 2013](#)).

Outra maneira de se adequar á realidade é a utilização de modelos de difusão com salto. Os saltos são modelados utilizando processos estocásticos descontínuos como, por exemplo, processos de Poisson composto (ver por exemplo [Protter, 2005](#)). Eventualmente, ao lidar com tais processos encontraremos integrais envolvendo processos mais gerais

Um dos primeiros modelos propostos foi o modelo de [Merton \(1976\)](#), que assumia o seguinte processo para o preço do ativo

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right\},$$

em que, $N := \{N(t) : t \in [0, T]\}$ é um processo de Poisson e $Y_1, \dots, Y_N(t)$ é uma sequência de variáveis aleatórias Gaussianas. Dessa forma, a equação do preço de uma ação é dado por

$$dS(t) = S(t^-)\mu dt + S(t^-)\sigma dB(t) + S(t^-)dJ(t^-),$$

em que, $J := \{J(t) : t \in [0, T]\}$ é um processo de Poisson composto.

Por fim, outra suposição que geralmente não é satisfeita é a da taxa de juros constante e determinística. Nesse caso, podemos assumir que $r =: \{r(t) : t \in [0, T]\}$ um processo estocástico que representa o valor da taxa de juros (ver por exemplo [Kim, 2002](#)). Dentre alguns exemplos temos os modelos de [Vasicek \(1977\)](#) e de [Cox, Ingersoll e Ross \(1985\)](#), os quais as taxas de juros seguem respectivamente os mesmos processos estocásticos para as variâncias de [Stein e Stein \(1991\)](#) e [Heston \(1993\)](#).

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, S. **Understanding analysis**. [S.l.]: Springer, 2001. v. 2. Citado nas páginas 68, 93 e 205.
- AHN, D.-H.; GAO, B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 12, n. 4, p. 721–762, 1999. Citado nas páginas 26 e 196.
- B3. **Séries Históricas**. 2018. Acesso em: 03/11/2020. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/mercado-a-vista/series-historicas/>. Citado nas páginas 65, 175, 176, 188 e 194.
- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**. [S.l.: s.n.], 1900. v. 17, p. 21–86. Citado nas páginas 61, 145 e 146.
- BAKSHI, G.; JU, N.; OU-YANG, H. Estimation of continuous-time models with an application to equity volatility dynamics. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 82, n. 1, p. 227–249, 2006. Citado na página 26.
- BAXTER, M.; RENNIE, A. J. **Financial calculus: an introduction to derivative pricing**. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 171.
- BERTOIN, J. **Lévy processes**. [S.l.]: Cambridge university press Cambridge, 1996. v. 121. Citado na página 61.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado nas páginas 25, 145, 146, 170 e 173.
- BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The Philosophical Magazine**, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Citado na página 61.
- CAPIŃSKI, M.; KOPP, E. **The Black–Scholes Model**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado nas páginas 27, 143, 157, 158, 186 e 191.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. **Quantitative finance**, IOP Publishing, v. 1, n. 2, p. 223, 2001. Citado nas páginas 26 e 194.
- COX, J. C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A theory of the term structure of interest rates. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p. 385–407, 1985. Citado na página 197.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. **Journal of Financial Economics**, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979. Citado nas páginas 26, 145 e 193.
- DOOB, J. L. The brownian movement and stochastic equations. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 351–369, 1942. Citado na página 106.

_____. **Measure theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 143. Citado nas páginas 211, 212 e 214.

EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. **Annalen der Physik**, v. 4, 1905. Citado na página 61.

_____. Elementare theorie der brownschen) bewegung. **Zeitschrift für Elektrochemie und Angewandte Physikalische Chemie**, Wiley Online Library, v. 14, n. 17, p. 235–239, 1908. Citado na página 61.

FÖLLMER, H.; SCHWEIZER, M. *et al.* **Hedging of contingent claims under incomplete information**. [S.l.]: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 1990. Citado na página 196.

GALL, J.-F. L. **Brownian motion, martingales, and stochastic calculus**. [S.l.]: Springer, 2016. v. 274. Citado na página 61.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, vol. 4**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. Citado na página 109.

HESTON, S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 6, n. 2, p. 327–343, 1993. Citado nas páginas 26, 196 e 197.

HULL, J.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 42, n. 2, p. 281–300, 1987. Citado nas páginas 26 e 195.

HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**. 9. ed. New Jersey: Pearson Education, Inc, 2015. Citado nas páginas 26, 41, 43, 44, 148, 154, 172 e 195.

ITÔ, K. Stochastic integral. **Proceedings of the Imperial Academy**, The Japan Academy, v. 20, n. 8, p. 519–524, 1944. Citado nas páginas 75 e 96.

_____. Multiple wiener integral. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 3, n. 1, p. 157–169, 1951. Citado na página 128.

_____. On a formula concerning stochastic differentials. **Nagoya Mathematical Journal**, Cambridge University Press, v. 3, p. 55–65, 1951. Citado nas páginas 102, 103 e 122.

KIM, Y.-J. Option pricing under stochastic interest rates: an empirical investigation. **Asia-Pacific Financial Markets**, Springer, v. 9, n. 1, p. 23–44, 2002. Citado na página 197.

KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E.; SCHURZ, H. **Numerical solution of SDE through computer experiments**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado nas páginas 26 e 196.

KUO, H.-H. Gaussian measures in banach spaces. In: **Gaussian Measures in Banach Spaces**. [S.l.]: Springer, 1975. p. 1–109. Citado na página 207.

_____. **Introduction to Stochastic Integration**. [S.l.]: Springer, 2006. Citado nas páginas 26, 68, 79, 83, 87, 89, 91, 95, 96, 97, 100, 101, 111, 134, 137, 138, 139, 140, 193, 207, 212 e 214.

LEWIS, A. **Option valuation under stochastic volatility**. [S.l.]: Finance Press: Newport Beach, 2000. Citado na página 196.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. [S.l.]: Edusp, 2006. Citado nas páginas 95, 211, 212 e 214.

MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. **The Journal of Business**, JSTOR, v. 40, n. 4, p. 393–413, 1967. Citado nas páginas 26 e 194.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. **The Bell Journal of Economics and Management Science**, JSTOR, p. 141–183, 1973. Citado na página 25.

_____. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 3, n. 1-2, p. 125–144, 1976. Citado na página 196.

MILSTEIN, G. N. **Numerical integration of stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. v. 313. Citado na página 26.

ØKSENDAL, B. **Stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer, 2004. 65–84 p. Citado nas páginas 96 e 110.

ORNSTEIN, L. On the brownian motion. In: **Proc. Amst.** [S.l.: s.n.], 1919. v. 21, p. 96–108. Citado na página 106.

PROTTER, P. E. Stochastic differential equations. In: **Stochastic integration and differential equations**. [S.l.]: Springer, 2005. p. 249–361. Citado nas páginas 186, 196 e 214.

SAMUELSON, P. A. Rational theory of warrant pricing. **Industrial Management Review**, v. 6, p. 13–32, 1965. Citado nas páginas 145 e 146.

SELIC, T. **Histórico de preços e taxas dos títulos**. 2018. Acesso em: 05/10/2021. Disponível em: <<https://www.tesourodireto.com.br/titulos/historico-de-precos-e-taxas.htm>>. Citado na página 175.

SHIRYAEV, A. N. **Essentials of stochastic finance: facts, models, theory**. [S.l.]: World scientific, 1999. v. 3. Citado nas páginas 27, 56, 157, 170 e 186.

SOUZA, G. C. U. I. de; SAMANEZ, C. P.; RAPOSO, G. S. *et al.* **Avaliação de opções de troca e opções de spread européias e americanas**. [S.l.], 2008. Citado na página 183.

STEIN, E. M.; STEIN, J. C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. **The Review of Financial Studies**, Oxford University Press, v. 4, n. 4, p. 727–752, 1991. Citado nas páginas 26, 196 e 197.

TAO, T. **An introduction to measure theory**. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, RI, 2011. v. 126. Citado nas páginas 83 e 119.

UHLENBECK, G. E.; ORNSTEIN, L. S. On the theory of the brownian motion. **Physical Review**, APS, v. 36, n. 5, p. 823, 1930. Citado na página 106.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977. Citado na página 197.

WIENER, N. Differential-space. **Journal of Mathematics and Physics**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1-4, p. 131–174, 1923. Citado nas páginas 61, 207 e 208.

_____. The homogeneous chaos. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 60, n. 4, p. 897–936, 1938. Citado na página 127.

ZHANG, Q.; HAN, J. Option pricing in incomplete markets. **Applied Mathematics Letters**, Elsevier, v. 26, n. 10, p. 975–978, 2013. Citado na página [196](#).

BASE MATEMÁTICA

Os principais objetos estudados neste dissertação são as equações diferenciais estocásticas. Parte deste trabalho é dedicado à apresentação detalhada da teoria sobre a qual este objeto é definido. Neste contexto, diversos conceitos de análise, topologia e teoria da medida foram utilizados. Afim de tornar a leitura deste texto mais confortável, trazemos, neste anexo, algumas definições e resultados envolvendo tais conceitos que podem ser utilizados pelo leitor e pela leitura conforme sua necessidade.

Definição 26 (Métrica). Dizemos que a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **métrica** de um conjunto M , quando satisfaz as seguintes condições:

- (i) $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$, para $x, y \in M$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, para $x, y \in M$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para $x, y, z \in M$ (desigualdade triangular).

Dizemos que $d(x, y)$ é a **distância** de x a y .

Definição 27 (Espaço métrico). Um **espaço métrico** é um par (M, d) formado por um conjunto M e por uma métrica d em M . Podemos, sem perda de generalidade, dizer o espaço métrico M .

Definição 28 (Isometria). Seja dois espaços métricos (M_1, d_1) e (M_2, d_2) . Dizemos que a função $f : M_1 \rightarrow M_2$ é uma **isometria** quando f for sobrejetora e $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$.

Se dois espaços métricos são isométricos, eles são indistinguíveis em respeito as propriedades da distância. Uma maneira de definir uma métrica é a partir da norma. Colocamos a seguir a definição de norma.

Definição 29 (Norma). Dizemos que uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** em um espaço vetorial E , sobre \mathbb{R} , quando satisfazer as seguintes condições:

- (i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ e $\|x\| > 0 \iff x \neq 0$, para $x \in E$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para $x, y \in E$.

Dizemos que $\|x\|$ é a norma de x . Além disso, dizemos que um par $(E, \|\cdot\|)$ composto por um espaço vetorial E e sua norma $\|\cdot\|$ é um **espaço vetorial normado**.

Um espaço vetorial normado possui uma métrica natural dado pela norma. Logo, um espaço normado também é um espaço métrico.

Exemplo 38. O espaço $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|Y|^p] < \infty\}$, com $p \in [1, \infty)$, é um espaço vetorial normado, com norma dada por $\|f\|_p := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f|^p]^{1/p}$, em que $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Consequentemente, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço métrico com métrica dada por $d(f, g) := \|f - g\|_p = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f - g|^p]^{1/p}$, em que $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

De forma semelhante, podemos definir uma norma a partir de um produto interno. Colocamos a seguir a definição de produto interno.

Definição 30 (Produto interno). Dizemos que uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é um **produto interno** em um espaço vetorial E , sobre \mathbb{R} , quando satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para $x, y \in E$;
- (ii) $\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in E$;
- (iii) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ e $\langle x, x \rangle > 0 \iff x \neq 0$, para $x \in E$.

Além disso, dizemos que E é um **espaço com produto interno**.

Um produto interno induz uma norma. Para isso, assume-se $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Logo, um produto interno também induz uma métrica.

Exemplo 39. O espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço vetorial com produto interno dado por $\langle f, g \rangle := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[fg]$, em que $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. O produto interno induz a métrica no espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dada por $d(f, g) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f - g|^2]^{1/2}$, como visto na Seção 3.1.

Para falar sobre os espaço de Banach e de Hilbert, precisamos falar sobre a sequência de Cauchy e espaços métricos completos.

Definição 31 (Sequência de Cauchy). Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $\{x_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ de M é uma **sequência de Cauchy** quando, $\forall \varepsilon > 0$, podemos obter um $n_0 \in \{1, 2, \dots\}$, tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para $n, m > n_0$.

Definição 32 (Espaço métrico completo). Dizemos que um espaço métrico (M, d) é **completo** quando todas as seqüências de Cauchy convergem em M .

A grosso modo, as seqüência de Cauchy de um espaço métrico (M, d) , vão para algum limite. Se (M, d) for completo, esse limite está no próprio espaço métrico.

Definição 33 (Espaço de Banach). Dizemos que um espaço é chamado de **espaço de Banach**, quando é um espaço vetorial normado e completo em respeito a métrica induzida por esta norma.

Definição 34 (Espaço de Hilbert). Dizemos que um espaço é chamado de **espaço de Hilbert**, quando é um espaço vetorial com produto interno e completo em respeito a métrica induzida por este produto interno.

Para definir um conjunto denso, precisamos das definições de espaço topológico e fecho. Nesse sentido, as apresentamos a seguir.

Definição 35 (Topologia). Seja um conjunto X . Dizemos que τ , uma coleção de subconjuntos abertos de X , é dita uma **topologia** de X quando gozar das seguintes propriedades:

- (i) $X \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$;
- (ii) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \tau$, em que $A_i \in \tau$, para $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
- (iii) $\bigcap_{i=0}^n A_i \in \tau$, em que $A_i \in \tau$, para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Dizemos que um par (X, τ) formado por um conjunto e uma topologia é um **espaço topológico**. Sem perda de generalidade, podemos dizer o espaço topológico X .

Definição 36 (Fecho). Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ é dito **aderente ao subconjunto** S , quando qualquer vizinhança de x em X contém ao menos um ponto do subconjunto S . O conjunto \bar{S} é o **fecho de S** quando conter os pontos de X aderentes ao S .

Definição 37 (Conjunto denso). Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . S é dito ser **denso em X** quando $\bar{S} = X$, em que \bar{S} é o fecho de S .

Exemplo 40. O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é denso nos reais \mathbb{R} . Pode-se provar que, entre dois números reais, sempre vai existir ao menos um número racional, logo, entre dois reais sempre haverá infinitos racionais (ver Teorema [Abbott, 2001](#)). A grosso modo, podemos pensar que os números racionais preenchem quase toda os espaços da reta real.

TÓPICOS DE PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Novamente, afim de tornar a leitura deste texto mais confortável, trazemos, neste anexo, algumas definições e resultados da teoria da probabilidade e dos processos estocásticos que podem ser utilizados pelo leitor e pela leitura conforme sua necessidade.

B.1 Existência do Movimento Browniano

Uma pergunta natural é a respeito da existência de um processo estocástico que possua as propriedades i) a iv) especificadas na Definição 6. Há várias formas de mostrar a existência do movimento Browniano. Nesta seção, provamos a sua existência a partir da construção de um espaço de probabilidade, o qual denominamos espaço de Wiener. O espaço é assim denominado, pois foi introduzido por [Wiener \(1923\)](#), embora no original o autor refere-se a esse espaço como *espaço diferencial*.

O espaço de Wiener é um espaço de probabilidade formado pela tripla $(C, \mathcal{B}(C), \mu)$, em que

- C é o espaço de Banach das funções contínuas ω com valores reais em $[0, 1]$ tais que $\omega(0) = 0$;
- a norma de C é $\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\omega(t)|$;
- $\mathcal{B}(C)$ é a σ -álgebra de Borel de C , a qual coincide com a σ -álgebra gerada pelos cilindros de dimensão finita de C (ver, por exemplo, [Wiener, 1923](#); capítulo 3 de [Kuo, 2006](#); capítulo 1 de [Kuo, 1975](#)) e
- μ é uma medida de probabilidade Gaussiana definida sobre $\mathcal{B}(C)$, a qual é denominada medida de Wiener.

Um subconjunto $A \subset C$ é dito ser um cilindro de C quando A é um conjunto da forma

$$A := \{\omega \in C; (\omega(t_1), \omega(t_2), \omega(t_3), \dots, \omega(t_n)) \in U\}$$

em que $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ e $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é a σ -álgebra de Borel do \mathbb{R}^n . Como μ é uma medida Gaussiana, para qualquer cilindro A de C , $\mu(A)$ é definida como

$$\mu(A) := \int_U \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp \left\{ -\frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \right) du_1 du_2 du_3 \dots du_n,$$

em que $u_0 = t_0 = 0$.

Note que μ é uma medida de probabilidade sobre o conjunto de todos os subconjuntos cilíndricos de C , o qual denotamos por \mathcal{R} . O conjunto \mathcal{R} é uma álgebra, porém não é uma σ -álgebra. Entretanto, μ é σ -aditiva (ver Wiener, 1923) e, portanto, μ possui uma única extensão σ -aditiva para $\sigma(\mathcal{R})$, a σ -álgebra gerada por \mathcal{R} . Como $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(C)$ basta considerar conjuntos cilíndricos nas provas dos teoremas subsequentes.

Teorema 33. O processo estocástico $B := \{B(t) : t \in [0, 1]\}$ dado por $B(t) = \omega(t)$, $t \in [0, 1]$, $\omega \in C$ é um movimento Browniano.

Demonstração. Para demonstrar que um processo estocástico é de fato um movimento Browniano é necessário mostrar que o processo satisfaz as condições da Definição 6. As condições i) e iv) são satisfeitas pelo fato de $\omega \in C$, i.e., ω é contínuo e com $\omega(0) = 0$.

Para checar ii) vamos supor $0 < s < t \leq 1$, logo

$$\begin{aligned} \mu(B(t) - B(s) \leq a) &= \mu(\omega(t) - \omega(s) \leq a) \\ &= \mu(\{\omega \in C : (\omega(s), \omega(t)) \in U\}) \end{aligned}$$

em que $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_2 - u_1 \leq a\}$. Como μ é a medida de Wiener obtemos

$$\mu(B(t) - B(s) \leq a) = \int_U \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{u_1^2}{2s} - \frac{(u_2 - u_1)^2}{2(t-s)} \right\} \right) du_1 du_2.$$

Tomando $x = u_1$ e $y = u_2 - u_1$ segue que

$$\begin{aligned} \mu(B(t) - B(s) \leq a) &= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2s} - \frac{y^2}{2(t-s)} \right\} \right) dx dy. \\ &= \int_{-\infty}^a \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2(t-s)} \right\} \right) dy. \end{aligned}$$

Portanto, $B(t) - B(s)$ segue uma distribuição Gaussiana de média 0 e variância $t - s$.

De forma semelhante, podemos provar a condição iii). Para $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \mu(B(t_1) \leq a_1, B(t_2) - B(t_1) \leq a_2, \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}) \leq a_n) \\ &= \mu(\omega(t_1) \leq a_1, \omega(t_2) - \omega(t_1) \leq a_2, \dots, \omega(t_n) - \omega(t_{n-1}) \leq a_n) \\ &= \mu(\{\omega \in C : (\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_n)) \in U\}), \end{aligned}$$

em que

$$U = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_1 \leq a_1, u_2 - u_1 \leq a_2, \dots, u_n - u_{n-1} \leq a_n\}.$$

Como μ é a medida de Wiener, obtemos

$$\begin{aligned} &\mu(B(t_1) \leq a_1, B(t_2) - B(t_1) \leq a_2, \dots, B(t_n) - B(t_{n_1}) \leq a_n) \\ &= \int_U \left(\frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \right) du_1 du_2 \dots du_n. \end{aligned}$$

Tomando $x_1 = u_1, x_2 = u_2 - u_1, \dots, x_n = u_n - u_{n-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\mu(B(t_1) \leq a_1, B(t_2) - B(t_1) \leq a_2, \dots, B(t_n) - B(t_{n_1}) \leq a_n) \\ &= \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_1} \left(\frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{a_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2t_1} \right\} \right) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{a_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp \left\{ -\frac{x_n^2}{2(t_n - t_{n-1})} \right\} \right) dx_n \\ &= \mu(B(t_1) \leq a_1) \mu(B(t_2) - B(t_1) \leq a_2) \dots \mu(B(t_n) - B(t_{n_1}) \leq a_n). \end{aligned}$$

Provando, assim, que $(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ são independentes e, consequentemente, que B é um movimento browniano. □

No Teorema 33 mostramos a existência do movimento Browniano para $t \in [0, 1]$. Agora, precisamos estender este resultado para $t > 1$. Seja $\tilde{B} = \{\tilde{B}(t) : t \in [0, \infty)\}$ o processo estocástico definido por

$$\tilde{B}(t) = \begin{cases} B^1(t), & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ B^1(1) + B^2(t - 1), & \text{se } 1 \leq t < 2; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ B^1(1) + \dots + B^n(1) + B^{(n+1)}(t - n), & \text{se } n \leq t < n + 1; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

em que $B^i = \{B^i(t) : t \in [0, 1]\}$, com $i \in \{1, 2, \dots\}$, são movimentos Brownianos independentes definidos no espaço de Wiener para $t \in [0, 1]$.

Corolário 3. \tilde{B} é um movimento Browniano sobre $[0, \infty)$.

Demonstração. Precisamos provar que o processo \tilde{B}_t satisfaz as condições da Definição 6. A condição i) é satisfeita, pois $\tilde{B}(0) = B^1(0) = 0$. Para mostrar a condição ii), suponha $0 \leq s < t \leq T$, $n_1 \leq s < n_1 + 1$ e $n_2 \leq t < n_2 + 1$, para $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, com $i \in \{1, 2\}$. Assim, podemos escrever o processo $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)$ como

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \begin{cases} B^{(n_1+1)}(t - n_1) - B^{(n_1+1)}(s - n_1), & \text{se } n_2 = n_1; \\ \left[B^{(n_1+1)}(1) - B^{(n_1+1)}(s - n_1) \right] + \dots + B^{(n_2+1)}(t - n_2), & \text{se } n_2 > n_1. \end{cases}$$

Temos $B^{(n_1+1)}(t - n_1) - B^{(n_1+1)}(s - n_1)$ segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $t - n_1 - s - n_1 = t - s$. Como $\left[B^{(n_1+1)}(1) - B^{(n_1+1)}(s - n_1) \right] + B^{(n_1+2)}(1) + \dots + B^{n_2}(1) + B^{(n_2+1)}(t - n_2)$ é uma soma de variáveis aleatórias normais independentes vem que essa soma segue uma distribuição Gaussiana com média 0 e variância $(1 - s - n_1) + (n_2 - n_1 - 2 + 1) \times 1 + (t - n_2) = t - s$. Assim, mostramos que a condição ii) é satisfeita para \tilde{B} .

Para provar iii), suponha $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq T$, e $n_1 \leq t_1 < n_1 + 1$, $n_2 \leq t_2 < n_2 + 1$, \dots , $n_k \leq t_k < n_k + 1$, para $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Assim, podemos escrever $\tilde{B}(t_1), \tilde{B}(t_2) - \tilde{B}(t_1), \dots, \tilde{B}(t_k) - \tilde{B}(t_{k-1})$, como

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t_1) &= B^1(1) + B^2(1) + \dots + B^{n_1+1}(t_1 - n_1) \\ \tilde{B}(t_2) - \tilde{B}(t_1) &= \begin{cases} B^{(n_1+1)}(t_2 - n_1) - B^{(n_1+1)}(t_1 - n_1), & \text{se } n_2 = n_1; \\ \left[B^{(n_1+1)}(1) - B^{(n_1+1)}(t_1 - n_1) \right] + \dots + B^{(n_2+1)}(t_2 - n_2), & \text{se } n_2 > n_1. \end{cases} \end{aligned}$$

e, assim, analogamente até

$$\tilde{B}(t_k) - \tilde{B}(t_{k-1}) = \begin{cases} B^{(n_{k-1}+1)}(t_k - n_{k-1}) - B^{(n_{k-1}+1)}(t_{k-1} - n_{k-1}), & \text{se } n_k = n_{k-1}; \\ \left[B^{(n_{k-1}+1)}(1) - B^{(n_{k-1}+1)}(t_{k-1} - n_{k-1}) \right] + \\ \quad + B^{n_{k-1}+2}(1) + \dots + B^{(n_k+1)}(t_k - n_k), & \text{se } n_k > n_{k-1}. \end{cases}$$

É possível notar que os incrementos do processo são independentes, satisfazendo o item iii). Isto é verdade, pois os movimentos Brownianos que compõe um processo são independentes dos outros movimentos que compões os demais. Por exemplo, os n_1 's primeiros movimentos que compõe $\tilde{B}(t_1)$, além de independentes entre si por definição, são independentes de todos os movimentos de $\tilde{B}(t_2) - \tilde{B}(t_1)$. Além disso, pela condição iii) da Definição 6 $B^{n_{k_1}+1}(t_1 - n_{k_1})$ é independente tanto de $B^{n_{k_1}+1}(t_2 - n_{k_1}) - B^{n_{k_1}+1}(t_1 - n_{k_1})$ quanto de $B^{n_{k_1}+1}(1) - B^{n_{k_1}+1}(t_1 - n_{k_1})$.

Para provar o item iv) basta ver que $\tilde{B} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pois é uma função definida por partes que

- é contínua em cada intervalo $[n, n + 1)$ com $n \in \mathbb{N}$, i.e., é dado pela lei de alguma função contínua em C ;
- para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \rightarrow n^-} \tilde{B}(t) = B^1(1) + B^2(1) + \dots + B^n(1) = \lim_{t \rightarrow n^+} \tilde{B}(t).$$

Logo a condição iv) está garantida, e portanto, \tilde{B} é um movimento Browniano. Como consequência, $\tilde{B}(t)$ definido em $t \in [0, T]$, com $T > 0$, é um movimento Browniano. \square

Na próxima seção, vamos apresentar as principais desigualdades envolvendo o valor esperado.

B.2 Desigualdades

As desigualdades com o valor esperado de um processo estocástico, ou de uma variável aleatória, possuem um papel fundamental ao longo da dissertação. Grande parte destas foram utilizadas para provar os resultados obtidos no Capítulo 3. Com isso, julgamos importante a apresentação dessas desigualdades.

Teorema 34. Seja X e Y variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tais que $X \leq Y$ quase certamente e o valor esperado de ambas existe. Então,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y].$$

Omitimos a prova, mas ela pode ser encontrada no Capítulo 4 de [Magalhães \(2006\)](#). Este resultado implica que o valor esperado preserva a desigualdade das variáveis aleatórias.

A norma de um espaço $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com $p \in (0, \infty)$, será denotada por $\|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$, em que $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Teorema 35. Seja $X, Z \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ variáveis aleatórias, em que $p, q \in (0, \infty)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, vale as seguintes desigualdades:

- (i) (Desigualdade de Hölder): $\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$;
- (ii) (Desigualdade de Minkowski): $\|X + Z\|_p \leq \|X\|_p + \|Z\|_p$.

A prova pode ser checada no Capítulo VI de [Doob \(2012\)](#). A desigualdade de Hölder possui um caso particular, no qual $p = q = 2$. Nesse caso, chamamos de desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz não se restringe a apenas valores esperados. Temos também a desigualdade como

$$\left(\int_C |f(t)g(t)| dt \right)^2 \leq \int_C |f(t)|^2 dt \int_C |g(t)|^2 dt,$$

em que $C \subset \mathbb{R}$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : C \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, se $C := [a, b]$ e $g(t) = 1$, a desigualdade se torna $\left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b |f(t)|^2 dt$. Usamos esta última forma para provar os Lemas

8 e 9. De forma equivalente, podemos escrever

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

em que $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Caso $b_i = 1$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, a desigualdade se torna $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$. Usamos esta última forma no Capítulo 3 em geral. O caso mais comum é com $n = 2$, tornando-se $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

Teorema 36 (Desigualdade de Jensen). Seja X uma variável aleatória definida em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, vale a seguinte desigualdade

$$f(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)].$$

A prova da desigualdade de Jensen pode ser vista no Capítulo VI Doob (2012). As desigualdades de Jensen, Hölder e Minkowski podem ser estendidas para o caso em que temos esperanças condicionais (ver, por exemplo, Capítulo XI de Doob, 2012).

Podemos usar o valor esperado para majorar probabilidades, conseguindo estimativas para a elas.

Teorema 37 (Desigualdade de Markov). Seja X uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então, vale a seguinte desigualdade

$$\mathbb{P}(|X| \leq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X|^p]}{\varepsilon^p},$$

em que, $p, \varepsilon \in (0, \infty)$.

Para ver detalhes da prova, ver Capítulo 5 de Magalhães (2006).

Dizemos que um processo estocástico é contínuo à direita, quando o processo estocástico possui trajetórias contínuas à direita, quase certamente. No caso de submartingales contínuos à direita, podemos estimar a probabilidade do supremo usando o valor esperado e o tempo final do processo.

Teorema 38 (Desigualdade de Doob). Seja $M := \{M(t) : t \in [a, b]\}$ um submartingale contínuo à direita e definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Então,

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} M(t) \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\max(M(b), 0)],$$

em que $\varepsilon \in (0, \infty)$.

A prova para a desigualdade de Doob pode ser encontrada no Capítulo 4 de Kuo (2006). Essa desigualdade possui uma forma para submartingales discretos (ver Capítulo IX de Doob, 2012).

Seja Ψ uma função convexa e seja $M := \{M(t) : t \in [a, b]\}$ um martingale contínuo à direita definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pela desigualdade de Jensen para a esperança condicional, o processo estocástico $\Psi(M)$ é um submartingale, ou seja,

$$\begin{aligned}\Psi(M(s)) &= \Psi(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M(t) | \mathcal{F}_s]) \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Psi(M(t)) | \mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

Na próxima seção, apresentamos dois resultados importantes na teoria de martingales: a decomposição de submartingales de Doob-Meyer e o Teorema da representação de martingales.

B.3 Decomposição Doob - Meyer e a representação de martingales

Processos martingale são importantes para a construção da integral de Itô e da medida neutra ao risco. Nesse sentido, apresentamos nesta seção a decomposição de Doob-Meyer e a representação de martingales, nos quais são resultados importantes para a teoria de martingales. Além disso, definimos o que é um processo previsível e um tempo de parada, nos quais são utilizados ao decorrer da dissertação. A seguir, apresentamos algumas definições que precedem a decomposição de Doob-Meyer.

Definição 38 (Processo previsível - tempo contínuo). Um processo estocástico $X := \{X(t) : t \in [0, T]\}$ definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é dito ser **previsível** quando a função $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$ é \mathcal{P} -mensurável, em que \mathcal{P} é a menor σ -álgebra gerada por todos os processos estocásticos adaptados e quase certamente contínuos à esquerda.

Definição 39 (Tempo de parada). Uma variável aleatória $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dita ser um **tempo de parada**, quando $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, em que $t \in [0, \infty]$.

Definição 40. Uma classe de variáveis aleatórias $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é dita ser **uniformemente integrável** quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} \int_{\{|U_\alpha| \geq n\}} |U_\alpha| d\mathbb{P}.$$

A seguir, apresentamos uma maneira única de decompor um submartingale.

Teorema 39 (Decomposição de Doob-Meyer). Seja $X := \{X(t) : t \in [0, T]\}$ um submartingale positivo, contínuo à direita e com limite à esquerda (*càdlàg*), definido sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que a coleção $H := \{X_\tau : \tau \text{ é um tempo de parada}\}$ é uniformemente integrável. Logo, X possui uma única decomposição, dada por

$$X(t) := M(t) + A(t), \text{ com } t \in [0, T],$$

em que M é um martingale e A é um processo previsível começado em 0, contínuo à direita e crescente.

Omitimos a prova, porém ela pode ser vista no Capítulo III de [Protter \(2005\)](#). A partir da fórmula de Itô, conseguimos construir a decomposição de Doob-Meyer. Seja $M =: \{M(t) : t \in [a, b]\}$ um processo estocástico, definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dado por

$$M(t) := \int_a^t f(s) dB(s), \text{ com } t \in [a, b],$$

em que, $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ e B é um movimento Browniano. Seja Ψ uma função convexa de classe C^2 , em que $\int_a^b \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\left| \frac{d\Psi(t)}{dx} f(t) \right|^2 \right] < \infty$. Pelo Teorema 7, o processo M é um martingales. Pela desigualdade de Jensen, como mostrado na seção anterior, segue que $\Psi(M(t))$ é um submartingale. Por outro lado, pelo Teorema 10, $\Psi(M(\cdot))$ é dado por

$$\Psi(M(t)) = \Psi(M(0)) + \int_a^t \frac{d\Psi(M(s))}{dx} f(s) dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t \frac{d^2\Psi(M(s))}{dx^2} f(s) ds.$$

Pelo Teorema 7, a integral $\int_a^t \frac{d\Psi(M(s))}{dx} f(s) dB(s)$ é um martingale e pela convexidade de Ψ , i.e., $\frac{d^2\Psi(M(s))}{dx^2} \leq 0$, a integral $\int_a^t \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} f(s) ds$ é crescente. Dessa forma, temos a decomposição de Doob-Meyer para $\Psi(M(t))$, usando a fórmula de Itô.

Apresentamos neste anexo a existência do movimento Browniano e algumas desigualdades utilizadas ao longo da dissertação. Por fim, indicamos ao leitor o Capítulo 2 de [Kuo \(2006\)](#) para mais detalhes sobre a prova da existência do movimento Browniano. Indicamos o Capítulos 4 de [Kuo \(2006\)](#), os Capítulos 4 e 5 de [Magalhães \(2006\)](#) e os Capítulos VI e IX de [Doob \(2012\)](#) para mais detalhes sobre as desigualdades envolvendo o valor esperado. Além disso, indicamos os Capítulos III de [Protter \(2005\)](#) para mais detalhes da decomposição de Doob-Meyer.

