

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS — *CAMPUS* SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Singularidades em rotações de corpos rígidos: uma comparação entre Ângulos de Euler e Quatérnions

Marco Antonio Centurion Medeiros

Sorocaba
Abril, 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS — *CAMPUS* SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Singularidades em rotações de corpos rígidos: uma comparação entre Ângulos de Euler e Quatérnions

Marco Antonio Centurion Medeiros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

Sorocaba
Abril, 2022

Marco, Centurion

Singularidades em rotações de corpos rígidos: uma comparação entre Ângulos de Euler e Quaternions / Centurion Marco -- 2022.
61f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Renato Fernandes Cantão

Banca Examinadora: James Alves de Souza, Maria Lucia Pereira Antunes Silva

Bibliografia

1. Rotações de corpos rígidos. 2. Ângulos de Euler. 3. Quatérnions. I. Marco, Centurion. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - *Campus Sorocaba*
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Folha de aprovação

Marco Antônio Centurion Medeiros

**“SINGULARIDADES EM ROTAÇÕES DE CORPOS RÍGIDOS: UMA
COMPARAÇÃO ENTRE ÂNGULOS DE EULER E QUATÉRNIONS”**

Orientador



Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão

Membro 1



Prof. Dr. James Alves de Souza

Membro 2



Profª Drª Maria Lúcia Pereira Antunes

Sorocaba, 26 de abril de 2022.

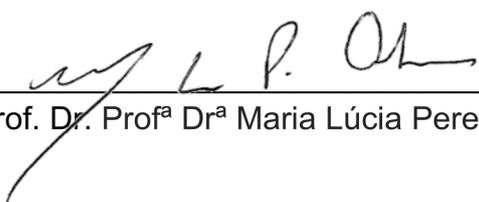


ATA DA DEFESA PÚBLICA

ATA N° 03/2022

Aos vinte e seis dias do mês de abril de 2022, por videoconferência pela plataforma do Google Meet, realizou-se a defesa pública do trabalho de Conclusão de Curso do estudante **Marco Antônio Centurion Medeiros** do Curso de Licenciatura em Física – Sorocaba, devidamente matriculado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão, Prof. Dr. James Alves de Souza e Profª Drª Maria Lúcia Pereira Antunes segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.

Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas do TCC do curso:

 _____ Prof. Dr. Renato Fernandes Cantão	Nota: 9,5
 _____ Prof. Dr. James Alves de Souza	Nota: 9,5
 _____ Prof. Dr. Profª Drª Maria Lúcia Pereira Antunes	Nota: 9,5

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **9,5 (nove inteiros e cinco décimos)**.

Sorocaba, 26 de abril de 2022.

*Em memória de meu amigo Carlos Alberto Tavares Silva,
que, enquanto conosco, me incentivou a iniciar o curso de Física.*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, Antonieta e Antonio Marcos, e minha irmã Flávia, pelo incentivo, dedicação e apoio durante toda a minha vida.

À UFSCar Sorocaba, em especial ao DFQM e todo o seu corpo docente por me garantir excelência no ensino e tantas outras lições que levarei por toda minha vida acadêmica e docente.

Ao professor Renato Fernandes Cantão por aceitar ser meu orientador, sempre muito solícito, paciente e bem humorado em nossas reuniões semanais.

Ao colega de curso e hoje amigo para vida toda, Michael de Oliveira Stavel, que me deu suporte e incentivo nas fases em que nem eu mesmo acreditava que conseguiria chegar até aqui.

*“Diante da vastidão do tempo e da imensidão do universo,
é um imenso prazer para mim dividir um planeta e uma época com você.”*
(Carl Sagan)

*“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil.
Ele a estuda porque nisso encontra prazer e ele sente prazer
porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena
ser conhecida, e a vida não valeria a pena ser vivida.”*
(Henri Poincaré)

Resumo

A determinação de movimentos tridimensionais permite não somente a previsão de trajetórias de objetos, mas também seu controle. O movimento de rotação de corpos rígidos, foco da exploração deste trabalho, pode ser parametrizado por meio de diferentes ferramentas. A técnica formulada por Leonhard Euler e que leva seu nome, é amplamente utilizada para precisar a atitude de objetos no espaço. Contudo, para algumas ocasiões, o Teorema de Rotações de Euler inviabiliza essa parametrização pois apresenta singularidades matemáticas que resultam na perda do controle do corpo. Como não são todos os casos singulares decorrentes de fatores físicos, é possível tratar destes casos lançando mão de outro artifício matemático para análise, conhecido como Quatérnions, e que apesar de ser uma forma menos intuitiva, não apresenta singularidades analíticas. Neste trabalho apresentaremos uma exploração para ambos os métodos e conseguinte comparação, a fim de encontrar as formas de conversão de uma ferramenta para outra, e como cada uma se comporta quando surgem singularidades. Por fim, serão simuladas três situações com rotações diferentes de um giroscópio simétrico, sendo a primeira uma situação livre de indeterminações, outra próxima de condição singular e uma exatamente onde a singularidade acontece, com a finalidade de sinalizar as diferenças de comportamento dos Ângulos de Euler e dos Quatérnions.

Palavras-chave: Rotações, Ângulos de Euler, Quatérnions.

Abstract

The determination of three-dimensional movements allows not only the prediction of objects trajectories, but also their attitude control. The rotational movement of rigid bodies, focus of this work, can be parameterized through means of several tools. The technique formulated by Leonhard Euler and that bears his name, is widely used to specify the attitude of objects in tridimensional space. However, for some occasions, Euler's Theorem of Rotations makes this parameterization unfeasible because it presents mathematical singularities that result in the loss of control of the body. As not all singular cases are due to physical factors, it is possible to deal with these cases taking hold of another mathematical artifice for analysis, known as Quaternions, and that despite being a less intuitive way, it does not present analytical singularities. In this work, we will present an exploration for both methods and consequent comparison, in order to find the forms of conversion from one tool to another, and how each one behaves when singularities arise. Finally, three situations with different rotations of a symmetric gyroscope will be simulated, being the first one an indeterminacy-free situation, another close to singular condition and one exactly where the singularity happens, in order to signal the differences in the behaviour of Euler Angles and Quaternions.

Keywords: Rotations, Euler angles, Quaternions.

1 Introdução

Controle de atitude é o nome que se dá ao emprego de diversas técnicas de realização de manobras de corpos rígidos em relação a um referencial. Amplamente utilizado, por exemplo em dispositivos aeronáuticos, astronáuticos, controle de braços robóticos, controle de navegação, criação de jogos computacionais que simulam espaços tridimensionais, é determinante para que os movimentos de um corpo rígido sejam realizados corretamente conforme os objetivos aos quais foram destinados.

Já é conhecido na literatura sobre o tema que, para o movimento de rotações, o Teorema de Rotações de Euler é bastante eficiente e intuitivo, sendo amplamente utilizado em diversas áreas (SANTOS *et al.*, 2011). Contudo, a parametrização a partir dos ângulos de Euler pode apresentar singularidades dependendo das operações matemáticas que forem realizadas.

Por exemplo, para a dinâmica de satélites são necessários sensores de posicionamento, que atualizam constantemente os parâmetros de atitude do objeto controlado e permitem a tomada de decisão das manobras subsequentes. Estas, então, são efetuadas pelos atuadores embarcados, que aplicam torque e, através de movimentos de rotação ou translação, reorientam o corpo do objeto em movimento. Para que todo este caminho lógico entre o reconhecimento do ambiente e o redirecionamento do veículo seja realizado, diversos algoritmos permitem a realização de cada etapa. Neste trabalho focamos somente nas parametrizações dos movimentos de rotações indicados para a reorientação de um objeto. Todas as etapas descritas acima, são similarmente seguidas para as demais aplicações em que se deve manter um controle na atitude dos corpos.

Os comandos das rotações enviados ao corpo devem ser interpretados computacionalmente com o intuito de que o movimento possa ser efetuado adequadamente. Isto posto, a escolha de qual parametrização será utilizada não deve apresentar indefinições matemáticas, a efeito de que os comandos enviados ao veículo sejam traduzidos nos movimentos necessários, independente de quais sejam.

Sequências de rotações para a descrição da orientação de um objeto é um dos tópicos centrais na literatura voltada para a modelagem na robótica, aeronáutica ou navegação, conforme apresenta Nolze (2015). Em aprofundamento desta constatação, Biasi e Gattass (2007) questionam qual parametrização deve ser utilizada, apresentando duas das mais conhecidas maneiras de se parametrizar rotações: o já citado *Teorema de Rotações de Euler* e os *Quatérnions*.

Igualmente conhecida, porém menos intuitiva, a parametrização de Quatérnions permite realizar os mesmos cálculos que o Teorema de Rotações de Euler para as mesmas situações, sem apresentar singularidades em sua formulação matemática. Ao evitar esta situação, os Quatérnions podem apresentar uma redução no custo computacional para o controle de atitude, uma vez que sua álgebra é mais simplificada que a usada nos ângulos de Euler.

2 Objetivos

Em sistemas de navegação aérea, marítima e astronáutica, controle de posicionamento de braços robóticos e diversas outras situações onde a posição dos objetos devem ser definidas matematicamente, as parametrizações devem ser precisas e bem modeladas, independentemente da manobra que incorra. Sob estas circunstâncias, o método o qual se elenca para operar o controle de atitude, deve condizer às suas diversas necessidades.

Nosso objetivo neste trabalho é explorar duas parametrizações de sequência de rotações finitas de corpos rígidos, o Teorema de Rotações de Euler e os Quatérnions, comparar suas características e apresentar como cada uma se comporta quando as situações de singularidades surgem.

Ao final do trabalho, simularemos três testes diferentes envolvendo o movimento livre de um giroscópio perfeitamente simétrico. O primeiro caso parte do movimento do giroscópio em que as suas condições iniciais não resultam em singularidades, o segundo em condições iniciais muito próximas do valor que resultam nas singularidades e, por fim, com condições iniciais exatamente onde ocorrem as singularidades. Em posse dos resultados, compararemos como as duas parametrizações se comportaram sob essas três condições iniciais.

3 Metodologia

Realizaremos neste trabalho a apresentação teórica do Teorema de Rotações de Euler e dos Quatérnions, seguida de simulações numéricas aplicadas, ilustrando cada uma das abordagens.

Inicialmente serão descritos os sistemas de referências tridimensionais e os sistemas de coordenadas. Com estes conceitos introduzidos, é possível correlacioná-los com o movimento de um corpo rígido, com a finalidade de viabilizar um sistema parametrizável.

Dos movimentos relativos ao referencial previamente determinado, o de rotação será o foco deste trabalho. Será assim explorado o conceito de rotações de corpos rígidos, suas interpretações físicas e matemáticas, para que desta forma o Teorema de Rotações de Euler e os Quatérnions apareçam naturalmente como tema de discussão.

Desde as definições básicas até às rotações de corpos rígidos, serão apresentadas as construções matemáticas para ambas as parametrizações, e então discutiremos suas vantagens e desvantagens. Por fim, definiremos o que são as singularidades que o Teorema de Rotações de Euler não são capazes de resolver e como os Quatérnions são aplicados para solucioná-las.

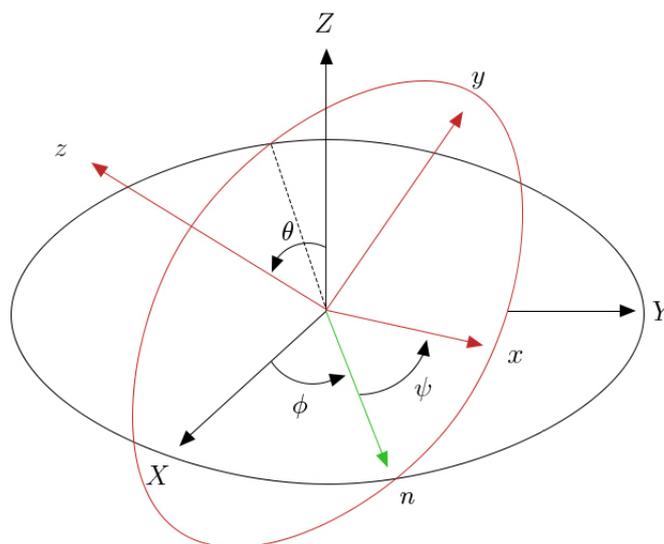
Com o intuito de comparar e verificar vantagens e desvantagens de ambas as parametrizações, ao final do trabalho realizaremos integrações numéricas através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, simuladas em linguagem *Python*, para condições iniciais que não geram singularidade, para condições próximas às singularidades e para condições iniciais exatamente onde a singularidade ocorre.

4 Revisão Bibliográfica

Corpos rígidos que realizam um movimento de rotação em torno de um ponto em um referencial tridimensional, coincidente a algum ponto no volume do corpo ou não, o fazem em relação a um eixo no espaço. Foi o que estabeleceu Leonhard Euler em 1775, no que pode ser o primeiro teorema de ponto fixo registrado na história. Em seus estudos, Euler considerou uma esfera rígida que, ao rotacionar em torno de seu centro, faz com que exista um eixo de rotação no espaço que sobrepõe seu diâmetro. Em consequência ao que postulou Euler, é possível concluir que a composição de rotações em diversos eixos são equivalentes a uma única rotação, tomando o ponto inicial e final do movimento. Fatos históricos acerca dos desenvolvimentos matemáticos de Leonhard Euler na parametrização de rotações em corpos rígidos podem ser encontradas em Palais e Palais (2007) e Joseph (2020).

Nas análises de orientações relativas com sistemas de coordenadas tridimensionais e ortogonais entre si, ao se rotacionar um destes sistemas coordenados em relação a outro que se mantém fixo, podem ser definidos até 3 ângulos entre os eixos destes sistemas. Estes ângulos recebem o nome de Ângulos de Euler, visíveis na Figura 1, e são amplamente utilizados para o estudo da cinemática e dinâmica de corpos rígidos, conforme exposto por Pio (1966) e Landau e Lifshitz (1976).

Figura 1 – Espaço xyz rotacionado em relação ao espaço fixo XYZ . Os ângulos de Euler estão denotados por ϕ na primeira rotação em torno de Z , θ na segunda rotação em torno de n e ψ na última rotação em torno de z .



Fonte: Lage (2020).

A cinemática inversa trata da definição das posições de corpos ou articulações nos movimentos de um corpo rígido, ou seja, a definição de seu ângulo de rotação partindo das velocidades angulares. Se parametrizada por meio dos ângulos de Euler, a cinemática inversa pode apresentar a existência de indefinições matemáticas devido à dependências de funções trigonométricas inversas. Estas

indefinições recebem o nome de singularidades, e conforme apresentadas no trabalho de Jambersi (2016), interferem na modelagem matemática da definição da atitude destes corpos, uma vez que passam a apresentar alterações bruscas e inverificáveis na prática, segundo o mesmo autor.

Estas singularidades ocorrem em determinadas condições iniciais e poderiam ser evitadas, casos estas condições fossem diferentes ou ainda realizando variações na sequência de rotações segundo evidencia Singla, Mortari e Junkins (2004). Contudo, outras parametrizações permitem que quaisquer cálculos sejam efetuados. Neste trabalho, será explorada a alternativa dos Quatérnions.

Se operados diretamente com eixos cartesianos e ângulos para rotações de corpos rígidos por meio da modelagem dos ângulos de Euler, expressões extensas podem emergir, dificultando a compreensão, conforme manifesta Biasi e Gattass (2007). De acordo com o citado anteriormente, Quatérnions podem ser considerados uma alternativa para parametrizações destas rotações no espaço.

Por meio de uma generalização da noção de rotação bidimensional com uso de números complexos, examinada conceitualmente por Biasi e Gattass (2007), os quatérnions foram inicialmente explorados por William Rowan Hamilton (1805-1865), que em 1843 abriu caminho para o que seria chamado posteriormente de *álgebra quaterniana*. Detalhes históricos podem ser encontrados no trabalho de Voight (2020).

O desenvolvimento de Hamilton permitiu que os números complexos fossem generalizados para as três dimensões espaciais, sendo bastante adequados para descrever transformações de corpos no espaço, além de serem vitais para a álgebra de Clifford, segundo apresentam André Schneider de Oliveira *et al.* (2011) e Voight (2020). Diversas outras explorações no campo da matemática pura foram desenvolvidas por mais autores, como a álgebra de William Kingdon Clifford, os quatérnions hiperbólicos de Alexander MacFarlane entre outros, que são apresentados em profundidade em Voight (2020).

5 Sistemas de Referências

Para que seja possível analisar a progressão nos movimentos de um objeto, um sistema de mapeamento que identifica as mudanças de posição deste precisa contar com instrumentos que permitam medir a progressão do tempo. Igualmente às formas com as quais medem-se distâncias com intervalos iguais, a passagem temporal precisa de um *relógio* que viabilize a medição de tempo, marcando intervalos iguais de tempo, permitindo ao observador parametrizar suas relações mecânicas (NUSSENZVEIG, 2013).

Neste ambiente, é preciso então que se assuma um espaço isotrópico, ou seja, que não haja quaisquer orientações privilegiadas ou que todas as direções sejam equivalentes (ARFKEN; WEBER, 2005), além de que as leis da Mecânica Clássica estejam bem definidas, ou seja, determinar as relações entre as entidades físico-matemáticas dentro do campo da cinemática, visto que para as leis de Newton, é fundamental que algo só está em movimento ou em repouso se comparado a

outro objeto, sistema de referência chamado de inercial (FREZZA, 2011).

Ao se analisar um fenômeno físico, é necessária a admissão de um sistema de coordenadas que atua como um ambiente de fixação de pontos em suas coordenadas, para viabilizar a percepção de distâncias e ângulos (NUSSENZVEIG, 2013). A escolha de um sistema de coordenadas varia conforme as necessidades do estudo, em que sua descrição passa por definir a posição da origem do sistema, da definição do plano XY , em que a direção principal corresponde à direção do eixo X , e a direção do eixo Z indica qual a orientação positiva. A direção do eixo Y é definida para se obter um sistema de eixos coordenados dextrógiro (FERNANDES; ZANARDI, 2018).

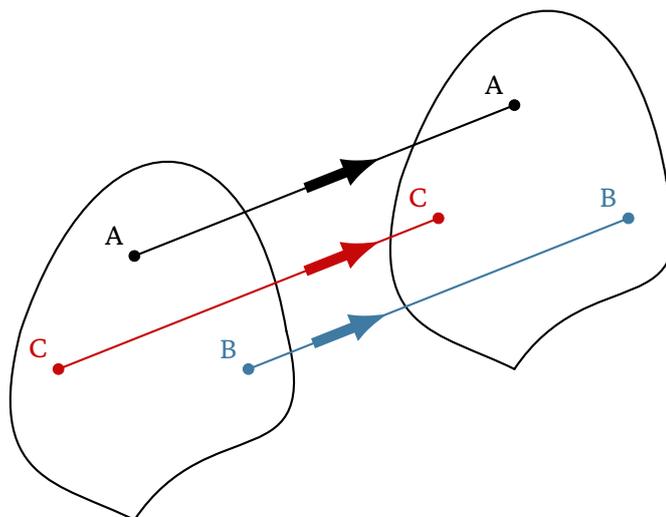
6 Movimento de um Corpo Rígido

O movimento mecânico consiste do movimento de corpos, ou das partes que compõem um corpo e seus movimentos relativos (SAVELYEV; LEIB, 1989).

Dadas estas considerações, pode-se caracterizar um corpo rígido como sendo uma entidade física tridimensional e indeformável. Em outras palavras, diz-se que as partes que o compõem têm suas alterações negligenciadas em todas as três dimensões espaciais (NUSSENZVEIG, 2013). Esta definição é obviamente uma idealização, uma vez que não existem tais corpos resistentes a quaisquer forças. Contudo, para além de observar sua possível capacidade de deformação, uma força pode alterar a posição deste corpo, movimentando-o no espaço (SAVELYEV; LEIB, 1989).

Assim sendo, a *translação* é o movimento que ocorre quando todo o corpo, compreendido no espaço cartesiano, se desloca de forma que todos os seus pontos tracem linhas paralelas entre si e percorram as mesmas distâncias, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Translação de um corpo rígido.

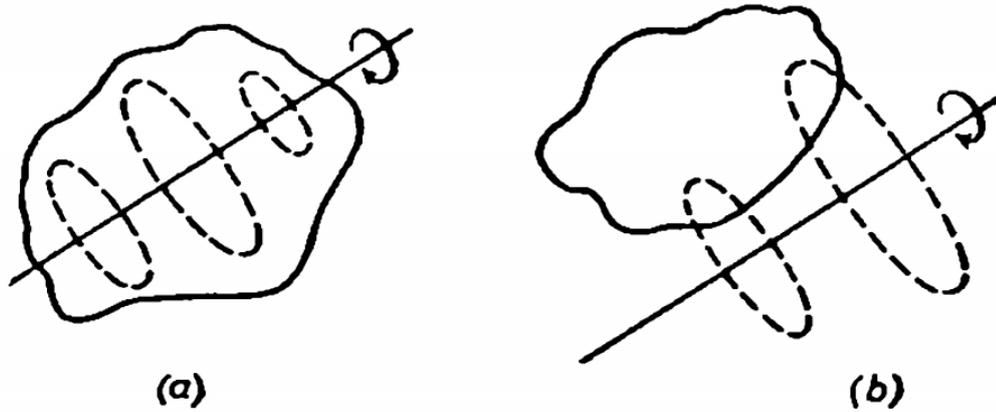


Fonte: Feito pelo autor.

Já por *rotação* compreende-se a movimentação do corpo em torno de um eixo, seja este coincidente ou não ao corpo (Figura 3). Nesta ocasião todos os pontos que compõem o corpo em rotação,

movem-se em círculos concêntricos a este eixo (SAVELYEV; LEIB, 1989).

Figura 3 – Rotação em torno de um eixo fixo, coincidente ao corpo em (a) e não coincidente ao corpo em (b).



Fonte: Savelyev e Leib (1989).

A descrição destes movimentos é totalmente dependente das considerações anteriores, que implicam a definição prévia de um sistema de referências em que se encontra o corpo.

7 Ângulos de Euler

A escolha de onde estará posicionado o eixo coordenado solidário ao corpo pode ser feita conforme as necessidades de parametrização. Por vezes, este é colocado convenientemente no centro de massa do corpo e indicado pelos eixos x_1 , y_1 e z_1 (LANDAU; LIFSHITZ, 1976).

As análises da dinâmica de um corpo rígido baseiam-se no fato de que a orientação relativa de dois sistemas ortogonais arbitrários deve ser especificada por no mínimo três ângulos (PIO, 1966). Comparados aos eixos fixos X , Y e Z , movimentos de rotações deste corpo e de seu sistema coordenado correspondente, observa-se a geração de ângulos conforme a Figura 1.

Leonhard Euler, precursor deste modelo de parametrização, fez uso das condições de ortonormalidade para provar que um conjunto de três ângulos é suficiente para efetuar as transformações necessárias (PIO, 1966). A ideia parte da orientação relativa de dois sistemas coordenados, em que seus versores, ou vetores unitários, são indicados pelas letras \hat{i} , \hat{j} , e \hat{k} , com suas direções e sentidos coincidindo com aquelas dos eixos x , y e z . As equações que relacionam os versores do sistema de coordenadas rotacionado com o original, são:

$$\hat{i}_2 = \hat{i}_1(\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2) + \hat{j}_1(\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_2) + \hat{k}_1(\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2), \quad (1)$$

$$\hat{j}_2 = \hat{i}_1(\hat{i}_1 \cdot \hat{j}_2) + \hat{j}_1(\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2) + \hat{k}_1(\hat{k}_1 \cdot \hat{j}_2), \quad (2)$$

$$\hat{k}_2 = \hat{i}_1(\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_2) + \hat{j}_1(\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_2) + \hat{k}_1(\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2), \quad (3)$$

em que a notação com índice 2 trata da base rotacionada, enquanto a indicada pelo número 1 é a original. Os produtos escalares das equações são os cossenos diretores da base em sua posição final comparada à posição inicial.

Todas as características da ortonormalidade dos dois sistemas coordenados podem ser definidas da seguinte forma

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Destas restrições da ortonormalidade acerca do produto escalar, definem-se 6 equações de um conjunto de nove cossenos diretores, partindo da Equação (1), que possuem a forma:

$$\hat{i}_2 \cdot \hat{i}_2 = 1 = (\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2)^2 + (\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_2)^2 + (\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2)^2,$$

e de forma análoga para os demais:

$$\begin{aligned} \hat{j}_2 \cdot \hat{j}_2 = 1 &= (\hat{i}_1 \cdot \hat{j}_2)^2 + (\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2)^2 + (\hat{k}_1 \cdot \hat{j}_2)^2, \\ \hat{k}_2 \cdot \hat{k}_2 = 1 &= (\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_2)^2 + (\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_2)^2 + (\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2)^2, \\ \hat{i}_2 \cdot \hat{j}_2 = 0 &= (\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2)(\hat{i}_1 \cdot \hat{j}_2) + (\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_2)(\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2) + (\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2)(\hat{k}_1 \cdot \hat{j}_2), \\ \hat{j}_2 \cdot \hat{k}_2 = 0 &= (\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2)(\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_2) + (\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_2)(\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_2) + (\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2)(\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2), \\ \hat{k}_2 \cdot \hat{i}_2 = 0 &= (\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_2)(\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2) + (\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_2)(\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_2) + (\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_2)(\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_2). \end{aligned}$$

O efeito dessas equações é definir um conjunto de nove cossenos diretores em termos dos 3 ângulos independentes.

Em um sistema cartesiano tridimensional, em que a “regra da mão direita” é levada em consideração, com três ângulos definidos em rotações positivas, existem ao todo 12 diferentes sequências para os ângulos de Euler, todas equivalentes.

Estas 12 sequências devem-se às rotações consecutivas em cada um dos ângulos, uma vez que uma rotação só é considerada completa se acontece ao concluir um movimento em um dos eixos e iniciar em algum dos outros dois, independente da ordem que isso ocorra. A implicação disso está no grau de liberdade em cada momento que se rotaciona. Na primeira rotação há 3 eixos disponíveis, ou seja, 3 possibilidades, na segunda e terceira rotações esta quantidade se reduz a 2, resultando num total de $n = 3 \times 2 \times 2 = 12$.

A sequência da escolha destes ângulos pode ser feita com as configurações apresentadas na Tabela 1, em que as sequências de rotações apresentadas nas duas primeiras colunas são conhecidas como conjunto simétrico de sequência de rotações (SINGLA; MORTARI; JUNKINS, 2004).

Tabela 1 – As doze possibilidades de rotações consecutivas dos ângulos de Euler. Em destaque a sequência que será usada no exemplo da Seção 7.1 e pode ser observada na Figura 1.

xyx	zyz	xyz	yzx
xzx	zxz	xzy	zxy
yxy	zyz	yxz	zyx

Fonte: Adaptado de Pio (1966)

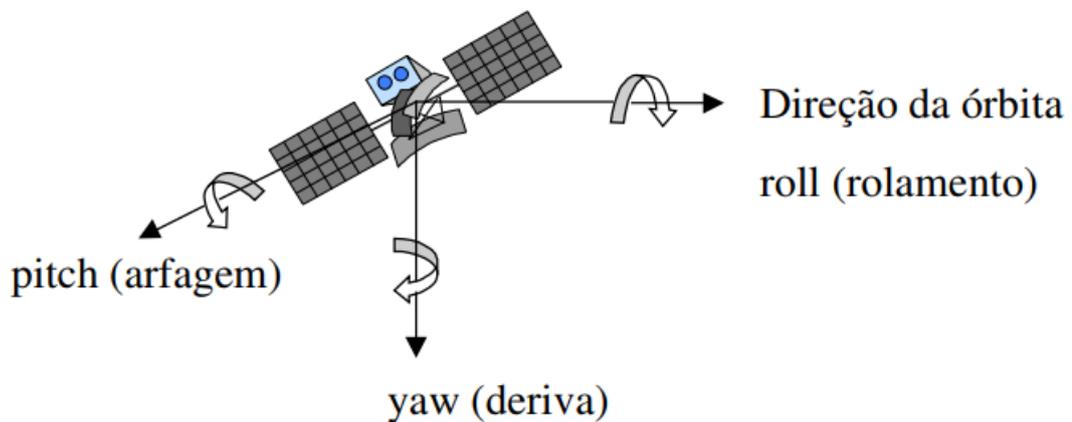
Existem problemas relacionados às sequências de rotações, como o *Gimbal Lock*, que é uma perda de grau de liberdade de movimento, devido ao alinhamento de eixos. Este pode ser um sério problema de controle de atitude em aeronáutica e robótica. Mais detalhes podem ser encontrados em (SILVA, 2014).

A escolha de qual eixo rotacionará varia conforme a natureza do problema. É bastante comum encontrar na literatura as rotações do tipo *zxz* e *zyz* por convenção, geralmente para tratar de problemas de navegação (PIO, 1966).

Cada ângulo gerado após as rotações deve ser identificado individualmente. Suas denominações variam conforme os autores. Por exemplo, Pio (1966) faz uso de α , β e γ , enquanto Biasi e Gattass (2007) e Singla, Mortari e Junkins (2004) utilizam θ_1 , θ_2 e θ_3 . Já outros autores, dentre eles Nolze (2015), Souza e Filho (2009), Jambersi e Silva (2016) e Fonseca, Prado e Zanardi (2010) indicam os ângulos de Euler como ψ , θ e ϕ . Esta última notação será a utilizada neste trabalho.

Para além das diferentes notações, ainda existem formas diversas de denominar cada ângulo conforme a área de aplicação. Para controle de orientação de aeronaves, sensoriamento remoto e controle de atitude de satélites artificiais, são denominados *roll* (rolamento), *pitch* (arfagem) e *yaw* (deriva) conforme NASA (2008) e Figueiredo (2005) e podem ser melhor compreendidos através da Figura 4.

Figura 4 – Ângulos de Euler em atitude de satélites artificiais.



Fonte: Adaptado de Figueiredo (2005).

As denominações e os ângulos relacionam-se conforme a Tabela 2.

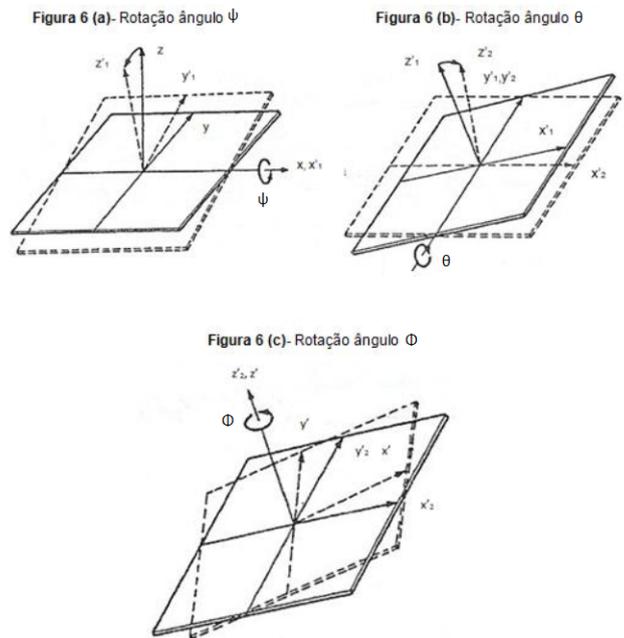
Tabela 2 – Relação dos ângulos de Euler com outras nomenclaturas.

ψ	θ	ϕ
<i>roll</i>	<i>pitch</i>	<i>yaw</i>
ω	$-\alpha$	κ

Fonte: Adaptado de Silva (2014).

As rotações e os ângulos de Euler podem ser observadas individualmente na Figura 5, em que as rotações obedecem o sentido dextrógiro ou anti-horário quando de frente para a origem do sistema.

Figura 5 – Rotações com Ângulos de Euler.

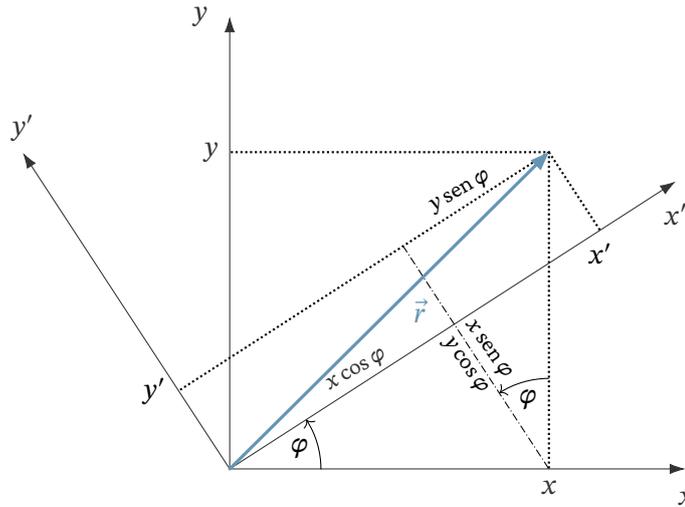


Fonte: Adaptado de Silva (2014).

7.1 Matrizes de Rotação

Para a dedução das matrizes que compõem as rotações de corpos rígidos, considera-se uma situação bidimensional, assumindo um plano isotrópico, ou seja, onde não existam direções preferenciais, ou que estas sejam todas equivalentes. Neste plano, encontra-se um par de eixos coordenados x e y que geram um plano e um vetor \vec{r} o qual independe destas descrições matemáticas. Tomando um segundo sistema de coordenadas x' e y' rotacionado em sentido anti-horário em relação ao anterior, define-se um ângulo φ , como mostra a Figura 6 (ARFKEN; WEBER, 2005).

Figura 6 – Rotação dos eixos coordenados x e y de um ângulo φ .



Fonte: Adaptado de Arfken e Weber (2005).

Dada a configuração apresentada pela Figura 6, é possível encontrar uma relação entre sistemas coordenados que parametrizam o vetor \vec{r} (ARFKEN; WEBER, 2005). Após a rotação dos sistemas por um ângulo de φ , encontra-se as componentes do vetor \vec{r} para x' e y' :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

De (5), convertendo para notação matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6)$$

que é parte característica de todas as rotações que serão desenvolvidas considerando casos tri-dimensionais. É importante observar que a matriz de rotação R é ortogonal, ou seja, $RR^T = I$, de onde conclui-se que $R^{-1} = R^T$. Assim, pode-se também escrever

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}}_{R^T=R^{-1}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Ao comparar um sistema de coordenadas fixo O_{xyz} com um segundo sistema coordenado rotacionado $O'_{x'y'z'}$, pode-se observar os três ângulos gerados, conforme apresenta a Figura 1. A ordem com que acontecem as rotações não é comutativa, portanto a descrição a seguir é condizente com a Figura 1 e caso qualquer rotação fosse posta em ordem diferente a disposição dos termos da matriz de rotação, ao fim das rotações, seria outra.

Exemplificando a álgebra matricial para a sequência zxz (em destaque na Tabela 1), vamos inicialmente supor que o sistema $O'_{x'y'z'}$ rotacionará em torno do eixo z , ortogonalmente ao plano

xy , em que z e z' são coincidentes. A notação matricial desta primeira rotação com o ângulo euleriano ϕ para os três eixos é (SILVA, 2014):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{z,\phi}^T} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (8)$$

e pode ser indicada pela relação

$$B_0 = T_{z,\phi}^T B_1, \quad (9)$$

onde $B_0 = [x, y, z]^T$ e $B_1 = [x', y', z']^T$.

A seguir, a rotação se dará em torno do eixo x' e o ângulo euleriano indicado será o θ . Analogamente ao indicado em z para os cossenos diretores (8), a matriz encontrada para a rotação no entorno de x' é:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{T_{x',\theta}^T} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (10)$$

representada por

$$B_1 = T_{x',\theta}^T B_2, \quad (11)$$

com $B_2 = [x'', y'', z'']$. Por fim, ao rotacionar a base em torno de z'' com ângulo euleriano indicado por ψ , estará completa a rotação.

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{z'',\psi}^T} \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} \quad (12)$$

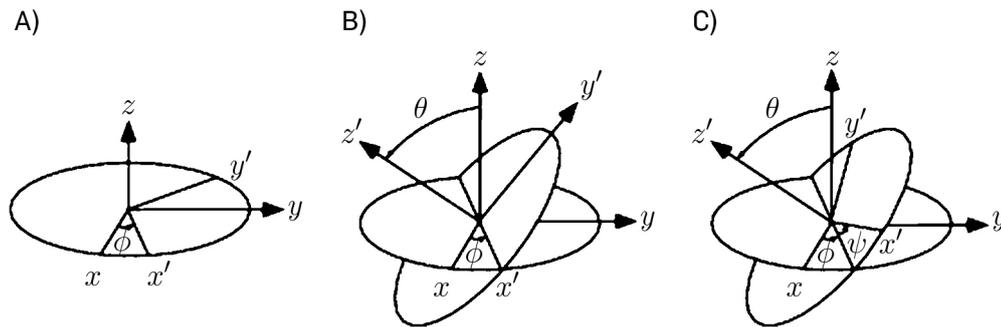
denotada por

$$B_2 = T_{z'',\psi}^T B_3, \quad (13)$$

onde $B_3 = [x''', y''', z''']^T$.

As sucessivas rotações indicadas pelas matrizes (8), (10) e (12) deste exemplo, são parte de uma das possíveis sequências e podem ser observadas na Figura 7.

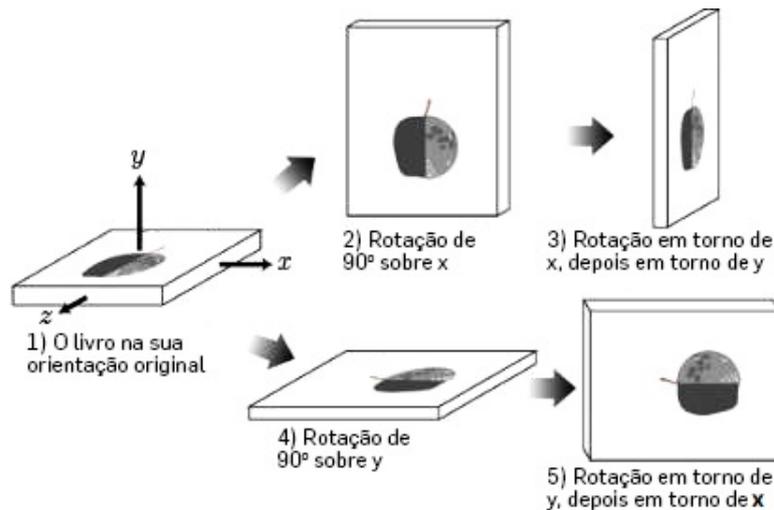
Figura 7 – Rotações individuais compondo a rotação zxz , indicada pelas matrizes (8), (10) e (12).



Fonte: Lage (2020).

A não comutatividade das rotações em uma dada sequência finita pode ser visualizada de forma mais intuitiva ao comparar o ponto inicial e o resultado de rotações em 90° para ângulos trocados, como mostra a Figura 8 (LAGE, 2020).

Figura 8 – Não comutatividade de rotações finitas.



Fonte: Lage (2020).

Nota-se que ao comutar as rotações entre os eixos x e y , o objeto conclui seu movimento em uma atitude completamente diferente.

Cada rotação em cada eixo possui sua matriz, conforme (14), (15) e (16)

$$T_{z,\phi}^T = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$T_{x',\theta}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (15)$$

e

$$T_{z'',\psi}^T = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

As transformações permitidas pelas matrizes de rotações podem ser apontadas de forma direta, ou seja, sem passar por cada matriz em cada eixo isoladamente. Isso se dá através de seu produto, respeitando a ordem em que as rotações analisadas acontecem. Desta forma, uma matriz R resultante dos produtos das três matrizes, realiza a transformação desejada diretamente (SILVA, 2014)

$$R(\phi, \theta, \psi) = T_\psi T_\theta T_\phi. \quad (17)$$

Para demonstrar como se encontra essa matriz no exemplo da sequência zxz , calcula-se o produto matricial intermediário entre $T_{z'',\psi}$ e $T_{x',\theta}$:

$$T_{z'',\psi} T_{x',\theta} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi \cos \theta & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (18)$$

e então, por fim encontra-se a matriz R , ao multiplicar $T_{z'',\psi} T_{x',\theta}$ por $T_{z,\phi}$:

$$R = T_{z'',\psi} T_{x',\theta} T_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \text{sen } \psi \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \psi \text{sen } \phi + \text{sen } \psi \cos \theta \cos \phi & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ -(\text{sen } \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \text{sen } \phi) & \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \text{sen } \psi \text{sen } \phi & \cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & -\text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

A matriz R é o resultado particular dos movimentos realizados no exemplo acima. Portanto, para cada tipo de manobra, haverá uma matriz de rotações diferente.

Assim, para se partir da base B_0 para a B_3 diretamente faz-se:

$$B_3 = T_{z'',\psi} T_{x',\theta} T_{z,\phi} B_0 = R B_0.$$

Para fazer o caminho inverso, ou seja, partir da base B_3 para B_0 , basta realizar os cálculos com as matrizes transpostas (QUANDT *et al.*, 2001)

$$B_0 = T_{z,\phi}^T T_{x',\theta}^T T_{z'',\psi}^T B_3 = R^T B_3.$$

7.1.1 Exemplo de Rotação com Ângulos de Euler

Um corpo rígido com 8 vértices realiza rotações em $x \rightarrow y \rightarrow z$, na qual os valores dos ângulos ϕ , θ e ψ , respectivos aos eixos cartesianos, são de 30° , 45° e 60° . O cômputo da primeira rotação, $T_{x,30^\circ}$, resulta em:

$$T_{x,30^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \text{sen } 30^\circ \\ 0 & -\text{sen } 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

seguida da rotação intermediária $T_{y,45^\circ}T_{x,30^\circ}$, descrita como:

$$T_{y,45^\circ}T_{x,30^\circ} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 30^\circ \sin 45^\circ & -\cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \sin 45^\circ & -\sin 30^\circ \cos 45^\circ & \cos 30^\circ \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 & -\sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}.$$

E por fim, ao concluir o movimento de rotação nos três eixos, obtém-se a matriz R_{xyz} :

$$\begin{aligned} R_{xyz} &= T_{z,60^\circ}T_{y,45^\circ}T_{x,30^\circ} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \cos 60^\circ & \sin 30^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ & -\sin 45^\circ \cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ \cos 45^\circ & \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ & \sin 45^\circ \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \\ \sin 45^\circ & -\sin 30^\circ \cos 45^\circ & \cos 30^\circ \cos 45^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & 3/4 + \sqrt{2}/8 & -\sqrt{6}/8 + \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/8 + \sqrt{3}/4 & 1/4 + 3\sqrt{2}/8 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A título de exemplificar que as rotações precisam obedecer a hierarquia dos ângulos de Euler, ou seja, que não são comutativas, o exemplo a seguir apresenta uma sequência diferente, isto é $x \rightarrow z \rightarrow y$, mas com a mesma sequência anterior de aberturas, com 30° , 45° e 60° .

$$R_{xzy} = T_{y,60^\circ}T_{z,45^\circ}T_{x,30^\circ} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & \sqrt{6}/8 + \sqrt{3}/4 & -3/4 + \sqrt{2}/8 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & -1/4 + 3\sqrt{2}/8 & \sqrt{6}/8 + \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \neq R_{xyz}.$$

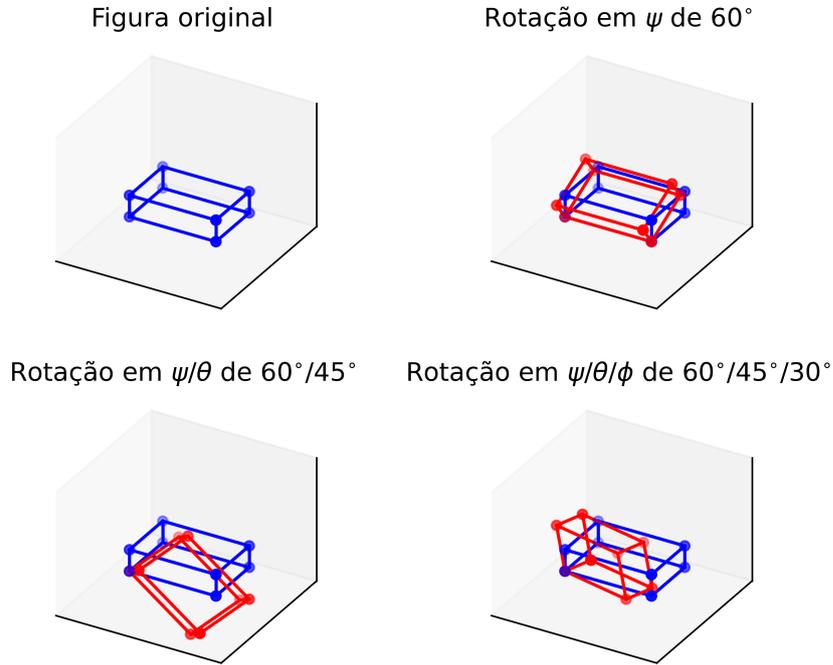
É possível observar as discrepâncias nas matrizes R_{xyz} e R_{xzy} , o que confirma que as rotações consecutivas são não-comutativas.

A Figura 9 ilustra sequencialmente a aplicação das rotações em xyz dos pontos iniciais apresentados na Tabela 3, em que o eixo de rotação parte da origem do sistema em direção aos eixos que rotacionam.

Tabela 3 – Valores iniciais dos 8 vértices do corpo e respectivas coordenadas rotacionadas.

Vértice	Coordenadas originais	Coordenadas rotacionadas		
A	$\vec{q}_1 = (0, 0, 0)$	0,000	0,000	0,000
B	$\vec{q}_2 = (3, 0, 0)$	1,061	1,837	2,121
C	$\vec{q}_3 = (3, 2, 0)$	-0,086	3,316	1,414
D	$\vec{q}_4 = (0, 2, 0)$	-1,146	1,478	0,707
E	$\vec{q}_5 = (0, 0, 1)$	0,739	0,280	0,612
F	$\vec{q}_6 = (3, 0, 1)$	1,800	2,117	1,509
G	$\vec{q}_7 = (3, 2, 1)$	0,653	3,596	0,802
H	$\vec{q}_8 = (0, 2, 1)$	-0,407	1,759	1,319

Figura 9 – Pontos em \mathbb{R}^3 exemplificando cada uma das rotações do exemplo aplicadas em sequência.



Fonte: Feito pelo autor.

7.2 Velocidade Angular

Após uma sequência de movimentos de rotações, um corpo rígido adquire diferentes posições a cada rotação desta sequência. Tomando a variação da posição em relação ao tempo, passa a ser conhecida a velocidade angular deste corpo, grandeza denotada convencionalmente por ω . A velocidade angular de um corpo que faz as rotações descritas pela matriz R na Equação (19), ou seja, com relação à base rotacionada B_3 , pode ser obtida decompondo-se a velocidade ω nas componentes dos três eixos desta base, denominados, por conveniência, x_3, y_3 e z_3 :

$$\omega_{B_3} = [\omega_{x_3}, \omega_{y_3}, \omega_{z_3}]^T. \quad (20)$$

Cada uma das componentes de ω_{B_3} é uma função temporal de cada ângulo de Euler, ou velocidades $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$. Tomando a sequência de rotações zxz , as velocidades de rotação podem ser indicadas matricialmente, como seguem:

$$Q_{\dot{\phi}} = [0, 0, \dot{\phi}]^T, \quad (21)$$

$$Q_{\dot{\theta}} = [\dot{\theta}, 0, 0]^T, \quad (22)$$

$$Q_{\dot{\psi}} = [0, 0, \dot{\psi}]^T. \quad (23)$$

Para se deduzir as equações de Euler, com as velocidades dadas para cada eixo, inicialmente

multiplica-se $T_{z'',\psi}T_{x',\theta}$ por (21), resultando em:

$$T_{z'',\psi}T_{x',\theta}Q_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Em seguida, multiplica-se $T_{z'',\psi}$ por (22), que leva a:

$$T_{z'',\psi}Q_{\dot{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta}(-\sin \psi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Por fim, à última matriz das velocidades (23) são adicionadas (24) e (25). Assim, as equações de Euler para as velocidades angulares são descritas por:

$$\omega_{B_3} = Q_{\dot{\phi}} + T_{z'',\psi}Q_{\dot{\theta}} + T_{z'',\psi}T_{x',\theta}Q_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x_3} \\ \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Partindo das componentes da velocidade de rotação, é possível ter uma noção explícita da orientação de um corpo no espaço e para isso, velocidades angulares são relacionadas com estas derivadas dos ângulos de Euler, ou seja, as velocidades $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$.

A estimativa da atitude de um corpo no espaço consiste em determinar a orientação dos eixos de um sistema fixo neste corpo com relação a um referencial inercial (GARCIA; KUGA; ZANARDI, 2010). As equações cinemáticas dependem das rotações realizadas, ou seja as velocidades $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ estão em função das componentes de ω_{B_3} e representam essa atitude do corpo em movimento. Para se encontrar estas equações cinemáticas, dadas as rotações indicadas por R , pode-se lançar mão de um método de resolução de sistemas lineares conhecido como *Regra de Cramer* (BOLDRINI, 1986).

Reescrevendo ω_{B_3} na forma matricial, tem-se então

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_{x_3} \\ \omega_{y_3} \\ \omega_{z_3} \end{bmatrix}}_B \quad (27)$$

ou

$$AX = B, \quad (28)$$

sendo A a matriz dos coeficientes, X a matriz das variáveis e B a matriz dos termos independentes.

A matriz A possui determinante:

$$\det A = -\sin \theta \quad (29)$$

o que indica que A possui inversa A^{-1} para θ tal que $\sin \theta \neq 0$, de forma que:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Solucionando o sistema pela regra de Cramer, substituindo a matriz B nas três colunas da matriz de coeficientes, alternadamente, e calculando para cada uma dessas matrizes novas, seus respectivos determinantes, então encontra-se:

$$\det A' = \det \begin{bmatrix} \omega_x & \cos \psi & 0 \\ \omega_y & -\sin \psi & 0 \\ \omega_z & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\sin \psi \omega_x - \cos \psi \omega_y, \quad (30)$$

$$\det A'' = \det \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \theta & \omega_x & 0 \\ \cos \psi \sin \theta & \omega_y & 0 \\ \cos \theta & \omega_z & 1 \end{bmatrix} = \sin \psi \sin \theta \omega_y - \cos \psi \sin \theta \omega_x \quad (31)$$

e

$$\det A''' = \det \begin{bmatrix} \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & \omega_x \\ \cos \psi \sin \theta & -\sin \psi & \omega_y \\ \cos \theta & 0 & \omega_z \end{bmatrix} = -\sin \theta \omega_z + \cos \theta (\cos \psi \omega_y + \sin \psi \omega_x). \quad (32)$$

Em posse destes quatro determinantes, encontra-se cada variável da matriz X , calculando os quocientes:

$$\dot{\psi} = \frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{\sin \theta} (\sin \psi \omega_x + \cos \psi \omega_y), \quad (33)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\det A''}{\det A} = -\sin \psi \omega_y + \cos \psi \omega_x, \quad (34)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\det A'''}{\det A} = \omega_z - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \psi \omega_y + \sin \psi \omega_x), \quad (35)$$

as quais são as equações cinemáticas das rotações de R e descrevem a taxa de variação dos ângulos de Euler (SANTOS *et al.*, 2011).

A cinemática estuda objetos em movimento, contudo não o que levou estes a se movimentarem, diferentemente da dinâmica em que leva em consideração as forças ou momento em um sistema. Desta forma, ao quantificar estes movimentos, pode-se obter a atitude de um corpo de forma a saber o comportamento a cada nova alteração de sua posição (CARRARA, 2012). Este controle de atitude pode ser obtido por meio das etapas demonstradas acima até se encontrar as equações cinemáticas, ou seja, através da cinemática direta define-se as velocidades após saber a posição inicial e as rotações finitas subsequentes.

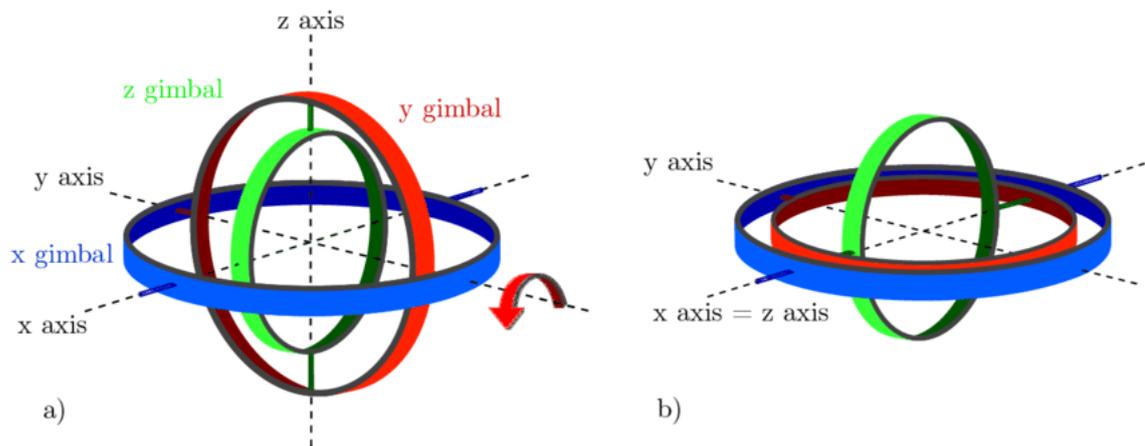
Há ainda a cinemática inversa a qual consiste em relacionar as equações cinemáticas com as velocidades angulares do corpo e para este estudo o ponto de partida acontece nas velocidades

instantâneas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ (JAMBERSI; SILVA, 2016; JAMBERSI, 2016). Em outras palavras, a cinemática inversa permite que se use as equações cinemáticas na especificação de uma posição por meio da determinação de seus movimentos (MATHWORKS, s.d.).

7.3 Singularidades

Existem singularidades provenientes do movimento do próprio corpo em rotação. A estes casos dá-se o nome de *Gimbal Lock*, já citado anteriormente. Uma forma de compreender esta situação é quando o primeiro e o terceiro eixos coincidem suas rotações, tornando-as indistinguíveis. Isso ocorre quando o segundo eixo, na hierarquia dos eixos de rotação, atinge um ângulo crítico (DIEBEL, 2006), conforme pode ser verificado na Figura 10.

Figura 10 – Ocorrência do Gimbal Lock. (a) Posição inicial em que os três eixos coordenados estão todos perpendiculares entre si. (b) Situação após a rotação de 90° em y fazendo x e z coincidirem.



Fonte: Zeitlhöfler (2019).

Das equações cinemáticas, é possível realizar integrações numericamente. Contudo nota-se, em especial na equação (33), que existem valores de θ que inviabilizam este cálculo. Para $\theta = n\pi$, em que $|n| = 0, 2, 4, \dots$, encontra-se $\sin \theta = 0$, revelando um problema da cinemática inversa, conhecido como singularidade, o qual acontece quando as rotações são parametrizadas através dos ângulos de Euler. Para um conjunto de rotações simétricas (Tabela 1), similarmente às rotações demonstradas em R , as singularidades surgem quando $\theta = 0$ ou $\pm\pi$. Para rotações assimétricas, esta situação ocorre quando $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (SINGLA; MORTARI; JUNKINS, 2004).

Sabe-se, portanto, que as singularidades são problemas recorrentes dentro da parametrização de rotações finitas consecutivas de corpos rígidos por meio dos ângulos de Euler. Uma estratégia usada para evitar estas indefinições matemáticas ou limitações físicas nos graus de liberdade é a utilização dos Quatérnions (JAMBERSI; SILVA, 2016; JAMBERSI, 2016; DIEBEL, 2006; VOIGHT, 2020; SINGLA; MORTARI; JUNKINS, 2004; SOUZA; FILHO, 2009).

8 Quatérnions

Inspirado pela álgebra dos números complexos, o matemático, físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton realizou a expansão deste grupo numérico para três dimensões. Da mesma maneira em que os números complexos possuem uma parte “real” e outra “imaginária”, Hamilton buscou encontrar um sistema algébrico composto por uma estrutura similar (VOIGHT, 2020).

A construção dos quatérnions passou pela tentativa de se obter um conjunto que pudesse ser descrito em três dimensões, assim como acontece para o caso bidimensional com os complexos. A priori Hamilton definiu um tripleto complexo $1, i$ e j , acrescentando a unidade imaginária j ao conjunto bidimensional anterior. Contudo a formulação mostrou-se inconsistente, uma vez que não conseguia encontrar quanto deveria valer o produto ij , as duas unidades imaginárias até então propostas por ele (OLIVEIRA, L. S. A. d. *et al.*, 2015).

Hamilton viu-se preso a esta formulação por cerca de uma década até que, em outubro de 1843 este foi questionado por seu filho, William Edwin Hamilton, acerca da possibilidade de se multiplicar tripletos como $1, i$ e j ; sua resposta foi negativa, dizendo que só era possível realizar operações de adição e subtração com estes (VOIGHT, 2020).

Em 1865, Hamilton descreve em uma carta para seu filho que naquele mesmo mês de outubro de 1843, no dia 16, ele caminhava com sua esposa até a Academia Real da Irlanda, onde presidiria um conselho, e enquanto passava pelo Canal Real Irlandês teve o *insight* que solucionaria a questão dos tripletos. Descrito por Hamilton como o que pareceu ser como o “encerramento de um circuito elétrico, uma centelha diante de si, um mensageiro de anos de pensamentos e trabalhos dedicados”, Hamilton então se deu conta de que a generalização buscada pelos números complexos demandava não duas, mas sim três unidades imaginárias. Sua empolgação foi tamanha que, segundo ele mesmo, não pôde resistir em tomar seu canivete e escrever nas pedras do canal:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

que é a relação fundamental dos quatérnions, que contém a solução do problema da multiplicação. Hamilton notou assim que era necessária uma quarta dimensão, cunhando o termo *quatérnion* para o espaço real parametrizado pelos elementos $1, i, j, k$ (VOIGHT, 2020; OLIVEIRA, L. S. A. d. *et al.*, 2015).

A descoberta de Hamilton sofreu resistência entre os matemáticos da sua época, uma vez que propunha um sistema numérico que não satisfazia uma propriedade fundamental, a comutatividade do produto. Contudo, com o passar do tempo, a comunidade matemática começou a perceber sua importância, aplicações e alcance. John Thomas Graves (1806-1870), matemático e jurista irlandês, foi um dos primeiros a receber correspondências de Hamilton descrevendo os quatérnions. Ao final daquele mesmo ano de 1843, Graves escreveria a Hamilton, apresentando uma generalização dos quatérnions para oito dimensões, surgindo então os *octonions* (VOIGHT, 2020).

No ano de 1845, o matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895) publicou um artigo em um periódico conhecido como *Philosophical Magazine* explorando aspectos dos quatérnions, já com algumas propriedades dos octonions, o que indica uma descoberta independente da de Graves (BAEZ, 2002).

Há ainda outros conjuntos algébricos provenientes dos quatérnions de Hamilton, como os *biquatérnions* e os *sedenions*, dentre outros. Neste trabalho, será explorada somente a álgebra dos quatérnions.

8.1 O conjunto dos números complexos

Os números complexos compõem um conjunto, indicado pela letra \mathbb{C} , onde as propriedades associativa e comutativa são observadas para a soma e o produto, além de permitir a existência de elemento neutro e simétrico, analogamente ao que acontece no conjunto dos números reais. A representação mais básica de seus elementos é na forma de pares ordenados $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ com $x, y \in \mathbb{R}$ (IEZZI, 1977).

A unidade imaginária é usualmente indicada por i e corresponde ao número complexo $(0, 1)$. Disso se deduz que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1,$$

que em resumo é a propriedade básica da unidade imaginária

$$i^2 = -1 \tag{36}$$

ou ainda $i = \sqrt{-1}$ (IEZZI, 1977).

Dado um número complexo $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, temos

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1),$$

ou seja,

$$z = x + yi. \tag{37}$$

Esta é a forma algébrica de um número complexo, onde x é a parte real e y é a sua componente imaginária (WOIT, 2019), representadas por

$$x = \Re(z), \quad y = \Im(z).$$

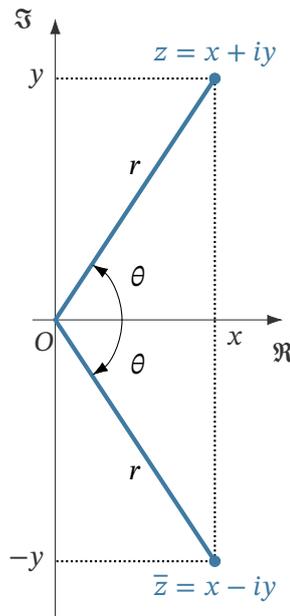
Se um número complexo possui a componente imaginária nula, este se torna um número real e de forma similar, denomina-se como imaginário puro o número complexo que possui sua componente real nula:

$$z = x + 0i \in \mathbb{R}$$

$$z = 0 + yi \rightarrow \text{imaginário puro, para } y \neq 0$$

Todo número complexo possui um número associado conhecido como complexo conjugado. O complexo conjugado de $z = x + iy$, denotado por \bar{z} , é definido como $\bar{z} = x - yi$. Note que a parte imaginária torna-se negativa, o que pode ser compreendido como a reflexão do vetor z em relação ao eixo Ox no plano complexo, conforme indica a Figura 11 (WOIT, 2019).

Figura 11 – Representação no plano do número complexo $z = x + iy$ e seu conjugado $\bar{z} = x - iy$.



Fonte: Feito pelo autor.

Pode-se obter a representação de um número complexo a partir de sua interpretação geométrica no plano, e conseqüente associação com coordenadas polares, como pode ser visto na Figura 11, deve-se tomar as componentes do vetor \vec{r} , $x = |r| \cos(\theta)$ e $y = |r| \sin(\theta)$, com $|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para se provar a obtenção da fórmula de Euler, faz-se uso da Série de Maclaurin (STEWART, 2013)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

para expandir a função seno da Figura 11, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \end{aligned}$$

de onde conclui-se que

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (38)$$

Para a função cosseno o desenvolvimento é similar. Contudo, pode-se simplesmente derivar a

série de Maclaurin de $\cos x$, obtendo assim:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{d}{dx}(\sin x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.\end{aligned}$$

Uma vez que a série de Maclaurin de $\sin x$ converge para todo valor de x , a sua derivada, ou seja, $\cos x$ também é convergente para todo x (STEWART, 2013), de forma que:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (39)$$

A função exponencial e^x também pode ser desenvolvida em sua série de Maclaurin para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Considerando $x = i\theta$ na função exponencial, obtém-se:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

Colocando i em evidência chega-se a

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right),$$

que, se comparada às expansões para $\cos \theta$ e $\sin \theta$, permite obter

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (40)$$

conhecida como fórmula de Euler.

Tomando o vetor $z = x + iy$ e multiplicando-o por $e^{i\theta}$ de (40) obtém-se

$$e^{i\theta}(x + iy) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta),$$

que em notação matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

que é a rotação de um ângulo θ do número complexo z . Importante notar que a matriz encontrada vale para a rotação θ do vetor no plano complexo. Para que seja realizada a rotação da base, toma-se a matriz de transformação C e encontra-se sua transposta C^T .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_C \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{C^T}$$

obtendo-se desta forma a seguinte configuração de rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

É importante observar que recupera-se a matriz da Equação (6), característica de rotações de corpos rígidos.

8.2 A álgebra dos quatérnions

Com sua origem nos números complexos, os quatérnions são indicados por \mathbb{H} em homenagem a Hamilton (SILVA, 2014).

Quatérnions possuem diferentes notações. Geralmente são representados por um número com quatro componentes ou ainda uma composição de um escalar e um vetor, ou ainda um número complexo com três partes imaginárias (SILVA, 2014), ilustradas respectivamente por:

$$\hat{q} = (q_0, iq_1, jq_2, kq_3), \quad (41)$$

$$\hat{q} = q_0 + \vec{q} = (q_0, \vec{q}), \quad (42)$$

$$\hat{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3, \quad (43)$$

$$\hat{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (44)$$

onde q_0 é a parte real do quatérnion e seu primeiro componente, q_1, q_2 e q_3 são os três componentes de caráter vetorial imaginário e \hat{q} representa o quatérnion em si (SILVA, 2014). Todos os quatérnions são essencialmente quadras ordenadas de números reais, em que os símbolos dos números imaginários i, j e k devem satisfazer as seguintes identidades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (45)$$

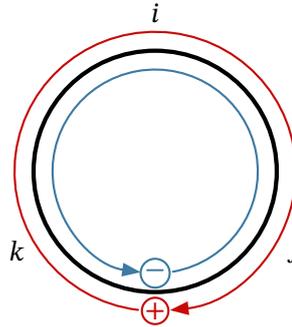
$$ij = k, ji = -k \quad (46)$$

$$jk = i, kj = -i \quad (47)$$

$$ki = j, ik = -j \quad (48)$$

que não obedecem à propriedade comutativa e seguem uma ordem cíclica, indicada pela Figura 12, que ilustra que, ao multiplicar as componentes imaginárias de um quatérnion, em sentido horário o resultado terá sinal positivo, enquanto em sentido anti-horário, este será negativo.

Figura 12 – Multiplicação cíclica das componentes imaginárias i , j e k de um quatérnion.



Fonte: Ben-Ari (2014).

Dado um quatérnion $\hat{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$, seu módulo é definido por

$$|\hat{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (49)$$

Dado um segundo quatérnion $\hat{p} = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$, as principais operações quaterniônicas são definidas abaixo:

- Dois quatérnions $\hat{q} = (q_0, iq_1, jq_2, kq_3)$ e $\hat{p} = (p_0, ip_1, jp_2, kp_3)$ são considerados iguais quando todos os seus componentes possuem os mesmos valores:

$$\hat{q} = \hat{p} \iff q_0 = p_0, iq_1 = ip_1, jq_2 = jp_2 \text{ e } kq_3 = kp_3.$$

- A soma de dois quatérnions \hat{q} e \hat{p} é:

$$\begin{aligned} \hat{q} + \hat{p} &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) + (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) \\ &= (q_0 + p_0) + i(q_1 + p_1) + j(q_2 + p_2) + k(q_3 + p_3). \end{aligned}$$

- O produto de dois quatérnions é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{q} \cdot \hat{p} &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) \cdot (p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3) \\ &= (q_0p_0 + iq_0p_1 + jq_0p_2 + kq_0p_3) + (iq_1p_0 + iq_1ip_1 + iq_1jp_2 + iq_1kp_3) + \\ &\quad (jq_2p_0 + jq_2ip_1 + jq_2jp_2 + jq_2kp_3) + (kq_3p_0 + kq_3ip_1 + kq_3jp_2 + kq_3kp_3) \\ &= q_0p_0 - (q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3) + q_0(ip_1 + jp_2 + kp_3) + \\ &\quad p_0(iq_1 + jq_2 + kq_3) + \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que se resume a uma combinação de termos de produtos escalares e vetoriais em uma única expressão

$$\hat{q} \cdot \hat{p} = q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p} + q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}. \quad (50)$$

A multiplicação entre quatérnions é associativa e distributiva através da adição (SILVA, 2014).

Os quatérnions também possuem algumas classificações:

- Um quatérnion inverso é representado por \hat{q}^{-1} . O produto de um quatérnion pelo seu inverso é sempre igual a um:

$$\hat{q}\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = 1.$$

- Um quatérnion \hat{q} possui um complexo conjugado indicado por:

$$\hat{q}^* = q_0 - \vec{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3.$$

- Um quatérnion puro possui a componente real nula (SILVA, 2014), sendo escrito como:

$$\hat{q} = (0, \vec{q}),$$

fundamental para a descrição do movimento de rotação a partir dos quatérnions.

8.3 Descrição das Rotações com Quatérnions

O problema que levou Hamilton à proposição dos quatérnions, ou seja, rotações no espaço por meio de números complexos, encontra sua representação por meio da multiplicação de quatérnions que representam a parametrização da posição e da rotação desejadas. Seja \vec{q} a componente vetorial de um quatérnion \hat{q} a posição do objeto no espaço, expressa na forma de um quatérnion puro $\hat{q} = (0, \vec{q})$, e um segundo quatérnion \hat{p} unitário, isto é, um quatérnion onde $\hat{p}\hat{p}^* = 1$ (BIASI; GATTASS, 2007; SILVA, 2014; BEN-ARI, 2014). Ao se realizar o produto $\hat{p}\hat{q}\hat{p}^*$, descreve-se uma generalização de uma rotação $T_p(q)$ para o vetor \hat{p} em termos de \hat{q}

$$T_p(q) = \hat{p}\hat{q}\hat{p}^*.$$

Tomando o quatérnion e seu respectivo complexo conjugado como $\hat{p} = (s, \vec{v})$ e $\hat{p}^* = (s, -\vec{v})$, e um vetor na forma de um quatérnion puro $\hat{q} = (0, \vec{r})$, então a expressão da rotação se expande conforme segue:

$$\begin{aligned} T_p(q) &= \hat{p}\hat{q}\hat{p}^* = (s, \vec{v})(0, \vec{r})(s, -\vec{v}) \\ &= (s, \vec{v})(0s - \vec{r} \cdot -\vec{v}, -0\vec{v} + s\vec{r} + \vec{r} \times (-\vec{v})) \\ &= (s, \vec{v})(\vec{r} \cdot \vec{v}, s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) \\ &= (s(\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}), s(s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v}) + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times (s\vec{r} - \vec{r} \times \vec{v})) \\ &= (s(\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot s\vec{r} - \vec{v} \cdot (-\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} - s\vec{r} \times \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + \vec{v} \times \vec{r} + \vec{v} \times (-\vec{r} \times \vec{v})) \\ &= (s(\vec{r} \cdot \vec{v}) - s(\vec{r} \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\vec{r} \times \vec{v}), s^2\vec{r} + s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + s\vec{v} \times \vec{r} + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})) \\ &= (0, s^2\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r}) \\ &= (0, s^2\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{r} + 2(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} + 2s\vec{v} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Desta forma, observa-se que após a rotação a parte escalar se anula, restando apenas a parte vetorial do produto, que em resumo é:

$$T_p(q) = \hat{p}\hat{q}\hat{p}^* = (s^2 - |\vec{v}|^2)\vec{r} + 2s(\vec{v} \times \vec{r}) + 2(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v}. \quad (51)$$

De forma generalizada, é possível escrever uma quantidade n de rotações da seguinte forma:

$$T_{\hat{p}_1 \dots \hat{p}_n}(\hat{q}) = \hat{p}_n \dots \hat{p}_1 \hat{q} \hat{p}_1^* \dots \hat{p}_n^* \quad (52)$$

A representação quaterniônica das funções trigonométricas parte da identidade fundamental, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, e relaciona um ângulo em que $s = \cos \theta$ e $|\vec{v}| = \sin \theta$ que é equivalente ao quatérnio $\hat{p} = (s, \vec{v})$. Desta forma é possível tomar um vetor unitário que descreva o quatérnio da seguinte forma (BIASI; GATTASS, 2007):

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n}\right) \end{aligned} \quad (53)$$

com $|\vec{n}| = 1$ indicando qual o eixo em que o corpo está rotacionando. A dedução dessa conversão entre ângulos de Euler para quatérnios será realizada na seção 8.5.

Assim sendo, com a equação da rotação quaterniônica e utilizando a conversão trigonométrica acima (BIASI; GATTASS, 2007), obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} T_p(q) &= \left(0, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{r} - \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n}\right)\vec{r} + 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \cdot \vec{r}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \times \vec{r}\right) \\ &= \left(0, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{r} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\vec{n} \cdot \vec{n})\vec{r} + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n} \times \vec{r}\right) \\ &= \left(0, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{r} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{r} + (1 - \cos(\theta))(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + \sin(\theta)\vec{n} \times \vec{r}\right) \\ &= (0, \cos(\theta)\vec{r} + (1 - \cos(\theta))(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + \sin(\theta)\vec{n} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Para realizar a dedução acima, foram utilizadas as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= 1 + \cos(\theta), \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \cos(\theta), \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \sin(\theta). \end{aligned}$$

Como a parte escalar é nula, semelhante ao que ocorre em (51), resta somente a notação vetorial (BIASI; GATTASS, 2007)

$$T_p(q) = \cos(\theta)\vec{r} + (1 - \cos(\theta))(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{n} + \sin(\theta)(\vec{n} \times \vec{r}). \quad (54)$$

Apesar de os meio arcos nos argumentos das funções trigonométricas parecerem arbitrários, fica evidente em (54) após as transformações trigonométricas que estes valores se justificam.

8.4 Quatérnions em notação matricial

Para representar um quatérnion matricialmente, parte-se de (51) e então desenvolve-se cada termo da equação em matrizes (SILVA, 2014). Sendo,

$$\vec{r} = (x, y, z),$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z),$$

então, deduzindo por cada uma das partes, inicialmente tem-se que:

$$(s^2 - |\vec{v}|^2)\vec{r} = (s^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

e então:

$$2(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v} = 2(xv_x + yv_y + zv_z) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} (xv_x + yv_y + zv_z)v_x \\ (xv_x + yv_y + zv_z)v_y \\ (xv_x + yv_y + zv_z)v_z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_x^2 & v_y v_x & v_z v_x \\ v_x v_y & v_y^2 & v_z v_y \\ v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e finalmente com

$$2s(\vec{v} \times \vec{r}) = 2s \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2s[(v_y z - v_z y)\hat{i} + (v_z x - v_x z)\hat{j} + (v_x y - v_y x)\hat{k}] = 2s \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Combinando os três termos em suas notações matriciais, é possível resumir a rotação em uma única matriz:

$$T_p(q) = \begin{bmatrix} s^2 + v_x^2 - v_y^2 - v_z^2 & 2(v_x v_y - s v_z) & 2(v_x v_z + s v_y) \\ 2(v_x v_y + s v_z) & s^2 - v_x^2 + v_y^2 - v_z^2 & 2(v_y v_z - s v_x) \\ 2(v_x v_z - s v_y) & 2(v_y v_z - s v_x) & s^2 - v_x^2 - v_y^2 + v_z^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

que, de forma similar à matriz (19), faz uso dos quatérnions.

A matriz (55) pode ser simplificada uma vez que um quatérnion de rotação é unitário:

$$|\hat{q}| = s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$$

o que permite que as seguintes manipulações possam ser realizadas:

$$-v_y^2 - v_z^2 = s^2 + v_x^2 - 1,$$

$$-v_x^2 - v_z^2 = s^2 + v_y^2 - 1,$$

$$-v_x^2 - v_y^2 = s^2 + v_z^2 - 1,$$

tornando a matriz de rotações quaterniônica simplificada com o formato abaixo:

$$T_p(q) = 2 \begin{bmatrix} s^2 + v_x^2 - 1/2 & v_x v_y - s v_z & v_x v_z + s v_y \\ v_x v_y + s v_z & s^2 + v_y^2 - 1/2 & v_y v_z - s v_x \\ v_x v_z - s v_y & v_y v_z - s v_x & s^2 + v_z^2 - 1/2 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

que pode ser aplicada para realizar rotações (SILVA, 2014).

As rotações com quatérnions são realizadas matricialmente com $T_p(q)$ e podem ser escritas explicitamente. Considerando um vetor resultante \vec{w} de uma rotação arbitrária do produto $T_p(q)$ e \vec{v} , tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 + v_x^2 - 1/2 & v_x v_y - s v_z & v_x v_z + s v_y \\ v_x v_y + s v_z & s^2 + v_y^2 - 1/2 & v_y v_z - s v_x \\ v_x v_z - s v_y & v_y v_z - s v_x & s^2 + v_z^2 - 1/2 \end{bmatrix}}_{T_p(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} \quad (57)$$

A matriz $T_p(q)$, se comparada com a matriz de rotações em termos dos ângulos de Euler (19), permite encontrar a conversão entre ambas parametrizações. Conversão esta que será realizada posteriormente.

8.4.1 Exemplo de Rotação com Quatérnions

A título de exemplificar como é realizada a rotação de um corpo rígido por meio da parametrização dos quatérnions, assim como na Seção 7.1.1, a rotação para ϕ , θ e ψ foi modelada em uma sequência de $x \rightarrow y \rightarrow z$ com valores de rotação de 30° , 45° e 60° , respectivamente. Supondo a posição de um corpo no espaço, composto por 8 vértices em que cada um é descrito pelos vetores \vec{q}_i , que podem ser vistos na Tabela 3, e que nos cálculos serão indicados pelos quatérnions puros \hat{q}_i , de forma que $\hat{q}_i = (0, \vec{q}_i)$.

Portanto, os quatérnions que representam cada rotação são descritos por:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \left(\cos\left(\frac{30}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{30}{2}\right)(1, 0, 0) \right), \\ \hat{p}_2 &= \left(\cos\left(\frac{45}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{45}{2}\right)(0, 1, 0) \right), \\ \hat{p}_3 &= \left(\cos\left(\frac{60}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{60}{2}\right)(0, 0, 1) \right). \end{aligned}$$

É possível notar que o vetor \vec{n} de cada quatérnion possui a orientação específica do eixo que o vetor rotacionará.

A rotação é calculada nos moldes da Equação (52), o que permite que a rotação por completo seja descrita como:

$$T_{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3}(\hat{q}_i) = \hat{p}_3 \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{q}_i \hat{p}_1^* \hat{p}_2^* \hat{p}_3^*. \quad (58)$$

O cálculo é realizado por partes, com a Equação (58) e multiplicando os quatérnions, inicialmente $\hat{p}_1 \hat{q}_1 \hat{p}_1^*$, então $\hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{q}_1 \hat{p}_1^* \hat{p}_2^*$ e por fim $\hat{p}_3 \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{q}_1 \hat{p}_1^* \hat{p}_2^* \hat{p}_3^*$.

Serão realizadas as etapas para a transformação do vértice C da Equação (3), de forma ilustrativa. Posteriormente, serão indicados os resultados das rotações para todos os demais vértices.

$$T_{\hat{p}_1}(\hat{q}_3) = \cos(30^\circ)(3; 2; 0) + (1 - \cos(30^\circ))((1; 0; 0) \cdot (3; 2; 0))(1; 0; 0) + \text{sen}(30^\circ)((1; 0; 0) \times (3; 2; 0)),$$

$$T_{\hat{p}_1}(\hat{q}_3) = (3; 1,732; 1)$$

Em seguida desta primeira iteração, realiza-se a segunda fase da multiplicação dos quatérnions, com $T_{\hat{p}_2}$

$$T_{\hat{p}_1, \hat{p}_2}(\hat{q}_3) = T_{\hat{p}_2}(T_{\hat{p}_1}(\hat{q}_3)) = \cos(45^\circ)(3; 1,732; 1) + (1 - \cos(45^\circ))((0; 1; 0) \cdot (3; 1,732; 1))(0; 1; 0) + \sin(45^\circ)((0; 1; 0) \times (3; 1,732; 1)),$$

$$T_{\hat{p}_1, \hat{p}_2}(\hat{q}_3) = T_{\hat{p}_2}(T_{\hat{p}_1}(\hat{q}_3)) = (2,828; 1,732; -1,414)$$

Por fim, o valor final das rotações deste primeiro vértice é calculado como:

$$T_{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3}(\hat{q}_3) = \cos(60^\circ)(2,828; 1,732; -1,414) + (1 - \cos(60^\circ))((0; 0; 1) \cdot (2,828; 1,732; -1,414))(0; 0; 1) + \sin(60^\circ)((0; 0; 1) \times (2,828; 1,732; -1,414))$$

que ao final, resulta em:

$$T_{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3}(\hat{q}_3) = (-0,086; 3,316; -1,414)$$

Todos os demais vértices rotacionados da mesma forma que o vetor \vec{q}_1 , podem ser vistos na Tabela 4.

Tabela 4 – Valores dos 8 vetores rotacionados em 30° , 45° e 60° .

Vértice	Coordenadas originais	Coordenadas rotacionadas		
A	$\vec{q}_1 = (0, 0, 0)$	0,000	0,000	0,000
B	$\vec{q}_2 = (3, 0, 0)$	1,061	1,837	2,121
C	$\vec{q}_3 = (3, 2, 0)$	-0,086	3,316	1,414
D	$\vec{q}_4 = (0, 2, 0)$	-1,146	1,478	0,707
E	$\vec{q}_5 = (0, 0, 1)$	0,739	0,280	0,612
F	$\vec{q}_6 = (3, 0, 1)$	1,800	2,117	1,509
G	$\vec{q}_7 = (3, 2, 1)$	0,653	3,596	0,802
H	$\vec{q}_8 = (0, 2, 1)$	-0,407	1,759	1,319

8.5 Conversão entre Ângulos de Euler e Quatérnions

Partindo da matriz reduzida da rotação $T_p(q)$ na Equação (56), é possível encontrar um único quatérnion equivalente a esta rotação. Inicialmente encontra-se o traço da matriz $T_p(q)$ realizando a soma dos elementos da sua diagonal principal:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_p(q)) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 2(3s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 3/2) \\ &= 2(3s^2 + (1 - s^2) - 3/2) \\ &= 2(2s^2 - 1/2) \\ &= 4s^2 - 1, \end{aligned}$$

que nos permite isolar s :

$$|s| = \sqrt{\frac{\text{tr}(T_p(q)) + 1}{4}}, \quad (59)$$

e em seguida encontrar v_x partindo do termo a_{11} da matriz:

$$a_{11} = 2(s^2 + q_x^2 - 1/2) = 2\left(\frac{\text{tr}(T_p(q)) + 1}{4} + q_x^2 - \frac{1}{2}\right), \quad (60)$$

levando a

$$|q_x| = \sqrt{\frac{a_{11}}{2} + \frac{1 - \text{tr}(T_p(q))}{4}}. \quad (61)$$

De forma análoga, serão obtidos os quatérnions q_y e q_z , relativos aos termos a_{22} e a_{33} :

$$|q_y| = \sqrt{\frac{a_{22}}{2} + \frac{1 - \text{tr}(T_p(q))}{4}}, \quad \text{e} \quad |q_z| = \sqrt{\frac{a_{33}}{2} + \frac{1 - \text{tr}(T_p(q))}{4}}.$$

Sendo uma rotação ϕ em termos dos Ângulos de Euler ao redor do eixo z , conforme apresentado anteriormente na Seção 7.1, tem-se a matriz:

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e encontrando seu traço $\text{tr}(R_\phi) = 2 \cos \phi + 1$ na fórmula de s , $|q_x|$, $|q_y|$ e $|q_z|$:

$$\begin{aligned} |q_0| &= \sqrt{\frac{2 \cos \phi + 1 + 1}{4}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \\ |q_1| &= |q_2| = \sqrt{\frac{\cos \phi}{2} + \frac{1 - (2 \cos \phi + 1)}{4}} = 0, \\ |q_3| &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1 - (2 \cos \phi + 1)}{4}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} = \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, o quatérnion que indica a rotação em ϕ , é expresso por:

$$q_\phi = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{n}.$$

De forma análoga, encontram-se os quatérnions correspondentes às rotações ao redor dos eixos y e x :

$$\begin{aligned} q_\theta &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n}, \\ q_\psi &= \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)\vec{n}. \end{aligned}$$

que possuem a mesma configuração de (53) (BEN-ARI, 2014).

Considerando uma situação como a apresentada na Seção 8.4.1, em que a sequência de rotações é $x \rightarrow y \rightarrow z$, com os quatérnions de rotação sendo, respectivamente, \hat{q}_ψ , \hat{q}_θ e \hat{q}_ϕ e o vetor normal $|\vec{n}|$

indicado pelos versores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} para cada uma das direções principais que os quatérnions indiquem as rotações, pode-se obter um quatérnion que resuma a rotação geral como segue (SANTOS, 2003):

$$\hat{q} = \hat{q}_\psi \hat{q}_\theta \hat{q}_\phi, \quad (62)$$

ou ainda

$$\hat{q} = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \hat{k} \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{j} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \hat{i} \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \right). \quad (63)$$

Resolvendo este produto, obtém-se:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$q_3 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

que pode ser sintetizado em:

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Desta forma, ao se saber os ângulos de Euler da sequência $x \rightarrow y \rightarrow z$, é através da expressão encontrada pela Equação (64), que se determina o quatérnion desta rotação.

Para o processo inverso deve-se comparar as respectivas matrizes de rotação parametrizadas através dos ângulos de Euler R (19) e dos quatérnions T (55), termo a termo, com a finalidade de isolar os ângulos ϕ , θ e ψ .

$$R = T \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \operatorname{sen} \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi & -(\cos \theta \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \psi \cos \theta \cos \phi) & \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \psi \cos \phi + \cos \phi \cos \theta \operatorname{sen} \phi & \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi & -\cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \operatorname{sen} \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}}_{R_{ij}} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 + u_x^2 - 1/2 & v_x v_y - s v_z & v_x v_z + s v_y \\ v_x v_y + s v_z & s^2 + v_y^2 - 1/2 & v_y v_z - s v_x \\ v_x v_z - s v_y & v_y v_z - s v_x & s^2 + v_z^2 - 1/2 \end{bmatrix}}_{T_{ij}}.$$

Analisando os elementos das matrizes, nota-se que igualando alguns termos, é possível encontrar uma expressão para cada ângulo. Desta forma, ao se igualar

$$R_{3,3} = T_{3,3}$$

encontra-se

$$\begin{aligned}\cos \theta &= s^2 + v_z^2 - 1, \\ \theta &= \arccos(s^2 + v_z^2 - 1).\end{aligned}\quad (65)$$

Para

$$\frac{R_{3,1}}{Q_{3,2}} = \frac{T_{3,1}}{T_{3,2}}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\sen \theta \sen \phi}{\sen \theta \cos \phi} &= \frac{v_y v_z - s v_x}{v_x v_z - s v_y}, \\ \tan \phi &= \frac{v_y v_z - s v_x}{v_x v_z - s v_y}, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{v_y v_z - s v_x}{v_x v_z - s v_y}\right).\end{aligned}\quad (66)$$

E por fim

$$\frac{R_{2,3}}{R_{1,3}} = \frac{T_{2,3}}{T_{1,3}}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\sen \theta \sen \psi}{-\sen \theta \cos \psi} &= \frac{v_x v_z - s v_y}{v_y v_z - s v_x}, \\ \tan \psi &= -\frac{v_x v_z - s v_y}{v_y v_z - s v_x}, \\ \psi &= \arctan\left(-\frac{v_x v_z - s v_y}{v_y v_z - s v_x}\right).\end{aligned}\quad (67)$$

Desta forma, assim que inseridos os valores de cada componente dos quatérnions nas Equações (65), (66) e (67), que denotam os valores dos ângulos ϕ , θ e ψ , pode-se realizar a conversão entre a parametrização dos quatérnions para ângulos de Euler.

8.5.1 Cinemática Inversa em Termos dos Quatérnions

A velocidade angular em termos de quatérnions é indicada pela taxa de variação de um quatérnion, \dot{q} , e a direção principal. Essa relação é estabelecida quando, entre dois quatérnions unitários, encontra-se um terceiro que determina a transição entre eles (KUIPERS, 1999). Este terceiro quatérnion é escrito como:

$$\hat{q}(t + \Delta t) = \hat{q}(t)\Delta\hat{f}(t)\quad (68)$$

em que

$$\hat{q} = (q_0 + \vec{q}) = (q_0 + q_1 + q_2 + q_3)$$

e

$$\Delta\hat{f}(t) = \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) + \vec{u} \sen\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\quad (69)$$

é um incremento da transição entre os quatérnions (KUIPERS, 1999). O ângulo é dado por $\Delta\alpha$ e gira em torno do eixo indicado pelo vetor diretor $\vec{u}(t)$ (JAMBERSI, 2016). Considerando um ângulo bastante pequeno, a velocidade angular $\omega(t)$ é tida constante para o intervalo de tempo Δt , tornando possível assumir que $\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx 1$ e $\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$, que substituídos em (69) resulta em

$$\Delta\hat{r}(t) = 1 + \vec{u}(t)\frac{\Delta\alpha}{2} \quad (70)$$

e incluindo este resultado em (68), pode-se reescrever:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t + \Delta t) &= \hat{q}(t) + \hat{q}(t)\vec{u}(t)\frac{\Delta\alpha}{2}, \\ \hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t) &= \hat{q}(t)\vec{u}(t)\frac{\Delta\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Supondo o vetor \vec{u} como um quatérnion puro \hat{u}

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{u} \end{bmatrix}$$

então pode-se reescrever:

$$\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t) = \hat{q}(t)\frac{\Delta\alpha}{2}\hat{u}(t). \quad (71)$$

Dividindo ambos os lados da equação por Δt e indicando o limite de $\Delta t \rightarrow 0$, então encontra-se a taxa de variação do quatérnion no tempo:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2}\hat{q}(t)\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\hat{u}(t) \quad (72)$$

em que $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \dot{\alpha}$ é a taxa de variação de α (JAMBERSI, 2016). Portanto:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\hat{q}(t)\dot{\alpha}\hat{u}(t). \quad (73)$$

A velocidade angular é denotada por ω , que provém do incremento $\Delta\hat{r}(t)$, de forma que a velocidade angular pode ser descrita como um quatérnion puro $\hat{\omega} = (0, \vec{\omega})$:

$$\hat{\omega} = \dot{\alpha}\hat{u}(t), \quad (74)$$

que finalmente, resume-se em:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\hat{q}(t)\hat{\omega}(t). \quad (75)$$

Expandindo o quatérnion, então tem-se:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\hat{q}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Realizando o produto entre os quatérnions \hat{q} e $\hat{\omega}$, obtém-se a equação da taxa de variação em termos quaterniônicos (JAMBERSI, 2016):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}(q_0 + \vec{q})(0, \vec{\omega}), \\ &= q_0 \cdot 0 - \vec{q} \cdot \omega + 0 \cdot \vec{q} + q_0 \omega + \vec{q} \times \vec{\omega}, \\ &= -\vec{q} \cdot \omega + q_0 \omega + \vec{q} \times \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Expandindo os produtos interno e vetorial de cada termo da soma acima, permite escrever:

$$\begin{aligned} -\vec{q} \cdot \omega &= q_1 \omega_x + q_2 \omega_y + q_3 \omega_z, \\ q_0 \vec{\omega} &= q_0 \omega_x + q_0 \omega_y + q_0 \omega_z, \\ \vec{q} \times \vec{\omega} &= \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} = \hat{i}(q_2 \omega_z - q_3 \omega_y) + \hat{j}(q_3 \omega_x - q_1 \omega_z) + \hat{k}(q_1 \omega_y - q_2 \omega_x). \end{aligned}$$

Reagrupando os resultados nos termos do quatérnion que indica a taxa de variação no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2}(q_1 \omega_x + q_2 \omega_y + q_3 \omega_z), \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(q_0 \omega_x - q_3 \omega_y + q_2 \omega_z), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(q_3 \omega_x + q_0 \omega_y - q_1 \omega_z), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_2 \omega_x + q_1 \omega_y + q_3 \omega_z), \end{aligned}$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Na Equação (77) a velocidade angular está vinculada à taxa de variação de um quatérnion, de forma que o problema da cinemática inversa agora está em notação quaterniônica (JAMBERSI, 2016; KUIPERS, 1999).

8.6 Solução para o problema da singularidades

Para se solucionar o problema das singularidades, pode-se lançar mão de diversos caminhos. Será explorado a seguir o método Newton-Euler e pelo método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Inicialmente, no método de Newton-Euler não somente a cinemática, mas também a dinâmica será importante, envolvendo as equações de Newton e Euler na busca pelas equações que caracterizam o movimento de um corpo rígido (JAMBERSI, 2016).

Supondo um corpo de massa invariante que realiza um movimento de giroscópio, a 2ª lei de Newton em sua forma mais fundamental ($F = ma$) não fornece equações de movimento válidas para o giroscópio, uma vez que a aceleração é tida como nula (JAMBERSI, 2016).

Contudo, na dinâmica de rotações tridimensionais e finitas de um corpo, sendo o ponto O fixo em relação ao referencial inercial ou o centro de massa do corpo em questão (LEMONS, 2004), a obtenção das equações de Euler podem ser feitas através da taxa de variação do momento angular H_O deste corpo, em relação ao referencial fixo nele mesmo (NUSSENZVEIG, 2013; JAMBERSI, 2016),

$$H_O = I_O \vec{\omega} \quad (78)$$

em que I_O é o momento de inércia, ambos em relação ao ponto O , e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular.

Ao encontrar a taxa de variação do momento angular H_O

$$\dot{H}_O = \frac{d}{dt}(H_O) = \frac{d}{dt}(I_O \vec{\omega}) \quad (79)$$

para que seja possível determinar as equações que descrevem as orientações do corpo, tem-se:

$$\dot{H}_O = \frac{d}{dt}(H_O) + \Omega \times H_O, \quad (80)$$

na qual Ω surge como indicação da velocidade angular do sistema de coordenadas em que se está, neste caso, o sistema fixo no corpo.

Substituindo H_O de (78) em \dot{H}_O de (80), é possível obter uma relação que permite calcular a taxa de variação de momento em relação ao ponto O :

$$\dot{H}_O = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\Omega} \times I_O \vec{\omega} = \vec{M}_O, \quad (81)$$

onde \vec{M}_O é um termo que indica a resultante de todos os momentos, ou torques externos, atuantes no corpo, $d\vec{\omega}/dt$ é a taxa de variação da amplitude da velocidade angular do corpo e I_O é o momento de inércia, agora representado por um tensor. A Equação (81) em notação matricial torna-se então:

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Das matrizes acima, é possível encontrar as equações que descrevem o movimento do corpo. Uma vez que a representação matricial baseia-se no sistema de coordenadas fixo no corpo, as velocidades angulares deste mesmo sistema de coordenadas e a velocidade angular do corpo são coincidentes, ou seja, $\Omega = \omega$, de forma que:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{M_x}{I_x}, \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_x \omega_z + \frac{M_y}{I_y}, \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z}{I_z}. \end{aligned}$$

Uma das conveniências de se optar pelo cálculo no sistema de coordenadas fixo no corpo, é que neste caso o tensor de inércia I é invariante, simplificando a solução (JAMBERSI, 2016).

O momento de inércia de um corpo circular em relação ao ponto O , é obtido por

$$I = mr^2$$

em que a m é a massa do corpo e r seu raio. Em uma situação ideal, como um giroscópio perfeitamente simétrico, o tensor de inércia I é um tensor diagonal, ou seja, as componentes da matriz fora da diagonal são nulas e isso acontece uma vez que se considera o ponto O o centro de massa do corpo. Assim, a matriz I_O pode ser resumida como:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mr^2 \end{bmatrix}.$$

Os eixos I_y e I_z são semelhantes devido à simetria do giroscópio, o que viabiliza simplificar as equações de movimento do corpo:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{M_x}{I_x} \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_x \omega_z + \frac{M_y}{I_y} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z}{I_z} \end{aligned} \quad (83)$$

A solução para a singularidade que surge na cinemática inversa nos ângulos de Euler será encontrada através de integrações numéricas das Equações (83) e (33), parametrizadas por quaternions, com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (JAMBERSI, 2016). Serão realizados três testes distintos com movimentos giroscópicos, à título de comparação, cada um em função das condições iniciais predefinidas. A linguagem utilizada para programar as integrações foi *Python*, baseado na implementação de referência em *GNU/Octave* apresentado por Jambersi e Silva (2016).

O método empregado faz parte de um conjunto de técnicas numéricas explícitas de passo simples e que apresentam erro de truncamento propagado mais baixo do que outras técnicas. Sua classificação acontece de acordo com sua ordem, em que se identifica a quantidade de pontos usados em um subintervalo de integração para se determinar a inclinação (JAMBERSI, 2016).

Inicialmente, será simulada uma condição inicial que não evolua para singularidades. Em seguida, as condições iniciais serão movidas para muito próximo daquelas que geram as singularidades, e por fim, são considerados valores exatos em que estas aparecem.

A escolha deste método de integração se deu devido a ser facilmente encontrado na literatura e por se tratar de uma técnica de fácil implementação, que serve para realizar integração de equações que descrevem sistemas mecânicos (JAMBERSI, 2016).

8.6.1 Simulação do caso não-singular

As condições iniciais para este caso foram escolhidas de forma arbitrária e são as seguintes $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$, com $t \in [0, 10]$. Como

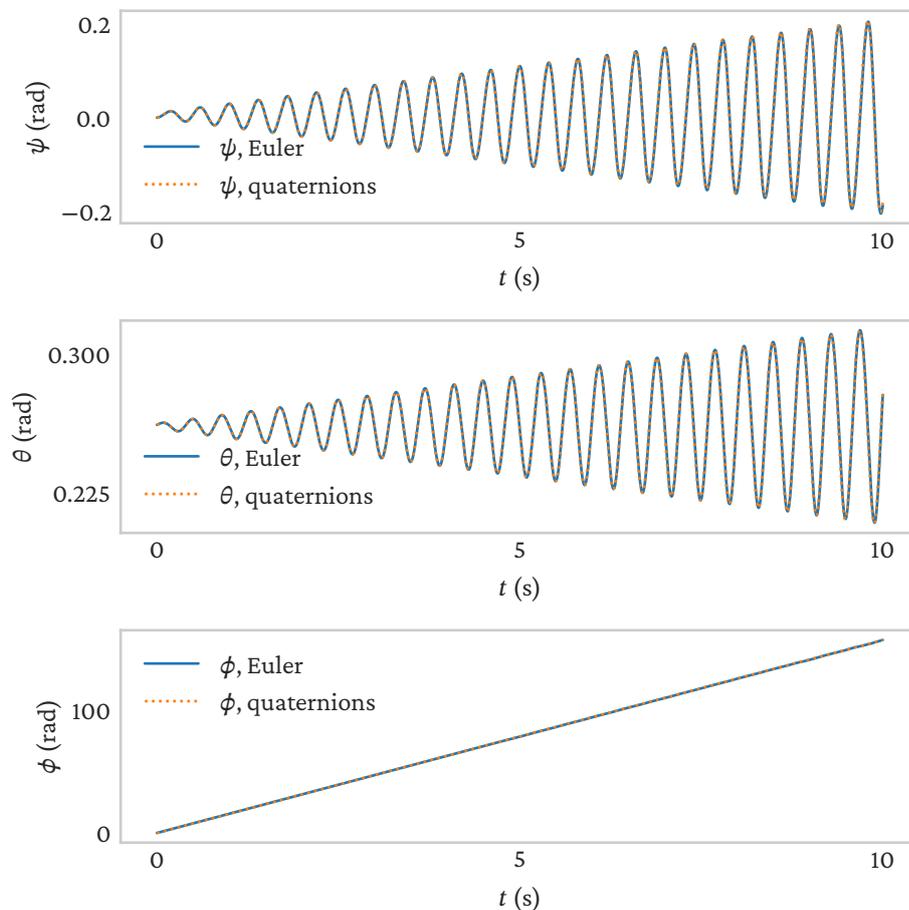
apresentado na Seção 7.3, as singularidades surgem para valores de $\theta = n\pi$, com $|n| = 0, 2, 4, \dots$, desta forma, independente da parametrização simulada, espera-se que os resultados sejam iguais, levando em conta que não há tempo o bastante para que $\theta(t)$ assumam valores que incorram em singularidades (JAMBERSI, 2016).

Os valores de \vec{M}_O são assumidos nulos, indicando a ausência de torques externos no corpo, o que permite simplificar (83):

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= 0 \\ \dot{\omega}_y &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_x \omega_z \\ \dot{\omega}_z &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y\end{aligned}\tag{84}$$

Na Figura 13 são apresentados resultados idênticos (há duas curvas em cada gráfico) das rotações parametrizadas por ângulos de Euler e quatérnions. Vale mencionar que, caso o tempo de simulação fosse maior, o comportamento das amplitudes tenderiam a crescer, uma vez que por se tratar de um caso ideal, não há dissipação de energia (JAMBERSI, 2016).

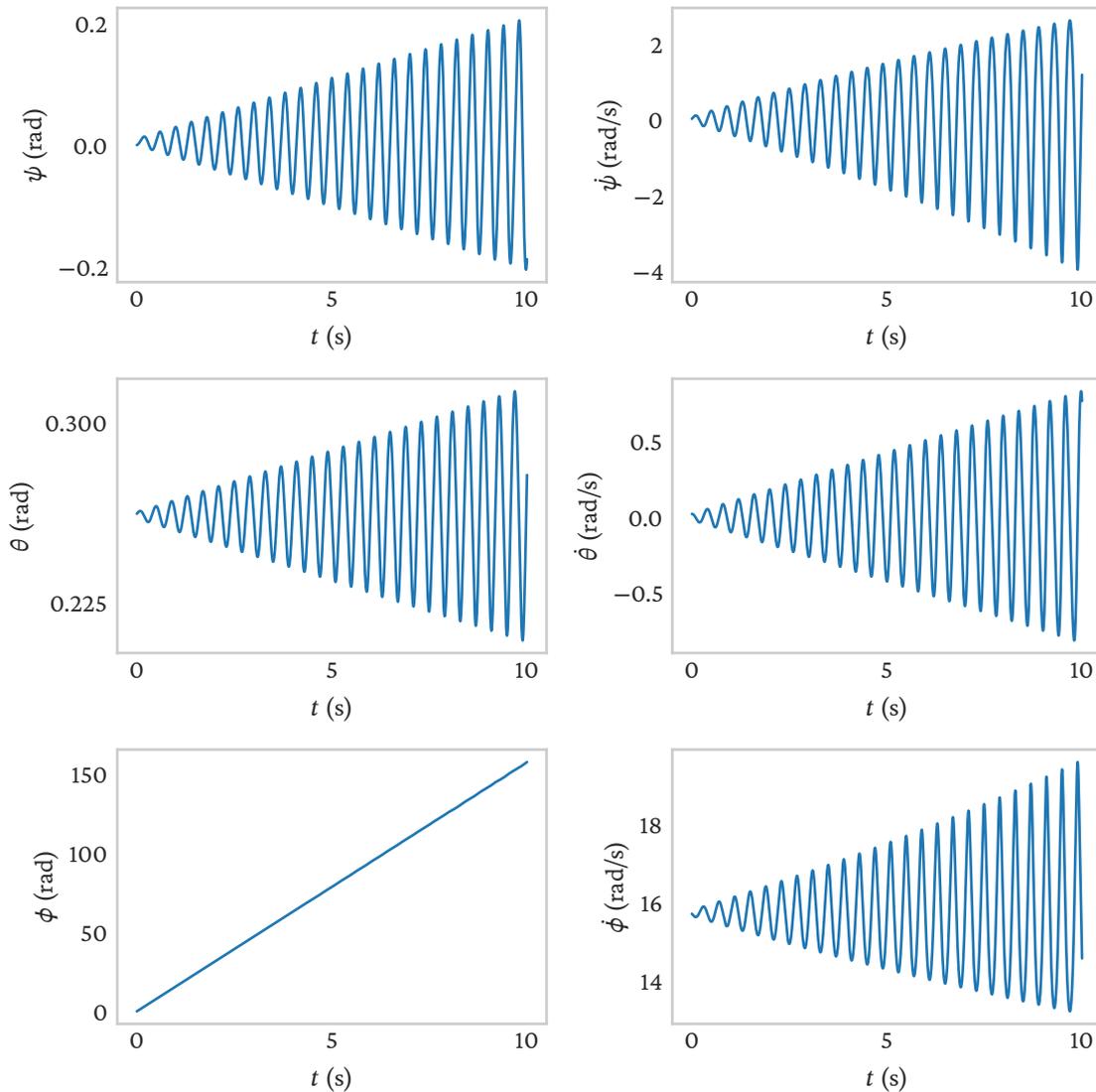
Figura 13 – Solução direta via ângulos de Euler, sobreposta à solução obtida com quatérnions e convertida para ângulos de Euler, obtidas a partir das condições iniciais não-singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02$ rad/s, $\theta_0 = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02$ rad/s, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71$ rad/s.



Fonte: Feito pelo autor.

A Figura 14 apresenta a solução tomada pelos ângulos de Euler, assim como suas derivadas temporais. É válido notar o comportamento estável apresentado, o qual cresceria indefinidamente caso não houvesse restrição temporal na simulação, ocasionando em singularidades.

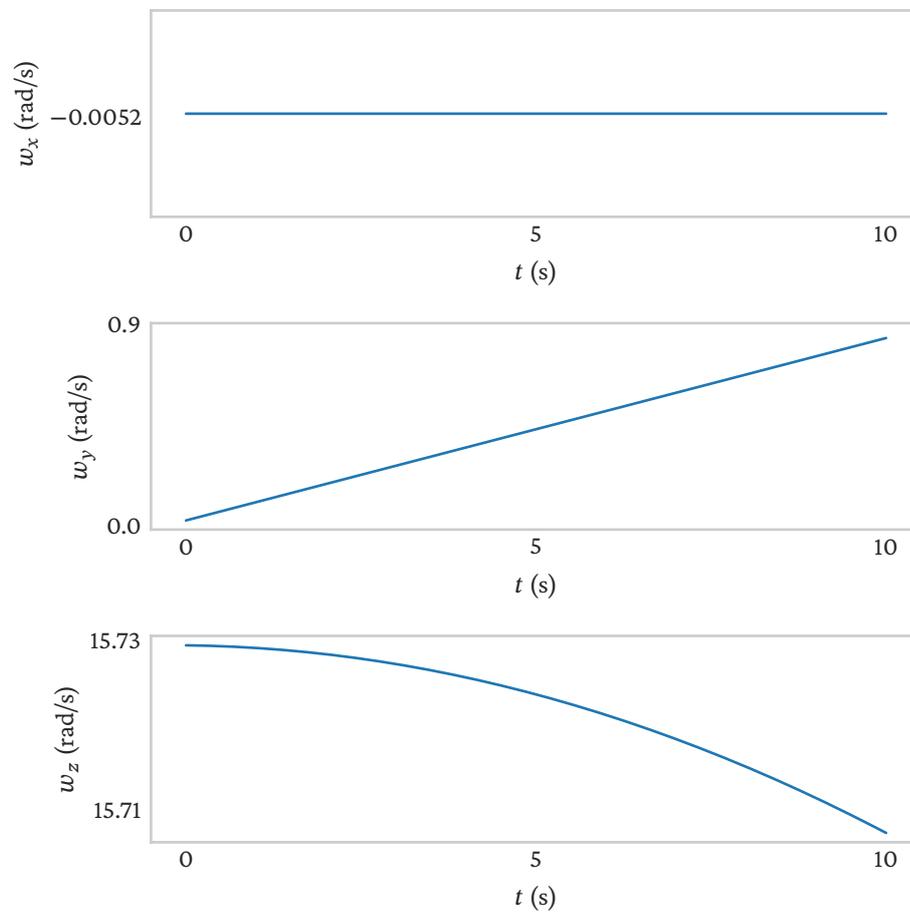
Figura 14 – Solução direta via ângulos de Euler (esquerda) e suas derivadas temporais (direita), obtidas a partir das condições iniciais não-singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

A Figura 15 apresenta os resultados das velocidades angulares ω_x , ω_y e ω_z , calculadas através da integração da Equação (84) (JAMBERSI, 2016).

Figura 15 – Velocidades angulares w_x , w_y e w_z , obtidas a partir das condições iniciais não-singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 15^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.

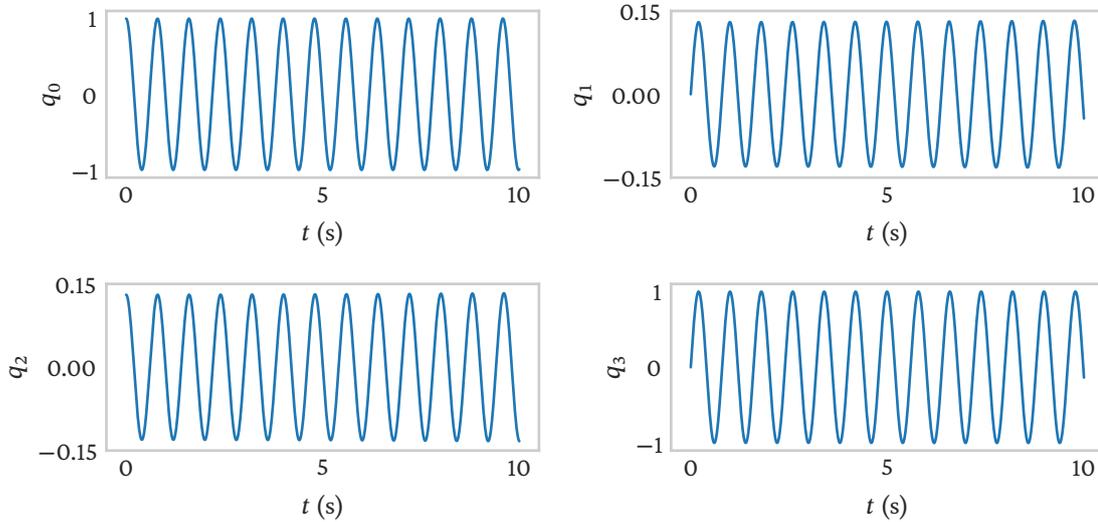


Fonte: Feito pelo autor.

A componente ω_x apresenta comportamento constante no gráfico, uma vez que na Equação (84) seu valor é nulo, que devido a integração, gera o resultado exibido.

Na Figura 16 é possível ver cada uma das componentes do quatérnion \hat{q} para a cinemática inversa, calculadas através do método Runge-Kutta de integração numérica.

Figura 16 – Componentes q_0, q_1, q_2 e q_3 da solução via quatérnions, obtida a partir das condições iniciais não-singulares $\psi_0 = 0^\circ, \dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \theta_0 = 15^\circ, \dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

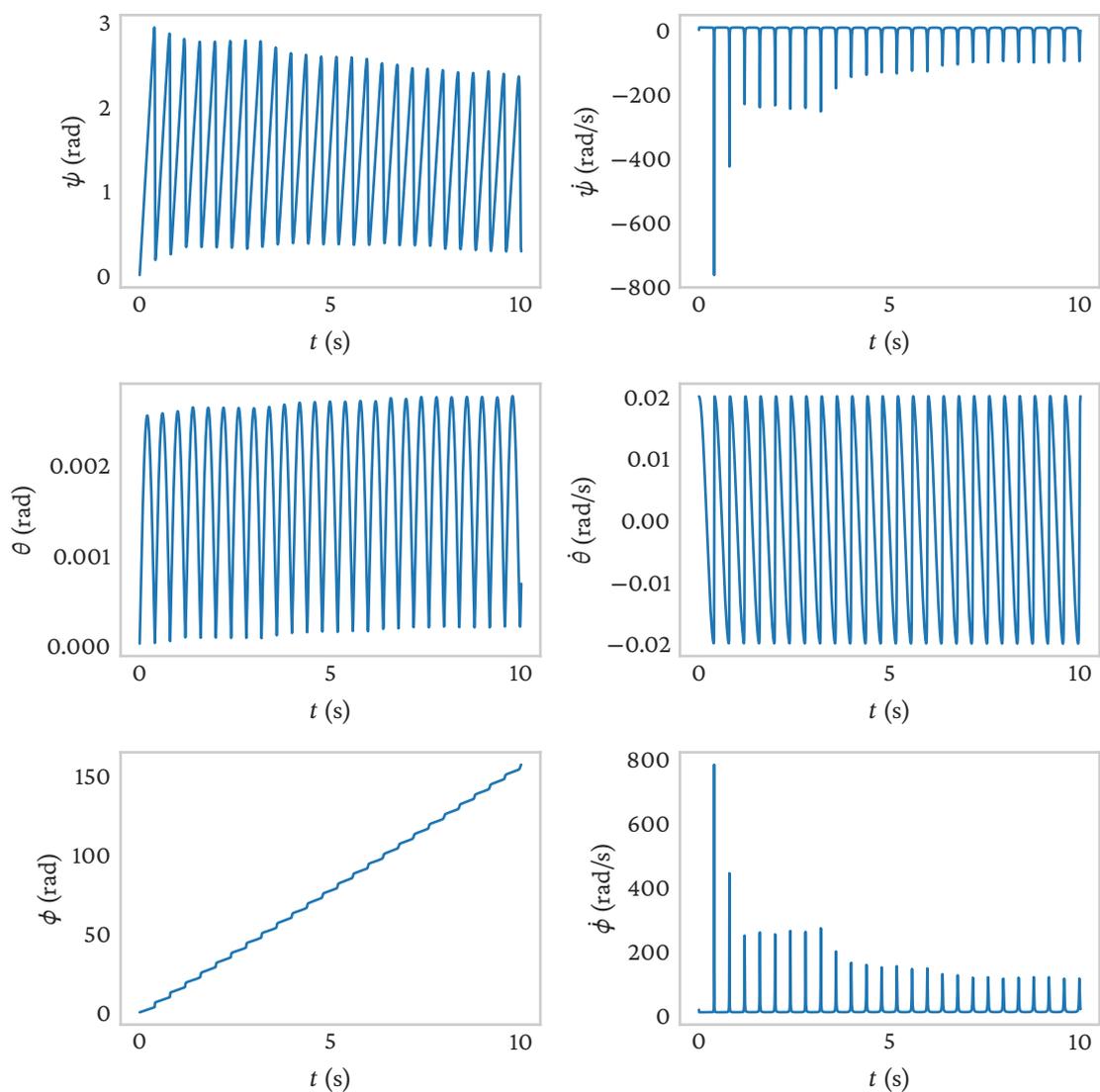
É possível, portanto, notar o comportamento estável do resultado obtido através da solução via quatérnions.

8.6.2 Simulação do caso próximo da singularidade

A título de comparação, para o caso a seguir foi escolhido um valor de $\theta_0 = 0,001^\circ \approx 0$, fazendo com que a Equação (33) se aproxime das condições de singularidade. As outras condições permanecem idênticas às do problema não-singular. Uma vez que há divergência entre os resultados de ambas as parametrizações, os gráficos são apresentados independentemente, o que confirma a presença das indefinições provenientes das singularidades.

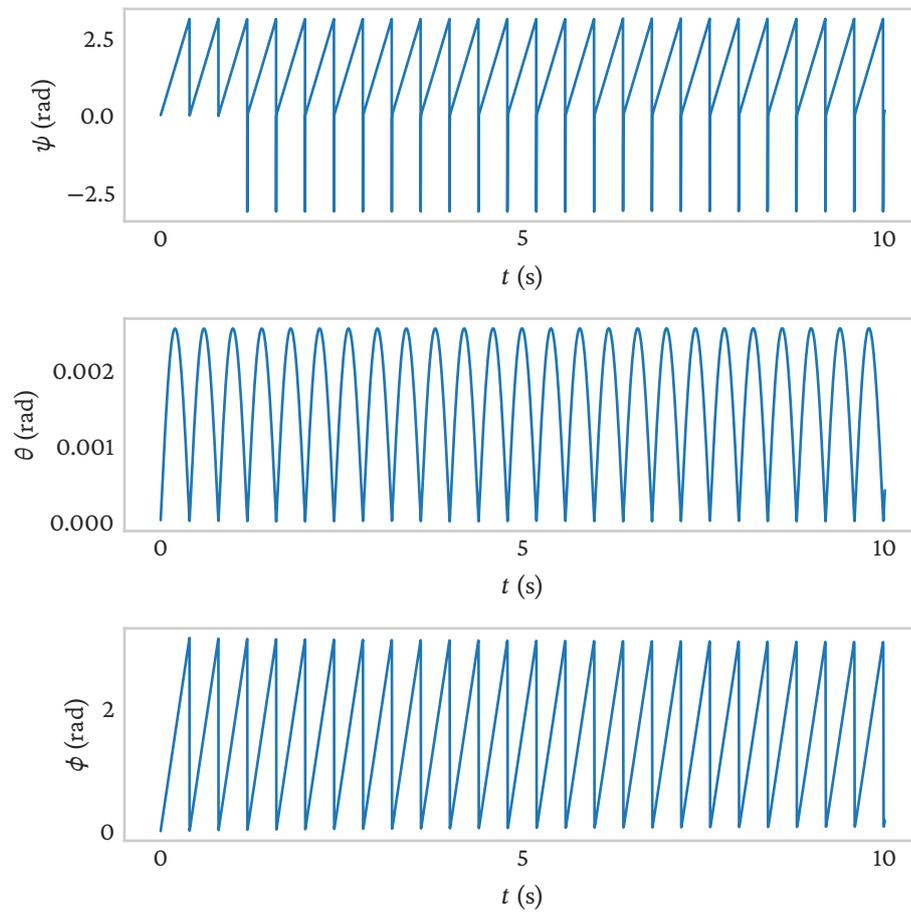
As Figuras 17 e 18 exibem os resultados de $\psi(t), \theta(t)$ e $\phi(t)$ pela cinemática inversa, respectivamente, por meio do cálculo das velocidades instantâneas e por meio dos quatérnions. As descontinuidades e assimetrias provocadas pela singularidade podem ser observadas no cálculo das velocidades $\dot{\psi}(t), \dot{\theta}(t)$ e $\dot{\phi}(t)$, e podem ser verificadas na Figura 17 (direita), onde fica explícito o comportamento inconsistente das funções.

Figura 17 – Solução direta via ângulos de Euler (esquerda) e suas derivadas temporais (direita), obtidas a partir das condições iniciais quase singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0,001^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

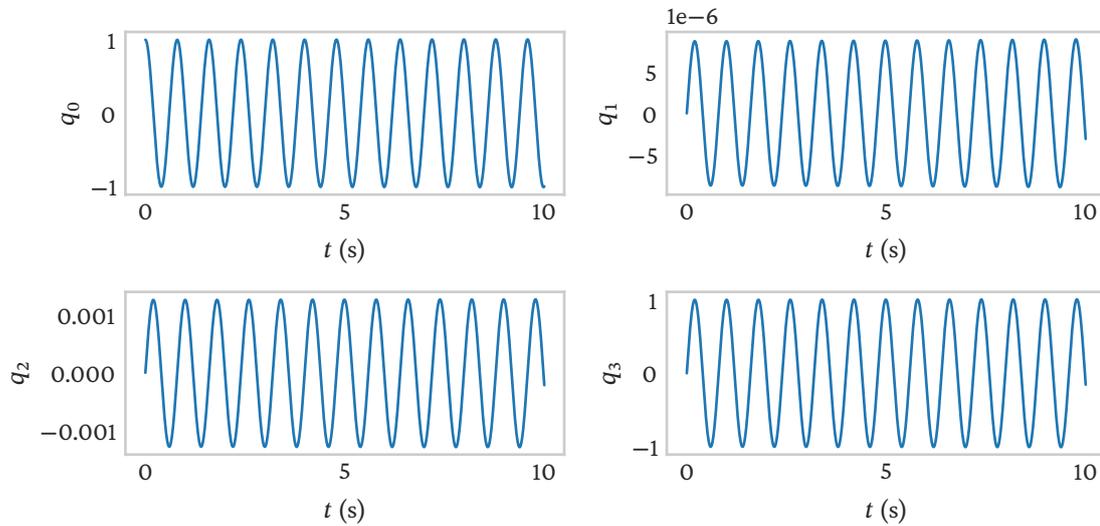
Figura 18 – Solução direta via quatérnions e convertida para ângulos de Euler, obtidas a partir das condições iniciais quase singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0,001^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

O gráfico de ψ diverge, justamente devido a presença das singularidades detectadas em (33). Utilizando as mesmas condições iniciais, pode-se determinar as componentes do quatérnion \hat{q} , conforme apresentado na Figura 19.

Figura 19 – Componentes q_0, q_1, q_2 e q_3 da solução via quatérnions, obtida a partir das condições iniciais quase singulares $\psi_0 = 0^\circ, \dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \theta_0 = 0,001^\circ, \dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.

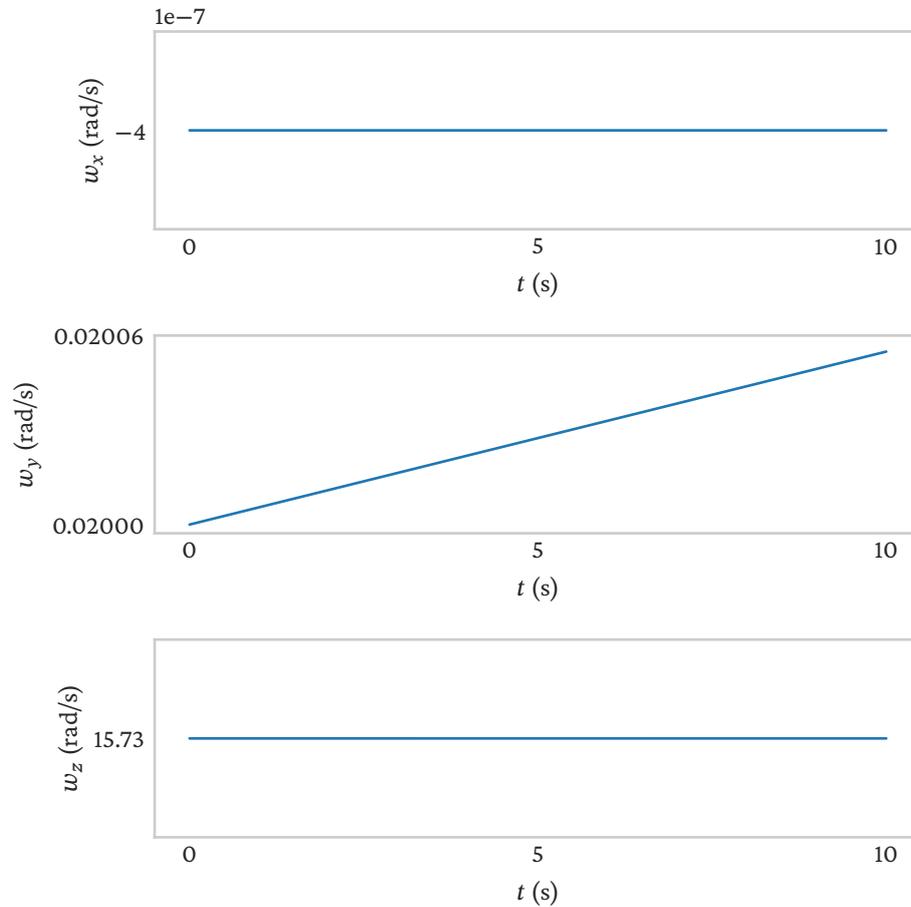


Fonte: Feito pelo autor.

Através dos quatérnions é possível realizar as integrações necessárias para a solução do problema da cinemática inversa para a condição inicial de $\theta_0 = 0,001^\circ \approx 0$.

Com finalidade de comparação, a Figura 20 traz as velocidades angulares encontradas a partir das condições iniciais próximas à singularidade.

Figura 20 – Velocidades angulares w_x , w_y e w_z , obtidas a partir das condições iniciais quase singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0,001^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



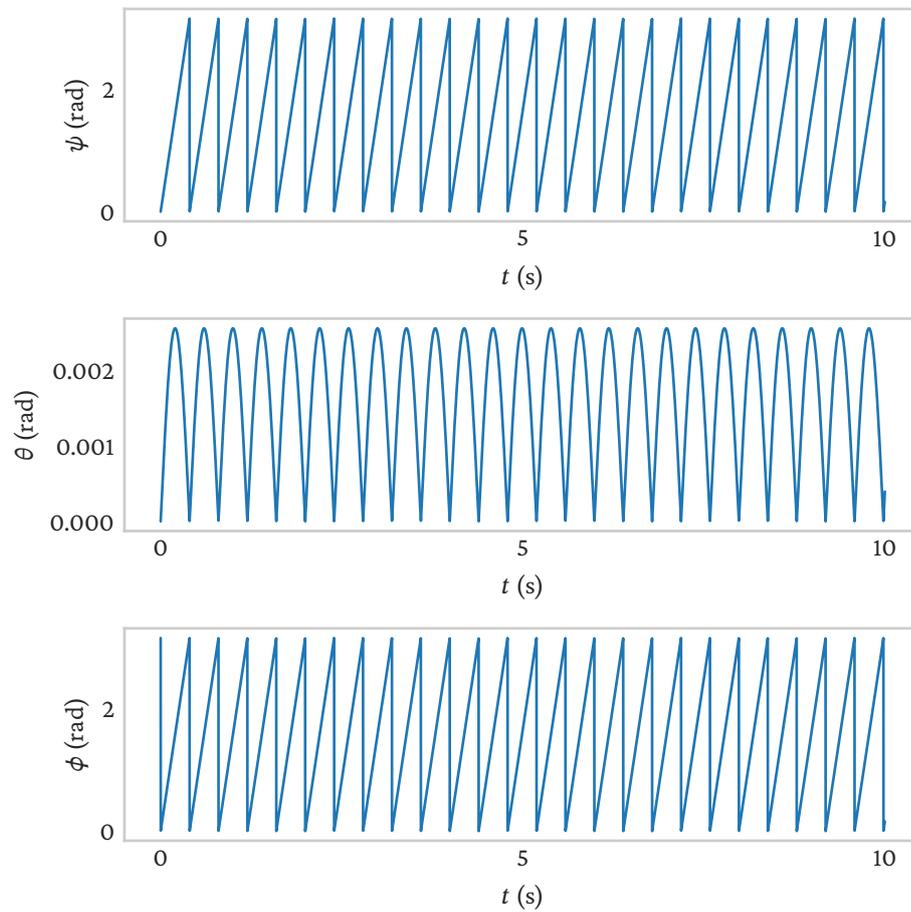
Fonte: Feito pelo autor.

As presença das singularidades não impedem o cálculo das velocidades angulares para as principais direções de inércia, como apresentado pela Figura 20 em que não se observa nenhuma alteração brusca no comportamento do gráfico.

8.6.3 Simulação do caso singular

Por fim, a situação apresentada abaixo trata exatamente das condições de singularidade, ou seja, com $\theta_0 = 0$. O resultado exibido na Figura 21 está relacionado apenas ao método dos quatérnions, uma vez que devido à condição singular, a Equação (33) não apresenta solução (JAMBERSI, 2016).

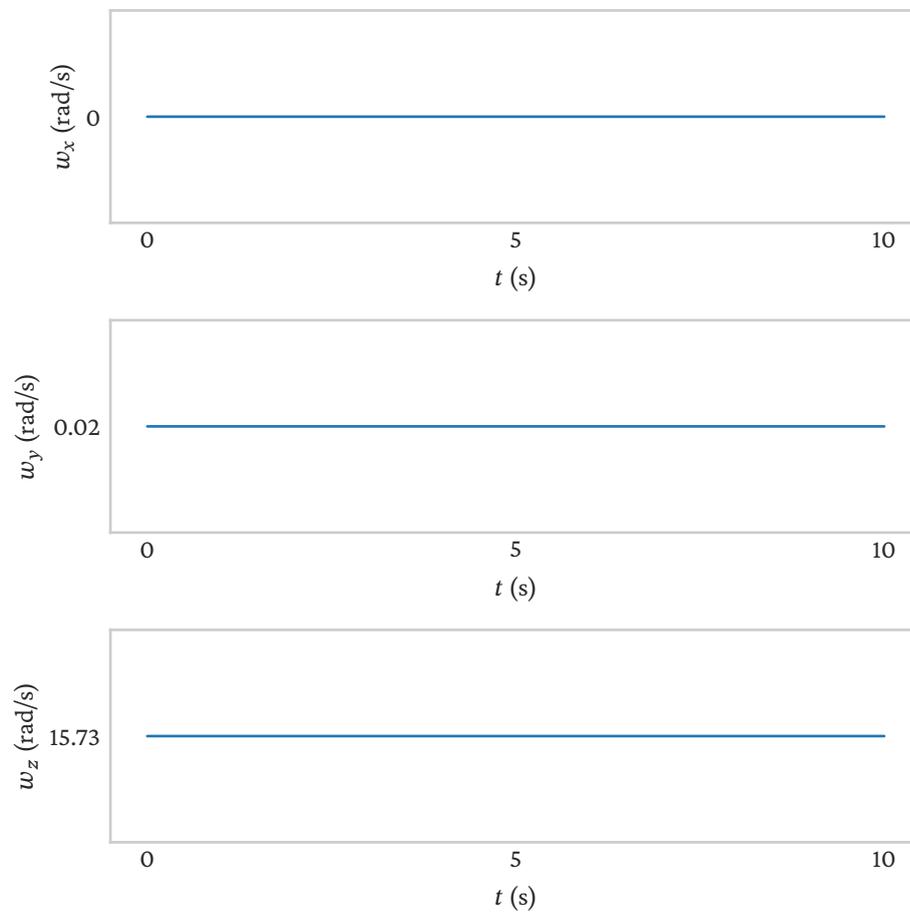
Figura 21 – Solução direta via quatérnions e convertida para ângulos de Euler, obtidas a partir das condições iniciais singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

A Figura 22 trata das velocidades angulares ω_x , ω_y e ω_z nas direções principais de inércia, para as condições iniciais que evoluem para a condição singular.

Figura 22 – Velocidades angulares w_x , w_y e w_z , obtidas a partir das condições iniciais singulares $\psi_0 = 0^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}$, $\phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.

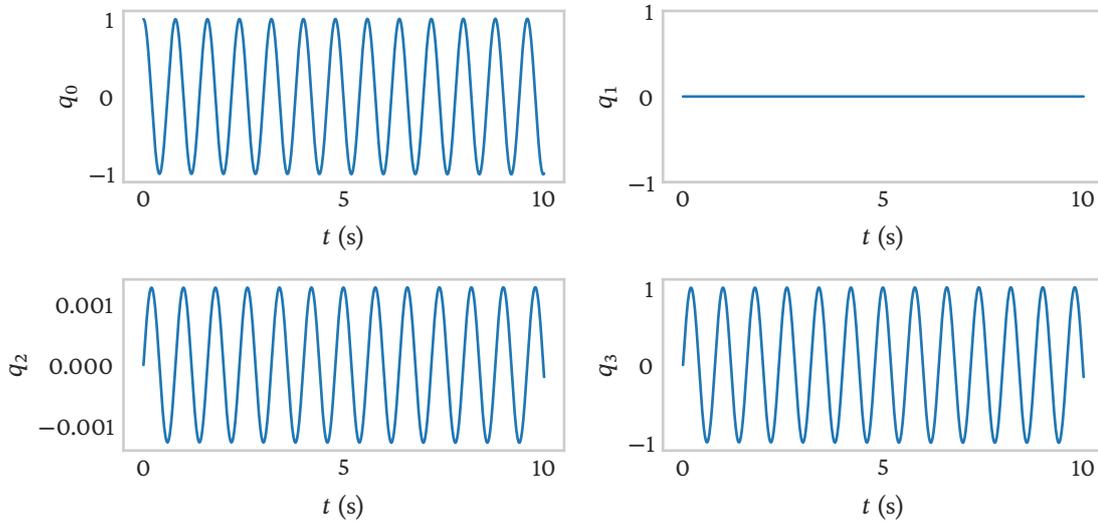


Fonte: Feito pelo autor.

Igualmente ao citado para o caso próximo às singularidades, neste o cálculo das velocidades angulares não apresentam comportamentos instáveis.

Já a Figura 23 traz as componentes do quatérnions \hat{q} obtidos pelas mesmas condições iniciais.

Figura 23 – Componentes q_0, q_1, q_2 e q_3 da solução via quatérnions, obtida a partir das condições iniciais singulares $\psi_0 = 0^\circ, \dot{\psi}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \theta_0 = 0,001^\circ, \dot{\theta}_0 = 0,02 \text{ rad/s}, \phi_0 = 0^\circ$ e $\dot{\phi}_0 = 15,71 \text{ rad/s}$.



Fonte: Feito pelo autor.

Com estas simulações, pode-se observar que a escolha da parametrização por meio dos quatérnions garante uma solução para o problema da cinemática inversa, se comparada à ferramenta fornecida pelo Teorema de Rotações de Euler.

As singularidades no problema da cinemática inversa poderiam ser parcialmente evitadas por meio dos Ângulos de Euler, se outras sequências de rotação fossem escolhidas. Contudo, essa escolha somente incorreria no deslocamento das singularidades para outros valores de ângulos, e não na solução da existência de tais indefinições matemáticas.

9 Conclusões

A caracterização do movimento de rotação de um corpo rígido pode ser feita por diversas ferramentas. Neste trabalho a exploração se deu com o olhar voltado para duas das principais, os Ângulos de Euler e os Quatérnions e como ambas se desenvolvem. Contudo, os movimentos dos corpos rígidos parametrizados pelos Ângulos de Euler incorrem em singularidades, como pode ser observado na Equação (33). A consequência disso está na dificuldade de se resolver cálculos de cinemática inversa, úteis na determinação da atitude de corpos em movimento rotacional.

Uma vez identificada a singularidade, uma alternativa seria a escolha de uma outra sequência de rotações, porém isso somente postergaria o problema. A parametrização por quatérnions então, conforme sugere a literatura em (JAMBERSI; SILVA, 2016; JAMBERSI, 2016; DIEBEL, 2006; VOIGHT, 2020; SINGLA; MORTARI; JUNKINS, 2004; SOUZA; FILHO, 2009), surge como opção de solução. Apesar de sua notação indicar maior dificuldade de interpretação física, sua álgebra mostrou-se

livre de singularidades matemáticas, viabilizando uma solução para o problema da cinemática inversa.

O método de integração numérica Runge-Kutta de 4ª ordem mostrou-se uma alternativa bastante eficaz de se realizar a cinemática inversa, a partir de condições iniciais bem estabelecidas e para ambas parametrizações. Os gráficos da Figura 13 indicam que para situações onde não existam singularidades, tanto os Ângulos de Euler quanto os Quatérnions apresentam resultados idênticos, dentro dos 10 segundos estabelecidos nas simulações, para rotações finitas de um giroscópio esférico perfeitamente simétrico. Em contrapartida, quando foram feitas as análises de condição inicial, em que $\theta_0 = 0^\circ$, para a qual a Equação (33) apresenta uma indefinição matemática, tornou-se possível observar resultados somente quando as rotações são parametrizadas pelos Quatérnions, conforme a Figura 21, uma vez que não há solução para esta condição para os Ângulos de Euler.

Referências

ARFKEN, George B; WEBER, Hans-Jurgen. **Mathematical methods for physicists**. Academic Press Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 2005.

BAEZ, John. The octonions. **Bulletin of the american mathematical society**, v. 39, n. 2, p. 145–205, 2002.

BEN-ARI, Mordechai. **A tutorial on Euler angles and quaternions**. 2014.

BIASI, Sergio Coutinho de; GATTASS, Marcelo. Utilização de quatérnios para representação de rotações em 3-D. **Relatório técnico, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro**, 2007. Disponível em: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass>.

BOLDRINI, J.L. **Algebra linear**. HARBRA, 1986. ISBN 9788529402024. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=M8CNGwAACAAJ>.

CARRARA, Valdemir. Cinemática e dinâmica de satélites artificiais. **São José dos Campos: INPE**, 2012.

DIEBEL, James. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. **Matrix**, v. 58, n. 15-16, p. 1–35, 2006.

FERNANDES, SS; ZANARDI, MCFPS. **Fundamentos da astronáutica e suas aplicações**. 2018.

FIGUEIREDO, Divino. Conceitos Básicos de Sensoriamento Remoto, 2005. Disponível em: https://www.clickgeo.com.br/wp-content/uploads/2013/04/conceitos_sm.pdf.

FONSECA, Jesus Bravo de Sousa da; PRADO, Antonio F. Bertachini de Almeida; ZANARDI, Maria Cecília F. P. S. **Manobras de órbita e atitude de satélites artificiais**. 2010. 51 p.

FREZZA, Júnior Saccon. Noções de referencial inercial: um estudo de epistemologia genética com alunos de física, 2011.

GARCIA, R. V.; KUGA, H. K.; ZANARDI, M. C. F. P. S. Estimção de altitude em tempo real utilizando o filtro de Kalman estendido e ângulos de Euler. *In*: CONEM 2010 - VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA. **Anais do CONEM 2010**. 2010. Disponível em: <https://www.abcm.org.br/anais/conem/2010/PDF/CON10-1312.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2020.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: Complexos, Polinômios e Equações**. E. Atual, 1977. v. 6.

JAMBERSI, Andreyson Bicudo. Movimentos regulares e caóticos de rotação de corpos rígidos. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2016.

JAMBERSI, Andreyson Bicudo; SILVA, Samuel da. A Sutileza dos Quatérnions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 2, 2016.

JOSEPH, Toby. An Alternative Proof for Euler Rotation Theorem, ago. 2020. DOI: 10.1007/s00283-020-09991-z.

KUIPERS, Jack B. **Quaternions and rotations sequences: A primer with applications to orbits aerospace and virtual reality**. Trilha, 1999. v. 1.

LAGE, Eduardo. Ângulos de Euler. **Revista de Ciência Elementar**, v. 8, n. 3, 2020. DOI: 10.24927/rce2020.043. Disponível em: <https://rce.casadasciencias.org/rceapp/art/2020/043/>. Acesso em: 3 out. 2021.

LANDAU, Lev Davidovich; LIFSHITZ, Evgenii Mikhailovich. **Mechanics: Volume 1**. Butterworth-Heinemann, 1976. v. 1.

LEMOS, Nivaldo A. Mecânica analítica.[SI]: Editora Livraria da Física, 2007. **Citado na**, p. 6, 2004.

MATHWORKS. **Inverse Kinematics, algorithm design with MATLAB and Simulink**. Disponível em: <https://www.mathworks.com/discovery/inverse-kinematics.html>.

NASA. **Aircraft Rotations: Body Axes**. 2008. Disponível em: <https://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/rotations.html>.

NOLZE, Gert. Euler angles and crystal symmetry. **Crystal Research and Technology**, v. 50, n. 2, p. 188–201, 2015. DOI: 10.1002/crat.201400427. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/crat.201400427>.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica**. E. Blucher, 2013. v. 1. ISBN 9788521207450.

OLIVEIRA, André Schneider de *et al.* Análise cinemática via quatérnions duais aplicada a um sistema veículo-manipulador subaquático. Florianópolis, SC, 2011.

OLIVEIRA, Leandro Sales Almeida de *et al.* Evolução das ideias sobre números imaginários. Universidade Federal da Paraíba, 2015.

PALAI, Bob; PALAI, Richard. Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, v. 2, p. 215–220, jan. 2007. DOI: 10.1007/s11784-007-0042-5.

PIO, R. Euler angle transformations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 11, n. 4, p. 707–715, 1966. DOI: 10.1109/TAC.1966.1098430.

QUANDT, Joana BO *et al.* Algumas aplicações de matrizes, 2001.

SANTOS, Josué Cardoso dos *et al.* Análise da estabilidade do Movimento Rotacional de Satélites Artificiais com Quatérnions e sob a influência de Torques Externos. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.

SANTOS, Winderson Eugenio. **Sistema para Identificação da Curvatura na Junta Prismática de um Robô via Quaternions**. 2003. Tese – Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/86275>.

SAVELYEV, I.; LEIB, G. **Physics: a general course**. Mir, 1989. (Physics, a General Course: Quantum Optics, Atomic Physics, Solid State Physics, Physics of the Atomic Nucleus and Elementary Particles). ISBN 9785030009001.

SILVA, Amanda Maria da. **A representação das matrizes de rotações com o uso dos quatérnions: aplicações à fotogrametria**. 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.

SINGLA, Puneet; MORTARI, D.; JUNKINS, John. How to Avoid Singularity for Euler Angle Set?, jan. 2004.

SOUZA, André Chavenco de; FILHO, Luiz de Siqueira Martins. Controle de Altitude de Satélites Artificiais. **Santo André: UFABC**, 2009.

STEWART, James. **Cálculo, Volume 2**. Trilha, 2013. v. 2.

VOIGHT, John. **Quaternion Algebra**. Springer International Publishing, 2020.

WOIT, Peter. **Euler's Formula and trigonometry**. 2019. Disponível em: <https://www.math.columbia.edu/~woit/eulerformula.pdf>.

ZEITLHÖFLER, Julian. Nominal and observation-based attitude realization for precise orbit determination of the Jason satellites, 2019.

APÊNDICE A – Implementação Python

```
#
# Implementação da cinemática inversa para um giroscópio
# Giro ZYZ (3-2-3)
#
# Baseado na versão Octave de Andreyson Bicudo Jambersi,
# "MOVIMENTOS REGULARES E CAÓTICOS DE ROTAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS", 2016.
#
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

# Condição inicial nos ângulos de Euler, em graus (serão convertidos em rad):
# psi = 0, theta = 15, phi = 0
#
# Condição inicial nas derivadas dos ângulos de Euler, em rad/s
# dpsi = 0.02, dtheta = 0.02, dphi = 15.71
def condicao_inicial_1():
    # Condição inicial distante da singularidade
    return (np.array([0.0, 15.0, 0.0])*np.pi/180.0,
            np.array([0.02, 0.02, 15.71]))

# Condição inicial nos ângulos de Euler, em graus (serão convertidos em rad):
# psi = 0, theta = 0.001, phi = 0
#
# Condição inicial nas derivadas dos ângulos de Euler, em rad/s
# dpsi = 0.02, dtheta = 0.02, dphi = 15.71
def condicao_inicial_2():
    # Condição inicial próxima da singularidade
    return (np.array([0.0, 0.001, 0.0])*np.pi/180.0,
            np.array([0.02, 0.02, 15.71]))

# Condição inicial nos ângulos de Euler, em graus (serão convertidos em rad):
# psi = 0, theta = 0, phi = 0
#
# Condição inicial nas derivadas dos ângulos de Euler, em rad/s
# dpsi = 0.02, dtheta = 0.02, dphi = 15.71
def condicao_inicial_3():
    # Condição inicial na singularidade
    return (np.array([0.0, 0.0, 0.0])*np.pi/180.0,
```

```

        np.array([0.02, 0.02, 15.71]))

# Cria os parâmetros de simulação do corpo
def parametros_corpo(massa, diametro):
    raio = 0.5*diametro
    inercia = 0.5*massa*raio**2

    return {
        'massa': massa,          # kg
        'diametro': diametro,   # m
        'raio': raio,           # m
        # Momentos de inércia em kg m^2
        'inercia': np.array([inercia, 0.5*inercia, 0.5*inercia])
    }

# Imprime os parâmetros de simulação do corpo para conveniência do usuário
def imprime_parametros_corpo(corpo):
    s = f"      M = {corpo['massa']}\n"
    s += f"      R = {corpo['raio']}\n"
    s += f"      Ixx = {corpo['inercia'][0]}\n"
    s += f"      Iyy = {corpo['inercia'][1]}\n"
    s += f"      Izz = {corpo['inercia'][2]}"

    return s

# Calcula a velocidade angular a partir dos ângulos de Euler e suas
# derivadas
#
# ang = [psi, theta, phi]
# dang = [dpsi, dtheta, dphi]
def velocidade_angular(ang, dang):
    s, c = np.sin(ang), np.cos(ang)
    return np.array([dang[1]*s[2] - dang[0]*c[2]*s[1],
                    dang[1]*c[2] + dang[0]*s[2]*s[1],
                    dang[2] + dang[0]*c[1]])

# Converte ângulos de Euler em sua representação com quaternion
# ang = [psi, theta, phi]
def quaternion(ang):
    s, c = np.sin(ang/2), np.cos(ang/2)

```

```

    return np.array([c[0]*c[1]*c[2] - s[0]*s[1]*s[2],
                    c[0]*s[1]*s[2] - s[0]*c[1]*c[2],
                    c[0]*s[1]*c[2] - s[0]*c[1]*s[2],
                    c[0]*c[1]*s[2] - s[0]*s[1]*c[2]])

# Função do lado direito para o método de Runge-Kutta
#
# São resolvidos simultaneamente os sistemas para a velocidade angular (w) e
# quaternions (q)
#
# qw = [wx wy wz q1 q2 q3 q4]
def cinversa_quaternion(t, qw, corpo):
    inercia = corpo['inercia'] # [Ixx, Iyy, Izz]
    w = qw[:3] # [wx, wy, wz]
    q0, q1, q2, q3 = qw[3:]
    Q = np.array([q0, -q1, -q2, -q3,
                  q1, q0, -q3, q2,
                  q2, q3, q0, -q1,
                  q3, -q2, q1, q0]).reshape(4, 4)
    wdot = np.cross(-w, inercia*w)/inercia
    qdot = 0.5*Q.dot(np.insert(w, 0, 0))

    return np.concatenate((wdot, qdot))

# Função do lado direito para o método de Runge-Kutta
#
# São resolvidos simultaneamente os sistemas para a velocidade angular (w) e
# ângulos de Euler (q)
#
# qe = [wx wy wz psi theta phi]
def cinversa_euler(t, qe, corpo):
    inercia = corpo['inercia'] # [Ixx, Iyy, Izz]
    w = qe[:3] # [wx, wy, wz]
    s, c = np.sin(qe[3:]), np.cos(qe[3:])
    aux = (w[1]*s[2] - w[0]*c[2])/s[1]

    wdot = np.cross(-w, inercia*w)/inercia
    dangs = np.array([aux, w[0]*s[2] + w[1]*c[2], w[2]-aux*c[1]])

    return np.concatenate((wdot, dangs))

```

```

# Calcula as derivadas temporais dos ângulos de Euler a partir dos valores
# dos ângulos e das velocidades angulares
def ddt_angulos_euler(angs, wang):
    dangs = np.zeros_like(angs)

    for i, (ang, w) in enumerate(zip(angs.T, wang.T)):
        s, c = np.sin(ang), np.cos(ang)
        aux = (w[1]*s[2] - w[0]*c[2])/s[1]
        dangs[:, i] = np.array([aux, w[0]*s[2] + w[1]*c[2], w[2]-aux*c[1]])

    return dangs

# Converte a representação em quaternion para os ângulos de Euler
# correspondentes
def quaternion_para_euler(quat):
    angs = np.zeros((3, quat.shape[1]))

    for i, q in enumerate(quat.T):
        # Normalização
        q0, q1, q2, q3 = q/np.linalg.norm(q, ord=2)

        # Matriz de rotação por quaternions (não é necessário montá-la completa...)
        Q = np.array([[1-2*(q2**2+q3**2), 2*(q1*q2 + q3*q0), 2*(q1*q3 - q2*q0)],
                      [2*(q1*q2 - q3*q0), 1-2*(q1**2+q3**2), 2*(q2*q3 + q1*q0)],
                      [2*(q1*q3 + q2*q0), 2*(q2*q3 - q1*q0), 1-2*(q1**2+q2**2)]]

        # 3-2-3
        angs[:, i] = np.array([np.arctan2(Q[2, 1], Q[2, 0]),
                               np.arccos(Q[2, 2]),
                               np.arctan2(Q[1, 2], Q[0, 2])])

    return angs

### Programa principal
if __name__ == '__main__':
    # Formato de apresentação de resultados numéricos
    np.set_printoptions(precision=3)

    print('Iniciando simulação...')

    # Informações para a função solve_ivp

```

```

ic = condicao_inicial_2 # Condição inicial escolhida
angs, dangs = ic()    # Avalia a condição inicial

# Constroi a condição inicial para velocidade angular e quaternions
w0q0 = np.concatenate((velocidade_angular(angs, dangs),
                        quaternion(angs)))

# Constroi a condição inicial para velocidade angular e Euler
w0e0 = np.concatenate((velocidade_angular(angs, dangs), angs))

tempo = [0, 10] # Tempo inicial, tempo final

# Valores de t onde vamos calcular o x(t) (para fazer o gráfico, por exemplo)
t = np.linspace(0, 10, 10000)

# Parâmetros do corpo
corpo_par = parametros_corpo(massa=2.0, diametro=0.15)

print(f'-> Parâmetros do corpo:\n{imprime_parametros_corpo(corpo_par)}')
print(f'-> Tempo: {tempo}')
print(f'-> Condição inicial (ângulos de Euler)      : {angs}')
print(f'-> Condição inicial (derivada ângulos de Euler): {dangs}')
print(f'-> Condição inicial (velocidade angular)    : {w0q0[:3]}')
print(f'-> Condição inicial (quaternions)          : {w0q0[3:]}')
print(f'-> Condição inicial (velocidade angular)    : {w0e0[:3]}')
print(f'-> Condição inicial (Euler)                : {w0e0[3:]}')

# Aplicação do Runge-Kutta 45 para os quaternions
print('Iniciando solução por quaternions...')
solver_q = solve_ivp(cinversa_quaternion, tempo, w0q0, args=(corpo_par,),
                    method='RK45', t_eval=t)

# Aplicação do Runge-Kutta 45 para os ângulos de Euler
# Note que se a condição inicial for singular, o método não é aplicado
if ic is not condicao_inicial_3:
    print('Iniciando solução por ângulos de Euler...')
    solver_e = solve_ivp(cinversa_euler, tempo, w0e0, args=(corpo_par,),
                        method='RK45', t_eval=t)

# Salvamento de resultados
resfile = f'{ic.__name__}_q.csv'
print(f'Salvando resultados com quaternions em {resfile}...')

```

```

print(f'-> Convertendo para ângulos de Euler')

# Obtendo o equivalente em ângulos de Euler
angs = quaternion_para_euler(solver_q.y[3:, :])

np.savetxt(resfile,
            np.block([solver_q.t.reshape(-1, 1), solver_q.y.T, angs.T]),
            delimiter=',')

# Note que se a condição inicial for singular, não há resultados
# relativos a ângulos de Euler
if ic is not condicao_inicial_3:
    resfile = f'{ic.__name__}_e.csv'
    print(f'Salvando resultados com Euler em {resfile}...')
    print(f'-> Calculando derivadas dos ângulos de Euler')

dangs = ddt_angulos_euler(solver_e.y[3:, :], solver_e.y[:3, :])

np.savetxt(resfile,
            np.block([solver_e.t.reshape(-1, 1), solver_e.y.T, dangs.T]),
            delimiter=',')

print(f'-> STATUS (Q): {"SUCESSO" if solver_q.status == 0 else "FALHOU"}')
if ic is not condicao_inicial_3:
    print(f'-> STATUS (E): {"SUCESSO" if solver_e.status == 0 else "FALHOU"}')

# -- giroscopio_quaternions.py -----

```