UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MURILO CESAR LOPES

# PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

SÃO CARLOS
2022

Lopes, Murilo Cesar

Proposta de atividades para o ensino da matemática financeira / Murilo Cesar Lopes -- 2022.
58f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Humberto Luiz Talpo
Banca Examinadora: Humberto Luiz Talpo, Leandro Nery de Oliveira, Luiz Roberto Hartmann Junior
Bibliografia

1. Ensino de matemática. 2. Matemática financeira. I. Lopes, Murilo Cesar. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
**COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET**
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 20/2022/CCM/CCET

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

# FOLHA DE APROVAÇÃO

**MURILO CESAR LOPES**

**PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 30 de setembro de 2022

## ASSINATURAS E CIÊNCIAS

| Cargo/Função | Nome Completo |
|---|---|
| Orientador | Humberto Luiz Talpo |
| Membro da Banca 1 | Leandro Nery de Oliveira |
| Membro da Banca 2 | Luiz Roberto Hartmann Junior |

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Roberto Hartmann Junior**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 11:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Humberto Luiz Talpo**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 28/10/2022, às 09:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0858057** e o código CRC **EE5A2AEE**.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo por todo o auxílio neste trabalho durante os semestres decorridos, e aos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

**RESUMO**

Este trabalho apresenta algumas atividades envolvendo matemática financeira e que foram aplicadas em três turmas do segundo ano do ensino médio em uma escola pública. As atividades exploraram os principais sistemas de amortização utilizados na compra de imóveis, bem como exercícios relacionados a compra de bens, envolvendo juros e taxas equivalentes, com o propósito de entender de que modo as tomadas de decisões podem afetar o poder de compra do consumidor. Também foram explorados alguns conceitos básicos sobre investimentos.
**Palavras-chave:** Sistemas de Amortização; Ensino de matemática; Matemática financeira.

# ABSTRACT

This work presents some activities on financial mathematics. The activities were developed with three groups of students of high school in a public school and it were based on real data, which help students to have a sustainable consumption and a responsible financial life. Also, were presented some basics concepts about financial investments.


**Keywords:** Amortization methods; Mathematics teaching; Financial mathematics.

# LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Nos livros didáticos tradicionais de ensino médio, os assuntos relacionados à matemática financeira mais abordados são sobre porcentagem, descontos e acréscimos, juros simples e juros compostos. Porém, alguns assuntos pertinentes à matemática financeira, segundo Amorim (AMORIM, 2016), são poucos ou não abordados, como por exemplo, sistemas de amortização ou problemas envolvendo equivalência de capitais. Tais assuntos são de grande importância, pois fazem parte do cotidiano de todo cidadão. Ainda mais, qualquer projeto financeiro, sendo ele o financiamento de um imóvel ou até mesmo a abertura de um negócio próprio, deve ser planejado e fundado sob uma sólida análise financeira. Este conhecimento possibilita melhores condições para tomadas de decisões em diversas operações financeiras, como negociações de dívidas, empréstimos e até investimentos.

Em 2022 o Brasil atravessa um grande período de instablidade econômica, sendo agravado pela pandemia da Covid-19. A inflação segue alta e os efeitos causados pela inflação, bem como a consequente perda do poder aquisitivo, podem ser sentidos por todos. Muitas vezes o cidadão busca nas ofertas de crédito uma solução para o pagamento de suas divídas, porém, infelizmente, o que se tem como solução pode tornar-se uma grande “dor de cabeça". Em reportagem publicada pela *Agência Brasil* em 05 de setembro de 2022 [1], o percentual de famílias que relataram ter dívidas no mês de agosto chegou a 79%, o maior patamar da série histórica, iniciada em 2010. A alta é de $6,1$ ponto percentual na comparação com agosto de 2021, o maior aumento anual verificado desde dezembro de 2019. Os dados são da Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic), divulgada pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC). As dívidas incluem cheque pré-datado, cartão de crédito, cheque especial, carnê de loja, crédito consignado, empréstimo pessoal, prestação de carro e de casa.

O ensino dos conceitos da matemática financeira desde cedo torna-se importante, pois deste modo é possível criar e exercitar o hábito de analisar as finanças pessoais antes de criar dívidas que podem se tornar uma “bola de neve". Além disso, o conhecimento por parte do aluno pode favorecer autocontrole emocional, disciplina, organização e planejamento, e proporcionar uma visão analítica de mundo.

Neste trabalho, aplicamos seis atividades para os estudantes da E.E Esterina Placco, situada na cidade de São Carlos, para três turmas do 2° ano do ensino médio. A aplicação das atividades fez parte de um projeto realizado na escola chamado Gestão em Foco - Método de Melhoria de Resultados (MMR).[2] Este projeto é parte do programa Gestão em Foco da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, cujo o objetivo é promover a melhora contínua da qualidade do aprendizado do ensíno público do estado. O programa é divídido em oito partes,

[1] https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2022-09/endividamento-e-inadimplencia-crescem-em-agosto-diz-cnc, acesso em 08 de setembro de 2022.

[2] https://depiraju.educacao.sp.gov.br/mmr/, acesso em 26 de agosto de 2022.

sendo elas:

1) Conhecendo o problema;
2) Quebrando o problema;
3) Identificando as causas do problema;
4) Elaborando planos de melhoria;
5) Implementando e disseminando boas práticas;
6) Acompanhando os planos e resultados;
7) Corrigindo os rumos;
8) Registrando e disseminando boas práticas.

O guia prático do programa pode ser encontrado em (PAULO, 2022).

A escola tinha a necessidade de levar aos alunos os conteúdos relacionados a matemática financeira, pois em provas como SARESP e OBMEP, o desempenho dos alunos, principalmente do 1° ano do ensino médio, mostravam-se abaixo do esperado. Com a aplicação das atividades e, uma proposta de metodologia de ensino diferente, com a utilização de softwares educacionais, os alunos demonstraram maior interesse no projeto.

# 1 CONCEITOS BÁSICOS

A seguir faremos uma breve apresentação dos principais conceitos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. Estes conceitos são vistos durante o ensino médio, por isso não serão aprofundados no texto. Decidimos colocá-los apenas como um guia para uma possível consulta rápida. Como referências indicamos (IEZZI GELSON ; HAZZAN, 1977), (FRANCISCO, 1991), (MENDES, 2016).

## 1.1 REGIME DE CAPITALIZAÇÃO E JUROS

Regime de capitalização é um modelo de aplicação financeira no qual as contribuições e valores pagos pelos contribuintes são redirecionados para diferentes investimentos, funcionando como uma espécie de poupança. Por exemplo, uma aposentadoria ou previdência privada que esteja nesse modelo terá rendimentos que dependerá do valor que o titular conseguiu depositar e o quanto este montante rendeu ao longo do tempo.

Temos que o **capital**, em termos econômicos, é qualquer ativo capaz de gerar um fluxo de rendimentos ao longo do tempo por meio de sua aplicação. Esse conceito inclui não apenas o dinheiro propriamente dito, mas também os investimentos financeiros, os estoques e os bens que podem ser aplicados para gerar riqueza, dentre outros.

Dado um certo capital, se ele for aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos (períodos) de tempo, o valor montante poderá ser calculado com base em duas convenções de cálculo, chamados de *regimes de capitalização:*

i) Juros simples ou *capitalização simples*;

ii) Juros composto ou *capitalização composta*.

Vamos detalhar um pouco mais cada um.

### 1.1.1 Juros Simples

No regime de *juros simples*, os valores gerados em cada período são sempre iguais, e são dados pelo produto da taxa de juros pelo capital. Vejamos no exemplo a seguir:

**Exemplo 1.1.** Um capital de R$ 4.000,00 é aplicado a juros simples durante 3 anos à taxa de 15% ao ano (a.a.). Vamos calcular os juros gerados em cada período e o montante após o período da aplicação:

i) os juros gerados no 1° ano são de $R\$\ 4.000,00 \cdot (0,15) = R\$\ 600,00$

ii) os juros gerados no 2° ano são de $R\$\ 4.000,00 \cdot (0,15) = R\$\ 600,00$

iii) os juros gerados no 3° ano são de $R\$ \, 4.000,00 \cdot (0,15) = R\$ \, 600,00$

Com isso, no cálculo dos juros de cada ano, a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial. Assim o montante após 3 anos será de R$ 5.800,00.

Vemos então que **juros simples** é um modo de capitalização no qual a taxa de juros é calculada sobre o capital principal. Geralmente, os juros simples estão relacionados à modalidade de prestações, como por exemplo, em compras parceladas. Também podem aparecer como método de correção de dívidas ou do investimento. Com isso, entender este processo, é fundamental para a educação financeira e para o processo formativo como cidadão. De maneira mais precisa:

**Definição 1.1.** Seja $C$ um capital aplicado no regime de juros simples a uma taxa $i$ por período e durante a um período $n$ de tempo. Tem-se que os juros no 1° período são iguais a $C \cdot i$, com isso, no regime de capitalização simples, em cada um dos períodos os juros são iguais a $C \cdot i$. Logo, temos que:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

**Exemplo 1.2.** Um capital de R$ 7.000,00 é aplicado a juros simples, à uma taxa de 3,5% ao mês (a.m.), durante 10 meses. Calculando os juros da aplicação, em reais, temos:

$$J = R\$ \, 7.000,00 \cdot (0,035) \cdot 10 = R\$ \, 2.450,00$$

O montante da aplicação será:

$$M = R\$ \, 7.000,00 + R\$ \, 2.450,00 = R\$ \, 9.450,00$$

**Exemplo 1.3.** Um celular é vendido à vista por R$ 1.650,00, ou a prazo com 30% de entrada mais uma parcela de R$ 1.200,00, após 3 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?

Devemos determinar:

i) A entrada: R$ 495,00 (30% de R$ 1.650,00)

ii) O capital financiado: R$ 1.155,00 (R$ 1.650,00 - R$ 495,00)

iii) O montante do capital financiado: R$ 1.200,00

iv) O juro do financiamento: R$ 45,00 (R$ 1.200,00 - R$ 1.155,00)

Logo, sendo $i$ a taxa de juros, podemos escrever:

$$R\$ \, 45,00 = R\$ \, 1.155,00 \cdot i \cdot 3$$

$$R\$ \, 45,00 = R\$ \, 3.465,00 \cdot i \Rightarrow i = \frac{R\$ \, 45,00}{R\$ \, 3.465,00} = 0,0129$$

Portanto, a taxa será de 1,29% a.m.

### 1.1.2 Juros compostos

Diferente dos juros simples, os *juros compostos* são aqueles em que ao final de cada período os juros obtidos são somados ao capital, constituindo um novo capital a ser aplicado, ocorrendo várias vezes até atingir o tempo máximo de aplicação do dinheiro. Atualmente, os juros compostos são base do atual sistema financeiro, participando de todos os tipos de transações financeiras. Nas aplicações financeiras como o Tesouro Direto e o CDB, por exemplo, é o sujeito que empresta o dinheiro. Por sua vez, essas aplicações rendem juros compostos, sendo assim, quanto maior o tempo do empréstimo, maior é o valor dos juros acumulados. Vejamos no exemplo abaixo:

**Exemplo 1.4.** Um capital de R$ 9.000,00 é aplicado a juros compostos durante 6 anos à taxa de 5% a.a. Devemos calcular os juros e o montante para cada período.

a) Os juros do 1° ano serão de $R\$\ 9.000,00 \cdot (0,05) = R\$\ 450,00$, e o montante após 1 ano será de $M_1 = R\$\ 9.450,00$.

b) Os juros do 2° ano serão de $R\$\ 9.450,00 \cdot (0,05) = R\$\ 472,50$, e o montante após 2 anos será de $M_2 = R\$\ 9.922,50$.

c) Os juros do 3° ano serão de $R\$\ 9.922,50 \cdot (0,05) = R\$\ 496,12$, e o montante após 3 anos será de $M_3 = R\$\ 10.418,62$.

d) Os juros do 4° ano serão de $R\$\ 10.418,62 \cdot (0,05) = R\$\ 520,93$, e o montante após 4 anos será de $M_4 = R\$\ 10.939,55$.

e) Os juros do 5° ano serão de $R\$\ 10.939,55 \cdot (0,05) = R\$\ 546,98$, e o montante após 5 anos será de $M_5 = R\$\ 11.486,53$.

f) Os juros do 6° ano serão de $R\$\ 11.486,53 \cdot (0,05) = R\$\ 574,33$, e o montante após 6 anos será de $M_6 = R\$\ 12.060,85$.

De modo mais preciso, temos

**Definição 1.2.** Seja $C$ um capital aplicado a juros compostos, com uma taxa $i$ por período durante $n$ períodos de tempo. Calculando o montante desta aplicação, temos:

- O montante após o primeiro período:
  $M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$

- O montante após o segundo período:
  $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$

– O montante após o terceiro período:
$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$

– O montante após n perídos:
$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C(1+i)^n$

Com isso, temos que:

$$M = C(1+i)^n$$

**Exemplo 1.5.** Um capital de R$ 3.500,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual é o montante se os prazos de aplicação forem *a) 7 meses* e *b) 3 anos*?

a) $C$ = R$ 3.500,00, $i$ = 1,5% a.m. e $n$ = 7 meses, temos:

$$M = R\$\ 3.500,00 \cdot (1 + 0,015)^7$$
$$M = R\$\ 3.500,00 \cdot (1,015)^7$$
$$M = R\$\ 3.884,46$$

b) $C$ = R$ 3.500,00, $i$ = 1,5% a.m e $n$ = 36 meses, temos:

$$M = R\$\ 3.500,00 \cdot (1 + 0,015)^{36}$$
$$M = R\$\ 3.500,00 \cdot (1,015)^{36}$$
$$M = R\$\ 5.981,98$$

**Exemplo 1.6.** Um capital de R$ 9.000,00 foi aplicado a juros compostos à uma taxa de 22% a.a. Calcule o montante se os prazos forem *a) 190 dias* e *b) 75 dias*.

a) Temos $C$ = R$ 9.000,00, $i$ = 22% a.a e $n = \frac{190}{360} = 0,527$
Portanto, temos:

$$M = R\$\ 9.000,00 \cdot (1 + 0,22)^{0,527}$$
$$M = R\$\ 9.000,00 \cdot (1,22)^{0,527}$$
$$M = R\$\ 9.994,34$$

b) Temos $C$ = R$ 9.000,00, $i$ = 22% a.a e $n = \frac{75}{360} = 0,208$
Portanto, temos:

$$M = R\$\ 9.000,00 \cdot (1 + 0,22)^{0,208}$$
$$M = R\$\ 9.000,00 \cdot (1,22)^{0,208}$$
$$M = R\$\ 9.380,05$$

### 1.1.3 Taxas equivalentes

Duas taxas serão ditas equivalentes quando, no que se refere a períodos de tempo diferentes, fazem com que um capital produza o mesmo montante, em um mesmo intervalo de tempo. Em financiamentos de longo prazo, como os de imóveis, geralmente é somente dito a taxa anual , e o consumidor acaba não tendo a noção do juros mensal, semestral ou bimestral. Por exemplo, a taxa de 0,44716% ao mês equivale a uma taxa de de 5,5 % ao ano, pois um capital colocado a 0,44716% ao mês produz o mesmo montante que produz quando colocado a 5,5% ao ano. Vamos entender agora como é obtida esta equivalência entre as taxas.

**Cálculo de taxa equivalente**

Denote por $i$ a taxa de juros relativa a um determinado período de tempo $t$. Sejam $T = nt$ um período de tempo, com $n \in \mathbb{N}$, e $I$ a taxa de juros relativa ao período $T$. Vamos verificar que as taxas $i$ e $I$, quando equivalentes, se relacionam através da seguinte expressão matemática:

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

De fato, seja $C_0$ o valor inicial de um capital. Após um período de tempo $T$, o valor do capital será $C_0(1 + I)^1$. Como o período de tempo $T$ equivale a $n$ períodos de tempo iguais a $t$, o valor do capital será também igual a $C_0(1 + i)^n$. Logo,

$$C_0(1 + I)^1 = C_0(1 + i)^n,$$

donde segue que $1 + I = (1 + i)^n$.

**Exemplo 1.7.** Qual é a taxa semestral equivalente a 10% ao ano ?

Sabemos que um ano têm dois semestres, logo queremos resolver a equação

$$1 + 0,10 = (1 + i)^2,$$

que resulta em $i = 0,0488$. Ou seja, uma taxa de 4,88 % ao semestre.

**Exemplo 1.8.** Qual é a taxa anual equivalente a 9% ao trimestre?

Sabemos que um ano têm quatro trimestres, logo queremos resolver a equação

$$1 + I = (1 + 0,09)^4,$$

que resulta em $I = 0,4115$. Logo, a taxa anual será de 41,15 % ao ano.

## 1.2 PROGRESSÕES E LOGARÍTMOS

Abaixo, colocamos alguns conteúdos relacionados a progressões aritméticas e geométricas. Estes conteúdos são necessários principalmente para os sistemas de amortização, visto que as progressões geométricas são base do sistema francês de amortização (Tabela Price), que será visto nos próximos capítulos deste trabalho, e por consequências, nas atividades.

### 1.2.1 Progressões Aritméticas

Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.9.** A população atual de uma certa cidade é de 55.000 habitantes. Essa população aumenta anualmente em 1.500 habitantes. Qual será a população dessa cidade daqui a 5 anos? Como a população aumenta anualmente em 1.500 habitantes, a população anual, a partir da população atual é 56.500, 58.000, 59.500, 61.000 e 62.500. Assim, em 5 anos, a população será de 62.500 habitantes.

Podemos observar neste problema que o aumento da população em cada ano é sempre o mesmo, no qual esse aumento constante foi de 1.500 habitantes por ano.

**Definição 1.3.** Denomina-se **progressão aritmética** (PA) a sequência numérica dada pela fórmula de recorrência abaixo:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_n &= a_{n-1} + r.
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, onde $a$ e $r$ são números reais.

Em outras palavras, uma PA é uma sequência em que se obtém cada termo, a partir do segundo, adicionando-se uma constante $r$, chamada **razão da PA**, ao termo anterior.

**Exemplo 1.10.** A seguir, apresentamos alguns exemplos de progressões aritméticas.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \{2, 4, 6, 8, ...\} \text{ onde } a_1 = 2 \text{ e } r = 2. \\
f_2 &= \{0, -3, -6, -9, ...\} \text{ onde } a_1 = 0 \text{ e } r = -3. \\
f_3 &= \{1, 1, 1, 1, ...\} \text{ onde } a_1 = 1 \text{ e } r = 0. \\
f_4 &= \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...\} \text{ onde } a_1 = 0 \text{ e } r = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Uma progressão aritmética pode ser classificada de acordo com o valor da razão $r$ de três formas:

a) **Crescente:** Cada termo é maior que o anterior e ocorre quando $r > 0$. As sequências $f_1$ e $f_4$ do exemplo anterior são exemplos de PA crescentes.

b) **Constante:** Cada termo é igual ao anterior e ocorre quando $r = 0$. A sequência $f_3$ acima é um exemplo de PA constante.

c) **Decrescente:** Cada termo é menor que o anterior e ocorre quando $r < 0$. A sequência $f_2$ acima é um exemplo de PA decrescente.

**Fórmula do termo geral**

A partir da definição, podemos escrever os elementos da PA $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= a_1 + r\\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r.
\end{aligned}
$$

Observamos assim que o termo geral $a_n$ da PA é dado, portanto, pela fórmula:

$$a_1 + (n-1)r.$$

Vale observar também que para dois termos quaisquer $a_n$ e $a_k$, podemos escrever $a_n = a_k + (n-k)r$. Outras propriedades podem ser obtidas a partir da definição, como por exemplo, qualquer termo de uma PA, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior, isto é, $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

**Soma dos termos de uma PA**

A soma $S_n$ dos $n$ termos de uma PA é a média aritmética dos extremos, multipllicada pelo número de termos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

### 1.2.2 Progressões Geométricas

Considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.11.** Em 2015 uma empresa produziu 90.000 unidades de um certo produto. Quantas unidades foram produzidas no período de 2015 a 2020, se o aumento de produção anual foi de 20% ao ano anterior?

Como o aumento da produção é de 20% ao ano anterior, temos:

i) A produção em 2015 foi de 90.000 unidades.

ii) A produção em 2016 = (produção em 2015) $\cdot 1,20$ = $90.000 \cdot 1.20 = 108.000$ unidades.

iii) A produção em 2017 = (produção em 2016) $\cdot 1,20$ = $108.000 \cdot 1.20 = 110.160$ unidades.

iv) A produção em 2018 = (produção em 2017) $\cdot 1,20$ = $110.160 \cdot 1.20 = 132.192$ unidades.

v) A produção em 2019 = (produção em 2018) $\cdot 1,20$ = $132.192 \cdot 1.20 = 158.630,40$ unidades.

vi) A produção em 2020 = (produção em 2019) $\cdot 1,20$ = $158.630,40 \cdot 1,20 = 190.356,48$ unidades.

Portanto a produção anual deste período, é dada pela sequência:
$(90.000, 108.000, 110.160, 132.192, 158.630, 40, 190.356, 48)$.

Percebe-se que nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um mesmo número fixo (1,20).

**Definição 1.4.** Denomina-se **progressão geométrica** (PG) a sequência numérica dada pela fórmula de recorrência abaixo:

$$a_1 = a$$
$$a_n = a_{n-1}q.$$

para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, onde $a$ e $q$ são números reais.

Em outras palavras, uma PG é uma sequência em que se obtém cada termo, a partir do segundo, multiplicando-se o anterior por uma constante $q$, chamada **razão da PG**.

**Exemplo 1.12.** A seguir, apresentamos alguns exemplos relacionados a progressões geométricas.

$f_1 = \{1, 3, 9, 27, ...\}$ onde $a_1 = 1$ e $q = 3$.

$f_2 = \{-1, -3, -9, -27, ...\}$ onde $a_1 = -1$ onde $q = 3$.

$f_3 = \{5, 0, 0, 0, ...\}$ onde $a_1 = 5$ onde $q = 0$.

$f_4 = \{20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\}$ onde $a_1 = 20$ onde $q = \frac{1}{2}$.

$f_5 = \{9, 9, 9, 9, ...\}$ onde $a_1 = 9$ onde $q = 1$.

$f_6 = \{3, -3, 3, -3, ...\}$ onde $a_1 = 3$ onde $q = -1$.

$f_7 = \{-27, -9, -3, -1, ...\}$ onde $a_1 = -27$ onde $q = \frac{1}{3}$.

As progressões geométricas podem ser classificadas de acordo com os valores do primeiro termos $a_1$ e da razão $q$:

a) **Crescente:** Cada termo é maior que o anterior, ocorrendo de duas formas:

   i) PG com termos positivos: $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$.

   ii) PG com termos negativos: $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$.

   As sequências $f_1$ e $f_7$ do exemplo anterior descrevem esta situação.

b) **Constante:** Cada termo é igual ao anterior, podendo ocorrer de dois modos:

   i) PG com todos os termos nulos, isto é, $a_1 = 0$ e $q$ qualquer.

   ii) PG com termos iguais e não nulos: $a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1$.

   A sequência $f_5$ acima ilustra o caso ii).

c) **Decrescente:** Cada termo é menor que o anterior podendo ocorrer de dois modos:

   i) PG com termos positivos: $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \Leftrightarrow 0 < q < 1$.

   ii) PG com termos negativos: $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$.

   As sequências $f_4$ e $f_2$ ilustram PG decrescentes.

d) **Alternante:** Cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. e ocorre quando $q < 0$. A sequência $f_6$ ilustra tal situação.

e) **Estacionária:** São progressões em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = ... = 0$. Isto ocorre quando $q = 0$. Por exemplo, a sequência $f_3$.

**Fórmula do termo geral**

A partir da definição, podemos escrever os elementos da PG $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1 \\
&a_2 = a_1 q \\
&a_3 = a_2 q = a_1 q^2 \\
&\vdots \\
&a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1} \qquad .
\end{aligned}
$$

Observamos assim que o termo geral $a_n$ da PG é dado, pela fórmula:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Para dois termos quaisquer $a_n$ e $a_k$, podemos escrever $a_n = a_k q^{n-k}$.

**Soma dos termos de uma P.G finita**

Considere uma PG finita de $n$ termos e razão $q$. Para obtermos a soma $S_n$ dos seus termos, devemos considerar dois casos:

PG com $(q = 1)$ Na PG $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, para $q = 1$ teremos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Nesse caso, a soma de seus $n$ termos pode ser dada pela fórmula:

$$S_n = na_1.$$

PG com $(q \neq 1)$ Utilizando a fórmula do termo geral, podemos escrever:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \tag{1.1}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $q$ obtemos:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \tag{1.2}$$

Subtraindo (1.1) de (1.2), temos

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Esta é a fórmula para a soma dos termos.

### 1.2.3 Logaritmos e suas propriedades

Para algumas atividades serão necessárias algumas propriedades importantes de logaritmos. Apresentamos de maneira breve os principais conceitos.

**Definição 1.5.** Sejam $N$ e $a$ números reais e positivos, com $a \neq 1$, existe sempre um número $c$ tal que $a^c = N$. A esse expoente $c$ damos o nome de **logaritmo de $N$ na base $a$** e definimos $\log_a N = c \Leftrightarrow a^c = N$. Chamamos $a$ de base do logaritmo e $N$ de logaritmando.

**Exemplo 1.13.** a) $\log_2 8 = c \Rightarrow 2^c = 8 \Rightarrow 2^c = 2^3 \Rightarrow c = 3.$

b) $\log_4 2 = c \Rightarrow 4^c = 2 \Rightarrow 2^{2c} = 2 \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}.$

A partir da definição de logaritmo podemos verificar algumas consequências imediatas:

– $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

– $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.

– $\log_a a^m = m \Leftrightarrow a^m = a^m$.

– $\log_a \frac{1}{a} = -1 \Leftrightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Ainda a partir da definição de logaritmo, podemos demonstrar três importantes propriedades que se destinam fundamentalmente a facilitar as operações que envolvem logaritmos. Considerando os números $M$, $N e a$ tais que $M > 0, N > 0, 0 < a \neq 1$, temos:

a) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$.

b) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

c) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$.

**Exemplo 1.14.** Dados $\log_{10} 2 = 0,3010$ e $\log_{10} 3 = 0,4771$ podemos calcular:

a) $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 \cdot 3 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$.

b) $\log_{10} 1,5 = \log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,1761$.

c) $\log_{10} 16 = \log_{10} 2^4 = 4 \log_{10} 2 = 1,2040$.

Em certas situações, pode ser interessante escrever um logaritmo numa nova base. Nesses casos, vale a relação $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$ com $0 < b \neq 1$.

**Exemplo 1.15.** Dados $\log_{10} 2 = 0,3010$ e $\log_5 10 = 1,4306$ podemos obter $\log_5 2$. Como $\log_{10} 2 = \dfrac{\log_5 2}{\log_5 10}$, temos que $\log_5 2 = \log_{10} 2 \cdot \log_5 10 = 0,3010 \cdot 1,4306 = 0,4306$.

# 2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE E SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação (pagamento) corresponde à soma do reembolso do **capital**, ou pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor. Vamos apresentar no texto os dois principais sistemas de amortização, como o Sistema de Amortização Constante (SAC) onde o devedor paga o principal em *n* pagamentos, sendo que as amortizações são sempre constantes (iguais), e o Sistema Price também conhecido como Sistema Francês, onde todas as prestações (pagamentos) são iguais.

## 2.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é uma forma de amortização de um empréstimo por prestações que incluem os juros, do qual será amortizado partes iguais do valor total de um empréstimo. No sistema, o saldo devedor é reembolsado em valores de amortização iguais. No sistema SAC o valor das prestações (P) é decrescente, já que os juros (J) diminuem a cada prestação. O valor da amortização (A) é calculada dividindo-se o valor principal pelo número de períodos de pagamento, ou seja, o número de parcelas (n).

Como exemplo, vamos elaborar uma planilha de amortização, no sistema SAC, para um empréstimo de R\$ 9.000,00, sendo a taxa de financiamento $i$ = 3% a.m, com $n$ = 5 prestações mensais. O valor da amortização mensal será R\$ 1.800,00 e o valor da prestação será o valor da amortização acrescido dos juros. Sejam $D_0$, $D_1$, $D_2$, ..., $D_5$, os saldos devedores nos períodos 0, 1, 2,...,5, respectivamente, e $J_n$ os juros nestes períodos. Então:

$$\begin{aligned}
D_0 &= R\$\ 9.000,00 \rightarrow J_1 = R\$\ 9.000,00 \cdot 0,03 = R\$\ 27,000 \\
D_1 &= (R\$\ 9.000,00 - R\$\ 1.800,00) \rightarrow J_2 = R\$\ 7.200,00 \cdot 0,03 = R\$\ 216,00 \\
D_2 &= (R\$\ 9.000,00 - R\$\ 3.600,00) \rightarrow J_3 = R\$\ 5.400,00 \cdot 0,03 = R\$\ 162,00 \\
D_3 &= (R\$\ 9.000,00 - R\$\ 5.400,00) \rightarrow J_4 = R\$\ 3.600,00 \cdot 0,03 = R\$\ 108,00 \\
D_4 &= (R\$\ 9.000,00 - R\$\ 7.200,00) \rightarrow J_5 = R\$\ 1.800,00 \cdot 0,03 = R\$\ 54,00
\end{aligned}$$

Na tabela abaixo temos:

Tabela 2.1 – Amortização SAC para um empréstimo de R$ 9.000,00.

| n | P | J | A | D |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | R$ 9.000,00 |
| 1 | R$ 2.070,00 | R$ 270,00 | R$ 1.800,00 | R$ 7.200,00 |
| 2 | R$ 2.016,00 | R$ 216,00 | R$ 1.800,00 | R$ 5.400,00 |
| 3 | R$ 1.962,00 | R$ 162,00 | R$ 1.800,00 | R$ 3.600,00 |
| 4 | R$ 1.908,00 | R$ 108,00 | R$ 1.800,00 | R$ 1.800,00 |
| 5 | R$ 1.854,00 | R$ 54,00 | R$ 1.800,00 | R$ 0,00 |
| Total | R$ 9.810,00 | R$ 810,00 | R$ 9.000,00 | - |

Usando a mesma notação de (SANTOS, 2021), sendo $D_0$ a dívida contraída, $n$ o número de pagamentos e $i$ a taxa de juros, temos que:

$$
\begin{aligned}
A_k^{SAC} &= \frac{D_0}{n} \\
D_k^{SAC} &= \frac{n-k}{n} \cdot D_0 \\
J_k^{SAC} &= i \cdot D_{k-1}^{SAC} \\
P_k^{SAC} &= A_k^{SAC} + J_k^{SAC} \\
\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} &= \left| 1 + \frac{i}{2}(n+1) \right| \cdot D_0
\end{aligned}
.
$$

onde:

- $A_k^{SAC}$ é a parcela de amortização no mês k ( a mesma parcela para todos os meses),
- $D_k^{SAC}$ é o valor da dívida após o pagamento do mês k,
- $J_k^{SAC}$ é a parcela de juros no mês k,
- $P_k^{SAC}$ é a prestação no mês k,
- $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC}$ é a soma de todas as n parcelas do financiamento.

## 2.2 SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO (TABELA PRICE)

No Sistema de Amortização Francês, a "Tabela Price" tem como objetivo de manter a prestação mensal (P) constante durante todo o período de financiamento.

Utilizando o mesmo exemplo anterior, vamos elaborar uma planilha de amortização no Sistema Francês de Amortização, ou seja, um empréstimo de R$ 9.000,00, sendo $i$ = 3% a.m, a taxa de financiamento de $n$ = 5 prestações mensais. Vamos utilizar a seguinte fórmula, que pode ser encontrada por exemplo em (SANTOS, 2021), para o cálculo da prestação, onde $P$ é a prestação e $PV$ será o valor presente, lembrando que a prestação será um valor fixo:

$$
\begin{aligned}
P &= PV \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \\
P &= R\$\, 9.000,00 \cdot \frac{(1+0,03)^5 \cdot 0,03}{(1+0,03)^5 - 1} \\
P &= R\$\, 1.965,19
\end{aligned}
$$

Logo, temos que a prestação mensal será de $R\$\, 1.965,19$.

Na tabela Price temos que a cada mês:

i) Os juros são calculados multiplicando o saldo devedor do mês anterior pela taxa de juros.

ii) A amortização é dada pela subtração dos juros do mês do valor da prestação fixa.

iii) O saldo devedor é dado pela subtração da amortização do mês presente do saldo devedor do mês anterior.

Agora, vejamos na tabela o detalhamento do empréstimo feito para o período de 5 meses:

Tabela 2.2 – Amortização Tabela Price para um empréstimo de R$9.000,00.

| n | P | J | A | D |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | R$ 9.000,00 |
| 1 | R$ 1.965,19 | R$ 270,00 | R$ 1.695,19 | R$ 7.304,81 |
| 2 | R$ 1.965,19 | R$ 219,14 | R$ 1.746,05 | R$ 5.558,76 |
| 3 | R$ 1.965,19 | R$ 166,76 | R$ 1.798,43 | R$ 3.760,33 |
| 4 | R$ 1.965,19 | R$ 112,81 | R$ 1.852,38 | R$ 1.907,95 |
| 5 | R$ 1.965,19 | R$ 57,24 | R$ 1.907,95 | R$ 0,00 |
| Total | R$ 9.825,96 | R$ 825,96 | R$ 9000,00 | - |

Note que a Tabela Price segue uma série uniforme de pagamentos, ou seja, pagamentos iguais e igualmente espaçados durante o tempo. Utilizando um valor $A$ de uma série uniforme de

$n$ pagamentos iguais à $P$ e taxa de juros $i$, considerando todas as parcelas da série no momento em que se contrai a dívida, obtemos:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n} \tag{2.1}$$

que é a soma de $n$ termos de uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$, que pode ser calculada por

$$A = \left(\frac{P}{1+i}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}}. \tag{2.2}$$

Com isso, temos:

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Usando ainda a notação de (SANTOS, 2021), no Sistema Francês de Amortização, sendo $D_0$ a dívida contraída, $n$ o número de pagamentos e $i$ a taxa de juros, temos que:

$$\begin{aligned}
P_k^{Price} &= \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0 \\
D_k^{Price} &= \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0 \\
J_k^{Price} &= iD_{k-1}^{Price} \\
P_k^{Price} &= A_k^{Price} + J_k^{Price} \\
A_k^{Price} &= \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \cdot D_0 \\
\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} &= \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0.
\end{aligned}$$

onde:

- $P_k^{Price}$ será a prestação no mês k ( a mesma para todos os meses),
- $D_k^{Price}$ será o valor da dívida após o pagamento do mês k,
- $J_k^{Price}$ será a parcela de juros no mês k,
- $A_k^{Price}$ será a parcela de amortização no mês k,
- $\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price}$ será a soma de todas as n parcelas do financiamento.

Segundo o *Mistieri Cálculos* [1], desenvolvido na França, o Sistema Francês de Amortização tornou-se conhecido como Tabela Price em homenagem ao seu criador, Richard Price, filósofo, teólogo e matemático. Richard Price nasceu na Inglaterra em fevereiro de 1723, filho de um fazendeiro e Ministro Religioso Calvinista. Foi influenciado por John Eames, matemático e amigo próximo de Isaac Newton.

As tabelas de Richard Price, foram publicadas em sua obra Observation on Reversionary Paymentes, em que Richard Price apresenta suas tabelas de juros composto, utilizadas até hoje para financiamentos. As tabelas foram originalmente publicadas com atuarial, sendo que eram previstas para o cálculo de benefícios previdenciários e de seguridade social.

## 2.3 E QUAL SISTEMA COMPENSA?

Sempre que existem opções de escolha, a questão natural que surge é *qual a melhor escolha*? E, como sempre, a resposta é *depende!* Abaixo comparamos, através de um exemplo, e, sob certas condições, os dois sistemas abordados.

Considerando a taxa de inflação constante para todo o período do financiamento, vejamos a seguir o cálculo do financiamento de um imóvel no valor de R$ 165.900,00, para o prazo de 30 anos pelos dois sistemas de amortização já vistos.

### 2.3.1 SAC

i) Imóvel: R$ 165.900,00.

ii) Prazo: 360 meses (30 anos).

iii) Entrada: R$ 30.000,00.

iv) Valor do financiamento: R$ 135.900,00.

v) Juros nominais (a.a): 5,5 %.

Sabendo que os juros nominais ao ano são de $5,5\%$, precisamos saber do cálculo dos juros ao mês. Para isso vamos usar a fórmula de taxas equivalentes, sendo ela descrita como:

$$I = \sqrt[k]{1 + i} - 1 \tag{2.3}$$

onde:

- $i$ é a taxa anual;
- $k$ é o número de períodos de capitalização por ano;

[1] O Anatocismo da Tabela Price. **Mistieri Cálculos** 2014. Disponível em:<http://www.mestiericalculos.com.br/>. Acesso em 04 de novembro de 2021.

– $I$ é a taxa equivalente a $i$.

Por (2.3), temos:

$$I = \sqrt[12]{1 + 0,055} - 1$$
$$I = (1,0044716) - 1$$
$$I = 0,0044716.$$

Agora, vejamos as fórmulas que podemos usar para o cálculo de amortização do sistema SAC em um determinado mês. Para isso, seja:

– $D_0$ a dívida contraída;

– $i$ a taxa de juros;

– $n$ o número de pagamentos.

**Para a amortização (constante em todos os meses), podemos calcular da seguinte forma:**

$$A_k^{SAC} = \frac{D_0}{n}$$
$$A_k^{SAC} = \frac{R\$\ 135.900,00}{360}$$
$$A_k^{SAC} = R\$\ 377,50.$$

**Para o valor da dívida após o pagamento do mês 1, temos:**

$$D_k^{SAC} = \frac{n-k}{n} \cdot D_0$$
$$D_k^{SAC} = \frac{360-1}{360} \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$D_k^{SAC} = R\$\ 135.522,50.$$

**Para o valor dos juros após o mês 1, temos:**

$$j_k^{SAC} = i \cdot D_{k-1}^{SAC}$$
$$j_k^{SAC} = 0,0044715 \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$j_k^{SAC} = R\$\ 607,70.$$

**A prestação no mês k será:**

$$P_k^{SAC} = A_k^{SAC} + J_k^{SAC}$$
$$P_k^{SAC} = R\$\ 377,50 + R\$\ 607,70$$
$$P_k^{SAC} = R\$\ 985,20$$

**A soma de todas as n parcelas será:**

$$\sum_{k=1}^{k=360} P_k^{SAC} = \left|1 + \frac{0,0044716}{2}(360+1)\right| \cdot R\$ \; 135.900,00$$

A tabela abaixo apresenta os valores, para alguns meses, do sistema SAC

Tabela 2.3 – Amortização SAC para um financiamento de 30 anos.

| N0 | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | R$ 0,00 | R$ 0,00 | R$ 0,00 | R$ 135.900,00 |
| 1 | R$ 985,20 | R$ 607,70 | R$ 377,50 | R$ 135.522,50 |
| 13 | R$ 964,95 | R$ 587,45 | R$ 377,50 | R$ 130.992,50 |
| 25 | R$ 944,69 | R$ 567,19 | R$ 377,50 | R$ 126.462,92 |
| 37 | R$ 924,43 | R$ 546,93 | R$ 377,50 | R$ 121.932,50 |
| 49 | R$ 904,18 | R$ 526,68 | R$ 377,50 | R$ 117.402,50 |
| 61 | R$ 883,92 | R$ 506,42 | R$ 377,50 | R$ 112.872,50 |
| 73 | R$ 863,66 | R$ 486,16 | R$ 377,50 | R$ 108.342,50 |
| 85 | R$ 843,41 | R$ 465,91 | R$ 377,50 | R$ 103.812,50 |
| 97 | R$ 823,15 | R$ 445,65 | R$ 377,50 | R$ 99.282,50 |
| 109 | R$ 802,89 | R$ 425,39 | R$ 377,50 | R$ 94.752,50 |
| 133 | R$ 762,38 | R$ 384,88 | R$ 377,50 | R$ 85.692,50 |
| 145 | R$ 742,12 | R$ 364,62 | R$ 377,50 | R$ 81.162,50 |
| 157 | R$ 721,87 | R$ 344,37 | R$ 377,50 | R$ 76.632,50 |
| 169 | R$ 701,61 | R$ 324,11 | R$ 377,50 | R$ 72.102,50 |
| 181 | R$ 681,35 | R$ 303,85 | R$ 377,50 | R$ 67.572,50 |
| 193 | R$ 661,10 | R$ 283,60 | R$ 377,50 | R$ 63.042,50 |
| 205 | R$ 640,84 | R$ 263,34 | R$ 377,50 | R$ 58.512,50 |
| 217 | R$ 620,58 | R$ 243,08 | R$ 377,50 | R$ 53.982,50 |
| 229 | R$ 600,32 | R$ 222,82 | R$ 377,50 | R$ 49.452,50 |
| 241 | R$ 580,07 | R$ 202,57 | R$ 377,50 | R$ 44.922,50 |
| 253 | R$ 559,81 | R$ 182,31 | R$ 377,50 | R$ 40.392,50 |
| 265 | R$ 539,55 | R$ 162,05 | R$ 377,50 | R$ 35.862,50 |
| 277 | R$ 519,30 | R$ 141,80 | R$ 377,50 | R$ 31.332,50 |
| 289 | R$ 499,04 | R$ 121,54 | R$ 377,50 | R$ 26.802,50 |
| 301 | R$ 478,78 | R$ 101,28 | R$ 377,50 | R$ 22.272,50 |
| 313 | R$ 458,53 | R$ 81,03 | R$ 377,50 | R$ 17,742,50 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 325 | R$ 438,27 | R$ 60,77 | R$ 377,50 | R$ 13.212,50 |
| 337 | R$ 418,01 | R$ 40,51 | R$ 377,50 | R$ 8.682,50 |
| 349 | R$ 397,76 | R$ 20,96 | R$ 377,50 | R$ 4.152,50 |
| 360 | R$ 379,19 | R$ 1,69 | R$ 377,50 | R$ 0,00 |
| Total | R$ 245.590,55 | R$ 109.690,55 | R$ 135.900,00 | - |

### 2.3.2 Tabela Price

i) Imóvel: R$ 165.900,00.

ii) Prazo: 360 meses.

iii) Entrada: R$ 30.000,00.

iv) Valor do financiamento: R$ 135.900,00.

v) Juros nominais (a.a): 5,5%.

Novamente por (2.3), temos que a taxa efetiva será de $0,44716\%$ ao mês.

Agora veremos as fórmulas para o cálculo de amortização pelo sistema Tabela Price em um determinado mês.

- $D_0$ a dívida contraída;
- $i$ a taxa de juros;
- $n$ o número de pagamentos.

**Para o valor da dívida no mês 1, temos**

$$
\begin{aligned}
D_k^{Price} &= \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0 \\
D_k^{Price} &= \frac{1-(1+0,0044716)^{-(360-1)}}{1-(1+0,0044716)^{-360}} \cdot R\$\ 135.900,00 \\
D_k^{Price} &= \frac{0,798451}{0,799348} \cdot R\$\ 135.900,00 \\
D_k^{Price} &= R\$\ 135.747,46.
\end{aligned}
$$

**Para o cálculo da parcela de juros no mês 1, temos:**

$$J_k^{Price} = iD_{k-1}^{Price}$$
$$J_k^{Price} = 0,0044716 \cdot D_0^{Price}$$
$$J_k^{Price} = 0,0044716 \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$J_k^{Price} = R\$\ 607,70.$$

**Para o cálculo da parcela de amortização no primeiro mês, temos:**

$$A_k^{Price} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$A_k^{Price} = \frac{0,0044716(1+0,0044716)^{1-1}}{(1+0,0044716)^{360} - 1} \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$A_k^{Price} = \frac{0,0044716}{3,98337}$$
$$A_k^{Price} = R\$\ 152,54.$$

**Para o cálculo da parcela de todos os meses, temos:**

$$P_k^{Price} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0$$
$$P_k^{Price} = \frac{0,0044716}{1-(1+0,0044716)^{-360}} \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$P_k^{Price} = 0,005594 \cdot R\$\ 135.900,00$$
$$P_k^{Price} = R\$\ 760,24.$$

**E finalmente, para a soma de todas as n parcelas, temos:**

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} = \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}} \cdot D_0$$
$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} = \frac{n \cdot 0,0044716}{1-(1+0,0044716)^{-n}} \cdot R\$\ 135.900,00$$

onde $n$ é o número de pagamentos.

Abaixo apresentamos a tabela Price para alguns meses.

Tabela 2.4 – Amortização Tabela Price para um financiamento de 30 anos.

| N0 | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | R$ 0,00 | R$ 0,00 | R$ 0,00 | R$ 135.900,00 |
| 1 | R$ 760,24 | R$ 607,70 | R$ 152,54 | R$ 135.747,46 |
| 13 | R$ 760,24 | R$ 599,31 | R$ 160,93 | R$ 133.862,92 |
| 25 | R$ 760,24 | R$ 590,46 | R$ 169,78 | R$ 131.874,73 |
| 37 | R$ 760,24 | R$ 581,13 | R$ 179,12 | R$ 129.777,19 |
| 49 | R$ 760,24 | R$ 571,27 | R$ 188,97 | R$ 127.564,28 |
| 61 | R$ 760,24 | R$ 560,88 | R$ 199,36 | R$ 125.229,66 |
| 73 | R$ 760,24 | R$ 549,92 | R$ 210,33 | R$ 122.766,64 |
| 85 | R$ 760,24 | R$ 538,35 | R$ 221,89 | R$ 120.168,15 |
| 97 | R$ 760,24 | R$ 526,14 | R$ 234,10 | R$ 117.426,75 |
| 109 | R$ 760,24 | R$ 513,27 | R$ 246,97 | R$ 114.534,57 |
| 133 | R$ 760,24 | R$ 485,35 | R$ 274,89 | R$ 108.264,25 |
| 145 | R$ 760,24 | R$ 470,24 | R$ 290,01 | R$ 104.868,13 |
| 157 | R$ 760,24 | R$ 454,29 | R$ 305,96 | R$ 101.285,22 |
| 169 | R$ 760,24 | R$ 437,46 | R$ 322,78 | R$ 97.505,26 |
| 181 | R$ 760,24 | R$ 419,70 | R$ 340,45 | R$ 93.517,39 |
| 193 | R$ 760,24 | R$ 400,97 | R$ 359,27 | R$ 89.310,20 |
| 205 | R$ 760,24 | R$ 381,22 | R$ 379,03 | R$ 84.871,61 |
| 217 | R$ 760,24 | R$ 360,37 | R$ 399,87 | R$ 80.188,89 |
| 229 | R$ 760,24 | R$ 338,38 | R$ 421,87 | R$ 75.248,63 |
| 241 | R$ 760,24 | R$ 315,17 | R$ 445,07 | R$ 70.036,65 |
| 253 | R$ 760,24 | R$ 290,69 | R$ 469,55 | R$ 64.538,01 |
| 265 | R$ 760,24 | R$ 264,87 | R$ 495,37 | R$ 58.736,95 |
| 277 | R$ 760,24 | R$ 237,62 | R$ 522,62 | R$ 52.616,83 |
| 289 | R$ 760,24 | R$ 208,88 | R$ 551,36 | R$ 46.160,11 |
| 301 | R$ 760,24 | R$ 178,55 | R$ 581,69 | R$ 39.348,26 |
| 313 | R$ 760,24 | R$ 146,56 | R$ 613,68 | R$ 32.161,76 |
| 325 | R$ 760,24 | R$ 112,81 | R$ 647,43 | R$ 24.580,01 |
| 337 | R$ 760,24 | R$ 77,20 | R$ 683,04 | R$ 16.581,25 |
| 349 | R$ 760,24 | R$ 39,63 | R$ 720,61 | R$ 8.142,57 |
| 360 | R$ 760,24 | R$ 3,38 | R$ 756,86 | R$ 0,00 |
| Total | R$ 273.687,07 | R$ 137.787,07 | R$ 135.900,00 | - |

### 2.3.3 Comparativos entre SAC e Tabela Price

Supondo que a taxa de inflação seja constante até o final do financiamento de trinta anos, concluímos que as amortizações feitas pelo sistema SAC são mais viáveis para o consumidor, uma vez que por mais que as parcelas são maiores no início, o valor final, onde são acrescidos os juros, são menores. Entretanto, como as parcelas da Tabela Price são constantes durante todo o tempo, este sistema pode ser vantajoso para o consumidor que não possuí condições de pagar parcelas elevadas durante os primeiros anos do período de financiamento.

Outro fator importante para a escolha de qual sistema utilizar é o fator de correção que será utilizado (TR ou IPCA)[2]. A opção pelo SAC é mais utilizada em financiamentos imobiliários pois, como os juros são calculados sobre o saldo devedor e o prazo é longo, a diferença no valor final, pago pelo consumidor, é significativa. Com base nestes fatos deve-se optar pelo prazo mais curto sempre que possível.

Com o auxílio do Software Libre Office, vamos ilustrar graficamente alguns comparativos do financiamento de 30 anos nos dois sistemas de amortização.

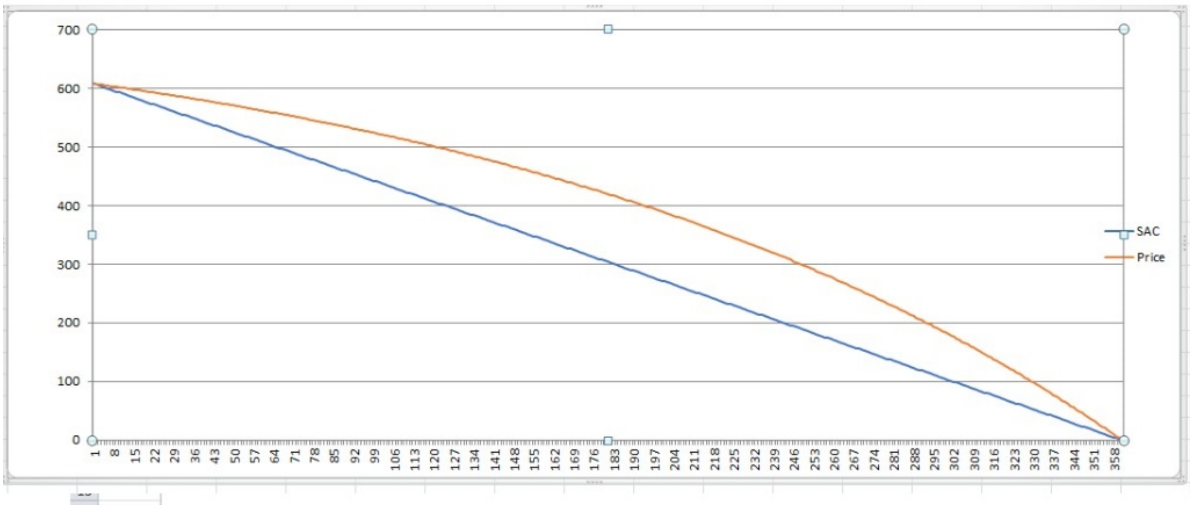



Figura 2.1 – Juros - SAC x Tabela Price

Os valores dos juros da Tabela Price são maiores do que os do SAC em todo o período, com excessão do primeiro mês em que os valores são iguais. Como consequência, as prestações do SAC são menores em relação à Tabela Price.

2 Vide próximo capítulo.

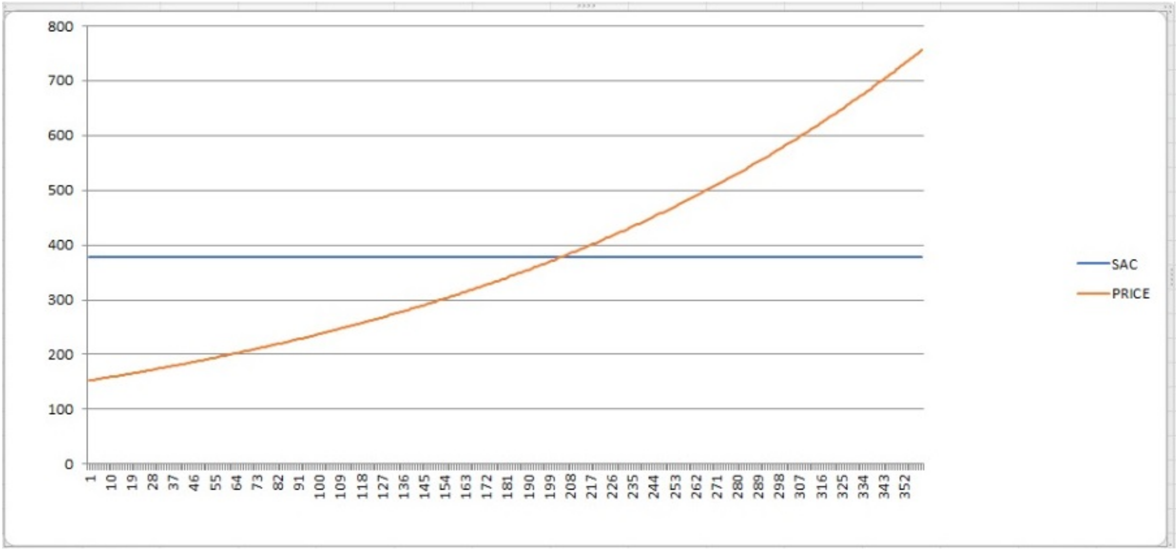



Figura 2.2 – Amortização - SAC x Tabela Price

A amortização no SAC é maior nos primeiros 204 meses, reduzindo o saldo devedor e, consequentemente, o valor dos juros.

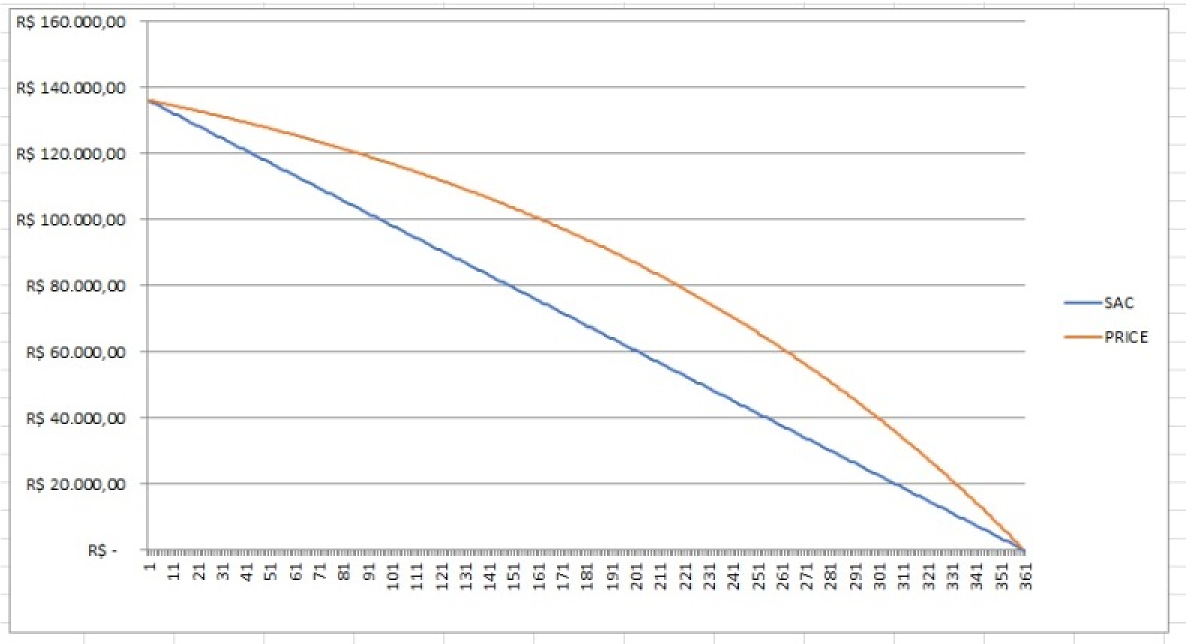



Figura 2.3 – Saldo devedor - SAC x Tabela Price

Após o pagamento da prestação de número 180 no SAC, o saldo devedor é de exatamente 50% da dívida contraída, enquanto que na Tabela Price isso ocorre próximo da 247$^a$ prestação, quando aproximadamente 68, 6% da dívida foi amortizada pelo SAC.

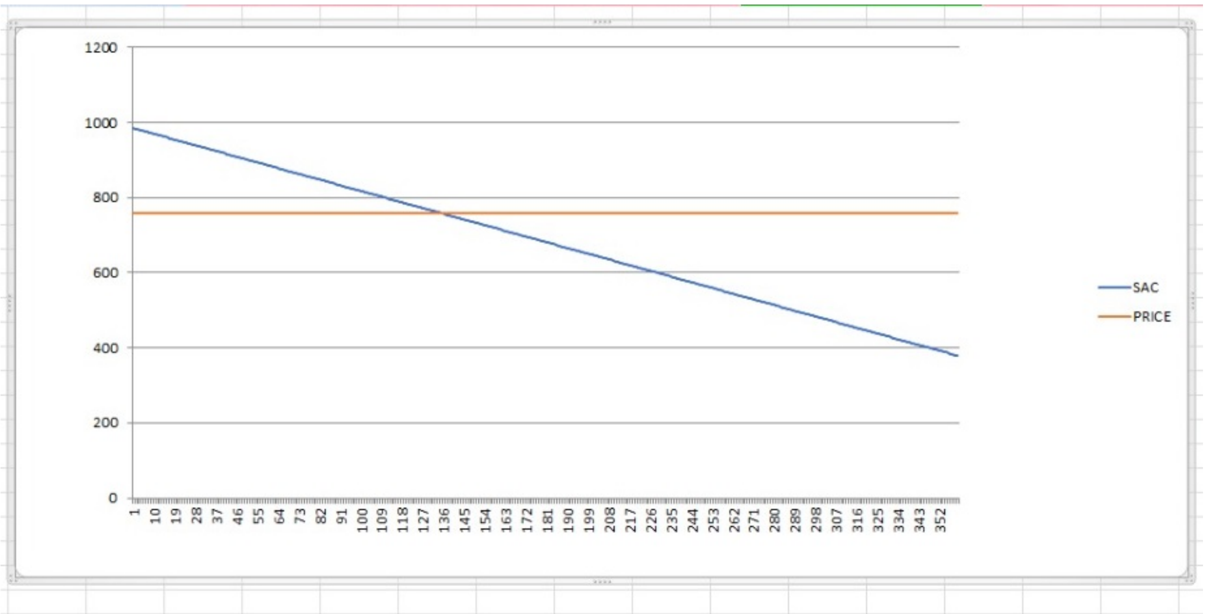



Figura 2.4 – Prestações - SAC x Tabela Price

Vemos que o valor das 134 primeiras prestações são maiores no SAC, enquanto as 226 últmas parcelas são maiores na Tabela Price. No SAC o valor final pago é de aproximadamente $188,71\%$ do valor do financiamento, enquanto que na Tabela Price chega em torno de $201,38\%$.

## 2.4 AMORTIZAÇÃO NO PRAZO OU NO VALOR DAS PARCELAS?

Algumas vezes o consumidor dispõe de um dinheiro extra, como por exemplo o valor da venda de um bem, e pretende amortizar seu financiamento. Para a amortização do financiamento imobiliário existem duas opções: diminuir o valor da parcela e manter o prazo ou reduzir tempo e manter as parcelas do financiamento. Mas qual é a melhor forma de amortizar o financiamento imobiliário? Geralmente, especialistas em crédito imobiliário orientam que a melhor opção é diminuir o prazo do financiamento imobiliário. Porque os juros são cobrados sempre sobre o saldo devedor, logo quanto mais tempo pagando pelo financiamento, maior será o valor total. Mas se o valor mensal das parcelas estiver pesado com as demais contas, a redução no valor da prestação pode ser a melhor solução para aliviar o orçamento mensal. Agora, utilizando o exemplo do financiamento já realizado, vamos simular a amortização nos dois sistema, com um valor de R$ 5.000,00.

### 2.4.1 SAC

. Financiamento restante : R$ 117.402,50;

. Prazo restante: 25 anos e 11 meses (311 meses);

. Taxa de juros: 5,5% a.a (0,45 % a.m.);

. Amortização feita: R$ 5.000,00;

. Parcela atual: R$ 904,18.

**Amortização nas parcelas**

Amortização:

$$\frac{R\$ \ 112.402,50}{311} = R\$ \ 361,42$$

Juros:

$$R\$ \ 112.402,50 \cdot 0,0045 = R\$ \ 505,81$$

Nova parcela:

$$R\$ \ 505,81 + R\$ \ 361,42 = R\$ \ 867,23$$

Com isso, a nova tabela será da seguinte forma:

A tabela abaixo apresenta os valores para os meses seguintes de simulação do sistema SAC.

Tabela 2.5 – Simulação com uma amortização de R$ 5.000,00 sobre um financiamento de R$ 135.900,00. A prestação 49* seria a amortização dos R$ 5.000,00, atualizada.

| N0 | Prestação | Juros | Amortização | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|
| 48 | R$ 905,86 | R$ 528,36 | R$ 377,50 | R$ 117.780,00 |
| 49 | R$ 904,18 | R$ 526,68 | R$ 377,50 | R$ 117.402,50 |
| 49* | R$ 867,23 | R$ 505,81 | R$ 361,42 | R$ 112.402,50 |
| 50 | R$ 865,60 | R$ 504,18 | R$ 361,42 | R$ 112.041,08 |
| 51 | R$ 863,98 | R$ 502,56 | R$ 361,42 | R$ 111.679,66 |
| 52 | R$ 862,35 | R$ 500,93 | R$ 361,42 | R$ 111.318,24 |
| 53 | R$ 860,72 | R$ 499,30 | R$ 361,42 | R$ 110.956,82 |
| 313 | R$ 437,86 | R$ 76,44 | R$ 361,42 | R$ 16.986,74 |
| 325 | R$ 418,34 | R$ 56,92 | R$ 361,42 | R$ 12.649,70 |
| 337 | R$ 398,83 | R$ 37,41 | R$ 361,42 | R$ 8.312,66 |
| 349 | R$ 379,31 | R$ 17,89 | R$ 361,42 | R$ 3.975,62 |
| 360 | R$ 361,42 | R$ 0,00 | R$ 361,42 | R$ 0,00 |

**Amortização no prazo**

Na amortização antiga, temos o valor da parcela em $R\$ \; 377,50$. Com R$ 5.000,00 de amortização da dívida, temos:

$$\frac{R\$ \; 5.000,00}{R\$ \; 377,50} = R\$ \; 13,24$$

Aproximando para 13 meses e subtraíndo do tempo inicial, temos que o novo prazo para pagar é dado por:

$$311 - 13 = 298$$

Logo, o nosso novo prazo será de 298 meses.

### 2.4.2 Tabela Price

Considere os seguintes valores:

. Financiamento restante: R$ 127.564,28.

. Prazo: 25 anos e 11 meses (311 meses).

. Taxa de juros: 5,5% a.a (0,45 % a.m).

. Amortização feita: R$ 5.000,00.

. Parcela atual: R$ 760,24.

**Amortização nas parcelas**

$$PMT = \frac{PV \cdot (1+i)^n \cdot (i)}{(1+i)^n - 1}$$
$$PMT = \frac{R\$ \; 122.564,28 \cdot (1+0,0045)^{311} \cdot (0,0045)}{(1+0,0045)^{311} - 1}$$
$$PMT = R\$ \; 730,44$$

Logo, a nova parcela será de R$ 730,44

**Amortização no prazo**

$$PMT = \frac{PV \cdot (1+i)^n \cdot (i)}{(1+i)^n - 1}$$
$$\frac{PMT}{PV \cdot i} = \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Agora, seja $k = \dfrac{PMT}{PV \cdot (i)}$. Temos:

$$
\begin{aligned}
& k = \frac{PMT}{PV \cdot (i)} \\
& \Rightarrow k \cdot (1+i)^n - k = (1+i)^n \\
& \Rightarrow k = k \cdot (1+i)^n - (1+i)^n
\end{aligned}
$$

Agora, seja $z = (1+i)^n$

$$
\begin{aligned}
& k = k \cdot z - z \\
& k = z \cdot (z - 1) \\
& k = (1+i)^n \cdot (k - 1) \\
& \frac{k}{k-1} = (1+i)^n
\end{aligned}
$$

Aplicando logarítmos, temos:

$$\log_{1+i} \frac{k}{k-1} = n$$

Usando o exemplo, temos:

$$
\begin{aligned}
& \frac{PMT}{PV \cdot i} = k \\
& \frac{R\$ \, 760,24}{R\$ \, 122.564,28 \cdot 0,0045} = 1,3784
\end{aligned}
$$

Então, temos:

$$\frac{1,3784}{0,3784} = 3,64271$$

Calculando o logarítmo, temos:

$$\log_{1,0045} \frac{1,3784}{0,3784} = 287,91$$

Tinhamos 311 parcelas, agora há aproximadamente 288 meses restantes para quitar o financiamento. Ou seja, no final amortizando R$ 5.000,00, elimina-se cerca de 23 parcelas. Gerou-se uma economia de R$ 17.485,52 pois:

$$R\$ \, 760,24 \cdot 23 = R\$ \, 17.485,52$$

# 3 ÍNDICES ECONÔMICOS E APLICAÇÕES

A seguir veremos alguns índices presentes no cotidiano das pessoas que estão relacionados, dentro de suas características, a taxa de inflação. Usualmente, a inflação é medida segundo a composição de uma cesta básica de produtos com quantidades físicas bem determinadas. Em seguida, mês a mês, os preços desses produtos são coletados e, então, com base nos preços médios de cada produto, obtém-se o valor da cesta básica. A taxa de inflação mensal é a variação percentual do valor da cesta básica calculada entre um mês e o mês anterior. Vários fatores podem causar inflação, como pressões de demanda, pressões de custo, etc. Como consequências da inflação, podemos ter a geração de incertezas na economia, como o desestímulo de investimentos, fatores que prejudicam o crescimento econômico. Quando há o aumento de preços, os valores relativos se distorcem, e assim geram várias ineficiências para a economia. A população começa a perder a noção dos preços relativos, e com isso, torna-se dificíl avaliar se um produto está caro ou barato. A inflação impacta as populações menos favorecidas de modo mais grave, pois possuem um poder econômico menor.

## 3.1 IPCA E INPC

Existem muitos índices oficiais relacionados a taxa de inflação, cada qual caracterizado pelos produtos da cesta básica, pela metodologia de cálculo ou pelo período e local de coleta de preços. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, produz dois dos mais importantes índices de preços: o IPCA (índice nacional de preços ao consumidor amplo), considerado o oficial pelo governo federal, e o INPC (índice nacional de preços ao consumidor). O propósito de ambos é o mesmo: medir a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro. O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos. Aqui itens como a gasolina, cinema, teatro têm peso maior que no INPC, enquanto itens como arroz, feijão, leite, frutas, gás de cozinha, passagens de ônibus têm peso menor que no INPC. O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos. Esses grupos são mais sensíveis às variações de preços, pois tendem a gastar a maior parte do seu rendimento em itens básicos, como alimentação, medicamentos, transporte, etc. O cálculo destes índices são feitos pelo IBGE, calculando 430 mil preços em 30 mil locais. A tabela abaixo, disponível em (IBGE, 2021) apresenta a variação destes índices em diferentes capitais.

Tabela 3.1 – Variação do IPCA e INPC em 16 capitais do Brasil e no Distrito Federal.

| Local | IPCA (jun,2022) | INPC (jun,2022) |
|---|---|---|
| Brasil | 0,67% | 0,62% |
| Aracaju(SE) | 0,67% | 0,71% |
| Belem(PA) | 0,26% | 0,25% |
| Belo Horizonte(MG) | 0,83% | 0,76% |
| Brasília(DF) | 0,81% | 0,57% |
| Campo Grande(MS) | 0,64% | 0,53% |
| Curitiba(PR) | 0,65% | 0,50% |
| Fortaleza(CE) | 0,61% | 0,60% |
| Goiânia(GO) | 0,51% | 0,67% |
| Grande Vitória(ES) | 0,61% | 0,42% |
| Porto Alegre(RS) | 0,70% | 0,56% |
| Recife(PE) | 1,13% | 1,02% |
| Rio Branco(AC) | 0,93% | 0,92% |
| Rio de Janeiro(RJ) | 0,39% | 0,12% |
| Salvador(BA) | 1,24% | 1,22% |
| São Luís(MA) | 0,51% | 0,50% |
| São Paulo(SP) | 0,61% | 0,64% |

## 3.2 IGP-M

Outro índice comum no cotidiano dos brasileiros é o IGP-M (Índíce Geral de Preços de Mercado). Ele é calculado todos os meses pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), responsável também pela divulgação dos resultados. De forma simples, ele serve para que os diversos setores da economia possam fazer os reajustes necessários para manter o seu funcionamento. O IGP-M registra a inflação de preços desde matérias-primas agrícolas e industriais até bens e serviços finais e, assim, atua como um indicador da economia. Um detalhe é que o IGP-M sofre forte influência cambial, isto é, é alterado conforme a variação dos preços do dólar, por exemplo. O IGP-M é usado em contratos de aluguel, planos de saúde e reajuste de algumas tarifas públicas.

## 3.3 INCC

O Índice Nacional de Custo da Construção (INCC) é o índice que monitora a evolução dos preços de materiais, serviços e mão de obra destinados a construção de residências no Brasil. Este também é um índice calculado pela FGV e compõe o IGP-M. O INCC é calculado baseado na evolução do custo da construção em sete capitais do Brasil, sendo elas Brasília, Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, São Paulo e Salvador. O índice avalia materiais e equipamentos, serviços e mão-de-obra em um período mensal. A tabela abaixo apresenta a variação deste índice ao longo dos últimos anos.

Tabela 3.2 – Variação dos índices do INCC de janeiro de 2016 até junho de 2022 segundo a FGV.

| Mês | Índice | Var./mês(em %) | Var./ano(em %) | Var./12 meses |
|---|---|---|---|---|
| Janeiro(2016) | 649,592 | 0,32 | 0,32 | 6,82 |
| Junho(2016) | 672,156 | 1,52 | 3,81 | 6,40 |
| Dezembro(2016) | 688,610 | 0,36 | 6,35 | 6,35 |
| Janeiro(2017) | 690,614 | 0,29 | 0,29 | 6,32 |
| Junho(2017) | 706,596 | 1,36 | 2,61 | 5,12 |
| Dezembro(2017) | 716,287 | 0,14 | 4,02 | 4,02 |
| Janeiro(2018) | 718,303 | 0,28 | 0,28 | 4,01 |
| Junho(2018) | 730,710 | 0,76 | 2,01 | 3,41 |
| Dezembro(2018) | 744,699 | 0,13 | 3,97 | 3,97 |
| Janeiro(2019) | 718,303 | 0,28 | 0,28 | 4,01 |
| Junho(2019) | 758,177 | 0,44 | 1,81 | 3,76 |
| Dezembro(2019) | 775,490 | 0,14 | 4,13 | 4,13 |
| Janeiro(2020) | 777,470 | 0,26 | 0,26 | 3,99 |
| Junho(2020) | 788,616 | 0,32 | 1,69 | 4,01 |
| Dezembro(2020) | 842,683 | 0,88 | 8,66 | 8,66 |
| Janeiro(2021) | 850,495 | 0,93 | 0,93 | 9,39 |
| Junho(2021) | 921,762 | 2,30 | 9,38 | 16,68 |
| Dezembro(2021) | 960,894 | 0,30 | 14,03 | 14,03 |
| Janeiro(2022) | 967,003 | 0,64 | 0,64 | 13,70 |
| Fevereiro(2022) | 979,651 | 0,48 | 1,12 | 13,04 |
| Março(2022) | 978,717 | 0,73 | 1,85 | 11,63 |
| Abril(2022) | 987,218 | 0,87 | 2,74 | 11,54 |
| Maio(2022) | 1.001,923 | 1,49 | 4,27 | 11,20 |
| Junho(2022) | 1.030,105 | 2,81 | 7,20 | 11,75 |

## 3.4 TAXAS

Existem duas taxas principais relacionadas ao sistema financeiro a taxa Selic e a taxa referencial. A taxa Selic representa os juros básicos da economia brasileira. Os movimentos da Selic influenciam todas as taxas de juros praticadas no país – sejam as que um banco cobra ao conceder um empréstimo, sejam as que um investidor recebe ao realizar uma aplicação financeira. A Selic tem esse nome por conta do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia, um sistema administrado pelo Banco Central em que são negociados títulos públicos federais. A taxa média registrada nas operações feitas diariamente nesse sistema equivale à taxa Selic. A Taxa Referencial é uma taxa de juros básica, onde é divulgada mensalmente pelo Banco Central e seu cálculo é realizado a partir do rendimento mensal médio dos Certificados de Depósito Bancário (CDB) e Recibos de Depósito Bancário (RDB). Seu uso principal é para a correção das aplicações da caderneta de poupança, Fundo de Garantia por tempo de serviço (FGTS) e prestações dos empréstimos do Sistema Financeiro da Habitação. Em outros tempos, ela teve um papel semelhante ao da Selic.

## 3.5 APLICAÇÕES FINANCEIRAS

A falta de informação é um dos principais fatores que explicam porque muitos brasileiros deixam de investir seu dinheiro em aplicações seguras e mais rentáveis que a famosa caderneta de poupança. Nosso objetivo nesta seção é levar para a sala de aula algumas modalidades de investimentos, abordando rendimentos e riscos. O conhecimento destas aplicações faz parte da atividade sobre investimentos feita com os alunos, com o auxílio de planilhas.

### 3.5.1 Renda fixa e renda variável

**Renda fixa** é todo tipo de investimento que tem regras de rendimento definidas antes. Na hora de aplicar, o investidor fica ciente do prazo, a taxa de rendimento ou o índice que será usado para valorizar o dinheiro investido. Por exemplo, ele sabe que vai receber 2% ao ano ou o quanto variar a inflação. É um negócio com rendimento mais previsível, diferente da renda variável. Geralmente este tipo investimento é indicado para um de perfil de investidor mais conservador.

Os investimentos de **renda variável** são aqueles cujo o retorno é impossível de prever no momento do investimento. O valor varia conforme as condições do mercado, e suas aplicações seguem este mesmo princípio. Fatores como guerras ou pandemias têm forte influência, gerando diversas oscilações no mercado. Porém, como ponto positivo, é de que apesar da imprevisiblidade, esse tipo de aplicação pode gerar uma possibilidade de obter lucros maiores do que a renda fixa. Este tipo de investimento é preferido entre os investidores com um perfil mais arrojado.

### 3.5.2 CDB's

O CDB (Certificado de Depósito Bancário) é um título de característica de renda fixa, formalizado por bancos e instituições financeiras, cujo objetivo é captar dinheiro e utilizar em suas atividades, como por exemplo em empréstimos. Ou seja, quem investe em CDB empresta dinheiro para as instituições financeiras. Em troca, o comprador recebe uma remuneração, advinda dos juros pagos pelos clientes. Existem vários tipos de CDB's, e cada um com sua rentabilidade. Abaixo temos três tipos de CDB's mais conhecidos:

i) *CDB pré-fixado*: Nesta aplicação, o investidor consegue calcular exatamente a remuneração, em reais, que será obtida até o vencimento do papel, pois a taxa de juros é definida e informada desde o momento da aplicação. Um CDB pré-fixado com taxa de 3% a.a, por exemplo, oferecerá exatamente essa remuneração até o final do período.

ii) *CDB pós-fixado*: É o CDB mais investido no mercado. O investidor sabe qual indicador servirá de referência para a rentabilidade do papel também desde o momento da aplicação, porém não é possível ter certeza de qual será o retorno em reais, porque o indicador pode sofrer alterações.

iii) *CDB atrelado à inflação*: A remuneração destes papéis é um misto das duas aplicações acima. Ou seja, eles oferecerem como retorno uma parcela pré-fixada (3% a.a, por exemplo) e outra pós-fixada (variação da inflação, medida pelo IPCA ou pelo IGP-M).

### 3.5.3 Ações

Ações são títulos que representam uma fração do valor de companhias ou sociedades anônimas, ou ainda pode ser uma parte de uma empresa. Geralmente, quando uma instituição deseja expandir seu negócio, é necessário possuir mais dinheiro para este investimento. Com isso, muitas delas se tornam companhias de capital aberto e oferecem suas ações para arrecadar dinheiro. Qualquer pessoa registrada na Bolsa de Valores consegue obter estes títulos, tornando-se acionistas de uma companhia. Os recursos captados pela empresa, poderão ser usados como investimentos em novos projetos, podendo elevar o valor de mercado da companhia, valorizando as ações. Quem investe no mercado de ações está sujeito a perdas, isto é, investir no mercado de ações é considerado um investimento de risco. Este é um exemplo de investimento de renda variável.

### 3.5.4 Letras de Crédito do Agronegócio

Letras de Crédito do Agronegócio (LCA) é um título emitido por bancos ou instituições, utilizado para conseguir recursos para o nicho do agronegócio. Nascidos pela Lei n° 11.076 de 30 de dezembro de 2004, estes títulos tem como interesse investidores pessoas físicas têm seus rendimentos isentos do imposto de renda. As LCA’s emitidas a partir de 23 de maio de 2013 possuem cobertura do Fundo Garantidor de Crédito (FGC), o mesmo que garante a caderneta de poupança, até o limíte estabelecido pelo Fundo.

# 4 ATIVIDADES

Neste capítulo apresentaremos as atividades desenvolvidas, com o auxílio da Calculadora do Cidadão (BRASIL, 2022) e das calculadoras financeiras do site iDinheiro (CASH3, 2022), as quais podem ser utilizadas em telefones celulares e computadores. O objetivo será de colocar em prática todos os conceitos vistos até aqui, por meio de atividades relacionadas ao cotidiano. Em relação as competências e habilidades abaixo, são encontradas na Base Nacional Comum Curricular em (BRASIL, 2018).

## 4.1 ATIVIDADE 1 - TOMADA DE DECISÃO

O processo de tomada de decisão do consumidor envolve diversos aspectos, sendo um dos principais deles os tipos de comportamento de compra. Entender este processo e suas necessidades para um determinado momento, faz do consumidor uma pessoa mais consciente. A tomada de decisão do consumidor na hora da compra varia em função do tipo de compra que ele vai realizar, quanto maior o valor do bem ou serviço, mais precauções deve-se ter.

**Exercício**

Suponha que um consumidor tenha uma quantia de dinheiro aplicada, com rendimento de 5% a.m, e deseja comprar um televisor no valor de R$ 1.200,00. Vamos analisar as seguintes possibilidades de compra e decidir qual a melhor alternativa para o comprador.

a) À vista, com 10% de desconto.

b) Efetuar o pagamento um mês após a compra, com 5% de desconto.

c) Efetuar o pagamento em 3 vezes sem juros. Sendo o primeiro pagamento no ato da compra, o segundo pagamento depois de 30 dias, e o último pagamento depois de 60 dias.

**Roteiro**

Esta atividade conta com dois momentos. No primeiro, o aluno fará os cálculos manualmente, seguindo do princípio de que o aluno possuí os conceitos de juros simples e composto assimilados. Em um segundo passo, o aluno deverá utilizar o aplicativo "Calculadora do cidadão" na opção "Valor futuro de um capital" , utilizando-se dos dados do exercício, para executar os mesmos cálculos já feitos manualmente. Para esta atividade, o professor deverá indicar para os alunos alguns passos:

i) Quanto rende uma aplicação de R$ 1.200,00 durante 3 meses.

ii) Qual o valor de desconto à vista em relação ao preço do televisor.

iii) O aluno deverá calcular a data focal, ou seja, a data para onde os capitais são transferidos.

**Competências e habilidades segundo a BNCC**

i) (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

ii) (EM12MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

**Estratégias de Ensino**

i) Utilização de softwares para a resolução de problemas;

ii) Lembrar-se da data focal, utilizando taxas equivalentes relacionado a rentabilidade de 5% ao mês, e considerar a data focal no mês 0, ou seja, no primeiro mês de pagamento.

**Duração**

Serão necessárias 2 aulas de 45 minutos para os exercícios.

## 4.2 ATIVIDADE 2 - EXERCÍCIOS RELACIONADOS A JUROS

As taxas de juros possuem uma grande importância no nosso cotidiano. Os bancos definem os percentuais das taxas que vão praticar em cada operação, porém, estas taxas têm como base a taxa básica de juros do país, a conhecida Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). Nos próximos exercícios, faremos algumas simulações de juros, frisando que os números em questão estão fora da realidade.

**Exercícios**

i) Um título de R$ 400,00 foi resgatado um mês e 21 dias antes do vencimento, à taxa de 18 % a.a., com o tempo de aplicação de 1 ano. Qual foi o valor descontado?

ii) Sabendo que do salário de Marcos, que é de R$ 3.700,00, são descontados para a contribuição do INSS 13%, qual o valor da contribuição?

iii) Um livro que custava R$ 57,00 depois de um aumento passou a custar R$ 93,00. Qual foi sua variação percentual?

iv) Se um produto que custava R$ 437,42 sofre um abatimento de 12 % e depois um segundo abatimento, tem um abatimento acumulado de 16 %, qual é a taxa percentual do segundo desconto?

**Roteiro**

Nesta atividade, o aluno passará por dois momentos. No primeiro momento o aluno irá fazer os cálculos manualmente, explorando os conceitos de logaritmo. Em seguida, deverá ser utilizada o aplicativo "iDinheiro". Os passos que os alunos seguirão, com o auxílio do professor, serão:

i) Para o primeiro exercício, utilizando-se dos conhecimentos de taxas equivalentes, calcular a o tempo de aplicação nos dois momentos citados,

ii) No segundo exercício, calcular a porcentagem de contribuição;

iii) No terceiro exercício, calcular a taxa de variação percentual;

iv) Para o último exercício, calcular a taxa percentual de desconto sobre o produto;

v) Por fim, utilizar do aplicativo "iDinheiro", na função "Calculadora de Taxas Equivalentes", para as conversões de taxas.

**Competências e Habilidades**

i) (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial;

ii) (EM12MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões;

iii) (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

**Estratégias de Ensino**

i) Utilização de softwares para a resolução de problemas;

ii) Revisão dos conceitos de logaritmos.

**Duração**

Serão necessárias 4 aulas de 45 minutos para os exercícios.

## 4.3 ATIVIDADE 3 - TAXAS EQUIVALENTES E ECONOMIA

Os problemas abaixo levam os conceitos de taxas equivalentes e logarítmos. Com o auxílio das planilhas eletrônicas e do professor, resolvam os seguintes exercícios:

**Exercícios**

a) Qual deve ser a taxa mensal de inflação para que os preços dupliquem em 3 anos?

b) Qual o tempo necessário para que a população de um país dobre, supondo-se uma taxa de crescimento de 3,5% a.a.?

c) O Índice Nacional de Custo da Construção (INCC) em janeiro de 2020 foi de 777,47, passando para 967,00 em janeiro de 2022. Calcule a taxa mensal de inflação nesse período de 24 meses.

d) O capital de R$ 1.000,00 produziu um montante de R$ 1.700,00 em 1 ano e 9 meses. Qual foi a taxa trimestral dos juros?

**Roteiro**

Neste exercício, acesse o site www.idinheiro.com.br, e em seguida, nas calculadoras disponíveis, acesse a opção "Calculadora de Juros Composto” para os exercícios a) e b). Faz-se necessário esta opção, pois no primeiro exercício os preços inflacionados crescem em progressão geométrica. Já no segundo exercício, a população também cresce em progressão geométrica, do mesmo modo que os juros. Nos exercícios c) e d) é imprescindível o uso da "Calculadora de Taxas Equivalentes"para a resolução dos exercícios, pois é utilizado o conceito de taxas equivalentes.

**Competências e Habilidades**

i) (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

ii) (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

**Estratégias de Ensino**

Utilização de softwares para a resolução de problemas.

**Duração**

Serão necessárias 3 aulas de 45 minutos para os exercícios.

## 4.4 ATIVIDADE 4 - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO NA COMPRA DE UM CELULAR

**Exercício**

Com a chegada da tecnologia 5G no Brasil, muitas pessoas precisarão trocar seu aparelho celular. Em uma loja um celular já com a tecnologia 5G é vendido no valor de R$ 1.319,55 à vista. O vendedor oferece para ser pago em 12 parcelas mensais iguais, a primeira vencendo daqui 30 dias e as demais sucessivamente a uma taxa de 5 % a.m.. Vamos analisar os custos, taxas e valores nesta modalidade de financiamento.

**Roteiro**

i) Neste primeiro passo, os alunos devem acessar pelo celular nos aplicativos Play Store (para aqueles que possuem o sistema operacional do celular Android) e App Store (para aqueles que possuem o sistema operacional do celular IOS), e procurar o aplicativo "Calculadora do cidadão". Em seguida, devem fazer o download do aplicativo.

ii) Questionar qual o sistema de amortização será utilizado no exercício.

iii) Ao entrar no aplicativo, os alunos devem acessar a opção "Financiamento".

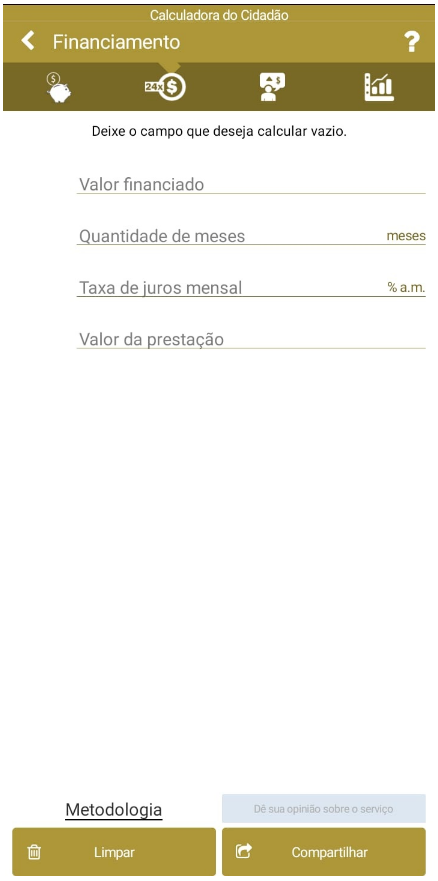



Figura 4.1 – Calculadora do cidadão - opção "Financiamento"

iv) Usando o exercício proposto, digite no aplicativo cada informação.

v) A seguir, os alunos devem fazer o que é pedido pelo professor:

a) Monte a tabela que foi obtida. Esta tabela é chamada de Tabela de Amortização (PRICE).

b) Qual o valor de cada prestação?

c) Podemos perceber que o método para o cálculo de cada prestação é o mesmo para todos os meses. Como matematicamente podemos explicar o processo de amortização?

d) Com uma entrada de R$ 300,00, como seriam as parcelas mensais?

e) No dia a dia, esta ferramenta pode ser utilizada? Já passou por situações em que utilizando essa ferramenta poderia ter tomado decisões melhores?

**Competências e Habilidades**

i) (EF09MA05) Resolver e elaborar situações problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

ii) (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

**Estratégias de Ensino**

Resolução de problemas utilizando-se do uso da calculadora científica e ferramentas de cálculo.

**Duração**

6 aulas de 45 minutos.

## 4.5 ATIVIDADE 5 - SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NA COMPRA DE UMA MOTO

**Exercício**

Uma moto é vendida no valor de R$ 20.000,00 à vista. O vendedor oferece para ser pago em 12 parcelas mensais iguais, a primeira vencendo daqui 30 dias e as demais nos meses seguintes, sucessivamente, a uma taxa de 3 % a.m.. Vamos analisar os custos, taxas e valores nesta modalidade de financiamento.

**Roteiro**

i) Neste primeiro passo, os alunos devem acessar o site (www.idinheiro.com.br)e sigam os seguintes passos: (Acessar calculadoras - Calculadoras Financeiras - Cálculo de Financiamento Price).

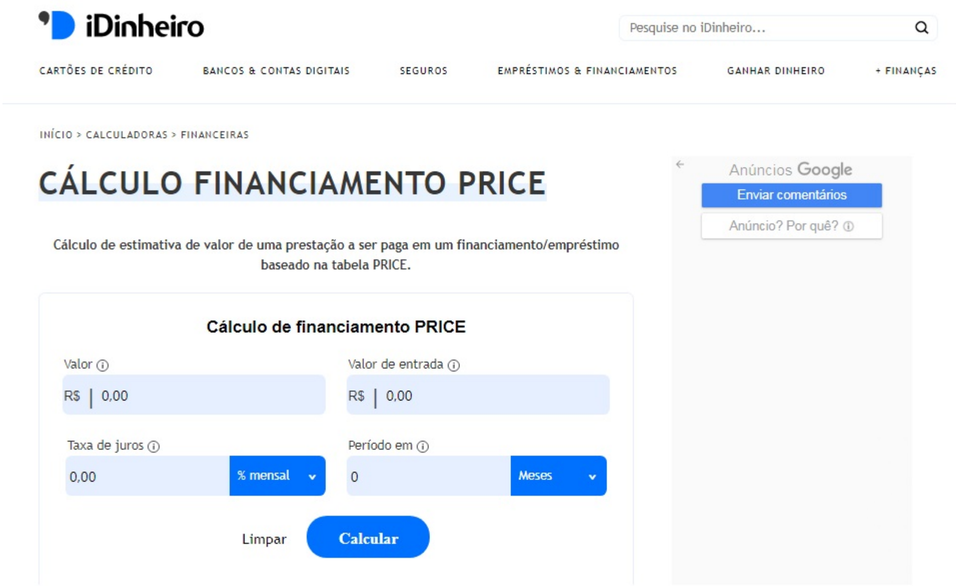



Figura 4.2 – iDinheiro - Sistema PRICE

ii) Usando o exercío proposto, digite no aplicativo cada informação.

iii) A seguir, os alunos devem fazer o que é solicitado pelo professor:

a) Monte a tabela que foi obtida. Esta tabela é chamada Tabela de Amortização (PRICE).

b) Qual o valor de cada prestação ?

c) Podemos perceber que o método para o cálculo de cada prestação é o mesmo para todos os meses. Como matematicamente podemos explicar o processo de amortização?

d) No dia a dia, esta ferramenta pode ser utilizada? Já passou por situações em que com o conhecimento desta ferramenta era possível tomar decisões melhores?

e) Agora, acessem o site (www.idinheiro.com.br) e sigam os seguintes passos: (Acessar calculadoras - Calculadoras Financeiras - Cálculo de Financiamento SAC).

f) Usando o exercío proposto, digite no aplicativo cada informação e clique em calcular.

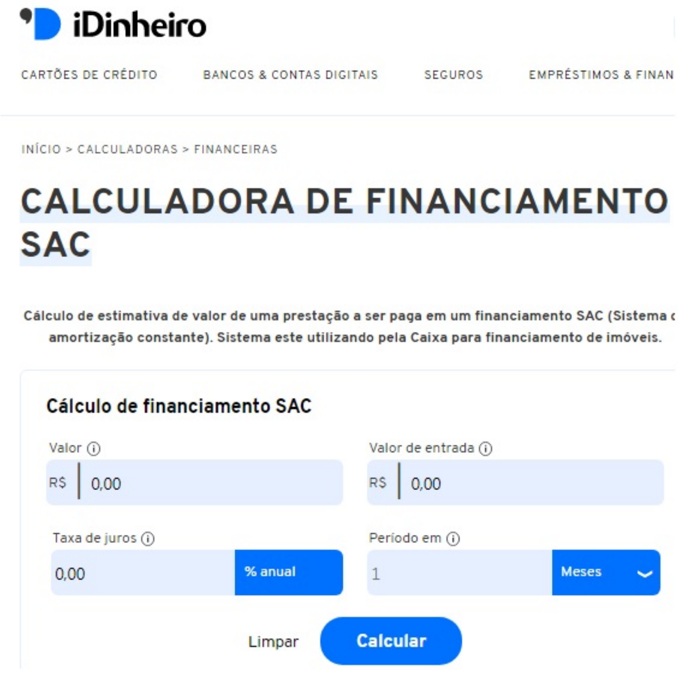



Figura 4.3 – iDinheiro - SAC

Obs: Como a ferramenta considera apenas a taxa anual, temos que encontrar a taxa equivalente de 3% a.m, em taxa anual, que no caso em questão será de 42,57 % a.a.

g) Agora, montem a tabela gerada. Esta tabela é conhecida como Tabela de Amortização (SAC).

h) O que se observa de diferente com o valor das prestações em relação ao sistema PRICE?

i) Como podemos explicar matematicamente, de como os resultados são obtidos?

j) No dia a dia, esta ferramenta pode ser utilizada? Já passou por situações em que com o conhecimento desta ferramenta era possível tomar decisões melhores?

**Competências e Habilidades**

i) (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

ii) (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

**Estratégias de Ensino**

Resolução de problemas, uso de calculadora científica e ferramenta de cálculo, utilização de recursos tecnológicos (www.idinheiro.com.br) nas funções: **Tabela Price** e **Tabela SAC**.

**Duração**

6 aulas de 45 minutos.

## 4.6 ATIVIDADE 6 - PLANILHA - CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

A ideia é que o aluno perceba como ações podem ser um bom tipo de investimento, onde que por muitas vezes, com um risco mínimo é possível obter uma boa garantia de futuro, além de também olhar o modo de como ações podem subir e descer rapidamente, devido a diversas razões, onde temos epidemias como por exemplo a recente COVID - 19, ou guerras como a também atual guerra Russo - Ucraniana.

**Roteiro**

Utilizando o software Libre Office, os alunos irão utilizar uma planilha já programada pelo professor, onde terão cinco tipos de investimentos: *IPCA+*, *LCA*, *Poupança*, *CDB-DI* e *Petrobrás*. Os alunos deverão seguir alguns passos, como:

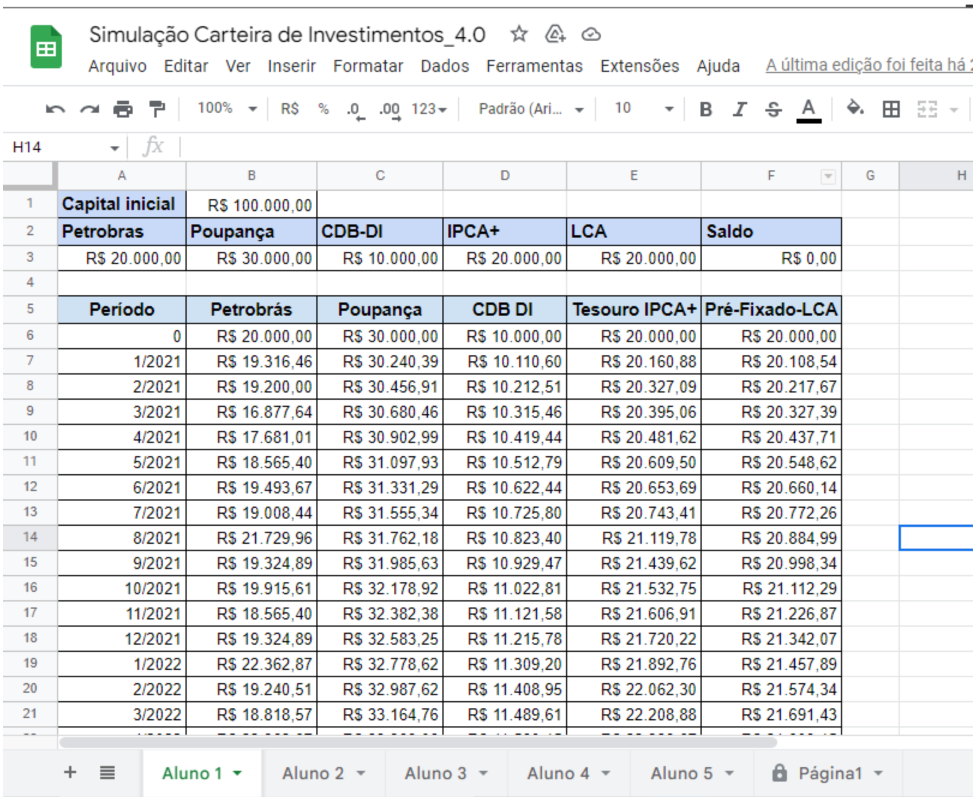
i) O professor deve conferir se o capital inicial é o mesmo para todos os participantes, evitando que haja alguma desigualdade no valor à investir;

i) Os alunos devem ser orientados a distribuir os investimentos na terceira linha da planilha, e em seguida, pressionar a tecla "Enter";

iii) Nas linhas abaixo, o aluno deve verificar como os investimentos se comportaram com o passar do tempo;

iv) Nas linhas 68 e 71, o aluno deve verificar o montante e o saldo final, sendo este a soma do valor investido e o lucro.

Estes investimentos contam com previsões (fora da realidade) de cinco anos, começando de 01/01/2021 até 01/12/2025. O participante terá R$ 100.000,00 e poderá utilizar este capital nas cinco apllicações disponíveis. O objetivo é apresentar através deste simulado de investimentos como se comporta o mercado de investimentos, como um jogo, onde após os investimentos, ganhe aquele que obtiver o maior capital final.

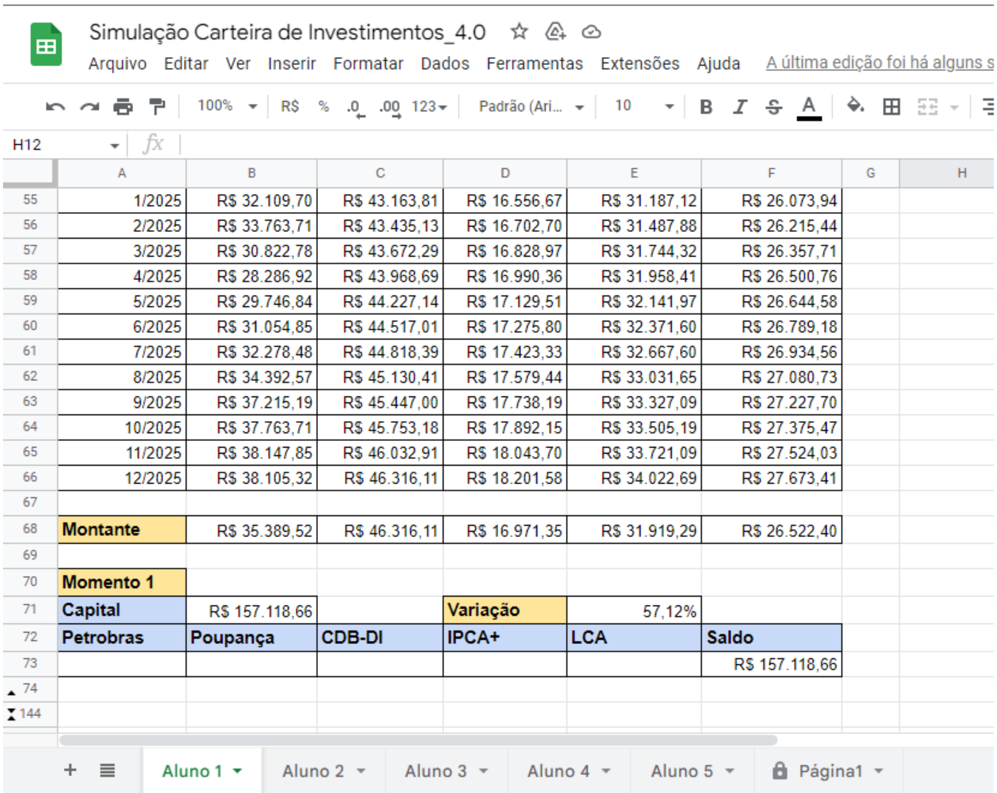


Simulação Carteira de Investimentos_4.0

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Capital inicial | R$ 100.000,00 | | | | |
| 2 | Petrobras | Poupança | CDB-DI | IPCA+ | LCA | Saldo |
| 3 | R$ 20.000,00 | R$ 30.000,00 | R$ 10.000,00 | R$ 20.000,00 | R$ 20.000,00 | R$ 0,00 |
| 4 | | | | | | |
| 5 | Período | Petrobrás | Poupança | CDB DI | Tesouro IPCA+ | Pré-Fixado-LCA |
| 6 | 0 | R$ 20.000,00 | R$ 30.000,00 | R$ 10.000,00 | R$ 20.000,00 | R$ 20.000,00 |
| 7 | 1/2021 | R$ 19.316,46 | R$ 30.240,39 | R$ 10.110,60 | R$ 20.160,88 | R$ 20.108,54 |
| 8 | 2/2021 | R$ 19.200,00 | R$ 30.456,91 | R$ 10.212,51 | R$ 20.327,09 | R$ 20.217,67 |
| 9 | 3/2021 | R$ 16.877,64 | R$ 30.680,46 | R$ 10.315,46 | R$ 20.395,06 | R$ 20.327,39 |
| 10 | 4/2021 | R$ 17.681,01 | R$ 30.902,99 | R$ 10.419,44 | R$ 20.481,62 | R$ 20.437,71 |
| 11 | 5/2021 | R$ 18.565,40 | R$ 31.097,93 | R$ 10.512,79 | R$ 20.609,50 | R$ 20.548,62 |
| 12 | 6/2021 | R$ 19.493,67 | R$ 31.331,29 | R$ 10.622,44 | R$ 20.653,69 | R$ 20.660,14 |
| 13 | 7/2021 | R$ 19.008,44 | R$ 31.555,34 | R$ 10.725,80 | R$ 20.743,41 | R$ 20.772,26 |
| 14 | 8/2021 | R$ 21.729,96 | R$ 31.762,18 | R$ 10.823,40 | R$ 21.119,78 | R$ 20.884,99 |
| 15 | 9/2021 | R$ 19.324,89 | R$ 31.985,63 | R$ 10.929,47 | R$ 21.439,62 | R$ 20.998,34 |
| 16 | 10/2021 | R$ 19.915,61 | R$ 32.178,92 | R$ 11.022,81 | R$ 21.532,75 | R$ 21.112,29 |
| 17 | 11/2021 | R$ 18.565,40 | R$ 32.382,38 | R$ 11.121,58 | R$ 21.606,91 | R$ 21.226,87 |
| 18 | 12/2021 | R$ 19.324,89 | R$ 32.583,25 | R$ 11.215,78 | R$ 21.720,22 | R$ 21.342,07 |
| 19 | 1/2022 | R$ 22.362,87 | R$ 32.778,62 | R$ 11.309,20 | R$ 21.892,76 | R$ 21.457,89 |
| 20 | 2/2022 | R$ 19.240,51 | R$ 32.987,62 | R$ 11.408,95 | R$ 22.062,30 | R$ 21.574,34 |
| 21 | 3/2022 | R$ 18.818,57 | R$ 33.164,76 | R$ 11.489,61 | R$ 22.208,88 | R$ 21.691,43 |

Aluno 1 · Aluno 2 · Aluno 3 · Aluno 4 · Aluno 5 · Página1

Figura 4.4 – Investimentos




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 1/2025 | R$ 32.109,70 | R$ 43.163,81 | R$ 16.556,67 | R$ 31.187,12 | R$ 26.073,94 | | |
| 56 | 2/2025 | R$ 33.763,71 | R$ 43.435,13 | R$ 16.702,70 | R$ 31.487,88 | R$ 26.215,44 | | |
| 57 | 3/2025 | R$ 30.822,78 | R$ 43.672,29 | R$ 16.828,97 | R$ 31.744,32 | R$ 26.357,71 | | |
| 58 | 4/2025 | R$ 28.286,92 | R$ 43.968,69 | R$ 16.990,36 | R$ 31.958,41 | R$ 26.500,76 | | |
| 59 | 5/2025 | R$ 29.746,84 | R$ 44.227,14 | R$ 17.129,51 | R$ 32.141,97 | R$ 26.644,58 | | |
| 60 | 6/2025 | R$ 31.054,85 | R$ 44.517,01 | R$ 17.275,80 | R$ 32.371,60 | R$ 26.789,18 | | |
| 61 | 7/2025 | R$ 32.278,48 | R$ 44.818,39 | R$ 17.423,33 | R$ 32.667,60 | R$ 26.934,56 | | |
| 62 | 8/2025 | R$ 34.392,57 | R$ 45.130,41 | R$ 17.579,44 | R$ 33.031,65 | R$ 27.080,73 | | |
| 63 | 9/2025 | R$ 37.215,19 | R$ 45.447,00 | R$ 17.738,19 | R$ 33.327,09 | R$ 27.227,70 | | |
| 64 | 10/2025 | R$ 37.763,71 | R$ 45.753,18 | R$ 17.892,15 | R$ 33.505,19 | R$ 27.375,47 | | |
| 65 | 11/2025 | R$ 38.147,85 | R$ 46.032,91 | R$ 18.043,70 | R$ 33.721,09 | R$ 27.524,03 | | |
| 66 | 12/2025 | R$ 38.105,32 | R$ 46.316,11 | R$ 18.201,58 | R$ 34.022,69 | R$ 27.673,41 | | |
| 67 | | | | | | | | |
| 68 | Montante | R$ 35.389,52 | R$ 46.316,11 | R$ 16.971,35 | R$ 31.919,29 | R$ 26.522,40 | | |
| 69 | | | | | | | | |
| 70 | Momento 1 | | | | | | | |
| 71 | Capital | R$ 157.118,66 | | Variação | 57,12% | | | |
| 72 | Petrobras | Poupança | CDB-DI | IPCA+ | LCA | Saldo | | |
| 73 | | | | | | R$ 157.118,66 | | |
| 74 | | | | | | | | |
| 144 | | | | | | | | |

Figura 4.5 – Lucro

## Competências e Habilidades

i) (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

ii) (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.

## Estratégias de Ensino

Resolução de problemas utilizando-se do uso da calculadora científica e ferramentas de cálculo.

## Duração

2 aulas de 45 minutos.

## 4.7 COMENTÁRIOS EM RELAÇÃO A APLICAÇÃO DOS EXERCÍCIOS

O objetivo principal deste trabalho foi ampliar o conhecimento dos alunos em relação a suas práticas diárias enquanto cidadãos. Houve um consenso em relação a importância do projeto, onde mostraram-se entusiasmados com a ideia de levar ao cotidiano os conceitos que aprenderiam em sala de aula. O projeto foi dividído em 4 partes:

i) Estudo de juros simples e composto;

ii) Estudo do Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price);

iii) Estudo de taxas equivalentes;

iv) Resolução dos exercícios propostos.

A duração foi de aproximadamente dois meses, sendo realizado entre os meses de abril e junho de 2022, totalizando 23 aulas para cada turma, com duração de 45 minutos cada, sendo trabalhado as seis atividades.

A resolução de exercícios foi dividída em duas partes. Em um primeiro momento, os alunos resolveram os exercícios relacionados a juros simples e compostos, sendo trabalhado assuntos do cotidiano como os aumentos e decréscimos de cada regime. Já na segunda parte, os assuntos trabalhados foram os sistemas de amortização. Com o auxílio dos aplicativos descritos nas atividades, tinha-se como objetivo a análise dos juros e do total do montante pago pela compra dos produtos descritos, e além disso, o aluno tinha que explicar qual o processo realizado. Para os alunos, percebeu-se que houve confusão em relação aos exercícios propostos na parte dos sistemas de amortização. A palavra "matematicamente" foi a grande dificuldade encontrada dentro das atividades. Em relação as atividades dos sistemas de amortização, os alunos notaram que o financiamento de imóveis sem os sistemas de amortização podem gerar um prejuízo muito maior do que se espera. Alguns fizeram simulações do quanto poderiam guardar para financiar um apartamento, e ao notar que um apartamento pode custar até três vezes mais, depois de trinta anos de financiamento, perceberam que pagar dívidas pode ser um grande investimento.

Na segunda parte do projeto, foi utilizado a "Atividade 6", onde foi trabalhado a planilha de carteira de investimentos. No momento inicial, foi explicado como cada aplicação que seria trabalhada funciona na atualidade, e quais são seus pontos positivos e negativos. Como citados neste trabalho, apresentamos alguns tipos de investimentos, onde mais tarde, foram inseridos na planilha criada pelo professor. Os alunos fizeram dos investimentos uma competição, onde disputaram qual investimento era mais rentável. A atividade foi aplicada duas vezes, da primeira, os alunos perceberam que ao investir na "Petrobrás", o lucro era maior do que em qualquer outra aplicação, e assim, o primeiro que alocou o dinheiro nesta aplicação, lucrou mais e foi o "ganhador".

Porém, depois de editar algumas aplicações durante os anos decorridos, os alunos notaram que usar a mesma estratégia não funcionava mais. Na planilha, os investimentos em relação a empresa que mais lucrava, depois de alguns anos, despencavam drásticamente, tendo como consequência a perda de dinheiro por aqueles que investiam. Foi explicado que, por variadas razões, como por exemplo guerras ou pandemias, ações poderiam ser afetadas. Então os alunos perceberam que não é possível obter o controle sobre rendimentos de uma ação. E assim, muitos dos alunos, tenderam a investir em renda fixa, tentando ser o mais conservador possível. Aqueles que investiram em rendas variáveis, perderam todo o dinheiro investido.

O resultado da atividade em si, foi gratificante, pois muitos nunca se quer haviam ciência do que era um investimento, e os poucos que sabiam, viam como algo sem utilidade. Comentários como *"professor, eu não sabia o quanto era facíl investir"* ou *"é possível investir ganhando pouco?"* foram os mais frequentes. Entre todas as atividades, esta mostrou-se a mais desejada pelos alunos, pois a ideia de investimento para os mesmos, advindos da escola pública, era algo apenas para a classe alta. Logo em seguida foi mostrado que com pouco dinheiro era possível fazer investimentos por renda fixa ou variável.

## 4.8 OUTRAS ATIVIDADES

Nesta seção apresentamos uma coleção de exercícios relacionadas com o tema deste trabalho. Sendo uma proposta pedagógica em matemática financeira, aqui tem-se como objetivo aliar conteúdos e exercícios extras, já testados em sala de aula. Como sugestão, as ferramentas computacionais, como os softwares, podem ser aliadas ao entendimento dos exercícios pelos alunos.

### 4.8.1 Juros simples

i) Um investimento no valor nominal de R$ 30.000,00 foi resgatado três meses antes do vencimento, por uma taxa de 9% a.a. Qual o desconto?

ii) Uma ação no valor de R$ 1.650,05 foi resgatada dois meses e 14 dias antes do vencimento, por uma taxa de 18% a.a. Qual o desconto?

iii) Qual a taxa que produz juros equivalentes ao desconto de 2% a.m., pelo prazo de 5 meses?

### 4.8.2 Juros composto

i) Calcular o montante do capital de R$ 15.000,00, a 10% a.a., em 3 anos.

ii) Determinar o montante de R$ 4.000,00, a 2% a.m., no fim de 2 anos.

iii) O capital de R$ 4.500,00 foi emprestado por 1 ano e 8 meses com juros de 24% a.a., capitalizados mensalmente. Qual o montante?

### 4.8.3 Taxas equivalentes

i) Qual a taxa semestral equivalente a 16% a.a?

ii) Qual a taxa trimestral equivalente a 9% a.a?

iii Qual a taxa anual equivalentea 8% ao trimestre?

### 4.8.4 Sistemas Price e SAC

i) Calcule o montante do capital de R$ 1.500,00, por 2 anos, a 12% a.a. capitalizados mensalmente.

ii Qual o montante do capital de R$ 1.300,00, a 9% a.a aplicado durante 10 meses?

iii) Nara solicitou um empréstimo no valor de R$ 16.500,00 efetuado com uma taxa de 2% ao mês, para ser pago em 5 prestações. Houve um problema no sistema da empresa de crédito financeira e ao calcular , Nara percebeu que os valores estavam discrepantes. Na tabela abaixo, encontre e corrija os valores.

Tabela 4.1 – Empréstimo de R$ 16.500,00 realizado.

| n | P | J | A | D |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | R$ 16.500,00 |
| 1 | R$ 4.500,30 | R$ 329,97 | R$ 3.170,33 | R$ 13.329,39 |
| 2 | R$ 4.500,30 | R$ 266,56 | R$ 3.233,73 | R$ 10.095,36 |
| 3 | R$ 4.500,30 | 2R$ 01,89 | R$ 3.298,71 | R$ 6.796,65 |
| 4 | R$ 4.500,30 | R$ 135,92 | R$ 3.364,68 | R$ 3.431,97 |
| 5 | R$ 4.500,30 | R$ 68,63 | R$ 3.431,97 | 0 |
| Total | R$ 22.501,05 | R$ 1.003,07 | R$ 16.500,00 | - |

# REFERÊNCIAS

AMORIM, V. **O ensino de matemática financeira: do livro didático ao mundo real**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado na página 10.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2018. Citado na página 45.

BRASIL. **Calculadora do cidadão.** Disponível em: <http://www.bcb.gov.br>: Acesso em 27 de julho, 2022. Citado na página 45.

CASH3, G. **iDinheiro.** Disponível em: <www.idinheiro.com.br>: Acesso em 27 de julho, 2022. Citado na página 45.

FRANCISCO, W. de. **Matemática financeira**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 1991. Citado na página 12.

IBGE. **Inflação**. Disponível em: <https://ibge.gov.br/explica/inflacao.php>: Acesso em 19 de setembro, 2021. Citado na página 39.

IEZZI GELSON ; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: Seqüências, Matrizes, Determinantes e Sistemas.** São Paulo: Atual, 1977. Citado na página 12.

MENDES, M. B. **Abordagem da matemática financeira no ensino médio sob a perspectiva da matemática financeira.** Rio de Janeiro: UENF, 2016. Citado na página 12.

PAULO, S. de Educação do Estado de São. **Gestão em foco**. Disponível em: <https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2020/02/guia-prtico_etapa_planejamento_2020.pdf>: Acesso em 08 de setembro, 2022. Citado na página 11.

SANTOS, R. O. e K. **Sistema de amortização constante ou Tabela Price: qual escolher no financiamento habitacional?** Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática On Line, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.