



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



GUSTAVO LUCIANO DE SOUZA

O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS

SÃO CARLOS
2021

GUSTAVO LUCIANO DE SOUZA

O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Tomas Edson Barros

SÃO CARLOS
2021



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 12/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GUSTAVO LUCIANO DE SOUZA

O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 28 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Tomas Edson Barros
Membro da Banca 1	Guillermo Antonio Lobos Villagra
Membro da Banca 2	José Nazareno Vieira Gomes



Documento assinado eletronicamente por **Jose Nazareno Vieira Gomes, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 12:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guillermo Antonio Lobos Villagra, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 12:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tomas Edson Barros, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 13:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0841127** e o código CRC **440329BC**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pois sem vocês nada seria possível.

Ao Dr. Tomas Edson Barros, pelo tempo e paciência a mim dedicados, por ter feito com que meus olhos brilhassem pela matemática, desde que ministrou aquela que foi a minha primeira aula na graduação, por sempre me incentivar a buscar e alcançar o melhor resultado, ainda que em tempos tão complicados, minha eterna gratidão e admiração.

A todos os professores do PPGM/USFCar que contribuíram imensamente para com a minha formação, meu muito obrigado.

E agradeço aos meus amigos, em especial, ao Nathan, que desde o começo me ajudou e tornou minha trajetória mais feliz.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos alguns conceitos da topologia algébrica como grupo fundamental e complexos simpliciais, então apresentaremos uma demonstração do teorema de classificação de superfícies fechadas.

Palavras-chave: Topologia. Grupo fundamental. Triangulações. Classificação. Superfícies Fechadas.

ABSTRACT

In this work we will study some concepts of algebraic topology such as fundamental group and simplicial complexes, then we will present a proof of the closed surface classification theorem.

Keywords: Topology. Fundamental group. Triangulations. Classification. Closed surfaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	GRUPO FUNDAMENTAL	8
2.1	APLICAÇÕES HOMOTÓPICAS:	8
2.2	GRUPO FUNDAMENTAL	9
2.3	CÁLCULO DO GRUPO FUNDAMENTAL	14
2.3.1	Espaços simplesmente conexos	14
2.3.2	Grupo fundamental do S^1	15
2.3.3	Recobrimento e espaços de órbitas	17
2.3.4	Grupo fundamental da Garrafa de Klein	19
2.4	TIPO DE HOMOTOPIA	25
2.5	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER	28
2.6	SUPERFÍCIES	29
3	TRIANGULAÇÕES	31
3.1	ESPAÇOS AFIM	31
3.2	SIMPLEXOS E COMPLEXO SIMPLICIAL	33
3.3	SUBDIVISÃO BARICÊNTRICA	36
3.4	APLICAÇÃO SIMPLICIAL	37
3.5	TEOREMA DE APROXIMAÇÃO SIMPLICIAL	39
3.6	TEOREMA DE REALIZAÇÃO	41
3.7	TRIANGULAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORBITA	41
3.8	GRUPO DE ARESTAS DE UM COMPLEXO SIMPLICIAL	42
3.9	TEOREMA DE VAN KAMPEN	46
3.9.1	Grupo fundamental do bitoro	48
4	TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO	51
4.1	SUPERFÍCIES PADRÃO	51
4.2	SUPERFÍCIES COMBINATÓRIAS	55
4.3	CARACTERÍSTICA DE EULER	60
4.4	CIRURGIA	64
4.5	SÍMBOLOS DE SUPERFÍCIE	68
4.6	CLASSIFICAÇÃO	72
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Resultados que possibilitam a classificação completa de uma coleção de objetos estão entre os mais importantes e esteticamente cativantes na Matemática. O fato de que esses resultados também são muito raros agregam maior valor e importância aos mesmos. Embora não exista nenhuma esperança de se ter uma classificação completa de todos os espaços topológicos a menos de homeomorfismo, este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo fazer um estudo da classificação completa das superfícies fechadas. O texto a seguir se divide em três grandes partes:

1. Grupo fundamental: Onde os tópicos envolvem a construção do grupo fundamental e mostrar que o mesmo é um invariante topológico, o cálculo do grupo fundamental de alguns espaços e ainda mostrar uma aplicação de grupo fundamental através do teorema do ponto fixo de Brower.
2. Triangulações: nesta parte o foco está em desenvolver as triangulações de espaços topológicos, construir o grupo de arestas de um complexo simplicial e mostrar que, dado um complexo simplicial K seu grupo de arestas $E(K, v)$ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(|K|, v)$ da realização geométrica $|K|$ de K .
3. Teorema de Classificação: onde uma demonstração para o teorema de classificação de superfícies fechadas é dividida nos seguintes tópicos, superfícies padrão, superfícies combinatorias, característica de Euler, cirurgia, símbolos de superfície, classificação.

As principais referências utilizadas para a construção desse texto foram (ARMSTRONG, 1983), (MUNKRES, 2000) e (ROTMAN, 1988) para os resultados de topológicos e (ROTMAN, 1995) para os resultados algébricos e imagens presentes neste trabalho são originais ou pequenas modificações de imagens presentes em (ARMSTRONG, 1983).

2 GRUPO FUNDAMENTAL

Determinar quando dois espaços topológicos são homeomorfos ou não é um tipo de problema fundamental na topologia e para resolvê-lo não existe nenhum método universal.

Para mostrar que dois espaços são homeomorfos, por mais trabalhoso que possa ser, basta construir um homeomorfismo entre os espaços, ou seja, uma aplicação bijetiva de um espaço para o outro contínua cuja a inversa também é contínua.

Um problema muito mais delicado é mostrar que dois espaços não são homeomorfos, pois há uma grande diferença entre não conseguir exibir um homeomorfismo e garantir que não existe um homeomorfismo. Então, normalmente para se mostrar que dois espaços não são homeomorfos é eficiente encontrar alguma propriedade topológica que seja válida para um espaço, mas que não seja válida para o outro. Sendo que propriedades topológicas são aquelas que são invariantes por homeomorfismo, como por exemplo conexidade, conexidade por caminhos e compacidade. Nesta parte do trabalho construiremos um invariante topológico muito eficiente para se utilizar em superfícies, que é o grupo de Poincaré ou grupo fundamental que é como o trataremos neste trabalho.

2.1 APLICAÇÕES HOMOTÓPICAS:

Dados dois espaços topológicos X, Y e funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, uma *homotopia* de f à g é uma função contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Se existe uma homotopia de f à g dizemos que f é homotópica à g e denotamos $f \simeq g$ (ou $f \simeq_H g$, sendo H a homotopia de f à g). Se $A \subseteq X$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, dizemos que $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ é uma *homotopia relativa* ao subconjunto A , de f à g , se H é uma homotopia de f à g e $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $(x, t) \in A \times [0, 1]$. Se existe uma homotopia relativa ao conjunto A , de f à g , dizemos que f é homotópica à g relativamente ao conjunto A e denotamos $f \simeq g \text{ rel}(A)$. Observamos que se f é homotópica à g então f é homotópica à g relativamente ao conjunto vazio.

Lema 2.1. *A relação de homotopia \simeq é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos verificar as propriedades de uma relação de equivalência.

Dado f , é fácil ver que $f \simeq f$, basta definirmos $F(x, t) = f(x)$ para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Logo vale a propriedade reflexiva.

Se $f \simeq_F f'$, basta definirmos $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ para todo $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Com isso temos que $f' \simeq f$, ou seja, vale a propriedade simétrica.

Por fim, sejam $f \simeq_F f'$ e $f' \simeq_{F'} f''$, vamos mostrar que $f \simeq f''$. Defina $G : X \times I \rightarrow Y$ por

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ F'(x, 2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A aplicação G está bem definida, pois se $t = \frac{1}{2}$, temos que $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$. Como G é contínua nos dois subconjuntos fechados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, então G é contínua em todo $X \times I$ pelo lema da colagem. Portanto G é uma homotopia entre f e f'' , logo vale a transitividade. Ou seja, a homotopia é uma relação de equivalência. \square

De modo completamente análogo, temos que homotopia relativa também é uma relação de equivalência. Observe também que a relação de homotopia relativa se comporta bem com respeito à composição de funções, ou seja, dadas $f, g : X \rightarrow Y$ tais que, $f \simeq_H g \text{ rel}(A)$ tem-se:

- Se $h : Y \rightarrow Z$ é uma função contínua então, $(h \circ f) \simeq_{h \circ H} (h \circ g) \text{ rel}(A)$.
- Se $k : Z \rightarrow X$ é uma função contínua então, $(f \circ k) \simeq_F (g \circ k) \text{ rel}(A)$ com $F(z, t) = H(k(z), t) \forall (z, t) \in Z \times [0, 1]$.

Seguem dois exemplos de aplicações homotópicas:

Exemplo 2.1. Seja C um subconjunto convexo de um espaço euclidiano \mathbb{R}^n e sejam $f, g : X \rightarrow C$ funções contínuas, onde X é um espaço topológico arbitrário. Como C é convexo, para cada ponto $x \in X$, o segmento de reta com extremos $f(x)$ e $g(x)$ está inteiramente contido em C . Assim, $F : X \times [0, 1] \rightarrow C$ definida por $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ é uma homotopia de f à g . Observe que se f e g por acaso coincidirem em um subconjunto A de X , então esta homotopia é uma homotopia relativa a A . Denominamos a homotopia F por *homotopia linear*.

Exemplo 2.2. Sejam $f, g : X \rightarrow S^n$ aplicações que, se avaliadas no mesmo ponto de X , nunca resultam num par de pontos antípodas de S^n (isto é, $f(x)$ e $g(x)$ nunca estão em extremidades opostas de um diâmetro). Se tomarmos S^n como a esfera unitária em E^{n+1} , e pensarmos em f, g como aplicações em E^{n+1} , teremos uma homotopia linear de f à g . Uma vez que $f(x)$ e $g(x)$ não são antípodais, cada segmento unindo $f(x)$ a $g(x)$ não passa pela origem. Portanto, podemos definir $F : X \times [0, 1] \rightarrow S^n$ como

$$F(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{\|(1 - t)f(x) + tg(x)\|}$$

Essa aplicação é uma homotopia de f para g .

2.2 GRUPO FUNDAMENTAL

Um *caminho* num espaço topológico X é uma função contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ onde $\alpha(0)$ é o *ponto inicial* do caminho α e $\alpha(1)$ é o *ponto final* desse caminho. Um *laço* em X , baseado

em $x_0 \in X$, é um caminho em X com pontos inicial e final iguais a x_0 . Denotamos o conjunto de todos os laços em X , baseados em x_0 , por $\Omega(X, x_0)$, ou seja,

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow X : \alpha \text{ é contínua e } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

Dados $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ define-se $\alpha * \beta \in \Omega(X, x_0)$ por,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Essa operação também pode ser definida para caminhos α e β , que não são necessariamente laços, desde que o ponto final de α coincida com o ponto inicial de β .

Percebe-se, sem maiores dificuldades, que $\Omega(X, x_0)$ equipado com essa operação não é um grupo (essa operação não é associativa e também não possui elemento neutro). Porém, se $\alpha \simeq_c \alpha'$ e $\beta \simeq_c \beta'$ (\simeq_c denota homotopia de caminhos, ou seja, homotopia relativa ao conjunto $\{0, 1\}$) então, $\alpha * \beta \simeq_c \alpha' * \beta'$. Assim, se $[\alpha] = \{\alpha' \in \Omega(X, x_0) : \alpha \simeq_c \alpha'\}$ é a classe de homotopia de caminhos de α então a operação $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ é bem definida no conjunto $\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \in \Omega(X, x_0)\}$. Assim temos nosso resultado que garante a construção do grupo fundamental.

Teorema 2.1. $\pi_1(X, x_0)$ equipado com a operação $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ é um grupo algébrico, denominado grupo fundamental do par (X, x_0) .

Demonstração. Vamos verificar se a nossa operação $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ é associativa, tem elemento neutro e a existência de elemento inverso, para que $\pi_1(X, x_0)$ seja um grupo.

Note que $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) = [\alpha] * [\beta * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$ e por outro lado temos que $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$. Portanto para mostrarmos a associatividade, basta mostrarmos que $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_c (\alpha * \beta) * \gamma$. Temos que:

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\beta)(4t - 2) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ (\gamma)(4t - 3) & \text{se } 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por outro lado, temos que:

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/4 \\ (\beta)(4t - 1) & \text{se } 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ (\gamma)(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim, seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$f(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } 0 \leq s \leq 1/4 \\ s + 1/4 & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \frac{s+1}{2} & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} [(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ f](s) &= \begin{cases} \alpha(2f(s)) & \text{se } 0 \leq f(s) \leq 1/2 \\ (\beta)(4f(s) - 2) & \text{se } 1/2 \leq f(s) \leq 3/4 \\ (\gamma)(4f(s) - 3) & \text{se } 3/4 \leq f(s) \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(4s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/4 \\ (\beta)(4s - 1) & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ (\gamma)(2s - 1) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} \\ &= ((\alpha * \beta) * \gamma)(s) \end{aligned}$$

Note que $f \simeq_H id_{[0,1]}$ rel $\{0, 1\}$ sendo, $H(s, t) = (1 - t)f(s) + t(s)$ para todo $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$, logo temos que:

$$(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ f \simeq_{(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ H} (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ id_{[0,1]} = \alpha * (\beta * \gamma)$$

e portanto vale a associatividade, agora vamos verificar a existência do elemento neutro.

Seja $e : [0, 1] \rightarrow X$ o caminho constante, $e(s) = x_0$ para todo $s \in [0, 1]$, mostraremos que para cada caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ baseado em x_0 temos que $\alpha * e \simeq_c \alpha$. Para isso temos a função auxiliar $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$g(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Assim para $s \in [0, 1]$ temos que:

$$(\alpha \circ g)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ x_0 & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = (\alpha * e)(s)$$

Observe que $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$. Além disso, $g \simeq_F id_{[0,1]}$ rel $\{0, 1\}$, sendo $F(s, t) = (1 - t)g(s) + ts \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Logo, $\alpha * e = (\alpha \circ g) \simeq_{\alpha \circ F} (\alpha \circ id_{[0,1]}) = \alpha$. E de forma análoga, teremos que $e * \alpha \simeq_c \alpha$. Portanto temos $[e]$ como elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$.

Por fim, seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ baseado em x_0 definimos o laço inverso $\alpha^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ por, $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t) \forall t \in [0, 1]$.

Desta forma, dados dois laços α e β em X baseado em x_0 temos que:

$$\alpha \simeq_c \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1} \simeq_c \beta^{-1}$$

Assim para cada $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ podemos definir, $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$. Agora basta verificarmos que $[\alpha] * [\alpha]^{-1} = [\alpha]^{-1} * [\alpha] = [e]$. Para isso vamos definir uma função auxiliar $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ da seguinte forma:

$$f(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ 2 - 2s & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Temos assim que:

$$(\alpha \circ f)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2 - 2s) & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \alpha * \alpha^{-1}$$

Desta forma, note que $f(0) = f(1) = 0$ então temos $f \simeq g$ rel $\{0, 1\}$ com $g(s) = 0 \forall s \in [0, 1]$. Portanto temos que:

$$\alpha * \alpha^{-1} = \alpha \circ f \simeq \alpha \circ g = e$$

ou seja, $[\alpha] * [\alpha]^{-1} = e$, e de modo completamente análogo temos $[\alpha]^{-1} * [\alpha] = e$.

Portanto $\pi_1(X, x_0)$ é realmente um grupo algébrico. \square

Agora, sejam $\alpha, \alpha', \beta, \beta' : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos tais que, $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\alpha'(1) = \beta'(0)$ com $\alpha \simeq_c \alpha'$ e $\beta \simeq_c \beta'$. Para cada $x \in X$ seja, e_x o caminho constante igual a x . Nessas condições temos as seguintes três propriedades que serão uteis para mostrarmos o próximo teorema.

- Temos que $\alpha * \beta \simeq_c \alpha' * \beta'$
- Se γ é um caminho tal que, $\gamma(0) = \beta(1)$ então $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_c \alpha * (\beta * \gamma)$
- Se α^{-1} é definida por $\alpha^{-1} = \alpha(1 - t)$ então $\alpha * \alpha^{-1} \simeq_c e_{\alpha(0)}$ e $\alpha^{-1} * \alpha \simeq_c e_{\alpha(1)}$

Teorema 2.2. Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X então

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

sendo \cong a notação que utilizaremos para isomorfismo.

Demonstração. Seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ contínua com $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$ e definimos $f_\sigma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por $f_\sigma([\alpha]) = [\sigma^{-1} * \alpha * \sigma]$. Segue das propriedade (a) e (b) acima que $\alpha \simeq_c \alpha' \Rightarrow f_\sigma([\alpha]) = f_\sigma([\alpha'])$, ou seja, f_σ é bem definida. Agora vamos mostrar que se trata de um homomorfismo.

$$\begin{aligned} f_\sigma([\alpha] * [\beta]) &= [\sigma^{-1} * (\alpha * \beta) * \sigma] = [\sigma^{-1} * (\alpha * e_{x_0} * \beta) * \sigma] \\ &= [\sigma^{-1} * (\alpha * (\sigma * \sigma^{-1}) * \beta) * \sigma] \\ &= [\sigma^{-1} * \alpha * \sigma] * [\sigma^{-1} * \beta * \sigma] = f_\sigma([\alpha]) * f_\sigma([\beta]) \end{aligned}$$

Agora seja $f_{\sigma^{-1}} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x_1)$ temos que,

$$\begin{aligned} f_{\sigma} \circ f_{\sigma^{-1}}([\alpha]) &= [\sigma^{-1} * ((\sigma^{-1})^{-1} * \alpha * \sigma^{-1}) * \sigma] \\ &= [(\sigma^{-1} * ((\sigma^{-1})^{-1}) * \alpha * (\sigma^{-1} * \sigma))] \\ &= [e_{x_1} * \alpha * e_{x_1}] = [\alpha] \end{aligned}$$

E se $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ segue que

$$\begin{aligned} f_{\sigma^{-1}} \circ f_{\sigma}([\beta]) &= [(\sigma^{-1})^{-1} * (\sigma^{-1} * \beta * \sigma) * \sigma^{-1}] \\ &= [((\sigma^{-1})^{-1} * \sigma^{-1}) * \beta * (\sigma * \sigma^{-1})] \\ &= [e_{x_0} * \beta * e_{x_0}] = [\beta] \end{aligned}$$

Portanto f_{σ} é inversível com $f_{\sigma}^{-1} = f_{\sigma^{-1}}$, ou seja, f_{σ} é um isomorfismo. \square

Visto o teorema 2.2, temos garantido que quando X for conexo podemos sempre procurar um ponto base mais conveniente para o cálculo do grupo fundamental sem medo de isso alterar o resultado final. Agora nos interessa concluir que o grupo fundamental é realmente um invariante topológico, para isso seguem algumas proposições.

Proposição 2.1. *Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então existe um homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, chamado homomorfismo induzido por f , o qual também é denotado por $f_* = \pi_1(f)$.*

Demonstração. $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ é definido por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ e f_* é bem definido pois,

$$\begin{aligned} [\alpha] = [\beta] \in \pi(X, x_0) &\Rightarrow \alpha \simeq_c \beta \Rightarrow f \circ \alpha \simeq_c f \circ \beta, \text{ ou seja,} \\ f_*([\alpha]) &= [f \circ \alpha] = [f \circ \beta] = f_*([\beta]) \end{aligned}$$

Agora basta verificarmos que f_* é um homomorfismo. Sejam $[\alpha], [\beta]$ em $\pi(X, x_0)$ e $t \in I$, temos que,

$$\begin{aligned} f \circ (\alpha * \beta)(t) &= f((\alpha * \beta)(t)) \\ &= \begin{cases} f(\alpha(2t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(\beta(2t - 1)) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= ((f \circ \alpha) * (f \circ \beta))(t) \end{aligned}$$

Assim $[f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)]$. Portanto:

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) \end{aligned}$$

\square

Proposição 2.2. Se $\text{id}_X : X \rightarrow X$ é a aplicação identidade então $(\text{id}_X)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade, ou seja, $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

Demonstração. Para cada $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ temos que, $(\text{id}_X)_*([\alpha]) = [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ \square

Proposição 2.3. Se $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))$ e $g : (Y, f(x_0)) \rightarrow (Z, g(f(x_0)))$ são aplicações contínuas então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, ou seja, $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$

Demonstração. Para todo $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) \\ &= (g_* \circ f_*)([\alpha]) \end{aligned}$$

Consequentemente $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ \square

Corolário 2.1. Sejam X, Y espaços topológicos conexos por caminhos e $x_0 \in X$. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo então, $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo.

Demonstração. Como f é um homeomorfismo, temos que f^{-1} é uma função contínua. Sejam, $\pi_1(f) = f_*$ e $\pi_1(f^{-1}) = (f^{-1})_*$ os homomorfismo induzidos por f e f^{-1} respectivamente, desta forma temos que:

$$\begin{aligned} \pi_1(f) \circ \pi_1(f^{-1}) &= \pi_1(f \circ f^{-1}) \quad \text{pela proposição 2.3} \\ &= \pi_1(\text{id}_Y) \\ &= \text{id}_{\pi_1(Y, f(x_0))} \quad \text{pela proposição 2.2} \end{aligned}$$

Analogamente temos que $\pi_1(f^{-1}) \circ \pi_1(f) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Portanto, f_* é um isomorfismo. \square

Portanto, se os grupos fundamentais de dois espaços conexos por caminhos não são isomorfos então esses espaços não são homeomorfos.

2.3 CÁLCULO DO GRUPO FUNDAMENTAL

Uma vez feita a construção teórica do grupo fundamental, seguem alguns exemplos de cálculo de grupo fundamental:

2.3.1 Espaços simplesmente conexos

Se X é um espaço conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial, ou seja, o grupo formado por apenas um único elemento, então X é o que chamamos de um espaço *simplesmente conexo*.

Como exemplo vamos verificar que todo subconjunto estrelado de \mathbb{R}^n é simplesmente conexo, em especial, teremos que para $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^n é simplesmente conexo. Lembrando que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de estrelado se existe $x_0 \in X$, que chamaremos de ponto de *centro*, tal que o segmento $[x, x_0] = \{(1-t)x + tx_0 \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq X$ para todo $x \in X$.

Exemplo 2.3. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um espaço estrelado, então como todo conjunto estrelado é conexo por caminhos, pelo teorema 2.2 o grupo fundamental de X não depende do ponto base. Então podemos tomar o ponto de centro $x_0 \in X$ como ponto base. Desta forma, seja α um laço qualquer em X , baseado em x_0 , então, $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ definida por

$$H(s, t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$$

é uma homotopia (de caminhos) entre α e a função constante e_{x_0} .

2.3.2 Grupo fundamental do S^1

Como exemplo, mostraremos que o grupo fundamental do S^1 é isomorfo a \mathbb{Z} , ou seja $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sejam,

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\exp(x) = e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i \cdot \text{sen}(2\pi x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_n(t) = nt$ para todo $t \in [0, 1]$.

Então, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$, definida por $f(n) = [\exp \circ \gamma_n]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ é um isomorfismo.

A demonstração de que f é um homomorfismo decorre de forma relativamente simples. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ e seja $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(t) = \gamma_n(t) + m \quad \forall t \in [0, 1]$. Observamos que $\sigma(0) = m$ e $\sigma(1) = m + n$. Desta forma:

$$(\exp \circ \sigma)(t) = e^{2\pi i(nt+m)} = e^{2\pi int} e^{2\pi im} = e^{2\pi int} \cdot 1 = e^{2\pi int} = (\exp \circ \gamma_n)(t)$$

Assim seja,

$$\gamma(t) = \gamma_m * \sigma(t) = \begin{cases} \gamma_m(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \sigma(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Temos que, $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = \sigma(1) = m + n$. Logo, $\gamma \simeq_c \gamma_{m+n}$ (pois o contradomínio de ambos é o convexo \mathbb{R}). Assim tem-se que:

$$\begin{aligned} f(m+n) &= [\exp \circ \gamma_{m+n}] = [\exp \circ (\gamma_m * \sigma)] \\ &= [(\exp \circ \gamma_m) * (\exp \circ \sigma)] \\ &= [(\exp \circ \gamma_m)] * [(\exp \circ \gamma_n)] = f(m) * f(n) \end{aligned}$$

Para a demonstração da sobrejetividade de f necessitaremos do lema 2.2 e para a demonstração da injetividade de f será necessário o lema 2.3. Para a demonstração desses

lemas o leitor pode consultar respectivamente (ARMSTRONG, 1983, p.97) e (ARMSTRONG, 1983, p.98)

Lema 2.2 (Levantamento de caminhos). *Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ um caminho em S^1 tal que $\alpha(0) = 1$. Seja $x_0 \in \exp^{-1}(1)$. Então, existe um único caminho $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ e $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}, x_0) \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \exp \\ ([0, 1], 0) & \xrightarrow{\alpha} & (S^1, 1) \end{array}$$

Qualquer caminho $\tilde{\beta}$ tal que, $\exp \circ \tilde{\beta} = \alpha$ é chamado levantamento de α .

- f é sobrejetora

Seja $[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1)$. Segue do Lema 2.2 que existe um único caminho $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\tilde{\alpha}(0) = 0$ e $\exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Note que, $(\exp \circ \tilde{\alpha})(1) = \alpha(1) = 1$, ou seja, $n = \tilde{\alpha}(1) \in \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Como \mathbb{R} é estrelado segue que, $\tilde{\alpha} \simeq_c \gamma_n$, portanto $[\alpha] = [\exp \circ \tilde{\alpha}] = [\exp \circ \gamma_n] = f(n)$, ou seja, f é sobrejetora.

Lema 2.3. *Dados, um caminho $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ tal que, $F(s, 0) = \exp \circ \tilde{\alpha}(s) \forall s \in [0, 1]$ então existe uma única $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$ para todo $s \in [0, 1]$ e $\exp \circ \tilde{F} = F$.*

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathbb{R} \\ j \downarrow & \circlearrowleft \tilde{F} \nearrow & \downarrow \exp \\ [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & S^1 \end{array}$$

$j(s) = (s, 0)$ para todo $s \in [0, 1]$.

- f é injetora

Sejam $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que, $f(n) = f(m)$, temos que, $[\exp \circ \gamma_n] = [\exp \circ \gamma_m]$, desta forma, existe $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ tal que,

$$\begin{cases} F(s, 0) = (\exp \circ \gamma_n)(s) & \text{se } s \in [0, 1] \\ F(s, 1) = (\exp \circ \gamma_m)(s) & \text{se } s \in [0, 1] \\ F(0, t) = F(1, t) = 1 & \text{se } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Segue do lema 2.3 que existe $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\tilde{F}(s, 0) = \gamma_n(s)$ para todo $s \in [0, 1]$ e $\exp \circ \tilde{F} = F$.

Desta forma temos que, $\exp \circ \tilde{F}(0, t) = F(0, t) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, $\tilde{F}(\{0\} \times [0, 1]) \subseteq \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Note que $\{0\} \times [0, 1]$ é conexo e \tilde{F} é contínua. Logo, $\tilde{F}(\{0\} \times [0, 1])$ é um subconjunto conexo de \mathbb{Z} . Portanto, $\tilde{F}(\{0\} \times [0, 1]) = \{k\}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas, $\tilde{F}(0, 0) = \gamma_n(0) = 0$. Assim, $\tilde{F}(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo temos que, $\exp \circ \tilde{F}(1, t) = F(1, t) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$.

Portanto $\tilde{F}(\{1\} \times [0, 1]) \subseteq \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ e como $\{1\} \times [0, 1]$ é conexo e \tilde{F} é contínua, temos que $\tilde{F}(\{1\} \times [0, 1])$ é um subconjunto conexo de \mathbb{Z} . Portanto, $\tilde{F}(\{1\} \times [0, 1]) = \{k\}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Mas, $\tilde{F}(1, 0) = \gamma_n(1) = n$. Assim, $\tilde{F}(1, t) = n$ para todo $t \in [0, 1]$.

O caminho, $s \mapsto \tilde{F}(s, 1)$ é um levantamento do caminho $\exp \circ \gamma_m$ (pois, $\exp(\tilde{F}(s, 1)) = F(s, 1) = \exp \circ \gamma_m(s)$) e tem ponto inicial $\tilde{F}(0, 1) = 0$, mas γ_m também é um levantamento de $\exp \circ \gamma_m$ com ponto inicial em $\gamma_m(0) = 0$. Segue então do lema 2.2 que, $\tilde{F}(s, 1) = \gamma_m(s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Desta forma, em particular, temos que $\tilde{F}(1, 1) = \gamma_m(1) = m$ e $\tilde{F}(1, 1) = n$ (pois, $\tilde{F}(1, t) = n$ para todo $t \in [0, 1]$). Logo $n = m$.

2.3.3 Recobrimento e espaços de órbitas

A definição de recobrimento e de espaço de órbitas junto de alguns importantes resultados são muito úteis para o cálculo de alguns grupos fundamentais. O cálculo do grupo fundamental de S^1 foi uma prévia das ideias que temos aqui.

Definição 2.1. Dado um espaço X , dizemos que um espaço \tilde{X} é um *espaço de recobrimento* de X se existe uma função contínua $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ (chamada *aplicação de recobrimento*) tal que, para cada $x \in X$ existe um aberto U_x que contém x com as seguintes propriedades:

- $\pi^{-1}(U_x) = \bigcup_j V_j^x$, sendo cada V_j^x um aberto de \tilde{X} e $V_j^x \cap V_i^x = \emptyset$ se $i \neq j$;
- $\pi|_{V_j^x} : V_j^x \rightarrow U_x$ é um homeomorfismo.

Podemos generalizar os lemas 2.2 e 2.3 da seguinte forma

Teorema 2.3 (levantamento de caminho). *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Dados, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e um caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ em X tal que $\alpha(0) = \pi(\tilde{x}_0) = x_0$, então existe um único caminho $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ e $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \pi \\
 ([0, 1], 0) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0)
 \end{array}$$

Teorema 2.4 (Levantamento de homotopia). *Sejam Y um espaço conexo e $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Dados;*

- $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$.
- $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que, $F(y, 0) = \pi \circ \tilde{f}(y) \forall y \in Y$.

então, existe uma única $\tilde{F} : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que, $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ para todo $y \in Y$ e $\pi \circ \tilde{F} = F$.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} \\
 j \downarrow & \circlearrowleft \tilde{F} & \downarrow \pi \\
 Y \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & X
 \end{array}$$

$$j(y) = (y, 0) \text{ para todo } y \in Y.$$

Em posse desses teoremas, a outra ideia importante que veremos aqui se baseia na *ação de grupos*. Um grupo (G, \cdot) é dito um *grupo topológico* se G é um espaço topológico e as funções $P : G \times G \rightarrow G$ e $I : G \rightarrow G$ definidas respectivamente por $P(g, h) := g \cdot h$ e $I(g) = g^{-1}$ são contínuas. Desta forma podemos definir ação de grupo:

Definição 2.2. Um grupo topológico G atua, como grupo de homeomorfismos, sobre um espaço topológico X se cada elemento do grupo induz um homeomorfismo de X em X tal que,

- (i) $(h \cdot g)(x) = h(g(x))$ para todos $g, h \in G$ e para todo $x \in X$;
- (ii) $1_G(x) = x$ para todo $x \in X$, onde 1_G é o elemento neutro de G ;
- (iii) A função $G \times X \rightarrow X$ definida por, $(g, x) \mapsto g(x)$ é contínua.

Toda ação $G \times X \rightarrow X$ determina uma relação de equivalência \sim tal que, $x \sim y \Leftrightarrow$ existe $g \in G$ tal que $y = g(x)$. O espaço quociente determinado por essa relação de equivalência é chamado *espaço de órbitas* da ação e é denotado por X/G .

Exemplo 2.4. A função $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por, $(n, x) \mapsto n + x$ é uma ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} . Aqui, \mathbb{Z} é considerado grupo topológico equipado com a topologia discreta. O espaço de órbitas dessa ação é homeomorfo ao círculo unitário S^1 .

E por fim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.5. *Sejam G um grupo topológico discreto, X um espaço topológico simplesmente conexo e $\varphi : G \times X \rightarrow X$ uma ação, $\varphi(g, x) = g \cdot x$, de G sobre X tal que, para todo $x \in X$ existe um aberto $U \subseteq X$ tal que, $x \in U$ e $U \cap g \cdot U = \emptyset$ para todo $g \in G - \{1_G\}$. Então, a aplicação quociente, $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento.*

Corolário 2.2. *Sejam, G, X e $\varphi : G \times X \rightarrow X$ como no teorema 2.5 acima e $x_0 \in X$. Para cada $g \in G$, seja $\gamma_g : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho com ponto inicial $\gamma_g(0) = x_0$ e ponto final $\gamma_g(1) = g \cdot x_0$. Então, $f : G \rightarrow \pi_1(X/G, [x_0])$, $f(g) = [\pi \circ \gamma_g]$ é um isomorfismo.*

A demonstração deste corolário se dá de modo análogo ao que foi feito para demonstrar que $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, mas desta vez utilizando os teoremas 2.3, 2.4 e 2.5. Pode-se encontrar em (ARMSTRONG, 1983, p.100) um esboço dessa demonstração.

2.3.4 Grupo fundamental da Garrafa de Klein

De posse dos resultados da sessão anterior vamos calcular o grupo fundamental da garrafa de Klein, que podemos definir como sendo o espaço quociente $Q/R = ([0, 1] \times [0, 1])/R$, sendo R a relação de equivalência sobre Q gerada por $(0, t)R(1, 1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$ e $(s, 0)R(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Seja $G = \langle t, u; u^{-1}tu = t^{-1} \rangle$, o grupo com dois geradores t e u e uma única relação, $u^{-1}tu = t^{-1}$. Note que,

$$\begin{aligned} u^{-1}tu = t^{-1} &\Leftrightarrow (u^{-1}tu)t = t^{-1}t \Leftrightarrow u^{-1}tut = 1_G \\ &\Leftrightarrow (t^{-1}u)(u^{-1}tut) = t^{-1}u \Leftrightarrow ut = t^{-1}u \end{aligned}$$

Note também que,

$$u^{-1}tu = t^{-1} \Leftrightarrow u(u^{-1}tu) = ut^{-1} \Leftrightarrow tu = ut^{-1}$$

Desta forma, segue que,

$$\begin{aligned} u^{-1}t &= (t^{-1}u)^{-1} = (ut)^{-1} = t^{-1}u^{-1} \\ tu^{-1} &= (ut^{-1})^{-1} = (tu)^{-1} = u^{-1}t^{-1} \end{aligned}$$

Portanto fica demonstrado o seguinte lema.

Lema 2.4. $u^\varepsilon t = t^{-1}u^\varepsilon$ e $tu^\varepsilon = u^\varepsilon t^{-1}$ para $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$.

Seguem do lema 2.4, usando indução finita, os seguintes corolários.

Corolário 2.3. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que,*

- a) $u^{2n}t = tu^{2n}$;
- b) $u^{2n}t^{-1} = t^{-1}u^{2n}$.

Demonstração. Mostremos o item b). Observe que, $u^{2 \cdot 0}t^{-1} = t^{-1} = t^{-1}u^{2 \cdot 0}$. Além disso, para $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, segue do lema 2.4 que,

$$u^{2\varepsilon}t^{-1} = (u^\varepsilon u^\varepsilon)t^{-1} = u^\varepsilon(u^\varepsilon t^{-1}) = u^\varepsilon(tu^\varepsilon) = (u^\varepsilon t)u^\varepsilon = (t^{-1}u^\varepsilon)u^\varepsilon = t^{-1}(u^\varepsilon u^\varepsilon) = t^{-1}u^{2\varepsilon}$$

Supondo que $u^{2n\epsilon}t^{-1} = t^{-1}u^{2n\epsilon}$ para algum $n \geq 1$ temos que,

$$\begin{aligned} u^{2(n+1)\epsilon}t^{-1} &= (u^{2n\epsilon}u^{2\epsilon})t^{-1} = u^{2n\epsilon}(u^{2\epsilon}t^{-1}) = u^{2n\epsilon}(t^{-1}u^{2\epsilon}) = (u^{2n\epsilon}t^{-1})u^{2\epsilon} = (t^{-1}u^{2n\epsilon})u^{2\epsilon} \\ &= t^{-1}(u^{2n\epsilon}u^{2\epsilon}) = t^{-1}u^{2(n+1)\epsilon} \end{aligned}$$

Por indução finita concluímos que $u^{2n\epsilon}t^{-1} = t^{-1}u^{2n\epsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u^{2n}t^{-1} = t^{-1}u^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. \square

Corolário 2.4. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos que,

$$a) u^{2n+1}t = t^{-1}u^{2n+1};$$

$$b) u^{2n+1}t^{-1} = tu^{2n+1}.$$

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, segue do lema 2.4 e do corolário 2.3 que,

$$u^{2n+1}t = (u^{2n}u)t = u^{2n}(ut) = u^{2n}(t^{-1}u) = (u^{2n}t^{-1})u = (t^{-1}u^{2n})u = t^{-1}(u^{2n}u) = t^{-1}u^{2n+1}$$

$$u^{2n+1}t^{-1} = (u^{2n}u)t^{-1} = u^{2n}(ut^{-1}) = u^{2n}(tu) = (u^{2n}t)u = (tu^{2n})u = t(u^{2n}u) = tu^{2n+1}$$

\square

Como consequência imediata temos o seguinte resultado.

Teorema 2.6. Todo elemento de G tem a forma de $u^m t^n$ para certos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Desta forma considere a ação $G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que,

$$t \cdot (x, y) = (x + 1, y) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$u \cdot (x, y) = (-x + 1, y + 1) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

Segue que,

$$\begin{aligned} t^{-1} \cdot (x, y) &= t^{-1} \cdot (t \cdot (x - 1, y)) = (t^{-1}t) \cdot (x - 1, y) = 1_G \cdot (x - 1, y) \\ &= (x - 1, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{-1} \cdot (x, y) &= u^{-1} \cdot (u \cdot (-x + 1, y - 1)) = (u^{-1}u) \cdot (-x + 1, y - 1) \\ &= 1_G \cdot (-x + 1, y - 1) = (-x + 1, y - 1) \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que,

$$\begin{aligned} u^{-1} \cdot (t \cdot (u \cdot (t \cdot (x, y)))) &= u^{-1} \cdot (t \cdot (u \cdot (x + 1, y))) \\ &= u^{-1} \cdot (t \cdot (-x, y + 1)) \\ &= u^{-1} \cdot (-x + 1, y + 1) \\ &= (-(-x + 1) + 1, (y + 1) - 1) \\ &= (x, y) = 1_G \cdot (x, y) \end{aligned}$$

Assim, $(u^{-1}tut) \cdot (x, y) = u^{-1} \cdot (t \cdot (u \cdot (t \cdot (x, y))))$. Portanto (1) e (2) acima realmente geram uma ação de $G = \langle u, t \mid u^{-1}tut = 1_G \rangle$ sobre \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.7. Para todo $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ segue que,

$$(u^n t^m) \cdot (x, y) = \begin{cases} (-x - m + 1, y + n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (x + m, y + n) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração. Note que se $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$ segue que:

$$t^\varepsilon \cdot (x, y) = (x + \varepsilon, y) \quad e \quad u^\varepsilon \cdot (x, y) = (-x + 1, y + \varepsilon) \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Assim temos que $t^n \cdot (x, y) = (x + n, y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pois;

$$t^{0 \cdot \varepsilon} \cdot (x, y) = 1_G \cdot (x, y) = (x, y) = (x + 0 \cdot \varepsilon, y)$$

$$t^{1 \cdot \varepsilon} \cdot (x, y) = (x + 1\varepsilon, y)$$

Supondo que $t^{n\varepsilon} \cdot (x, y) = (x + n\varepsilon, y)$ para algum $n \geq 1$ segue que,

$$t^{(n+1)\varepsilon} \cdot (x, y) = t^{n\varepsilon} \cdot (t^\varepsilon \cdot (x, y)) = t^{n\varepsilon} \cdot (x + \varepsilon, y) = ((x + \varepsilon) + n\varepsilon, y) = (x + (n + 1)\varepsilon, y)$$

segue por indução finita que, $t^{n\varepsilon} \cdot (x, y) = (x + n\varepsilon, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$t^n \cdot (x, y) = (x + n, y) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Assim $u^{2n} = (x, y + 2n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pois

$$\begin{aligned} u^{0 \cdot \varepsilon} \cdot (x, y) &= 1_G \cdot (x, y) = (x, y) = (x, y + 0 \cdot \varepsilon) \\ u^{2\varepsilon} \cdot (x, y) &= u^\varepsilon \cdot (u^\varepsilon \cdot (x, y)) = u^\varepsilon \cdot (-x + 1, y + \varepsilon) \\ &= (-(-x + 1) + 1, (y + \varepsilon) + \varepsilon) = (x, y + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

Supondo que $u^{2n\varepsilon} \cdot (x, y) = (x, y + 2n\varepsilon)$ para algum $n \geq 1$ então,

$$\begin{aligned} u^{2(n+1)\varepsilon} \cdot (x, y) &= u^{2n\varepsilon} \cdot (u^{2\varepsilon} \cdot (x, y)) = u^{2n\varepsilon} \cdot (x, y + 2\varepsilon) \\ &= (x, (y + 2\varepsilon) + 2n\varepsilon) = (x, y + 2(n + 1)\varepsilon) \end{aligned}$$

Por indução finita temos que, $u^{2n\varepsilon} \cdot (x, y) = (x, y + 2n\varepsilon)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$u^{2n} \cdot (x, y) = (x, y + 2n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Como consequência segue que para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u^{2n+1} \cdot (x, y) &= u^{2n} \cdot (u \cdot (x, y)) = u^{2n} \cdot (-x + 1, y + 1) \\ &= (-x + 1, (y + 1) + 2n) = (-x + 1, y + (2n + 1)) \end{aligned}$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ segue que,

$$u^n \cdot (x, y) = \begin{cases} (-x + 1, y + n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (x, y + n) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Desta forma segue finalmente, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(u^n t^m) \cdot (x, y) = u^n \cdot (x + m, y) = \begin{cases} (-(x + m) + 1, y + n) & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (x + m, y + n) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

□

Teorema 2.8. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja $U_{(x,y)} = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \times (y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$. Então,

$$U \cap g \cdot U = \emptyset \text{ para todo } g \in G - \{1_G\}$$

Demonstração. Seja $(a, b) \in U_{(x,y)}$ e seja $g \in G - \{1_G\}$. Segue do teorema 2.7 que existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que, $g = u^n t^m$.

- Se $n > 0$ segue que,

$$n > 0 \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - \frac{1}{2} + n \geq y + \frac{1}{2}$$

Assim, $y - \frac{1}{2} < b < y + \frac{1}{2}$ e $y + \frac{1}{2} \leq y - \frac{1}{2} + n < b + n < y + \frac{1}{2} + n$. Logo, $g \cdot (a, b) \notin U_{(a,b)}$ sendo n par ou ímpar.

- Se $n < 0$ segue que,

$$n < 0 \Rightarrow n \leq -1 \Rightarrow n + \frac{1}{2} \leq -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y + \frac{1}{2} + n \leq y - \frac{1}{2}$$

Assim, $y - \frac{1}{2} < b < y + \frac{1}{2}$ e $y - \frac{1}{2} + n < b + n < y + \frac{1}{2} + n \leq y - \frac{1}{2}$. Logo, $g \cdot (a, b) \notin U_{(a,b)}$ sendo n par ou ímpar.

- Se $n = 0$ então, $m \neq 0$.

- Se $n = 0$ e $m > 0$ segue que,

$$m > 0 \Rightarrow m \geq 1 \Rightarrow m - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} + m \geq x + \frac{1}{2}$$

Assim, $x - \frac{1}{2} < a < x + \frac{1}{2}$ e $x + \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} + m < a + m < x + \frac{1}{2} + m$. Logo, $g \cdot (a, b) = (u^0 t^m) \cdot (a, b) = t^m \cdot (a, b) = (a + m, b) \notin U_{(x, y)}$.

• Se $n = 0$ e $m < 0$ segue que,

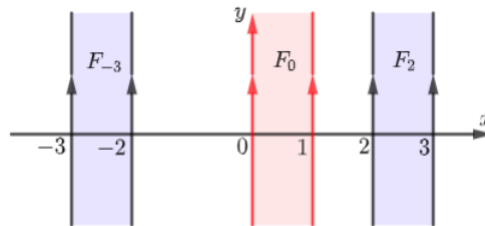
$$m < 0 \Rightarrow m \leq -1 \Rightarrow m + \frac{1}{2} \leq -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} + m \leq x - \frac{1}{2}$$

Assim, $x - \frac{1}{2} < a < x + \frac{1}{2}$ e $x - \frac{1}{2} + m < a + m < x + \frac{1}{2} + m \leq x - \frac{1}{2}$. Logo, $g \cdot (a, b) = (u^0 t^m) \cdot (a, b) = t^m \cdot (a, b) = (a + m, b) \notin U_{(x, y)}$.

□

Segue então do Teorema 2.5 que temos uma aplicação de recobrimento, desta forma vamos ao espaço órbitas \mathbb{R}^2/G .

Note que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, a faixa vertical $F_n = [n, n + 1] \times \mathbb{R}$ pode ser identificada, perante a ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R}^2 , com a faixa $F_0 = [0, 1] \times \mathbb{R}^2$ pois, $F_0 = t^{-n} \cdot F_n$. Para verificar isso, seja $(x, y) \in F_n$. Assim, $n \leq x \leq n + 1$. Mas $t^{-n} \cdot (x, y) = (x - n, y)$ logo, $0 = n - n \leq x - n \leq (n + 1) - n = 1$. De onde segue que, $t^{-n} \cdot (x, y) \in F_0$.



Na faixa F_0 segue as seguintes identificações:

• Os quadrados $Q_{2n} = [0, 1] \times [2n, 2n + 1]$ ($n \in \mathbb{Z}$) são identificados com $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$

Pois, dado $(x, y) \in Q_{2n}$ temos que, $u^{-2n} \cdot (x, y) = (x, y - 2n) \in Q_0$ pois, como $2n \leq y \leq 2n + 1$ segue que, $0 \leq y - 2n \leq 1$. Além disso,

$(0, 2n)$ é identificado com $(0, 0)$;

$(1, 2n)$ é identificado com $(1, 0)$;

$(0, 2n + 1)$ é identificado com $(0, 1)$;

$(1, 2n + 1)$ é identificado com $(1, 1)$.

• Os quadrados $Q_{2n+1} = [0, 1] \times [2n + 1, 2n + 2]$ são identificados com $Q_1 = [0, 1] \times [1, 2]$

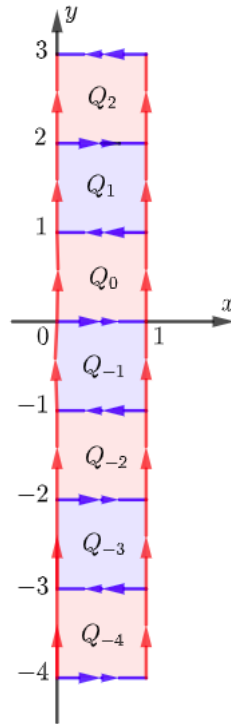
Dado $(x, y) \in Q_{2n+1}$ temos que, $u^{-2n} \cdot (x, y) = (x, y - 2n) \in Q_1$ pois, como $2n + 1 \leq y \leq 2n + 2$ segue que, $1 \leq y - 2n \leq 2$. Além disso,

$(0, 2n + 1)$ é identificado com $(0, 1)$;

$(1, 2n + 1)$ é identificado com $(1, 1)$;

$(0, 2n + 2)$ é identificado com $(0, 2)$;

$(1, 2n + 2)$ é identificado com $(1, 2)$.

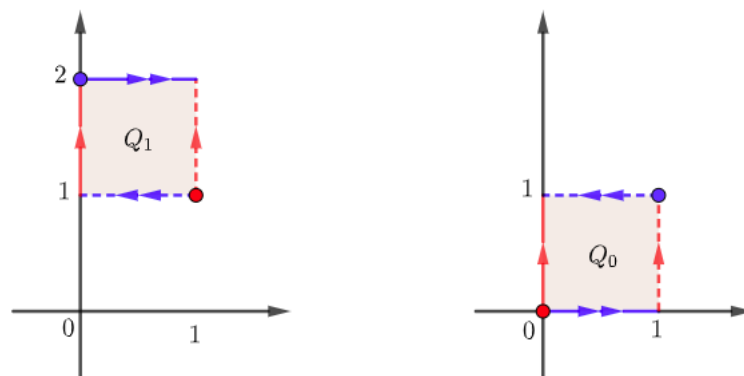


Desta forma, restam apenas os quadrados Q_0 e Q_1 . Observe que em Q_0 o segmento $\{1\} \times [0, 1]$ é identificado com $\{0\} \times [0, 1]$ ($t^{-1} \cdot (\{1\} \times [0, 1]) = \{0\} \times [0, 1]$) e o segmento $[0, 1] \times \{1\}$ é identificado com $[0, 1] \times \{0\}$ ($u^{-1} \cdot ([0, 1] \times \{1\}) = [0, 1] \times \{0\}$).

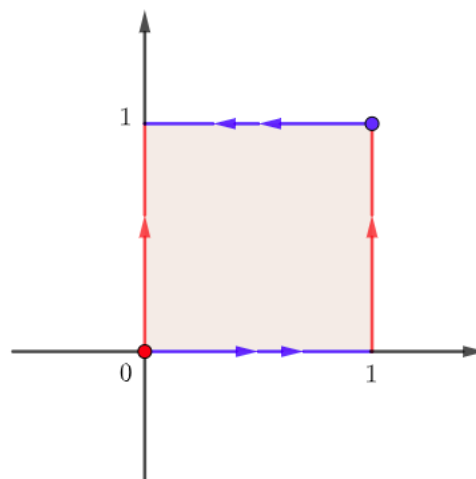
No quadrado Q_1 o segmento $\{1\} \times [1, 2]$ é identificado com $\{0\} \times [1, 2]$ ($t^{-1} \cdot (\{1\} \times [1, 2]) = \{0\} \times [1, 2]$) e $[0, 1] \times \{1\}$ é identificado com $[0, 1] \times \{2\}$ ($u \cdot ([0, 1] \times \{1\}) = [0, 1] \times \{2\}$).

Feitas essas identificações, segue que,

$$u^{-1} \cdot ([0, 1] \times (1, 2]) = [0, 1] \times [0, 1)$$



Após a identificação de Q_0 com Q_1 acima, resta somente identificar as arestas de Q_0 conforme a figura abaixo, cujo resultado final é a garrafa de Klein.



Como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é simplesmente conexo, segue então do corolário 2.2 que $\pi_1(\mathbb{K}, v) \cong G$.

2.4 TIPO DE HOMOTOPIA

O grupo fundamental é um invariante topológico, ou seja, espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos. No entanto, o grupo fundamental é também preservado em espaços “equivalentes” num sentido mais fraco do que homeomorfismo.

Definição 2.3. Dois espaços X e Y possuem *mesmo tipo de homotopia* (ou são *homotopicamente equivalentes*) se existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que, $g \circ f \simeq \text{id}_X$ e $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Quando X tem mesmo tipo de homotopia que Y denotamos $X \simeq Y$.

Agora devemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 2.9. *A relação \simeq entre espaços topológicos é uma relação de equivalência.*

Demonstração. As propriedades reflexiva e simétrica se verificam de forma trivial, então vamos demonstrar apenas a transitiva.

Seja $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z$ então existem $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que, $g \circ f \simeq \text{id}_X$ e $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ e também temos $F : Y \rightarrow Z$ e $G : Z \rightarrow Y$ tais que, $G \circ F \simeq \text{id}_Y$ e $F \circ G \simeq \text{id}_Z$.

Logo basta definirmos $H : X \rightarrow Z$ por $H = F \circ f$ e $K : Z \rightarrow X$ por $K = g \circ G$. Desta forma temos que:

$$H \circ K = (F \circ f) \circ (g \circ G) = F \circ (f \circ g) \circ G \simeq (F \circ \text{Id}_Y) \circ G = F \circ G \simeq \text{id}_Z$$

e de modo completamente análogo temos que

$$K \circ H \simeq \text{id}_X$$

Portanto, \simeq é uma relação de equivalência entre espaços topológicos. \square

Note que se existe um homeomorfismo h entre X e Y então $X \simeq Y$. A recíproca não é verdadeira conforme ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que, $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$ ($0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$). Pois, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(0) = 0$ então $f \circ g = \text{id}_{\{0\}}$ e $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação constante, $g \circ f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, $f \circ g \simeq \text{id}_{\{0\}}$ (pois a relação de homotopia entre funções é uma relação de equivalência e portanto goza da propriedade reflexiva) e $g \circ f \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ (isso segue do exemplo 2.1 pois \mathbb{R}^n é convexo).

Quando $A \subseteq X$ existe uma situação especial em que $A \simeq X$ a qual descrevemos abaixo.

Um subespaço A de um espaço topológico X é um *retrato* de X se existe uma função contínua $r : X \rightarrow A$ tal que, $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

Se $A \subseteq X$ é um retrato de X , então A é chamado *retrato por deformação* de X se $\iota \circ r \simeq \text{id}_X$, sendo $\iota : A \hookrightarrow X$ é a inclusão. Como $r \circ \iota = \text{id}_A$ segue que todo retrato por deformação de X tem mesmo tipo de homotopia de X .

Com estas definições note que no exemplo 2.5 acima temos que $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é retrato por deformação de \mathbb{R}^n , com isso, temos mais dois exemplos relevantes.

Exemplo 2.6. Seja $C = S^1 \times [0, 1]$ o cilindro, temos S^1 é homeomorfo a $S^1 \times \{0\} \subset C$, denotando $S_C^1 = S^1 \times \{0\}$, temos que $G : C \times [0, 1] \rightarrow C$ definida por $G((x, s), t) = (x, (1 - t)s)$ é uma retração por deformação de C sobre S_C^1 , ou seja, se $r : C \rightarrow S_C^1$ é definida por, $r(x, s) = G((x, s), 1)$ para todo $(x, s) \in C$ e $\iota : S_C^1 \hookrightarrow C$ é a inclusão então, $\iota \circ r \simeq_G \text{id}_C$ e $r \circ \iota = \text{id}_{S_C^1}$. Desta forma, S_C^1 é retrato por deformação de C .

Exemplo 2.7. A faixa de Möbius é o espaço quociente $\mathbb{M} = Q/R = ([0, 1] \times [0, 1])/R$ sendo R a relação de equivalência em Q gerada por $(0, t)R(1, 1 - t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Temos que, $S = \{[s, \frac{1}{2}] \in \mathbb{M} : 0 \leq s \leq 1\}$ é uma cópia homeomorfa de S^1 em \mathbb{M} que é um retrato por

deformação de \mathbb{M} . Como a relação "mesmo tipo de homotopia" é uma relação de equivalência segue que a faixa de Möbius tem mesmo tipo de homotopia que o cilindro.

O comportamento do grupo fundamental de espaços homotopicamente equivalentes pode ser descrito com auxílio do seguinte resultado.

Teorema 2.10. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f \simeq_F g$ (homotópicas) então o diagrama abaixo é comutativo ($g_* = f_\sigma \circ f_*$)*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* & \downarrow f_\sigma \\ & & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

sendo, $\sigma : [0, 1] \rightarrow Y$, $\sigma(t) = F(x_0, t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.105) e de posse desse resultado podemos demonstrar o seguinte corolário.

Corolário 2.5. *Sejam X e Y espaços conexo por caminhos tais que $X \simeq Y$, então $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Como $X \simeq Y$ então existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que, $\text{id}_X \simeq_F (g \circ f)$ e $\text{id}_Y \simeq_G (f \circ g)$. Sejam $y_0 \in Y$ e $x_0 = g(y_0)$.

Segue do teorema 2.10 que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = f_{\sigma_1}$ e $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = f_{\sigma_2}$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow (g \circ f)_* & \downarrow f_{\sigma_1} \\ & & \pi_1(X, g(f(x_0))) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\text{id}} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow (f \circ g)_* & \downarrow f_{\sigma_2} \\ & & \pi_1(Y, f(g(y_0))) \end{array}$$

Sendo $\sigma_1(t) = F(x_0, t)$ e $\sigma_2(t) = G(y_0, t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, $g_* \circ f_*$ e $f_* \circ g_*$ são isomorfismos (pois, f_{σ_1} e f_{σ_2} são isomorfismos). Assim,

- $g_* \circ f_*$ é bijetora $\Rightarrow g_* \circ f_*$ é sobrejetora $\Rightarrow g_*$ é sobrejetora.
- $f_* \circ g_*$ é bijetora $\Rightarrow f_* \circ g_*$ é injetora $\Rightarrow g_*$ é injetora.

Portanto, $g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um isomorfismo. □

Por fim, um espaço topológico X é dito *contrátil* se $\text{id}_X \simeq e_{x_0}$ para algum $x_0 \in X$, sendo $e_{x_0} : X \rightarrow X$ a função constante igual a x_0 . Desta forma um espaço X é contrátil se, e somente se, X é homotopicamente equivalente à $\{x_0\}$ para algum $x_0 \in X$. Consequentemente se X é contrátil então X é conexo por caminhos e $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$, ou seja, X é simplesmente conexo.

2.5 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

Veremos agora uma aplicação do grupo fundamental. Dados um espaço topológico e uma função contínua $f : X \rightarrow X$, um ponto $x \in X$ é chamado *ponto fixo* de f se $f(x) = x$. Um espaço topológico X possui a PPF (propriedade do ponto fixo) se toda função contínua $f : X \rightarrow X$ possui um ponto fixo.

Teorema 2.11. *Se X possui a PPF e Y é homeomorfo a X então Y também possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e suponha que X possui a PPF. Dada $g : Y \rightarrow Y$ contínua então, $f = h^{-1} \circ g \circ h : X \rightarrow X$ possui um ponto fixo $x_0 \in X$. Desta forma,

$$f(x_0) = x_0 \Rightarrow h^{-1}(g(h(x_0))) = x_0 \Rightarrow g(h(x_0)) = h(x_0)$$

ou seja, $y_0 = h(x_0) \in Y$ é ponto fixo de g . Portanto, Y possui a PPF. \square

Encontrar espaços com a propriedade do ponto fixo é um tipo de problema muito interessante da matemática, e neste sentido, segue o seguinte teorema.

Teorema 2.12 (Teorema do Ponto fixo de Brower). *A bola fechada $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ possui a PPF para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.*

Neste trabalho não temos condições de demonstrar esse teorema em sua forma geral, mas vamos apresentar as demonstrações para o caso $n = 1, 2$, sendo que para $n = 2$ é onde utilizaremos fortemente o grupo fundamental.

Teorema 2.13 (Caso B_1). *Dada uma função contínua $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ então existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Para demonstração utilizaremos o teorema do valor intermediário.

Demonstração. Suponha por absurdo que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [-1, 1]$. Assim, seja $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x + 1$. Desta forma, g é contínua e além disso:

$$g(-1) = f(-1) - (-1) + (1) = f(-1) + 2 > -1 + 2 = 1$$

$$g(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) < 1$$

Desta forma segue do teorema do valor intermediário que existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $g(x_0) = 1$, ou seja, $f(x_0) = x_0$. \square

Por fim o caso bidimensional, onde precisamos utilizar o grupo fundamental.

Teorema 2.14 (Caso B_2). *Dada uma função contínua $f : B_2 \rightarrow B_2$ então existe $x_0 \in B_2$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B_2$.

Para cada $x \in B_2$, seja $g(x)$ o ponto de encontro da semirreta com origem em $f(x)$ e que passa por x com $S^1 \subset B_2$, ou seja, $g(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ sendo $t = t(x) \in [1, \infty)$ tal que $\langle g(x), g(x) \rangle = 1$.

Temos que, g é contínua e $g(x) = x$ para todo $x \in S^1$. Desta forma, temos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\iota} & B_2 \\ & \searrow \text{id}_{S^1} & \downarrow g \\ & & S^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(B_2, 1) \\ & \searrow \text{id}_{\pi_1(S^1)} & \downarrow g_* \\ & & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

Sendo $\iota : S^1 \hookrightarrow B_2$ a inclusão.

Como B_2 é simplesmente conexo, temos que $\pi_1(B_2, 1) = \{0\}$. Assim, $g_* \circ \iota_*$ é o homomorfismo nulo. Mas $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Logo $\text{id}_{\pi_1(S^1)}$ não é o homomorfismo nulo. Portanto chegamos a uma contradição. Logo, deve existir um elemento $x_0 \in B_2$ tal que, $f(x_0) = x_0$. \square

2.6 SUPERFÍCIES

Uma superfície é um espaço de Hausdorff S tal que, para cada $x \in S$ existe um aberto de S que contém x e que é homeomorfo à \mathbb{R}^2 ou é homeomorfo ao semiplano fechado $\mathbb{R}_+^2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é dito *ponto interior* de S se está contido num aberto U de S que é homeomorfo à \mathbb{R}^2 , já um ponto $x \in S$ é chamado de *ponto do bordo* (ou *fronteira*) se está contido num aberto U de S que é homeomorfo à \mathbb{R}_+^2 mas não está contido em nenhum aberto V de S que é homeomorfo à \mathbb{R}^2 .

Lema 2.5. *O interior e o bordo de uma superfície S são disjuntos.*

A descontracção desse lema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.116) e a partir dela temos o seguinte teorema.

Teorema 2.15. *Todo homeomorfismo $h : S_1 \rightarrow S_2$ de uma superfície S_1 numa superfície S_2 , leva pontos do bordo de S_1 em pontos do bordo de S_2 e pontos do interior de S_1 em pontos do interior de S_2 .*

Demonstração. Suponha que x é um ponto do interior de S_1 , então seja $U \subset S_1$ um aberto que contém x e seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ um homeomorfismo. Temos assim que, $h \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V = h(U) \subset S_2$ é um homeomorfismo. Como $h(x) \in V$ segue que $h(x)$ é ponto do interior de S_2 .

De forma análoga, temos que se $y \in S_2$ é ponto do interior de S_2 então, $h^{-1}(y)$ é ponto do interior de S_1 . Logo, se $b \in S_1$ é um ponto do bordo de S_1 então $h(b)$ não pode ser ponto do interior de S_2 pois se fosse teríamos que $b = h^{-1}(h(b))$ seria um ponto interior de S_1 , ou seja, $b \in \text{interior}(S_1) \cap \text{bordo}(S_1) = \emptyset$. \square

E deste teorema, segue um resultado muito significativo, de que se duas superfícies são homeomorfas então seus bordos também são homeomorfos. E assim conclui-se que a faixa de Möbius e o cilindro não são homeomorfos, pois o bordo da faixa de Möbius é conexo (cópia homeomorfa de S^1) e o bordo do cilindro $S^1 \times [0, 1]$ é desconexo (união disjunta de duas cópias homeomorfas de S^1).

3 TRIANGULAÇÕES

No capítulo 2, onde estudamos grupo fundamental, pode-se notar que apesar de ser um invariante topológico muito útil o grupo fundamental pode ser muito difícil de se calcular, podemos notar isso de forma muito clara tanto no cálculo do grupo fundamental da garrafa de Klein quanto do S^1 . Portanto neste capítulo, através das triangulações, construiremos ferramentas que facilitam muito o cálculo do grupo fundamental, sendo estas o Grupo de Arestas e o teorema de Van Kampen os que mais se destacam.

3.1 ESPAÇOS AFIM

Nesta sessão colocaremos algumas ideias e resultados de forma mais rápida, sem perder a noção intuitiva do que está acontecendo, para chegarmos a definição de simplexo e complexo simplicial o mais breve possível.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado *espaço afim* se, para quaisquer dois pontos distintos $a, b \in A$ a reta que passa por a e b está inteiramente contida em A . Logo todo espaço afim é convexo. O conjunto vazio \emptyset e qualquer conjunto unitário $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ são exemplos de espaço afim.

Se X_λ é um espaço afim para todo $\lambda \in \Lambda$ então, $\bigcap \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é um espaço afim, analogamente, se X_λ é um convexo para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $\bigcap \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é um convexo.

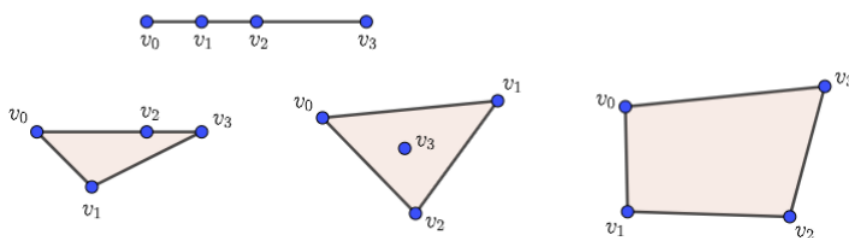
Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ o *fecho afim* de X , denotado por $[X]_a$ é a intercessão de todos os espaços afim de \mathbb{R}^n que contém X , ou seja,

$$[X]_a = \bigcap \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ é espaço afim e } X \subset A\}$$

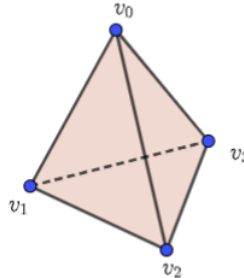
Analogamente *fecho convexo* de X , denotado por $[X]$ é a intercessão de todos os conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contém X , ou seja,

$$[X] = \bigcap \{A : A \text{ é convexo e } X \subset A\}$$

Exemplo 3.1. Seja $X = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto com quatro pontos distintos. Caso os pontos v_0, v_1, v_2, v_3 sejam coplanares, conforme o posicionamento desses pontos, seu fecho convexo $[X]$ pode ser dado por um dos conjuntos abaixo.



Caso os pontos v_0, v_1, v_2, v_3 não sejam coplanares temos que o fecho convexo $[X]$ é formado pelo tetraedro com vértices v_0, v_1, v_2 e v_3 , junto com os pontos interiores desse tetraedro.



Dados pontos $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ temos que uma *combinação afim* desses pontos é um ponto x tal que $x = \sum_{k=0}^m t_k v_k$ com $\sum_{k=0}^m t_k = 1$. Já uma *combinação convexa* desses pontos é um ponto x tal que $x = \sum_{k=0}^m t_k v_k$ com $\sum_{k=0}^m t_k = 1$ e $t_k \geq 0$. Assim temos dois resultados importantes.

Teorema 3.1. *Seja $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, temos que*

$$[v_0, v_1, \dots, v_m] = \left\{ \sum_{k=0}^m t_k v_k : \sum_{k=0}^m t_k = 1 \text{ e } t_k \geq 0 \right\}$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em (ROTMAN, 1988, p.32) e segue o seguinte corolário.

Corolário 3.1. *Seja $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, temos que*

$$[v_0, v_1, \dots, v_m]_a = \left\{ \sum_{k=0}^m t_k v_k : \sum_{k=0}^m t_k = 1 \right\}$$

Feito isso, temos que um conjunto finito de pontos $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ é *independente afim* se $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ é LI (Linearmente independente).

Exemplo 3.2. Segue uma lista de conjuntos independentes afim:

1. O conjunto vazio é independente afim.
2. Todo conjunto unitário é independente afim.
3. $\{v_0, v_1\}$ é independente afim $\Leftrightarrow v_0 \neq v_1$.

4. $\{v_0, v_1, v_2\}$ é independente afim $\Leftrightarrow v_0, v_1$ e v_2 não são colineares.
5. $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ é independente afim $\Leftrightarrow v_0, v_1, v_2$ e v_3 não são coplanares.

Teorema 3.2. Seja $\{v_0, v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:

a) $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ é independente afim.

b) Se $\{s_0, s_1, \dots, s_m\} \subset \mathbb{R}$ satisfaz $\sum_{j=0}^m s_j v_j = 0$ e $\sum_{j=0}^m s_j = 0$ então, $s_0 = s_1 = \dots = s_m = 0$.

c) Cada $x \in [v_0, \dots, v_m]_a$ tem uma única representação como combinação afim:

$$x = \sum_{j=0}^m t_j v_j = 0, \quad \sum_{j=0}^m t_j = 1$$

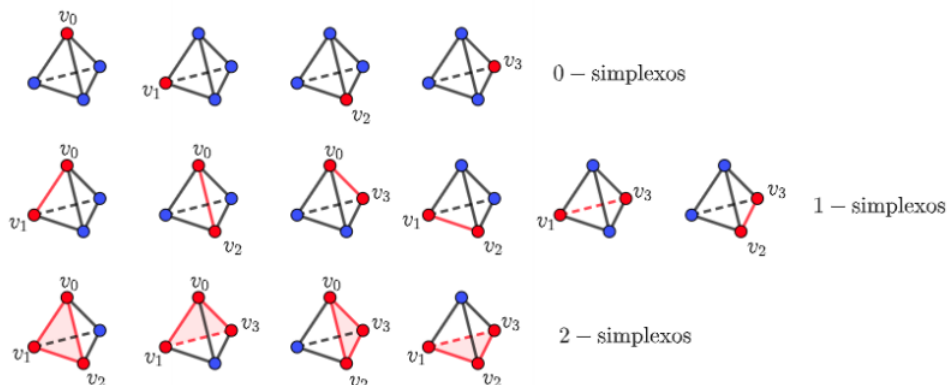
A demonstração pode ser encontrada em (ROTMAN, 1988, p.49) e de posse desse conjunto de definições e resultados pode-se começar a trabalhar o conceito de simplexo e complexos simpliciais.

3.2 SIMPLEXOS E COMPLEXO SIMPLICIAL

Dados $k + 1$ pontos v_0, v_1, \dots, v_k em \mathbb{R}^n que são independentes afim definimos como k -simplexo gerado por v_0, v_1, \dots, v_k como sendo o fecho convexo $[v_0, v_1, \dots, v_k]$. Visto isso, para cada $m < k$ os $\binom{k+1}{m+1} = \frac{(k+1)!}{(m+1)!(k-m-1)!}$ m -simplexos $[v_{j_0}, \dots, v_{j_m}]$ com $\{j_0, \dots, j_m\} \subset \{0, \dots, k\}$ são as faces m -dimensionais de $s = [v_0, v_1, \dots, v_k]$.

As $k + 1$ faces 0-dimensionais de s denotadas por *vértices* de s são $[v_0], [v_1], \dots, [v_k]$. Se σ é face de s denotamos que $\sigma < s$.

Dado um 3-simplexo segue representado na imagem abaixo as respectivas faces 0, 1 e 2-dimensionais destacadas em vermelho



Uma coleção finita K de simplexes em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^n é chamada *complexo simplicial* se

- $s \subset K$ e f é uma face de $s \Rightarrow f \in K$;
- $s \in K$ e $t \in K \Rightarrow s \cap t = \emptyset$ ou $s \cap t$ é uma face comum à s e t .

Dado um complexo simplicial $K \in \mathbb{R}^n$ definimos a *realização geométrica* de K (ou o *poliedro* associado a K como sendo,

$$|K| = \bigcup \{s : s \in K\}$$

equipado com a topologia induzida (subespaço) de \mathbb{R}^n .

Uma *triangulação* (triangularização) de um espaço topológico X consiste de um par (K, h) , sendo K um complexo simplicial e $h : |K| \rightarrow X$ um homeomorfismo. Se um espaço X admite uma triangulação, dizemos que X é *triangulável*.

Seja $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ um simplexo em \mathbb{R}^n . O *interior* de σ é definido por

$$\overset{\circ}{\sigma} = \left\{ \sum_{j=0}^k t_j v_j \in \sigma : \sum_{j=0}^k t_j = 1 \text{ e } t_j > 0 \forall j = 0, 1, \dots, k \right\}.$$

Visto isso, temos o seguinte teorema que ajuda a entender o comportamento da realização geométrica de um complexo simplicial.

Teorema 3.3. *Seja K um complexo simplicial em \mathbb{R}^n . Então*

- (a) $|K|$ é um espaço métrico compacto;
- (b) Cada $x \in |K|$ pertence ao interior de exatamente um simplexo de K
- (c) A topologia de $|K|$ coincide com a topologia coinduzida pela inclusões $\{\sigma \hookrightarrow |K|\}_{\sigma \in K}$, ou seja, $A \subset |K|$ é aberto (fechado) se, e somente se, $A \cap \sigma$ é aberto (fechado) em σ para todo $\sigma \in K$.
- (d) Se $|K|$ é conexo então $|K|$ é conexo por caminhos.

Aqui apresentaremos as demonstrações dos itens (a) e (b). Pode-se encontrar uma demonstração dos itens restantes em (ARMSTRONG, 1983, p.124).

Demonstração. item (a):

Primeiro mostraremos que $|K|$ é limitado. Seja $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \in K$ e seja $d_\sigma = \text{Máximo}\{\|v_j\| : j = 0, \dots, k\}$. Desta forma, seja $v_j \in B[0, d_\sigma] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq d_\sigma\} \forall j = 0, \dots, k$. Portanto $B[0, d_\sigma]$ é convexo e contém v_0, \dots, v_k . Logo, $\sigma \subseteq B[0, d_\sigma]$.

Pode-se concluir que $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ é união finita de subconjuntos limitados de \mathbb{R}^n , logo $|K|$ é limitado. Desta forma basta mostrarmos que $|K|$ é fechado, assim teremos que $|K|$ é compacto.

Note que como união finita de fechados é fechado, então basta mostrar que cada simplexo $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado.

Sejam v_{k+1}, \dots, v_n tais que, $\{v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ seja independente afim, segue do corolário 3.1 que $\mathbb{R}^n = \left\{ \sum_{j=0}^n t_j v_j : \sum_{j=0}^n t_j = 1 \right\}$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k+2}$ definida por:

$$\varphi\left(\sum_{j=0}^n t_j v_j\right) = \left(t_0, t_1, \dots, t_k, \sum_{j=0}^k t_j\right)$$

Segue do teorema 3.1 que, $\sigma = \varphi^{-1}([0, 1]^{k+1} \times \{1\})$.

item (b): Mostraremos aqui que cada $x \in |K|$ pertence ao interior de exatamente um simplexo de K .

Suponha, por absurdo, que exista $x \in \overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\alpha}$, para certos $\sigma, \alpha \in K$. Sendo $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ e $\alpha = [w_0, \dots, w_m] \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\alpha} \subseteq \sigma \cap \alpha$.

Como $\sigma \cap \alpha$ deve ser um simplexo de K devemos ter, $\sigma \cap \alpha = \beta = [u_{i_0}, \dots, u_{i_r}]$, com $u_{i_j} \in \{v_0, \dots, v_k\} \cap \{w_0, \dots, w_m\}$. Logo, $x = t_0 u_{i_0} + \dots + t_r u_{i_r}$ com $\sum_{j=0}^r t_j = 1$ e $t_j > 0$ para

todo $j = 0, \dots, r$. Como $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ devemos ter, $x = s_0 v_0 + s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$, com $\sum_{j=0}^k s_j = 1$ e $s_j > 0$ para $j = 0, \dots, k$.

Pela unicidade da representação de x (teorema 3.2) temos que, após reordenação se necessário, $r = k$, $u_{i_j} = v_j$, $t_j = s_j$. De forma inteiramente análoga, podemos concluir, após reordenação se necessário, que $m = k$ e $w_j = v_j$. Logo, $\sigma = \alpha$.

Agora provemos que todo $x \in |K|$ pertence ao interior de algum $\alpha \in K$.

Como $x \in \bigcup \{s : s \in K\} \Rightarrow x \in \sigma$ para algum $\sigma \in K$. Se $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ então,

$$x = t_0 v_0 + \dots + t_k v_k \text{ com } \sum_{j=0}^k t_j = 1 \text{ e } t_j \geq 0, \forall j = 0, \dots, k$$

Assim, seja $B = \{i \in \{0, 1, \dots, k\} : t_i \neq 0\}$, temos que $B \neq \emptyset$ pois, $\sum_{j=1}^k t_j = 1$ e $t_j \geq 0 \forall j = 0, \dots, k$. Se $B = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ seja $\alpha = [v_{j_1}, \dots, v_{j_r}]$, temos assim que $x \in \overset{\circ}{\alpha}$. $\alpha < \sigma$ e portanto, $\alpha \in K$.

□

Visto esse teorema, seja K um complexo simplicial de \mathbb{R}^n e seja $v = (a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, para cada vértice $w \in K$ seja $\bar{w} = (w, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Como $\sigma = [v_{j_0}, \dots, v_{j_k}] \in K$ é um simplexo de K , então $\bar{v}_{j_0}, \dots, \bar{v}_{j_k}, v$ são independentes afim. Portanto, $\bar{\sigma} = [\bar{v}_{j_0}, \dots, \bar{v}_{j_k}]$ é um simplexo em \mathbb{R}^{n+1} e $\sigma * v = [\bar{v}_{j_0}, \dots, \bar{v}_{j_k}, v]$ é um $k + 1$ -simplexo em \mathbb{R}^{n+1} . Assim definimos o

cone de K como sendo,

$$CK = \{v\} \cup \{\bar{\sigma} \subset \mathbb{R}^{n+1} : \sigma \in K\} \cup \{\sigma * v \subset \mathbb{R}^{n+1} : \sigma \in K\}$$

Uma vez definido o cone CK do complexo simplicial K , temos que CK é um complexo simplicial e que a realização geométrica $|CK|$ do cone do complexo simplicial K é homeomorfo ao cone topológico $C|K|$ da realização geométrica $|K|$ de K .

3.3 SUBDIVISÃO BARICÊNTRICA

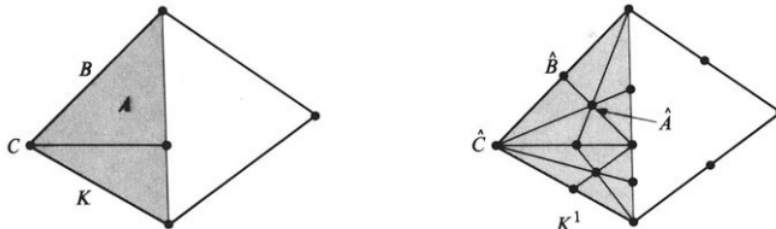
Dado um k -simplexo $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ em \mathbb{R}^n o *baricentro* de σ é o ponto,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_k)$$

Definição 3.1. A (primeira) *subdivisão baricêntrica* de um complexo simplicial K é o complexo simplicial K^1 tal que:

- Os vértices de K^1 são os baricentros dos simplexos de K ;
- $[\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_k] \in K^1 \Leftrightarrow \sigma_{j_0} < \sigma_{j_1} < \dots < \sigma_{j_k}$ com $\{j_0, \dots, j_k\} = \{0, 1, \dots, k\}$.

Exemplo 3.3. Aqui temos um exemplo visual da primeira subdivisão baricêntrica, à direita, do complexo simplicial à esquerda



Dado um complexo simplicial K definimos a *dimensão*(K) como sendo $\text{Máximo}\{\text{dimensão}(\sigma) : \sigma \in K\}$ e definimos também $\mu(K) = \text{Máximo}\{\text{diâmetro}(\sigma) : \sigma \in K\}$

A seguir temos um lema que relaciona um complexo simplicial K com sua primeira subdivisão baricêntrica K^1

Lema 3.1. A primeira subdivisão baricêntrica, K^1 , de K é um complexo simplicial e possui as seguintes propriedades:

- Cada simplexo de K^1 está contido em algum simplexo de K
- $|K^1| = |K|$
- Se $\text{dimensão}(K) = n$ então $\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1}\mu(K)$

Aqui será feita a demonstração do item (a). Pode-se encontrar uma demonstração dos itens restantes em (ARMSTRONG, 1983, p.126).

Demonstração. Seja $\sigma = [\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m] \in K^1$ tal que, $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{m-1} < \sigma_m$, desta forma os simplexes (de K) $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ são faces de σ_m . Assim $\hat{\sigma}_j \in \sigma_j \subseteq \sigma_m$ para cada $j = 0, \dots, m$. Como σ é o fecho convexo de $\{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_m\} \subseteq \sigma_m$ temos que, $\sigma \subseteq \sigma_m$ pois σ_m é convexo. □

Após esse lema pode-se observar que dado um complexo simplicial K então a dimensão de (K^1) é igual a dimensão (K) . Pois como todo simplexo de K^1 está contido em algum simplexo de K temos que $\dim(K^1) \leq \dim(K)$. Se $\dim(K) = n$, existe um simplexo $\sigma = [v_0, \dots, v_n] \in K$ de dimensão máxima em K . Para cada $j = 0, 1, \dots, n$ seja $\sigma_j = [v_0, \dots, v_j] \in K$, temos que, $\sigma_0 < \dots < \sigma_n = \sigma$ e $\alpha = [\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_n] \in K^1$, dessa forma $\dim(\alpha) = n$. Portanto, $\dim(K^1) = n$.

Definimos a m -ésima subdivisão baricêntrica de K denotada por K^m de forma recursiva por $K^m = (K^{m-1})^1$. Segue do item c) do lema 3.1 (e indução finita sobre m) que $\mu(K^m) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \mu(K)$. Como $\frac{n}{n+1} < 1$ temos que,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(K^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n}{1+n}\right)^m \cdot \mu(K^m) \right] = 0 \cdot \mu(K^m) = 0$$

3.4 APLICAÇÃO SIMPLICIAL

Dados dois complexos simpliciais K e L , onde $\text{Ver}(K)$ são os vértices de K e $\text{Ver}(L)$ os vértices de L , definimos uma *aplicação simplicial* como uma função $f : \text{Ver}(K) \rightarrow \text{Ver}(L)$ tal que para todo $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] \in K$ tem-se que $\{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ gera um simplexo de L , porém não necessariamente $\{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ é independente afim. Embora o domínio e contradomínio de uma aplicação simplicial sejam conjuntos de vértices de complexos simpliciais K e L , denota-se $f : K \rightarrow L$.

Para todo complexo K , temos que a aplicação identidade $\text{id}_K : K \rightarrow K$ é uma aplicação simplicial e é fácil notar também que, dados complexos K, L, M e aplicações simpliciais $f : K \rightarrow L$ e $g : L \rightarrow M$ então a composição $g \circ f$ é uma aplicação simplicial.

Desta forma qualquer aplicação simplicial é uma função definida no conjunto dos vértices de um complexo simplicial com valores no conjunto dos vértices de um complexo simplicial. Logo não temos nenhuma noção topológica associada a ela até o momento. No entanto, podemos a partir de uma aplicação simplicial $f : K \rightarrow L$ dos complexos K, L definir uma função nas realizações geométricas $|K|, |L|$ a partir de f por $|f| : |K| \rightarrow |L|$ da seguinte forma, dado $x = t_0 v_0 + \dots + t_k v_k \in \sigma = [v_0, \dots, v_k] \in K$ então $|f|(x) = t_0 f(v_0) + \dots + t_k f(v_k)$.

Teorema 3.4. $|f|$ como descrito acima é contínua e bem definida.

Demonstração. $|f|$ é bem definida:

Dado $x \in \sigma \cap \tau = [v_0, \dots, v_q, v_{q+1}, \dots, v_k] \cap [v_0, \dots, v_q, w_{q+1}, \dots, w_l]$ então, $\sigma \cap \tau = [v_0, \dots, v_q]$. Pela unicidade da representação de x em coordenadas convexas devemos ter $x = t_0 v_0 + \dots + t_q v_q$ com $t_j \geq 0$ para todo $j = 0, \dots, q$ e $t_0 + \dots + t_q = 1$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |f|(x) &= t_0 f(v_0) + \dots + t_q f(v_q) + 0 \cdot f(v_{q+1}) + \dots + 0 \cdot f(v_k) \\ &= t_0 f(v_0) + \dots + t_q f(v_q) + 0 \cdot f(w_{q+1}) + \dots + 0 \cdot f(w_l) \end{aligned}$$

$|f|$ é contínua:

Como cada simplexo $\sigma \subseteq |K|$ é fechado, em virtude do lema da colagem, basta mostrar que a restrição de $|f|$ a cada simplexo de K é contínua.

Suponha $K \subseteq \mathbb{R}^m$ e $L \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \subseteq |K|$. Então, $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ é LI e pode ser completado para formar uma base $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0, w_{k+1}, \dots, w_m\}$ de \mathbb{R}^m . Desta forma, seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a única transformação linear tal que,

- $T(v_j - v_0) = f(v_j) - f(v_0)$ para $j = 1, \dots, k$;
- $T(w_i) = 0$ para $i = k + 1, \dots, m$.

e sejam $H_{v_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $H_{f(v_0)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ as translações com $H_{v_0}(u) = u - v_0$ e $H_{f(v_0)}(v) = f(v_0) + v$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Assim seja $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = H_{f(v_0)} \circ T \circ H_{v_0}$.

Temos assim que, as translações H_{v_0} e $H_{f(v_0)}$ são contínuas (são isometrias), T é contínua, pois é transformação linear entre espaços de dimensão finita. Portanto $F = H_{f(v_0)} \circ T \circ H_{v_0}$ é contínua. Desta forma dado $x = t_0 v_0 + \dots + t_k v_k \in \sigma$ temos que,

$$\begin{aligned} F(x) &= H_{f(v_0)}(T(H_{v_0}(x))) = H_{f(v_0)}(T(x - v_0)) \\ &= H_{f(v_0)}(T((t_0 - 1)v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k)) \\ &= H_{f(v_0)}(T((-t_1 - \dots - t_k)v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k)) \\ &= H_{f(v_0)}(T(t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_k(v_k - v_0))) \\ &= f(v_0) + T(t_1(v_1 - v_0) + \dots + t_k(v_k - v_0)) \\ &= f(v_0) + t_1(f(v_1) - f(v_0)) + \dots + t_k(f(v_k) - f(v_0)) \\ &= (1 - t_1 - \dots - t_k)f(v_0) + t_1 f(v_1) + \dots + t_k f(v_k) \\ &= t_0 f(v_0) + t_1 f(v_1) + \dots + t_k f(v_k) \\ &= |f|(t_0 v_0 + \dots + t_k v_k) = |f|(x) \end{aligned}$$

Logo, $|f|$ restrita à σ é a restrição da função contínua F ao simplexo σ . Portanto $|f|$ restrita à σ é contínua. \square

Dizemos que uma aplicação simplicial $f : K \rightarrow L$ é um isomorfismo se for uma bijeção e se para todo simplexo $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \in K$ temos que, $\{f(v_0), \dots, f(v_k)\} \subset L$ é independente afim.

Visto isso, temos que $f : K \rightarrow L$ é um isomorfismo de complexos simpliciais se, e somente se, existe uma aplicação simplicial $g : L \rightarrow K$ tal que, $f \circ g = \text{id}_L$ e $g \circ f = \text{id}_K$. Com esta equivalência fica fácil ver que se $f : K \rightarrow L$ é um isomorfismo, então $|f| : |K| \rightarrow |L|$ é um homeomorfismo.

3.5 TEOREMA DE APROXIMAÇÃO SIMPLICIAL

Dados um complexo simplicial K e $x \in |K|$, existe um único $\sigma_x \in K$ tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}_x$, dizemos que o simplexo σ_x é o *carregador* de x .

Seja $f : |K| \rightarrow |L|$ uma função contínua, dizemos que $s = |h| : |K| \rightarrow |L|$ é uma *aproximação simplicial* de f se $s(x)$ pertence ao carregador de $f(x)$ para todo $x \in |K|$.

Um importante resultado que temos sobre aproximação simplicial é que se $f : |K| \rightarrow |L|$ é uma função contínua e $s : |K| \rightarrow |L|$ uma aproximação simplicial de f então, $f \simeq s$. Para mostrar esse resultado, temos que $|L| \subset \mathbb{R}^n$ para algum n positivo e seja $F : |K| \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por, $F(x, t) = (1 - t)f(x) + ts(x)$. F é contínua, $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = s(x)$ para todo $x \in |K|$. Como s é aproximação simplicial de f temos que, para cada $x \in |K|$ $f(x)$ e $s(x)$ pertencem à um mesmo simplexo $\sigma_{f(x)}$ de L . Como $\sigma_{f(x)} \subset |L| \subset \mathbb{R}^n$ é convexo segue que, $F(\{x\} \times [0, 1]) \subset |L|$ para cada $x \in |K|$, ou seja, $F(|K| \times [0, 1]) \subset |L|$. Portanto, $F : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$ é uma homotopia de f a s .

Dado um vértice v de um complexo simplicial K a *estrela aberta* de v em K é definida por:

$$st(v, K) = \cup \{ \overset{\circ}{\sigma} : \sigma \in K \text{ e } v \in \sigma \}$$

Proposição 3.1. Para todo $v \in K$ temos que $st(v, K)$ é um subconjunto aberto de $|K|$.

Demonstração. Como a topologia de $|K|$ é a topologia coerente com a cobertura $|K| = \cup_{\sigma \in K} \sigma$, basta mostrarmos que $st(v, K) \cap \sigma$ é aberto em σ para todo $\sigma \in K$. Mas, se $st(v, K) \cap \sigma \neq \emptyset$ então, $st(v, K) \cap \sigma = \overset{\circ}{\sigma}$. Agora note que σ sendo um k -simplexo, temos que $\overset{\circ}{\sigma}^c$ é a união dos j -simplexo contidos em σ tal que $j < k$, portanto $\overset{\circ}{\sigma}^c$ é fechado, ou seja, $\overset{\circ}{\sigma}$ é aberto. □

Lema 3.2. Sejam v_0, v_1, \dots, v_k vértices de um complexo simplicial K .

$$[v_0, \dots, v_k] \in K \Leftrightarrow \bigcap_{j=0}^k st(v_j, K) \neq \emptyset$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $\sigma = [v_0, \dots, v_k] \in K$. Então, $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq st(v_j, K)$ para todo $j = 0, \dots, k$.

(\Leftarrow) Suponha que existe $x \in \cap \{ st(v_j, K) : j = 0, \dots, k \}$. Como $x \in st(v_j, K)$ existe $\sigma_j \in K$ com $v_j \in \sigma_j$ e $x \in \overset{\circ}{\sigma}_j$.

Como existe um único simplexo $\tau \in K$ tal que $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ (σ é o carregador de x) devemos ter, $\tau = \sigma_0 = \dots = \sigma_k$. Assim, v_0, \dots, v_k são vértices de τ . Portanto, $[v_0, \dots, v_k] = \sigma$ é uma face de τ e consequentemente $\sigma \in K$.

□

A seguir temos um dos resultados mais importantes a respeito de aplicações simpliciais.

Teorema 3.5 (teorema da aproximação simplicial). *Seja $f : |K| \rightarrow |L|$ uma aplicação contínua. Então existe uma aproximação simplicial $s = |h| : |K^m| \rightarrow |L|$ de $f : |K^m| \rightarrow |L|$ para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Suponha que para cada vértice u de K exista um vértice $v = h(u)$ de L tal que,

$$f(st(u, K)) \subseteq st(v, L)$$

Assim seja, $h : \text{Ver}(K) \rightarrow \text{Ver}(L)$, dado $[u_0, \dots, u_k] \in K$ temos,

$$\bigcap_{j=0}^k st(h(u_j), L) \supseteq \bigcap_{j=0}^k f(st(u_j, K)) \supseteq f\left(\bigcap_{j=0}^k st(u_j, K)\right) \neq \emptyset$$

Logo pelo lema 3.2, $[h(u_0), \dots, h(u_k)] \in L$ e portanto, $h : K \rightarrow L$ é uma aplicação simplicial.

Agora mostremos que $s = |h| : |K| \rightarrow |L|$ é uma aproximação simplicial de $f : |K| \rightarrow |L|$. Seja $x \in \overset{\circ}{\sigma} \subseteq |K|$ sendo $\sigma = [u_0, \dots, u_k]$ (σ é o carregador de x).

Como $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq st(u_j, K)$ para cada $j = 0, \dots, k$ temos que, $x \in \bigcap \{st(u_j, K) : 0 \leq j \leq k\}$.

Assim,

$$f(x) \in f\left(\bigcap_{j=0}^k st(u_j, K)\right) \subseteq \bigcap_{j=0}^k f(st(u_j, K)) \subseteq \bigcap_{j=0}^k st(h(u_j), L)$$

Para cada $0 \leq j \leq k$ existe $\tau_j \in L$ tal que, $f(x) \in \overset{\circ}{\tau}_j$ e $h(u_j) \in \tau_j$. Assim $\sigma_{f(x)} = \tau_0 = \dots = \tau_k$. Portanto, $h(u_j) \in \sigma_{f(x)}$, $j = 0, \dots, k$. Logo, $s(x) = |h|(x) \in [h(u_0), \dots, h(u_k)] \subseteq \sigma_{f(x)}$.

Para o caso geral basta mostrarmos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para cada vértice $u \in K^m$ existe $v = h(u) \in L$ tal que, $f(st(u, K^m)) \subseteq st(h(u), L)$.

Temos que, $\cup \{st(v, L) : v \in \text{Ver}(L)\}$ é uma cobertura aberta de $|L|$ e $\cup \{f^{-1}(st(v, L)) : v \in \text{Ver}(L)\}$ é uma cobertura aberta de $|K|$. Seja $\delta > 0$ o número de Lebesgue da cobertura $\cup \{f^{-1}(st(v, L)) : v \in \text{Ver}(L)\}$.

Seja m tal que, $\mu(K^m) < \frac{\delta}{2}$. Dados $x, y \in st(u, K^m)$ temos que,

$$\|x - y\| \leq \|x - u\| + \|u - y\| \leq \text{diam}(\sigma_x) + \text{diam}(\sigma_y)$$

sendo σ_x o carregador de x e σ_y o carregador de y . Como σ_x e σ_y pertencem à K^m devemos ter, $\|x - y\| \leq 2\mu(K^m) < \delta$. Logo, $\text{diam}(st(u, K^m)) \leq 2\mu(K^m) < \delta$.

Assim, $st(u, K^m) \subseteq f^{-1}(st(v, L))$ para algum vértice $v = h(u) \in L$, ou seja, $f(st(u, K^m)) \subseteq st(v, L) = st(h(u), L)$.

□

3.6 TEOREMA DE REALIZAÇÃO

Um *complexo simplicial abstrato* é um par $K = (V, S)$ sendo V um conjunto finito e $S \subseteq \mathcal{P}(V)$, tais que:

- Se $v \in V$ então, $\{v\} \in S$;
- Se $\sigma \in S$ e $\alpha \subseteq \sigma$ então, $\alpha \in S$;
- Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, todo elemento de S é não vazio e possui no máximo $m + 1$ elementos.

Dado um complexo simplicial K em \mathbb{R}^n , sejam $V = \text{Ver}(K)$ e $S = \{\{v_0, v_1, \dots, v_t\} \in \mathcal{P}(V) : [v_0, \dots, v_t] \in K\}$. Então, $\tilde{K} = (V, S)$ é um complexo simplicial abstrato. Dizemos que (V, S) é um *esquema de vértices* de K .

Dado um complexo simplicial abstrato $K = (V, S)$, uma *realização* de K é um complexo simplicial K^* em algum \mathbb{R}^n tal que existe uma bijeção $f : V \rightarrow \text{Ver}(K^*)$ tal que se $\{v_0, \dots, v_t\} \in S$ então, $[f(v_0), \dots, f(v_t)] \in K^*$. Assim temos o teorema de realização.

Teorema 3.6. *Todo complexo simplicial abstrato $K = (V, S)$ pode ser realizado como um esquema de vértices de um complexo simplicial em algum \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Suponha que $V = \{x_1, \dots, x_k\}$ e seja Δ um $(k - 1)$ -simplexo em \mathbb{R}^{k-1} . Então qualquer bijeção $f : V \rightarrow \text{Ver}(\Delta)$ realiza $K = (V, S)$ como o esquema de vértices de um subcomplexo de Δ . \square

3.7 TRIANGULAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORBITA

Seja X homeomorfo $|K|$ um espaço triangulável e $G \times |K| \rightarrow |K|$ uma ação do grupo G sobre $|K|$.

Dizemos que essa ação é uma **ação simplicial** se para cada $g \in G$ o homeomorfismo $\varphi_g : |K| \rightarrow |K|$ definido por $\varphi_g(x) = g \cdot x$ é uma aplicação simplicial, ou seja, existe uma aplicação simplicial $f_g : \text{Ver}(K) \rightarrow \text{Ver}(K)$ tal que, $\varphi_g = |f_g|$. Como exemplo seja:

- $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$.
- $K_1 = ((S^0 \times \{0\}) * \{(0, -1)\}) \cup ((S^0 \times \{0\}) * \{(0, 1)\}) \subseteq \mathbb{R}^2$.
- $K_2 = ((K_1 \times \{0\}) * \{(0, 0, -1)\}) \cup ((K_1 \times \{0\}) * \{(0, 0, 1)\}) \subseteq \mathbb{R}^3$.
- Supondo construído $K_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos $\tilde{K}_{n-1} = K_{n-1} \times \{0\}$ e construímos, $K_n = (\tilde{K}_{n-1} * \{(0, \dots, 0, -1)\}) \cup (\tilde{K}_{n-1} * \{(0, \dots, 0, 1)\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Então para cada $n \in \mathbb{N}$ a ação antipodal $\mathbb{Z}_2 \times |K_n| \rightarrow |K_n|$ é uma ação simplicial.

Teorema 3.7. *Se $G \times |K| \rightarrow |K|$ é uma ação simplicial então o espaço quociente $|K|/G$ é*

triangulável. Além disso, a aplicação $|s| : |K| \rightarrow |K/G|$, induzida pela aplicação quociente $p : |K| \rightarrow |K|/G$ é uma aplicação simplicial.

Demonstração. Seja $p : |K| \rightarrow |K|/G$ a aplicação quociente. Considere o par (V, S) , onde $V = \{p(v) \in |K|/G : v \in \text{Ver}(K)\}$ e $\{p(v_0), \dots, p(v_k)\} \in S \Leftrightarrow [v_0, \dots, v_k] \in K$. Desta forma (V, S) é um esquema de vértices. Pelo Teorema de realização (Teorema 3.6), existe um complexo simplicial em algum \mathbb{R}^n , o qual denotaremos por K/G , que realiza (V, S) .

Desta forma, a aplicação $s : K \rightarrow K/G$ que leva cada vértice v de K em $p(v) \in K/G$ é uma aplicação simplicial e a aplicação $\psi : |K|/G \rightarrow |K/G|$ definida por, $\psi([x]) = |s|(x)$ é bem definida, contínua e sobrejetora. Portanto, $\psi : |K^2|/G \rightarrow |K^2/G|$ é um homeomorfismo. \square

3.8 GRUPO DE ARESTAS DE UM COMPLEXO SIMPLICIAL

Seja K um complexo simplicial. Um *caminho por arestas* (sucintamente cpa) em K é uma sequência v_0, \dots, v_k de vértices de K tal que cada par consecutivo v_j, v_{j+1} gera um simplexo $[v_j, v_{j+1}] \in K$. Na sequência v_0, \dots, v_k são permitidas repetições, desta forma, aplicações simpliciais levam caminhos por arestas em caminhos por arestas. Se $v_0 = v_k = v$ o caminho por arestas v_0, \dots, v_k é chamado *laço por arestas* (sucintamente lpa) baseado no ponto base v .

Dois cpa α e α' são *equivalentes* (notação: \simeq) se for possível obter α' a partir de α através de um número finito de *operações elementares*, que consistem em substituir $v_{j-1}v_jv_{j+1}$ por $v_{j-1}v_{j+1}$ sempre que v_{j-1}, v_j, v_{j+1} gerem um simplexo de K . Equivalência de cpa é uma relação de equivalência. Denotaremos a classe de equivalência do cpa v_0, \dots, v_k por, $\{v_0 \dots v_k\}$.

Dados um complexo simplicial K e um vértice $v \in K$, seja $E(K, v)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de lpa em K baseados em v . Definimos a multiplicação de duas classes de lpa baseados em v por:

$$\{vv_1 \dots v_kv\} \bullet \{vw_1 \dots w_lv\} = \{vv_1 \dots v_kv w_1 \dots w_lv\}$$

Note que pela nossa equivalência o ponto inicial e o ponto final não se alteram, ou seja, se $\alpha = v_0v_1 \dots v_kv \simeq w_0w_1 \dots w_lv = \beta$ então, $o(\alpha) = v_0 = w_0 = o(\beta)$ e $f(\alpha) = v_k = w_l = f(\beta)$, sendo o = origem e f = final. Desta forma se $\alpha \simeq \alpha', \beta \simeq \beta'$ e $f(\alpha) = o(\beta)$ então, $\alpha \bullet \beta \simeq \alpha' \bullet \beta'$, logo a multiplicação de classes de lpa é bem definida.

Para todo lpa α baseado em $v \in K$ temos que,

$$\{v\} \bullet \{\alpha\} = \{\alpha\} \bullet \{v\} = \{\alpha\}.$$

Dado o lpa $\alpha = vv_1 \dots v_kv$ temos que,

$$\{\alpha\} \bullet \{vv_k \dots v_1v\} = \{vv_k \dots v_1v\} \bullet \{\alpha\} = \{v\}$$

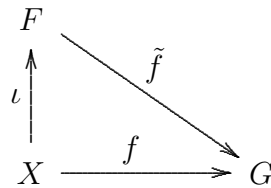
Desta forma o conjunto $E(K, v)$ equipado com a multiplicação \bullet é um grupo chamado por *grupo de arestas* de K . A construção do grupo de arestas se assemelha muito com a construção feita do grupo fundamental, e essa semelhança resulta no seguinte teorema.

Teorema 3.8. $E(K, v)$ é isomorfo ao grupo $\pi_1(|K|, v)$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.133).

Agora para chegarmos ao próximo resultado importante, faremos uma breve recordação sobre grupos, geradores e relações.

Sejam F um grupo contendo o subconjunto X . Dizemos que F é um *grupo livre* com base X se para todo grupo G e para toda função $f : X \rightarrow G$ existe um único homomorfismo $\tilde{f} : F \rightarrow G$ tal que, $\tilde{f} \circ \iota = f$, sendo $\iota : X \hookrightarrow F$ a inclusão.



Um exemplo é se $X = \emptyset$ então o grupo livre com base X é o grupo trivial, que contém somente o elemento neutro.

O *posto* de F é definido como sendo a cardinalidade de X . Sejam F_1 e F_2 grupos livres. Então,

$$\text{posto}(F_1) = \text{posto}(F_2) \Rightarrow F_1 \cong F_2.$$

Seja X um conjunto não vazio, se $x \in X$ seja $x^{-1} = (x, 1) \in X \times \{1\}$ e defina $X' = \{x^{-1} : x \in X\}$, desta forma temos que $X \cap X' = \emptyset$ e X' tem mesma cardinalidade que X .

Seja 1 algum elemento não pertencente à $X \cup X'$, então chamaremos $\{1\} \cup X \cup X'$ de *alfabeto* e cada elemento do alfabeto será chamado de *letra*.

Seja S o conjunto de todas as sequências de letras $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, ou seja, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $\alpha_k = 1$ ou $\alpha_k = x^1 = x$ ou $\alpha_k = x^{-1}$. Uma *palavra* sobre X é uma sequência $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S$ tal que, a partir de um certo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\alpha_k = 1$ para todo $k \geq n$. A palavra constante $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ é chamada *palavra vazia* e é denotada por 1 .

Uma *palavra reduzida* sobre X é uma palavra $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sobre X tal que,

- x e x^{-1} nunca são adjacentes;
- Se $\alpha_k = 1$ então $\alpha_m = 1$ para todo $m \geq k$.

Visto isso, podemos representar qualquer palavra reduzida sobre X , de forma única, por:

$$w = 1 \text{ ou } w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_k^{\epsilon_k} \text{ com } x_j \in X \text{ e } \epsilon_j \in \{-1, 1\}.$$

Dadas duas palavras reduzidas $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_k^{\epsilon_k}$ e $y = y_1^{\eta_1} y_2^{\eta_2} \cdots y_l^{\eta_l}$ definimos o produto $w \cdot y$ como sendo a palavra reduzida obtida da justaposição de w seguida de y eliminando todas as ocorrências de xx^{-1} , $x^{-1}x$ e de 1 em $1x$.

Com essa construção temos que o conjunto F formado por todas as palavras reduzidas sobre X , equipado com o produto definido acima é um grupo livre sobre X . Assim temos que dados F_1 e F_2 grupos livres, $F_1 \cong F_2 \Rightarrow \text{posto}(F_1) = \text{posto}(F_2)$.

Um grupo G é definido por *geradores* $X = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e *relações* $\Delta = \{r_j = 1 : j \in J\}$ se $G \cong F/R$, sendo F o grupo livre com base X e R o subgrupo normal de F gerado por $\{r_j : j \in J\}$, o par $(X|\Delta)$ é chamado uma *apresentação* de G . Definida essa apresentação, temos o seguinte resultado de álgebra que deixaremos aqui registrados pois ele será muito importante daqui por diante:

Teorema 3.9. *Todo grupo G possui uma apresentação com geradores e relações.*

Demonstração. Seja X um conjunto de geradores de G e seja $F(X)$ o grupo livre gerado sobre X . Desta forma, seja $g : F(X) \rightarrow G$ o único homomorfismo tal que $g(x) = x$ para todo $x \in X$. Desta forma seja $N = \text{Ker}(g)$

Como g é sobrejetora segue do teorema do isomorfismo de grupos que $G \cong F(X)/N$. Desta forma, seja $R \subset N$ tal que N é o menor subgrupo normal de $F(X)$ que contém R . Logo $G = (F(X)|\Delta)$ em que $\Delta = \{r = 1 : r \in R\}$

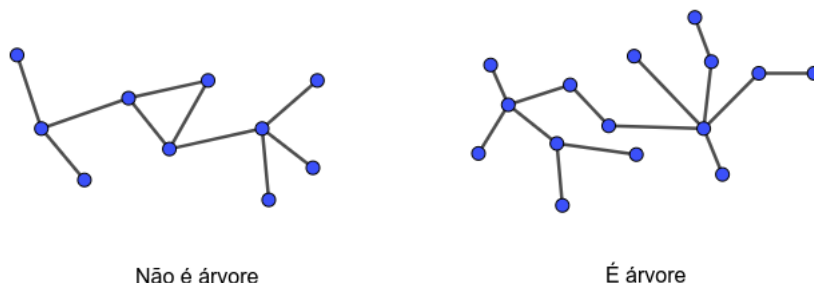
□

Para ilustrar esse resultado temos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.4.

- Se $X = \{x\}$ então, $F(X) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.
- Se X possui 2 ou mais elementos então $F(X)$ não é abeliano.
- Se $X = \{x\}$ e $\Delta_n = \{x^n = 1\}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$). Então, $(X|\Delta_n) = (x|x^n = 1) = \mathbb{Z}_n$.
- Se $X = \{x, y\}$ e $\Delta = \{xyx^{-1}y^{-1} = 1\}$ então, $(X|\Delta) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Visto isso, vamos descrever o grupo de arestas através de apresentação com geradores e relações. Para isso, temos que uma *árvore* é um complexo simplicial 1-dimensional simplesmente conexo.



Dado um complexo simplicial K , o subcomplexo $T \subseteq K$ é uma *árvore maximal* se:

- T é uma árvore;
- Se $T' \subseteq K$ é uma árvore e $T \subseteq T'$ então, $T' = T$.

Lema 3.3. *Seja K um complexo simplicial conexo. $T \subseteq K$ é uma árvore maximal, se e somente se, T contém todos os vértices de K .*

A demonstração desse lema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.134). Com isso temos o importante resultado que fornece uma apresentação de $E(K, v)$ por geradores e relações, cujo a demonstração pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.135).

Teorema 3.10. *Sejam K um complexo simplicial conexo e $L \subseteq K$ uma árvore maximal. Sejam,*

$$X = \{g_{ij} = (v_i, v_j) \in \text{Ver}(K) \times \text{Ver}(K) : [v_i, v_j] \in K\};$$

$$R = \{g_{ki}g_{ij}g_{jk} : [v_i, v_j, v_k] \in K\} \cup \{g_{ij} : [v_i, v_j] \in L\};$$

$$G(K, L) = (X|\Delta) \text{ sendo, } \Delta = \{r = 1 : r \in R\}.$$

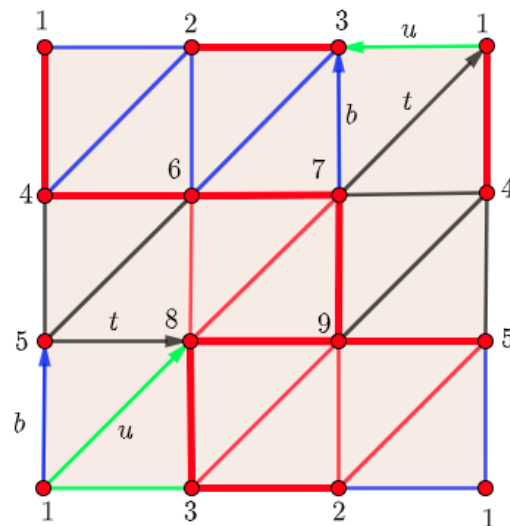
então, $G(K, L) \cong E(K, v)$.

Observe que, $g_{jj} = 1$ para todo índice j pois, pelo lema 3.3 todos os vértices pertencem à árvore maximal L e também $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ para todos i, j tais que $[v_i, v_j] \in K$. Pois, $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ para todos os índices i, j, k tais que $[v_i, v_j, v_k] \in K$. Assim, dado $[v_i, v_j] \in K$ então, $[v_i, v_j] = [v_i, v_j, v_i]$ e $g_{ij}g_{ji}g_{ii} = 1$. Mas, $g_{ii} = 1$ logo, $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$.

Com esse teorema temos uma nova ferramenta para calcular o grupo fundamental de espaços trianguláveis, segue um exemplo.

Exemplo 3.5. vamos calcular novamente o grupo fundamental da garrafa de Klein.

Garrafa de Klein \mathbb{K}



$$g_{73}g_{31}g_{17} = 1$$

$$g_{15}g_{58}g_{81} = 1$$

$$bu^{-1}t^{-1} = 1 = btu^{-1}$$

$$tu = b = ut^{-1}$$

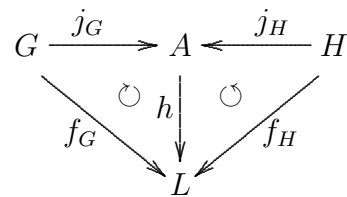
$$\pi_1(\mathbb{K}, v) = (u, t | u^{-1}tu = t^{-1})$$

Temos acima a triangulação da garrafa de Klein. Em vermelho temos uma árvore maximal (com as arestas mais grossas) e os 1-simplexos que são de mesma cor são equivalentes pela nossa relação R do teorema 3.10.

3.9 TEOREMA DE VAN KAMPEN

Sejam G e H grupos (não necessariamente abelianos). Dizemos que a terna (A, j_G, j_H) resolve o problema universal do produto livre (PUPL de forma sucinta) de G por H se:

- A é um grupo;
- $j_G : G \rightarrow A$ e $j_H : H \rightarrow A$ são homomorfismos;
- Dados um grupo L e homomorfismos $f_G : G \rightarrow L$ e $f_H : H \rightarrow L$ existe um único homomorfismo $h : A \rightarrow L$ tal que, $h \circ j_G = f_G$ e $h \circ j_H = f_H$.



Desta forma, segue o próximo teorema.

Teorema 3.11. Se (A, j_G, j_H) e (B, i_G, i_H) resolvem o problema universal para o produto livre de G por H então existe um único isomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que, $h \circ j_G = i_G$ e $h \circ j_H = i_H$.

Demonstração. (A, j_G, j_H) resolve o PUPL de G por $H \Rightarrow$ existe um único homomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que, $h \circ j_G = i_G$ e $h \circ j_H = i_H$.

(B, i_G, i_H) resolve o PUPL de G por $H \Rightarrow$ existe um único homomorfismo $g : B \rightarrow A$ tal que, $g \circ i_G = j_G$ e $g \circ i_H = j_H$.

Como (A, j_G, j_H) resolve o PUPL de G por H segue que, $\text{id}_A : A \rightarrow A$ é o único homomorfismo tal que, $\text{id}_A \circ j_G = j_G$ e $\text{id}_A \circ j_H = j_H$.

Desta forma:

$$(g \circ h) \circ j_G = g \circ (h \circ j_G) = g \circ i_G = j_G;$$

$$(g \circ h) \circ j_H = g \circ (h \circ j_H) = g \circ i_H = j_H$$

Logo, pela unicidade do PUPL concluímos que $g \circ h = \text{id}_A$.

De forma análoga, podemos concluir que $h \circ g = \text{id}_B$. Assim, $h : A \rightarrow B$ é o único isomorfismo tal que, $h \circ j_G = i_G$ e $h \circ j_H = i_H$. \square

Desta forma temos que a solução para PUPL é única a menos de isomorfismo, já o próximo teorema vai no caminho de nos dar essa solução. Dados grupos G e H , dizemos que um grupo $G * H$ é o *produto livre* de G por H se existem homomorfismos $j_G : G \rightarrow G * H$ e $j_H : H \rightarrow G * H$ tais que a terna $(G * H, j_G, j_H)$ resolve o PUPL de G por H .

Teorema 3.12. Para quaisquer grupos G e H existe o produto livre $G * H$.

Para este teorema faremos a construção de $G * H$.

Seja $X = (G \times \{a\}) \cup (H \times \{b\})$ com $a \neq b$. Seja também $1 = (1, c)$ com $a \neq c \neq b$. Temos que $G' = G \times \{a\}$ equipado com a operação $((g_1, a), (g_2, a)) \mapsto (g_1 \cdot g_2, a)$ é um grupo isomorfo ao grupo G . De forma análoga $H' = H \times \{b\}$ também é um grupo isomorfo ao grupo H . Além disso, $G' \cap H' = \emptyset$ e $1 \notin G' \cup H'$.

Uma palavra em $X = G' \cup H'$ é uma sequência (a_1, a_2, \dots) em $X \cup \{1\}$, e uma palavra em X é reduzida se:

- Nenhum a_i é elemento neutro de G ou de H ;
- Para cada i , a_i e a_{i+1} não pertencem ao mesmo grupo;
- Se $a_i = 1$ então, $a_j = 1$ para todo $j > i$.

Desta forma identificamos $1 = (1, 1, 1, \dots)$ a qual é uma palavra reduzida. Então podemos representar qualquer palavra reduzida sobre X , de forma única, por:

$$w = 1 \text{ ou } w = a_1 a_2 \cdots a_k = (a_1, a_2, \dots, a_k, 1, 1, \dots) \text{ com } a_j \in X.$$

Dadas duas palavras reduzidas $a = a_1 a_2 \cdots a_k$ e $b = b_1 b_2 \cdots b_l$ definimos o produto $a \cdot b$ como sendo a palavra reduzida obtida da justaposição de a seguida de b . Após isso, efetuamos todos os cancelamentos e contrações necessárias para que essa justaposição se transforme numa palavra reduzida.

O conjunto $G * H$ formado por todas as palavras reduzidas sobre X , equipado com o produto definido acima, e tendo 1 como elemento neutro, é um produto livre de G por H .

Exemplo 3.6.

- $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2 = F(\{a, b\}) =$ grupo livre sobre $\{a, b\}$.
- $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n = (a, b | b^n = 1)$
- $\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n = (a, b | a^m = 1, b^n = 1)$.
- $\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_m = (a, b | a^m = 1, b^m = 1)$.
- Mais geralmente, se $G = (X | \Delta_1)$ e $H = (Y | \Delta_2)$ então, $G * H = (X \cup Y | \Delta_1 \cup \Delta_2)$.

Agora podemos então enunciar o teorema de Van Kampen.

Teorema 3.13 (Van Kampen). *Sejam*

(i) K e L complexos simpliciais num mesmo espaço euclidiano \mathbb{R}^n , que se intersectam num subcomplexo comum $K \cap L$;

(ii) $J_1 : |K \cap L| \hookrightarrow |K|$ e $J_2 : |K \cap L| \hookrightarrow |L|$ as inclusões;

(iii) $v \in \text{Ver}(K \cap L)$;

(iv) $|K|, |L|$ e $|K \cap L|$ conexos por caminhos.

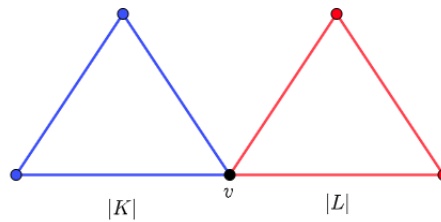
Então, $\pi_1(|K \cup L|, v)$ é obtido de $\pi_1(|K|, v) * \pi_1(|L|, v)$ adicionando as relações $(J_1)_*(z) = (J_2)_*(z)$ para todo $z \in \pi_1(|K \cap L|, v)$.

Uma demonstração para esse resultado pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.138) e como consequência imediata desse teorema temos o seguinte corolário.

Corolário 3.2. No Teorema acima, se $|K \cap L|$ é simplesmente conexo então,

$$\pi_1(|K \cup L|, v) \cong \pi_1(|K|, v) * \pi_1(|L|, v)$$

Exemplo 3.7. Como aplicação imediata do corolário acima temos o cálculo do grupo fundamental da união por um ponto de dois círculos, $S^1 \vee S^1 = \frac{S^1 \times S^1}{(\{1\} \times S^1) \cup (S^1 \times \{1\})}$.

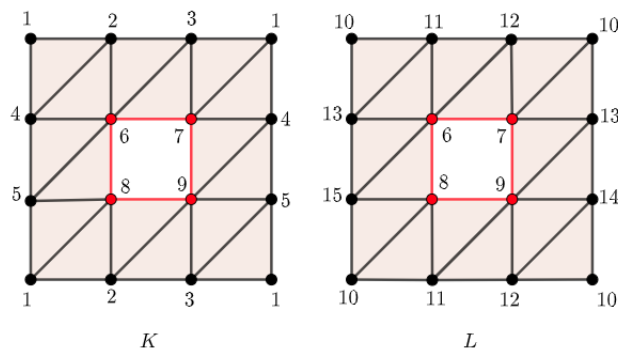


Na figura acima, temos $|K|$ homeomorfo a S^1 em azul e $|L|$ homeomorfo a S^1 em vermelho. $S^1 \vee S^1$ é homeomorfo à $|K \cup L|$ e $|K \cap L| = \{v\}$. Segue então do corolário acima que $\pi_1(|K \cup L|, v) \cong \pi_1(|K|, v) * \pi_1(|L|, v) = \pi_1(S^1, 1) * \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Um bouquet de n círculos $B_n(S^1)$ é a união por um ponto de n círculos. Usando indução sobre n pode ser mostrado que $\pi_1(B_n(S^1), v) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (produto livre de n cópias de \mathbb{Z}).

3.9.1 Grupo fundamental do bitoro

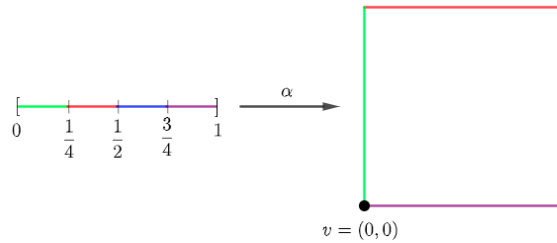
Usaremos o teorema de Van Kampen para calcular o grupo fundamental do bitoro. Sejam, K e L os complexos simpliciais abaixo



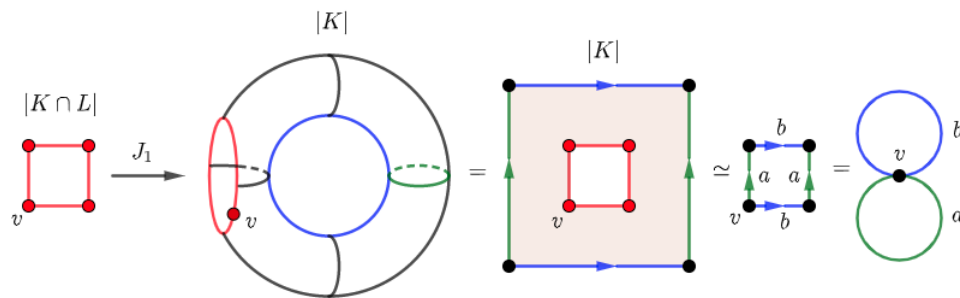
Uma triangulação do bitoro é dada por $T^2 = |K \cup L|$ e $|K \cap L|$ é o quadrado com vértices 6, 7, 8 e 9 em vermelho.

Se $|K \cap L| = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$ então $\pi_1(|K \cap L|, v) = \mathbb{Z}$ é gerado por $[\alpha]$ com, $\alpha : [0, 1] \rightarrow |K \cap L|$ dado por,

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, 4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (4t - 1, 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 3 - 4t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ (4 - 4t, 0) & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Observamos que $|K|$ tem mesmo tipo de homotopia da união por um ponto de dois círculos, $S^1 \vee S^1 = |K \cap L| / \sim$ (sendo $(0, t) \sim (1, t)$ e $(s, 0) \sim (s, 1)$ para todos $s, t \in [0, 1]$). O grupo fundamental $\pi_1(S^1 \vee S^1, v)$ é o grupo livre gerado pelas classes a e b dos laços mostrados na figura abaixo. O homomorfismo $(J_1)_* : \pi_1(|K \cap L|, v) \rightarrow \pi_1(|K|, v)$ induzido pela inclusão $J_1 : |K \cap L| \hookrightarrow |K|$ leva o gerador $[\alpha]$ de $\pi_1(|K \cap L|, v) \cong \pi_1(S^1, v) = \mathbb{Z}$ em $aba^{-1}b^{-1}$.



$$\pi_1(|K \cap L|, v) = \mathbb{Z} = \langle [\alpha] \rangle$$

$$\pi_1(|K|, v) = \pi_1(S^1 \vee S^1, v) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b | \emptyset \rangle = F_2$$

$$(J_1)_*([\alpha]) = aba^{-1}b^{-1}$$

Como $|L|$ é homeomorfo à $|K|$, comportamento semelhante ocorre com $(J_2)_* : \pi_1(|K \cap L|, v) \rightarrow \pi_1(|L|, v)$, ou seja, existem geradores c e d de $\pi_1(|L|, v) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1, v) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ tais que, $(J_2)_*([\alpha]) = cdc^{-1}d^{-1}$.

Segue do teorema de van Kampen que $\pi_1(T^2, v)$ é isomorfo à $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ junto

com a relação $aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1}$, ou seja,

$$\pi_1(T^2, v) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1} = cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

4 TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO

Já construímos as ferramentas necessárias nos capítulos 2 e 3 para agora direcionar nosso foco diretamente para o teorema de classificação.

Teorema 4.1 (Teorema de Classificação de superfícies fechadas). *Qualquer superfície fechada é homeomorfa à esfera, ou à esfera com um número finito de alças adicionado, ou à esfera com um número finito de discos removidos e substituídos por faixas de Möbius. Nenhuma dessas superfícies são homeomorfas entre si.*

O estudo deste teorema se dividirá em algumas etapas, começando pela descrição das superfícies padrão, depois discutiremos a existência de uma triangulação para as superfícies fechadas e suas características. Com a característica de Euler teremos como relacionar uma superfície geral fechada com nossas superfícies padrão. Para mostrar que qualquer superfície é homeomorfa a uma das superfícies padrão, usaremos um método chamado cirurgia na superfície.

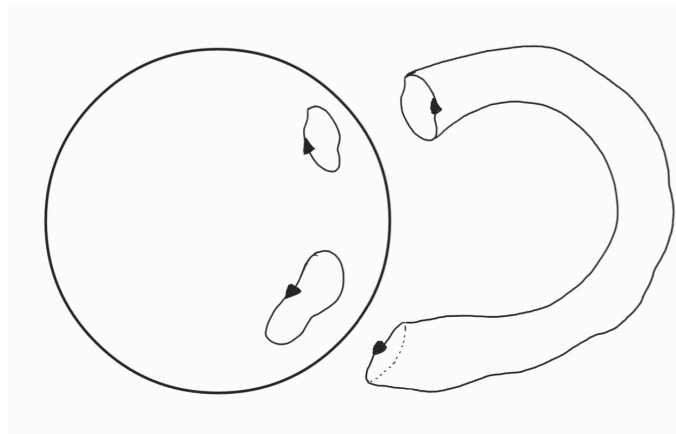
Por fim, utilizaremos as representações poligonais das superfícies fechadas para podermos calcular seus grupos fundamentais e concluirmos o nosso estudo.

4.1 SUPERFÍCIES PADRÃO

Na seção 2.6 já foi definido o que é uma superfície, mas agora segue a definição de superfície fechada.

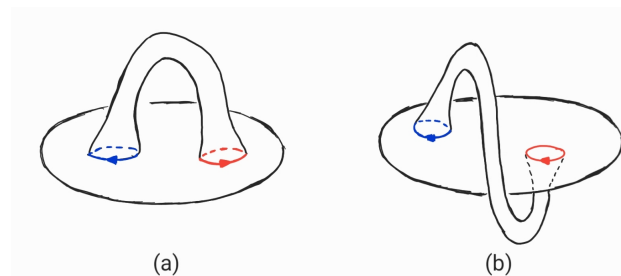
Definição 4.1. Uma superfície fechada F é uma superfície sem bordo, compacta e conexa.

As superfícies mencionadas no Teorema 4.1 serão chamadas de superfícies padrão. No entanto, precisamos esclarecer o que queremos dizer com a adição de alças. Em suma, ao adicionar uma alça, queremos dizer remover dois discos disjuntos de uma superfície fechada S e colar as extremidades opostas de um cilindro em seu lugar. Por colagem, queremos tomar a união dos espaços juntamente com a relação de equivalência que identifica os círculos de fronteira apropriados e dando-lhe a topologia de identificação. Na imagem abaixo temos um exemplo que resulta no Toro.



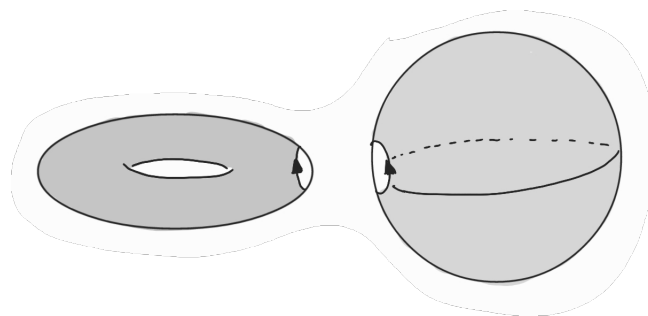
Note que, quando adicionamos mais alças, fazemos isso em diferentes partes da esfera. Precisamente onde se adiciona as alças (ou faixas de Möbius) não importa, de qualquer modo que se faça essa colagem os espaços obtidos serão homeomorfos.

Vamos nos atentar em como as alças são identificadas. As setas são marcadas nos círculos no bordo do cilindro, e nas bordas dos orifícios na esfera, para mostrar como as identificações devem ser feitas, no exemplo acima as setas no cilindro vão na mesma direção e aquelas que estão na esfera tem direções opostas. Desta forma, ao adicionar uma alça, existem duas formas de se fazer isso, e exemplificaremos elas adicionando a alça em um disco.



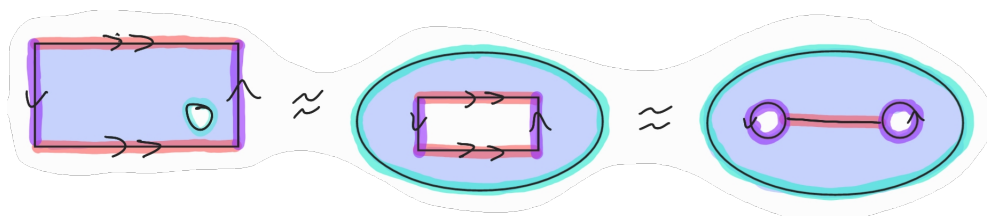
A forma (a) é quando as setas no cilindro vão na mesma direção e as do disco tem direções opostas. Já a forma (b) é aquela onde tanto as setas do cilindro quanto as do disco vão na mesma direção.

Não é difícil de ver que (a) é homeomorfo ao toro com um furo, logo, adicionar uma alça corresponde à remoção de um único disco aberto da esfera e do toro, e colar os dois círculos de limite resultantes.

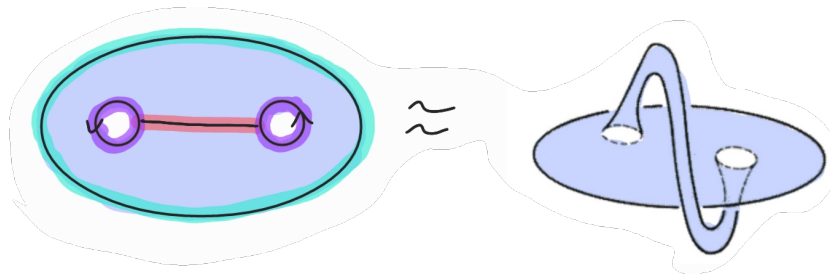


Uma vez fixada a direção da flecha no círculo limite da esfera, temos duas escolhas distintas para a flecha no círculo limite do toro, no entanto, há um homeomorfismo do toro perfurado nele mesmo que inverte a direção dada ao círculo limite e assim as duas possibilidades fornecem respostas homeomorfas.

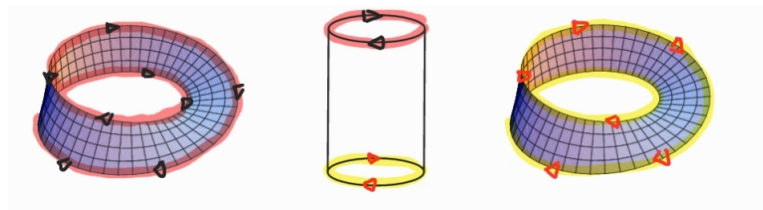
Já de forma menos natural temos (b) homeomorfo a garrafa de Klein com um furo.



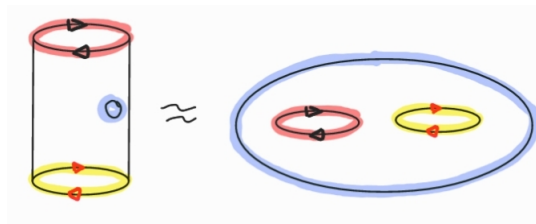
e por fim basta identificarmos os círculos com orientações opostas, como feito abaixo.



A garrafa de Klein pode ser vista como duas faixas de Möbius identificadas nas bordas de um cilindro como abaixo.

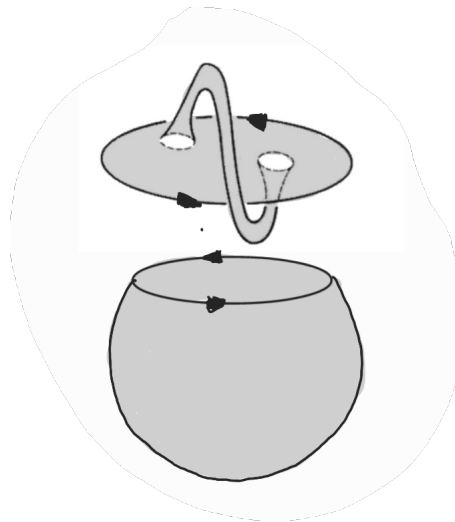


Se adicionarmos um furo no cilindro temos que o mesmo é homeomorfo ao disco com dois buracos.



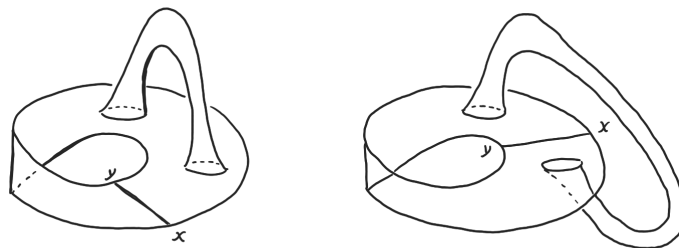
Logo uma garrafa de Klein furada equivale a identificarmos duas faixas de Möbius em um disco com dois buracos, como acima.

Agora, como feito com o item (a), devemos pegar uma cópia da garrafa de Klein perfurada e costurar seu círculo limite à borda de um orifício circular na esfera, que nos dá uma garrafa de Klein sem furo, uma vez fixada a direção da flecha no círculo limite da esfera, temos duas escolhas distintas para a flecha no círculo limite da garrafa de Klein, que assim como em (a) fornecem respostas homeomorfas.



Portanto, colocar uma alça no sentido (b) equivale a colar duas faixas de Möbius.

Para completar a nossa interpretação intuitiva de adicionar alças e faixa de Möbius, vamos misturar as operações de adicionar uma alça no sentido "correto" com adicionar faixas de Möbius. Não importando onde adicionamos a alça, vamos entender o que acontece ao colocarmos uma alça em uma faixa de Möbius.



Note a partir da imagem acima, temos que ao adicionarmos uma alça no sentido "correto", podemos fazê-la percorrer pela faixa de Möbius de modo que ela fica com a orientação invertida (que como vimos equivale a duas faixas de Möbius). Assim chegamos ao próximo teorema.

Teorema 4.2. *Modificar a esfera adicionando m alças e substituindo $n > 0$ discos disjuntos por faixas de Möbius produz a mesma superfície obtida pela substituição de $2m + n$ discos disjuntos por faixas de Möbius.*

E assim chegamos à uma ideia fundamental, ou adicionamos alças na orientação normal, ou adicionamos faixas de Möbius, qualquer coisa diferente disso é homeomorfa a uma dessas ações.

4.2 SUPERFÍCIES COMBINATÓRIAS

Um fato fundamental para a prova do teorema de classificação é o seguinte resultado que nos permite utilizar nosso conhecimento desenvolvido no capítulo 3.

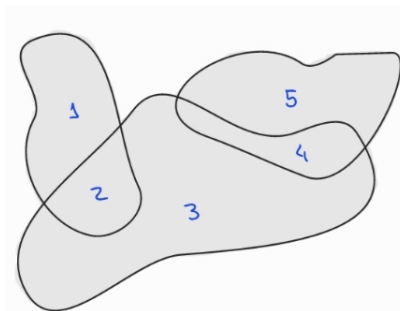
Teorema 4.3. *Qualquer superfície fechada pode ser triangulada.*

Isso não será provado aqui, mas uma prova rápida pode ser encontrada no artigo (DOYLE; MORAN, 1968), sendo que esse resultado foi demonstrado pela primeira vez por Radó em (RADO, 1925).

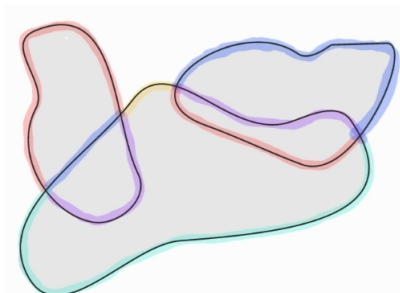
Aqui vamos fazer uma construção intuitiva dessa triangulação. Uma vez que S é compacto e localmente homeomorfo ao plano, podemos encontrar um número finito de discos fechados em S cuja união de todos resulte em S . Para evitar regiões anulares entre os discos, concordamos em descartar qualquer disco que esteja inteiramente dentro de outro.

Agora devemos supor que possamos fazer com que os limites desses discos sejam bem comportados, no sentido de que se dois se encontram, eles o fazem em um número finito de pontos e arcos. Aceitaremos isso como um fato, pois esse é o ponto mais delicado dessa construção.

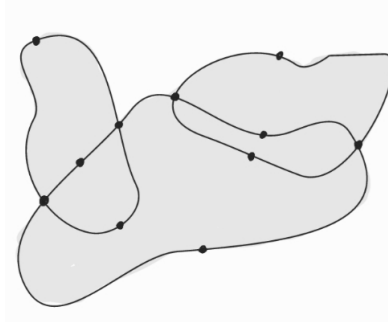
Uma vez que garantimos que os limites são bem comportados, numeramos os discos da nossa superfície como feito abaixo.



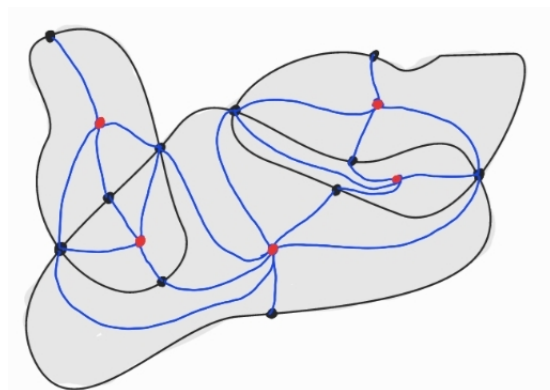
Feito isso, demarcamos os arcos.



agora, na interseção entre os arcos e no centro de cada um deles colocamos vértices.



e por fim, marcamos o baricentro de cada triângulo e conectamos os respectivos vértices do mesmo triângulo.



Apesar desta construção ser relativamente fácil, deve ficar claro que encontrar uma cobertura adequada por discos precisa de resultados profundos, incluindo o teorema da curva de Jordan.

Uma vez que temos o teorema 4.3, podemos voltar nosso foco para o complexo simplicial que a triangula ao invés da própria superfície. Portanto, devemos entender a estrutura de complexos simpliciais que podem triangular uma superfície fechada. Assim chegamos a definição de superfície combinatória.

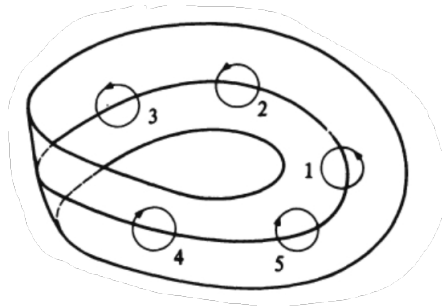
Definição 4.2. Uma superfície combinatória é um complexo simplicial K com as propriedades

- a) K possui dimensão 2;
- b) Conexo por arestas;
- c) Cada aresta é exatamente a face de 2 triângulos;
- d) Cada vértice reside em pelo menos 3 triângulos os quais formam um cone sobre esse vértice e base uma curva poligonal simples fechada.

Assim temos o próximo teorema.

Teorema 4.4. Se $h : |K| \rightarrow S$ é uma triangulação de uma superfície fechada S , então o complexo K é uma superfície combinatória.

Agora, vamos nos voltar para a ideia de orientação. Na figura abaixo, temos um pequeno círculo em uma faixa de Möbius identificado por 1 e está orientado no sentido anti-horário. Ao percorrermos esse círculo pela faixa, até chegarmos no ponto 5, temos que o sentido desse círculo passou a ser o sentido horário, mudando assim sua orientação. Superfícies que contém pelo menos uma faixa de Möbius são ditas não orientáveis.

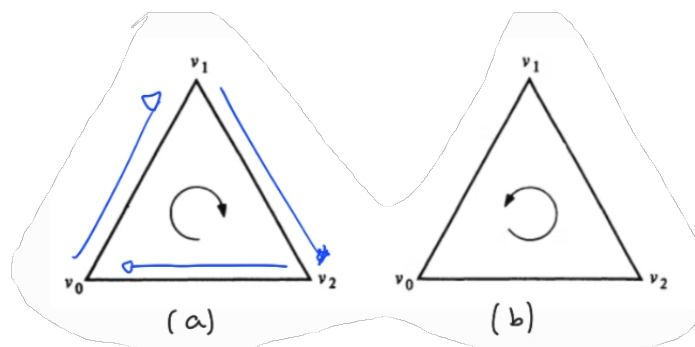


Note que essa abordagem/definição de orientação é pouco funcional, apesar de intuitiva, pois garantir que para toda curva fechada a operação de transladar por um pequeno círculo preservava a orientação não é algo simples de se verificar.

Então vamos abordar essa ideia de uma maneira diferente porém equivalente (não mostraremos aqui essa equivalência) .

Definição 4.3. Seja v_0, \dots, v_k uma ordenação dos vértices para algum k -simplexo $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$. Dizemos que duas dessas ordenações são equivalentes se uma pode ser obtida da outra por uma permutação par. As classes de equivalência obtidas são então chamadas de orientações possíveis de σ . Um simplexo com uma orientação especificada será chamado de simplexo orientado.

Segue o exemplo das duas orientações que podemos colocar em um 2-simplexo.



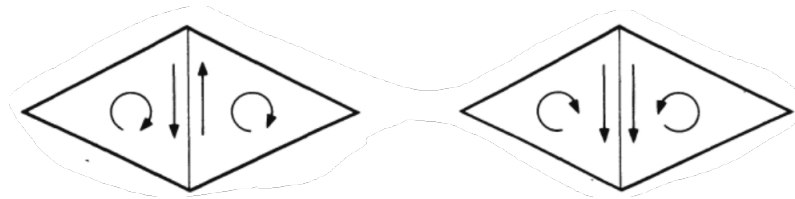
(a) $v_0v_1v_2 = v_1v_2v_0 = v_2v_0v_1$;

(b) $v_0v_2v_1 = v_2v_1v_0 = v_1v_0v_2$.

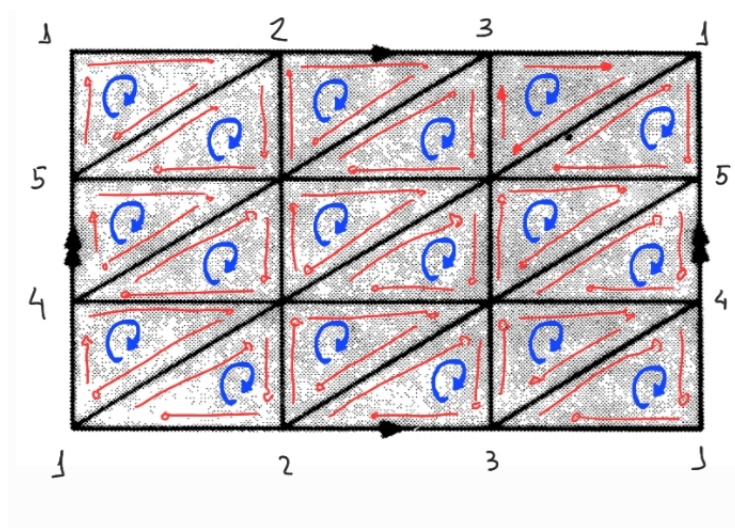
Estenderemos a ideia de orientabilidade de simplexos acima para as superfícies combinatórias.

Definição 4.4. Uma superfície combinatória K é dita orientável se for possível definir uma orientação em todos os triângulos em K tal que quaisquer dois triângulos que se intersectam em uma aresta induzam orientação oposta nessa aresta, o que chamamos de orientação compatível. Caso contrário, a superfície combinatória é chamada não orientável.

A Figura abaixo ilustra essa definição, tendo a esquerda dois simplexos com uma orientação compatível e a direita com a orientação não compatível.



Exemplo 4.1. Dado uma triangulação do toro é possível orientar todos os triângulos de forma compatível como ilustrado abaixo.

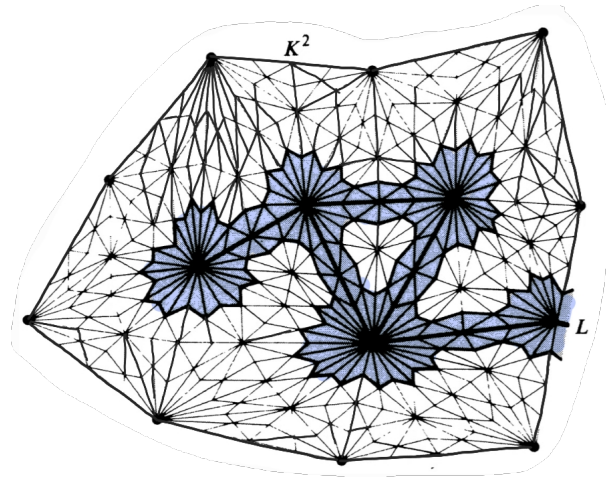


Agora temos o seguinte resultado que nos garante que basta verificar a orientabilidade de uma única triangulação para garantir que todas são orientáveis, a demonstração desse resultado envolve a teoria de homologia simplicial, então apenas assumiremos resultado sem demonstrá-lo.

Teorema 4.5. *Se S é uma superfície fechada que pode ser triangulada por uma superfície combinatória orientável, então qualquer outra triangulação de S também deve ser orientável.*

Definição 4.5. Seja K uma superfície combinatória e L um subcomplexo unidimensional. Por engrossamento L , queremos dizer tomar o poliedro do subcomplexo de K^2 consistindo de todos os simplexos que encontram L junto com suas faces.

A imagem abaixo ilustra essa definição.



Agora mostramos dois outros resultados sobre o engrossamento de complexos unidimensionais. Mas primeiro, precisamos de algumas preliminares.

Lema 4.1. *Seja A e B ambos homeomorfos ao $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ que se cruzam ao longo de seus bordos em um arco. Então $A \cup B$ é homeomorfo ao $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$*

Uma demonstração para este lema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.35)

Lema 4.2. *Qualquer árvore contém um vértice com exatamente uma aresta conectada a ele.*

Demonstração. Seja T uma árvore e suponha que cada vértice esteja conectado a pelo menos duas arestas. Como uma árvore tem um caminho único entre todos os seus vértices e há apenas um número finito de vértices, existe um caminho entre dois vértices contendo um número máximo de arestas. Chame esse caminho de $P = v_0, v_1, \dots, v_m$. Seja $w \neq v_{m-1}$ um vértice conectado por uma aresta a v_m . Se $w \in P$, isso contradiz a unicidade do caminho em uma árvore. Se $w \notin P$, então v_0, v_1, \dots, v_m, w será um caminho em T contendo mais arestas que P , contrariando a maximalidade. Portanto, v_m tem apenas uma aresta conectada a ela.

□

Definição 4.6. *Seja K um complexo simplicial e v um simplexo K . A estrela fechada de v em K , denotada por $\overline{\text{star}}(v, K)$ é a união de todos os simplexos de K contendo v como vértice.*

Assim chegamos ao dois resultados relevantes.

Lema 4.3. *Engrossar uma árvore dá um disco.*

Demonstração. Seja K um complexo simplicial e o subcomplexo T uma árvore. Se T consiste em apenas um único vértice v , o engrossamento de T nos dá $\overline{\text{star}}(v, K^2)$. Esta, sendo uma região em \mathbb{R}^2 delimitada por uma curva poligonal fechada simples, é homeomorfo a o disco. Agora seja T uma árvore com n vértices e suponha que engrossar uma árvore com menos vértices dá um disco. Escolha um vértice v em T pertencente apenas a uma aresta E de T .

Então $T_1 = T - \overline{\text{star}}(v, T)$ é uma árvore com $n - 1$ vértices, portanto o engrossamento de T_1 nos dá um disco D . Agora para concluirmos que engrossar T nos dá um disco, seja $A = \overline{\text{star}}(\hat{E}, K^2)$ e $B = \overline{\text{star}}(v, K^2)$. Agora, note que A, B, D são todos homeomorfos a um disco e como $A \cap D$ é um arco e $A \cap B$ é também um arco, aplicando duas vezes o lema 4.1 temos que $A \cup B \cup D$ é homeomorfo ao disco.

□

Lema 4.4. *Engrossar uma curva poligonal fechada simples dá um cilindro ou uma faixa de Möbius.*

Demonstração. Seja K um complexo simplicial. Seja C uma curva poligonal fechada simples em K e E uma aresta em C . Então $T = C - \overline{\text{star}}(\hat{E}, C)$ é uma árvore e, portanto, engrossar T dá um disco D , pelo lema 4.3. Engrossando C temos a união de D e $\overline{\text{star}}(\hat{E}, K^2)$, que intersectam-se em dois arcos disjuntos. Colando ao longo de um dos arcos temos um disco pelo lema 4.1. Assim obtemos um disco onde precisamos identificar dois arcos disjuntos. Este, por sua vez, é homeomorfo a um retângulo com os dois arcos do disco mapeados para lados opostos. A colagem desses lados pode ser feita de duas maneiras diferentes, uma resultando em um cilindro e a outra na faixa de Möbius.

□

4.3 CARACTERÍSTICA DE EULER

Como já mencionado, a característica de Euler será uma das nossas principais ferramentas para relacionar uma superfície fechada geral com nossas superfícies fechadas padrão.

Definição 4.7. Seja K um n -dimensional complexo simplicial. A característica de Euler de K é definida pelo número

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\alpha_i)$$

onde α_i é o número de i -simplexos em K .

Ou seja, a característica de Euler associa um número inteiro a um complexo simplicial qualquer. Se K é uma superfície combinatória, temos que a dimensão de K é 2. Logo a característica de Euler de K é dada por,

$$\chi(K) = \text{Vértices} - \text{Arestas} + \text{Faces}$$

Outro caso especial é a característica de Euler de um grafo G (complexo simplicial conexo de dimensão 1), a qual é dada por,

$$\chi(G) = \text{Vértices} - \text{Arestas}$$

O grande e importante resultado que não mostraremos e que pode ser encontrado em (ARMSTRONG, 1983, p.199) utilizando homologia simplicial é que a característica de Euler é um invariante topológico. O que é um resultado impressionante, pois a característica de Euler é associado ao complexo simplicial que é puramente combinatório e não uma estrutura topológica, na qual chegamos apenas quando fazemos a realização geométrica do complexo simplicial. Uma vez que deixamos claro o quão interessante é esse resultado, seguimos com nossa teoria.

Teorema 4.6. *A característica de Euler é um invariante topológico.*

Uma consequência direta deste teorema junto com o lema 3.1 é o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *A característica de Euler é invariante sob subdivisão baricêntrica, ou seja, $\chi(K) = \chi(K^1)$ para qualquer complexo simplicial K .*

Lema 4.5. *seja $K \cap L$ um complexo simplicial orientado obtido pela união dos complexos K e L . Então $\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L)$*

Demonstração. Seja $J = K \cap L$, então temos que

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n_0} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i)$$

com β_i o numero i -simplexos de J , α_i o numero de i -simplexos de K que não estão em J e $n_0 =$ dimensão de K .

Analogamente, temos

$$\chi(L) = \sum_{i=0}^{n_1} (-1)^i (\gamma_i + \beta_i)$$

com γ_i o numero de i -simplexos de L que não estão em J e $n_1 =$ dimensão de L . Desta forma temos pela construção de $K \cup L$ que:

$$\begin{aligned} \chi(K \cup L) &= \sum_{i=0}^{\max(n_0, n_1)} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{\max(n_0, n_1)} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \beta_i - \beta_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n_0} (-1)^i (\alpha_i + \beta_i) + \sum_{i=0}^{n_1} (-1)^i (\gamma_i + \beta_i) - \sum_{i=0}^{n_0} (-1)^i \beta_i = \\ &= \chi(K) + \chi(L) - \chi(J) \end{aligned}$$

□

Agora nos voltamos para o cálculo da característica de Euler para os grafos.

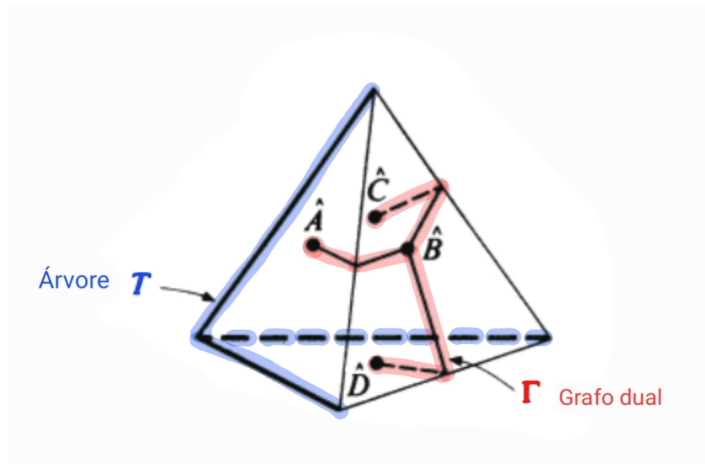
Lema 4.6. *Seja Γ um grafo conexo. Então $\chi(\Gamma) \leq 1$ com igualdade se e somente se Γ for uma árvore*

Demonstração. Se Γ é uma árvore, então Γ tem exatamente um vértice a mais que arestas, então, $\chi(\Gamma) = 1$. Se Γ é um grafo geral conexo, seja L uma árvore maximal de Γ . Pelo Lema 3.3, L contém todos os vértices de Γ . Portanto, L pode ser obtido de Γ removendo um número finito n de arestas. Portanto $\chi(\Gamma) = \chi(L) - n \leq 1$. \square

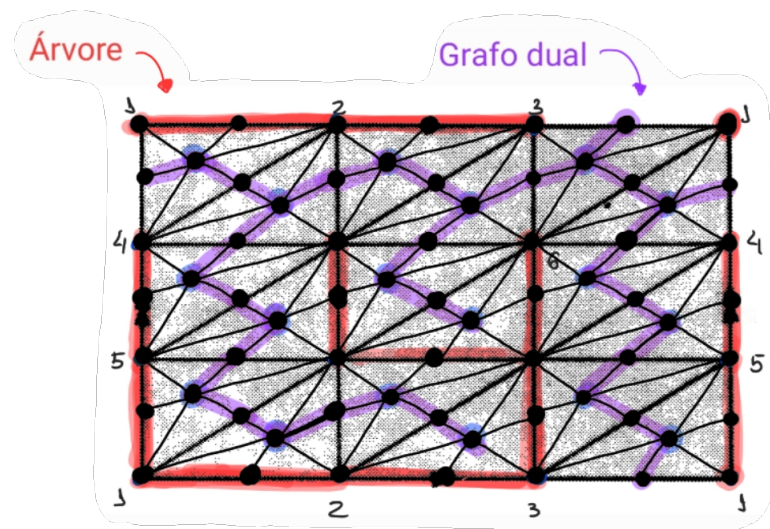
Gostaríamos de um resultado análogo para superfícies combinatórias, mas para isso, precisamos da seguinte definição

Definição 4.8. *Seja K uma superfície combinatória e T uma árvore maximal de K . O grafo dual de T , denotado por Γ , é um complexo unidimensional com vértices nos baricentros de 2-simplexos em K . Dois vértices em Γ determinam uma aresta em Γ se os triângulos correspondentes em K se cruzam em uma aresta que não está em T .*

Segue uma ilustração de exemplo no tetraedro.



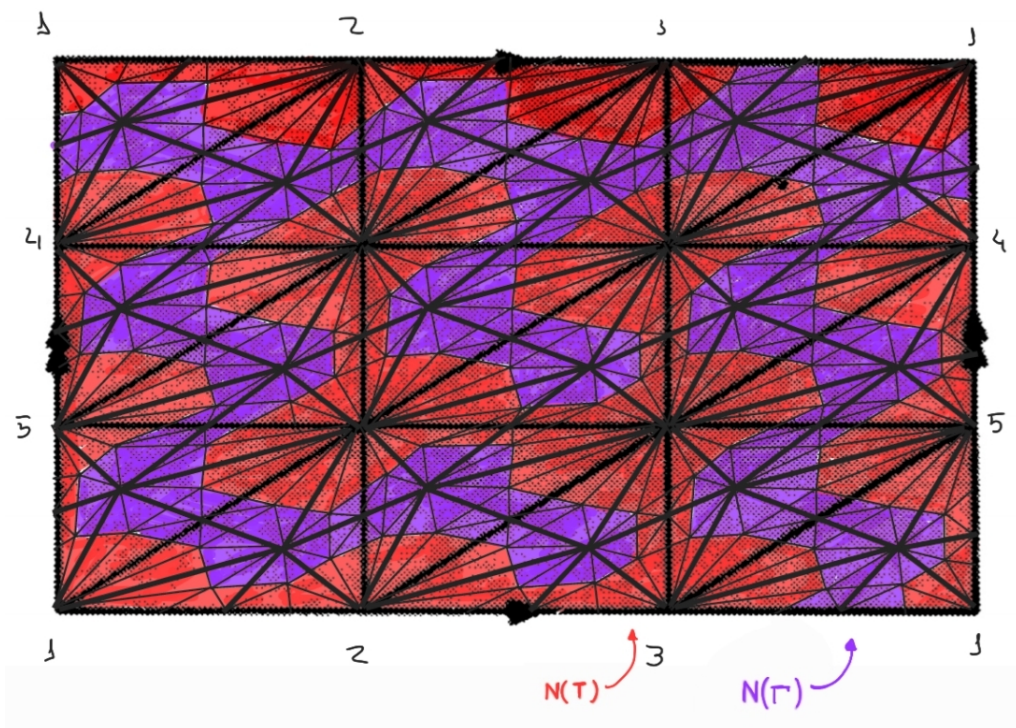
Se tomarmos a primeira subdivisão baricêntrica Γ^1 de Γ , notamos que Γ^1 é um subcomplexo de K^1 consistindo de todos aqueles simplexos que não encontram T . Para ilustrar, temos abaixo a nossa árvore maximal e o grafo dual na triangulação do toro K , dentro de K^1 .



Fazendo o processo de engrossamento, descrito na seção acima, em T e Γ temos os espaços resultantes $N(T)$ e $N(\Gamma)$ respectivamente. Como T é uma árvore, temos pelo lema 4.3 que $N(T) \approx D$, e temos as seguintes propriedades:

- (a) $N(T) \cup N(\Gamma) = |K|$;
- (b) $N(T)$ e $N(\Gamma)$ se intersectam precisamente no círculo de fronteira de $N(T)$;
- (c) Γ é um complexo conexo $\Leftrightarrow N(\Gamma)$ é um espaço conexo.

Como exemplo, segue abaixo o $N(T)$ e $N(\Gamma)$ referente a árvore maximal T e ao grafo dual Γ no toro da imagem acima.



Visto isso, podemos notar que Γ pode ou não ser uma árvore. Desta forma, temos os seguintes resultados.

Lema 4.7. *Seja K uma superfície combinatória. Então $\chi(K) \leq 2$*

Demonstração. Tome uma árvore maximal T em K e construa seu grafo dual Γ como acima.

Denotemos o número de vértices, arestas e faces de K respectivamente por $V(K)$, $A(K)$ e $F(K)$. Denotemos de forma análoga o número de vértices e arestas de T e Γ . Segue das definições de T e Γ que,

$$V(K) = V(T), \quad A(K) = A(\Gamma) + A(T) \quad \text{e} \quad F(K) = V(\Gamma)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\chi(K) &= V(K) - A(K) + F(K) = V(T) - (A(\Gamma) + A(T)) + V(\Gamma) \\ &= (V(T) - A(T)) + (V(\Gamma) - A(\Gamma)) = \chi(T) + \chi(\Gamma)\end{aligned}$$

Segue do lema 4.6 que $\chi(T) = 1$ e $\chi(\Gamma) \leq 1$ logo,

$$\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma) \leq 1 + 1 = 2$$

□

O próximo resultado nos permite a partir da característica de Euler de uma superfície combinatória entender a estrutura topológica da superfície associada.

Teorema 4.7. *Seja K uma superfície combinatória. Então as afirmações seguintes são equivalentes.*

- a) $\chi(K) = 2$;
- b) $|K|$ é homeomorfo ao S^2 ;
- c) Qualquer curva fechada simples em $|K|$ constituído por arestas em K^1 separa $|K|$.

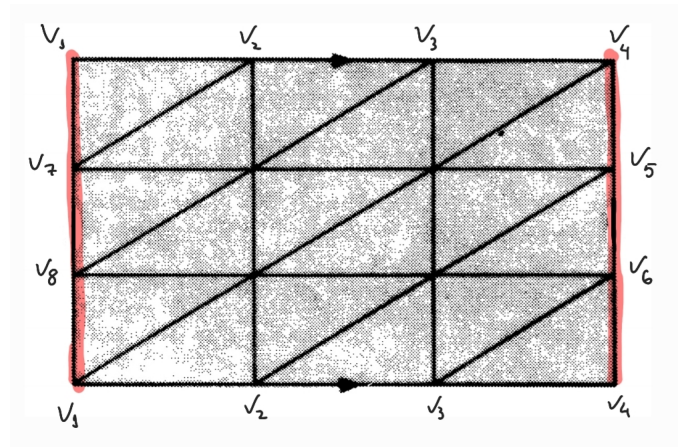
Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.160).

4.4 CIRURGIA

Para mostrar que qualquer superfície fechada é homeomórfica a uma das superfícies padrão, usaremos um método chamado de cirurgia. O método aumentará a característica de Euler da superfície e após um número finito de cirurgias, teremos a superfície resultante homeomorfa à S^2 baseado no teorema 4.7. Refazendo nossas cirurgias, podemos então mostrar que a superfície original é homeomórfica a uma superfície padrão. Em detalhes, o método se divide nas seguintes etapas.

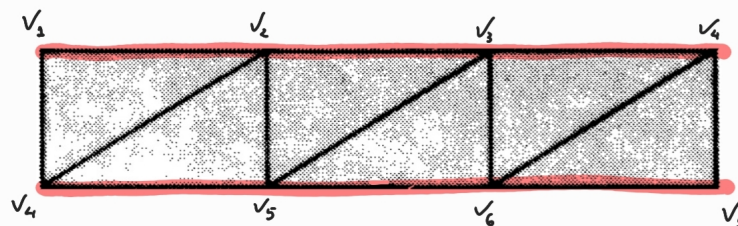
1. Tome uma curva fechada simples que não separa a superfície;
2. Faça o engrossamento dessa curva fechada;
3. Retire o interior desse engrossamento;
4. A cada bordo gerado, preencha com um disco.

Note que se a curva descrita em 1 não existe, então pelo teorema 4.7 $|K|$ é homeomorfo a S^2 e terminamos. Em 2 ao engrossarmos essa curva, pelo lema 4.4 temos como resultado ou uma faixa de Möbius ou um cilindro. Em 3 a retirada do interior deles altera a característica de Euler de forma diferente. Caso o engrossamento seja um cilindro, como na figura abaixo, preservariamos os simplexos destacados em vermelho, retirariamos o restante, que seria o equivalente a, retirar 18 faces, 26 arestas e 8 vértices.



como $18 - 26 + 8 = 0$ a retirada desses simplexos nada altera a característica de Euler da nossa superfície, porém como indicado no item 4, adicionamos um disco em cada bordo, o que equivale a adicionar uma face, então ao adicionar dois soma-se 2 na nossa característica de Euler, ou seja, quando o engrossamento é um cilindro, a cirurgia modifica a característica de Euler somando 2.

Agora, caso o engrossamento seja uma faixa de Möbius, como na figura abaixo, preservamos os simplexos destacados em vermelho, e retiramos 6 faces e 6 arestas.



Como as arestas preservadas formam um único S^1 , ao tampa-lo com um disco, equivale a adicionar uma face, ou seja, somar 1 na característica de Euler. Logo quando o engrossamento é uma faixa de Möbius, após a cirurgia modifica a característica de Euler somando 1.

Uma vez entendido o procedimento que chamamos de cirurgia, vamos colocá-lo em termos de superfície combinatória. Seja K uma superfície combinatória em \mathbb{R}^n e L uma poligonal fechada simples que não separa $|K|$, desta forma, denote por N o engrossamento de L em K^2 e seja M um subcomplexo de K^2 complementar a N , ou seja, que não encontra L . Caso $|N|$ seja um cilindro, temos que M é uma superfície compacta com bordo que consiste em

dois círculos. Denotando esses bordos por L_1 e L_2 , temos que a nossa superfície combinatória operada K_* é dada por

$$K_* = M \cup CL_1 \cup CL_2$$

onde os vértices dos cones CL_1 e CL_2 são pontos de $\mathbb{R}^{n+1} - R^n$ que se encontram em lados opostos. Agora, caso $|N|$ seja uma faixa de Möbius, temos então que $|M|$ tem um único círculo como bordo, e analogamente

$$K_* = M \cup CL_1$$

. Em ambos os casos dizemos que K_* é obtido a partir de K fazendo uma cirurgia ao longo de L . Com isso, podemos agora trabalhar alguns resultados importantes

Lema 4.8. $\chi(\overline{\text{star}}(v_0, K^2)) = 1$ sendo K uma superfície combinatória

Demonstração. Basta notar que, pela propriedade (d) da definição 4.2 de superfície combinatória, $\overline{\text{star}}(v_0, K^2)$ é o cone sobre v_0 com base uma poligonal simples e fechada. Basta aplicar indução sobre o número de vértices da poligonal base (que possui ao menos 3 vértices) e temos que $\chi(\overline{\text{star}}(v_0, K^2)) = 1$ \square

Lema 4.9. $\chi(N) = 0$

Demonstração. Temos que,

$$N = \bigcup_{v \in L^1} \overline{\text{star}}(v, K^2)$$

Desta forma, se v_0 e v_1 são vértices adjacentes (unidos por uma aresta) de L^1 então, $S_1 = \overline{\text{star}}(v_0, K^2) \cap \overline{\text{star}}(v_1, K^2) \neq \emptyset$ e é constituído precisamente por 3 vértices e 2 arestas. Desta forma temos que,

$$\begin{aligned} \chi(S_1) &= \chi(\overline{\text{star}}(v_0, K^2) \cup \overline{\text{star}}(v_1, K^2)) = \\ &= \chi(\overline{\text{star}}(v_0, K^2)) + \chi(\overline{\text{star}}(v_1, K^2)) - \chi(\overline{\text{star}}(v_0, K^2) \cap \overline{\text{star}}(v_1, K^2)) = \\ &= 1 + 1 - (3 - 2) = 1 \end{aligned}$$

Desta forma, tomando v_0, v_1, \dots, v_n como os vértices de L^1 de forma ordenada, temos que (usando indução sobre n)

$$\chi\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\text{star}}(v_i, K^2)\right) = 1$$

e como $\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\text{star}}(v_i, K^2)\right) \cap \overline{\text{star}}(v_n, K^2)$ é constituído de precisamente 6 vértices e 4 arestas, temos que

$$\chi\left(\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{\text{star}}(v_i, K^2)\right) \cup \overline{\text{star}}(v_n, K^2)\right) = 1 + 1 - (6 - 4) = 0$$

portanto $\chi(N) = 0$.

\square

Teorema 4.8. $\chi(K_*) > \chi(K)$

Demonstração. Se N for um cilindro temos que

$$\begin{aligned}\chi(K_*) &= \chi(M \cup CL_1 \cup CL_2) \\ &= \chi(M) + \chi(CL_1) + \chi(CL_2) - \chi(M \cap CL_1) - \chi(M \cap CL_2) \\ &= \chi(M) + \chi(CL_1) + \chi(CL_2) - \chi(L_1) - \chi(L_2) \\ &= \chi(M) + 2\end{aligned}$$

pois $\chi(CL_1) - \chi(L_1) = \chi(CL_2) - \chi(L_2) = 1$. Analogamente, se N for uma faixa de Möbius, temos que

$$\begin{aligned}\chi(K_*) &= \chi(M \cup CL_1) \\ &= \chi(M) + \chi(CL_1) - \chi(M \cap CL_1) \\ &= \chi(M) + \chi(CL_1) - \chi(L_1) = \chi(M) + 1\end{aligned}$$

Além disso temos que

$$\chi(K) = \chi(K^2) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) = \chi(M) + 0 + 0 = \chi(M)$$

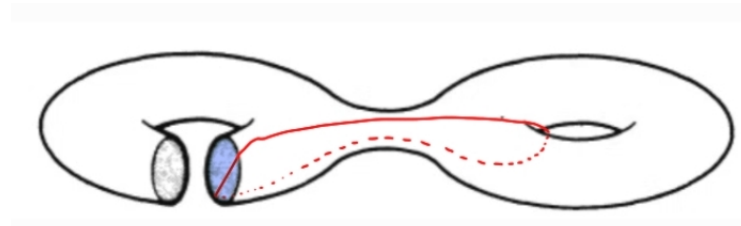
Logo, $\chi(K_*) > \chi(K)$

□

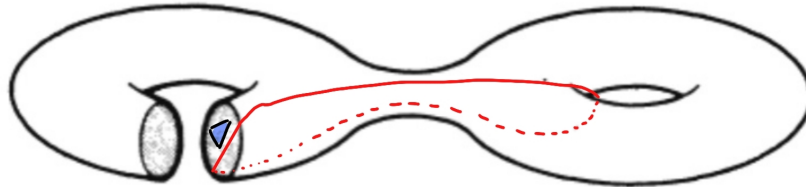
Corolário 4.2. *Qualquer superfície combinatória pode ser transformada em uma esfera através de um número finito de cirurgias.*

Demonstração. Caso $\chi(K) = 2$, então temos que $|K|$ é a esfera e não temos nada a fazer. Caso $\chi(K) < 2$, então há uma poligonal fechada simples L em K^1 que não separa $|K|$, portanto, substitua K por K^1 e faça a cirurgia ao longo dessa curva fechada L , o resultado é uma nova superfície combinatória cuja a característica de Euler é maior que a de K . Eventualmente, com um número finito de cirurgias, produzimos uma superfície combinatória com a característica de Euler igual a 2, que é o primeiro caso. □

Note que na demonstração acima utilizamos cirurgias subsequentes até chegarmos a esfera, porém a cada cirurgia que aplicamos na nossa superfície fechada, criamos um ou dois discos nessa superfície. Nesse momento, seria interessante preservar esses discos para o momento em que desejarmos recuperar a superfície original, porém note no exemplo abaixo onde temos um toro duplo em que já foi aplicado uma cirurgia e destacado em azul os dois discos criados e temos a curva fechada simples em vermelho que não separa o toro.



Desta forma nada nos impede tomar essa curva que separa o nosso disco que queríamos preservar a princípio, então se isso ocorrer, devemos ser capazes de encolher o disco no interior de um de seus triângulos e escapar da curva fechada, como exemplificado na imagem abaixo.



desta forma, temos o seguinte lema técnico que nos fornece com precisão esse encolhimento do disco em um de seus triângulos.

Lema 4.10. *Seja K uma superfície combinatória, D um disco que é subconjunto de K e A um triângulo de D . Existe um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow |K|$ que satisfaz $h(D) = \overline{\text{star}(\hat{A}, K^2)}$ e que é a identidade em todos os simplexos de K que não interceptam D*

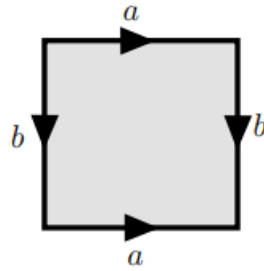
A demonstração para este lema pode ser encontrada em (ARMSTRONG, 1983, p.163). Com isso chegamos ao teorema que nos dá metade da demonstração do teorema de classificação de superfícies fechadas.

Teorema 4.9. *Cada superfície fechada é homeomorfa a alguma superfície padrão (esfera com um número finito de alças ou esfera com um número finito de faixas de Möbius)*

Demonstração. Dada uma superfície fechada S , podemos triangulá-la e fazer cirurgias na superfície combinatória resultante até obtermos uma esfera. A triangulação não é mais necessária e podemos esquece-la. Após as cirurgias, ficamos com uma esfera que tem vários discos disjuntos marcados, por conta do nosso lema anterior. Desta forma para recapturamos S , tudo que precisamos fazer é reverter cada uma das cirurgias, isso envolve a remoção de um par de discos e adicionar um cilindro, ou substituir um único disco por uma faixa de Möbius. \square

4.5 SÍMBOLOS DE SUPERFÍCIE

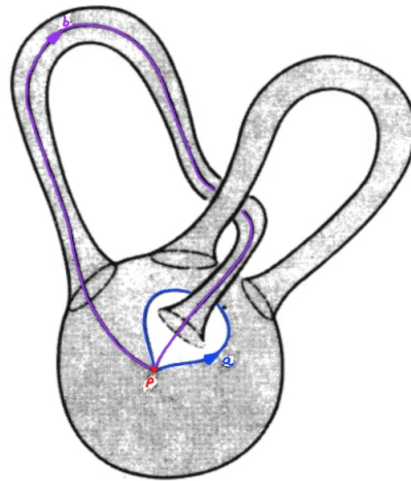
Para completar o teorema de classificação, precisamos mostrar que nenhuma de nossas superfícies padrão são homeomorfas entre si e vamos denotar por $H(p)$ a esfera com p alças adicionadas e $M(q)$ a esfera com q faixas de Möbius costuradas. Para isso, precisamos ser capazes de descrever qualquer uma de nossas superfícies padrão como um polígono no plano com diferentes lados identificados. Isso será chamado de representação poligonal da superfície. Por exemplo, na imagem abaixo, vemos uma representação poligonal de um toro onde temos que as arestas com as mesmas letras devem ser identificadas na direção das setas.



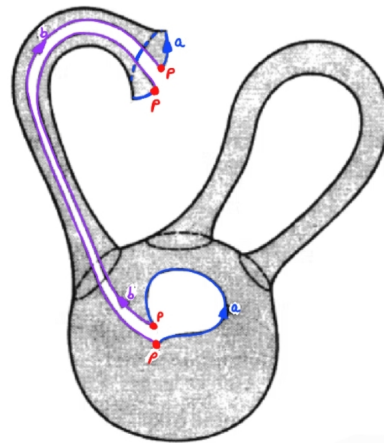
Uma maneira de expressar isso é escrever todas as letras conforme elas ocorrem no polígono ao percorrer suas bordas no sentido horário. Assim, para o toro, obtemos $aba^{-1}b^{-1}$ onde o -1 denota que a seta está apontando no sentido anti-horário naquela aresta. Tal expressão que descreve as identificações será chamada de símbolo de superfície. O que torna representar as superfícies fechadas pelos símbolos de superfície algo interessante é o seguinte lema.

Lema 4.11. *Superfícies com o mesmo símbolo de superfície são homeomorfas.*

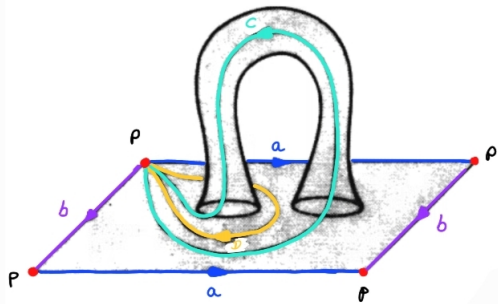
Vamos fazer a construção dos símbolos de superfície para o caso orientável, para isso, tome uma esfera com duas alças anexadas e para cada alça tomaremos duas curvas fechadas simples que não separam nossa superfície e que são baseadas no mesmo ponto p , como na imagem a seguir.



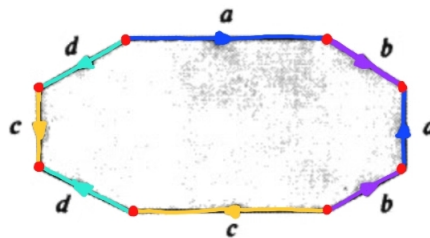
Agora cortamos a superfície ao longo das curvas marcadas a e b , resultando na imagem abaixo.



Em seguida, podemos abrir a superfície para se tornar um retângulo com uma alça anexada em seu interior. E analogamente, fazer mais dois laços c e d baseados em p que não separe a superfície como na imagem abaixo.

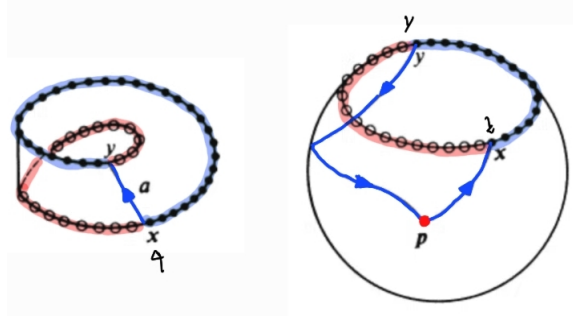


Agora, ao realizar os cortes nas curvas c e d temos um modelo na forma de um polígono de oito lados com seus lados etiquetados apropriadamente

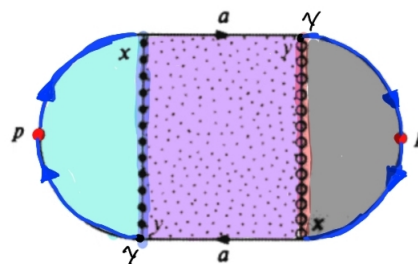
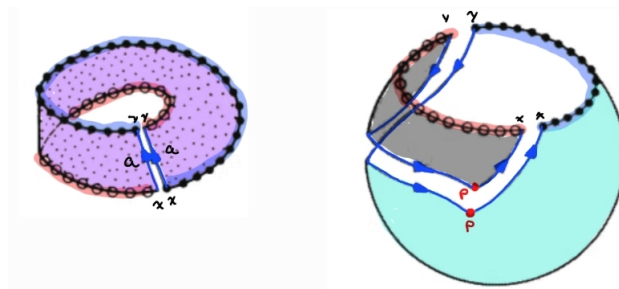


Portanto, o símbolo da superfície da esfera com duas alças anexadas é $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. Aumentando o número de cortes, podemos produzir um modelo para a esfera com p alças anexadas na forma de um polígono de $4p$ arestas que devem ser identificadas aos pares de acordo com o símbolo $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_pb_p a_p^{-1}b_p^{-1}$. Como duas superfícies com o mesmo símbolo de superfície são homeomórficas, temos que $H(p)$ está bem definido.

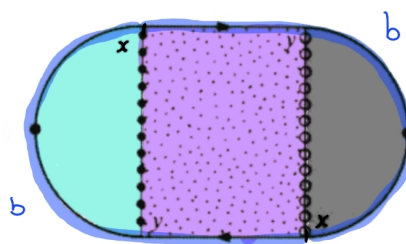
Para fazermos o caso não orientável, tome uma esfera com uma faixa de Mobius anexada no lugar de um disco e tome uma curva fechada simples que não separe a superfície com ponto base p , como na imagem abaixo.



Ao recortarmos nossa curva abrimos a faixa de Möbius e temos a seguinte imagem.



Agora, reetiquetando a imagem acima, de x até x por b temos que:

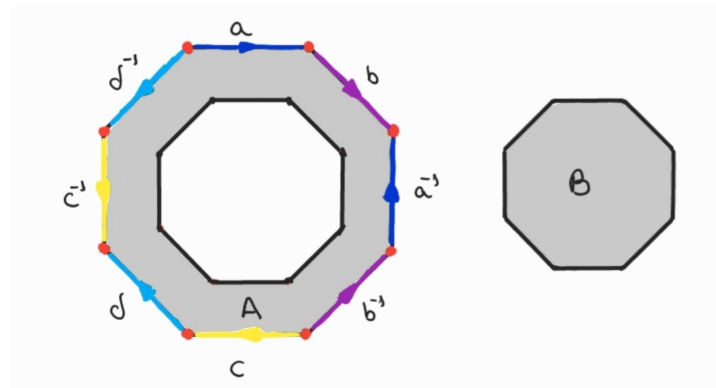


Desta forma o símbolo de superfície obtida da esfera com uma faixa de Möbius é bb , e analogamente ao que foi feito com as alças, para cada faixa de Möbius presente na nossa superfície podemos realizar o mesmo processo, dessa forma se tivermos q faixa de Möbius, teremos um $2q$ -polígono de forma que $b_1b_1b_2b_2\dots b_qb_q$, e desta forma, como duas superfícies com o mesmo símbolo de superfície são homeomorfas temos que $M(q)$ também está bem definido.

4.6 CLASSIFICAÇÃO

Resta apenas verificar que todas as superfícies padrão são topologicamente distintas. Para isso, primeiro, vamos calcular o grupo fundamental das nossas superfícies fechadas utilizando o teorema de Van Kampen 3.13 e os símbolos de superfície.

Vamos fazer o cálculo do grupo fundamental do $H(2)$, o toro, e o cálculo dos $H(p)$ se darão de forma completamente análoga. Primeiro tome o polígono dado pelo símbolo de superfície $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ e o divida nos conjuntos A e B , como na imagem abaixo.



Note que podemos retrair A em seu bordo e ao fazer as identificações, temos um bouquet de 4 círculos e pelo exemplo 3.7 temos então que $\pi_1(A) = \langle a, b, c, d \mid \emptyset \rangle$, já $\pi_1(B)$ é o grupo trivial, pois B é simplesmente conexo e como $A \cap B$ é homeomorfo ao S^1 temos que $\pi_1(A \cap B) = \mathbb{Z}$, portanto segue do teorema de Van Kampen que

$$\pi_1(A \cup B) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 0 \rangle$$

De forma completamente análoga, temos

$$\pi_1(H(p)) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = 1 \rangle$$

outra descrição pode ser dada utilizando $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ o comutador de a e b

$$\pi_1(H(n)) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] = 1 \rangle$$

Já fazendo o mesmo cálculo para $M(p)$ chegamos no seguinte grupo fundamental

$$\pi_1(M(n)) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 = 1 \rangle$$

Teorema 4.10. *As superfícies $S^2, H(1), M(1), H(2), M(2), \dots$ são todas topologicamente distintas.*

Demonstração. Basta mostrarmos que os grupos fundamentais dessas superfícies padrão são todos distintos (não isomorfos).

Um mesmo grupo pode ser descrito por geradores e relações de diversas maneiras. Desta forma, não somos capazes de decidir se nesta lista os grupos são todos distintos (não isomorfos). Para contornarmos esse obstáculo apelamos para a abelianização desses grupos.

Dado um grupo G o subgrupo de G , gerado pelos comutadores de G é definido por,

$$[G, G] = \langle [a, b] = aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G \rangle$$

$[G, G]$ é um subgrupo normal de G . Assim, o quociente $G' = G/[G, G]$ tem uma estrutura natural de grupo. G' é um grupo abeliano e é chamado abelianização de do grupo G .

Dado um homomorfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ definimos $\hat{f} : G' \rightarrow H'$ por $\hat{f}([G, G]a) = [H, H]f(a)$ para todo $[G, G]a \in G'$. Temos que,

- A função \hat{f} é bem definida;
- \hat{f} é um homomorfismo de grupos (abelianos);
- Dados homomorfismos de grupos $f : G \rightarrow H$ e $g : H \rightarrow K$ temos que, $(g \circ f) = \hat{g} \circ \hat{f}$;
- $\hat{\text{Id}}_G = \text{Id}_{G'}$.

Usando as propriedades acima é fácil verificar que, se G e H são grupos isomorfos então, G' e H' também são isomorfos. Logo, para mostrar que os grupos da lista de grupos fundamentais acima é formada por grupos todos distintos (não isomorfos), basta mostrar que os grupos abelianizados desses grupos são todos distintos.

Denotemos por H_n o grupo abelianizado do grupo $\pi_1(H(n))$ ($n \geq 0$). Desta forma $H_0 = (\pi_1(S^2))' = \pi_1(S^2) = 0$ e $H_1 = (\pi_1(\text{Toro}))' = \pi_1(\text{Toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Denotemos também por M_n o grupo abelianizado do grupo $\pi_1(M(n))$ ($n > 0$).

Observamos que,

$H_n = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = \dots = [a_n, b_n] = 1 \rangle =$ grupo abeliano livre gerado por $2n$ elementos $= \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{2n}$

M_n é o grupo abeliano gerado por a_1, a_2, \dots, a_n tais que, $(a_1 a_2 \dots a_n)^2 = 1$.

Notamos que M_n também é gerado por $(a_1 a_2 \dots a_n), a_2, \dots, a_n$ é abeliano e $(a_1 a_2 \dots a_n)^2 =$

1. Logo,

$$M_n = \mathbb{Z}_2 \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{n-1}$$

Analisar os grupos abelianizados nos traz uma grande vantagem pois os grupos abelianos finitamente gerados são completamente classificados, como mostra o seguinte teorema (ver [\(HUNGERFORD, 1974\)](#)).

Teorema 4.11 (Classificação dos grupos abelianos finitamente gerados). *Se G é um grupo abeliano finitamente gerado então existem inteiros não negativos $n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ e primos p_1, p_2, \dots, p_q (não necessariamente distintos) tais que,*

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_q^{\alpha_q}}$$

Os inteiros $n, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ e os primos p_1, \dots, p_q são determinados unicamente (a menos da ordem) por G . n é chamado posto de G . Se $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$ dizemos que G é o grupo abeliano finitamente gerado de posto n . Se $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_q^{\alpha_q}}$ dizemos que G é um grupo (de torção) finito.

Em vista deste teorema podemos concluir que os grupos H_0, H_1, H_2, \dots são todos distintos (H_n é um grupo abeliano livre de posto $2n$) e que os grupos M_1, M_2, \dots também são todos distintos e são distintos dos H'_n s (cada M_n possui um subgrupo de torção e diferem no posto da parte livre).

Desta forma, a lista dos grupos fundamentais das superfícies padrão é formada por grupos distintos e assim as superfícies padrão são topologicamente distintas. Com isso finalizamos a demonstração do teorema de classificação das superfícies fechadas.

□

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, M. A. **Basic Topology**. New York: Springer-Verlag, 1983. Citado 14 vezes nas páginas 7, 16, 19, 27, 29, 34, 37, 43, 45, 48, 59, 61, 64 e 68.

DOYLE, P. H.; MORAN, D. A. **A short proof that compact 2-manifold can be triangulated**. East Lansing, Michigan: [s.n.], 1968. Citado na página 55.

HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. New York: Springer-Verlag, 1974. Citado na página 73.

MUNKRES, J. R. **Topology**. 2. ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2000. Citado na página 7.

RADO, T. **Über den Begriff der Riemannschen Fläche**. *Acts. Litt. Sci. Szeged.* 2, 101–121. [S.l.: s.n.], 1925. Citado na página 55.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to Algebraic Topology**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 7, 32 e 33.

ROTMAN, J. J. **An Introduction to the Theory of Groups**. 4. ed. New York: Springer-Verlag, 1995. Citado na página 7.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

