UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUCAS HIDEO MAEKAWA

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

SÃO CARLOS
2022

LUCAS HIDEO MAEKAWA

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues

SÃO CARLOS
2022

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 21/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUCAS HIDEO MAEKAWA

INTRODUÇÃO À TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 27 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Rodrigo da Silva Rodrigues
Membro da Banca 1	Fabio Ferrari Ruffino
Membro da Banca 2	Rafael Augusto dos Santos Kapp

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Ferrari Ruffino**, **Professor(a) Adjunto(a)**, em 27/10/2022, às 13:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Augusto dos Santos Kapp**, **Professor(a) Adjunto(a)**, em 28/10/2022, às 08:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo da Silva Rodrigues**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/10/2022, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **0858152** e o código CRC **F688DF16**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.036732/2022-90 SEI nº 0858152

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AGRADECIMENTOS

A meus pais, meu irmão Gabriel e meus tios, por me apoiarem sempre, e a meu primo Matheus, pelas conversas e companhia que sempre me alegravam.

Aos meus orientadores, Francisco Braun e Rodrigo Rodrigues, por sempre me apoiarem e estarem presentes na minha vida acadêmica, além de sempre acreditarem em mim.

A todos os meus amigos, cujos nomes tomariam mais páginas que o próprio TCC, por me mostrarem que a vida pode ser muito mais colorida com a companhia certa.

Ao Pedro, por ter me ajudado com vários teoremas e demonstrações deste trabalho.

RESUMO

A teoria da medida é uma área muito importante com aplicações como na fundamentação da integral de Lebesgue, na axiomatização da probabilidade e na definição de integrais em espaços mais gerais que o euclidiano. Este trabalho apresenta um estudo introdutório sobre σ-álgebras, medidas, medidas exteriores, medida de Lebesgue e integrais.

Palavras-chave: Teoria da medida. Integral. Medida. Medida de Lebesgue.

ABSTRACT

The Lebesgue measure is an important concept with applications in the Lebesgue integral, in the axiomatization of probabilities, and in the definion of integral of spaces more general than the euclidian spaces. This essay presents an introductory study in σ-algebras, measures, exterior measures, the Lebesgue measure, and integrals.

Keywords: Measure theory. Integral. Measure. Lebesgue measure.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conceito de medir um conjunto está presente em várias áreas, como a teoria de conjuntos (com a cardinalidade) e a geometria (com a medida de comprimentos, áreas e volumes). Esse conceito pode ser visto ainda no cálculo, quando utilizamos integrais para tentar encontrar o volume de certos sólidos.

No entanto, a integral de Riemann, que é ensinada nos cursos de cálculo, é limitada no sentido de que existe uma classe muito grande de funções que não é Riemann integrável. Tome, por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se x é irracional} \\ 0, & \text{se x é racional} \end{cases} .$$

Este fato, a princípio, não foi o que impulsionou os matemáticos na busca de um novo conceito de integral, mas sim o desenvolvimento de outra área da matemática: as séries trigonométricas. Com o estudo deste tipo de séries (em séries de Fourier, por exemplo), os matemáticos passaram a necessitar de teorias que garantissem o bom comportamento e convergência de séries de integrais (ISNARD, 2018).

Seguindo essa tendência, muitos teoremas importantes de convergência foram demonstrados, entre eles o teorema de convergência monótona (teorema 3.24), o Lema de Fatou (teorema 3.28) e o teorema de convergência dominada (teorema 3.37).

Uma outra vantagem da integral de Lebesgue, é que em vários espaços de funções, podemos definir métricas utilizando integrais de Lebesgue que fazem com que o espaço seja completo quando isso não seria possível utilizando apenas integrais de Riemann (FOLLAND, 1999).

A teoria da medida foi desenvolvida por Emile Borel, Henri Lebesgue, Johann Radon, Mauriche Fréchet, entre outros e tem várias aplicações como na fundamentação da integral de Lebesgue, na axiomatização da probabilidade e na definição de integral em espaços mais gerais que o euclidiano (CABRAL, 2016).

Neste trabalho, vamos discutir conceitos necessários para se estudar teoria da medida, em particular, vamos discutir σ-álgebras, medidas, medidas exteriores e vamos apresentar algumas propriedades da medida de Lebesgue, bem como a integral e algumas de suas propriedades.

1.1 UMA REVISÃO DE TEORIA DOS CONJUNTOS

Ao longo das próximas seções, utilizaremos algumas propriedades sobre intersecção e união de conjuntos que serão aqui apresentadas. A maioria desses teoremas e propriedades estão demonstrados no livro (LIN; LIN, 1981) intitulado *Set theory with applications*, listado nas referências.

Ao longo do texto, algumas notações e convenções serão seguidas. Se A é um subconjunto de X, denotaremos o complementar de A com relação a X por $\complement_A^X$ ou por $\overline{A}$ quando não houver ambiguidade.

Além disso, exceto quando mencionado o contrário, não iremos impor nenhuma restrição sobre a cardinalidades dos conjuntos mencionados ao longo do texto. Assim, no teorema 1.6, por exemplo, a família de conjuntos $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ pode ser finita, enumerável ou não-enumerável.

Notação 1.1. Usaremos a notação $\mathcal{P}(X)$ para representar o conjunto das partes de X.

Notação 1.2. Usaremos a notação $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ para dizer que o conjunto indexado $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é formado por elementos de X. Em particular, se $\Gamma = \mathbb{N}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência onde todos os elementos são elementos de X.

Teorema 1.3. *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Valem então as seguintes propriedades:*

a) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$;

b) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;

c) $A - B = A\cap\overline{B}$;

d) $\overline{\overline{A}} = A$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada nas páginas 44 e 45 do livro (LIN; LIN, 1981). □

As duas primeiras propriedades do teorema 1.3 são chamadas de leis de De Morgan, mas para provar os teoremas que estão por vir, precisaremos de um teorema um pouco mais geral.

Teorema 1.4. *Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos, valem as seguintes propriedades:*

a) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$;

b) $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Demonstração. Vamos primeiro demonstrar a primeira parte do teorema.

$$x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow x \notin A_n, \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \overline{A_n}, \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Para provar a segunda parte, basta observar que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{A_n}}} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}.$$

□

Teorema 1.5. *Se $A \subset B$, então $\overline{B} \subset \overline{A}$.*

Demonstração. A sentença $A \subset B$, por definição, é equivalente a $x \in A \Rightarrow x \in B$. Basta então tomar a contrapositiva dessa sentença e teremos $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ que, por fim, é equivalente à sentença $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$. □

Teorema 1.6. *Sejam X e Y dois conjuntos e seja $f : X \to Y$ uma função. Se $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\{B_\pi\}_{\pi\in\Pi} \subset \mathcal{P}(Y)$, as seguintes propriedades são válidas:*

a) $f(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$;

b) $f(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma)$;

c) $f^{-1}(\bigcup_{\pi\in\Pi} B_\pi) = \bigcup_{\pi\in\Pi} f^{-1}(B_\pi)$;

d) $f^{-1}(\bigcap_{\pi\in\Pi} B_\pi) = \bigcap_{\pi\in\Pi} f^{-1}(B_\pi)$.

Demonstração. A demonstração desses teoremas podem ser encontradas nas páginas 81 e 82 de livro (LIN; LIN, 1981). □

Teorema 1.7. *Seja $f : X \to Y$ uma função e seja $E \subset Y$. Então $\overline{f^{-1}(E)} = f^{-1}(\overline{E})$.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{f^{-1}(E)} &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(E) \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin E \\
&\Leftrightarrow f(x) \in \overline{E} \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\overline{E}).
\end{aligned}
$$

□

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE MEDIDA

2.1 ÁLGEBRAS E σ-ÁLGEBRAS

A motivação para o estudo de σ-álgebra é o fato de que nem sempre poderemos definir uma medida (definida na próxima seção) para todos os subconjuntos de um conjunto X (veja, por exemplo, o conjunto de Vitali na definição B .1).

Por isso, ao longo dessa seção, definiremos σ-álgebras, suas propriedades e como construir σ-álgebras a partir de conjuntos ou até mesmo de outras σ-álgebras. Utilizamos como textos bases os livros (CABRAL, 2016) e (FOLLAND, 1999).

Definição 2.1 (Álgebra)**.** Dado um conjunto X, dizemos que um conjunto $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é uma álgebra de subconjuntos de X se:

a) $\emptyset \in \Sigma$;

b) $\forall E \in \Sigma$, $\overline{E} = X - E \in \Sigma$;

c) se $\{E_i\}_{i \in I}$ é um conjunto finito de elementos de Σ, então $\displaystyle\bigcup_{i \in I} E_i \in \Sigma$.

Os elementos de Σ são chamados de conjuntos mensuráveis.

Definição 2.2 (σ-álgebra)**.** Dado um conjunto X, dizemos que um conjunto $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X se:

a) Σ é uma álgebra de subconjuntos de X;

b) se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de Σ, então $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Vale notar que se um conjunto Σ satisfizer a propriedade b) de σ-álgebra, ela também satisfaz a propriedade c) de álgebra, basta que $E_n = \emptyset$ a partir de um certo n.

Exemplo 2.3. Dados um conjunto X, existem duas σ-álgebras que são canônicas:

– $\Sigma = \{\emptyset, X\}$, a menor σ-álgebra de X.

– $\Sigma = \mathcal{P}(X)$, a maior σ-álgebra de X.

Exemplo 2.4. É fácil provar que o conjunto $\Sigma = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.5. Vamos provar que $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} : A$ ou $\overline{A}$ é enumerável$\}$ é uma σ-álgebra.

Solução.

a) $\emptyset \in \Sigma$, já que $\emptyset$ é enumerável.

b) Se $E \in \Sigma$, então E é enumerável ou $\overline{E}$ é enumerável. Em qualquer um dos casos, $\overline{E} \in \Sigma$.

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$. Se E_n é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ também será enumerável e, portanto, será elemento de Σ. Se existir algum E_i que não é enumerável, então $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n} \subset \overline{E_i}$ será enumerável e, portanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ também será elemento de Σ.

□

Exemplo 2.6. $\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} : A$ é um intervalo$\}$ não é uma σ-álgebra, já que não satisfaz as propriedades a) e b) da definição de álgebra.

No próximo teorema, veremos mais algumas propriedades de σ-álgebra cujas demonstrações seguem da definição de σ-álgebra e de algumas propriedades de conjuntos.

Teorema 2.7. *Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $E, F \in \Sigma$. Então valem as seguintes propriedades:*

a) $E \cup F \in \Sigma$*;*

b) $E \cap F \in \Sigma$*;*

c) $E - F \in \Sigma$*;*

d) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em Σ, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Demonstração.

a) Segue da definição de álgebra.

b) Pela definição de σ-álgebra, temos $\overline{E}, \overline{F} \in \Sigma$ e, pela propriedade acima e pela lei de De Morgan (teorema 1.3), $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F} \in \Sigma$. Portanto, pela propriedade b) de álgebra, $E \cap F = \overline{\overline{E \cap F}} \in \Sigma$.

c) Como $\overline{F} \in \Sigma$, pela definição de σ-álgebra, então $E - F = E \cap \overline{F} \in \Sigma$, pela lei de De Morgan (teorema 1.3) e pela propriedade acima.

d) Como $E_n \in \Sigma$, e portanto $\overline{E_n} \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n} \in \Sigma$, pela propriedade b) de σ-álgebra. Assim, pelo teorema 1.4 e pela propriedade b) de álgebra, temos $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \overline{\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n}} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}} \in \Sigma$.

□

Lema 2.8. *Seja $\mathcal{S} = \{\Sigma_i\}_{i \in I}$ uma família não-vazia de σ-álgebras de subconjuntos de X. Então*

$$\bigcap_{i \in I} \Sigma_i = \{E \subset \mathcal{P}(X) : E \in \Sigma_i \text{ para todo } i \in I\}$$

é uma σ-álgebra de X.

Demonstração. Seja $\Sigma = \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$. Vamos provar que Σ satisfaz todas as propriedades de uma σ-álgebra.

a) Como $\emptyset \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$, pela definição de σ-álgebra, então $\emptyset \in \Sigma$.

b) Se $E \in \Sigma$, então $E \in \Sigma_i$ e $\overline{E} \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$. Assim, $\overline{E} \in \Sigma$.

c) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de Σ, então $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \bigcap_{i \in I} \Sigma_i = \Sigma$.

Assim, Σ satisfaz todas as propriedades de uma σ-álgebra.

$\square$

Teorema 2.9. *Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Existe a menor σ-álgebra $\Sigma_{\mathcal{A}}$ que contém $\mathcal{A}$, ou seja, se $\tilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$, então $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \tilde{\Sigma}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S} = \{\Sigma \subset \mathcal{P}(X) : \Sigma$ é uma σ-álgebra e $\mathcal{A} \subset \Sigma\}$. Sabemos pelo lema 2.8 que $\Sigma_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\Sigma' \in \mathcal{S}} \Sigma'$ é uma σ-álgebra, então só nos resta provar que ela é a menor delas.

Suponha que $\tilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$. Então $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{S}$ e $\Sigma_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\Sigma' \in \mathcal{S}} \Sigma' \subset \tilde{\Sigma}$ e, portanto, $\Sigma_{\mathcal{A}}$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$. $\square$

Motivados pelo teorema anterior (2.9), introduziremos a definição de σ-álgebra gerada por uma família de elementos de $\mathcal{P}(X)$.

Definição 2.10 (σ-álgebra gerada por um conjunto $\mathcal{A}$)**.** Um conjunto $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(X)$ é dito uma σ-álgebra de subconjuntos de X gerada por $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se:

a) $\Sigma_{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra;

b) $\mathcal{A} \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$;

c) Se $\tilde{\Sigma}$ é uma σ-álgebra que contém $\mathcal{A}$, então $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset \tilde{\Sigma}$.

Notação 2.11. Denotamos por $\sigma(\mathcal{A})$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.

Definição 2.12 (σ-álgebra de Borel)**.** Se X é um espaço munido de uma topologia τ, veja por exemplo (MUNKRES, 1975), dizemos que $\Sigma = \sigma(\tau)$ é uma σ-álgebra de Borel e chamamos os elementos de Σ de conjuntos de Borel ou borelianos.

Observação: Um cuidado a ser tomado no próximo exemplo é a notação $\overline{E}$ que na topologia é utilizada para definir o fecho de um conjunto, mas que no nosso exemplo continua sendo utilizada para representar o conjunto complementar.

Exemplo 2.13. Seja $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a σ-álgebra de Borel gerada pelos conjuntos abertos $\mathbb{R}$. Então $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é gerada por $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) \subset \mathbb{R} : a < b\}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ também é gerada por $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] \subset \mathbb{R} : a < b\}$.

Solução. Vamos provar que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tome $(a,b) \in \mathcal{E}_1$ e tome a sequência $\{[a+1/n, b-1/n]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $[a+1/n, b-1/n] \in \mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ e, pela propriedade (b) de σ-álgebra, $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+1/n, b-1/n] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$. Como $\sigma(\mathcal{E}_1)$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{E}_1$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Seja $A \in \mathcal{E}_2$. Como A é um conjunto fechado, seu complementar $\overline{A}$ é aberto e, portanto, está em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é uma σ-álgebra, $A = \overline{\overline{A}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Como $\sigma(\mathcal{E}_2)$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{E}_2$, $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Para finalizar agora a demonstração, vamos provar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. Para isso, utilizaremos o fato de que todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é a união enumerável de intervalos abertos (a demonstração desse fato se encontra no teorema A .1 no apêndice). Assim, como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é a menor σ-álgebra contendo os conjuntos abertos, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. □

Exemplo 2.14. Sejam $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] \subset \mathbb{R} : a < b\}$ e $\mathcal{E}_4 = \{[a,b) \subset \mathbb{R} : a < b\}$. Então $\sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Solução. Vamos mostrar primeiro que $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Seja $(a,b] \in \mathcal{E}_3$. Como $(a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+1/n, b]$ e $[a+1/n, b] \in \mathcal{E}_2$, então $(a,b] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ e, pela definição de σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}_3$, temos $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Agora, para mostrar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$, tome $(a,b) \in \mathcal{E}_1$. Assim, como $(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a, b-1/n]$, com $(a, b-1/n] \in \mathcal{E}_3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ e, pela definição de σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$. Assim finalizamos a demonstração de que $\sigma(\mathcal{E}_3) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

A demonstração de que $\sigma(\mathcal{E}_4) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é análoga.

□

Vimos que podemos gerar σ-álgebras através de uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. A ideia das seguintes definições e teoremas é mostrar como construir novas σ-álgebras a partir de σ-álgebras dadas.

O exemplo a seguir nos mostra que o produto cartesiano de σ-álgebras não necessariamente produz outra σ-álgebra.

Exemplo 2.15. Tome $\Sigma = \{\emptyset, [0,1], \overline{[0,1]}, \mathbb{R}\}$. É fácil ver que Σ é uma σ-álgebra, mas $\Sigma \times \Sigma$ não é uma σ-álgebra, já que $[0,1] \times [0,1] \in \Sigma \times \Sigma$, mas $\overline{[0,1] \times [0,1]} \notin \Sigma \times \Sigma$.

Motivados por esse exemplo, veremos agora a definição de uma σ-álgebra gerada por um produto cartesiano.

Definição 2.16 (σ-álgebra produto)**.** Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma coleção indexada de conjuntos não vazios, $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, e $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ as aplicações projeção. Se Σ_α é uma σ-álgebra de X_α para cada $\alpha \in A$, a σ-álgebra produto em X é a σ-álgebra gerada pelo conjunto

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \Sigma_\alpha, \alpha \in A\}.$$

Denotamos essa σ-álgebra por $\bigotimes_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha$.

Vamos mostrar que se restringirmos uma σ-álgebra por um conjunto também obteremos uma σ-álgebra.

Teorema 2.17. *Seja Σ_X uma σ-álgebra em X e $A \subset X$. O conjunto $\Sigma = \{E \cap A : E \in \Sigma_X\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de A.*

Demonstração. Vamos provar as propriedades de σ-álgebra para Σ.

a) $\emptyset \in \Sigma_X$, por definição, e $\emptyset = \emptyset \cap A \in \Sigma$.

b) Se $E \in \Sigma$, então existe $F \in \Sigma_X$ tal que $F \cap A = E$. Logo, $\overline{F} \in \Sigma_X$ e $\complement_E^A = A - E = A - (F \cap A) = A - F = \overline{F} \cap A \in \Sigma$.

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Para cada E_n, existe F_n tal que $E_n = F_n \cap A$. Assim, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap A) = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) \cap A$. Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \Sigma_X$, por definição de σ-álgebra, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

□

A próxima definição trata a respeito de como conseguimos uma σ-álgebra sobre um certo conjunto A, a partir da restrição vista no teorema acima.

Definição 2.18 (σ-álgebra por restrição)**.** Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $A \subset X$. Dizemos que $\Sigma \cap A := \{E \cap A : E \in \Sigma\}$ é uma σ-álgebra por restrição.

Exemplo 2.19. Seja $A \subset X$ e Σ_A uma σ-álgebra de A. Então os seguintes conjuntos são σ-álgebras em X :

a) $\Sigma_1 = \{F \subset X : F \cap A \in \Sigma_A\}$;

b) $\Sigma_2 = \Sigma_A \cup \mathcal{P}(\overline{A}) = \{E \cup Z : E \in \Sigma_A$ e $Z \subset \overline{A}\}$.

Solução. Vamos provar primeiro que Σ_1 é uma σ-álgebra:

a) $\emptyset \in \Sigma_1$, pois $\emptyset \cap A = \emptyset \in \Sigma_A$;

b) Se $E \in \Sigma_1$, então existe $E' \in \Sigma_A$ tal que $E \cap A = E'$. Assim, $\overline{E} \cap A = \complement^A_{E'} \in \Sigma_A$, pela definição de σ-álgebra e, portanto, $\overline{E} \in \Sigma_1$;

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_1$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \Sigma_A$ tal que $E_n \cap A = F_n$. Assim, $(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) \cap A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(E_n \cap A) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \Sigma_A$. Portanto, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_1$.

Vamos mostrar agora que Σ_2 é uma σ-álgebra:

a) Como $\emptyset \in \Sigma_A$ e $\emptyset \in \mathcal{P}(\overline{A})$, então $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \Sigma_2$;

b) Se $E = F \cup Z \in \Sigma_2$, então $\overline{E} = \complement^A_F \cup \complement^{\overline{A}}_Z \in \Sigma_2$;

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_2$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $F_n \in \Sigma_A$ e $Z_n \in \mathcal{P}(\overline{A})$ tais que $E_n = F_n \cup Z_n$. Assim, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(F_n \cup Z_n) = (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) \cup (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n)$. Como $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \Sigma_A$, por definição de σ-álgebra, e $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n \subset \mathcal{P}(\overline{A})$, então $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_2$.

$\square$

Exemplo 2.20. Se A, Σ_A, Σ_1 e Σ_2 são como no exemplo 2.19, então $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Solução. Vamos provar primeiro que $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$. Tome $E \in \Sigma_2$. Existem $F \in \Sigma_A$ e $Z \subset \mathcal{P}(\overline{A})$ tais que $E = F \cup Z$. Assim, $E \cap A = (F \cup Z) \cap A = (F \cap A) \cup (Z \cap A) = F \in \Sigma_A$. Portanto, $E \in \Sigma_1$.

Agora, para provar que $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, precisamos apenas notar que, para todo $E \in \Sigma_1$, $E = F \cup Z$ onde $F = E \cap A \in \Sigma_A$ e $Z = E \cap \overline{A} \subset \mathcal{P}(\overline{A})$, ou seja, $E \in \Sigma_2$. $\square$

No próximo teorema, veremos que podemos definir σ-álgebras de um espaço em outro através de funções.

Teorema 2.21. *Seja $f : X \to Y$ uma função dada.*

a) Se Σ_Y é uma σ-álgebra em Y, então $\Sigma_{f,X} = \{f^{-1}(A) \subset X : A \in \Sigma_Y\}$ é uma σ-álgebra em X.

b) Se Σ_X é uma σ-álgebra em X, então $\Sigma_{f,Y} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \Sigma_X\}$ é uma σ-álgebra em Y.

Demonstração. Vamos provar primeiro que $\Sigma_{f,X}$ é uma σ-álgebra:

a) $\emptyset \in \Sigma_{f,X}$, pois $\emptyset \in \Sigma_Y$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

b) Se $E \in \Sigma_{f,X}$, então existe $F \in \Sigma_Y$ tal que $f^{-1}(F) = E$ e, pelo teorema 1.7, $\overline{E} = \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(\overline{F}) \in \Sigma_{f,X}$.

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_{f,X}$. Pela definição de $\Sigma_{f,X}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \Sigma_Y$ tal que $E_n = f^{-1}(F_n)$. Pelo teorema 1.6, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(F_n) = f^{-1}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n)$. Como $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \Sigma_Y$, pela definição de σ-álgebra, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_{f,X}$.

Vamos agora provar que $\Sigma_{f,Y}$ é uma σ-álgebra:

a) $\emptyset \in \Sigma_{f,Y}$, pois $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \Sigma_X$.

b) Se $E \in \Sigma_{f,Y}$, existe $F \in \Sigma_X$ tal que $f^{-1}(E) = F$. Assim, $f^{-1}(\overline{E}) = \overline{f^{-1}(E)} = \overline{F} \in \Sigma_X$, pela definição de σ-álgebra, e, portanto $\overline{E} \in \Sigma_{f,Y}$.

c) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_{f,Y}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \Sigma_X$ tal que $f^{-1}(E_n) = F_n$. Assim, $f^{-1}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(E_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \Sigma_X$ e, portanto, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_{f,Y}$.

□

2.2 MEDIDAS

A definição de medida como uma função, como veremos nessa seção, é uma tentativa de generalizar a medida de áreas e volumes. Uma medida em um conjunto X será uma função $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ que terá algumas propriedades de áreas, volumes e cardinalidades. Da mesma forma que a soma das cardinalidades de conjuntos disjuntos é a cardinalidade da união, por exemplo, exigiremos que a soma da medida de dois conjuntos disjuntos seja a medida da união.

No entanto, assim como no cálculo não conseguimos calcular o valor de certos volumes utilizando integrais, existirão certos conjuntos que não serão mensuráveis, por isso a necessidade de definirmos σ-álgebra. Um exemplo de tal conjunto é o conjunto de Vitali (B .1), que mostra se tentarmos definir uma medida com as propriedades de comprimento presentes na geometria euclidiana chegaremos em uma contradição.

Como ao longo dessa seção serão discutidas funções que assumem valores em $[0, \infty]$, vamos definir algumas operação que serão necessárias ao longo do texto:

a) Se $a, b \in \mathbb{R}$, usaremos a definição usual para $a + b$ e $a \cdot b$;

b) $a + \infty = \infty + \infty = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$, mas $a - \infty$ não é definido;

c) $a \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$, para todo $a > 0$;

d) $0 \cdot \infty = 0$ (em contrapartida com o que é ensinado em cálculo).

Além dessas operações, convencionamos também que $a < \infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\inf \emptyset = \infty$. A razão dessa última convenção vem do fato de que se $A, B \subset \mathbb{R}$ são conjuntos não-vazios tais que $A \subset B$, então $\inf A \geq \inf B$. Assim, para estender essa propriedade, teríamos que $\inf \emptyset \geq \inf A$ para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Convencionadas essas operações, podemos definir somatórios para um conjunto arbitrário de elementos:

Definição 2.22 (Somatórios não-enumeráveis)**.** Seja $\{x_i\}_{i \in I}$ uma coleção indexada de elementos de $[0, \infty]$. Se $I \neq \emptyset$, definimos

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i : J \subset I \text{ é finito} \right\}.$$

Definimos $\sum_{i \in I} x_i = 0$, caso $I = \emptyset$.

Observações:

- Vale notar que se I é enumerável, então a definição acima concorda com o resultado da definição usual de somatório, já que se a série converge na definição usual, essa série converge absolutamente e podemos modificar a ordem dos elementos da série, sem afetar o resultado.
- Vale notar também que se $x_i = \infty$ para algum $i \in I$, então $\sum_{i \in I} x_i = \infty$.

Para falar sobre espaços de medida, vamos introduzir o conceito de família de conjuntos disjunta.

Definição 2.23. Uma família de conjuntos indexada $\{E_i\}_{i \in I}$ é disjunta se, para todo $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Em particular, para $I = \mathbb{N}$, ou seja, se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Definição 2.24 (Espaço de medida)**.** Um espaço de medida é uma tripla (X, Σ, μ) onde:

a) X é um conjunto;

b) $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X;

c) $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma função tal que:

   i) $\mu(\emptyset) = 0$;
   ii) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ é uma sequência disjunta de elementos, então $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

A função μ é chamada de medida em X.

Lema 2.25 (Propriedades elementares de medida)**.** *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.*

a) *Se* $E, F \in \Sigma$ *e* $E \cap F = \emptyset$*, então* $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

b) *Se* $E, F \in \Sigma$ *e* $E \subset F$*, então* $\mu(E) \leq \mu(F)$.

c) $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$*, para todo* $E, F \in \Sigma$.

d) *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente em* Σ *(ou seja,* $E_n \subset E_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*), então* $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

e) *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência decrescente em* Σ *(ou seja,* $E_{n+1} \subset E_n$*) e se* $\mu(E_n) < \infty$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Demonstração. Sejam $E, F \in \Sigma$. Vamos provar que valem as propriedades:

a) Tome a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde $E_1 = E$, $E_2 = F$ e $E_n = \emptyset$ para todo $n > 2$. Pela definição de medida, temos $\mu(E \cup F) = \mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \mu(E) + \mu(F) + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\emptyset) = \mu(E) + \mu(F)$.

b) Seja $F - E = G$. Então $\mu(F) = \mu(E) + \mu(G) \geq \mu(E)$, pela propriedade acima e pelo fato de $\mu(G) \geq 0$.

c) $\mu(E \cup F) = \mu((E - F) \cup F) = \mu(E - F) + \mu(F) \leq \mu(E) + \mu(F)$, pelas propriedades acima.

d) Seja $F_1 = E_1$ e $F_n = E_n - E_{n-1}$, para $n > 1$. Se $n \leq m$, por hipótese, $E_n \subset E_m$, então

$$
\begin{aligned}
F_n \cap F_m &= (E_n - E_{n-1}) \cap (E_m - E_{m-1}) \\
&= (E_n \cap \overline{E_{n-1}}) \cap (E_m \cap \overline{E_{m-1}}) \\
&= E_n \cap E_m \cap \overline{E_{n-1}} \cap \overline{E_{m-1}} \\
&= E_n \cap \overline{E_{m-1}} \subset E_{m-1} \cap \overline{E_{m-1}} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\{F_n\} \subset X$ é uma sequência disjunta tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n)$, pela propriedade (cii) da definição 2.24.

Como $\mu(E_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(F_n)$, temos $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Além disso, como $\{\mu(E_n)\}$ é uma sequência crescente, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

e) Suponha que $\mu(E_k) < \infty$. Definindo $F_n = E_k - E_{k+n}$ e $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, temos uma sequência crescente $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\mu(F) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n)$, pelo item anterior. Como $\mu(F_n)+\mu(E_{k+n}) = \mu(E_k)$ e $\mu(E_k) < \infty$, podemos escrever $\mu(F_n) = \mu(E_k) - \mu(E_{k+n})$. Portanto,

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(E_k) - \mu(E_{k+n})) = \mu(E_k) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_{k+n}).$$

A sequência $\{\mu(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pois é uma sequência decrescente limitada inferiormente, e, como $\{\mu(E_{k+n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{\mu(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, temos $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_{k+n}) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ e, portanto,

$$\mu(F) = \mu(E_k) - \lim_{n\to\mathbb{N}} \mu(E_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E_k) - \mu(F).$$

Agora, $\mu(F) + \mu(E_k - F) = \mu(E_k)$, pois $F \subset E_k$ e, portanto, $\mu(E_k - F) = \mu(E_k) - \mu(F)$. Utilizando as leis de De Morgan é possível mostrar que $E_k - F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. De fato,

$$\begin{aligned}
E_k - F &= E_k \cap \overline{F} \\
&= E_k \cap (\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}) \\
&= E_k \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_k \cap \overline{F_n}) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_k \cap \overline{E_k - E_{k+n}}) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_k \cap \overline{E_k \cap \overline{E_{k+n}}}) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_k \cap (\overline{E_k} \cup E_{k+n})) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [(E_k \cap \overline{E_k}) \cup (E_k \cap E_{k+n})] \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\emptyset \cup E_{k+n}] \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{k+n}.
\end{aligned}$$

Como $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_{k+n} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_k$ e, portanto, $E_k - F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_k$. Logo, temos

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(E_k) - \mu(F) = \lim_{n\to\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Ainda, $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} \mu(E_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$, pois $\{\mu(E_n)\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente.

$\square$

Corolário 2.26. *Se (X, Σ, μ) é um espaço de medida e $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, temos*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Demonstração. Tome $F_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} E_n$. Pelo item (c) do lema anterior e pelo princípio de indução finita, $\mu(F_k) \leq \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(E_n)$. Como $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, pelo item (d) temos

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_k).$$

$\square$

Observação: No item (e) do lema 2.25, é necessário que exista um elemento E_k tal que $\mu(E_k) \in \mathbb{R}$, caso contrário é possível construir um exemplo para o qual essa propriedade não vale. Tomando a medida contagem no conjunto dos naturais, é fácil ver que para a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, onde $E_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.

Teorema 2.27. *Se $h : X \to [0, \infty]$ é uma função qualquer, então a função $\mu_h : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definida por*

$$\mu_h(E) = \sum_{x\in E} h(x) = \sup\left\{ \sum_{x\in I} h(x) : I \subset E \text{ é finito}\right\}$$

é uma medida em $\mathcal{P}(X)$. Essa medida é chamada de medida pontual.

Demonstração. É fácil ver que a tripla $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ satisfaz as duas primeiras propriedades da definição 2.24. Vamos provar então os dois itens da última propriedade:

i) Pela definição 2.22 de somatórios, temos $\mu_h(\emptyset) = \sum\limits_{x\in\emptyset} h(x) = 0$.

ii) Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ uma sequência disjunta. Vamos provar primeiro que $\mu_h(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$. Tome um conjunto finito $E \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Existe uma partição $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de E tal que $X_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mu_h(X_n) \leq \mu_h(E_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\mu_h(E) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(X_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$. Como E é arbitrário, $\mu_h(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sup\{\mu_h(E) : E \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \text{ tal que } E \text{ é finito}\} \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$.

Para provar o outro lado da desigualdade, vamos ter que dividir no caso em que a séria $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$ converge para infinito e no caso em que a série converge para um número real.

Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$ convergir para o infinito, então ou existe E_n tal que $\mu_h(E_n) = \infty$ ou para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N} \mu_h(E_n) > M$. No primeiro caso, é fácil ver que $\{\mu_h(E) : E \subset E_n$ tal que E é finito$\} \subset \{\mu_h(E) : E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ tal que E é finito$\}$ e, portanto, $\mu_h(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \geq \mu_h(E_n) = \infty$. A demonstração do outro caso é parecida com o caso em que a série é finita, trocando-se apenas a igualdade por uma desigualdade e usando o fato de que M é arbitrário, demonstrada abaixo.

Suponha então que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n) = L \in \mathbb{R}$. Pela definição de convergência de série, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N} \mu_h(E_n) > L - \epsilon/2$. Agora, para cada E_n, $n = 1, \cdots, N$, tome $X_n \subset E_n$ finito tal que $\mu_h(X_n) > \mu_h(E_n) - \epsilon/2^{n+1}$. Como X_n é finito, então $\bigcup_{n=1}^{N} X_n$ é finito e $\bigcup_{n=1}^{N} X_n \subset \bigcup_{n=1}^{N} E_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Assim, $\sum_{n=1}^{N} \mu_h(X_n) > \sum_{n=1}^{N} \mu_h(E_n) - \epsilon/2^{n+1} > L - \epsilon$. Portanto, como ϵ é arbitrário, temos que $\mu_h(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \geq L = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_h(E_n)$.

$\square$

Exemplo 2.28. Se $a \in X$ e $h : X \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = a, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$, então a função $\mu_h : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ é uma medida definida no conjunto das partes de X e é chamada de medida delta de Dirac.

Exemplo 2.29. A medida contagem de X é a medida $\mu_h : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ onde $h : X \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = 1$, para todo $x \in X$. Ainda, $\mu_h(E) = \begin{cases} \infty, & \text{se E é infinito} \\ \text{número de elementos de E, se E é finito} \end{cases}$.

Definição 2.30 (Conjunto de medida nula)**.** Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Dizemos que um conjunto $A \subset X$ possui medida nula quando existe um conjunto $E \in \Sigma$ tal que $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$.

Lema 2.31. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ a família de conjuntos de medida nula de X. Então:*

a) $\emptyset \in \mathcal{N}$;

b) se $A \subset B$ *e* $B \in \mathcal{N}$*, então* $A \in \mathcal{N}$;

c) se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathcal{N}$*, então* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

Demonstração.

a) Pela definição de medida $\mu(\emptyset) = 0$ e $\emptyset \subset \emptyset$, logo $\emptyset \in \mathcal{N}$.

b) Se $B \in \mathcal{N}$, existe $E \in \Sigma$ tal que $B \subset E$ e $\mu(E) = 0$, mas $A \subset B \subset E$, logo $A \in \mathcal{N}$.

c) Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$. Pela definição de medida nula (2.30), para cada A_n, existe E_n tal que $A_n \subset E_n$ e $\mu(E_n) = 0$. Mas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$ e, pelo corolário 2.26, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = 0$. Portanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

$\square$

Definição 2.32 (Espaços de medida completos)**.** Seja (X, Σ, μ) é um espaço de medida e seja $\mathcal{N}$ a coleção de todos os conjuntos de medida nula. Se $\mathcal{N} \subset \Sigma$, então dizemos que (X, Σ, μ) é um espaço de medida completo.

Teorema 2.33. *Dado um espaço de medida* (X, Σ, μ)*, existe um espaço de medida completo* $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ *tal que* $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$ *e* $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ *para todo* $E \in \Sigma$.

Demonstração. Seja $\mathcal{N}$ a família de conjuntos de medida nula de (X, Σ, μ) e defina $\tilde{\Sigma} = \{E \cup Z : E \in \Sigma, Z \in \mathcal{N}\}$ e, para todo $Y \in \tilde{\Sigma}$ com $Y = E \cup Z \in \Sigma \cup \mathcal{N}$, também defina $\tilde{\mu}(Y) = \mu(E)$. Vamos provar primeiro que $\tilde{\Sigma}$ possui todas as propriedades de σ-álgebra.

a) $\emptyset \in \tilde{\Sigma}$, pois $\emptyset \in \Sigma$, por definição de σ-álgebra, e $\emptyset \in \mathcal{N}$, pelo lema 2.31.

b) Suponha que $Y \in \tilde{\Sigma}$, então $Y = E \cup Z$ com $E \in \Sigma$ e $Z \in \mathcal{N}$. Queremos provar que $\overline{Y} \in \tilde{\Sigma}$. Para isso provaremos que $\overline{Z} \in \tilde{\Sigma}$, pois, se isso for verdade,

$$\overline{Y} = \overline{E \cup Z} = \overline{E} \cap \overline{Z} = \overline{E} \cap (E_1 \cup Z_1) = (\overline{E} \cap E_1) \cup (\overline{E} \cap Z_1)$$

e, como $\overline{E} \cap E_1 \in \Sigma$ e $\overline{E} \cap Z_1 \subset Z_1 \in \mathcal{N}$, teríamos demonstrado o que queríamos.

Vamos provar então que $\overline{Z} \in \tilde{\Sigma}$. Como $Z \in \mathcal{N}$, então existe $F \in \Sigma$ tal que $Z \subset F$ e $\mu(F) = 0$. É fácil ver então, que $\overline{Z} = \overline{F} \cup \complement_Z^F$ e como $\overline{F} \in \Sigma$, pela definição de σ-álgebra, e $\complement_Z^F \in \mathcal{N}$, pois $\complement_Z^F$ é um subconjunto de F, temos $\overline{Z} \in \tilde{\Sigma}$.

c) Seja $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\Sigma}$, onde $Y_n = E_n \cup Z_n$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cup Z_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$, pela definição de σ-álgebra, e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{N}$, pelo lema 2.31, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \in \tilde{\Sigma}$.

Vamos provar que $\tilde{\mu}$ está bem definida. Seja $F = E_1 \cup Z_1 = E_2 \cup Z_2$ um elemento de $\tilde{\Sigma}$, com $E_1, E_2 \in \Sigma$ e $Z_1, Z_2 \in \mathcal{N}$. Como $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$ e $E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \overline{E_1})$, temos

$$\begin{aligned}(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2}) \cup Z_1 = E_1 \cup Z_1 = F &= E_2 \cup Z_2 \\ &= (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup Z_2,\end{aligned}$$

de forma que $(E_1 \cap \overline{E_2}) \cup Z_1 = (E_2 \cap \overline{E_1}) \cup Z_2$.

Como $(E_1 \cap \overline{E_2}) \cap (E_2 \cap \overline{E_1}) = \emptyset$, $E_1 \cap \overline{E_2} \subset Z_2$ e $E_2 \cap \overline{E_1} \subset Z_1$ e, pela definição de conjunto de medida nula (2.30), existem $A_1, A_2 \in \Sigma$ tais que $E_1 \cap \overline{E_2} \subset A_1$ e $E_2 \cap \overline{E_1} \subset A_2$ e $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$. Logo, $\mu(E_1 \cap \overline{E_2}) \leq \mu(A_1) = 0$ e $\mu(E_2 \cap \overline{E_1}) \leq \mu(A_2) = 0$, pelas propriedades de medida (2.25), e, portanto,

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_1 \cap \overline{E_2}) = \mu(E_2 \cap E_1) + \mu(E_2 \cap \overline{E_1}) = \mu(E_2).$$

Aqui também fica claro que, se $F \in \Sigma$, $\tilde{\mu}(F) = \mu(F)$ pela forma como definimos $\tilde{\mu}$.

Resta provar agora que $\tilde{\mu}$ é uma medida. Seja $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\Sigma}$ uma sequência de elementos disjuntos. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in \Sigma$ e $Z_n \in \mathcal{N}$ tal que $F_n = E_n \cup Z_n$. Assim, $\tilde{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(F_n)$. □

2.3 MEDIDA EXTERIOR

Nesta seção, será apresentado o conceito de medida exterior. Enquanto uma medida é uma função definida em uma σ-álgebra de um conjunto X em que vale a σ-aditividade, uma medida exterior é uma função definida em $\mathcal{P}(X)$ em que exigimos que ela seja subaditiva, como veremos a seguir.

Definição 2.34 (Medida exterior)**.** Uma medida exterior em um conjunto X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ tal que:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

b) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ se $A \subset B$;

c) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, então $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

Podemos observar que uma medida exterior não é, em geral, uma medida. No entanto, como veremos no próximo teorema, podemos restringir o domínio de uma medida exterior a fim de definir uma medida.

Teorema 2.35 (Teorema de extensão de Carathéodory)**.** *Seja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ uma medida exterior em X. A família de conjuntos $\Sigma_{\mu^*} = \{A \subset X : \mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap \overline{A}), \forall E \subset X\}$, chamada de família de conjuntos μ^*-mensuráveis, é uma σ-álgebra e $\mu : \Sigma_{\mu^*} \to [0,\infty]$ definida por $\mu(E) = \mu^*(E)$ é uma medida. Além disso, (X, Σ_{μ^*}, μ) é um espaço de medida completo.*

Demonstração. Vamos provar primeiro que Σ_{μ^*} é uma álgebra.

a) $\emptyset \in \Sigma_{\mu^*}$, pois para todo $E \in \mathcal{P}(X)$, $\mu^*(E\cap\emptyset) + \mu^*(E\cap X) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = 0 + \mu^*(E) = \mu^*(E)$;

b) Se $A \in \Sigma_{\mu^*}$, então $\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap\overline{A}) = \mu^*(E\cap\overline{\overline{A}}) + \mu^*(E\cap\overline{A})$, para todo $E \subset X$ e, portanto, $\overline{A} \in \Sigma_{\mu^*}$.

c) Para mostrar que Σ_{μ^*} é uma álgebra basta mostrar que se $A, B \in \Sigma_{\mu^*}$, então $A \cup B \in \Sigma_{\mu^*}$, e o resultado segue por indução. Suponha então que $A, B \in \Sigma_{\mu^*}$, então, para todo $E \subset X$

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap\overline{A})\\ &= \mu^*(E\cap A\cap B) + \mu^*(E\cap A\cap\overline{B}) + \mu^*(E\cap\overline{A}\cap B) + \mu^*(E\cap\overline{A}\cap\overline{B}),\end{aligned}$$

pois $E\cap A$ e $E\cap\overline{A}$, em particular, são subconjuntos de X.

Como $(A\cup B) = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$, pela subaditividade temos

$$\mu^*(E\cap A\cap B) + \mu^*(E\cap A\cap\overline{B}) + \mu^*(E\cap\overline{A}\cap B) \geq \mu^*(E\cap(A\cup B))$$

e, portanto,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap\overline{(A\cup B)}).$$

Como $\mu^*(E) \leq \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu^*(E\cap\overline{(A\cup B)})$, segue a igualdade e $A\cup B \in \Sigma_{\mu^*}$.

Agora para mostrar que Σ_{μ^*} é σ-álgebra, basta mostrar que Σ_{μ^*} é fechado por uniões enumeráveis de conjuntos disjuntos. Seja então $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_{\mu^*}$ uma sequência disjunta. Defina $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Como $\mu^*(E\cap B_1) = \mu^*(E\cap A_1)$, pela definição de B_1, e para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $E \subset X$,

$$\begin{aligned}\mu^*(E\cap B_n) &= \mu^*(E\cap B_n\cap A_n) + \mu^*(E\cap B_n\cap\overline{A_n})\\ &= \mu^*(E\cap A_n) + \mu^*(E\cap B_{n-1}),\end{aligned}$$

então, por indução, vale $\mu^*(E \cap B_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$. Assim, como Σ_{μ^*} é uma álgebra, $B_n \in \Sigma_{\mu^*}$ e, logo,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap \overline{B_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \overline{B_n}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap \overline{B}).
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap \overline{B}) \\
&\geq \mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap A_n)) + \mu^*(E \cap \overline{B}) \\
&= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap \overline{B}) \geq \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Assim, todas as desigualdades devem ser igualdades e segue que $B \in \Sigma_{\mu^*}$. Tomando $E = B$, também temos $\mu^*(B) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*(B \cap \overline{B}) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \mu^*(\emptyset) = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ e disso segue que $\mu^*|\Sigma_{\mu^*}$ é uma medida.

Resta agora provar que (X, Σ_{μ^*}, μ) é um espaço de medida completo. De fato, se $A \in \Sigma_{\mu^*}$ é tal que $\mu^*(A) = 0$ e $B \subset A$, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap \overline{B}) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{B}) = \mu^*(E \cap \overline{B}) \leq \mu^*(E)$ e, portanto, $B \in \Sigma_{\mu^*}$. □

Observação: No último item do teorema anterior, provamos que se $A \in \Sigma_{\mu^*}$, $\mu(A) = 0$ e $B \subset A$, então $B \in \Sigma_{\mu^*}$, mas o mesmo argumento pode ser utilizado para mostrar que todo $B \subset X$ com $\mu^*(B) = 0$ é elemento de Σ_{μ^*}.

No próximo teorema, veremos que, dado uma função $\rho : A \subset \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, podemos construir uma medida exterior. A ideia dessa construção é parecida com o método de exaustão para o cálculo de áreas. Enquanto no método de exaustão utilizamos figuras cujas áreas são conhecidas, como polígonos, para aproximar a área de outras figuras cobrindo-as, no teorema a seguir, vamos utilizar a "medida" de conjuntos já conhecidos, como intervalos, para determinar uma "medida" para outros conjuntos.

Teorema 2.36. *Seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Para cada $A \subset X$, defina*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Big\}.$$

Nessas condições, μ^* é uma medida exterior.

Demonstração. Para todo $A \subset X$, sempre existe uma sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ tal que $A \in \bigcup_{n\subset\mathbb{N}} E_n$ (tomando $E_n = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por exemplo), de forma que a função está bem definida. Vamos provar então as propriedades de medida exterior:

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$, pois a sequência $E_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência cuja união contém $\emptyset$;

b) Sejam $A, B \subset X$ tais que $A \subset B$. Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência cuja união contém B, então essa união também contém A. Dessa forma,

$$\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big\} \subset \Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big\}.$$

Logo,

$$\inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big\} \geq \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big\}$$

e, portanto, $\mu^*(B) \geq \mu^*(A)$.

c) Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ uma sequência e seja $\epsilon > 0$ dado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $\{E_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k^n$ e $\mu^*(A_n) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho(E_k^n) - \epsilon/2^n$. Definindo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, temos $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k^n$ e, portanto, $\mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \rho(E_k^n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \epsilon$. Portanto, como ϵ é arbitrário, $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

□

2.4 MEDIDA DE LEBESGUE

Nesta seção, apresentaremos a medida de Lebesgue na reta que, segundo Castro (2016), é a mais importante para aplicações e foi o guia de desenvolvimento para a Teoria Geral de Medida. Os teoremas dessa seção foram tirados de (FOLLAND, 1999), (COELHO, 2012) e (MATHONLINE, 2021).

Teorema 2.37. *Seja $\mathcal{I}$ o conjunto formado por todos os intervalos abertos na reta e seja $\rho : \mathcal{I} \to [0, \infty]$ uma função dada por $\rho((a, b)) = b - a$. A medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ definida por*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) : E_n \in \mathcal{I} \text{ e } A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big\}$$

possui as seguintes propriedades:

a) $\mu^*(\{x\}) = 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

b) $\mu^*([a,b]) = b - a$;

c) $\mu^*((a,b)) = \mu^*((a,b]) = \mu^*([a,b)) = b - a$.

Demonstração. Pelo teorema 2.36, μ^* é realmente uma medida exterior. Vamos provar então as propriedades:

a) Todo intervalo da forma $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, recobre o conjunto $\{x\}$. Logo, $\mu^*(\{x\}) \leq 2\epsilon$, mas como ϵ é arbitrário, $\mu^*(\{x\}) = 0$;

b) Como $(a - \epsilon, b + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, é uma cobertura de $[a,b]$, sabemos que $\mu^*([a,b]) \leq b - a + 2\epsilon$ e, como ϵ é arbitrário, $\mu^*([a,b]) \leq b - a$. Vamos provar então o outro lado da desigualdade. Tome $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{I}$ uma cobertura de $[a,b]$. Como $[a,b]$ é compacto, $[a,b]$ admite uma subcobertura finita de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{F_1, \cdots, F_k\}$.

   Como $\{F_1, \cdots, F_k\}$ é um cobertura de $[a,b]$, existe $F_{i_1} = (a_1, b_1)$, $i_1 \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $a \in F_{i_1}$. Se $b_1 \in [a,b]$, então existe $F_{i_2} = (a_2, b_2)$, $i_1 \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $b_1 \in F_{i_2}$. E prosseguimos o processo até que tomemos $F_{i_n} = (a_n, b_n)$ tal que $b \in F_{i_n}$. Assim, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho(F_{i_j}) = (b_n - a_n) + \cdots + (b_1 - a_1) \geq b_n - a_1 \geq b - a$. Logo, como $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(E_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \rho(F_{i_j})$, e como $\mu^*([a,b])$ é o ínfimo para todo $\{E_n\}$ que é cobertura, temos $\mu^*([a,b]) \geq b - a$. Portanto, $\mu^*([a,b]) = b - a$.

c) Pela propriedade (c) e (b) da definição de medida exterior (2.34), temos $\mu^*([a,b]) \leq \mu^*((a,b)) + \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) = \mu^*((a,b)) \leq \mu^*([a,b])$. Logo, todas as desigualdades devem ser igualdades e, pelo item anterior, $\mu^*((a,b)) = b - a$. De forma análoga, $\mu^*((a,b]) = \mu^*([a,b)) = b - a$.

□

Definição 2.38 (Conjuntos Lebesgue mensuráveis)**.** Seja μ^* definida como no teorema anterior. O conjunto $\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R} : \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \forall E \subset \mathbb{R}\}$ é chamado de classe de conjuntos Lebesgue mensuráveis. Ainda, $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra, pelo teorema 2.35.

Lema 2.39. *Os conjuntos da forma (a, ∞) e $(-\infty, b)$ são elementos de $\mathcal{L}$.*

Demonstração. Seja A um conjunto da forma (a, ∞) ou $(-\infty, b)$ e seja $E \subset \mathbb{R}$. Se $\mu^*(E) = \infty$, então $\mu^*(E) = \infty \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A})$ e, pela propriedade (c) de medida exterior (2.34), $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A})$.

Vamos supor então que $\mu^*(E) < \infty$. Neste caso, para todo $\epsilon > 0$, existe uma sequência de intervalos abertos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Assim, defina $E'_n = E_n \cap A$ e $E''_n = E_n \cap \overline{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Repare que cada E'_n e E''_n é um intervalo ou um conjunto vazio, onde $\mu^*(E_n) = \mu^*(E'_n) + \mu^*(E''_n)$, pelo teorema 2.37. Repare também que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E'_n)$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E''_n)$ são séries convergentes, logo vale

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E'_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E''_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu^*(E'_n) + \mu^*(E''_n)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Assim, como $E \cap A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E'_n$ e $E \cap \overline{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E''_n$, temos

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E'_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E''_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, todas as desigualdades devem ser igualdades e, portanto $A \in \mathcal{L}$. □

Teorema 2.40. *O conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é um subconjunto de $\mathcal{L}$.*

Demonstração. Para cada intervalo aberto (a, b), temos $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$. Como $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra, pelo teorema 2.35, então $(a, b) \in \mathcal{L}$, pela propriedade (b) do teorema 2.7. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é a menor σ-álgebra contendo os intervalos abertos, então $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}$. □

Definição 2.41 (Medida de Lebesgue)**.** Seja μ^* como no teorema 2.37 e $\mathcal{L}$ a classe de conjuntos Lebesgue mensuráveis. Chamamos a função $\mu = \mu^*|\mathcal{L}$ de medida de Lebesgue. Pelo teorema 2.35, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ é um espaço de medida completo.

Observação: Pelo teorema 2.37 e pelo teorema 2.35, é fácil ver que $\mu([a, b]) = \mu((a, b]) = \mu([a, b)) = \mu((a, b)) = b - a$, para $a, b \in \mathbb{R}$, e que $\mu(\{x\}) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.42. *Se E é um conjunto enumerável, então $\mu(E) = 0$.*

Demonstração. Basta observar que, como E é enumerável, podemos formar uma sequência com seus elementos e usar a propriedade de (cii) de espaço de medida (2.24). □

Definição 2.43. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Para todo $r \in \mathbb{R}$, definimos $A + r = \{a + r : a \in A\}$ e $rA = \{a \cdot r : a \in A\}$.

Teorema 2.44. *Se $E \in \mathcal{L}$, então $E + s \in \mathcal{L}$ e $sE \in \mathcal{L}$. Além disso, $\mu(E + s) = \mu(E)$ e $\mu(sE) = |s|\mu(E)$.*

Demonstração. Basta notar que se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de E, então $\{E_n + s\}$ é uma cobertura de $E + s$ e $\{sE_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura de sE. □

Definição 2.45 (Conjunto de Cantor)**.** Vamos mostrar uma construção do conjunto de Cantor. Tome $E_0 = [0, 1]$. Agora retire o intervalo $(1/3, 2/3)$ e chame $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Para E_2, retiramos novamente o terço do meio de cada um dos intervalos de E_1, obtendo $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$ e realizando esse processo para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, o conjunto $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é chamado de conjunto de Cantor.

Observação: Como $\{E_n\}$ é uma sequência de conjuntos compactos onde $E_{n+1} \subset E_n$, é garantido que o conjunto de Cantor não é vazio. A demonstração desse fato se encontra no corolário do teorema 2.36 de (RUDIN, 1976). Além disso, como C é uma intersecção enumerável de elementos de $\mathcal{L}$, então $C \in \mathcal{L}$ pelo teorema 2.7.

Utilizaremos o próximo teorema para mostrar que o conjunto $\mathcal{L}$ possui a mesma cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Entretanto, apresentaremos somente um esboço da demonstração.

Teorema 2.46. *Seja C o conjunto de Cantor. Valem as seguintes propriedades:*

a) $\mu(C) = 0$;

b) $card(C) = c$.

Demonstração.

a) Pela construção do conjunto de Cantor, cada E_n é uma cobertura de C e temos $\mu(E_n) = (\frac{2}{3})^n$. Logo, $\mu(C) \leq \mu(E_n) = (\frac{2}{3})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\mu(C) = 0$.

b) Tome $x \in C$. Então $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 3^{-n}$, onde $a_n = 0$ ou 2, para todo n. Assim, a função $f : C \to [0,1]$ dada por $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n 2^{-n}$, onde $b_n = a_n/2$ é uma sobrejeção. Portanto, $card(C) = c$.

$\square$

Como $C \in \mathcal{L}$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ é um espaço de medida completo, todo subconjunto de C também é elemento de $\mathcal{L}$. Dessa forma, $card(\mathcal{L}) \geq card(\mathcal{P}(C)) = card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Logo nem todo elemento de $\mathcal{L}$ é um boreliano, pois $card(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$. A demonstração de que $card(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = card(\mathbb{R})$ não é trivial e envolve indução transfinita, e, por isso, será omitida neste trabalho, mas pode ser encontrada na proposição 1.23 de (FOLLAND, 1999).

3 INTEGRAIS

3.1 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos o que são funções mensuráveis e discutiremos algumas de suas propriedades.

Definição 3.1 (Função mensurável)**.** Sejam (X, Σ_X, μ_X) e (Y, Σ_Y, μ_Y) espaços de medida. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é (Σ_X, Σ_Y)-mensurável, ou simplesmente mensurável, quando $f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ sempre que $E \in \Sigma_Y$.

Teorema 3.2. *Sejam $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ e (Z, Σ_Z) espaços de medida e sejam $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funções mensuráveis. Então $g \circ f$ é uma função mensurável.*

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções mensuráveis. Repare que $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$. Assim, se $E \in \Sigma_Z$, então $g^{-1}(E) \in \Sigma_Y$ e, logo, $f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \Sigma_X$, pela definição de função mensurável. □

Teorema 3.3. *Sejam (X, Σ_X) e (Y, Σ_Y) espaços de medida. Se Σ_Y é uma σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, então $f : X \to Y$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ para todo $E \in \mathcal{E}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se f é mensurável, então $f^{-1}(E) \in \Sigma_X$ para todo $E \in \Sigma_Y$. Como $\mathcal{E} \subset \Sigma_Y$, então para todo $E \in \mathcal{E} \subset \Sigma_Y$, temos $f^{-1}(E) \in \Sigma_X$.

$(\Leftarrow)$ Repare que o conjunto $A = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \Sigma_X\}$ é uma σ-álgebra (teorema 2.21) que contém $\mathcal{E}$. Logo, $\Sigma_Y \subset A$. □

Corolário 3.4. *Se X e Y são espaços métricos (ou topológicos), então toda função contínua $f : X \to Y$ é $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mensurável, onde $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ são, respectivamente, as σ-álgebras de Borel de X e Y.*

Demonstração. Seja $U \subset Y$ um conjunto aberto. Pela definição de função contínua, $f^{-1}(U)$ é aberto e, portanto, pertence a $\mathcal{B}_X$. Logo, pelo teorema anterior, a f deve ser $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mensurável. □

Definição 3.5. Se (X, Σ) é um espaço de medida e f é uma função a valores reais ou complexos em X, diremos que f é Σ-mensurável, ou simplesmente mensurável, se ela é $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mensurável ou $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável. Em particular, diremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é Lebesgue mensurável (resp. Borel mensurável) se $\Sigma = \mathcal{L}$ (resp. $\Sigma = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$).

Observação: Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções Lebesgue mensuráveis, nem sempre $f \circ g$ é Lebesgue mensurável, mesmo que f seja contínua. No entanto, se f é Borel mensurável, então $f \circ g$ é Lebesgue ou Borel mensurável sempre que g o for.

Teorema 3.6. *Se (X, Σ) é um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f *é* Σ*-mensurável.*

b) $f^{-1}((a,\infty)) \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

c) $f^{-1}([a,\infty)) \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

d) $f^{-1}((-\infty,a)) \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

e) $f^{-1}((-\infty,a]) \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. É fácil mostrar, a partir dos exemplos 2.13 e 2.14, que os conjuntos da forma $(a,\infty), [a,\infty), (-\infty,a)$ e $(-\infty,a]$ geram $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Assim, pelo teorema 3.3, o teorema segue. □

Teorema 3.7. *Sejam* (X,Σ) *e* $(Y_\alpha,\Sigma_\alpha)(\alpha \in A)$ *espaços de medida,* $Y = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, N = \bigotimes_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha$ *(definição 2.16) e* $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ *a aplicação projeção. Então* $f : X \to Y$ *é* (Σ, N)*-mensurável se, e somente se,* $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ *é* (Σ,Σ_α)*-mensurável para cada* α*.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Repare que cada π_α é mensurável pela forma que $\bigotimes_{\alpha\in A}\Sigma_\alpha$ é definida. Assim, se f é mensurável, f_α também será pois é composição de funções mensuráveis.

$(\Leftarrow)$ Como $\bigotimes_{\alpha\in A}\Sigma_\alpha$ é gerado pelo conjunto $\mathcal{E} = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \Sigma_\alpha, \alpha \in A\}$ e $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \Sigma$ para todo $E_\alpha \in \Sigma_\alpha$, então, pelo teorema 3.3, f deve ser mensurável. □

Corolário 3.8. *Uma função* $f : X \to \mathbb{C}$ *é mensurável se, e somente se, Re* f *e Im* f *são mensuráveis.*

Teorema 3.9. *Se* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *são mensuráveis, então* $f + g$ *e* fg *também são.*

Demonstração. Defina $F : X \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}, \phi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\psi : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $F(x) = (f(x), g(x)), \phi(z,w) = z+w, \psi(z,w) = zw$. Pelo corolário 3.7, F é mensurável e, pelo teorema 3.4, ϕ e ψ são mensuráveis. Logo, $f+g = \phi\circ F$ e $fg = \psi \circ F$ são mensuráveis. □

Para os próximos teoremas, consideraremos a reta estendida $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ e definimos o conjunto de Borel $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E\cap\mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

Teorema 3.10. *Se* $\{f_j\}$ *uma sequência de funções de* (X,Σ) *em* $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$*, então as funções*

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x),$$
$$g_2(x) = \inf_j f_j(x),$$
$$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x),$$
$$g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

são todas mensuráveis. Se $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ *existir para todo* $x \in X$*, então* f *também é mensurável.*

Demonstração. Temos $g_1^{-1}((a,+\infty]) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}((a,+\infty])$. De fato, se $x \in X$ é tal que $g_1(x) = b \in (a,+\infty]$, então existe f_j tal que $f_j(x) = c \in (a,b]$, pela definição de supremo e se $f_j(x) = b \in (a,+\infty]$, então $g_1(x) \in [b,+\infty] \subset (a,+\infty]$. De forma análoga, $g_2^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j^{-1}([-\infty,a))$. Dessa forma que g_1 e g_2 são mensuráveis, pelo teorema 3.3. De forma mais geral, se $h_k(x) = \sup_{j>k} f_j(x)$, então h_k é mensurável para cada k. Assim, $g_3 = \inf_k h_k$ é mensurável e g_4 também. Por fim, se f existe, então $f = g_3 = g_4$ é mensurável. □

Corolário 3.11. *Se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são mensuráveis, então $\max(f,g)$ e $\min(f,g)$ também o são.*

Corolário 3.12. *Se $\{f_j\}$ é uma sequência de funções a valores complexos e $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existe para todo x, então f é mensurável.*

Vamos definir duas decomposições de funções que serão utilizadas nos próximos teoremas.

Definição 3.13 (Parte positiva e negativa de uma função)**.** Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Definimos a parte positiva de f como $f^+(x) = \max(f(x),0)$ e a parte negativa de f como $f^-(x) = \max(-f(x),0)$. É fácil ver que $f = f^+ - f^-$ e, pelo teorema anterior, se f é mensurável, f^+ e f^- também são mensuráveis.

Definição 3.14 (Decomposição polar)**.** Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função. a decomposição polar de f é dada por $f = (\text{sgn}f)|f|$, onde $\text{sgn}z = \begin{cases} z/|z|, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$. Se f é mensurável, então tanto $|f|$ e sgn$f$ também o são.

3.2 FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS

Definição 3.15 (Função característica)**.** Seja (X,Σ) um espaço de medida. Se $E \subset X$, a função característica $\mathcal{X}_E$ de E é definida por

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \notin E, \\ 1, \text{ se } x \in E. \end{cases}$$

É fácil verificar que $\mathcal{X}_E$ é mensurável se, e somente se, $E \in \Sigma$.

Definição 3.16 (Função simples)**.** Seja (X,Σ) um espaço de medida. Uma função simples em X é uma combinação linear finita, com coeficientes complexos, de funções características de conjuntos de Σ, ou seja, uma função f é simples se

$$f = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathcal{X}_{E_i}$$

onde $E_i \in \Sigma$ para cada i. Chamamos a representação acima de representação padrão se $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Teorema 3.17. *Se f e g são funções simples, então $f + g$ e fg também o são.*

O próximo teorema nos mostra que toda função mensurável pode ser aproximado por funções simples.

Teorema 3.18. *Seja (X, Σ) um espaço de medida.*

a) Se $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável, então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq f$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer conjunto em que f é limitado.

b) Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer conjunto em que f é limitado.

Demonstração. a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, defina

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]) \text{ e } F_n = f^{-1}((2^n, \infty])$$

e defina $\phi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^n \mathcal{X}_{E_n^k} + 2^n \mathcal{X}_{F_n}$. É fácil perceber que $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ para todo n e $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$ no conjunto onde $f \leq 2^n$.

b) Se $f = g + ih$, podemos aplicar a parte (a) nas partes positivas e negativas de g e h, obtendo sequências $\psi_n^+, \psi_n^-, \eta_n^+$ e η_n^- de funções simples crescentes que convergem para g^+, g^-, h^+ e h^-, respectivamente. Seja $\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\eta_n^+ - \eta_n^-)$. Então $\{\phi_n\}$ é a sequência procurada.

□

Teorema 3.19. *As seguintes implicações são válidas se, e somente se, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma medida completa:*

a) Se $f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável e $f = g$ μ-q.t.p., então g é mensurável.

b) Se f_n é mensurável para $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \to f$ μ-q.t.p., então f é mensurável.

Demonstração.

a) Suponha que $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ é uma medida completa, f é mensurável e $f = g$ q.t.p. e defina $X_1 = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ e $X_2 = \overline{X_1}$. Se $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$, então $f^{-1}(E) \in \Sigma$ e $X_1 \cap f^{-1}(E) \in \Sigma$. Como $g^{-1}(E) = (f^{-1}(E) \cap X_1) \cup (g^{-1}(E) \cap X_2) \in \Sigma$, pois $g^{-1}(E) \cap X_2 \subset X_2$ e $\mu(E_2) = 0$, então g é mensurável.

Por outro lado, se f é mensurável e $f = g$ q.t.p. implica em g mensurável, então basta tomar $g = \mathcal{X}_E$ onde E é um conjunto de medida nula e $f = 0$. Assim, como f é mensurável, então g também o é e $g^{-1}(\{1\}) = E \in \Sigma$.

b) Suponha que μ seja completo e seja $A \subset X$ o conjunto em que $f_n \not\to f$. Assim, definindo $g_n = f_n \mathcal{X}_A$, temos que cada uma das g_n é mensurável e, pelo corolário 3.12, temos que $g = \lim_{n\to\infty} g_n = f\mathcal{X}_A$ é mensurável. Como $g = f$ q.t.p., então f também é mensurável, pelo item anterior.

Para a recíproca, para todo E de medida nula, basta tomar $f_n = \mathcal{X}_E$.

□

Repare que se (X, Σ, μ) é um espaço de medida e $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ é seu completamente, então qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ que é Σ-mensurável vai ser também $\tilde{\Sigma}$-mensurável. O próximo teorema nos dirá que o caminho contrário também é válido, a menos de um conjunto de medida nula.

Teorema 3.20. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e seja $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ seu completamento. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função $\tilde{\Sigma}$-mensurável, existe uma função Σ-mensurável $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ $\tilde{\mu}$-q.t.p.*

Demonstração. Se $f = \mathcal{X}_E$ onde $E \in \tilde{\Sigma}$, então existe $F \in \Sigma$ e N de medida nula tais que $E = F \cup N$. Assim, basta tomar $g = \mathcal{X}_F$. Para o caso geral, escolha uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples $\tilde{\Sigma}$-mensuráveis que convergem pontualmente para f (teorema 3.18) e para cada n, escolha ψ_n tal que $\psi_n \neq \phi_n$ somente em um conjunto E_n de medida nula. Assim, tomando $N = \cup_{i=1}^{\infty} E_n$, temos que N também é de medida nula e, tomando $g = \lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{\tilde{N}} \psi_n$, temos que g é Σ-mensurável e $g = f$ em todo ponto exceto em N. □

3.3 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO NEGATIVAS

Ao longo desta seção, fixamos um espaço de medida (X, Σ, μ) e definimos

$$L^+ = \{f : X \to [0, \infty] : f \text{ é mensurável}\}.$$

Definição 3.21 (Integral de funções simples)**.** Se ϕ é uma função simples em L^+ com a representação padrão $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$, definimos a integral de ϕ com respeito a μ por

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

(observando que, por convenção, $0 \times \infty = 0$ e que a integral pode valer ∞).

Além disso, se $A \in \Sigma$, então $\phi\mathcal{X}_A = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{A\cap E_i}$ é uma função simples e definimos

$$\int_A \phi d\mu = \int \phi \mathcal{X}_A d\mu.$$

Quando não houver ambiguidades, podemos escrever $\int \phi d\mu$ simplesmente por $\int \phi$.

Teorema 3.22. *Sejam ϕ e ψ funções simples em L^+.*

a) Se $c \geq 0,$ $\int c\phi d\mu = c \int \phi d\mu.$

b) $\int (\phi + \psi) d\mu = \int \phi d\mu + \int \psi d\mu.$

c) Se $\phi \leq \psi$, então $\int \phi d\mu \leq \int \psi d\mu.$

d) A aplicação $A \mapsto \int_A \phi d\mu$ é uma medida em Σ.

Demonstração. Sejam $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$ e $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathcal{X}_{F_j}$ as representações padrão de ϕ e ψ.

a) $\int c\phi d\mu = \sum_{i=1}^{n} c a_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = c \int \phi d\mu.$

b) Como $E_i = \cup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j), i = 1, \cdots, n,$ e $F_j = \cup_{i=1}^{n} (E_i \cap F_j), j = 1, \cdots, m,$ pela aditividade de μ, temos

$$\begin{aligned}
\int \phi d\mu + \int \psi d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int (\phi + \psi) d\mu = \sum_{j,k} (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j).$$

Assim, provamos o resultado.

c) Se $\phi \leq \psi$, então $a_i \leq b_j$ sempre que $E_i \cap F_j \neq \emptyset$. Assim,

$$\int \phi d\mu = \sum_{i,j} a_i \mu(E_i \cap F_j) \leq \sum_{i,j} b_j \mu(E_i \cap F_j) = \int \psi d\mu,$$

como queríamos.

d) Se $\{A_k\} \subset \Sigma$ é uma sequência de elementos disjuntos e $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, pela σ-aditividade de μ, temos

$$\begin{aligned}
\int_A \phi d\mu &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_i \mu(A_k \cap E_i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_k \cap E_i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \phi d\mu.
\end{aligned}$$

□

Vamos agora estender a definição de integral para todos os elementos de L^+.

Definição 3.23 (Integral para funções não negativas)**.** Seja $f \in L^+$. Definimos

$$\int f d\mu = \sup \Big\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ uma função simples} \Big\}.$$

Pela teorema 3.22, temos que a definição 3.23 e a definição 3.21 coincidem se f é uma função simples. Além disso, é fácil ver que, se $f \leq g$ e $c \in [0, \infty)$,

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu \text{ e } \int c f d\mu = c \int f d\mu.$$

Agora vamos introduzir o primeiro grande teorema de convergência.

Teorema 3.24 (Teorema de convergência monótona)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma sequência em L^+ tal que $f_i \leq f_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $f = \lim_{i\to\infty} f_i (= \sup f_i)$, então $\int f d\mu = \lim_{i\to\infty} \int f_n d\mu$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.22, $\{\int f_n d\mu\}$ é uma sequência crescente de números, cujo limite existe (possivelmente igual a ∞). Além disso, $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Vamos provar então o outro lado da desigualdade. Tome $\alpha \in (0,1)$ e seja ϕ uma função simples com $0 \leq \phi \leq f$ e seja $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$. Então $\{E_n\}$ é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis cuja união é X e, assim, temos

$$\int f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \phi d\mu.$$

Pela propriedade d) do teorema 3.22 e pelo lema 2.25, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} \phi d\mu = \int \phi d\mu$ e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \alpha \int \phi d\mu$. Como isso vale para todo $\alpha \in (0,1)$, vale também para $\alpha = 1$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \phi d\mu$ para toda função simples ϕ,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \sup\left\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simples}\right\} = \int f d\mu$$

como queríamos. $\square$

O teorema 3.24 é uma ferramenta essencial em várias situações, mas sua importância mais imediata segue do fato de que a definição 3.23 de integral utiliza o supremo de uma quantidade muito grande (incontável, normalmente) de funções, o que pode ser difícil de calcular diretamente. Assim, o teorema de convergência monótona nos garante que basta escolher uma sequência adequada de funções para calcular a integral de uma determinada função.

Teorema 3.25. *Se $\{f_n\}$ é uma sequência finita ou infinita em L^+ e $f = \sum\limits_i f_i$, então*

$$\int f d\mu = \sum_i \int f_i d\mu.$$

Demonstração. Vamos provar o teorema para o caso finito por indução em n. Para $n = 2$, podemos achar, pelo teorema 3.18, sequências $\{\phi_j\}$ e $\{\psi_j\}$ de funções simples não negativas que crescem para f_1 e f_2. Então, $\{\phi_j + \psi_j\}$ é uma sequência que cresce para $f_1 + f_2$ e, pelo teorema 3.24 temos

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \lim_{j\to\infty} \int (\phi_j + \psi_j) d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \phi_j d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \psi_j d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Suponha agora que o teorema vale para $n = k - 1$. Então

$$\int \sum_{i=1}^{k} f_i d\mu = \int \sum_{i=1}^{k-1} f_i d\mu + \int f_k d\mu = \sum_{i=1}^{k-1} \int f_i d\mu + \int f_k d\mu = \sum_{i=1}^{k} \int f_i d\mu.$$

Para o caso infinito, basta tomar o limite quando $k \to \infty$ e utilizar o teorema de convergência monótona (teorema 3.24). $\square$

Teorema 3.26. *Se $f \in L^+$, então $\int f d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.t.p.*

Demonstração. O resultado é óbvio se f é simples: se $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$, com $a_i \geq 0$, então $\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) = 0$ se, e somente se, $a_i = 0$ ou $\mu(E_i) = 0$ para $i = 1, \cdots, n$.

Suponha agora que f é uma função qualquer de L^+. Se $f = 0$ q.t.p. e ϕ é simples, com $0 \leq \phi \leq f$, então $\phi = 0$ q.t.p. e, portanto, $\int \phi d\mu = 0$. Logo, como ϕ é arbitrária, $\int f d\mu = 0$. Por outro lado, se $f \neq 0$ em um conjunto de medida positiva, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) > 0$, onde $E_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Mas então $f \geq \frac{1}{n} \mathcal{X}_{E_n}$ e, portanto, $\int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n) > 0$. $\square$

Corolário 3.27. *Se $\{f_n\} \subset L^+$, $f \in L^+$ e $f_n(x)$ cresce para $f(x)$ em quase todo ponto, então $\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$.*

Demonstração. Se $f_n(x)$ cresce para $f(x)$, $x \in E$, onde $\mu(\overline{E}) = 0$, então $f - f\mathcal{X}_E = 0$ q.t.p. e $f_n - f_n \mathcal{X}_E = 0$ q.t.p., assim, pelo teorema de convergência monótona, $\int f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \mathcal{X}_E d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$. $\square$

A hipótese de que $f_n \leq f_{n+1}$, pelo menos em quase todo ponto, é essencial para o teorema de convergência monótona. Por exemplo, se $X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue, temos $\mathcal{X}_{(n,n+1)} \to 0$ e $n\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})} \to 0$ pontualmente, mas $\int \mathcal{X}_{(n,n+1)} d\mu = \int \mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})} d\mu = 1$. Estes são exemplos típicos de integrais de um limite que não é o limite das integrais, mas, mesmo nesses casos, ainda existe uma desigualdade que permanece válida.

Teorema 3.28 (Lema de Fatou)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma sequência em L^+, então*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Para cada $k \geq 1$, temos $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j$ para $j \leq k$, então $\int \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \int f_j d\mu$ para $j \leq k$, então $\int \inf_{n \geq k} f_n d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int f_j d\mu$. Agora, fazendo $k \to \infty$ e aplicando o teorema de convergência monótona (3.24):

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim_{k \to \infty} \int (\inf_{n \geq k} f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

$\square$

Corolário 3.29. *Se $\{f_n\} \subset L^+, f \in L^+$ e $f_n \to f$ q.t.p., então $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.*

Demonstração. Seja N o conjunto onde $f_n \to f$. Tomando $g_n = \mathcal{X}_N f_n$ e $g = \mathcal{X}_N f$, pelo teorema 3.26 e pelo lema de Fatou, temos

$$\int f d\mu = \int g d\mu = \int (\liminf g_n) d\mu \leq \liminf \int g_n d\mu = \liminf \int f_n d\mu.$$

□

Teorema 3.30. *Se $f \in L^+$ e $\int f d\mu < \infty$, então $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ é um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Seja $E = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ e suponha que $\mu(E) = k > 0$. Então $\displaystyle\int f d\mu \geq \int n\mathcal{X}_E d\mu = nk$ para todo $n \in \mathbb{R}$. □

3.4 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS

As integrais definidas na seção anterior podem ser estendidas para funções mensuráveis a valores reais de um jeito simples: se f^+ e f^- são a parte positiva e negativa de f, respectivamente, podemos definir

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Vamos nos preocupar principalmente com o caso onde $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ são ambos finitos. Neste caso, dizemos que $\int f d\mu$ é integrável e é fácil provar que f é integrável se, e somente se, $\int |f| d\mu < \infty$.

Teorema 3.31. *O conjunto das funções integráveis a valores reais em X é um espaço vetorial real, e a integral é um funcional linear nele.*

Demonstração. A primeira afirmação segue do fato que $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ integráveis, e, portanto, $\int(\alpha f + \beta g) d\mu$ existe, de forma que esse conjunto é um subespaço vetorial do conjunto de funções de X em $\mathbb{R}$.

Vamos mostrar agora que a integral é um funcional linear. Pelo teorema 3.22, é fácil verificar que $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$. Para provar a aditividade, vamos supor que f e g são funções integráveis e seja $h = f + g$. Então $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. Assim, $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$ e, pelo teorema 3.25, temos

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$$

e, portanto,

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g.$$

□

Definição 3.32. Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Dizemos que f é integrável se $\int |f| d\mu < \infty$ e definimos

$$\int f d\mu = \int \text{Re} f d\mu + i \int \text{Im} f d\mu.$$

Teorema 3.33. *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Então f é integrável se, e somente se, Ref e Imf são ambos integráveis.*

Demonstração. Como $|f| \leq |\text{Re}f| + |\text{Im}f| \leq 2|f|$, pelo teorema 3.22, temos

$$\int |f| d\mu \leq \int |\text{Re}f| + |\text{Im}f| d\mu \leq \int 2|f| d\mu.$$

Dessa forma $\int |f| d\mu$ é finito se, e somente se, $\int |\text{Re}f| d\mu$ e $\int |\text{Im}f| d\mu$ também o forem. □

Notação 3.34. Denotamos por $L^1(\mu)$ ou $L^1(X, \mu)$ ou simplesmente por L^1 o conjunto formado pelas funções $f : X \to \mathbb{C}$ integráveis.

Teorema 3.35. *Se $f \in L^1$, então $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.*

Demonstração. Se $\int f d\mu = 0$, então $|f| = 0$ q.t.p. (teorema 3.26) e, portanto $|\int f d\mu| = 0 = \int |f| d\mu$. Agora, suponha que $\int f d\mu \neq 0$. Tomando $\alpha = \overline{\text{sgn}(\int f d\mu)}$ (definição 3.14), temos $|\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu$. Logo, como $\int \alpha f d\mu$ é real,

$$\left| \int f d\mu \right| = \text{Re} \int \alpha f d\mu = \int \text{Re}(\alpha f) d\mu \leq \int |\text{Re}(\alpha f)| d\mu \leq \int |\alpha f| d\mu = \int |f| d\mu.$$

□

Teorema 3.36. *Sejam $f, g \in L^1$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

a) $\displaystyle\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ *para todo* $E \in \Sigma$*;*

b) $\displaystyle\int |f - g| d\mu = 0$*;*

c) $f = g$ *q.t.p.*

Demonstração. A equivalência das duas últimas sentenças segue do teorema 3.26. Suponha agora que $\int |f - g| = 0$, pelo teorema 3.35, temos

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| = \left| \int \mathcal{X}_E (f - g) \right| \leq \int |\mathcal{X}_E (f - g)| = \int \mathcal{X}_E |f - g| \leq \int |f - g| = 0,$$

de forma que $\int\limits_E f = \int\limits_E g$. Por outro lado, se $u = \text{Re}(f - g)$, $v = \text{Im}(f - g)$ e é falso que $f = g$ q.t.p., então pelo menos um dos u^+, u^-, v^+ ou v^- é positivo em um conjunto de medida não nula. Suponha, sem perda de generalidade, que $E = \{x \in X : u^+(x) > 0\}$ possui medida positiva, então $\text{Re}(\int\limits_E f d\mu - \int\limits_E g d\mu) = \int\limits_E u^+ > 0$, já que $u^- = 0$ em E.

□

Teorema 3.37 (Teorema de convergência dominada)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\mu)$ tal que (a) $f_n \to f$ μ-q.t.p., e (b) existe uma função não negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ μ-q.t.p. para todo n. Então $f \in L^1$ e $\int f = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n$.*

Demonstração. Seja $(X, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ o completamento de (X, Σ, μ). Se $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$, então $\{f_n\} \subset L^1(\tilde{\mu})$, pela observação do teorema 3.20. Assim, pelo teorema 3.19, existe g $\tilde{\Sigma}$-mensurável tal que $f_n \to g$ $\tilde{\mu}$-q.t.p., e, pelo teorema 3.20, existe f Σ-mensurável tal que $f = g$ $\tilde{\mu}$-q.t.p., de forma que $f_n \to f$ μ-q.t.p. Como $|f| \leq g\ \mu - q.t.p.$, então $f \in L^1(\mu)$.

Pela desigualdade triangular, $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2g$ e, aplicando o lema de Fatou (teorema 3.28) à função $2g - |f_n - f|$, obtemos

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &\leq \liminf \int (2g - |f - f_n|) d\mu \\ &= \int 2g d\mu + \liminf(-\int |f_n - f| d\mu) \\ &= \int 2g d\mu - \limsup \int |f_n - f| d\mu.\end{aligned}$$

Por hipótese, $\int g d\mu$ é finito e, portanto, podemos subtraí-lo dos dois lados da desigualdade, obtendo assim $\limsup \int |f - f_n| d\mu \leq 0$. Como $|f - f_n| \geq 0$ para todo n, $\int |f - f_n| d\mu \geq 0$ e, portanto, $\liminf \displaystyle\int |f - f_n| d\mu \geq 0$, de forma que $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$.

Aplicando o teorema 3.35 e aplicando o limite, chegamos na desigualdade

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\int f d\mu - \int f_n d\mu\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\int f - f_n d\mu\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ existe, pois $|f_n| \leq g$, temos que $\displaystyle\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. □

Teorema 3.38. *Seja $\{f_n\} \subset L^1$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \int |f_i| d\mu < \infty$. Então $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge em quase todo ponto para uma função em L^1, e $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i d\mu$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.25, $\displaystyle\int \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \int |f_i| < \infty$, então a função $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$ está em L^1. Em particular, pelo teorema 3.30, g é finito em quase todo ponto e, para tais pontos, a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ converge. Além disso, tomando $g_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i$, $k \in \mathbb{N}$, temos $|g_k| \leq g$ para todo k. Assim, aplicando o teorema de convergência dominada (teorema 3.37), obtemos

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \int \lim_{k\to\infty} g_k = \lim_{k\to\infty} \int g_k = \lim_{k\to\infty} \int \sum_{i=1}^{k} f_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i.$$

□

Teorema 3.39. *Se $f \in L^1(\mu)$ e $\epsilon > 0$, existe uma função simples integrável $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}$ tal que $\int |f - \phi| d\mu < \epsilon$, isto é, o conjunto das funções simples integráveis é denso em L^1 com a métrica L^1.*

Demonstração. Seja $\{\phi_n\}$ como no teorema 3.18. Então $\int |\phi_n - f| d\mu < \epsilon$ para n suficientemente grande pelo teorema da convergência dominada (teorema 3.37), já que $|\phi_n - f| \leq 2|f|$, pela desigualdade triangular. □

Teorema 3.40. *Suponha que $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $-\infty < a < b < \infty$, e que $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{C}$ é integrável para cada $t \in [a, b]$. Seja $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$.*

a) *Suponha que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Se $\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ para todo $x \in X$, então $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$.*

b) *Suponha que $\partial f / \partial t$ existe e que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)$ para todo $(x, t) \in X \times [a, b]$. Então F é diferenciável e $F'(t) = \int (\partial f / \partial t)(x, t) d\mu$.*

Demonstração.

a) Basta aplicar o teorema de convergência dominada em $f_n(x) = f(x, t_n)$ para qualquer sequência $\{t_n\}$ em $[a, b]$ convergindo para t_0.

b) Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{n \to \infty} h_n(x) \text{ onde } h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0},$$

onde $\{t_n\}$ é uma sequência que converge para t_0. Segue que $\partial f / \partial t(x, t_0)$ é mensurável, por ser limite de funções mensuráveis, e, pelo teorema do valor médio,

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x),$$

Aplicando agora o teorema de convergência dominada (teorema 3.37) temos

$$F'(t_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \to \infty} \int h_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu.$$

□

No caso especial em que a medida utilizada é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, chamamos essa integral de **integral de Lebesgue**. Vamos apresentar um teorema que relaciona a integral de Riemann com a integral de Lebesgue.

Teorema 3.41. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.*

a) *Se f é Riemann integrável, então f é Lebesgue mensurável e* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f dm.$

b) *f é Riemann integrável se, e somente se, $\{x \in [a,b] : f$ é descontínua em $x\}$ tem medida nula.*

Demonstração.

a) Suponha que f é Riemann integrável. Para cada partição P defina

$$G_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \mathcal{X}_{(t_{i-1},t_i]}, g_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathcal{X}_{(t_{i-1},t_i]}$$

onde $M_i = \sup f((t_{i-1}, t_i))$ e $m_i = \inf f((t_{i-1}, t_i))$. Dessa forma, temos $S_P f = \int G_P d\mu$ e $s_P f = \int g_P d\mu$. Existe uma sequência $\{P_k\}$ de partições tais que $P_k \subset P_{k+1}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} S_{P_k} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{P_k} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (teoremas C .2 e C .4). Tomando $G = \lim\limits_{k\to\infty} G_{P_k}$ e $g = \lim\limits_{k\to\infty} g_{P_k}$, temos que G e g são mensuráveis, pelo teorema 3.10. Como f é uma função limitada, G e g também o são e, pelo teorema de convergência dominada (teorema 3.37),

$$\int G d\mu = \int_a^b f(x)dx = \int g d\mu.$$

Logo, $\int (G-g)d\mu = 0$ e $G = g$ q.t.p. pelo teorema 3.26 e, como $g \leq f \leq G$, $G = f$ q.t.p. Assim, pelo teorema 3.36,

$$\int_a^b f dx = \int G_d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu.$$

b) Vamos provar aqui que se $\{x \in [a,b] : f$ é descontínua em $x\}$ possui medida nula, então f é Riemann integrável. É fácil ver que se f é contínua em x, então $G(x) = g(x)$. Assim, se f é contínua em quase todo ponto, $G - g = 0$ em quase todo ponto e, portanto, $0 = \displaystyle\int (G-g)d\mu = \int G d\mu - \int g d\mu = \overline{I}_a^b(f) - \underline{I}_a^b(f)$.

□

REFERÊNCIAS

CABRAL, M. A. P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. 3. ed. [Rio de Janeiro]: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 9.

COELHO, E. R. de S. Introdução à integral de lebesgue. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande. 2012. Citado na página 25.

COOKE, R. **Solutions Manual to Walter Rudin's Principles of Mathematical Analysis**. [Burlington]: University of Vermont, 1976. Citado na página 44.

FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern techniques and their applications**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. Citado 4 vezes nas páginas 6, 9, 25 e 28.

ISNARD, C. **Introdução à medida e integração**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018. (Projeto Euclides). Citado na página 6.

LANDIM, C. Introduction: a non-measurable set. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=llnNaRzuvd4. Acesso em 04 de novembro. 2021. Citado na página 45.

LIN, Y.-F.; LIN, S.-Y. T. **Set Theory with Applications**. 2. ed. Florida: Mariner Publishing Company, Inc., 1981. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 8.

MATHONLINE. The lebesgue measurability of intervals. Disponível em: http://mathonline.wikidot.com/the-lebesgue-measurability-of-intervals. Acesso em 28 de outubro. 2021. Citado na página 25.

MUNKRES, J. R. **Topology: a first course**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975. Citado na página 11.

RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 28, 44 e 46.

APÊNDICE A – TEOREMA

Para demonstrar o exemplo 2.13, utilizamos o fato de que todo aberto em $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos abertos. Esse teorema é o exercício 30 do capítulo 2 do livro (RUDIN, 1976) e a resolução se encontra no livro (COOKE, 1976).

Teorema A .1. *Todo conjunto aberto de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.*

Demonstração. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}$. Vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ em U. Para todos $x, y \in U$, diremos que $x \sim y$ se, e somente se, o intervalo $[\min(x,y), \max(x,y)]$ está contido em U. De fato, $\sim$ é uma relação de equivalência, pois:

a) $x \sim x$, já que $[x,x] = \{x\} \subset U$ para todo $x \in U$;

b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, já que $\min(x,y) = \min(y,x)$ e $\max(x,y) = \max(y,x)$ e, portanto, $[\min(y,x), \max(y,x)] = [\min(x,y), \max(x,y)] \subset U$;

c) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $[\min(x,z), \max(x,z)] \subset [\min(x,y), \max(x,y)] \cup [\min(y,z), \max(y,z)] \subset U$.

Assim, como $\sim$ é uma relação de equivalência em U, U pode ser escrito como a união disjunta de classes de equivalência. Vamos provar agora que cada classe de equivalência é um intervalo aberto.

Para mostrar isso, tome $x \in U$ e defina $A_x = \{z : [z,x] \subset U\}$ e $B_x = \{z : [x,z] \subset U\}$ e defina $a_x = \inf A_x$ e $b_x = \sup B_x$. Se $[x]$ é a classe de equivalência de x, então é claro que $(a_x, b_x) \subset [x]$. Suponha agora que $z \in [x]$. Então $[x,z] \subset U$ ou $[z,x] \subset U$ e, em ambos os casos, $z \in A_x$ ou $z \in B_x$, de forma que $a_x \leq z \leq b_x$. Repare, no entanto, que a igualdade não pode ocorrer em nenhum dos casos, senão z não seria ponto interior. Portanto, $z \in (a_x, b_x)$.

A enumerabilidade decorre do fato de que todo intervalo possui um número racional em seu interior, de forma que toda classe de equivalência possui um racional. □

APÊNDICE B – O CONJUNTO DE VITALI

Como falamos neste trabalho, nem sempre é possível definir uma medida para todos os subconjuntos de um espaço qualquer. Em particular, não é possível definir a medida de Lebesgue em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para provar tal afirmação, vamos apresentar o conjunto de Vitali. As demonstrações e definições dessa seção se encontram em (LANDIM, 2021).

Definição B .1 (Conjunto de Vitali)**.** Seja $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in \mathbb{Q}$. Agora, tome Λ como o conjunto formado por exatamente um elemento z de cada classe de equivalência tal que $z \in [0,1]$ (essa definição é possível pelo axioma da escolha). Chamamos Λ de conjunto de Vitali.

Lema B .2. *Seja Λ o conjunto de Vitali. Se $q, p \in \mathbb{Q}$ e $q \neq p$, então $(\Lambda + q) \cap (\Lambda + p) = \emptyset$.*

Demonstração. Vamos provar a contrapositiva da afirmação. Suponha que exista $x \in (\Lambda + p) \cap (\Lambda + q)$. Então existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x = \alpha + p$ e existe também $\beta \in \Lambda$ tal que $x = \beta + q$. Assim, $\alpha - \beta = q - p \in \mathbb{Q}$. Mas pela construção de Λ, $\alpha = \beta$ e, portanto, $q - p = 0$. □

Teorema B .3. *Seja $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ uma medida em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Então μ não pode ter, simultaneamente, as seguintes propriedades:*

a) $\mu([a,b]) = b - a$;

b) $\mu(A) = \mu(A + r)$, *para todo* $r \in \mathbb{R}$ *e todo* $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal função exista e seja Λ o conjunto de Vitali. Considere a família de conjuntos $\{\Lambda + q\}_{q \in Q}$, onde $Q = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Como Q é enumerável, existe uma função $f : \mathbb{N} \to Q$ bijetora. Assim, tomando $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $A_n = \Lambda + f(n)$, temos uma sequência de elementos disjuntos pelo lema B .2. Como $\Lambda \subset [0,1]$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset [-1, 2]$ e, pela propriedade (b) do lema 2.25, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \mu([-1, 2]) = 3$. Logo, $\mu(\Lambda) = 0$, pois $\mu(\Lambda + p) = \mu(\Lambda)$, para todo p, por hipótese. Assim, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\Lambda + f(n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\Lambda) = 0$.

Para finalizar a demonstração, basta mostrar que $[0,1] \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ pois isso implica que $1 = \mu([0,1]) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$, o que seria um absurdo. De fato, tome $x \in [0,1]$. Pela definição de Λ, existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $x - \alpha = q \in \mathbb{Q}$. Como $x \in [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$, $q \in [-1,1]$ e, portanto, $x \in \Lambda + q \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e assim está finalizada a demonstração. □

APÊNDICE C – INTEGRAL DE RIEMANN

Vamos apresentar aqui a definição de integral de Riemann e enunciar alguns teoremas que foram utilizados no teorema 3.41. A demonstração deles pode ser encontrada em (RUDIN, 1976).

Definição C .1 (Integral de Riemann)**.** Seja $[a,b]$ um intervalo compacto. Uma partição $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$ é um conjunto finito de pontos tais que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ e, correspondente a ela, definimos

$$S_P f = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_{i-1} - t_i) \text{ e } s_P f = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_{i-1} - t_1),$$

onde $M_i = \sup f((t_{i-1}, t_i))$ e $m_i = \inf f((t_{i-1}, t_i))$. Se tomarmos o supremo e o ínfimo dessas somas sobre o conjunto de todas as partições P de $[a,b]$ temos

$$\overline{I}_a^b(f) = \inf_P S_p f \text{ e } \underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P f$$

e, se $\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$, esse valor é a integral de Riemann de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ e dizemos que f é Riemann integrável em $[a,b]$.

Teorema C .2. *Se f é Riemann integrável em $[a,b]$ se, e somente, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de forma que*

$$S_p f - s_P f < \epsilon.$$

Demonstração. Encontrada na página 124, teorema 6.6. □

Definição C .3. Se P e Q são partições de $[a,b]$ de forma que $P \subset Q$, dizemos que Q é um refinamento de P.

Teorema C .4. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$, P uma partição de $[a,b]$ e $\epsilon > 0$ dado. Se $S_P f - s_P f < \epsilon$, então para todo refinamento Q de P vale $S_Q f - s_Q f < \epsilon$.*

Demonstração. Encontrada na página 125, teorema 6.7. □