



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



# Geometria Conforme e Invertibilidade Global

**Autor:** *Rodrigo Thomaz da Silva*

**Orientador:** *Francisco Braun*

**Disciplina:** Trabalho de Conclusão do Curso B

**Curso:** Bacharelado em Matemática

**Professores Responsáveis:** Luciene Nogueira Bertoncello  
Natalia Andrea Viana Bedoya  
Wladimir Seixas

São Carlos, 12 de março de 2022.

# Geometria Conforme e Invertibilidade Global

**Autor:** *Rodrigo Thomaz da Silva*

**Orientador:** *Francisco Braun*

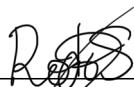
**Disciplina:** Trabalho de Conclusão do Curso B

**Curso:** Bacharelado em Matemática

**Professores Responsáveis:** Luciene Nogueira Bertoncello  
Natalia Andrea Viana Bedoya  
Wladimir Seixas

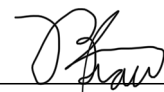
**Instituição:** Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática

São Carlos, 12 de março de 2022.



---

Rodrigo Thomaz da Silva



---

Francisco Braun

*“No man is liberated from fear who dare not see his place in the world as it is; no man can achieve the greatness of which he is capable until he has allowed himself to see his own littleness.”*

Bertrand Russell - *Dreams and Facts* (1919)

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, que sempre me sustentou desde a mais tenra idade.

Agradeço aos meus pais, Haroldo Thomaz da Silva e Ana Neri Artimundo da Silva, que me deram toda a educação e sustento necessários.

Agradeço aos meus irmãos, Maurício Thomaz da Silva, Laura Neri Thomaz da Silva e Larissa Thomaz da Silva, que me irritam e alegram meus dias.

Agradeço ao meu orientador, Francisco Braun, que me ensinou tanto do mundo matemático e científico de maneira geral.

Agradeço aos meus amigos e colegas mais próximos, Alan, Laíssa, Leonardo, Luis e Rafael, que tanto me xingaram e me apoiaram, de maneira a tornar esta caminhada mais tranquila e divertida.

Por fim, agradeço a cada pessoa que já tive o prazer de conhecer, que me fizeram mal e que me fizeram bem. Cada uma destas teve o papel de me transformar na pessoa que sou hoje. Em especial, os professores que tive ao longo da vida, que me ensinaram não só conhecimento acadêmico, mas a viver em harmonia com os demais seres do nosso planeta.

# Resumo

Este trabalho contém todo o estudo feito para a leitura do artigo “Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions” de Frederico Xavier [4], assim como um estudo detalhado do dito artigo. Também, algumas considerações sobre a teoria de Injetividade Global são apresentadas.

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Equivalência conforme; o Teorema da Aplicação de Riemann</b>	<b>1</b>
1	Espaço de funções analíticas . . . . .	1
2	Conexidade simples . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Geometria conforme, números de Euler, e injetividade global em dimensões maiores</b>	<b>18</b>
1	Motivação . . . . .	19
2	A propriedade $(\diamond_d)_{d=0}^{n-1}$ . . . . .	22
3	Uma melhoria topológico-conforme de $(\diamond_2)$ . . . . .	23
4	Criando um campo vetorial sobre $M^2$ . . . . .	25
5	Demonstrando que o campo vetorial é contínuo . . . . .	29
6	Demonstração do Teorema 5.5 . . . . .	35
7	Um teorema geral e a inversão de aplicações polinomiais . . . . .	37
8	Uma conjectura na teoria de aproximação . . . . .	38

# Introdução

O presente trabalho é resultado dos estudos realizados nas disciplinas TCC A [20] e TCC B. Estudamos os pré-requisitos para a compreensão do artigo “Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions” de Frederico Xavier [4], aprofundamos tais conceitos e então passamos para a leitura do artigo, explanando também alguns tópicos a respeito da teoria de Injetividade Global.

Seguindo a forma como está escrito, o texto se apresenta da seguinte maneira:

1. No Capítulo 1 está a parte final dos estudos pré análise do artigo. Nele faz-se um estudo do espaço de funções analíticas na primeira seção, mirando nos resultados úteis à demonstração do Teorema da Aplicação de Riemann. Na segunda seção apresenta-se a ideia de conexidade simples, derivando alguns resultados e concluindo no Teorema da Aplicação de Riemann e uma rápida citação do Teorema da Uniformização de Riemann;
2. O Capítulo 2 contém todo o trabalho desenvolvido sobre o artigo de Xavier. Tal capítulo inicia-se com uma motivação, dando uma breve noção histórica e apresentando alguns problemas relacionados ao teorema provado por Xavier. As seções que seguem são baseadas no artigo em questão, apresentado segundo o ponto de vista do autor deste trabalho de conclusão de curso.

Todas as figuras presentes neste trabalho foram elaboradas pelo autor.

---

# Capítulo 1

## Equivalência conforme; o Teorema da Aplicação de Riemann

Como dito na Introdução, o objetivo deste capítulo é dar continuidade ao estudo das aplicações conforme, mais especificamente a existência de aplicações conforme entre certos conjuntos, dando a noção de conjuntos *conformemente equivalentes*. Em especial, será demonstrado que toda região simplesmente conexa do plano complexo que está contida propriamente em  $\mathbb{C}$  é conformemente equivalente à bola aberta unitária; em outras palavras, existem apenas duas classes de regiões simplesmente conexas em  $\mathbb{C}$ : o plano todo e as regiões simplesmente conexas  $G$  tais que existe  $z \in \mathbb{C}$  com  $z \notin G$ . Tal resultado é obtido com o Teorema da Aplicação de Riemann (Teorema 1.33). (Uma generalização deste teorema é utilizada no artigo e será apresentada, mas não demonstrada; tal generalização é conhecida como Teorema de Uniformização de Riemann.)

Há diversos pré-requisitos para a demonstração deste teorema. Conceitos básicos de Espaços Métricos serão assumidos (muitos desenvolvidos no TCC A do mesmo autor [20]). Em vista do objetivo, algumas proposições e teoremas terão suas demonstrações omitidas. Apesar da omissão, elas serão devidamente referenciadas, e todas as ideias e pensamentos serão destrinchados e explicados, de maneira a tornar o texto mais auto contido e mostrar que, apesar de não estar relatado, o estudo sobre tais resultados foi completo.

### 1 Espaço de funções analíticas

Antes de tudo é importante definir o espaço das funções analíticas e demonstrar algumas propriedades importantes que podem ser obtidas ao utilizar uma métrica adequada.

**Definição 1.1.** Se  $G \subset \mathbb{C}$  é um aberto não vazio e  $X$  um espaço métrico, então  $\mathcal{C}(G, X)$  denota o conjunto de todas as funções contínuas de  $G$  em  $X$ .

O conjunto  $\mathcal{C}(G, X)$  nunca é vazio, pois sempre contém as funções constantes.

O seguinte teorema é importante para a definição de uma métrica neste espaço de funções. Uma notação simples deve ser implementada antes disso.



**Definição 1.2.** Seja  $X$  um conjunto não vazio de  $\mathbb{C}$ . Fixado  $a \in \mathbb{C}$ , a *distância entre  $a$  e  $X$*  é definida como

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

A aplicação  $f_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f_A(x) = d(x, A)$ , onde  $A$  é um conjunto não vazio de  $\mathbb{C}$ , é de Lipschitz, pois dados  $x, y \in \mathbb{C}$  e fixado  $z \in A$ , vale

$$f_A(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Disto, vem que  $f_A(x) - f_A(y) \leq d(x, y)$ . Começando com  $f_A(y)$  ao invés de  $f_A(x)$ , obtém-se a mesma desigualdade mas com  $y$  no lugar de  $x$ , donde conclui-se que  $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$ .

**Teorema 1.3.** Se  $G$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ , então existe uma sequência  $\{K_n\}$  de subconjuntos compactos contidos em  $G$  com  $\cup_1^\infty K_n = G$ . Mais ainda, os conjuntos  $K_n$  podem ser escolhidos de maneira a satisfazer

(a)  $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ ;

(b)  $K \subset G$  e  $K$  compacto implica em  $K \subset K_n$  para algum  $n$ .

A notação  $K^\circ$  indica o *interior* de  $K$ , isto é, a união de todos os abertos de  $\mathbb{C}$  que estão contidos em  $K$ .

*Demonstração.* Para cada  $n$  natural defina

$$K_n = \overline{B}(0; n) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid d(z, G^c) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

onde  $\overline{B}(x; r) = \{y \in \mathbb{C} \mid d(x, y) \leq r\}$ . Cada  $K_n$  é limitado pelo fato da bola fechada ser limitada, e é fechado por ser a interseção de dois fechados. Conclui-se que cada  $K_n$  é compacto. Também, o conjunto

$$B(0; n+1) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid d(z, G^c) > \frac{1}{n+1} \right\}$$

é aberto, contém  $K_n$  e está contido em  $K_{n+1}$ . Isso dá a demonstração de (a).

Para (b), basta notar que do fato de  $\cup_1^\infty K_n = G$ , por (a) vem que  $\cup_1^\infty K_n^\circ = G$ , donde se  $K$  é um compacto em  $G$ , a coleção de abertos  $\{K_n^\circ\}$  forma uma cobertura aberta de  $K$ , e o resultado segue.  $\square$

Se  $G = \cup_1^\infty K_n$  onde cada  $K_n$  é compacto e  $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ , defina

$$\rho_n(f, g) = \sup_{z \in K_n} d(f(z), g(z)),$$

para quaisquer  $f, g \in \mathcal{C}(G, X)$ . Defina também

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}.$$

Visto que  $t(1+t)^{-1} \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ , a série acima é dominada por  $\sum (\frac{1}{2})^n$ , donde converge. Verifica-se que  $\rho$  é uma métrica, donde o par  $(\mathcal{C}(G, X), \rho)$  é um espaço métrico.

Algo muito interessante é que  $(\mathcal{C}(G, X), \rho)$  é um espaço métrico completo se  $X$  também o for. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [2], página 145.

**Definição 1.4.** Um conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  é *normal* se toda sequência em  $\mathcal{F}$  possui uma subsequência convergente em  $\mathcal{C}(G, X)$ .

Note que não é pedido que a subsequência convirja a um elemento de  $\mathcal{F}$ , mas apenas que convirja no espaço maior.

**Teorema 1.5.** Um conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  é normal se, e somente se, seu fecho em  $\mathcal{C}(G, X)$  é compacto.

*Demonstração.* Seja  $\{f_n\}$  uma sequência em  $\overline{\mathcal{F}}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tome  $g_n \in B(f_n; \frac{1}{n}) \cap \mathcal{F}$ . Sendo  $\{g_n\}$  uma sequência em  $\mathcal{F}$ , ela possui subsequência convergente, por exemplo,  $\{g_{n_k}\}$  que converge a um elemento  $g \in \overline{\mathcal{F}}$ . Ora, então a subsequência  $\{f_{n_k}\}$  converge a  $g$ , já que, dado  $\varepsilon > 0$ , escolhendo  $K \in \mathbb{N}$  para que  $\rho(g_{n_k}, g) < \frac{\varepsilon}{2}$  quando  $k \geq K$  e que  $\frac{1}{n_K} < \frac{\varepsilon}{2}$ , vem que para  $k \geq K$  vale

$$\rho(f_{n_k}, g) \leq \rho(f_{n_k}, g_{n_k}) + \rho(g_{n_k}, g) < \frac{1}{n_K} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Isto mostra que  $\overline{\mathcal{F}}$  é sequencialmente compacto, donde compacto.

A recíproca é imediata, já que toda sequência em  $\mathcal{F}$  possui subsequência convergente em  $\overline{\mathcal{F}}$ , donde possui subsequência convergente em  $\mathcal{C}(G, X)$ .  $\square$

A partir deste ponto, o espaço métrico  $(X, d)$  será sempre completo.

**Definição 1.6.** Seja  $G$  um aberto do plano complexo. Defina  $H(G) \subset \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$  como o conjunto de todas as funções analíticas definidas em  $G$ .

Visto a importância da integração complexa não só no trabalho que segue mas como ferramenta matemática, fica registrado sua definição e algumas consequências básicas.

**Definição 1.7.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva diferenciável (ou um *caminho*) e  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  contínua sobre o traço de  $\gamma$ , denotado por  $\gamma^*$ . A *integral de  $f$  sobre  $\gamma$*  é definida como

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Da definição, segue imediatamente que se  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z$  em  $\gamma^*$  e se o comprimento de  $\gamma$  é  $L$ , então

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq ML.$$

A desigualdade acima será utilizada durante o texto e referenciada como *desigualdade ML*. Também, a circunferência  $\gamma(t) = Re^{it} + z_0, 0 \leq t \leq 2\pi$ , será denotada por  $C(z_0, R)$ , não havendo diferença de notação entre a função e seu traço.

Para a demonstração do próximo resultado, considere os dois teoremas e o corolário a seguir, que podem ser encontrados em [21], páginas 12, 13 e 14.

**Teorema 1.8** (Fórmula integral de Cauchy para um círculo). *Seja  $f$  analítica numa região  $\Omega$  e seja  $B(z_0; r)$  uma bola tal que  $\overline{B}(z_0; r) \subset \Omega$ . Então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

para  $z \in B(z_0; r)$ .

**Teorema 1.9.** *Seja  $\gamma$  um caminho e  $g$  uma função com imagem em  $\mathbb{C}$  que é contínua sobre o traço de  $\gamma$ . Defina uma função  $F$  no aberto  $\Omega = (\gamma^*)^c$  por*

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw.$$

Então  $F$  tem derivadas de todas as ordens em  $\Omega$ , e

$$F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

para  $z \in \Omega$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$  (tome  $F^{(0)} = F$ ). Além disso,  $F^{(n)}(z) \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ .

**Corolário.** *Se  $f$  é analítica em  $\Omega$ , então  $f$  tem derivadas de todas as ordens em  $\Omega$ . Mais ainda, se  $\overline{B}(z_0; r) \subset \Omega$ , vale*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

para  $z \in B(z_0; r)$ .

*Demonstração.* Aplique o Teorema 1.9 ao Teorema 1.8. □

**Teorema 1.10.** *Sejam  $\{f_n\}$  uma sequência em  $H(G)$  e  $f$  uma função pertencente a  $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ . Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em compactos de  $G$ , então  $f$  é analítica e  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  uniformemente em compactos de  $G$ , para todo inteiro  $k \geq 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $\overline{B}(z_0; r)$  qualquer bola fechada contida em  $G$ . É possível escolher  $R > r$  de maneira que  $\overline{B}(z_0; R) \subset G$ . Para cada  $z \in B(z_0; R)$  e  $n = 1, 2, \dots$ , tem-se, pelo Teorema 1.8 e a convergência uniforme na bola fechada,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f_n(w)}{w - z} dw \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Como  $f_n \rightarrow f$  uniformemente na bola fechada, o Teorema 1.9 garante que  $f$  é analítica em  $B(z_0; R)$ . Segue que  $f$  é analítica em  $G$ . Agora, pelo corolário anterior,

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw.$$

Ao restringir  $z$  à bola fechada  $\overline{B}(z_0; r)$ , a desigualdade ML mostra que

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left( \max_{w \in C(z_0, R)} |f_n(w) - f(w)| \right) \frac{2\pi R}{(R - r)^{k+1}} \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Conclui-se que  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  uniformemente em “sub bolas” fechadas de  $G$ . Como qualquer subconjunto compacto de  $G$  pode ser coberto por finitas sub bolas fechadas, o teorema segue.  $\square$

Este resultado mostra que o conjunto  $H(G)$  é fechado em  $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$  e, além disso, que a aplicação  $\phi : H(G) \rightarrow H(G)$  dada por  $\phi(f) = f'$  é contínua. Visto que  $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$  é completo, sendo  $H(G)$  fechado, ele também é completo.

O próximo teorema a ser demonstrado é conhecido como Teorema de Hurwitz. Sua demonstração utiliza o Teorema de Rouché, que será apenas enunciado. Ele pode ser encontrado em [2], página 125, e seu conteúdo cita alguns novos conceitos, a serem apresentados a seguir.

**Definição 1.11.** O ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  é dito uma *singularidade isolada* de  $f$  se existir uma bola  $B(z_0; r)$  de maneira que  $f$  é holomorfa em  $B(z_0; r) - \{z_0\}$ . Caso exista  $m$  um inteiro positivo de tal forma que o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

exista e seja não nulo, dir-se-á que  $z_0$  é um *polo de ordem  $m$*  para  $f$ . Uma função que é holomorfa a menos de polos é dita *meromorfa*.

**Teorema 1.12** (Rouché). *Suponha  $f$  e  $g$  meromorfas numa vizinhança de  $\overline{B}(a; R)$  sem zeros ou polos no traço de  $C(a, R)$ . Se  $Z_f$  e  $Z_g$  [ $P_f$  e  $P_g$ ] são o número de zeros [polos] de  $f$  e  $g$  dentro do traço de  $C(a, R)$  contados de acordo com suas multiplicidades e se*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

sobre  $C(a, R)$ , então

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Mantendo as hipóteses do teorema acima, note que se  $f$  e  $g$  são holomorfas dentro da bola, vale  $P_f = P_g = 0$ , e então  $f$  e  $g$  possuem o mesmo número de zeros naquela região, contadas as multiplicidades.

**Teorema 1.13** (Hurwitz). *Seja  $G$  uma região e suponha que a sequência  $\{f_n\}$  em  $H(G)$  convirja a  $f$ . Se  $\bar{B}(a; R) \subset G$ , e  $f(z) \neq 0$  para  $|z - a| = R$ , então existe um natural  $N$  tal que para  $n \geq N$  as funções  $f$  e  $f_n$  possuem o mesmo número de zeros em  $B(a; R)$ .*

*Demonstração.* Defina  $S = \{z \mid |z - a| = R\}$ . Como  $f(z) \neq 0$  para  $z \in S$  (que é compacto), vale

$$\delta = \inf_{z \in S} |f(z)| > 0.$$

Em  $S$  tem-se a convergência uniforme  $f_n \rightarrow f$ , logo, há  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  vale  $f_n(z) \neq 0$  ( $z \in S$ ), e

$$|f(z) - f_n(z)| < \delta \leq |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|. \quad (z \in S)$$

Portanto, o Teorema de Rouché implica que  $f$  e  $f_n$  têm o mesmo número de zeros em  $B(a; R)$ .  $\square$

**Definição 1.14.** Um conjunto  $\mathcal{F} \subset H(G)$  é *localmente limitado* se para cada ponto  $a \in G$  há constantes  $M$  e  $r > 0$  tais que para toda  $f \in \mathcal{F}$  vale

$$|f(z)| \leq M, \quad |z - a| < r.$$

**Lema 1.15.** *Um conjunto  $\mathcal{F} \subset H(G)$  é localmente limitado se, e somente se, para cada compacto  $K \subset G$  existir uma constante  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in K$ .*

*Demonstração.* Suponha que o conjunto em questão seja localmente limitado. Para cada  $z \in G$  é possível encontrar  $M_z$  e  $r_z > 0$  de maneira que para todo  $w \in B(z; r_z)$  valha  $|f(w)| \leq M_z$ ,  $f \in \mathcal{F}$ . Observe que

$$\mathcal{G} = \bigcup_{z \in G} B(z; r_z)$$

é uma cobertura aberta de  $G$ . Agora seja  $K$  um compacto contido em  $G$ . É claro que  $\mathcal{G}$  cobre  $K$ . Logo, existem finitos  $p_1, \dots, p_m \in K$  de maneira que as respectivas bolas cobrem todo o compacto. Tomando  $M = \max\{M_{p_i}\}$ , fica claro que  $|f(z)| \leq M$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in K$ .

Por outro lado, suponha que para todo compacto contido em  $G$  seja possível encontrar uma constante  $M$  com  $|f(z)| \leq M$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in K$ . Dado  $a \in G$ , é possível

exibir  $r > 0$  de maneira que  $\overline{B}(a; r) \subset G$ . Ora, este é um conjunto fechado e limitado, donde compacto. Portanto existe  $M$  com  $|f(z)| \leq M$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in \overline{B}(a; r)$ . Em particular, vale  $|f(z)| \leq M$  para toda  $f \in \mathcal{F}$  e  $z \in B(a; r)$ , e o resultado segue.  $\square$

Este lema é útil na demonstração do resultado conhecido como Teorema de Montel. Para tal prova, considere também o Teorema de Arzelà-Ascoli, que pode ser encontrado em [2], página 148.

**Definição 1.16.** Uma família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  é dita *equicontínua* no ponto  $z_0 \in G$  se dado  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  de tal forma que para  $|z - z_0| < \delta$  valha

$$d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon,$$

independentemente de  $f \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 1.17** (Arzelà-Ascoli). *Uma família  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G, X)$  é normal se, e somente se, as seguintes duas condições são satisfeitas:*

- (a) *Para cada  $z \in G$ , o conjunto  $\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$  tem fecho compacto em  $X$ ;*
- (b)  *$\mathcal{F}$  é equicontínua em cada ponto de  $G$ .*

**Teorema 1.18** (Montel). *Uma família  $\mathcal{F} \subset H(G)$  é normal se, e somente se, é localmente limitada.*

*Demonstração.* Suponha que  $\mathcal{F}$  seja normal mas que não seja localmente limitada. Pelo Lema 1.15, existe um compacto  $K \subset G$  se tal forma que  $\sup\{|f(z)| \mid z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$ . Isto é, existe uma sequência  $\{f_n\}$  em  $\mathcal{F}$  tal que  $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \geq n$ . Como  $\mathcal{F}$  é normal, existe uma função  $f \in H(G)$  e uma subsequência  $\{f_{n_k}\}$  com  $f_{n_k} \rightarrow f$ . Isso mostra que, dado  $\varepsilon > 0$ , vale  $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$  para  $z \in K$  e  $k$  suficientemente grande. Como  $f$  é contínua num compacto, existe  $M$  de maneira que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in K$ , e então, para  $k$  suficientemente grande,

$$n_k \leq |f_{n_k}(z)| - |f(z)| + |f(z)| \leq |f_{n_k}(z) - f(z)| + |f(z)| < \varepsilon + M.$$

A identidade acima é uma clara contradição com o fato de que  $n_k \rightarrow \infty$ .

Suponha agora que  $\mathcal{F}$  seja localmente limitada. Para garantir a normalidade, o Teorema 1.17 será utilizado. Para tanto, é necessário verificar os itens (a) e (b) do dito teorema. O item (a) é satisfeito de imediato: sendo localmente limitada, para qualquer  $z \in G$  existe uma bola de centro  $z$  em que  $|f(w)| \leq M$ ,  $f \in \mathcal{F}$ ,  $M$  positivo. O fecho então do conjunto dos módulos é um fechado e limitado da reta, logo compacto. Falta agora a equicontinuidade em cada ponto de  $G$ . Fixe  $a \in G$  e  $\varepsilon > 0$  dado. Como a família é localmente limitada, existem  $r > 0$  e  $M > 0$  tais que  $\overline{B}(a; r) \subset G$  e  $|f(z)| \leq M$  para todo

$z \in \overline{B}(a; r)$  e para toda  $f \in \mathcal{F}$ . Sejam  $z \in B(a; \frac{r}{2})$  e  $f \in \mathcal{F}$ . O Teorema 1.8 juntamente com a desigualdade ML mostram que

$$\begin{aligned} |f(a) - f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a,r)} \frac{f(w)(a-z)}{(w-a)(w-z)} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{M|a-z|}{r} \max_{w \in C(a,r)} \frac{1}{|w-z|} \right) 2\pi \\ &\leq \frac{2M}{r} |a-z|. \end{aligned}$$

Escolha  $\delta < \min\{\frac{r}{2}, \frac{r}{4M}\varepsilon\}$ . Para este delta, se  $|z-a| < \delta$ , tem-se  $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ , independentemente da  $f \in \mathcal{F}$ , que é a equicontinuidade em  $a$ .  $\square$

O lema enunciado a seguir é, basicamente, a parte de existência do Teorema da Aplicação de Riemann, mas será utilizado em outros momentos também.

**Lema 1.19.** *Seja  $G \neq \mathbb{C}$  uma região do plano com a propriedade de que toda função analítica que não se anula em  $G$  tem uma raiz quadrada analítica. Se  $a \in G$  então existe uma função analítica  $f$  em  $G$  que satisfaz:*

- (a)  $f(a) = 0$  e  $f'(a) > 0$ ;
- (b)  $f$  é injetora;
- (c)  $f(G) = D = B(0; 1)$ .

Uma função analítica  $f \in H(G)$  possuir uma raiz quadrada analítica significa que existe  $g \in H(G)$  de maneira que  $f(z) = g(z)^2$ .

*Demonstração.* Defina a família  $\mathcal{F} \subset H(G)$  como

$$\mathcal{F} = \{f \in H(G) \mid f \text{ é injetora, } f(a) = 0, f'(a) > 0, f(G) \subset D\}.$$

Para facilitar o entendimento, esta demonstração será dividida em três passos.

*Passo I:*  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Como  $G \neq \mathbb{C}$ , existe  $b \in G^c$ . Por hipótese, existe  $g$  definida em  $G$ , analítica, de maneira que  $g(z)^2 = z - b$ . Se  $z_1$  e  $z_2$  são pontos de  $G$  que satisfazem  $g(z_1) = \pm g(z_2)$ , segue que

$$z_1 - b = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - b,$$

isto é,  $z_1 = z_2$ . Em particular,  $g$  é injetora. Sendo uma função analítica não constante, ela também é uma aplicação aberta (imagem de abertos é aberta), donde existe  $r > 0$  com

$$B(g(a); r) \subset g(G). \tag{1.1}$$

Suponha que exista  $z \in G$  com  $g(z) \in B(-g(a); r)$ . Então  $|-g(z) - g(a)| = |g(z) + g(a)| < r$ , isto é,  $-g(z) \in B(g(a); r)$ . Logo, (1.1) diz que existe  $w \in G$  com  $g(w) = -g(z)$ . A

discussão feita no início deste passo implica que  $w = z$ , donde  $g(z) = 0$ . Mas  $z - b = g(z)^2 = 0$  mostra que  $b$  está em  $G$ , uma contradição. Portanto,

$$g(G) \cap B(-g(a); r) = \emptyset.$$

Para continuar este passo, fixado  $\omega \in \mathbb{C}$ , defina a transformação de Möbius

$$\varphi_\omega(z) = \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z}. \quad (1.2)$$

Não é difícil ver que para  $|\omega| < 1$ , esta transformação é analítica, bijetora em  $D$  (sua inversa é  $\varphi_{-\omega}$ ),  $\varphi_\omega(\omega) = 0$ ,  $\varphi'_\omega(0) = 1 - |\omega|^2$  e  $\varphi'_\omega(\omega) = (1 - |\omega|^2)^{-1}$ .

Defina  $U = B(-g(a); r)$ . Existe uma transformação de Möbius  $T$  de maneira que

$$T(\mathbb{C}_\infty - \bar{U}) = D.$$

Isso se dá pelo princípio da orientação (vide [20]). Defina  $g_1 = T \circ g$ . Tal função é analítica e  $g_1(G) \subset D$ . Se  $\alpha = g_1(a)$ , então  $g_2 = \varphi_\alpha \circ g_1$  é analítica e  $g_2(G) \subset D$ . Mais ainda, vale  $g_2(a) = 0$ . Por fim, é simples encontrar um número complexo  $c$  de norma um para que  $g_3 = cg_2$  tenha derivada positiva em  $z = a$ , pois

$$g'_2(a) = \varphi'_\alpha(g_1(a))g'_1(a) = (1 - |\alpha|^2)^{-1}T'(g(a))g'(a).$$

Como  $T'$  nunca se anula por ser uma transformação de Möbius e  $g'(a) = (2g(a))^{-1} \neq 0$ , vale  $g'_2(a) \neq 0$ . Esta função  $g_3$  pertence a  $\mathcal{F}$ , donde esta família é não vazia.

*Passo II:*  $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$ . Suponha  $\{f_n\}$  uma sequência em  $\mathcal{F}$  que converge a  $f$  em  $H(G)$ . Da convergência, vale  $f(a) = 0$ , e como  $f'_n(a) \rightarrow f'(a)$ , tem-se  $f'(a) \geq 0$ . Dado  $z_1 \in G$ , coloque  $w = f(z_1)$  e defina a sequência  $\{w_n\}$  por  $w_n = f_n(z_1)$ . Sejam  $z_2 \in G$  um elemento diferente de  $z_1$  e  $K$  uma bola fechada centrada em  $z_2$  que não contenha  $z_1$ . Então  $f_n(z) - w_n$  nunca se anula em  $K$ , por  $f_n$  ser injetora para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Visto que  $f_n(z) - w_n \rightarrow f(z) - w$  uniformemente em  $K$ , o Teorema 1.13 garante que  $f(z) - w$  nunca se anula em  $K$  ou  $f(z)$  é constante igual a  $w$ . No segundo caso,  $f$  é constante em  $G$  todo; como  $f(a) = 0$ , a função  $f$  é nula em  $G$  (que este caso sempre acontece, basta fixar  $f \in \mathcal{F}$  e definir  $g_n(z) = \frac{f(z)}{n}$ ). Caso ela não seja constante, vale  $f(z_2) \neq f(z_1)$  para  $z_2 \neq z_1$ , isto é,  $f$  é injetora. Sendo injetora, a derivada  $f'$  não pode se anular em  $G$ ; como já era válido  $f'(a) \geq 0$ , neste caso a desigualdade se torna estrita, e, portanto,  $f \in \mathcal{F}$ .

*Passo III.* Como  $\mathcal{F}$  é não vazio, o Teorema 1.18 garante que esta é uma família normal. Mais ainda, a aplicação  $f \rightarrow f'(a)$  é contínua (Teorema 1.10), donde a compacidade de  $\overline{\mathcal{F}}$  garante a existência de  $f \in \overline{\mathcal{F}}$  com  $f'(a) \geq g'(a)$ , para toda  $g \in \mathcal{F}$ . O Passo II diz que, na verdade, tal  $f$  é um elemento de  $\mathcal{F}$ . A demonstração do lema será finalizada, assim, ao provar que  $f(G) = D$ . Para tanto, suponha que exista  $w \in D$  com  $w \notin f(G)$ .



Desta maneira, a aplicação

$$\frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)}$$

é analítica em  $G$  e nunca se anula. Por hipótese existe uma função analítica  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$h(z)^2 = \frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)}.$$

(Note que  $h(z)^2 = (\varphi_w \circ f)(z)$ .) Como a transformação de Möbius  $\varphi_w$  é bijetora em  $D$  (porque  $|w| < 1$ ), obtém-se que  $h(G) \subset D$ . Defina  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = \frac{|h'(a)|}{h(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)}.$$

A função  $h(z)^2$  é injetora por ser composta de funções injetoras, donde  $g = w_0 \varphi_{h(a)} \circ h$  é injetora por ser composta de funções injetoras. Além disso,  $g(G) \subset D$  e  $g(a) = 0$ . Também, vale

$$g'(a) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \varphi'_{h(a)}(h(a))h'(a) = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2}.$$

Como  $f(a) = 0$ , vem  $|h(a)|^2 = |-w| = |w|$ . Mais ainda, derivando a expressão que define  $h(z)^2$ , vem

$$2h(a)h'(a) = \varphi'_w(f(a))f'(a) = (1 - |w|^2)f'(a).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{f'(a)(1 - |w|^2)}{2\sqrt{|w|}} \frac{1}{1 - |w|} \\ &= f'(a) \left( \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} \right) \\ &> f'(a). \end{aligned}$$

(Para a última desigualdade, observe que  $1 + |w| = (1 - \sqrt{|w|})^2 + 2\sqrt{|w|}$ .) Isto mostra que  $g$  está em  $\mathcal{F}$  e contradiz a escolha feita de  $f$ . A contradição encontra-se em supor que  $f(G) \neq D$ .  $\square$

## 2 Conexidade simples

A ideia de conjuntos simplesmente conexos surge na Topologia, mais precisamente na Topologia Algébrica. Tal propriedade é um invariante topológico, donde é útil para determinar quando dois espaços topológicos não são homeomorfos.

Intuitivamente, um conjunto simplesmente conexo não possui buracos, isto é, toda curva contínua fechada pode ser continuamente deformada a um ponto.

**Definição 1.20.** Seja  $G$  uma região de  $\mathbb{C}$ . Duas curvas contínuas fechadas  $f, g : [0, 1] \rightarrow G$

são ditas *homotópicas* se existe  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  contínua com

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ H(x, 1) = g(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ H(0, t) = H(1, t), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Diz-se que  $H$  é uma *homotopia* entre  $f$  e  $g$  e denota-se  $f \sim g$ .

No caso especial em que  $g$  é uma curva constante, diz-se que  $f$  é *homotópica a 0*, e denota-se  $f \sim 0$ .

Não é difícil demonstrar que  $\sim$  é uma relação de equivalência. Qualquer curva fechada é homotópica a si mesmo pela homotopia constante. Caso  $f \sim g$ , então existe uma homotopia  $H$  entre elas. Definindo  $G(x, t) = H(x, 1 - t)$ , vê-se que  $G$  é uma homotopia entre  $g$  e  $f$ , donde  $g \sim f$ . Para a transitividade, se  $f \sim g$  e  $g \sim h$ , então existem  $H$  e  $G$  homotopias entre  $f$  e  $g$ , e  $g$  e  $h$ , respectivamente. Definindo

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & x \in [0, 1], t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1), & x \in [0, 1], t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} ,$$

tem-se que  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $h$ , isto é,  $f \sim h$ .

**Definição 1.21.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{C}$  é *simplesmente conexo* se  $X$  é conexo por caminhos e toda curva fechada em  $X$  é homotópica a 0.

No caso especial em que  $X$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ , tal conjunto é simplesmente conexo se  $X$  é conexo e toda curva fechada em  $X$  é homotópica a 0. Isso se dá pelo fato de que um aberto conexo é conexo por caminhos. O caso que será mais trabalhado é o de regiões do plano complexo, isto é, abertos conexos. A estes tais falta apenas a condição de que toda curva fechada possa ser deformada continuamente a uma curva constante para que sejam simplesmente conexos.

**Exemplo 1.22.** Seja  $G \subset \mathbb{C}$  um conjunto *convexo*, isto é, quaisquer dois pontos de  $G$  podem ser ligados por um segmento de reta totalmente contido em  $G$ . Então  $G$  é simplesmente conexo. De fato, se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  é uma curva contínua fechada, fixado  $p \in G$ , a aplicação  $H(x, t) = (1 - t)\gamma(x) + tp$  é contínua e tal que  $H(x, 0) = \gamma(x)$ ,  $H(x, 1) = p$  e  $H(0, t) = (1 - t)\gamma(0) + tp = (1 - t)\gamma(1) + tp = H(1, t)$ , por ser  $\gamma$  uma curva fechada. Isto mostra que  $H$  é uma homotopia entre  $\gamma$  e a curva constante  $g(x) = p$ . Portanto qualquer curva fechada em  $G$  pode ser continuamente deformada num ponto, e  $G$  é simplesmente conexo. Neste caso especial de convexidade, tal ponto pode ser arbitrariamente escolhido em  $G$ .

Este exemplo mostra que, em particular, bolas abertas são simplesmente conexas, por serem conjuntos convexos.

**Definição 1.23.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos. Um *homeomorfismo* entre  $X$  e  $Y$  é uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  bijetora com inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  contínua. Se existir um homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , tais espaços são *homeomorfos*.

**Exemplo 1.24.** O plano complexo e a bola aberta unitária são homeomorfos. A aplicação

$$f(z) = \frac{z}{|z| + 1}$$

é um homeomorfismo entre o plano e a bola; de fato, sua inversa é

$$g(z) = \frac{z}{|z| - 1},$$

onde  $f$  é bijetora. Como ambas são claramente contínuas, a afirmação segue.

Uma das versões do Teorema de Cauchy diz que ([2], página 89):

**Teorema 1.25** (Cauchy, versão homotópica). *Se  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica definida numa região  $G$  e  $\gamma$  é um caminho fechado em  $G$  com  $\gamma \sim 0$ , então*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Em particular, se  $G$  é uma região simplesmente conexa do plano, então  $\int_{\gamma} f = 0$  para toda curva suave fechada  $\gamma$  em  $G$  e toda função analítica  $f$  definida em  $G$ . A partir deste teorema é possível demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 1.26.** *Se  $G$  é simplesmente conexo e  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica em  $G$ , então  $f$  tem uma primitiva em  $G$ .*

Por *primitiva*, entenda uma função holomorfa  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaz  $F'(z) = f(z)$ .

*Demonstração.* Nesta demonstração, denote o segmento de reta que vai de  $z$  a  $w$  por  $[z, w]$ , onde  $z$  e  $w$  são números complexos. O traço do segmento e o caminho que possui tal traço define o segmento possuem a mesma notação.

Fixe um ponto  $a \in G$ . Dado  $z \in G$ , se  $\gamma_z$  é um caminho de  $a$  a  $z$  (que existe por  $G$  ser simplesmente conexo, logo conexo por caminhos), defina a função

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f.$$

É preciso verificar que esta função está bem definida, isto é, independe do caminho escolhido de  $a$  a  $z$ . Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dois caminhos em  $G$  de  $a$  a  $z$ . Isso pode ser feito porque como  $G$  é simplesmente conexo, ele é conexo por caminhos. É possível, então, montar um

novo caminho, definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2 - 2t), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Intuitivamente, este caminho vai de  $a$  a  $z$  sobre  $\gamma_1$  e depois volta até  $a$  por  $\gamma_2$  com a orientação oposta. Denota-se  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ . Então  $\gamma$  é um caminho fechado, e então a versão homotópica do Teorema de Cauchy diz que  $\int_{\gamma} f = 0$ . Usando a definição de integral e arrumando os parâmetros conforme necessário, conclui-se que

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma} f = 0,$$

e  $F$  está bem definida.

O próximo passo é verificar que  $F$  é a primitiva desejada. Para tanto, seja  $z \in G$  um ponto qualquer. Sendo  $G$  aberto, existe  $r > 0$  de maneira que  $B(z; r) \subset G$ . Considere  $h \in \mathbb{C}$  de tal forma que  $z + h \in B(z; r)$ . Como a integral que define  $F$  independe do caminho, fixe  $\gamma$  um caminho que vai de  $a$  a  $z$  e então tome  $\gamma_h = \gamma + [z, z + h]$ , isto é,  $\gamma_h$  vai até  $z$  sobre  $\gamma$  e então vai até  $z + h$  sobre o segmento de reta que liga  $z$  e  $z + h$ . Desta forma, obtém-se

$$\frac{F(z) - F(z + h)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) - f(z) dw + f(z).$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $f$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que se  $|w - z| < \delta$  então  $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$ . Pela desigualdade ML, para  $|h| < \delta$ , tem-se

$$\frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} f(w) - f(z) dw \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

Isto é,

$$\frac{F(z) - F(z + h)}{h} \rightarrow f(z)$$

quando  $h \rightarrow 0$ ; em outras palavras,  $F'(z)$  existe e vale  $f(z)$ . □

**Teorema 1.27.** *Seja  $G$  uma região do plano complexo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $G$  é simplesmente conexo;
- (b) Para toda  $f \in H(G)$  com  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in G$ , existe uma função  $g \in H(G)$  com  $f(z) = \exp g(z)$ ;
- (c) Para toda  $f \in H(G)$  com  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in G$ , existe uma função  $g \in H(G)$  com  $f(z) = g(z)^2$ ;

(d)  $G$  é homeomorfo à bola aberta unitária.

*Demonstração.* Suponha  $G$  simplesmente conexo e seja  $f \in H(G)$  uma função que nunca se anula em  $G$ . Então a função  $\frac{f'}{f}$  é analítica em  $G$ , donde o Teorema 1.26 garante uma primitiva  $F$ . Defina  $h(z) = \exp F(z)$ . Logo,  $h \in H(G)$  e nunca se anula em  $G$ . Assim, a função  $\frac{f}{h}$  é analítica e sua derivada é

$$\frac{h(z)f'(z) - h'(z)f(z)}{h(z)^2}.$$

Observe que  $h' = F'h = \frac{f'h}{f}$ , donde

$$hf' - fh' = 0.$$

Isso mostra que  $\frac{f}{h}$  é constante igual a  $c \in \mathbb{C}$  em  $G$ . Em outras palavras,  $f(z) = c \exp F(z) = \exp(F(z) + c') = \exp g(z)$ . Tal  $g$  é a função procurada em (b).

Suponha agora que (b) valha. Dada  $f \in H(G)$  com as propriedades da hipótese de (b), existe  $h \in H(G)$  com  $f(z) = \exp h(z)$ . Defina  $g(z) = \exp \frac{h(z)}{2}$ . Então  $g \in H(G)$  e

$$g(z)^2 = \left( \exp \left( \frac{h(z)}{2} \right) \right)^2 = \exp h(z) = f(z).$$

Se  $G = \mathbb{C}$ , o Exemplo 1.24 mostra que  $G$  e a bola aberta unitária são homeomorfos. Se  $G \neq \mathbb{C}$ , o Lema 1.19 garante a existência de uma função analítica  $f$  que é uma bijeção entre  $G$  e a bola aberta unitária. Tal função é um homeomorfismo, pois é aberta ([2], página 99).

Se  $G$  é homeomorfo à bola aberta unitária  $D$ , então existe um homeomorfismo  $h : G \rightarrow D$ . Dada  $\gamma$  uma curva fechada em  $G$ , a aplicação  $\alpha(x) = h(\gamma(x))$  é uma curva fechada em  $D$ . Sendo a bola simplesmente conexa (em especial, convexa), existe uma homotopia  $H$  entre  $\alpha$  e a curva constante igual a 0. Defina  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  por  $F = h^{-1} \circ H$ . Esta função é contínua; além disso, vale

$$\begin{cases} F(x, 0) = h^{-1}(H(x, 0)) = h^{-1}(\alpha(x)) = \gamma(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ F(x, 1) = h^{-1}(H(x, 1)) = h^{-1}(0), & 0 \leq x \leq 1 \\ F(0, t) = h^{-1}(H(0, t)) = h^{-1}(H(1, t)) = F(1, t), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Isto mostra que  $F$  é uma homotopia entre  $\gamma$  e a curva constante  $\beta(x) = h^{-1}(0)$ , donde  $G$  é simplesmente conexo.  $\square$

Os dois teoremas que seguem são conhecidos como Teorema do Módulo Máximo.

**Teorema 1.28.** *Se  $f$  é analítica numa região  $G$  e existe  $a \in G$  com  $|f(a)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in G$  então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Seja  $X \subset \mathbb{C}$  um subconjunto qualquer do plano complexo. Se existe  $x \in X^\circ$ , então há  $r > 0$  com  $B(x; r) \subset X$ . Ora, então é possível encontrar  $y \in X$  com  $|y| > |x|$ . Em outras palavras, se  $x$  for tal que  $|x| \geq |y|$  para todo  $y \in X$ , deve-se ter, necessariamente,  $x \in \partial X$ .

Coloque  $X = f(G)$  e  $w = f(a)$ . A hipótese diz que  $|w| \geq |z|$  para todo  $z \in X$ . O parágrafo anterior mostra que  $w \in \partial X \cap X$ ; em particular, não há nenhuma bola aberta centrada em  $w$  contida em  $X$ , donde este último não é aberto. Ora, como toda função analítica não constante é aberta, deve-se ter, necessariamente, que  $f$  é constante.  $\square$

**Teorema 1.29.** *Seja  $G$  um aberto limitado em  $\mathbb{C}$  e suponha  $f$  uma função contínua de  $\overline{G}$  que é analítica em  $G$ . Então*

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

*Demonstração.* Como  $G$  é limitado, existe um ponto  $a \in \overline{G}$  de maneira que  $|f(a)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in \overline{G}$ . Se  $f$  é constante, o resultado segue; caso  $f$  não seja constante,  $f$  não pode atingir um valor máximo no interior de  $G$  (pelo teorema acima).  $\square$

O teorema a seguir é conhecido como Lema de Schwarz.

**Teorema 1.30.** *Seja  $D = B(0; 1)$  e suponha  $f$  analítica em  $D$  com*

- (a)  $|f(z)| \leq 1$  para todo  $z \in D$ ;
- (b)  $f(0) = 0$ .

*Então  $|f'(0)| \leq 1$  e  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in D$ . Mais ainda, se  $|f'(0)| = 1$  ou se  $|f(z)| = |z|$  para algum  $z \neq 0$ , então existe uma constante  $c$  de norma um que satisfaz  $f(w) = cw$  para todo  $w \in D$ .*

*Demonstração.* Defina  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  para  $z \neq 0$  e  $g(0) = f'(0)$ . Tal  $g$  é analítica em  $D$ . O Teorema do Módulo Máximo garante que, para  $|z| \leq r$ , com  $0 < r < 1$ , vale  $|g(z)| \leq r^{-1}$ . Fazendo  $r \rightarrow 1$ , vê-se que  $|g(z)| \leq 1$  para todo  $z \in D$ . Isto é,  $|f(z)| \leq |z|$  e  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ . Se  $|f(z)| = |z|$  para algum  $z \neq 0$  em  $D$ , ou se  $|f'(0)| = 1$ , então  $|g|$  assume seu maior valor no interior de  $D$ . Novamente pelo Teorema do Módulo Máximo, existe uma constante  $c$  com  $|c| = 1$  de maneira que  $g(z)$  é constante igual a  $c$ . Em outras palavras,  $f(z) = cz$ .  $\square$

Suponha  $f$  uma função analítica em  $D$  com  $|f(z)| \leq 1$ . Para  $a \in D$ , coloque  $w = f(a)$ . Defina, então,  $g = \varphi_w \circ f \circ \varphi_{-a}$ . Tal  $g$  é analítica de  $D$  em  $D$  e  $g(0) = \varphi_w(f(a)) = \varphi_w(w) = 0$ . O Lema de Schwarz garante que  $|g'(0)| \leq 1$ . Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} g'(0) &= (\varphi_w \circ f)'(\varphi_{-a}(0))\varphi'_{-a}(0) \\ &= \varphi'_w(w)f'(a)(1 - |a|^2) \\ &= \frac{1 - |a|^2}{1 - |w|^2}f'(a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |w|^2}{1 - |a|^2}. \quad (1.3)$$

Mais ainda, a igualdade só ocorre quando  $|g'(0)| = 1$ , ou, segundo o Lema de Schwarz, quando existir uma constante  $c$  de norma um tal que  $g(z) = cz$ ; em outras palavras, quando

$$f(z) = (\varphi_{-w} \circ c\varphi_a)(z). \quad (1.4)$$

**Teorema 1.31.** *Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função analítica bijetora e suponha  $f(a) = 0$ . Então existe um número complexo  $c$  de norma um tal que  $f = c\varphi_a$ .*

*Demonstração.* Sendo bijetora, existe  $g : D \rightarrow D$  que satisfaz  $g(f(z)) = z$  para  $z \in D$ . Usando a desigualdade (1.3) para  $f$  e para  $g$  vem  $|f'(a)| \leq (1 - |a|^2)^{-1}$  e  $|g'(0)| \leq 1 - |a|^2$  (porque  $g(0) = a$ ). Visto que  $g'(0)f'(a) = (g \circ f)'(a) = 1$ , conclui-se que  $|f'(a)| = (1 - |a|^2)^{-1}$ . Aplicando a equação (1.4) vem que

$$f(z) = (\varphi_0 \circ c\varphi_a)(z) = c\varphi_a(z),$$

para alguma constante  $c$  com  $|c| = 1$ . □

**Definição 1.32.** Uma região  $G_1$  é *conformemente equivalente* a  $G_2$  se existe uma função analítica  $f : G_1 \rightarrow G_2$  que é bijetora.

Esta é uma relação de equivalência. De fato, a identidade é analítica, e uma bijeção entre uma região e si mesma. Se  $G_1$  é conformemente equivalente a  $G_2$ , então sendo a função analítica entre elas injetora, sua derivada não se anula em nenhum ponto, donde sua inversa é, também, analítica. Para a transitividade basta fazer a composição de funções analíticas, que ainda é analítica.

O próximo teorema é conhecido como Teorema da Aplicação de Riemann.

**Teorema 1.33.** *Sejam  $G \neq \mathbb{C}$  uma região simplesmente conexa e  $a \in G$ . Então existe uma única função analítica  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  que tem as seguintes propriedades:*

(a)  $f(a) = 0$  e  $f'(a) > 0$ ;

(b)  $f$  é injetora;

(c)  $f(G) = D = B(0; 1)$ .

*Demonstração.* Sendo  $G$  simplesmente conexa, toda função analítica que nunca se anula em  $G$  possui uma raiz quadrada analítica (Teorema 1.27). O Lema 1.19 garante, então, que existe uma tal  $f$  que satisfaz as condições (a), (b) e (c). Para finalizar, basta mostrar que tal  $f$  é única.

Suponha  $g$  uma outra função que satisfaz (a), (b) e (c). Então  $f \circ g^{-1} : D \rightarrow D$  é analítica e bijetora. Mais ainda,  $f(g^{-1}(0)) = f(a) = 0$ , donde o Teorema 1.31 implica na

existência de uma constante  $c$  de norma um de maneira que  $(f \circ g^{-1})(z) = c\varphi_0(z) = cz$  para todo  $z \in D$ . Logo,  $f(z) = cg(z)$ . Como  $f$  satisfaz (a), vale  $cg'(a) = f'(a) > 0$ ; mas  $g$  também satisfaz (a), donde  $g'(a) > 0$  e  $c$  deve ser real. Como são números positivos, deve-se ter  $c = 1$ , isto é,  $f(z) = g(z)$ .  $\square$

Há uma generalização deste teorema conhecida como *Teorema da Uniformização de Riemann*:

**Teorema 1.34.** *Uma superfície riemanniana simplesmente conexa é conformemente equivalente ou à bola aberta unitária, ou ao plano complexo ou à esfera de Riemann.*

A definição, entre outras propriedades de superfícies riemannianas, podem ser vistas em [1]. A prova do teorema será omitida neste trabalho. Existem diversas demonstrações para este resultado; uma moderna pode ser encontrada em [22]; para mais conteúdo histórico, vide [23]. O Teorema da Uniformização de Riemann é utilizado por Xavier em seu artigo.



## Capítulo 2

# Geometria conforme, números de Euler, e injetividade global em dimensões maiores

Este capítulo relata o objetivo central do nosso trabalho: o estudo do artigo “Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions” de Xavier [4]. É importante ressaltar que, apesar do trabalho desenvolvido até agora nesta monografia ser de fato importante para a compreensão do texto de Xavier, ele não é suficiente. Assim, em muitos momentos farei uso de meu conhecimento prévio e, em outros, as demonstrações de alguns teoremas serão omitidas.

Há diversos resultados que asseguram a injetividade de uma aplicação se a imagem inversa de objetos específicos (como planos ou retas complexas) são estruturas com propriedades desejáveis (como ser conforme a um plano ou ser uma curva racional). O teorema principal do artigo é, na verdade, o caso mais geral: ele engloba estes resultados como aplicações particulares.

Algumas definições que serão citadas diversas vezes e são essenciais são as seguintes:

**Definição 2.1.** Uma aplicação  $F : U \rightarrow V$  entre variedades complexas é um *biholomorfismo* se ela é holomorfa, injetora e sua inversa  $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$  é holomorfa.

**Definição 2.2.** Uma *variedade algébrica* é o conjunto de soluções de um sistema de equações polinomiais sobre os números reais ou complexos. Particularmente, uma *curva algébrica* é uma variedade algébrica de dimensão um, isto é, o conjunto em que uma equação polinomial de duas variáveis se anula. Uma *curva racional* é uma curva algébrica que pode ser parametrizada (localmente) por funções racionais, a menos de finitos pontos.

Uma conjectura que será muito citada é a famosa *Conjectura Jacobiana* (abreviada como (JC)):

**Conjectura (JC).** *Todo biholomorfismo local polinomial  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é invertível, com inversa polinomial.*

Também, o principal resultado do artigo, a ser provado, é este:

**Teorema 2.3.** *Sejam  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local,  $n \geq 3$  e  $q$  um ponto de  $F(\mathbb{R}^n)$ . Se a pré-imagem de todo plano contendo  $q$  for uma subvariedade riemanniana de um espaço euclidiano que é conforme a  $\mathbb{R}^2$ , uma esfera perfurada uma única vez, então  $q$  é assumido exatamente uma vez por  $F$ . Se, de maneira mais geral, a pré-imagem de todo tal plano é conforme a uma esfera perfurada finitas vezes, o número de perfurações podendo variar com o plano, então  $q$  é assumido no máximo duas vezes por  $F$ .*

É importante notar que a hipótese  $n \geq 3$  é essencial. Na verdade, todo difeomorfismo local não injetivo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  constitui um contra exemplo em dimensão 2.

A demonstração do teorema acima é baseado numa construção geométrica envolvendo o teorema de Poincaré-Hopf (conhecido como “teorema da esfera cabeluda”), na relação entre zeros de campos vetoriais e a característica de Euler, o teorema clássico de Bôcher sobre a estrutura de singularidades isoladas de funções harmônicas positivas no plano, problemas de Dirichlet sobre superfícies riemannianas e a teoria geral de equações diferenciais parciais elípticas lineares.

## 1 Motivação

Um resultado de Análise muito importante e largamente utilizado é o Teorema da Função Inversa. Ele afirma que se uma aplicação continuamente diferenciável  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  possui determinante jacobiano diferente de zero em  $p$ , então existem abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , com  $p \in U$ , de maneira que  $F$  restrita a  $U$  é um difeomorfismo entre  $U$  e  $V$ . Uma pergunta natural que surge é a seguinte: se o determinante jacobiano for diferente de zero em todos os pontos de  $\mathbb{R}^n$ , a aplicação  $F$  se torna um difeomorfismo global? A resposta é não. Na verdade, ela pode não ser nem injetora sobre sua imagem, como mostra a função  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ , que tem determinante jacobiano igual a  $e^{2x} > 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Busca-se, então, hipóteses adicionais para garantir injetividade ou sobrejetividade de  $F$ .

Em 1905, Hadamard demonstrou que uma  $F \in C^k$  é difeomorfismo global se, e somente se, é uma aplicação própria (pré-imagem de compacto é compacto) com determinante jacobiano diferente de zero em todos os pontos (na realidade, há a tradição de dizer que este é um resultado de Hadamard, e o artigo citado é [7]. Todavia, não há menção explícita disso no artigo; o que ele fez neste e em outros trabalhos da mesma época foi dar condições que implicam em ser própria). Entretanto, verificar que uma aplicação é própria pode ser tão difícil (ou mais) quanto demonstrar diretamente que ela é uma bijeção. Não muito depois, em 1905-06, ele deu uma condição que implica em  $F$  ser própria [7].

Visto que bijeção (talvez) seja muito forte e que todo difeomorfismo local *injetor* é sobrejetor sobre sua imagem, quais hipóteses a mais sobre  $F$  podem-se tomar para que ela seja apenas injetora? Em  $\mathbb{R}^2$ , se  $F = (f_1, f_2)$ , basta que  $f_1^{-1}(c)$  seja conexa (ou

vazia) para todo  $c \in \mathbb{R}$ . A demonstração deste fato é como segue: sejam  $a \neq b$  dois pontos de  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $f_1(a) = f_1(b) = c$ . Visto que  $f_1^{-1}(c)$  é conexo, ela pode ser parametrizada por uma curva  $\gamma$ , com  $\gamma(0) = a$  e  $\gamma(1) = b$ . Se fosse  $f_2(a) = f_2(b)$ , então  $f_2(\gamma(t))$  possui um ponto crítico  $x_0$  em  $(0, 1)$  que é de máximo ou de mínimo local (Teorema de Rolle); mas então, em nenhuma vizinhança do ponto  $\gamma(x_0)$  a aplicação  $F$  pode ser um difeomorfismo, contrariando o Teorema da Função Inversa. Como exemplo desta situação, tome  $F(x, y) = (xe^y, (x^2 - 1)e^y)$ . Tem-se  $\det dF_{(x,y)} = -e^{2y}(x^2 + 1) \neq 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Além disso, dado  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$f_1^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xe^y = c\}$$

é conexo, donde  $F$  é injetora.

Analogamente, se fosse  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se existir  $i$  de maneira que

$$\bigcap_{j \neq i} f_j^{-1}(c_j)$$

é conexa (ou vazia), para toda  $(n - 1)$ -upla de escalares reais, então  $F$  é injetora.

Em 1939, Keller questionou o que aconteceria no caso polinomial [8]. Apesar de não ser exatamente como é hoje (pois, por exemplo, Keller impunha coeficientes inteiros), seu questionamento ficou conhecido como conjectura jacobiana, sendo  $F : k^n \rightarrow k^n$ , com  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , polinomial com determinante jacobiano constante diferente de zero em todos os pontos. Sabe-se que, neste caso, se tal  $F$  for injetora, ela é também sobrejetora [19]. Se fosse apenas diferente de zero em todos os pontos, como  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado, isto equivale a pedir que  $\det dF_p$  seja constante para todo  $p \in \mathbb{C}^n$ . Ainda no caso complexo, ser injetora (logo sobrejetora) garante uma inversa polinomial [5]. Até hoje nenhuma demonstração ou contraexemplo foram apresentados, nem em  $\mathbb{C}^n$  nem em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Smale considera este um problema do século [9].

Como  $\mathbb{R}$  não é algebricamente fechado, não é verdade que  $\det dF_p \neq 0$  para todo  $p$  implique que este determinante é constante. Surge, assim, a conjectura jacobiana real: Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é polinomial com determinante jacobiano não nulo em todos os pontos, ela é injetora? Em 1994, Pinchuk dá um contraexemplo em  $\mathbb{R}^2$  com uma  $F = (p, q)$  não injetora com determinante jacobiano positivo não constante [10]. Neste exemplo, o grau de  $p$  é 10 e o grau de  $q$  é 40. Em vista de exemplos mais simples, recentemente Fernandes apresentou um exemplo com grau de  $p$  igual a 10 e grau de  $q$  igual a 15 [12].

Em 2000, Gwoździewicz mostrou que, em  $\mathbb{R}^2$ , o grau de  $p$  e  $q$  nos contraexemplos devem ser no mínimo 4, pois para grau menor ou igual a 3 a aplicação  $F$  se torna um difeomorfismo global [13]. Em 2010, Braun e dos Santos Filho mostraram que basta que  $p$  tenha grau menor ou igual a 3 para que  $F$  seja um difeomorfismo global [14]. Em 2016, Braun e Oréface-Okamoto provaram que se o grau de  $p$  é menor ou igual a 4, então  $F$  é um difeomorfismo global [15].

Um resultado um tanto surpreendente é o conhecido Teorema de Redução, de [5]. Sumariamente, ele diz que basta que a conjectura jacobiana seja demonstrada para polinômios de grau 3, desde que isto seja feito em todas as dimensões. Como escrito em [18], o resultado é:

**Teorema.** *Seja  $F : k^n \rightarrow k^n$ ,  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , uma aplicação polinomial com  $\det dF_p \in k^*$ . Então é possível construir um polinômio  $G : k^m \rightarrow k^m$ , para algum  $m = m(F) \geq n$ , tal que:*

- (a)  *$G$  é injetora se, e somente se,  $F$  o é;*
- (b)  *$G(x) = x + H(x)$ , em que  $H = (H_1, \dots, H_m)$  com  $H_i$  polinômio homogêneo de grau 3.*

Há ainda outros problemas que estão relacionados com a teoria de Injetividade Global, onde alguns derivam diretamente da conjectura jacobiana. Alguns exemplos são:

- (1) A conjectura jacobiana fraca, que diz: para qualquer biholomorfismo local polinomial  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  há pelo menos um  $q \in \mathbb{C}^n$  que é atingido precisamente uma vez por  $F$ .
- (2) A conjectura de estabilidade assintótica global de Markus-Yamabe e desenvolvimentos posteriores. Em dimensão 2 ela foi provada verdadeira (uma dessas demonstrações pode ser encontrada em [24]) e afirma que se  $f$  é um campo vetorial  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  com uma singularidade em  $p \in \mathbb{R}^2$  e os autovalores de  $df_x$  têm parte real negativa para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , então a variedade estável de  $p$  é  $\mathbb{R}^2$ .
- (3) A conjectura de Gale-Nikaidô diz que se  $Q^n$  é um  $n$ -retângulo em  $\mathbb{R}^n$  e  $F : Q^n \rightarrow Q^n$  é um difeomorfismo local para o qual os menores principais de  $dF_x$  não se anulam em  $\partial Q^n$ , então  $F$  é injetiva [25]. Este tipo de problema aparece em economia matemática.
- (4) A classificação de aplicações injetivas conformes harmônicas  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Conjectura: O plano e o helicóide são as únicas superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  que são conformes a  $\mathbb{R}^2$ . Uma referência para um trabalho nesse sentido é [26].
- (5) Visto que a hipótese de equivalência conforme (que é razoavelmente forte) do artigo de Xavier, que será estudado em detalhes a seguir, pode-se perguntar o que acontece ao omiti-la. Foi conjecturado em 2002 por Nollet e Xavier que um difeomorfismo local  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  precisa ser injetivo se ele tem a propriedade de que a pré-imagem de todo hiperplano afim é um conjunto conexo. Se verdadeira, esta conjectura implicaria na conjectura jacobiana, via um teorema do tipo do de Bertini. Tal conjectura foi provada falsa em 2019 com um contraexemplo analítico, por Braun, Dias e Venato-Santos [17]. A pergunta permanece em aberto para aplicações polinomiais.

## 2 A propriedade $(\diamond_d)_{d=0}^{n-1}$

Neste primeiro momento o foco é estudar a injetividade de um ponto de vista topológico. Para tal, considere a seguinte definição:

**Definição 2.4.** Seja  $N^n$  uma variedade  $n$ -dimensional conexa não compacta. Se a pré-imagem sob um difeomorfismo local  $F : N^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de todos os subespaços afins  $d$ -dimensionais que contém  $q \in F(N^n)$  são conexos, então  $(F, q)$  satisfaz a propriedade  $(\diamond_d)$ .

Uma breve observação: suponha  $q$  um ponto na imagem de um difeomorfismo local  $F : N^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é atingido uma única vez por  $F$ . Trivialmente sabe-se que  $F^{-1}(q)$  é conexo, pois é constituído de um único ponto. Por outro lado, suponha  $F^{-1}(q)$  conexo. Observe que este conjunto não pode possuir um ponto de acumulação, pois se possuísse, não seria possível exibir uma vizinhança deste ponto em que  $F$  restrita a ela seja um difeomorfismo. Assim,  $F^{-1}(q)$  é constituído apenas de pontos isolados, e tal conjunto só é conexo se for unitário.

O parágrafo acima mostra que a propriedade  $(\diamond_0)$  é equivalente a  $\#F^{-1}(q) = 1$ . A pergunta é se isto se mantém válido para  $d > 0$ .

O principal motivo para explorar esta ideia de injetividade a partir de conexidade vem da conjectura jacobiana, pois há vários resultados poderosos na literatura sobre a conexidade de variedades algébricas (como os teoremas de Bertini. Uma versão clássica de tais resultados pode ser vista em [27], página 179).

Daqui em diante, Xavier busca entender a conexão entre injetividade e a propriedade  $(\diamond_d)$ , com  $d$  variando de 0 a  $n-1$ . Como  $d = 0$  já foi visto como equivalente a injetividade, ele parte para  $(\diamond_1)$ . A demonstração de que  $(\diamond_1)$  implica  $(\diamond_0)$  é bem simples e não é necessário que todo subespaço afim unidimensional que contenha  $q$  seja conexo, mas apenas um, como pode ser visto a seguir.

Suponha  $l$  uma reta que contenha  $q$  tal que  $F^{-1}(l)$  seja conexo. Sabe-se que toda 1-variedade conexa é difeomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $(0, 1]$ ,  $[0, 1]$  ou a  $S^1$  ([28], página 55). Visto que  $l$  não possui bordo, sendo  $F$  um difeo local,  $F^{-1}(l)$  deve ser difeomorfa a  $\mathbb{R}$  ou a  $S^1$ . A aplicação  $F$  restrita a  $F^{-1}(l)$  é um difeomorfismo local, donde sua imagem é um conjunto aberto (a cada ponto está associado um aberto cuja imagem é aberta em  $l$ . A união destes abertos é um aberto de  $l$ ). Se  $F^{-1}(l)$  fosse difeomorfa a  $S^1$ , a imagem da restrição seria compacta (logo fechada) e também aberta. Por conexidade, a imagem deveria ser toda a reta  $l$ , o que implicaria que a reta  $l$  é compacta, uma contradição. Assim, a imagem inversa de  $l$  por  $F$  deve ser difeomorfa a  $\mathbb{R}$ . Como um difeomorfismo local de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  é estritamente monótono (e logo injetivo), assim também o é a restrição de  $F$  a  $F^{-1}(l)$ , donde  $q$  é atingido apenas uma vez por  $F$ .

O parágrafo acima estabelece  $(\diamond_1)$  e dá para a implicação  $(\diamond_1) \Rightarrow (\diamond_0)$  a seguinte forma: a cardinalidade de  $F^{-1}(q)$  é 1 se para alguma reta  $l$  que contenha  $q$  valha  $F^{-1}(l)$

conexo.

Passando para  $(\diamond_2)$ , verifica-se que não é mais possível garantir a injetividade da aplicação. Para tal, considera-se um exemplo que se baseia em um nó trivial  $\Gamma$  específico. Este nó, que é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , é posicionado próximo à origem de maneira que a própria origem não esteja sobre ele e todo subespaço vetorial de dimensão dois de  $\mathbb{R}^3$  intersecte este nó em finitos pontos e, em pelo menos um ponto, esta interseção seja transversal.

A aplicação que será utilizada como contra exemplo é o recobrimento universal  $F : N^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 - \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . Do fato de que o grupo fundamental de  $\mathbb{R}^3$  sem o nó é o anel dos inteiros, vem que a pré-imagem da origem segundo esta aplicação é infinito (bijeção entre a pré-imagem de um ponto e o grupo fundamental, quando o recobrimento é universal). Considerando  $V$  um subespaço vetorial de dimensão dois de  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto  $A_V = V - (V \cap \Gamma)$  é conexo. Cada ponto onde a interseção é transversal representa um gerador do  $\pi_1$  de  $\mathbb{R}^3 - \Gamma$ , donde a inclusão  $i : A_V \rightarrow \mathbb{R}^3 - \Gamma$ , induz um epimorfismo  $i_* : \pi_1(A_V, 0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 - \Gamma, 0)$ , e então  $F^{-1}(V) = F^{-1}(A_V)$  é conexo ([16], página 179). Isso mostra que  $(\diamond_2)$  não implica  $(\diamond_0)$ .

Apesar da falha da propriedade  $(\diamond_2)$  implicar  $(\diamond_0)$  nas condições dadas, hipóteses mais fortes (de natureza conforme) serão estabelecidas mais à frente de maneira que  $(\diamond_2)$  implique que  $F^{-1}(q)$  seja unitário.

Para  $d = 0$  e  $d = 1$  a propriedade  $(\diamond_d)$  é equivalente a injetividade. Visto que  $(\diamond_2)$  não compartilha a mesma equivalência, é possível ver  $(\diamond_d)$  com  $2 \leq d \leq n - 1$  como uma injetividade fraca. O mais interessante é que, no contexto da conjectura jacobiana, essa forma vestigial de injetividade é sempre válida, para o valor máximo  $d = 2n - 1$ . O ponto é que (JC) afirma que  $(\diamond_d)$  já é válido para  $d = 0$ .

**Teorema 2.5.** *Se  $\widehat{F} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  é a realificação de um biholomorfismo local polinomial  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , então  $(\widehat{F})^{-1}(H^{2n-1})$  é conexo para todo hiperplano real  $H^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ .*

O teorema acima é um trabalho não publicado de Nollet e Xavier. No artigo sendo trabalhado aqui, ele faz a demonstração apenas para o caso  $n = 2$ .

### 3 Uma melhoria topológico-conforme de $(\diamond_2)$

Para esta seção e no que segue, a discussão a seguir se faz deveras importante.

**Definição 2.6.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Para um inteiro  $0 \leq k \leq n$ , defina  $G_k(V)$  como o conjunto de todos os subespaços vetoriais de  $V$  de dimensão  $k$ .

Quando  $V$  é um espaço vetorial real ou complexo, é possível colocar uma *estrutura suave* em  $G_k(V)$ , transformando-os em variedades suaves. Como variedades suaves, estes objetos recebem o nome de *variedades de Grassmann*, ou simplesmente *grassmannianos*.

Para uma descrição mais precisa de como dotar tal conjunto com uma estrutura suave, vide [29], página 22.

A ideia desta seção é fortalecer ( $\diamond_2$ ), de maneira que essa nova propriedade implique  $\#F^{-1}(q) = 1$ . Esse “fortalecimento” é ir além da conexidade, pedindo que todos os planos passando por  $q$  sejam difeomorfos a  $\mathbb{R}^2$  e “conformemente grandes”.

É um resultado clássico que toda superfície riemanniana orientável  $(M, g)$  pode receber uma estrutura de superfície riemanniana com a introdução de coordenadas locais holomorfas  $z = x + yi$  de maneira que, relativo a estas coordenadas (chamadas coordenadas isotérmicas), a métrica  $g$  é localmente conformemente plana (flat), significando que ela assume a forma  $g(x, y) = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$  para alguma função suave  $\lambda > 0$ . Duas referências pra isto são [30] e [31], página 153.

A partir daqui, a não ser que o contrário seja dito, a estrutura conforme (ou complexa) associada a qualquer superfície orientável  $M$  mergulhada em algum espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  será aquela que vem da métrica riemanniana em  $M$  obtida pela restrição do produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$ . Também,  $q + \pi$  denotará o plano que contém  $q$  e é paralelo ao espaço vetorial  $\pi$  de dimensão dois de  $\mathbb{R}^n$ .

Os dois próximos teoremas são tais que têm como corolário o Teorema 2.3. Todo o trabalho feito em seguida tem como objetivo demonstrar e explicar estes resultados.

No seguinte teorema e no que segue,  $\chi$  denotará a função que associa a cada variedade compacta orientável sua característica de Euler (a definição deste conceito pode ser vista em [1], página 272).

**Teorema 2.7.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local,  $n \geq 3$ ,  $q \in F(\mathbb{R}^n)$ . Assuma a existência de uma superfície compacta orientável  $M^2$  mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\chi(M^2) \neq 0$  e, para todo  $\pi \in G_2(\mathbb{R}^n)$  paralelo a algum plano tangente de  $M^2$ , a superfície  $F^{-1}(q + \pi) \subset \mathbb{R}^n$  é conformemente difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Então a fibra  $F^{-1}(q)$  consiste de um único ponto.*

De maneira mais geral, tem-se:

**Teorema 2.8.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local,  $n \geq 3$ ,  $q \in F(\mathbb{R}^n)$ . Assuma a existência de uma superfície compacta orientável  $M^2$  mergulhada em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\chi(M^2) \neq 0$  e, para todo  $\pi \in G_2(\mathbb{R}^n)$  paralelo a algum plano tangente de  $M^2$ , existem pontos  $p_1, \dots, p_{k_\pi} \in S^2$ ,  $k_\pi \geq 1$ , para os quais a superfície  $F^{-1}(q + \pi) \subset \mathbb{R}^n$  é conformemente difeomorfa a  $S^2 - \{p_1, \dots, p_{k_\pi}\}$ . Então a fibra  $F^{-1}(q)$  tem no máximo dois pontos.*

Tomando  $M^2$  uma superfície compacta orientável de  $\mathbb{R}^n$  diferente do toro em ambos os teoremas acima, obtém-se como corolário o Teorema 2.3.

Como dito no início deste capítulo, a demonstração destes teoremas, em específico o Teorema 2.7, baseia-se em supor a existência de dois elementos distintos na fibra  $F^{-1}(q)$ , e então construir um campo vetorial contínuo que nunca se anula em  $M^2$ , o que é um absurdo pelo teorema de Poincaré-Hopf, pois  $\chi(M^2) \neq 0$  ([1], página 282).

As próximas seções são passos da demonstração dos teoremas acima. Mais especificamente, as seções 4 e 5 mostram a ideia por trás da construção do campo vetorial contínuo que será utilizado para conseguir a contradição desejada; na primeira é feita a construção deste campo, e na segunda prova-se que ele é contínuo, finalizando a demonstração do Teorema 2.7.

A seção 6 busca demonstrar o Teorema 2.8, fazendo as alterações necessárias na demonstração do Teorema 2.7 e utilizando argumentos que envolvem soluções de alguns problemas de Dirichlet. Contudo, antes de dar continuidade a este resultado, é interessante apresentar um exemplo de natureza geométrica e topológica.

**Exemplo 2.9.** Seja  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , um biholomorfismo local e  $q$  um ponto na imagem de  $F$ . Se a pré-imagem de toda reta complexa  $l$  contendo  $q$  é conexa e simplesmente conexa, então  $q$  é atingido exatamente uma vez por  $F$ .

Para demonstrar isto, assuma que  $F(a) = F(b) = q$ , com  $a \neq b$ . Por simplicidade, assuma  $q = 0$ . Por hipótese, a curva complexa  $F^{-1}(l)$  contém ambos  $a$  e  $b$  para toda reta  $l$  que contenha  $q$ . Observe que  $F^{-1}(l)$  é propriamente mergulhada, pois  $F^{-1}(l)$  é fechada em  $\mathbb{C}^n$ , donde a função inclusão é suficiente para mostrar o mergulho próprio. Segue que  $F^{-1}(l)$  é uma superfície riemanniana completa, conexa, simplesmente conexa e de curvatura não positiva.

Usando um Teorema de Cartan-Hadamard ([34], página 149), é possível garantir uma única geodésica em  $F^{-1}(l)$  que conecta  $a$  a  $b$ . Seja  $v_l$  o vetor tangente unitário em  $a$  desta geodésica. O conjunto de retas complexas passando por  $q$  é naturalmente identificado com  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . Assim, defina a aplicação

$$s : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow S^{2n-1}, \quad s(l) = \frac{dF_a(v_l)}{|dF_a(v_l)|} \in l \cap S^{2n-1}.$$

Considere a aplicação de Hopf  $\pi : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  que associa a cada ponto da esfera unitária a única reta complexa passando por ele e a origem. Segue da definição de  $s$  que ela é uma seção de  $\pi$ . Agora resta provar que  $s$  é contínua. Para fazer isto, basta a dependência de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias sobre as condições iniciais e sobre os parâmetros. Isto dá a contradição desejada.

## 4 Criando um campo vetorial sobre $M^2$

Nesta seção, defina  $B$  como a bola aberta  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . As demonstrações dos lemas a seguir podem ser encontradas em [33], páginas 52 e 50, respectivamente.

**Lema 2.10.** *Seja  $u$  positiva e harmônica em  $B - \{0\}$ , que satisfaça  $u(z) \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow 1$ . Então existe uma constante  $c > 0$  tal que  $u(z) = -c \log |z|$ ,  $z \in B - \{0\}$ .*

**Lema 2.11.** *Seja  $u$  positiva e harmônica em  $B - \{0\}$ . Então existe uma função harmônica  $v$  em  $B$  e uma constante  $c \geq 0$  que satisfazem  $u(z) = v(z) - c \log |z|$ ,  $z \in B - \{0\}$ .*



Estes lemas são fundamentais para as demonstrações dos Teoremas 2.7 e 2.8. O primeiro será utilizado na demonstração do Lema 2.12, que, por sua vez, será crucial para a construção de um campo vetorial contínuo que nunca se anula sobre  $M^2$ . O segundo, também conhecido como teorema de Bôcher, ajudará na demonstração do Teorema 2.8.

Seja  $F$  como no Teorema 2.7. Substituindo  $F$  por  $F - q$  se necessário, sempre será considerado  $q = 0$ . Para o que vem a seguir, inclusive o próximo lema e a próxima seção, uma construção precisa ser feita. Suponha que  $F^{-1}(0)$  possua dois elementos distintos  $a$  e  $b$ . Sendo  $F$  um difeomorfismo local, é possível escolher uma vizinhança aberta  $U$  de  $a$  e uma bola aberta  $W$  centrada em  $0$  tal que  $b \notin \bar{U}$  e  $F : U \rightarrow W$  seja um difeomorfismo.

Seja  $\pi \subset \mathbb{R}^n$  um plano contendo  $q = 0$  paralelo a algum plano tangente de  $M^2$ . Defina  $\Pi$  como o conjunto de todos os  $\pi$  satisfazendo esta propriedade. É possível enxergar  $\Pi$  como um subconjunto do grassmanniano  $G_2(\mathbb{R}^n)$ . É claro que  $a, b \in F^{-1}(\pi)$  para todo  $\pi \in \Pi$ . Defina os conjuntos

$$U_\pi = U \cap F^{-1}(\pi) \text{ e } T_\pi = \partial(U \cap F^{-1}(\pi)). \quad (2.1)$$

Denote por  $\Delta_\pi$  o laplaciano riemanniano sobre a superfície simplesmente conexa  $F^{-1}(\pi)$ , associado à métrica  $g_\pi$  sobre  $F^{-1}(\pi)$  obtida pela restrição da métrica euclidiana  $g$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Em coordenadas conformes locais  $z = x + iy$  sobre  $F^{-1}(\pi)$ , a métrica  $g_\pi$  e o laplaciano  $\Delta_\pi$  são dados por

$$g_\pi = \lambda^2 |dz|^2, \\ \Delta_\pi = \lambda^{-2} \partial_x (\lambda^{-2} \lambda^2 \partial_x) + \lambda^{-2} \partial_y (\lambda^{-2} \lambda^2 \partial_y) = \lambda^{-2} (\partial_x^2 + \partial_y^2) = 4\lambda^{-2} \partial_z \partial_{\bar{z}},$$

onde  $\lambda$  é uma função suave positiva e

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Portanto, uma função é  $\Delta_\pi$ -harmônica, isto é, ela é harmônica com relação à métrica  $g_\pi$ , se, e somente se, ela é harmônica no sentido da estrutura de superfície riemanniana  $F^{-1}(\pi)$  induzida pelos parâmetros isotérmicos  $z$  acima.

A partir do que foi feito acima, pode-se enunciar o seguinte lema:

**Lema 2.12.** *Para cada  $\pi \in \Pi$  existe uma única função  $u_\pi : F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi \rightarrow [0, \infty)$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (a)  $u_\pi$  é  $\Delta_\pi$ -harmônica;
- (b)  $u_\pi(p) \rightarrow \infty$  uniformemente quando  $|p| \rightarrow \infty$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \in F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi$ ;
- (c)  $u_\pi(p) \rightarrow 0$  quando  $p \rightarrow T_\pi$ ,  $p \in F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi$ ;
- (d)  $u_\pi(b) = 1$ .

Mais ainda,  $d(u_\pi)_b \neq 0$ .

Relembre que, como valem as hipóteses do Teorema 2.7, a pré-imagem  $F^{-1}(\pi)$ ,  $\pi \in \Pi$ , é conforme ao plano complexo  $\mathbb{C}$ , donde  $F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi$  é conforme a uma vizinhança perfurada do infinito na esfera de Riemann (denotada por  $\mathbb{C}_\infty$ ) que, por sua vez, é conforme a  $B - \{0\}$ .

A ideia é utilizar o fato de que os únicos biholomorfismos de  $B - \{0\}$  em si mesmo são as rotações ao redor da origem (isso vem do Lema de Schwarz, Teorema 1.30) e então tomar a *única* aplicação conforme que faz uma inversão, dilata e rotaciona  $\mathbb{C}_\infty - \{\infty\}$  de maneira que a imagem de  $b$  segundo esta aplicação seja um número real entre 0 e 1 e compor com o biholomorfismo que leva  $F^{-1}(\pi)$  em  $\mathbb{C}$ , que existe por hipótese (Figura 2.13). Com esta aplicação  $h_\pi : F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi \rightarrow B - \{0\}$  em mãos, define-se uma nova função  $v_\pi : B - \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ , dada por

$$v_\pi(z) = \frac{\log |z|}{\log h_\pi(b)},$$

que nada mais é do que uma constante (dependente de  $\pi$ ) vezes o logaritmo do módulo de  $z$ , com  $z \in B - \{0\}$ . Daí, a função desejada é  $u_\pi = v_\pi \circ h_\pi$ . Esta função tem a forma

$$u_\pi(p) = \frac{\log |h_\pi(p)|}{\log h_\pi(b)}.$$

Para ver que tal função satisfaz todos os itens do lema, observe que

$$\lim_{p \rightarrow T_\pi} h_\pi(p) = 1, \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} h_\pi(p) = 0. \quad (2.2)$$

Esses limites vêm da definição de  $h_\pi$ : a inversão mantém o bordo perto do bordo, e a dilatação e a rotação não alteram isso. Fica claro então que  $u_\pi$  satisfaz as condições do lema, sendo (a) verdadeira pela composição de uma função harmônica com uma holomorfa. Por fim, vale  $d(u_\pi)_b \neq 0$ , pelo fato de  $v_\pi$  não ter pontos críticos.

Para estabelecer a unicidade, supõe-se a existência de outra função  $\tilde{u}_\pi$  que satisfaça o lema. Daí, segue de (2.2) e (c) que  $\tilde{v}_\pi = \tilde{u}_\pi \circ h_\pi^{-1} : B - \{0\} \rightarrow (0, \infty)$  satisfaz as hipóteses do Lema 2.10, isto é, pode ser caracterizada como  $\tilde{v}_\pi(z) = -c \log |z|$ , para alguma constante  $c > 0$ . Agora, como vale (d), tem-se

$$1 = \tilde{u}_\pi(b) = \tilde{v}_\pi(h_\pi(b)) = -c \log |h_\pi(b)|.$$

Colocando  $-c$  em evidência, vê-se que  $\tilde{v}_\pi = v_\pi$  e, por conseguinte,  $\tilde{u}_\pi = u_\pi$ .

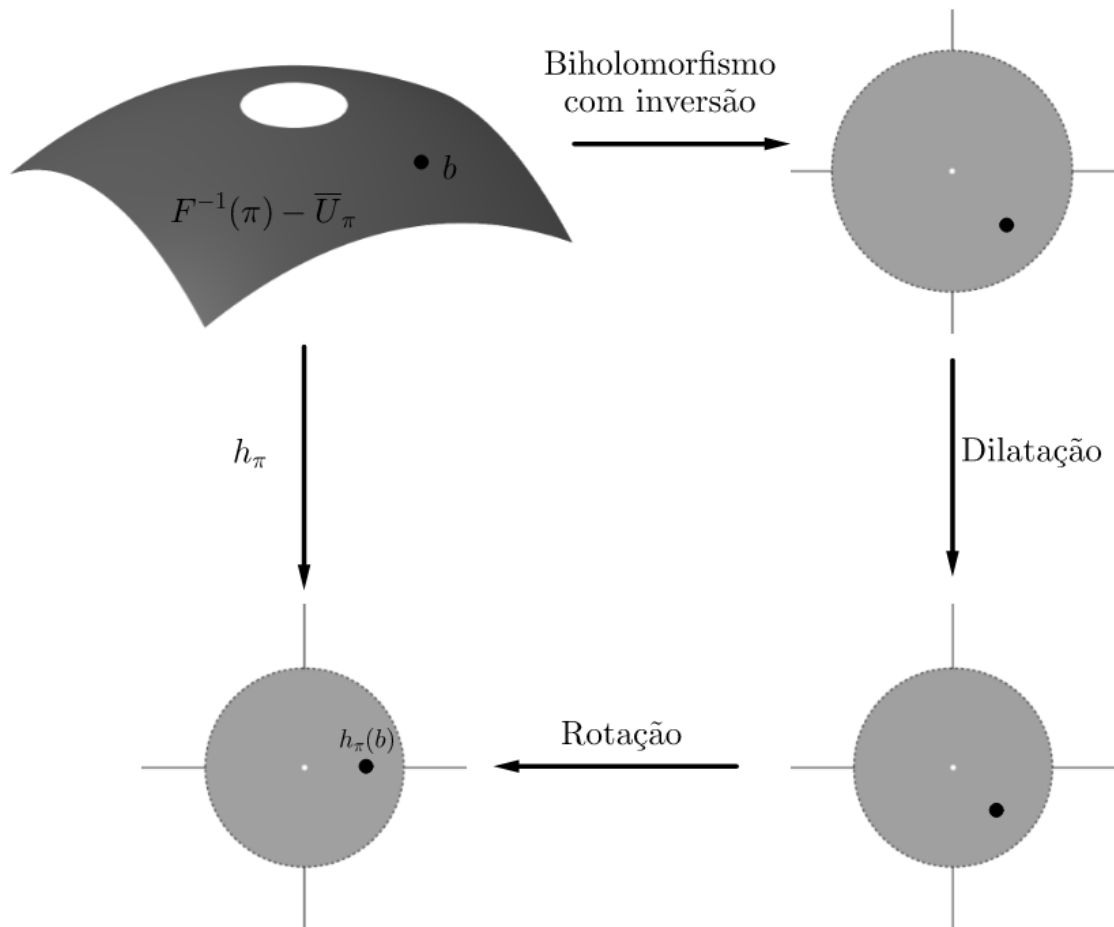


Figura 2.13: Ação de  $h_\pi$

Para o próximo lema, é importante estabelecer algumas notações e fazer algumas recordações.

Primeiro, para  $p \in M^2$ , defina  $\pi_p = T_p M^2$ , isto é, o espaço tangente de  $M^2$  em  $p$ ; observe que como este é um subespaço vetorial de dimensão 2 de  $\mathbb{R}^n$ , ele pode ser naturalmente identificado com um elemento de  $G_2(\mathbb{R}^n)$ .

Relembre que o gradiente riemanniano  $\nabla u_{\pi_p}(b)$ , onde  $u_{\pi_p}$  é a função dada pelo Lema 2.12, é o vetor no espaço tangente  $T_b(F^{-1}(\pi_p))$  que representa, no sentido de produto interno, o diferencial  $d(u_{\pi_p})_b : T_b(F^{-1}(\pi_p)) \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,  $g_{\pi_p}(\nabla u_{\pi_p}(b), v) = d(u_{\pi_p})_b(v)$ ,  $v \in T_b(F^{-1}(\pi_p))$ .

**Lema 2.14.** A aplicação  $s : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$s(p) = dF_b \nabla u_{\pi_p}(b), \quad p \in M^2,$$

define um campo vetorial em  $M^2$  que nunca se anula.

*Demonstração.* Dado  $p \in M^2$ , vale  $\nabla u_{\pi_p}(b) \in T_b(F^{-1}(\pi_p))$ . Lembre que  $b \in F^{-1}(\pi_p)$ , pois  $F(b) = q = 0$ . Assim, obtém-se

$$s(p) = dF_b \nabla u_{\pi_p}(b) \in dF_b(T_b(F^{-1}(\pi_p))) = T_{F(b)}(F(F^{-1}(T_p M^2))) = T_0 T_p M^2 \approx T_p M^2,$$

isto é,  $s$  define um campo vetorial sobre  $M^2$ . Como  $\nabla u_{\pi_p}(b) \neq 0$  pelo Lema 2.12 e  $dF_b$  é um isomorfismo por  $F$  ser um difeomorfismo local, segue da definição de  $s$  que tal campo nunca se anula.  $\square$

## 5 Demonstrando que o campo vetorial é contínuo

Esta seção dedica-se a finalizar a demonstração do Teorema 2.7. Para tanto, será provada a continuidade do campo vetorial  $s$  definido no Lema 2.14. A demonstração baseia-se na teoria geral de equações diferenciais parciais elípticas e o Teorema de Bôcher (Lema 2.11).

Para esta demonstração, Xavier faz uso de subsequências; isto é, dado  $z \in M^2$ , seja  $\{z_k\}$  uma sequência tal que  $z_k \rightarrow z$ . Então, para provar a continuidade de  $s$ , basta provar que existe uma subsequência  $z_{k_l}$  tal que

$$s(z_{k_l}) = dF_b \nabla u_{\pi_{k_l}}(b) \rightarrow dF_b \nabla u_{\pi_z}(b) = s(z). \quad (2.3)$$

A estratégia para concluir este objetivo é a seguinte: primeiro, faz-se um pullback das funções  $u_{\pi_{z_k}}$  para  $F^{-1}(\pi_z)$ . Assim, com argumentos de compacidade para famílias de funções harmônicas positivas, tomam-se limites  $C^k$  sobre subconjuntos compactos de  $F^{-1}(\pi_z)$  dos pullbacks  $u_{\pi_{z_k}}$  ao longo de subsequências adequadas, para obter uma função harmônica  $\hat{u}_{\pi_z}$  que, com alguns argumentos juntos ao teorema de Bôcher, vê-se que ela satisfaz as hipóteses do Lema 2.12, donde, pela unicidade, vale  $\hat{u}_{\pi_z} = u_{\pi_z}$ . Em particular,  $\nabla \hat{u}_{\pi_z}(b) = \nabla u_{\pi_z}(b)$  e então (2.3) estaria satisfeita.

A dificuldade por trás desta estratégia mora no fato de que não há uma maneira natural de fazer o pullback, isto é, não existe uma aplicação globalmente definida  $F^{-1}(\pi_z) \rightarrow F^{-1}(\pi_{z_k})$  que permita o pullback. A ideia para driblar isto é utilizar o fato de que as superfícies  $F^{-1}(\pi_{z_k})$  convergem  $C^r$ -uniformemente sobre conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  a  $F^{-1}(\pi_z)$ , donde, para  $k$  suficientemente grande, e para cada compacto  $K \subset F^{-1}(\pi_z)$ , existem injeções naturais  $K \rightarrow F^{-1}(\pi_{z_k})$ .

As injeções citadas acima permitem o pullback das funções  $u_{\pi_{z_k}}$  sobre os conjuntos compactos  $K = K_m$  de uma exaustão de  $F^{-1}(\pi_z)$  e, com alguns argumentos a mais, trabalhando sobre os conjuntos compactos da exaustão, um de cada vez, extrai-se subsequências convergentes de subsequências, e assim por diante, donde o esquema acima pode ser implementado.

Prosseguindo para a demonstração formal do Teorema 2.7, para facilitar as notações, a partir daqui denotar-se-á  $\pi_k = \pi_{z_k}$  e  $\pi = \pi_z$ .

Primeiro, é feita uma exaustão crescente  $\{P_m\}$  enumerável de  $\mathbb{R}^n$  (domínio de  $F$ ) com bolas fechadas (logo compactas). Pede-se, apenas, que  $P_1$  tenha o raio suficientemente grande para que a componente  $K_1$  de  $P_1 \cap F^{-1}(\pi)$  contenha  $a$  e  $b$ . Com isto, para todo  $m$  os pontos  $a$  e  $b$  moram na mesma componente  $K_m$  de  $P_m \cap F^{-1}(\pi)$ .

Por compacidade, é possível cobrir  $P_1$  com finitas bolas abertas, suficientemente pe-

quenas para que  $F$  leve cada uma difeomorficamente sobre suas respectivas imagens. Considere o número de Lebesgue ([20], página 58)  $5\delta$  para esta cobertura; pela compacidade de  $K_1$ , é possível escolher pontos  $w_1, \dots, w_m$  na componente  $K_1$  de maneira que bolas de raio  $\delta$  centradas nestes pontos a cubram por completo.

Em seguida, escolhe-se uma sequência  $\{S_k\}$  de transformações ortogonais que convirja para a identidade de  $\mathbb{R}^n$  e que satisfaçam a condição de que a  $k$ -ésima transformação leve  $\pi$  em  $\pi_k$ .

Agora, fixado  $z \in K_1$ , ele pertence a alguma bola  $B(w_j; \delta)$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Como  $F$  é um homeomorfismo quando restrita à bola  $B(w_j; \delta)$ , existe  $\varepsilon > 0$  de tal forma que  $B(F(z); \varepsilon) \subset F(B(w_j; \delta))$ . Da convergência uniforme no compacto, existe  $N$  suficientemente grande para que quando  $k \geq N$  valha  $d(S_k(F(z)), F(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Agora, pela continuidade uniforme de  $F$  em  $K_1$ , é possível tomar  $\delta'$  de maneira que se  $d(x, y) < \delta'$ , vale  $d(F(x), F(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; como a transformação é ortogonal, se  $y$  é tal que  $d(y, z) < \delta'$ , para  $k \geq N$ ,

$$\begin{aligned} d(S_k(F(y)), F(z)) &\leq d(S_k(F(y)), S_k(F(z))) + d(S_k(F(z)), F(z)) \\ &\leq d(F(y), F(z)) + d(S_k(F(z)), F(z)) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

isto é,  $S_k(F(y)) \in B(F(z); \varepsilon) \subset F(B(w_j; \delta))$ ,  $z \in K_1 \cap B(w_j; \delta)$  e  $d(y, z) < \delta'$ . Observe que o número  $\varepsilon$  depende de  $z$ , e como  $N$  e  $\delta'$  dependem de  $\varepsilon$ , todos estes objetos dependem, fundamentalmente, de  $z$ . Adicione, assim, o subíndice a todos estes objetos que dependem de  $z$  e que são definidos da mesma forma como acima; por exemplo:  $\delta' = \delta'_z$ . Coloque  $\bar{\delta}_z = \min\{r_z, \delta'_z\}$ , onde, se  $z \in B(w_j; \delta)$  para algum  $j$ ,  $r_z$  é um raio tal que  $B(z; r_z) \subset B(w_j; \delta)$ . Está claro que  $K_1 \subset \cup_{z \in K_1} B(z; \bar{\delta}_z)$ , donde, por compacidade, escolhem-se finitos  $w'_1, \dots, w'_r \in K_1$  com a propriedade

$$K_1 \subset B(w'_1; \bar{\delta}_1) \cup \dots \cup B(w'_r; \bar{\delta}_r), \quad (2.4)$$

onde  $\bar{\delta}_i = \bar{\delta}_{w'_i}$  (essa simplificação será feita a todos os objetos que dependem de  $w'_i$ ).

Escolha  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$  e defina  $N$  como o associado a este  $\varepsilon$ . Portanto, dado  $z \in K_1$ , ele pertence a alguma das bolas em (2.4), e então, se  $k \geq N$ , pelo exposto acima vale

$$S_k(F(z)) \in F(\bar{B}(w_j; \delta)),$$

se  $z \in B(w_j; \delta) \cap K_1$ , para todo  $1 \leq j \leq m$ .

Com isto, é possível definir, para  $k \geq N$ , aplicações  $\phi_k : K_1 \rightarrow F^{-1}(\pi_k) \subset \mathbb{R}^n$ , dada por

$$\phi_k(z) = \left( (F|_{\bar{B}(w_j; \delta)})^{-1} \circ S_k \circ F \right) (z),$$

com  $z \in K_1 \cap B(w_j; \delta)$ , para algum  $1 \leq j \leq m$ . Observe que, a partir desta definição,

precisa-se demonstrar que  $\phi_k$  não depende da escolha de  $w_j$ . Para tanto, note que, como o número de Lebesgue da cobertura é  $5\delta$ , se  $B(w_j; \delta) \cap B(w_i; \delta) \neq \emptyset$ , a distância entre dois pontos em  $B(w_j; \delta) \cup B(w_i; \delta)$  é, no máximo,  $4\delta$ , que é menor que o número de Lebesgue. Da maneira como foi definida a cobertura, conclui-se que  $F$  restrita a  $\overline{B}(w_j; \delta) \cup \overline{B}(w_i; \delta)$  é um difeomorfismo; em particular, injetiva.

Suponha agora que

$$\phi_k^i(z) = \left( (F|_{\overline{B}(w_i; \delta)})^{-1} \circ S_k \circ F \right) (z),$$

e

$$\phi_k^j(z) = \left( (F|_{\overline{B}(w_j; \delta)})^{-1} \circ S_k \circ F \right) (z),$$

onde  $z \in B(w_i; \delta) \cap K_1$  e  $z \in B(w_j; \delta) \cap K_1$ . Tem-se  $F(\phi_k^i(z)) = S_k(F(z)) = F(\phi_k^j(z))$ , e daí, pelo parágrafo anterior, vale  $\phi_k^i(z) = \phi_k^j(z) = \phi_k(z)$ , e a aplicação está bem definida.

Trocando  $S_k$  por  $Id + (S_k - Id)$ , onde  $Id$  é a identidade em  $\mathbb{R}^n$ , vem

$$\phi_k(z) = z + \left( (F|_{\overline{B}(w_j; \delta)})^{-1} \circ (S_k - Id) \circ F \right) (z) \in F^{-1}(\pi_k), \quad z \in K_1.$$

A segunda parcela da soma à direita vai uniformemente a zero, assim como qualquer derivada finita, quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, para  $k$  suficientemente grande,  $\phi_k$  é uma pequena perturbação da identidade.

Ainda, para  $x, y \in K_1$ , com  $k$  suficientemente grande, valem

$$\left| \left( (F|_{\overline{B}(w_j; \delta)})^{-1} \circ (S_k - Id) \circ F \right) (x) \right| < \frac{|x - y|}{4}$$

e

$$\left| \left( (F|_{\overline{B}(w_i; \delta)})^{-1} \circ (S_k - Id) \circ F \right) (y) \right| < \frac{|x - y|}{4}.$$

Daí, tem-se

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - \phi_k(y)| &\geq |x - y| - \left| \left( (F|_{\overline{B}(w_j; \delta)})^{-1} \circ (S_k - Id) \circ F \right) (x) \right| \\ &\quad - \left| \left( (F|_{\overline{B}(w_i; \delta)})^{-1} \circ (S_k - Id) \circ F \right) (y) \right| \\ &\geq \frac{|x - y|}{2}, \end{aligned}$$

$1 \leq i, j \leq m$ . Assim, o seguinte lema é válido.

**Lema 2.15.** *Para todo  $k$  suficientemente grande, a aplicação  $\phi_k : F^{-1}(\pi) \supset K_1 \rightarrow F^{-1}(\pi_k)$  definida acima é um difeomorfismo local injetor que satisfaz  $\phi_k(b) = b$ .*

(Observe que as aplicações  $\phi_k$ , para  $k$  suficientemente grande, são as injeções que possibilitarão o pullback desejado.)

Fixando coordenadas cartesianas  $(x, y)$  em  $\pi$ , seja  $D \subset \pi$  o disco unitário aberto centrado em  $0 \in \pi$ .

Relembre as definições de  $U_\pi$  e  $T_\pi$  em (2.1); seja  $\Psi : \bar{D} \rightarrow K_1 - U_\pi$  uma injeção suave que satisfaça

- (i)  $T_\pi \cap \Psi(\bar{D}) = \emptyset$ ;
- (ii)  $b \in \Psi(\bar{D})$ .

Com isto, e lembrando que  $\phi_k(z) \rightarrow z$  uniformemente,  $z \in K_1$ , é possível definir os pullbacks

$$\xi_k = \phi_k \circ \Psi : \bar{D} \rightarrow F^{-1}(\pi_k),$$

que, para  $k$  suficientemente grande, satisfazem

- (iii)  $\xi_k(\bar{D}) \subset F^{-1}(\pi_k) - \bar{U}_{\pi_k}$ ;
- (iv)  $d(T_{\pi_k}, \xi_k(\bar{D})) \geq c_1 > 0$ .

Observe que a distância entre  $T_{\pi_k}$  e  $\xi_k(\bar{D})$  é uniformemente limitada abaixo por uma constante que independe de  $k$ .

Assim, restringindo as funções  $u_{\pi_k}$  ao conjunto  $\xi_k(\bar{D})$ , por (iv), por essa restrição ser uma função harmônica positiva, e como  $\xi_k \rightarrow \Psi$  uniformemente, a desigualdade de Harnack ([35], página 199) se aplica a  $\xi_k(\bar{D})$ , obtendo

$$\max_{\xi_k(\bar{D})} u_{\pi_k} \leq c_2 \min_{\xi_k(\bar{D})} u_{\pi_k},$$

onde  $c_2 > 0$  é uma constante que independe de  $k$ . Mais ainda, como  $u_{\pi_k}(b) = 1$ , segue de (ii) e da desigualdade acima que

$$\max_{\xi_j(\bar{D})} u_{\pi_k} \leq c_2.$$

Em outras palavras, a restrição de  $u_{\pi_k}$  a  $\xi_k(\bar{D})$  é  $C^0$ -limitada por  $c_2$ , que é independente de  $k$ .

Ainda mais uma estimativa é utilizada; esta se encontra em [35], página 93. Juntando as duas estimativas, garante-se que as primeira e segunda derivadas de  $u_{\pi_k}$ , relativas às coordenadas de  $\xi_k$ , são localmente uniformemente limitadas. Portanto, as funções  $u_{\pi_k}$  e suas primeiras derivadas formam duas famílias equicontínuas. Logo, é possível extrair uma subsequência de  $\{u_{\pi_k}\}$  que converge localmente uniformemente na norma  $C^1$ . Visto que  $\xi_k \rightarrow \Psi$  uniformemente, um argumento de regularidade elíptica garante que a função limite é  $\Delta_\pi$ -harmônica em  $\Psi(\bar{D})$ .

Para a próxima etapa, precisa-se cobrir  $K_1 - \bar{U}_\pi$  com enumeráveis conjuntos da forma  $\Psi_n(\bar{D})$ , onde a aplicação

$$\Psi_n : \bar{D} \rightarrow K_1 - \bar{U}_\pi$$

tem o mesmo papel que  $\Psi$  tinha no exposto anteriormente, isto é, as funções  $\Psi_n$  satisfazem (i) e (ii).

Começando com  $\Psi_1 = \Psi$ , o texto acima mostra como extrair uma subsequência de funções harmônicas que converge  $C^1$ -uniformemente sobre  $\Psi_1(\overline{D})$ . Daí, toma-se a segunda função  $\Psi_2$ , e o ponto de partida são os inteiros que são índices da subsequência obtida anteriormente. Com os mesmos argumentos utilizados para obter esta subsequência, obtém-se uma subsequência desta última, que converge  $C^1$ -uniformemente sobre  $\Psi_2(\overline{D})$ . Observe que os conjuntos  $\Psi_n(\overline{D})$ , apesar de se manterem longe do bordo  $T_\pi$ , vão se aproximando dele conforme  $n$  cresce.

Iterando o processo de obter subsequências, tem-se uma sequência dupla; pelo argumento da diagonal, a subsequência de funções harmônicas encontrada será tal que convergirá localmente uniformemente para uma função harmônica em

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_{n_j}(\overline{D}) = K_1 - \overline{U}_\pi.$$

Tomando a sequência obtida como ponto de partida, é possível trocar  $K_1$  pela componente  $K_2$  de  $P_2 \cap F^{-1}(\pi)$  que contém  $b$ , de maneira a obter uma subsequência que convirja localmente uniformemente em  $K_2 - \overline{U}_\pi$ .

Visto que  $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$  é uma exaustão de  $F^{-1}(\pi)$ , repetindo o argumento para os compactos  $K_3, K_4, \dots$ , de maneira a obter subsequências das subsequências anteriores, e usando o argumento da diagonal mais uma vez, obtém-se uma função harmônica  $\hat{u}_\pi$  que satisfaz

$$\hat{u}_\pi : F^{-1}(\pi) - \overline{U}_\pi \rightarrow [0, \infty), \quad \Delta_\pi \hat{u}_\pi = 0, \quad \hat{u}_\pi(b) = 1. \quad (2.5)$$

Agora só falta estender esta função para o bordo  $T_\pi$  de maneira contínua. O lema a seguir diz como é esta extensão.

**Lema 2.16.** *A função harmônica  $\hat{u}_\pi$  definida acima se estende continuamente para o conjunto  $F^{-1}(\pi) - U_\pi$  definindo  $\hat{u}_\pi = 0$  em  $T_\pi$ .*

A demonstração deste lema consiste em estudar a oscilação das funções contínuas  $u_{\pi_k}$ , considerando-as soluções da equação diferencial parcial elíptica  $Lu = 0$  (elas são  $\Delta_{\pi_k}$ -harmônicas).

Relembre algumas das notações feitas na Seção 4. Seja  $W'$  uma bola no contradomínio de  $F$  tal que  $W' \supset W$ ,  $\partial W' \cap \partial W = \emptyset$ , com uma vizinhança correspondente  $U'$  no domínio de  $F$  com  $a \in U \subset \overline{U} \subset U'$  tal que  $F : U' \rightarrow W'$  é um difeomorfismo. Daí, defina

$$T'_{\pi_k} = \partial(U' \cap F^{-1}(\pi_k)), \quad T'_\pi = \partial(U' \cap F^{-1}(\pi)).$$

Para  $k$  suficientemente grande fixado,  $T_{\pi_k}$  e  $T'_{\pi_k}$  são os bordos interno e externo, respectivamente, de um anel fechado  $A_{\pi_k} \subset F^{-1}(\pi_k)$ . O mesmo vale para  $T_\pi$  e  $T'_\pi$ , segundo o anel  $A \subset F^{-1}(\pi)$ .

Na interseção do anel  $A_{\pi_k} \subset F^{-1}(\pi_k)$  com uma bola de raio  $R$  a oscilação das funções  $u_{\pi_k}$  é limitada por uma constante que depende de  $R$ . Visto que  $u_{\pi_k}$  se anula no bordo



interior do anel, a função  $u_{\pi_k}$  é limitada por esta mesma constante no interior da interseção do anel com a bola de raio  $R$ . Como a função  $\hat{u}_\pi$  é o limite uniforme local de uma subsequência de  $\{u_{\pi_k}\}$ , ela também é limitada por esta mesma constante.

Fazendo  $R$  ir a zero, conclui-se que  $\hat{u}_\pi(x)$  vai a zero uniformemente quando  $x$  no anel se aproxima da borda interior  $T_\pi$ , que é o resultado desejado.

Assim, de (2.5) e do Lema 2.16, vem

$$\hat{u}_\pi : F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi \rightarrow (0, \infty), \quad \Delta_\pi \hat{u}_\pi = 0, \quad \hat{u}_\pi(b) = 1, \quad \lim_{p \rightarrow T_\pi} \hat{u}_\pi(p) = 0. \quad (2.6)$$

(A função acima é estritamente positiva pelo princípio do máximo.)

Agora, observe que  $F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi$  é conforme ao disco aberto perfurado  $B - \{0\}$ . Donde, com uma aplicação conforme adequada que leva  $T_\pi$  no bordo do disco unitário, é possível ver  $\hat{u}_\pi$  como uma função harmônica positiva de  $B - \{0\}$  na reta.

Pelo Teorema de Bôcher, esta função composta é da forma  $u(z) = v(z) - c \log |z|$ , onde  $c$  é uma constante não negativa e  $v$  é uma função harmônica em  $B$ . Caso fosse  $c = 0$ , valeria  $\hat{u}_\pi(x) = v(x)$  harmônica em  $B$ . Com uma composição adequada, pode-se passar para uma função correspondente a  $\hat{u}_\pi$  que é solução do problema de Dirichlet no hemisfério norte da esfera de Riemann. Visto que a função nula também é solução, a unicidade garante que  $\hat{u}_\pi$  é nula, contradizendo  $\hat{u}_\pi(b) = 1$ .

Isto diz que  $\hat{u}_\pi$  tem uma singularidade logarítmica no zero e se anula no bordo de  $B$ . Desfazendo a composição que trouxe  $\hat{u}_\pi$  para o disco, a conclusão é que

$$\hat{u}_\pi(p) \rightarrow \infty, \quad |p| \rightarrow \infty, \quad p \in F^{-1}(\pi) - \bar{U}_\pi,$$

e esta convergência é uniforme.

Este fato somado com (2.6) mostra que  $\hat{u}_\pi$  satisfaz todos os itens do Lema 2.12. Pela unicidade, vem  $\hat{u}_\pi = u_\pi$ .

A convergência nos argumentos acima é, na verdade,  $C^k$  para todo  $k \geq 1$ . Isto diz que, dada uma sequência  $\{\pi_k\}$  que converge a  $\pi$ , existe uma subsequência  $\{\pi_{k_l}\}$  que satisfaz

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \nabla u_{\pi_{k_l}}(b) = \nabla u_\pi(b), \quad (2.7)$$

onde os gradientes são calculados sobre as respectivas superfícies mas vistos como vetores em  $\mathbb{R}^n$ .

Suponha, então, que exista uma subsequência  $\{u_{\pi_{k_j}}\}$  que não satisfaça (2.7), isto é, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|\nabla u_{\pi_{k_j}}(b) - \nabla u_\pi(b)| \geq \varepsilon$ . Mas então, mesmo valendo  $\pi_{k_j} \rightarrow \pi$  — por ser uma subsequência de uma sequência convergente —, não é verdade que existe uma subsequência que satisfaça (2.7). Conclui-se que toda subsequência de  $\{\nabla u_{\pi_k}(b)\}$  converge ao gradiente  $\nabla u_\pi(b)$ ; logo, vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla u_{\pi_k}(b) = \nabla u_\pi(b)$$

e a continuidade de  $s$  está demonstrada. Com a continuidade, a contradição se estabelece, finalizando o Teorema 2.7.

## 6 Demonstração do Teorema 5.5

Esta demonstração se assemelha muito à do Teorema 2.7. Por este motivo, quando possível, todas as notações serão mantidas, e serão indicadas apenas as mudanças em cada argumento.

Suponha que existem três pontos distintos,  $p_1, p_2$  e  $p_3$  que são levados em  $q = 0$  por  $F$ . Não há perda de generalidade em supor que  $q = 0$ , basta compor uma translação.

Seja  $W$  uma vizinhança euclidiana de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  de maneira que as vizinhanças  $U_1$  e  $U_2$  de  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, são levadas difeomorficamente sobre  $W$ . Denote por  $U_1^\pi$  e  $U_2^\pi$  as interseções destas vizinhanças com  $F^{-1}(\pi)$ , sendo  $\pi$  um subespaço vetorial de dimensão dois que é paralelo a algum plano tangente de  $M^2$ ; defina também  $T_i^\pi = \partial U_i^\pi$ ,  $i = 1, 2$ .

Pelo fato de que  $F^{-1}(\pi)$  é conformalmente uma esfera perfurada, e singularidades de funções harmônicas limitadas são removíveis, pode-se argumentar que existe uma única função harmônica limitada  $u_\pi$  no complemento do fecho de  $U_1^\pi \cup U_2^\pi$  em  $F^{-1}(\pi)$  que estende continuamente para  $T_1^\pi \cup T_2^\pi$  e satisfaz  $u_\pi = 0$  em  $T_1^\pi$  e  $u_\pi = 1$  em  $T_2^\pi$ . Todo este argumento, inclusive o problema de Dirichlet, também se aplica quando  $F^{-1}(\pi)$  é conforme a uma superfície riemanniana conexa e compacta de gênero positivo perfurada finitas vezes.

Fazendo  $\pi_p = T_p M^2$ , é possível definir uma aplicação  $s : M^2 \rightarrow T_p M^2$  semelhante à aplicação utilizada na demonstração do Teorema 2.7, dada por

$$s(p) = dF_{p_3} \nabla u_{\pi_p}(p_3).$$

Ela define um campo vetorial tangente em  $M^2$ . Provando que ela é contínua e que nunca se anula, obter-se-á uma contradição com a hipótese de que  $\chi(M^2) \neq 0$ .

A ideia é obter a continuidade com um raciocínio análogo à equação (2.3), onde  $b$  foi substituído por  $p_3$ . Mantendo a mesma notação das seções anteriores, seja  $\{P_n\}$  uma exaustão de  $\mathbb{R}^n$  por conjuntos compactos. Seja  $K_1$  a componente conexa de  $P_1 \cap (F^{-1}(\pi) - \overline{U_1^{\pi_z} \cup U_2^{\pi_z}})$  que contém  $p_3$ .

Pelo mesmo raciocínio já trabalhado nas seções prévias, pode-se construir  $\phi_k : K_1 \rightarrow F^{-1}(\pi_k)$  aplicações que satisfazem o análogo do Lema 2.15. Também, existe uma injeção suave

$$\Psi : \overline{D} \rightarrow K_1 - (U_1^{\pi_z} \cup U_2^{\pi_z})$$

tal que  $\Psi(\overline{D})$  é disjunta dos bordos  $T_1^{\pi_z}, T_2^{\pi_z}$ , e  $\xi_k = \phi_k \circ \Psi$  satisfaz  $\xi_k(\overline{D}) \subset F^{-1}(\pi) - \overline{(U_1^{\pi_z} \cup U_2^{\pi_z})}$ . Também,  $d(T_i^{\pi_k}, \xi_k(\overline{D})) > c_1 > 0$ ,  $i = 1, 2$ , onde a constante  $c_1$  é indepen-

dente de todo  $k$  suficientemente grande (comparando com a demonstração anterior, vê-se que todas as condições estão de acordo com o trabalho feito anteriormente; donde não há, essencialmente, grandes mudanças).

Pelo princípio do máximo,  $0 \leq u_{\pi_k} \leq 1$  em globalmente. Por uma estimativa no interior do conjunto (também feita na demonstração anterior), é possível extrair uma subsequência de  $\{u_{\pi_k}\}$  de maneira que as funções induzidas convergem localmente uniformemente na norma  $C^1$  para uma função  $\Delta_\pi$ -harmônica em  $\Psi(\overline{D})$ .

Em seguida, cobre-se  $K_1 - \overline{(U_1^{\pi_z} \cup U_2^{\pi_z})}$  com contáveis conjuntos  $\Psi_n(\overline{D})$ , onde  $\Psi_1 = \Psi$  e, para  $n > 1$ ,  $\Psi_n$  tem propriedades similares. O argumento agora segue de acordo com a discussão precedente ao Lema 2.16: toma-se uma subsequência de funções convergentes restrita a um conjunto pequeno e, trocando as componentes de maneira apropriada, expande-se este domínio e extrai-se uma nova subsequência, convergente neste conjunto maior. Observando que os conjuntos formam uma exaustão da pré-imagem  $F^{-1}(\pi)$ , obtém-se uma função  $\Delta_\pi$ -harmônica

$$\hat{u}_\pi : F^{-1}(\pi) - \overline{(U_1^{\pi_z} \cup U_2^{\pi_z})} \rightarrow [0, 1].$$

Novamente por estimativas previamente já feitas, é possível ver que  $\hat{u}_\pi$  estende continuamente aos bordos  $T_1^{\pi_z}$  e  $T_2^{\pi_z}$ , com valores 0 e 1, respectivamente. Pela unicidade da solução do problema de Dirichlet, vale  $\hat{u}_\pi = u_\pi$ , donde (2.3) segue, trocando  $b$  por  $p_3$ . Fica, assim, estabelecida a continuidade da aplicação  $s$ .

Basta agora demonstrar que  $\nabla u_{\pi_p}(p_3) \neq 0$  para todo  $\pi_p, p \in M^2$ . Para isto, observe que os bordos de  $F^{-1}(\pi_p)$  são conformalmente discos perfurados, associados às singularidades removíveis da função harmônica limitada  $u_{\pi_p}$ , e regiões duplamente conexas planares são conformes a anéis circulares, que são não-degenerados no presente contexto por corresponderem ao complemento de  $U_1^{\pi_p} \cup U_2^{\pi_p}$  na compactificação conforme de  $F^{-1}(\pi_p)$ . Assim, precisa-se apenas checar que  $\nabla u$  não se anula quando  $u$  é a função contínua definida no anel fechado  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < a < |z| \leq 1\}$  que é harmônica em seu interior e satisfaz  $u = 0$  e  $u = 1$  nas circunferências dos bordos interior e exterior, respectivamente. Nesta configuração, estas circunferências correspondem a  $T_1^{\pi_p}$  e  $T_2^{\pi_p}$ . Mas a solução deste problema de Dirichlet é dada por

$$u(z) = \frac{\log a - \log |z|}{\log a}.$$

Como  $\nabla u \neq 0$  globalmente,  $s$  é contínua e nunca se anula, donde a contradição se estabelece e a demonstração do Teorema 2.8 se conclui.

## 7 Um teorema geral e a inversão de aplicações polinomiais

É importante enfatizar alguns pontos sobre os teoremas demonstrados e as respectivas provas:

1. Ao invés de equipar o domínio  $\mathbb{R}^n$  de  $F$  com a métrica plana (flat) padrão, as provas podem ser modificadas para permitir que  $F$  esteja definida em qualquer variedade  $N^n$  conexa não-compacta carregando a métrica riemanniana que induz sobre as superfícies  $F^{-1}(\pi)$  o tipo conforme de  $\mathbb{R}^2$  no Teorema 2.7, e de uma esfera perfurada finitas vezes no Teorema 2.8;
2. O fibrado tangente de  $M^2$  foi usado somente para garantir que toda seção contínua de  $s$  (isto é, um campo vetorial) tenha um zero.

Com estes pontos em mente, é possível generalizar um pouco mais os Teoremas 2.7 e 2.8, enunciando um único resultado “abstrato” que contenha ambos. A sua demonstração envolve alguns ajustes nas provas dos teoremas mencionados. Esses ajustes seguem, praticamente, exatamente as demonstrações feitas dos teoremas citados, basta considerar o fibrado vetorial existente por hipótese e a métrica riemanniana que satisfaz a propriedade descrita.

**Teorema 2.17.** *Sejam  $N^n$  uma variedade conexa não-compacta,  $F : N^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo local,  $n \geq 3$ , e  $q$  um ponto da imagem de  $F$ . Assuma a existência de uma métrica riemanniana  $g$  em  $N^n$ , e um fibrado vetorial suave  $T$  para os quais o seguinte segue:*

- (a) *Toda fibra  $\xi$  de  $T$  pertence a  $G_2(\mathbb{R}^n)$  e a superfície  $F^{-1}(q + \xi)$  é conformemente difeomorfa, com respeito à métrica induzida por  $g$ , a uma esfera perfurada  $S^2 - \{p_1, \dots, p_{k(\xi)}\}$ .*
- (b) *Toda seção contínua de  $T$  tem um zero.*

*Então  $F^{-1}(q)$  ou tem um ou tem dois elementos. O primeiro caso se estabelece se  $k(\xi) = 1$  para todo  $\xi$ .*

Note que há uma pequena redundância na afirmação do teorema acima, isto é, a hipótese  $n \geq 3$  segue diretamente de (a) e (b). De fato, se  $n = 2$ , a primeira metade de (a) implica que  $T$  é o fibrado trivial – pois o único elemento de  $G_2(\mathbb{R}^2)$  é o próprio  $\mathbb{R}^2$ , donde  $T$  é constituído por apenas um elemento –, contradizendo (b).

Para recuperar os Teoremas 2.7 e 2.8 do teorema acima, basta tomar  $g$  como a métrica plana (flat) padrão em  $N^n = \mathbb{R}^n$ , e  $T$  como o fibrado tangente de uma esfera mergulhada  $S^2 \subset \mathbb{R}^n$ .

O último resultado desta seção é um critério de invertibilidade em (JC).

**Teorema 2.18.** *Um biholomorfismo local polinomial  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é inversível se, e somente se, para um ponto qualquer  $q \in F(\mathbb{C}^n)$  vale o seguinte: para toda reta complexa contendo  $q$  existe um aberto conexo  $G_l \subset \mathbb{R}^2$  que é homeomorfo a  $F^{-1}(l)$ .*

Devido à natureza polinomial da aplicação, a hipótese é equivalente a perguntar se a pré-imagem de toda reta complexa que passa por  $q$  é uma curva racional conexa, isto é,  $F^{-1}(l)$  deve ser conforme a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  com finitos pontos removidos.

É possível obter o Teorema 2.18 a partir do Teorema 2.17. Para tanto, assuma que a pré-imagem de toda reta complexa  $\pi$  contendo 0 é uma curva racional conexa (como já dito em outro momento, não há perda de generalidade em supor que 0 é um ponto genérico da imagem de  $F$ ).

Munindo  $\mathbb{C}^n$  com a métrica plana (flat) que vem da identificação de  $\mathbb{C}^n$  com o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{2n}$ , qualquer curva complexa não singular  $C \subset \mathbb{C}^n$  terá duas estruturas complexas: uma herdada da variedade complexa  $\mathbb{C}^n$  e outra herdada da métrica riemanniana induzida em  $C$  pela métrica euclidiana padrão em  $\mathbb{C}^n$ . Usando as equações de Cauchy-Riemann e o fato de que a multiplicação por  $i$  induz uma isometria em  $\mathbb{C}^n$  é possível demonstrar que estas duas estruturas complexas coincidem.

As retas complexas que passam por  $q = 0 \in F(\mathbb{C}^n)$  que estão contidas num fixo  $V \subset \mathbb{C}^n$ ,  $V \sim \mathbb{C}^2$ , são as fibras do fibrado de linhas tautológico  $T$  sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Como foi assumido que  $F^{-1}(l)$  é conexo para toda reta complexa  $l \subset V$ , e  $z \in F^{-1}(l)$  sempre que  $F(z) = 0$ , a variedade  $N = F^{-1}(V)$  é também conexa. Por outro lado,  $T$  pode ser visto como um fibrado real de posto dois sobre  $S^2$ , então sob as hipóteses do Teorema 2.18, a condição (a) no Teorema 2.17 vale. Como o número de Euler do fibrado tautológico é  $-1$ , logo diferente de zero, toda seção contínua de  $T$  precisa se anular em algum momento, donde (b) também vale. Assim, segue do Teorema 2.17 que a cardinalidade da fibra  $F^{-1}(0)$  é 1 ou 2.

Felizmente, por razões algébricas, a fibra genérica de um biholomorfismo local polinomial não pode ser 2 ([5], página 294, Teorema 2.1: equivalência (a)  $\iff$  (g)). Portanto,  $\#F^{-1}(0) = 1$ , e como 0 é um ponto genérico da imagem da aplicação  $F$ , ela deve ser injetiva.

Para biholomorfismos locais polinomiais injetividade implica sobrejetividade, e então a prova do Teorema 2.18 se faz completa.

## 8 Uma conjectura na teoria de aproximação

Na ausência de uma prova que biholomorfismos locais polinomiais são injetivos, alguém pode almejar um objetivo menos ambíguo, e tentar colocar a questão no “próximo nível” de dificuldade. Isto é, alguém poderia querer mostrar pelo menos, que sob as hipóteses de (JC), as pré-imagens de *todas as retas complexas são conexas*.

Isto pode ser visto como uma forma “vestigial” de injetividade, pois a injetividade real

diz que a pré-imagem de *todos os pontos* são conexas. Note que, como visto na Seção 2, a pré-imagem de todo hiperplano real é sempre conexo no contexto de (JC).

Entretanto, mesmo o problema mais simples de mostrar que *todas* as retas complexas em  $\mathbb{C}^2$  em uma família de retas paralelas fazem pullback em curvas complexas conexas está em aberto neste momento. Mais precisamente, se  $(f, g) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  é como na conjectura jacobiana então, no melhor que é sabido, é somente conhecido que a curva  $f + c = 0$  é conexa para todos os valores de  $c \in \mathbb{C}$  a menos de uma quantidade finita.

As técnicas utilizadas no artigo, feitas para lidar com um caso menos restritivo de injetividade de difeomorfismos locais, não oferece indicação do porquê (JC) deveria valer. Os argumentos usados, na verdade, dão uma leve sensação de que (JC) pode ser falsa. De fato, a falta potencial de conexidade nas pré-imagens das retas complexas, e a possibilidade de que mesmo se estas curvas complexas fossem conexas elas poderiam ter gênero positivo, aparecem como uma grande pedra de tropeço.

Várias conjecturas foram formuladas ao longo dos anos cuja validade implicaria em (JC). Aqui, em vista dos comentários anteriores, formula-se uma conjectura natural em teoria de aproximação que vai na direção oposta, que, se for verdade, implicaria que (JC) falha, em princípio sem a necessidade de exibir um contraexemplo. O novo ponto de vista é conceitualmente relacionado ao simples fato de que qualquer holomorfo  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  pode ser uniformemente aproximado, sobre qualquer compacto dado, por aplicações polinomiais.

Os enunciados são os que seguem.

**Conjectura** (Jacobiana). *Toda aplicação polinomial  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ , com determinante jacobiano constante diferente de zero é injetiva.*

**Conjectura** (Aproximação polinomial). *Toda aplicação holomorfa  $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ , com determinante jacobiano constante não nulo pode ser uniformemente aproximada sobre subconjuntos compactos por aplicações polinomiais  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  com determinante jacobiano constante não nulo.*

Quando  $n = 1$  as duas afirmações são trivialmente verdadeiras. Para ver o porquê da validade da segunda conjectura, para algum  $n \geq 2$ , implicar que (JC) é falsa, observe que em dimensão finita, se uma sequência de difeomorfismos locais convergem uniformemente sobre compactos a um difeomorfismo local, então a aplicação limite também é injetiva ([18], página 411).

Como a aplicação (obviamente não injetora)

$$G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, G(z_1, z_2) = (e^{z_1}, z_2 e^{-z_1}),$$

tem determinante jacobiano um (semelhantemente a

$$G(z_1, \dots, z_n) = (e^{z_1}, z_2 e^{-z_1}, z_3, \dots, z_n)$$

quando  $n \geq 3$ ), o rabo da sequência hipotética de biholomorfismos locais polinomiais convergindo uniformemente a  $G$  sobre uma bola contendo um par de pontos com a mesma imagem sob  $G$  conteria necessariamente aplicações não injetivas, o que contradiria (JC).

---

## Referências Bibliográficas

- [1] M.P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
- [2] J.B. CONWAY, *Functions of one complex variable I*, Graduate texts in Mathematics, Second Edition, Springer, (1978).
- [3] F.W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate texts in Mathematics, Springer edition, (1983).
- [4] F. XAVIER, *Conformal geometry, Euler numbers, and global invertibility in higher dimensions*, arXiv:2002.12884v1.
- [5] H. BASS; E. H. CONNELL; D. WRIGHT, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), no. 2, 287–330.
- [6] A. VAN DEN ESSEN, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. xviii+329 pp.
- [7] J. HADAMARD, *Sur les transformations ponctuelles*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 34 (1906) , pp. 71–84.
- [8] O. H. KELLER, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. f. Mathematik und Physik 47, 299–306 (1939).
- [9] S. SMALE, *Mathematical problems for the next century*, The Mathematical Intelligencer volume 20, 7–15 (1998).
- [10] S. PINCHUK, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Mathematische Zeitschrift volume 217, 1–4 (1994).
- [11] L. A. CAMPBELL, *The Asymptotic Variety of a Pinchuk Map as a Polynomial Curve*, Applied Mathematics Letters, Volume 24, Issue 1, January 2011, Pages 62–65.
- [12] F. FERNANDES, *A new class of non-injective polynomial local diffeomorphisms on the plane*, arXiv:2003.10226v1.



- [13] J. GWOŹDZIEWICZ, *The Real Jacobian Conjecture for polynomials of degree 3*, Ann. Polon. Math. 76 (2001), 121–125.
- [14] F. BRAUN; J. R. DOS SANTOS FILHO, *The real jacobian conjecture on  $\mathbb{R}^2$  is true when one of the components has degree 3*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 26 (2010), 75–87.
- [15] F. BRAUN; B. ORÉFICE-OKAMOTO, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in  $\mathbb{R}^2$* , J. Math. Anal. Appl. 443 (2016), 688–706.
- [16] W. MASSEY, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace & World, 1967.
- [17] F. BRAUN; L. R. G. DIAS; J. VENATO-SANTOS, *A counterexample to a conjecture of Nollet and Xavier*, Aceito para publicação em Proc. Amer. Math. Soc., 2019.
- [18] B. SMYTH; F. XAVIER, *Injectivity of Local Diffeomorphisms from Nearly Spectral Conditions*, Journal of Differential Equations 130, 406–414 (1996).
- [19] A. BAILYNICKI-BIRULA; M. ROSENLICHT, *Injective Morphisms of Real Algebraic Varieties*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 13, No. 2 (1962), pp. 200–203.
- [20] R. T. DA SILVA, *Introdução à Geometria Diferencial e à Análise Complexa*, <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/14023>.
- [21] R. B. ASH; W. P. NOVINGER, *Complex Variables*, 2004.
- [22] J. H. HUBBARD, *Teichmüller Theory And Applications To Geometry, Topology, And Dynamics. Volume 1*, Matrix Editions, 2006.
- [23] H. P. DE SAINT-GERVAIS, *Uniformisation des surfaces de Riemann: retour sur un théorème centenaire*, ENS Éditions, 2010.
- [24] R. FESSLER, *A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe Stability Conjecture and a generalization*, Ann. Polon. Math. 62 (1995), 45-75.
- [25] D. GALE, H. NIKAIIDÔ, *The Jacobian matrix and global univalence of mappings*, Math. Ann. 159 (1965), 81-93.
- [26] W. H. MEEKS, H. ROSENBERG, *The uniqueness of the helicoid*, Annals of Math., 161, (2005), 727-758.
- [27] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer, (1977).
- [28] J. W. MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, (1965).

- 
- [29] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate texts in Mathematics, Second Edition, Springer, (2012).
- [30] S. S. CHERN, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 771-782.
- [31] J. JOST, *Compact Riemann surfaces, An Introduction to Contemporary Mathematics*, Universitext, Third Edition, Springer, (2006).
- [32] P. S. ALEKSANDROV, *Combinatorial Topology*, Graylock Press, Volume 1, (1956).
- [33] S. AXLER, P. BOURDON, W. RAMEY, *Harmonic Function Theory*, Graduate texts in Mathematics, Second Edition, Springer, (2001).
- [34] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, Boston, (1992).
- [35] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-verlag (1983).