



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

ALÍCIA MUNHÓZ FRANCO DE CAMARGO

**Métodos Numéricos para Integrais: um estudo numérico da ordem
de convergência**

Sorocaba

2022

ALÍCIA MUNHÓZ FRANCO DE CAMARGO

**Métodos Numéricos para Integrais: um estudo numérico da ordem
de convergência**

Monografia apresentada ao Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba, para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Graciele P. Silveira

Sorocaba

2022

Camargo, Alícia Munhóz Franco de

Métodos Numéricos para Integrais: um estudo numérico da ordem de convergência / Alícia Munhóz Franco de Camargo -- 2022.
71f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Graciele P. Silveira
Banca Examinadora: Sadao Massago, Raphael de Oliveira Garcia
Bibliografia

1. Métodos Numéricos. 2. Regra dos Trapézios. 3. Regra 1/3 de Simpson.. I. Camargo, Alícia Munhóz Franco de.
II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 6/2022/CCML-So/CCTS

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ALÍCIA MUNHÓZ FRANCO DE CAMARGO

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INTEGRAIS: UM ESTUDO NUMÉRICO DA ORDEM DE CONVERGÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 30 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientadora	Profa. Dra. Graciele P. Silveira
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Sadao Massago
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia



Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago, Docente**, em 03/10/2022, às 19:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira, Docente**, em 03/10/2022, às 19:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0826823** e o código CRC **B81F4CCF**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.035108/2022-75

SEI nº 0826823

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter-me possibilitado essa conquista do encerramento deste ciclo. Agradeço aos meus pais Rosemeire Munhóz Franco de Camargo e Vanderlei Franco de Camargo e ao meu irmão Alan Munhóz Franco de Camargo, pelo apoio incondicional e incentivo que me possibilitaram alcançar esta conquista.

Agradeço a todos os professores que contribuíram com a construção do meu aprendizado. Em especial, agradeço a Dra. Graciele Paraguaia Silveira, a qual estive presente desde o início da minha vida acadêmica e pela qual possuo grande admiração. Sou grata pela ajuda e paciência durante o processo de desenvolvimento deste trabalho e pelos ensinamentos.

Agradeço aos professores Sadao Massago e Raphael de Oliveira Garcia por participarem da banca de defesa deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Por fim, agradeço à instituição UFSCar - Campus Sorocaba por ter proporcionado um ambiente livre e enriquecedor para a minha formação social, acadêmica e profissional.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) traz como tema central a integração numérica. O objetivo principal foi estudar dois métodos, à saber, Regra dos Trapézios e Regra 1/3 de Simpson. Para isto, exemplos foram inicialmente resolvidos de modo analítico, à partir da utilização de técnicas clássicas de integração e, em seguida, foram também resolvidos numericamente usando os métodos citados. Além disso, um estudo numérico de cada método foi proposto, com o intuito de verificar de maneira prática a ordem dos erros cometidos nas aproximações. As implementações computacionais foram elaboradas via planilhas eletrônicas. Os resultados mostraram a eficiência dos métodos numéricos para o cálculo de integrais, especialmente se aumentar a quantidade de subintervalos considerados nas discretizações.

Palavras-chaves: Integral. Métodos Numéricos. Regra dos Trapézios. Regra 1/3 de Simpson.

ABSTRACT

The present academic work has numerical integration as its central subject. The main objective was to study both the Trapezoidal Rule and Simpson's 1/3 Rule. To achieve that, examples were analytically solved at first, using classical integration techniques, and after that, solved numerically using the aforementioned methods. Besides that, a numerical study of each method was proposed, in order to practically verify the order of the errors in the approximations. The computational implementations were made on electronic spreadsheets. The results show the efficiency of numerical methods for calculating integrals, especially if the amount of subintervals taken in the discretizations is increased.

Keywords: Integration. Numerical methods. Trapezoidal Rule. Simpson's 1/3 Rule.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do trapézio formado abaixo da função $f(x)$	36
Figura 2 – Análise de n trapézios formados abaixo da função $f(x)$	37
Figura 3 – Aplicabilidade da Regra dos Trapézios Repetida.	38
Figura 4 – Função $f(x)$ com n pontos.	38
Figura 5 – Função $f(x)$ com n pontos.	40
Figura 6 – Função $f(x)$, $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ comparadas a $p_2(x)$	41
Figura 7 – Gráfico de $\ln E \times \ln h$	50
Figura 8 – Gráfico de $\ln E \times \ln h$	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$	46
Tabela 2 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$	47
Tabela 3 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$	47
Tabela 4 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$	48
Tabela 5 – Comparação entre h e E	49
Tabela 6 – Comparação entre $\ln E$ e $\ln h$	50
Tabela 7 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$	51
Tabela 8 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$	52
Tabela 9 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$	52
Tabela 10 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$	53
Tabela 11 – Comparação entre h e E	54
Tabela 12 – Comparação entre $\ln E$ e $\ln h$	54
Tabela 13 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$	57
Tabela 14 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$	58
Tabela 15 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$	59
Tabela 16 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$	60
Tabela 17 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$	63
Tabela 18 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$	64
Tabela 19 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$	65
Tabela 20 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$	66
Tabela 21 – Comparação entre a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson.	68

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	13
1.1	HISTÓRIA DO CÁLCULO	14
1.1.1	Objetivos do Cálculo	14
1.2	CÁLCULO INTEGRAL NUMÉRICO	16
2	INTEGRAIS	20
2.1	INTEGRAL SIMPLES	22
2.2	O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	24
2.2.1	TFC Parte 1	24
2.2.2	TFC Parte 2	27
2.3	INTEGRAL DUPLA	28
2.4	INTEGRAL TRIPLA	29
3	EXEMPLOS ANALÍTICOS	30
3.1	INTEGRAL SIMPLES	30
3.2	TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO	30
3.2.1	Integral por Substituição	30
3.2.2	Integral por Partes	31
3.2.3	Técnicas que envolvem funções trigonométricas	31
3.2.4	Integração por Frações Parciais	32
4	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	35
4.1	REGRA DOS TRAPÉZIOS	35
4.1.1	Regra dos Trapézios Repetida	37
4.1.2	Erros na Regra dos Trapézios	39
4.2	REGRA 1/3 DE SIMPSON	40
4.2.1	Regra 1/3 de Simpson Repetida	42
4.2.2	Erros na Regra 1/3 de Simpson	43
5	APLICAÇÕES	45
5.1	PRIMEIRO EXEMPLO	45
5.1.1	Resolução analítica	45
5.1.2	Regra dos Trapézios	45

5.1.3	Regra 1/3 de Simpson	51
5.1.4	Comparação entre métodos	55
5.2	SEGUNDO EXEMPLO	55
5.2.1	Resolução analítica	56
5.2.2	Quatro subintervalos	57
5.2.3	Oito subintervalos	58
5.2.4	Dezesseis subintervalos	59
5.2.5	Trinta e dois subintervalos	60
5.2.6	Comparação entre métodos	61
5.3	TERCEIRO EXEMPLO	61
5.3.1	Resolução analítica	61
5.3.2	Quatro subintervalos	63
5.3.3	Oito subintervalos	64
5.3.4	Dezesseis subintervalos	65
5.3.5	Trinta e dois subintervalos	66
5.3.6	Comparação entre métodos	67
5.4	QUARTO EXEMPLO	68
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
	REFERÊNCIAS	70

INTRODUÇÃO

A integração numérica abrange métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas, assim, para compreender de forma adequada o assunto, é necessário que se tenha um pré-requisito básico de conhecimento do conteúdo de integral, da compreensão de que a integral é a anti-derivada, distinguindo as integrais definidas e indefinidas.

O cálculo numérico corresponde a um conjunto de ferramentas ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos, de uma forma aproximada dos problemas que não apresentam uma solução exata ou ainda em problemas que envolvem integrais de difícil resolução e, portanto, precisam ser solucionados de forma numérica.

Muitos métodos de integração numérica são solucionados com recursos computacionais, auxiliando diferentes profissionais desde cientistas a engenheiros em suas profissões, isto justifica a escolha deste tema.

Em suma, a ideia básica da integração numérica, é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime do intervalo $[a, b]$. A integração numérica de uma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ tem-se o cálculo delimitado da área por essa função, recorrendo a interpolação polinomial como uma forma de obter um polinômio $p_n(x)$.

Os objetivos deste estudo foram:

- Fazer um levantamento de aspectos da história da Matemática, do Cálculo e do Cálculo numéricos;
- Revisar pontos importantes da teoria de integrais e das técnicas de integração;
- Estudar os métodos numéricos de integração, Regra dos Trapézios e Regra 1/3 de Simpson;
- Implementar os métodos numéricos utilizando planilhas eletrônicas;
- Resolver exemplos analiticamente e numericamente, comparando as soluções.

A História do Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral e do Cálculo Numérico são abordadas no Capítulo 1. O Capítulo 2 contém conceitos importantes sobre integrais e também o Teorema Fundamental do Cálculo. O Capítulo 3 contempla exemplos analíticos. Os métodos numéricos para integração, a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson são tratados no Capítulo 4 e o Capítulo 5 traz a resolução numérica de exemplos. Por fim, as

Considerações Finais estão no Capítulo 6, seguidas das referências consultadas e citadas ao longo da monografia.

1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A história é um instrumento de investigação das origens e descobertas. Com o conhecimento que ela fornece, pode-se analisar o que foi descoberto no passado para que possa servir de inspiração para as novas mudanças, na busca de melhorar o futuro das novas gerações. Dentro da história da matemática, há diversos métodos e notações matemáticas que foram desenvolvidas ao longo do tempo e que são utilizadas até os dias de hoje. Todas essas contribuições trouxeram mudanças no dia a dia das pessoas.

A matemática pode ser considerada uma invenção humana, na qual os objetos e elementos matemáticos são as construções sociais, históricas e culturais que foram desenvolvidas através de pensamentos lógicos e raciocínios específicos, contribuindo de forma evolutiva para o desenvolvimento da sociedade (BOYER, 1996).

Os alicerces da matemática foram desenvolvidos por muitas civilizações ao longo dos anos e reconhecer sua trajetória é essencial para se ter compreensão das origens das ideias para que se possa desenvolver técnicas e metodologias para serem utilizadas nos dias de hoje. É possível observar as culturas antigas, os aspectos humanos e o desenvolvimento da época para enxergar como seus conhecimentos contribuem para sociedade atual.

A matemática norteia praticamente toda a história da humanidade e ela está presente em tudo o que é feito nos dias de hoje, mesmo que as pessoas não tenham essa percepção. Nos primórdios da humanidade, notaram a necessidade de realizar contagem e controle de medidas e, com isso, a matemática foi desenvolvida e aprimorada de acordo com as necessidades. Os primeiros registros numéricos foram encontrados na Mesopotâmia, os quais foram datados de três milênios atrás (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Um dos maiores achados conhecidos na história da matemática é o Papiro de Rhind, um documento da civilização egípcia com 3,5 milênios, que possui os dados dos primeiros exercícios matemáticos de operações e equações mais simples (BARONI; NOBRE, 1999).

A matemática desenvolvida nos anos 2000 é mais relacionada a Grécia Antiga, a qual possui seus primeiros registros elaborados pelo Tales de Mileto, filósofo responsável em considerar o início do raciocínio matemático. Através de um teorema criado por ele, foi estabelecido os conceitos matemáticos das formas geométricas e as definições de ângulos. Pitágoras de Samos também fez sua contribuição com o seu teorema, o qual foi utilizado para desenvolver os números irracionais, primos e a geometria.

1.1 HISTÓRIA DO CÁLCULO

Na área de cálculos, as contribuições dos estudiosos matemáticos foram inúmeras, mesmo antes de ser criada a sua sistematização de forma lógica e estruturada. Foi de uma maneira imprecisa ou não tão rigorosa, mas alguns cientistas, como Barrow, Fermat e Kepler já se apropriavam dos conceitos de cálculo para resolver vários problemas.

A união das ferramentas conhecidas e utilizadas ao desenvolvimento e o aperfeiçoamento das técnicas foi feita por Newton e Leibniz, os quais criaram os fundamentos mais importantes do cálculo.

O cálculo pode ser dividido em duas etapas: a primeira relacionada às derivadas, denominado de Cálculo Diferencial, e a segunda na qual trata-se das integrais, chamado de Cálculo Integral. A origem de alguns dos principais conceitos matemáticos remota às mais antigas civilizações.

As tentativas feitas por egípcios, babilônios e gregos de resolver problemas práticos (Como reduzir as taxas cobradas aos agricultores do vale do Nilo tendo em vista a área alagada e tomada pelo rio a cada ano? Como calcular o volume de um silo de forma cônica? Como dobrar o volume do pedestal da estátua em homenagem ao deus Apolo?) levou-os à resolução de algumas equações, por exemplo ao cálculo de áreas e volumes de figuras simples como retângulos, trapézios, cones, cilindros e ao desenvolvimento de um sistema de numeração (EVES, 2004).

1.1.1 Objetivos do Cálculo

“O Cálculo” é uma expressão simplificada, adotada pelos matemáticos quando estes se referem à ferramenta matemática usada para analisar, qualitativamente ou quantitativamente, as variações que ocorrem em fenômenos que abrigam um ou mais componentes de natureza essencialmente física. Quanto ao seu surgimento, no século XVII, o cálculo tinha por objetivo resolver quatro classes principais de problemas científicos, os quais encontram-se dispostos a seguir (BOYER, 1996).

1. Determinação da reta tangente a uma curva, em um dado ponto pertencente a ela.
2. Determinação do comprimento de uma curva, da área de uma região e do volume de um sólido.

3. Determinação dos valores máximo e mínimo de uma quantidade, como as distâncias máxima e mínima de um corpo celeste a outro ou o ângulo de lançamento proporciona alcance máximo a um projétil.
4. Conhecendo uma fórmula que descreva a distância percorrida por um corpo, em um intervalo qualquer de tempo, determinar a velocidade e a aceleração.

Embora egípcios e babilônios tivessem conseguido resolver muitos problemas matemáticos envolvendo equações quadráticas e sistemas de equações e utilizassem ferramentas da geometria, inclusive o Teorema de Pitágoras, foram os gregos que possuem o mérito de contribuir para o estabelecimento da matemática como ela é vista atualmente.

A primeira tentativa de sistematização dos conhecimentos adquiridos na construção de uma teoria matemática baseada em poucos postulados foi feita por Euclides e esta obra leva o nome de “Os Elementos de Euclides”.

A matemática utilizada pelos babilônios e egípcios era desenvolvida de uma maneira empírica, se contrapondo à matemática dedutiva da escola grega. As atualizações do cálculo se mantiveram assim até os séculos XVI e começo do século XVII.

As grandes navegações do século XVI, o surgimento da indústria, os interesses do grande comércio que surgia na época, exigiam conhecimentos novos, principalmente os ligados aos movimentos dos corpos e particularmente ao movimento planetário. Destes problemas ocuparam-se grandes cientistas do século XVII, porém o clímax destes esforços — a invenção (ou descoberta?) do Cálculo — coube a Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (SILVA, 2017).

Napier publicou a primeira tabela de logaritmos em 1614, a qual teve um papel fundamental para o avanço científico, atuando como uma ferramenta auxiliar do cálculo aritmético e auxiliando na descrição de muitos problemas das ciências naturais, representando um avanço enorme na área do cálculo (LEMOS, 2012).

Após o estabelecimento dos fundamentos do Cálculo, tornou-se possível à análise de problemas físicos de real importância, com precisão e rigor jamais experimentados. Foram estabelecidos os fundamentos da Mecânica dos Sólidos e dos Fluidos e teve-se o início do estudo das Equações Diferenciais e Integrais.

1.2 CÁLCULO INTEGRAL NUMÉRICO

Os primeiros problemas que emergiram na história que se relacionavam com as integrais são os problemas de quadratura. Um exemplo antigo seria a medição de superfícies para encontrar as áreas. Quando os geômetras iniciaram os estudos com as áreas de figuras planas, eles buscavam encontrar um quadrado que tivessem uma área similar a da figura analisada, por se tratar de uma figura plana mais simples.

Os geômetras eram fascinados com as figuras curvilíneas, como o círculo ou figuras limitadas por arcos e curvas. As lúnulas que eram as regiões no qual se assemelhavam com a lua, foram estudadas por Hipócrates de Chios 440 a.C., o qual realizou as primeiras quadraturas da história. A quadratura é um termo considerado muito antigo e acabou se tornando um sinônimo do processo de determinar áreas (CHERRI, 2013).

Na época de 430 a.C., Antifon procurou encontrar a quadratura do círculo por meio de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos, começou com um quadrado, passou para um octógono, em seguida para o hexadecágono e assim sucessivamente. Mesmo que essa sequência não pudesse ser concluída, essa ideia acabou originando o método de exaustão.

Esse método consiste em aproximar a área de uma região curva pela inscrição de um polígono com área conhecida, e multiplicar o número de lados desse polígono até que a sua área seja a mais próxima possível da área da região curvilínea. (VACCARI; PACHECO, 2007).

Em 255 a.C. surgiu um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola, o qual se tornou uma das maiores contribuições gregas para a história do cálculo. Arquimedes descobriu que a área de uma região limitada por uma parábola cortada por uma corda é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que possui a mesma altura da corda como base.

Arquimedes também agregou conhecimento na área do cálculo matemático com o uso do método da exaustão para encontrar a área do círculo, o qual apresenta uma das primeiras aproximações para o número π . Diante das aproximações sucessivas, ele foi o elemento principal para a hidrostática (BURIAN, 2011).

As demais integrações, foram realizadas por Arquimedes com o propósito de encontrar o volume da esfera e da área da superfície esférica, volume do cone e área da superfície cônica, região limitada por uma elipse, volume de parabolóide de revolução e volume de hiperbolóide de revolução. Nos cálculos de Arquimedes, encontravam-se somas de números

infinitos de parcelas, no qual foram utilizadas o método de dupla *reductio ad absurdum* para encontrar uma solução, a qual só pode ser utilizada quando existe apenas duas definições distintas e uma é falsa (VENEZUELA; PALUDETTO, 2005).

A contribuição para o cálculo integral surgiu no final do século XVI na área da mecânica. Foram analisados vários estudos de matemáticos para solucionar os problemas relacionados com a gravidade. Em 1606, Luca Valerio utilizou o mesmo método grego para solucionar problemas de cálculo de áreas.

Quando Kepler estudou sobre o movimento dos planetas, ele encontrou áreas de vários setores de uma região elíptica e, para realizá-lo, ele observava a superfície como a soma de linhas, o qual era um método impreciso. Para calcular volumes dos sólidos, ele pensava na soma de fatias planas, as quais realizavam uma revolução de uma região bidimensional ao redor do eixo.

Os matemáticos que contribuíram para que atingisse o cálculo integral foram Fermat e Cavalieri que desenvolveram a ideia de Kepler para trabalhar com quantidades infinitas. Cavalieri foi além e pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos indivisíveis.

O processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi aritmetizado por Wallis em 1655, o qual desenvolveu os princípios da indução e da interpolação que resultou em diversos pontos importantes sobre a função gamma.

Fermat estudou e desenvolveu uma técnica para encontrar a área sob cada uma delas, nomeando-as de parábolas maiores, as quais eram curvas do tipo constante, e empregou uma série geométrica para cada uma das curvas analisadas. Em 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores já era conhecida e usada por vários estudiosos da área.

O problema do movimento estava sendo estudado por Galileo, no qual Torricelli e Barrow estavam considerando utilizar velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e, a operação inversa, partia da velocidade e distância. A partir desse problema, a ideia de operação inversa da derivada desenvolvia-se de forma natural, aonde a integral e a derivada era consideradas processos inversos. Barrow estava imerso no teorema fundamental do cálculo neste período.

Newton deu continuidade aos trabalhos de Barrow e Galileo, diante os estudos do movimento dos corpos, gerando cada vez mais cálculos, métodos como de fluxions – derivação; fluentes – integração. Newton traz que a integração consistia em encontrar fluentes para um fluxion, no qual a integração tinha como inversa da derivação. Com esse efeito,

Newton sabia que a derivada da velocidade resultava na aceleração.

Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão, por exemplo, a integral de y era representada por \dot{y} . Já Leibniz, usava a integração como uma soma, similar à Cavalieri, emergindo o símbolo - um 's' longo - para representar *summa*, no qual trazia a representação de uma figura diante a soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas, e, assim, representando o cálculo a área da figura.

Ambos desenvolveram o cálculo integral de forma separada, no qual Newton via o cálculo como algo mais geométrico e Leibniz analítico, ou seja, eram duas visões bem diferentes e distintas. Leibniz tomava para si que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até os dias de hoje, mantendo-se fiel a mesma forma que o estudioso estruturou (CHAPRA e CANALE, 2008).

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius*. O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690 (PLATERO, 2009).

Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas “reversas”. Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Zamboni (2002) traz que após o estabelecimento do cálculo, Euler então deu continuidade ao estudo das funções com Cauchy, Gauss e Riemann, porém foi Euler que reuniu todo o conhecimento desenvolvido e estruturou os fundamentos da análise. Em pleno século XXI, o cálculo integral é usado amplamente em áreas do conhecimento humano, aplicado ainda a várias vertentes e solução de problemas utilizado não somente por matemáticos, mas também na Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

Assim, o cálculo integral se originou com problemas de quadratura e cubatura. Resolver um problema de quadratura significa encontrar o valor exato da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste em uma ou mais curvas, ou de uma superfície tridimensional, cuja fronteira também consiste em pelo menos uma curva. Para um problema

de cubatura, queremos determinar o volume exato de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas (PLATERO, 2009). Hoje, o uso do termo quadratura não mudou muito: matemáticos, cientistas e engenheiros comumente dizem que “reduziram um problema a uma quadratura”, o que significa que tinham um problema complicado, o simplificaram de várias maneiras e agora o problema pode ser resolvido avaliando uma integral.

2 INTEGRAIS

A noção do cálculo da integral começou a ser utilizada em um passado remoto, antes da sua formalização. Há registros de Arquimedes valendo-se de sua praticidade para a realização de suas experiências por volta do século III a.C. Neste período, os estudiosos realizam cálculos de áreas ou volumes aplicados em figuras planas ou geométricas. Inclusive, era empregado em figuras espaciais, já que não era possível fazer o uso de fórmulas mais simples para obter a sua resolução (CARVALHO, 2021).

O rigor do Cálculo Integral foi elaborado em duas partes. Em primeira instância, Leibniz concebeu os símbolos vistos no cálculo das funções integrais utilizados atualmente. Ele os idealizou para ser empregado como um somatório entre vários segmentos. Após 1690, ele e os irmãos Bernoulli, aplicaram os símbolos no conceito da integral, o qual possui a mesma a estrutura vista no presente. Mas, foi somente em 1698, que os três publicaram um artigo em conjunto, oficializando sua descoberta.

A ideia da integral propõe que várias quantidades de um total podem ser divididas em diversos pedaços pequenos, para serem calculados individualmente, e depois somados para compor o total novamente. Isso é utilizado para quando não é possível calcular a forma ou o total de uma maneira direta, como por exemplo, em uma figura irregular. Porém, dividindo-a em diversas partes é possível calcular cada uma dessas partes, de maneira individual, e depois somar todas as pequenas partes, resultando no tamanho total da figura inicial.

Quanto maior a divisão em pequenas partes dessa figura, maior será a aproximação e precisão do cálculo para esse total. Para que seja possível realizar esse cálculo, é preciso que se atenda a determinadas condições. Existem alguns métodos para a realização das integrações, como a integral definida de Riemann e a integral de Riemann-Stieltjes.

Temos como definição da integral definida, f sendo uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, o qual é dividido em n subintervalos de comprimentos iguais. Tem-se que a e b são as extremidades dos subintervalos. Então temos que a integral definida de f de a a b é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

A definição é válida quando o limite existe e seja igual a todas as possíveis escolhas

dos pontos amostrais. Se for verdadeiro para ambas as definições, f é integrável em $[a, b]$ (Stewart, 2013).

Na geometria, é fácil realizar o cálculo da área quando uma figura plana apresenta lados retos. Porém nem sempre, na realidade, serão encontrados apenas figuras bem definidas e estruturadas, de cálculo simples. Dessa forma, a utilização da integral visa aproximar essa figura irregular em diversas figuras regulares, de modo a aproximar a área original. Essa aproximação pode gerar erros e variações, porém possibilitam uma noção da realidade muito grande. Quanto maior a segmentação em pequenas áreas, menor serão os erros calculados e maior será a precisão da aproximação da área real da figura (MANÇO, 2016).

Na realização do cálculo integral, são definidos os limites. Eles servem para determinar o intervalo do tamanho da figura que será calculado. São definidos os limites superiores e inferiores. Quando esses limites são conhecidos, a integral é chamada de integral definida. Quando essa figura não apresenta limites, sendo seus intervalos de limite um valor desconhecido, ela é chamada de integral indefinida.

As integrais indefinidas são determinadas de acordo com a relação entre seu cálculo integral e também diferencial. O resultado de uma integral definida é dado com um valor, porém o mesmo não ocorre com a integral indefinida, na qual o resultado é uma função. Todavia, para se obter essa função, ao realizar a integração, é encontrando um valor constante C (THOMAS, 2009).

Geralmente, quando o valor constante é desconhecido, a integral não está aplicada em alguma situação que possibilite determinar esse valor constante. Ele pode ser calculado ao ser aplicado em alguma situação real, ou dada as informações necessárias para seu cálculo. Dessa forma, resultando de um valor proveniente da derivada e da antiderivada de uma função, é possível compreender que a integral indefinida resulta em uma função com uma constante.

As integrais podem ser classificadas quanto a definidas e indefinidas, dependendo de seus valores de limites conhecidos ou desconhecidos, e de acordo com o número de variáveis observadas e calculadas em cada caso.

A integral simples é utilizada para quando se observa apenas uma variável, como por exemplo, no cálculo de um comprimento ou de uma área quando uma de suas dimensões já é definida. A integral dupla é utilizada para quando há duas variáveis, como no cálculo de áreas. A integral tripla é utilizada quando há três variáveis, utilizada principalmente

em volumes. E assim sucessivamente (CARVALHO, 2021).

No cotidiano, a aplicação da ideia de integral é muito utilizada, mesmo quando não percebida. O uso do cálculo integral possui grande aplicação de maneira geral nas áreas de física, engenharia, mecânica, arquitetura, construção, sistemas de informações e muitas outras áreas.

Em veículos automotivos de grande porte, como caminhões de carga, é muito importante que a distribuição do material transportado esteja em equilíbrio com o centro de massa alinhado com o do caminhão. Quando isso não ocorre, pode gerar instabilidade, podendo causar acidentes. O cálculo integral para distribuição da carga, que pode ser variável dependendo de seu tamanho, peso e densidade, de uma maneira em que seu centro de massa seja compatível com o do veículo, pode auxiliar nesse processo.

A aplicação da integral para o centro de massa pode ser utilizada de maneiras simples, como na distribuição de carga em um caminhão ou para a produção e utilização de bandejas, por exemplo. Porém, em construções maiores, desde casas até prédios, o cálculo do centro de massa é de fundamental importância para garantir a integridade, estabilidade e qualidade do projeto.

O cálculo de integral pode ser utilizado não apenas para o cálculo de figuras físicas, planas e geométricas. Em métodos computacionais e sistemas de informações, as integrais apresentam grande aplicabilidade. Como por exemplo, em sistemas financeiros, em que as integrais podem ser utilizadas para avaliar o excedente do consumo, a otimização do lucro, minimização dos custos de produção, otimização do material utilizado, entre diversos outros. (LIMA, 2014).

Em diversas áreas distintas o cálculo da integral pode ser empregado, como por exemplo, na medicina, em que a integral é útil para o cálculo do débito cardíaco (DC). O DC é o volume de sangue bombeado às artérias pelo coração, em um determinado intervalo de tempo. Nesse caso, o tempo é utilizado como os limites superiores e inferiores da equação, e o débito é resultante de diversas variáveis que envolvem esse sistema ou são utilizadas para medi-lo de forma indireta.

2.1 INTEGRAL SIMPLES

As integrais simples são utilizadas quando há apenas uma variável sendo observada. Esse tipo de integral apresenta propriedades muito bem definidas, facilitando seu uso e

aplicação, sendo algumas delas as seguintes:

1. O resultado de uma integral é o mesmo do resultado negativo com seus intervalos invertidos.

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

2. Quando o limite inferior for igual ao limite superior, o resultado da integração é nulo.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3. A integral de uma constante é igual ao produto dessa constante pela diferença entre seus limites.

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

4. A soma de duas funções integrais de mesmo intervalo é equivalente a integral da soma dessas funções.

$$\int_b^a [f(x) + g(x)] dx = \int_b^a f(x) dx + \int_b^a g(x) dx$$

5. O produto entre a integral de uma constante e uma função é equivalente ao produto entre constante e integral de uma função.

$$\int_b^a cf(x) dx = c \int_b^a f(x) dx$$

6. A soma entre duas integrais de mesma função, cujo limite superior de uma e inferior da outra coincide, pode ser calculado a partir do limite inferior da primeira, e superior da segunda.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

7. Se uma função é menor ou igual a outra, a integral com mesmo limite para ambas, continua com a mesma relação de grandeza. Se

$$f(x) \leq g(x)$$

então,

$$\int_b^a f(x) dx \leq \int_b^a g(x) dx$$

Além das propriedades, há um teorema muito importante que traz que se f é uma função contínua em $[a, b]$, então ela é integrável no mesmo intervalo.

Apesar de serem mais simples e terem como limitação a análise de apenas uma variável, esse tipo de integral apresenta grande aplicabilidade. A grande maioria dos sistemas pode ser resolvida por meio de integrais simples. Mesmo com sua limitação de uma variável, sistemas mais complexos podem ser decompostos para a resolução de seus sistemas por meio de integrais simples.

2.2 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) foi desenvolvido por Isaac Barrow e ele estabelece uma conexão entre o cálculo diferencial e integral, pois foi através dele que Barrow descobriu que a derivação e a integração são processos inversos. O cálculo diferencial teve origem através de um problema da tangente e o cálculo integral teve origem de um problema de área, os quais aparentemente não estavam relacionados (STEWART, 2013).

A partir do TFC, Leibniz e Newton utilizaram a relação entre a derivada e a integral para desenvolver o método matemático sistemático para o cálculo diferencial e integral. O teorema facilitou o cálculo de áreas e integrais, pois não era mais necessário realizar o cálculo do limite de somas.

A seguir o TFC será mostrado tomando como referência Stewart, 2013.

2.2.1 TFC Parte 1

O TFC possui duas partes. A primeira apresenta que a derivada de uma integral definida associada ao seu limite superior é o resultado do seu integrando, calculado no limite superior. A sua demonstração encontra-se a seguir.

Teorema:

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e

$$g'(x) = f(x)$$

Seja $f \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in (a, b)$. Logo $[x, x + h]$ contido em (a, b) e $g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$

Como é possível combinar integrais de mesma função $f(t)$ e intervalos diferentes pela premissa do cálculo de áreas por integração, então

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \left(\int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(t) dt \right) \\ &= \left(\int_x^{x+h} f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right) - \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

Cancelando as parcelas cuja soma é zero,

$$g(x + h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Pela definição, para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Assumindo que $h > 0$, pelo Teorema de Valores Extremos, $\exists u, v \in [x, x + h]$ tal que $f(u) = n, f(v) = N$ tais que n é o valor mínimo absoluto de f e N é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[x, x + h]$. Logo,

$$n(x + h - x) \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq N(x + h - x)$$

pelo domínio e imagem de f no intervalo $[x, x + h]$.

Ou seja,

$$f(u) \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v) \cdot h$$

Como $h > 0$,

$$\frac{f(u) \cdot h}{h} \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \frac{f(v) \cdot h}{h}$$

$$\Rightarrow f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)$$

No caso de $h < 0$, temos $\int_x^{x+h} f(t) dt = -\int_x^{x-h} f(t) dt$

$$\Rightarrow f(u)h \leq -\int_x^{x-h} f(t) dt \leq f(v) \cdot h$$

Dividindo por h ,

$$\Rightarrow f(u) \geq -\frac{1}{h} \int_x^{x-h} f(t) dt \geq f(v)$$

Multiplicando por (-1) e, sabendo que como $h < 0$, então $\frac{1}{h} \cdot (-1) > 0$, então:

$$f(u) \leq \frac{-1}{h} \int_x^{x-h} f(t) dt \leq f(v)$$

o que também fornece

$$\Rightarrow f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)$$

Se $h \rightarrow 0$, então $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, já que $u, v \in (x, x+h)$

Logo, $\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x)$ e

$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x)$, pois por hipótese, f é contínua em x . Pelo Teorema do Confronto,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Se $x = a$ ou $x = b$, então o limite acima é um limite lateral e g é contínua em $[a, b]$.

Logo, g é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$.

Outra maneira de demonstrar o TFC Parte 1 utilizando o Teorema de Valor Médio para Integrais, o qual traz que se f é contínua no intervalo $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

2.2.2 TFC Parte 2

A segunda parte do TFC apresenta um método mais simples para o cálculo de integrais definidas. A seguir, consta a definição e demonstração.

Teorema:

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$

Do TFC Parte 1, sabe-se que $\exists g(x) = \int_a^x f(t) dt$ tal que $g'(x) = f(x)$. Ou seja, $g(x)$ é uma função primitiva de f .

f possui uma família de primitivas F que podem ser escritas como:

$$F(x) = g(x) + c$$

Diferenciando-se de $g(x)$ por uma constante c , para $a < x < b$.

Mas F e g são contínuas em $[a, b]$, pelo TFC parte 1. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} c \Rightarrow F(a^+) = g(a^+) + c$$

e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} c \Rightarrow F(b^-) = g(b^-) + c$$

Logo, também é válido para $x = a$ e $x = b$.

Tem-se que

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

Substituindo na primitiva,

$$F(b) - F(a) = [g(b) + c] - [g(a) + c] = g(b) - 0 + c - c = g(b)$$

Pela definição de $g(x)$,

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) = F(b) - F(a)$$

2.3 INTEGRAL DUPLA

A integral dupla pode ser utilizada em funções que envolvam duas variáveis e ela pode ser aplicada em diversas situações, como para o cálculo de volume, área de superfícies, densidade de massa, momento de inércia e centro de massa, probabilidades, entre diversos outros exemplos.

Um volume, por exemplo, apresenta como função geral em uma integral dupla a seguinte equação:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int \int_R f(x, y) dx dy$$

Da mesma forma que as integrais simples, as duplas apresentam suas propriedades, algumas semelhantes às simples:

1. A soma de duas funções integrais duplas de mesmo intervalo é equivalente a integral dupla da soma dessas funções. O mesmo é válido para a diferença entre elas.

$$\int \int_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \int \int_R f(x, y) dA \pm \int \int_R g(x, y) dA dy$$

2. O produto entre a integral dupla de uma constante e uma função é equivalente ao produto entre uma constante a integral dupla de uma função.

$$\int \int_R cf(x, y) dA = c \int \int_R f(x, y) dx dy$$

3. Se uma função é menor ou igual a outra, a integral dupla com mesmo limite para ambas, continua com a mesma relação de grandeza.

Se

$$f(x) \leq g(x)$$

Logo,

$$\int \int_R f(x, y) dA \leq \int \int_R g(x, y) dA$$

Mesmo com uma dificuldade um pouco maior do que para a aplicação da integral simples, a dupla apresenta ainda uma facilidade intermediária no cálculo dos sistemas, possuindo uma grande importância.

2.4 INTEGRAL TRIPLA

O uso da integral tripla, apesar de ser semelhante a lógica utilizada nos outros tipos de integrais, muitas vezes podem gerar dúvidas quanto a sua aplicação prática. Esse tipo de integral pode ser utilizado para o cálculo de volumes, massa, área de uma seção bidimensional, momento de inércia, entre diversos outros usos. De maneira geral, sua função pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV = \int \int \int_Q f(x, y, z) dx dy dz$$

Saber identificar e aplicar corretamente cada um dos casos de integrais é primordial para o seu uso. Correlacionar às situações práticas e reais com os métodos resolutivos, assimilar o tipo de cada integral e suas formas de uso é tão importante quanto saber resolver as integrais propriamente ditas, com a conta já estabelecida.

Dessa forma, não apenas a matemática, como também a interpretação de texto e relacionar as fórmulas com problemas reais, são necessários para fazer bom uso dessa ferramenta e desse método de cálculo (MANÇO, 2016).

3 EXEMPLOS ANALÍTICOS

Neste capítulo serão abordados exemplos de integrais, resolvidos de maneira analítica.

3.1 INTEGRAL SIMPLES

O exemplo para a Integral Simples será $\int (x^4 - 3x^2 + 2) dx$.

Primeiro passo é determinar uma primitiva F tal que

$$F'(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Como trata-se de um polinômio, no segundo passo será utilizado a regra da potência, ou seja,

$$F'(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = \frac{5x^{5-1}}{5} - \frac{9x^{3-1}}{3} + 2x^{1-1} + 0$$

Logo,

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x + c$$

$$\int x^4 - 3x^2 + 2 dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + 2x + c, \forall c \in \mathbb{R}$$

3.2 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

As Técnicas de Integração podem ser divididas em Integral por Substituição, Integral por Partes, Substituições Trigonométricas e Integração por Frações Parciais.

3.2.1 Integral por Substituição

O exemplo abordado nesta subseção será $\int x^2 \sqrt{2x^3 - 1} dx$.

Nomeia-se $u = 2x^3 - 1$, logo

$$du = 6x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{6} du = x^2 dx$$

Substituindo o valor na integral,

$$\int \sqrt{2x^3 - 1} \cdot x^2 dx = \int \frac{1}{6} \sqrt{u} du = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Substituindo novamente,

$$\frac{2}{18} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{9} \cdot (2x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3.2.2 Integral por Partes

O exemplo abordado nesta subseção será $\int 3xe^x dx$.

Primeiramente, isola-se a constante.

$$\int 3xe^x dx = 3 \int xe^x dx$$

Sejam $u = x$ e $dv = e^x$, então $du = dx$ e $v = e^x$

Logo,

$$3 \int xe^x dx = 3[xe^x - \int e^x dx] = 3[xe^x - e^x + c] = 3[(x - 1)e^x + c] = 3e^x(x - 1) + 3c$$

Como $3c$ também é constante, pode-se substituir $3c = k$.

Portanto,

$$\int 3xe^x dx = 3e^x(x - 1) + k$$

3.2.3 Técnicas que envolvem funções trigonométricas

O exemplo abordado nesta subseção será $\int 5 \cos(x) \cdot \text{sen}(x) dx$.

Primeiro, separa-se a constante 5 dos demais termos

$$\int 5 \cos(x) \cdot \text{sen}(x) dx = 5 \int \cos(x) \cdot \text{sen}(x) dx$$

Em seguida, realiza a substituição $u = \text{sen}(x)$

$$5 \int \cos(x) \cdot \text{sen}(x) dx = 5 \int \cos(x) \cdot u dx$$

Como $\frac{du}{dx} = (\text{sen}(x))' = \cos(x)$, então $du = \cos(x) dx$ e

$$5 \int \cos(x).udx = 5 \int udu = \frac{5u^2}{2} + c$$

Substituindo novamente

$$\frac{5u^2}{2} + c = \frac{5\text{sen}^2(x)}{2} + c$$

$$\int 5 \cos(x).\text{sen}(x) dx = \frac{5}{2}\text{sen}^2(x) + c$$

3.2.4 Integração por Frações Parciais

O exemplo abordado nesta subseção será $\int \frac{x^5 - 11x^3 + 15x - 1}{x^3 - 9x} dx$.

Primeiro, escrevê-se a forma geral dessa função $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Onde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é o quociente e $\frac{R(x)}{Q(x)}$ é o resto. Resolvendo a divisão dos polinômios, têm-se que o $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - 2$ e $R(x) = -3x - 1$.

Logo, $f(x) = x^2 - 2 - \left(\frac{3x+1}{x^3-9x}\right)$.

Fatorando $Q(x)$, obtêm-se:

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$$

Assim, pode-se escrever

$$\frac{3x + 1}{x^3 - 9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 3}$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = A(x + 3)(x - 3) + Bx(x - 3) + C(x + 3)x =$$

$$= A(x^2 - 9) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + 3x) =$$

$$= Ax^2 - 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + 3Cx =$$

$$= Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + (-3Bx + 3Cx) - 9A$$

$$= (A + B + C)x^2 + (-3B + 3C)x - 9A$$

Comparando os coeficientes, têm-se

$$3x + 1 = (A + B + C)x^2 + (-3B + 3C)x - 9A$$

$$A + B + C = 0$$

$$-3B + 3C = 3$$

$$-9A = 1$$

Aonde, têm-se

$$A = \frac{-1}{9}$$

$$C = B + 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{-1}{9} + B + (1 + B) = 0$$

$$\Rightarrow 2B + \frac{8}{9} = 0$$

$$\Rightarrow 2B = \frac{-8}{9}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-4}{9}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C &= 1 + \frac{-4}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int \frac{x^5 - 11x^3 + 15x - 1}{x^3 - 9x} dx = \int x^2 - 2 - \int \left(\frac{-1}{9} \cdot \frac{1}{x} - \frac{-4}{9} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx$$

O que resulta

$$\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{9} \ln |x| + \frac{4}{9} \ln |x+3| - \frac{5}{9} \ln |x-3| + c$$

Neste capítulo foram finalizados exemplos de cálculo analítico das integrais. Nos próximos serão abordados métodos numéricos e suas aplicações.

4 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Zamboni (2002) traz que na matemática, os métodos de integração numérica permitem calcular o valor aproximado de uma integral definida sem conhecer uma expressão analítica para a sua primitiva. Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ e sua primitiva $F(x)$ conhecida. A integral definida de $f(x)$ pode ser calculada pela fórmula de Newton-Leibniz. O método básico envolvido nesta aproximação é chamado de quadratura numérica e consiste em:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

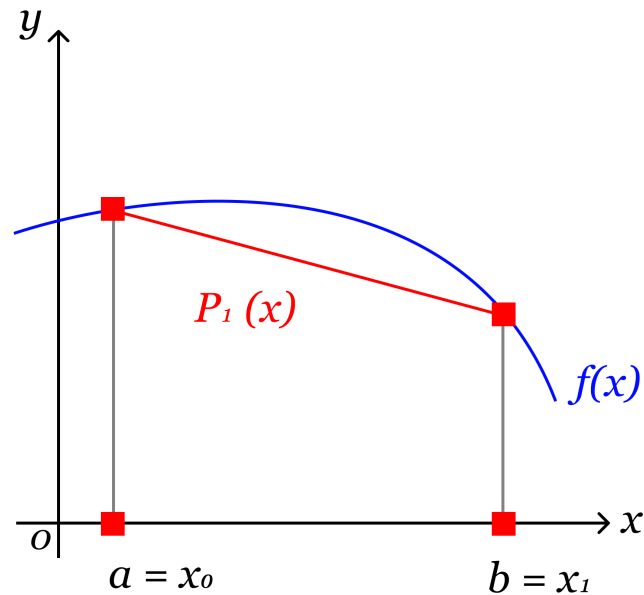
onde a_i são os coeficientes reais e x_i são os pontos de $[a, b]$.

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Ela também surge naturalmente em dezenas de problemas de Física, como por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes (SILVA, 2017).

4.1 REGRA DOS TRAPÉZIOS

A Regra do Trapézio baseia-se em aproximar a função $f(x)$ por meio de um polinômio de grau 1, o qual possui o formato de $y = a_0 + a_1x_1$. Este método recebeu este nome devido a região de trapézio formada entre o eixo x e a reta que une os pontos sobre o gráfico da função nos extremos do intervalo, o que pode ser observado na Figura 1 (CHAPRA, 2013).

Figura 1 – Representação do trapézio formado abaixo da função $f(x)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Com o TFC e sabendo que a integral equivale a uma área, é possível entender que o método utiliza a área de vários trapézios somados para calcular a área através da sua integral. Utilizando essa técnica numérica, não é necessário encontrar a primitiva da função.

$$\Delta S = \Delta x \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2} \quad (4.1)$$

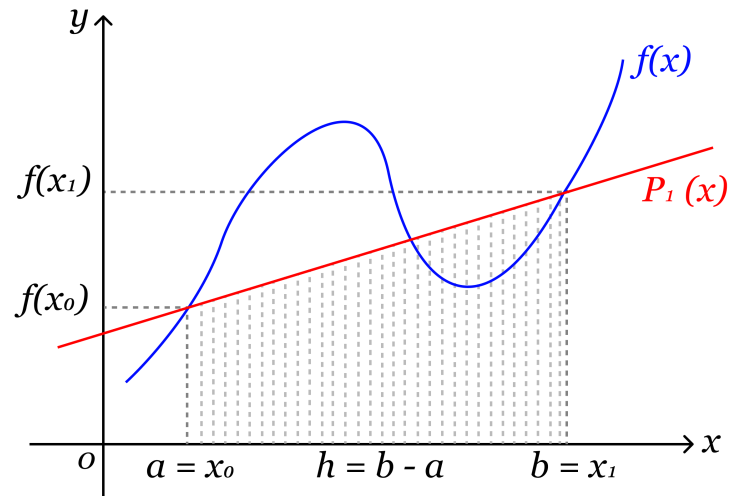
Com a fórmula (4.1), pode-se calcular a área de cada pequena região dentro da área a ser calculada. Dessa forma, a área que forma a integral pode ser expressa como:

$$S = \int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=0}^n \Delta S = \Delta x \frac{f(x) + f(x + \Delta x)}{2}$$

onde $a < x_i < b$ e $\Delta x = (b - a)$

Logo, área de um trapézio é $A = h(\frac{T+t}{2})$, onde h corresponde a altura do trapézio, T equivale a base maior e t é o valor da base menor.

Figura 2 – Análise de n trapézios formados abaixo da função $f(x)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observando a Figura 2, obtêm-se $h = b - a = x_1 - x_0$, $t = f(a) = f(x_0)$ e $T = f(b) = f(x_1)$. Logo,

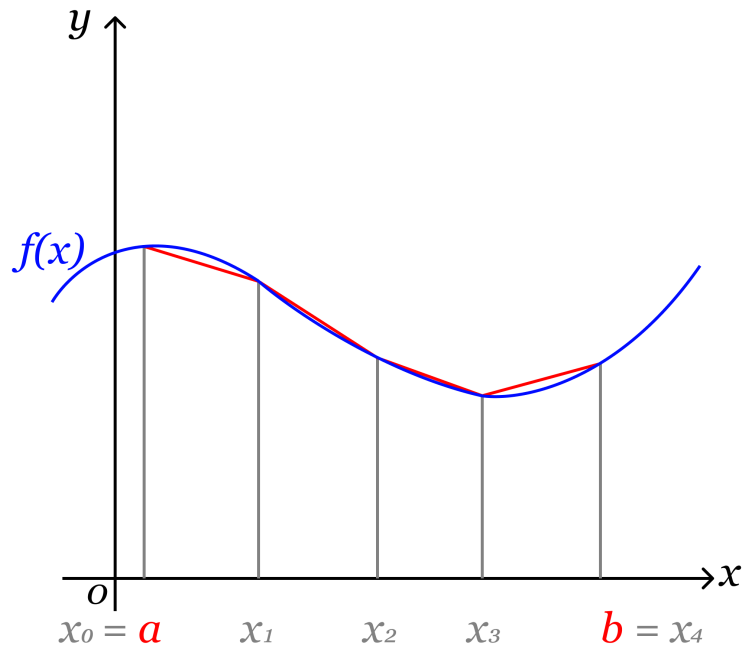
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)].$$

No qual, quanto menor for intervalo $[a, b]$, mais aproximado é o valor da integral.

4.1.1 Regra dos Trapézios Repetida

Regra dos Trapézios repetida, analisada dentro do intervalo $[a, b]$ de grande amplitude, tem-se a soma da área de n trapézios, cada qual definido pelo seu sub-intervalo, o que pode ser observado na Figura 3.

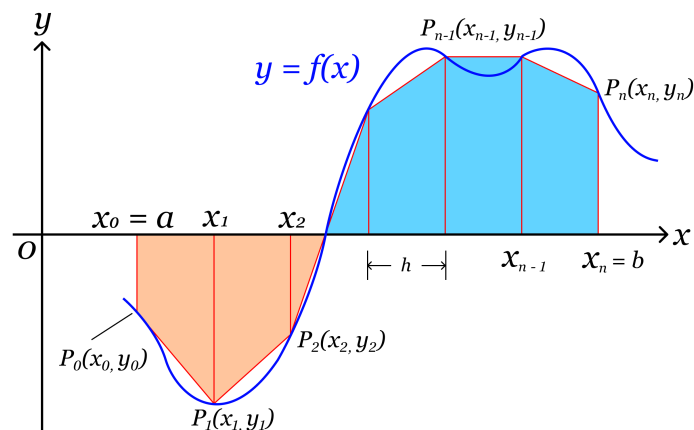
Figura 3 – Aplicabilidade da Regra dos Trapézios Repetida.



Fonte: Elaborada pela autora.

A regra aproxima pequenos trechos da curva $f(x)$ por segmentos de reta. Para fazer uma aproximação para a integral de f de a até b , somam-se as áreas ‘assinaladas’ dos trapézios obtidos pela união do final de cada segmento com o eixo x .

Figura 4 – Função $f(x)$ com n pontos.



Fonte: Elaborada pela autora.

É interessante observar que aproximar a área sob a função pela soma de áreas de trapézios é equivalente a realizar interpolação linear de $f(x)$, ou seja, ligar os pontos

(x_n, y_n) com retas, o que pode ser observado na Figura 4. A fórmula de representação é dada:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Como os termos $f(x_0)$ e $f(x_n)$ não se repetem, esta fórmula pode ser simplificada em:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{2}\{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\}$$

4.1.2 Erros na Regra dos Trapézios

O erro na Regra dos Trapézios é obtido integrando o erro da Interpolação de Lagrange, aonde

$$E_{\text{TRAPEZIO}} = \int_b^a \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_1)(x - x_2) dx$$

Utilizando o Teorema de Valor Médio, no qual $a \leq \eta \leq b$, portanto reescrevendo a equação anterior, obtêm-se:

$$E_{\text{TRAPEZIO}} = \frac{f''(\eta)}{2!} (x - x_1)(x - x_2)$$

Resolvendo a integral do Erro, chega-se na seguinte expressão:

$$E_{\text{TRAPEZIO}} = -n \frac{h^3}{12} f''(\eta) \quad (4.2)$$

Como não há meios de calcular exatamente $f''(\eta)$, pois o ponto η não é conhecido. Portanto a estratégia adotada é utilizar um limitante superior para o erro (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Como $f''(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$, pode-se dizer que existe $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Assim,

$$|E_{\text{TRAPEZIO}}| \leq \frac{nh^3 M_2}{12}$$

Como n pode ser descrito como $n = \frac{b-a}{h}$,

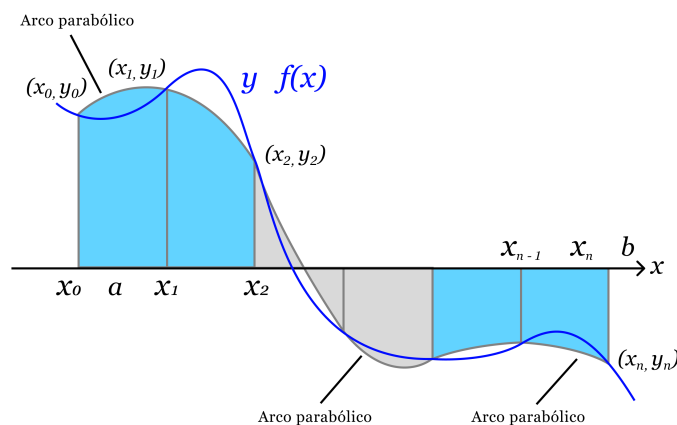
$$|E_{\text{TRAPEZIO}}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$$

Pode-se concluir que o erro é de ordem 2 ou menor.

4.2 REGRA 1/3 DE SIMPSON

A Regra 1/3 de Simpson faz aproximações para pequenos trechos de curvas usando arcos parabólicos, o que pode ser observado na Figura 5 (PIRES, 2015).

Figura 5 – Função $f(x)$ com n pontos.



Fonte: Elaborada pela autora.

O uso da fórmula de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau 2 é muito utilizada nesse caso. O Polinômio de Lagrange de grau 2 que estabelece a função de interpolação de $f(x)$ nos pontos $[x_i, f(x_i)]$ será:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

Têm-se $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ calculados através das fórmulas:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

O valor dos intervalos é correspondente a:

$$x_2 = x_0 + 2h = b$$

$$(x_0 - x_1) = a - (a + h) = -h$$

$$(x_0 - x_2) = a - (a + 2h) = -2h$$

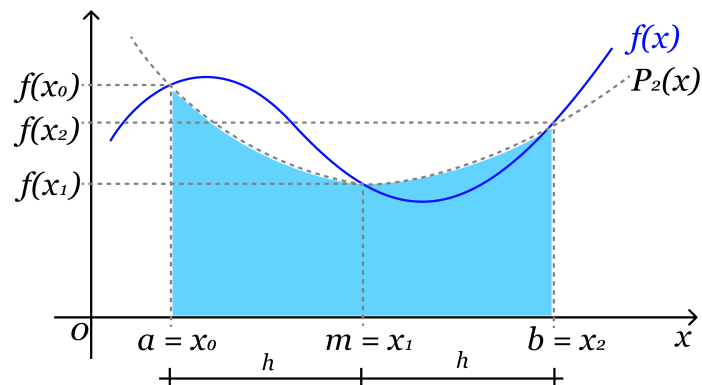
$$(x_1 - x_0) = (a + h) - a = h$$

$$(x_1 - x_2) = (a + h) - (a + 2h) = -h$$

$$(x_2 - x_0) = (a + 2h) - a = 2h$$

$$(x_2 - x_1) = (a + 2h) - (a + h) = h$$

Figura 6 – Função $f(x)$, $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ comparadas a $p_2(x)$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, o polinômio $P_2(x)$, observado na Figura 6, será:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)}f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(2h)(h)}f(x_2)$$

Então se $f(x) = P_2(x)$:

$$\int_a^b P_2(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x) dx = \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x_2) dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1) dx = I_s$$

As integrais podem ser resolvidas, por exemplo, usando a mudança das variáveis $x - x_0 = zh$. Assim, $x = x_0 + zh$, então:

$$x - x_1 = x_0 + zh - (x_0 + h) = (z - 1)h$$

$$x - x_2 = x_0 + zh - (x_0 + 2h) = (z - 2)h$$

para $x = x_0$, $z = 0$; $x = x_1$, $z = 1$; $x = x_2$, $z = 2$.

Após essas mudanças, com $dx = h dz$:

$$I_s = \frac{f(x_0)h}{2} \int_0^2 (z - 1)(z - 2) dz - f(x_1)h dz \int_0^2 (z)(z - 2) dz + \frac{f(x_2)}{2} h dz \int_0^2 (z)(z - 1) h dz$$

Resolvendo as integrais, obtêm-se a Regra 1/3 de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I_s = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

4.2.1 Regra 1/3 de Simpson Repetida

A Regra 1/3 de Simpson Repetida consiste em subdividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de amplitude h , onde n é um número par de subintervalos, pois cada parábola utilizará 3 pontos consecutivos.

Uma limitação da regra de Simpson é que os intervalos entre os pontos são sempre de mesmo comprimento, mesmo utilizando a fórmula do polinômio interpolador de segundo grau.

4.2.2 Erros na Regra 1/3 de Simpson

No caso da Regra 1/3 de Simpson é também possível estimar o erro esperado e observar que, qualitativamente, ele deve ser menor do que o erro da regra dos trapézios. De fato, usando uma análise semelhante a feita no caso dos trapézios podemos obter a seguinte expressão para o erro na Regra 1/3 de Simpson em um intervalo (RUGGIERO; LOPES, 1996).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_2(x) dx + \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{6} f'''(\xi(x)) dx$$

Considere o polinômio de Taylor em x_2 ,

$$f(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2) + \frac{f''(x_2)}{2}(x-x_2)^2 + \frac{f'''(x_2)}{6}(x-x_2)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_2)^4$$

onde $x_1 \leq \xi(x) \leq x_3$ e integrado no intervalo $[a, b] = [x_1, x_3]$.

Utilizando o Teorema do Valor Médio, onde $x_1 \leq \eta \leq x_3$ e a fórmula de diferenças finitas centrais para a derivada a segunda com $x_1 \leq \eta_2 \leq x_3$. É possível chegar na seguinte estimativa

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_3)$$

Supondo que $f^{(4)}$ é contínua em $[a, b]$ e fazendo uso de uma generalização do Teorema do Valor Intermediário, é possível obter:

$$E_{SIMPSON} = -\frac{n h^5}{2 \cdot 90} f^{(4)}(\eta) = -\frac{m h^5}{180} f^{(4)}(\eta), \eta \in (x_0, x_n).$$

De maneira análoga a Regra dos Trapézio, sabe-se que existe $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$. Logo,

$$|E_{SIMPSON}| \leq \frac{n h^5}{180} M_4$$

Como $n = \frac{b-a}{h}$,

$$|E_{SIMPSON}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$$

Pode-se concluir que o erro é de ordem 4 ou menor.

Vistos os conceitos relacionados aos métodos numéricos para integração, no próximo capítulo exemplos de aplicação serão estudados.

5 APLICAÇÕES

Dada as teorias abordadas nos capítulos de Integrais e de Métodos de Integração Numérica, este capítulo trará exemplos dos métodos apresentados.

Primeiro, os exemplos serão resolvidos analiticamente, em seguida será resolvido pela Regra dos Trapézios e pela Regra 1/3 de Simpson por fim, para as comparações. A implementação computacional foi realizada via planilhas eletrônicas.

5.1 PRIMEIRO EXEMPLO

O exemplo abordado nesta seção será $\int_0^1 e^x dx$.

5.1.1 Resolução analítica

Pelo TFC, se f é contínua em $[a, b]$, então $g(x) = \int_a^x f(x) dx \Rightarrow g'(x) = f(x)$

Logo, $\int e^x dx = F$ e $F' = e^x$

Sabe-se que $\frac{de^x}{dx} = e^x$, logo uma primitiva da função dada por $f(x) = e^x$ é $F = e^x$.

Assim,

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \cong 1,718281828459045$$

5.1.2 Regra dos Trapézios

Para o método da Regra dos Trapézios, utilizando o intervalo $(0, 1)$, será analisado para quatro, oito, dezesseis e trinta e dois subintervalos utilizando três passos.

No primeiro passo é calculado o valor de h utilizando a seguinte fórmula $h = \frac{b-a}{n}$. No segundo passo é estrutura-se a planilha eletrônica que contém n , x_n e $f(x_n)$. No último passo, substitui-se os dados obtidos na planilha eletrônica na fórmula.

a) Quatro subintervalos

Para o primeiro item, será analisado para quatro subintervalos.

Primeiro Passo:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Como $n = 4$ e o intervalo é $(0, 1)$

$$h = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Segundo Passo:

Tabela 1 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,25	1,284025417
2	0,5	1,648721271
3	0,75	2,117000017
4	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Terceiro Passo:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\cong \frac{0,25}{2} (1 + 1,284025417 * 2 + 1,648721271 * 2 \\ &+ 2,117000017 * 2 + 2,718281828) = \\ &= 0,125 * (1 + 2,568050833 + 3,297442541 + 4,234000033 \\ &+ 2,718281828) = \\ &= 0,125 * 13,81777524 = 1,727221905 \end{aligned}$$

b) Oito subintervalos

Para o segundo item, será analisado para oito subintervalos.

De maneira análoga ao de quatro intervalos, calcula-se h para $n = 8$ e obtém que o valor de $h = 0,125$. Logo estrutura-se a seguinte planilha eletrônica:

Tabela 2 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,125	1,133148453
2	0,25	1,284025417
3	0,375	1,454991415
4	0,5	1,648721271
5	0,625	1,868245957
6	0,75	2,117000017
7	0,875	2,398875294
8	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,720518592$$

c) Dezesesseis subintervalos

Para o terceiro item, será analisado para dezesseis subintervalos.

De mesma maneira que os exemplos anteriores, calcula-se h para $n = 16$ e obtém que o valor de $h = 0,0625$. Logo estrutura-se a seguinte planilha eletrônica:

Tabela 3 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,0625	1,064494
2	0,125	1,133148453
3	0,1875	1,20623
4	0,25	1,284025417
5	0,3125	1,366838
6	0,375	1,454991415
7	0,4375	1,54883
8	0,5	1,648721271
7	0,4375	1,54883
8	0,5	1,648721271
9	0,5625	1,755055
10	0,625	1,868245957

n	x_n	$f(x_n)$
11	0,6875	1,988737
12	0,75	2,117000017
13	0,8125	2,253535
14	0,875	2,398875294
15	0,9375	2,553589
16	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,718841129$$

d) Trinta e dois subintervalos

No último item analisado, será trabalhado com trinta e dois subintervalos.

De mesma maneira que os exemplos anteriores, calcula-se h para $n = 32$ e obtém que o valor de $h = 0,03125$. Logo estrutura-se a seguinte planilha eletrônica:

Tabela 4 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,03125	1,031743407
2	0,0625	1,064494459
3	0,09375	1,09828514
4	0,125	1,133148453
5	0,15625	1,169118446
6	0,1875	1,206230249
7	0,21875	1,244520108
8	0,25	1,284025417
9	0,28125	1,324784759
10	0,3125	1,366837941
11	0,34375	1,410226035
12	0,375	1,454991415
13	0,40625	1,501178
14	0,4375	1,548830299
15	0,46875	1,59799545
16	0,5	1,648721271
17	0,53125	1,701057302
18	0,5625	1,755054657

n	x_n	$f(x_n)$
19	0,59375	1,810766072
20	0,625	1,868245957
21	0,65625	1,92755045
22	0,6875	1,98873747
23	0,71875	2,051866773
24	0,75	2,117000017
25	0,78125	2,184200811
26	0,8125	2,253534787
27	0,84375	2,398875294
28	0,875	2,398875294
29	0,90625	2,47502377
30	0,9375	2,553589458
31	0,96875	2,634649089
32	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,71842166$$

Comparando valores para os subintervalos

Conforme visto a parte de erros no capítulo dos Métodos de Integração Numérica do método da Regra dos Trapézios, pode-se chegar na fórmula geral (5.1):

$$E = ch^p \tag{5.1}$$

O erro E é calculado da seguinte maneira:

$$E = | \text{solução analítica} - \text{solução numérica} |.$$

Com os dados coletados anteriormente, pode-se construir a seguinte planilha eletrônica, mostrada na Tabela 5.

Tabela 5 – Comparação entre h e E .

h	E
0,25	0,008940076
0,125	0,002236764
0,0625	0,0005593
0,03125	0,000139832

Fonte: Elaborada pela autora.

Como pode-se observar, à medida que h diminui, a solução numérica se aproxima mais da solução analítica.

Como p é a ordem do erro, será estimado o seu valor pelos cálculos. Trabalhando com a expressão (5.1), pode-se escrever:

$$\ln E = \ln c + p \ln h$$

Com os dados da planilha eletrônica anterior, é elaborada uma nova com os resultados de $\ln E$ e $\ln h$, ver Tabela 6.

Tabela 6 – Comparação entre $\ln E$ e $\ln h$.

$\ln h$	$\ln E$
-1,386294361	-4,717211178
-2,079441542	-6,102725232
-2,772588722	-7,48882434
-3,465735903	-8,875069877

Fonte: Elaborada pela autora.

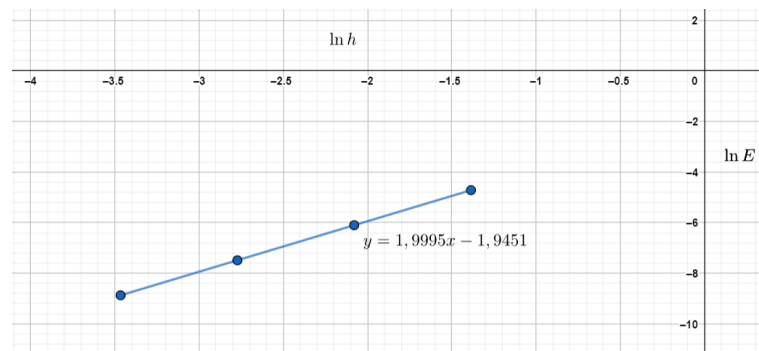
Note que, adotando $\ln E = y$, $\ln c = \beta$, $p = \alpha$ e $\ln h = x$, obtém-se:

$$y = \alpha x + \beta$$

Isto é, tem-se uma equação de reta e $\alpha = p$ é o seu coeficiente angular.

Plota-se o gráfico de $\ln E \times \ln h$ e gera-se a linha de tendência para obter um ajuste para a referida reta, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Gráfico de $\ln E \times \ln h$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Comparando o coeficiente angular, $p = 1,9995$, com a ordem de erro do método, pode-se concluir que os dois números são relativamente próximos.

5.1.3 Regra 1/3 de Simpson

De maneira analoga a Regra dos Trapézios, utilizando o mesmo intervalo, também será analisado para quatro, oito, dezesseis e trinta e dois subintervalos utilizando três passos.

a) Quatro subintervalos

Para o primeiro item, será analisado para quatro subintervalos, portanto n valerá 4 e h será 0,25. Com os seguintes dados, é construído a Tabela 7.

Tabela 7 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,25	1,284025417
2	0,5	1,648721271
3	0,75	2,117000017
4	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

A diferença entre a Regra dos Trápézios e a Regra 1/3 de Simpson está justamente na fórmula do método visto na Seção 4.2, onde

$$I_s = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_n)]$$

Aonde, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\cong \frac{0,25}{3}(1 + 1,284025 * 4 + 1,648721 * 2 + 2,117 * 4 + 2,718282) = \\ &= 1 + 5,136102 + 3,297443 + 8,468 + 2,718282 = \\ &= 0,083333 * 20,61983 = 1,718318842 \end{aligned}$$

b) Oito subintervalos

Para o segundo item, será analisado para oito subintervalos, onde $n = 8$ e $h = 0,125$, estrutura-se a planilha eletrônica conforme Tabela 8.

Tabela 8 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,125	1,133148453
2	0,25	1,284025417
3	0,375	1,454991415
4	0,5	1,648721271
5	0,625	1,868245957
6	0,75	2,117000017
7	0,875	2,398875294
8	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,718284155$$

c) Dezesesseis subintervalos

Para o terceiro item, será analisado para dezesseis subintervalos.

De mesma maneira que os exemplos anteriores, calcula-se h para $n = 16$ e obtém que o valor de $h = 0,0625$. Logo estrutura-se a seguinte planilha eletrônica (ver Tabela 9).

Tabela 9 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,0625	1,064494
2	0,125	1,133148453
3	0,1875	1,20623
4	0,25	1,284025417
5	0,3125	1,366838
6	0,375	1,454991415
7	0,4375	1,54883
8	0,5	1,648721271
9	0,5625	1,755055
10	0,625	1,868245957
11	0,6875	1,988737
12	0,75	2,117000017

13	0,8125	2,253535
14	0,875	2,398875294
15	0,9375	2,553589
16	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,718281974$$

d) Trinta e dois subintervalos

No último item analisado, será trabalhado com trinta e dois subintervalos.

De mesma maneira que os exemplos anteriores, calcula-se h para $n = 32$ e obtém que o valor de $h = 0,03125$. Logo, tem-se a Tabela 10:

Tabela 10 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1
1	0,03125	1,031743407
2	0,0625	1,064494459
3	0,09375	1,09828514
4	0,125	1,133148453
5	0,15625	1,169118446
6	0,1875	1,206230249
7	0,21875	1,244520108
8	0,25	1,284025417
9	0,28125	1,324784759
10	0,3125	1,366837941
11	0,34375	1,410226035
12	0,375	1,454991415
13	0,40625	1,501178
14	0,4375	1,548830299
15	0,46875	1,59799545
16	0,5	1,648721271
17	0,53125	1,701057302
18	0,5625	1,755054657
19	0,59375	1,810766072
20	0,625	1,868245957
21	0,65625	1,92755045

22	0,6875	1,98873747
23	0,71875	2,051866773
24	0,75	2,117000017
25	0,78125	2,184200811
26	0,8125	2,253534787
27	0,84375	2,398875294
28	0,875	2,398875294
29	0,90625	2,47502377
30	0,9375	2,553589458
31	0,96875	2,634649089
32	1	2,718281828

Fonte: Elaborada pela autora.

Realizando os cálculos, obtém-se que

$$\int_0^1 e^x dx \cong 1,718281838$$

Comparando valores para os subintervalos

De maneira análoga ao método da Regra de Trapézios, pode-se calcular E e montar a planilha eletrônica conforme a Tabela 11.

Tabela 11 – Comparação entre h e E .

h	E
0,25	$3,70135^{-5}$
0,125	$2,32624^{-6}$
0,0625	$1,45593^{-7}$
0,03125	$9,10273^{-9}$

Fonte: Elaborada pela autora.

Com os dados da planilha eletrônica disponível na Tabela 11, é elaborada uma nova com os resultados de $\ln E$ e $\ln h$ (ver Tabela 12).

Tabela 12 – Comparação entre $\ln E$ e $\ln h$.

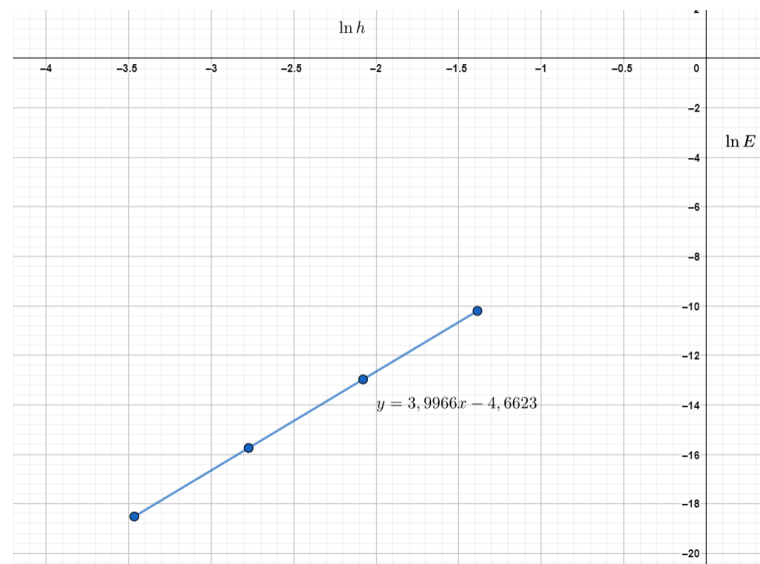
$\ln h$	$\ln E$
-1,386294361	-10,20422885
-2,079441542	-12,97125696
-2,772588722	-15,74245184
-3,465735903	-18,51469184

Fonte: Elaborada pelo autor.

À medida que o h diminui, nota-se que o erro também diminui, portanto a solução numérica fica mais próxima da solução analítica.

Com os dados da planilha da Tabela 12, plota-se o gráfico de $\ln E \times \ln h$ apresentado na Figura 8 e gera-se a linha de tendência para obter a equação da reta.

Figura 8 – Gráfico de $\ln E \times \ln h$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Comparando o coeficiente angular, $p = 3,9966$, com a ordem de erro do método, pode-se concluir que os dois números são relativamente próximos.

5.1.4 Comparação entre métodos

Pode-se observar que os valores obtidos nas planilhas eletrônicas contendo os dados de n , x_n e $f(x_n)$ não sofrem alteração, pois são resolvidos do mesmo modo. A alteração está nas fórmulas de cada método.

Analisando a ordem do erro, pode-se notar que o valor obtido utilizando Regra 1/3 de Simpson se aproxima mais da resolução analítica do que o resultado da Regra dos Trapézios. Isso se dá devido a ordem do erro, enquanto a Regra 1/3 de Simpson é de ordem 4, o da Regra do Trapézio é de ordem 2, o que influencia na exatidão da solução.

5.2 SEGUNDO EXEMPLO

O exemplo abordado nesta seção será $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$.

5.2.1 Resolução analítica

Pela Regra de Substituição, nomeia-se $u = 1 + x^2$, então

$$du = 2x \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x \, dx$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \sqrt{1+x^2} x \, dx = \int \frac{\sqrt{u}}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c \end{aligned}$$

Substituindo novamente

$$\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Assim, para a integral definida

$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \, dx$, têm-se como primitiva e aplicando o TFC

$$\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{(1+1^2)^3}}{3} - \frac{\sqrt{(1+0^2)^3}}{3} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+1)^3}{3}} - \sqrt{\frac{(1+0^2)^3}{3}} = \frac{\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}}{3} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{1}}{3} = \frac{2,82842712474619 - 1}{3} =$$

$$\frac{1,82842712474619}{3} \cong 0,60947570824873$$

Para analisar a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson para esse exemplo, será utilizado o conhecimento obtido no exemplo anterior, de que as planilhas eletrônicas contendo os dados de n , x_n e $f(x_n)$ não sofrem alteração, portanto faz mais sentido organizar as respostas dos métodos dentro de cada subintervalo ao contrário do que foi feito no exemplo anterior. Os intervalos analisados continuam os mesmos do exemplo anterior.

5.2.2 Quatro subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo $(0, 1)$ adotado, toma-se $h = 0,25$, logo calcula-se o valor para $f(0)$, $f(0,25)$, $f(0,5)$, $f(0,75)$ e $f(1)$ e estrutura-se a planilha eletrônica com os dados obtidos.

Tabela 13 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0
1	0,25	0,2576941
2	0,5	0,55901699
3	0,75	0,9375
4	1	1,41421356

Fonte: Elaborada pela autora.

Com os dados obtidos na planilha eletrônica explicitada na Tabela 13, será analisado a resposta obtida para cada método.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados da Tabela 13 na expressão a seguir, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx &\cong \frac{0,25}{2} (0 + 0,2576941 * 2 + 0,55901699 * 2 + \\ &+ 0,9375 * 2 + 1,41421356) = \\ &= 0,125 * (0 + 0,515388203 + 1,118033989 + 1,875 + \\ &+ 1,414213562) = \\ &= 0,125 * 4,992263575 = 0,61532947 \end{aligned}$$

Regra 1/3 de Simpson

De maneira análoga à Regra dos Trapézios, utiliza-se os dados da planilha eletrônica da Tabela 13 e substitui os dados na expressão a seguir.

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx &\cong \frac{0,25}{3}(0 + 0,2576941 * 2 + 0,55901699 * 2 + 0,9375 * 2 + \\
&+ 1,41421356) = \\
&= 0,083333 * (0 + 1,03077641 + 1,118033989 + 3,75 + \\
&+ 1,414213562) = \\
&= 0,083333 * 7,31302396 = 0,60941866
\end{aligned}$$

5.2.3 Oito subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo $(0, 1)$ adotado, toma-se $h = 0,125$ e estrutura-se a Tabela 14 com os dados obtidos.

Tabela 14 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0
1	0,125	0,125972777
2	0,25	0,257694102
3	0,375	0,400500176
4	0,5	0,559016994
5	0,625	0,737029776
6	0,75	0,9375
7	0,875	1,162672198
8	1	1,414213562

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados da Tabela 14 na expressão vista anteriormente, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,609475708$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados da Tabela 14 na expressão vista anteriormente, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,609472311$$

5.2.4 Dezesesseis subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo $(0, 1)$ adotado, toma-se $h = 0,0625$ e estrutura-se a planilha eletrônica com os dados obtidos.

Tabela 15 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0
1	0,0625	0,062621951
2	0,125	0,125972777
3	0,1875	0,190767429
4	0,25	0,257694102
5	0,3125	0,32740341
6	0,375	0,400500176
7	0,4375	0,477538064
8	0,5	0,559016994
9	0,5625	0,64538296
10	0,625	0,737029776
11	0,6875	0,834302212
12	0,75	0,9375
13	0,8125	1,046882288
14	0,875	1,162672198
15	0,9375	1,285061262
16	1	1,414213562

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados da Tabela 15 na expressão a seguir, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,609840774$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados da Tabela 14 na expressão a seguir, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,609475498$$

5.2.5 Trinta e dois subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo $(0, 1)$ adotado, toma-se $h = 0,03125$ e estrutura-se a planilha eletrônica com os dados obtidos.

Tabela 16 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0
1	0,03125	0,031265255
2	0,0625	0,062621951
3	0,09375	0,094161086
4	0,125	0,125972777
5	0,15625	0,158145847
6	0,1875	0,190767429
7	0,21875	0,223922608
8	0,25	0,257694102
9	0,28125	0,292161975
10	0,3125	0,32740341
11	0,34375	0,363492515
12	0,375	0,400500176
13	0,40625	0,438493962
14	0,4375	0,477538064
15	0,46875	0,517693273
16	0,5	0,559016994
17	0,53125	0,601563293
18	0,5625	0,64538296
19	0,59375	0,690523608
20	0,625	0,737029776
21	0,65625	0,784943053
22	0,6875	0,834302212
23	0,71875	0,885143343
24	0,75	0,9375
25	0,78125	0,991403345
26	0,8125	1,046882288

27	0,84375	1,103963629
28	0,875	1,162672198
29	0,90625	1,223030984
30	0,9375	1,285061262
31	0,96875	1,348782718
32	1	1,414213562

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados obtidos na fórmula, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,609566965$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados obtidos na fórmula, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx \cong 0,60947569$$

5.2.6 Comparação entre métodos

Como no Primeiro Exemplo, pode-se notar que o valor da ordem do erro obtido utilizando Regra 1/3 de Simpson se aproxima mais da resolução analítica do que o resultado da Regra dos Trapézios. Isso se dá devido a ordem do erro, enquanto a Regra 1/3 de Simpson é de ordem 4, o da Regra dos Trapézios é de ordem 2, o que influencia na exatidão da solução.

5.3 TERCEIRO EXEMPLO

O exemplo abordado nesta seção será $\int_1^2 r^3 \ln r dx$.

5.3.1 Resolução analítica

Utilizando a integração por partes, têm-se

$$u = \ln r$$

$$du = \frac{1}{r} dr$$

$$dv = r^3 dr$$

$$v = \frac{r^4}{4}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int r^3 \ln r dr &= \\ &= \frac{r^4}{4} \ln r - \int \frac{r^4}{4} \cdot \frac{1}{r} dr = \\ &= \frac{r^4}{4} \ln r - \frac{1}{4} \left(\frac{r^4}{4} \right) dr = \\ &= \frac{r^4}{4} \left(\ln r - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

Assim, para a integral definida

$\int_1^2 r^3 \ln r dr$, possui uma primitiva tal que

$$\begin{aligned} \int_1^2 r^3 \ln r dr &= \\ &= \frac{r^4}{4} \left(\ln r - \frac{1}{4} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) \right] - \left[\frac{1^4}{4} \left(\ln 1 - \frac{1}{4} \right) \right] = \\ &= \left[4 \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right) \right] - \left[\frac{1}{4} \left(\ln 1 - \frac{1}{4} \right) \right] = \\ &= 4 \ln 2 - 1 + \frac{1}{16} = \\ &= 4 \ln 2 + \frac{1}{16} - 1 = \\ &= 1,835088722 \end{aligned}$$

De modo análogo ao exemplo anterior, será analisado as respostas dos métodos Regra dos Trapézios e da Regra 1/3 de Simpson dentro de cada subintervalo ao contrário do que foi feito no primeiro exemplo. O intervalos analisados continuam os mesmos do outros exemplos.

5.3.2 Quatro subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo (1, 2) adotado, toma-se $h = 0,25$, logo calcula-se o valor para $f(1)$, $f(1,25)$, $f(1,5)$, $f(1,75)$ e $f(2)$ e estrutura-se a planilha eletrônica com os dados obtidos.

Tabela 17 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 4$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0
1	1,25	0,435827249
2	1,5	1,36844474
3	1,75	2,999190863
4	2	5,545177444

Fonte: Elaborada pela autora.

Com os dados da Tabela 17, será analisado a resposta obtida para cada método.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados na expressão a seguir, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_1^2 r^3 \ln r dr \cong$$

$$= \frac{0,25}{2} (0 + 0,435827249 * 2 + 1,36844474 * 2 + 2,999190863 * 2 + 5,545177444) =$$

$$= 0,125 * (0 + 0,8716545 + 2,73688948 + 5,99838173 + 5,545177444) =$$

$$= 0,125 * 15,15210315 = 1,894012894$$

Regra 1/3 de Simpson

De maneira analoga a Regra dos Trapézios, utiliza-se os dados da Tabela 17 e substitui os dados na expressão a seguir.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 r^3 \ln r \, dr &\cong \\ &= \frac{0,25}{3}(0 + 0,435827249 * 4 + 0,55901699 * 2 + 0,9375 * 4 + \\ &+ 1,41421356) = \\ &= 0,083333 * (0 + 1,74330899 + 2,73688948 + 11,9967635 + \\ &+ 5,54517744) = \\ &= 0,083333 * 22,02213937 = 1,835178281 \end{aligned}$$

5.3.3 Oito subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo (1, 2) adotado, toma-se $h = 0,125$ e estrutura-se a Tabela 18 com os dados obtidos.

Tabela 18 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 8$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0
1	1,125	0,167702799
2	1,25	0,435827249
3	1,375	0,827855305
4	1,5	1,36844474
5	1,625	2,083321624
6	1,75	2,999190863
7	1,875	4,143660597
8	2	5,545177444

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados da Tabela 18 na expressão, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,849823987$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados da Tabela 18 na expressão, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,835094352$$

5.3.4 Dezesseis subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, utilizando o intervalo (1, 2) adotado, toma-se $h = 0,0625$ e estrutura-se a Tabela 19 com os dados obtidos.

Tabela 19 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 16$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0
1	1,0625	0,072716984
2	1,125	0,167702799
3	1,1875	0,28777366
4	1,25	0,435827249
5	1,3125	0,614838413
6	1,375	0,827855305
7	1,4375	1,077995884
8	1,5	1,36844474
9	1,5625	1,70245019
10	1,625	2,083321624
11	1,6875	2,514427054
12	1,75	2,999190863
13	1,8125	3,541091712
14	1,875	4,143660597
15	1,9375	4,810479049
16	2	5,545177444

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados da Tabela 19 na expressão, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,838772803$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados obtidos na fórmula, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,835094352$$

5.3.5 Trinta e dois subintervalos

Para o método da Regra dos Trapézios e a Regra de Simpson, utilizando o intervalo (1, 2) adotado, toma-se $h = 0,03125$ e estrutura-se a planilha eletrônica com os dados obtidos (ver Tabela 20).

Tabela 20 – Cálculo de $f(x_n)$ quando $n = 32$.

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0
1	1,03125	0,033747592
2	1,0625	0,072716984
3	1,09375	0,117252237
4	1,125	0,167702799
5	1,15625	0,22442335
6	1,1875	0,28777366
7	1,21875	0,358118447
8	1,25	0,435827249
9	1,28125	0,5212743
10	1,3125	0,614838413
11	1,34375	0,716902868
12	1,375	0,827855305
13	1,40625	0,948087623
14	1,4375	1,077995884
15	1,46875	1,217980219
16	1,5	1,36844474
17	1,53125	1,529797456
18	1,5625	1,70245019

19	1,59375	1,886818505
20	1,625	2,083321624
21	1,65625	2,292382361
22	1,6875	2,514427054
23	1,71875	2,749885494
24	1,75	2,999190863
25	1,78125	3,262779675
26	1,8125	3,541091712
27	1,84375	3,834569968
28	1,875	4,143660597
29	1,90625	4,468812854
30	1,9375	4,810479049
31	1,96875	5,169114491
32	2	5,545177444

Fonte: Elaborada pela autora.

Regra dos Trapézios

Substituindo os dados disponíveis na Tabela 20, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,836009759$$

Regra 1/3 de Simpson

Substituindo os dados disponíveis na Tabela 20, obtém-se o seguinte resultado:

$$\int_1^2 r^3 \ln r \, dr \cong 1,835088744$$

5.3.6 Comparação entre métodos

Como no Primeiro e Segundo Exemplos anteriores, pode-se notar que o valor da ordem do erro obtido utilizando Regra 1/3 de Simpson se aproxima mais da resolução analítica do que o resultado da Regra dos Trapézios. Isso se dá devido a ordem do erro, enquanto a Regra 1/3 de Simpson é de ordem 4, o da Regra do Trapézio é de ordem 2, o que influencia na exatidão da solução.

5.4 QUARTO EXEMPLO

O exemplo abordado nesta seção será $P(a < Z < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dx$.

Diferente dos exemplos anteriores, essa integral não possui resolução analítica. Mas de modo análogo aos exemplos anteriores, é possível calcular seu resultado através dos métodos Regra dos Trapézios e Regra 1/3 de Simpson. Será utilizado os mesmos subintervalos dos outros exemplos, disponível na Tabela 21.

Tabela 21 – Comparação entre a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson.

h	Regra dos Trapézios	Regra 1/3 de Simpson
0,25	0,340081845	0,341355488
0,125	0,341029516	0,341345406
0,0625	0,341265969	0,341344787
0,03125	0,341325054	0,341344749

Fonte: Elaborada pela autora.

Com isso, conclui-se esse capítulo e no próximo terá as Considerações Finais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conceito de integral definida e sua aplicação são muito úteis em diversas áreas, como Física, Engenharia e Economia, dentre outras. No entanto, há situações em que seu cálculo de modo analítico se torna espinhoso. Por exemplo, $f(x)$ pode ser uma função difícil de integrar ou mesmo de impossível integração.

Em outros casos, a solução analítica do resultado da integral é conhecida, mas o cálculo somente pode ser obtido de modo aproximado. Por fim, há situações em que a expressão da função $f(x)$ é conhecida apenas em alguns poucos pontos discretos, determinados por meio de experimentos em campo ou consultas a bancos de dados.

Em casos como os descritos no parágrafo anterior, nos quais não é possível calcular a integral de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$, aplicam-se métodos numéricos de integração – os denominados métodos de integração numérica.

Com base no fato de que a integral de uma função equivale a uma área, existem diversos métodos que dividem a área a ser calculada em vários elementos, de pequena dimensão, de modo que a soma dessas pequenas partes resulte na área total equivalente à integral que se deseja calcular – a menos de erros de aproximação inerentes ao modelo utilizado.

O propósito principal deste trabalho foi estudar a Regra dos Trapézios e a Regra 1/3 de Simpson, para a integração numérica. Implementações foram executadas via planilhas eletrônicas e os resultados mostraram que tais métodos são eficientes na determinação de soluções aproximadas para integrais de diferentes funções, especialmente à medida que se diminui o espaçamento h . Além disso, um estudo numérico de cada método foi realizado, o que possibilitou uma verificação prática da ordem dos erros, à saber, ordem 2 para a Regra dos Trapézios e ordem 4 para a Regra 1/3 de Simpson.

REFERÊNCIAS

- BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. **A Pesquisa em História da Matemática e Suas Relações com a Educação Matemática. Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** BICUDO, M. A.(org.). São Paulo: UNESP, 1999.
- BOYER, C. B. **História da Matemática** . 2. Ed. São Paulo: Editor Edgard Blücher. LTDA, 1996. P. 496.
- BURIAN, R. L. A. C. **Cálculo Numérico – Fundamentos de Informática.** Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2011.
- CARVALHO, J. P. A. ; MACÊDO, J. A.; LOPES, L. R. P. **Algumas aplicações do cálculo diferencial e integral.** Research, Society and Development, v. 10, n. 8, p. 2021.
- CHAPRA, S. C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas.** Ed. Bookman, 2013.
- CHERRI, A.; VIANNA, A.; BALBO, A.; BAPTISTA, E. **Métodos Numéricos Computacionais.** Faculdade de Matemática. UNEP, São Paulo, Bauru. 2013.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. P. 844.
- LEMOS, Carlos M. **Os Logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas**—um apontamento histórico. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2012.
- LIMA, E. L. **Análise Real:** Funções de uma variável. Ed 12, V.1, Coleção Matemática Universitária. IMPA. Rio de Janeiro, 2014.
- MANÇO, R. F. **Integrais e aplicações.** Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2016.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- PIRES, A. de A. **Cálculo numérico:** prática com algoritmos e planilhas. São Paulo: Atlas, 2015 240 p.
- PLATERO, R. D. **Calculo Numérico.** Rio de Janeiro: UCB, 2009
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico:** aspectos teóricos e com-

putacionais. São Paulo: Ed. MAKRON BOOKS, 1996.

SILVA, P. J. S. **Integração Numérica** . UNICAMP. São Paulo, 1 ed. V. 1. Setembro. 2017.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. Editora de direitos de aquisição e iconografia: Vivian Rosa, 2014. P. 350 - 354; 500 – 580.

THOMAS, G. B.; GIORDANO, W. H. **Cálculo**. Ed 11, v. 1. Addison Wesley. São Paulo, 2009.

VACCARI, A.; PACHECO, E. R. **O Método de Exaustão em Textos de História da Matemática** Unicentro. Paraná, 2007.

VENEZUELA, A. L.; PALUDETTO, T. R. V. **A Lógica da Demonstração pela Redução ao Absurdo**. Averso do Averso, v. 3, n. 3, p. 62 – 76. 2005.

ZAMBONI, L. **Cálculo Numérico para Universitários**. São Paulo: Páginas e Letras, 2002.