

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA - PPGEMec

CASSIANO DA SILVA TAVARES

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DA PRODUÇÃO DE PRÓTESES VIA OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA**



São Carlos - SP
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA - PPGEMec

CASSIANO DA SILVA TAVARES

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DA PRODUÇÃO DE PRÓTESES VIA OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA**

Texto da dissertação para o mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Dr. Jose Benaque Rubbert



São Carlos - SP
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Cassiano da Silva Tavares, realizada em 11/11/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Jose Benaque Rubert (UFSCar)

Prof. Dr. André Teófilo Beck (EESC/USP)

Prof. Dr. Roberto Fernandes Tavares Neto (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Dedico este trabalho a minha filha Cecília que nasceu durante o processo desta pesquisa no dia 15/05/2022.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer os meus pais, Ilson e Nice, por sempre dedicarem todo o esforço possível em minha educação e sempre acreditarem no meu potencial investindo tempo, dinheiro e saúde em minha jornada. Sem esta fagulha educacional e todo amor de vocês nada disso seria possível!

Gostaria de agradecer imensamente a minha esposa Jéssica que sempre me apoiou em toda esta jornada de muitos obstáculos compilados neste trabalho. Ela teve paciência, empatia, compaixão e muito amor de estar ao meu lado nos momentos mais difíceis e mais prazerosos ao longo desses dois anos de projeto. Ela me deu forças para continuar quando tudo parecia impossível e teve uma enorme participação no sucesso deste trabalho!

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Jose Benaque Rubert, deixo todo o meu carinho e gratidão por todo o conhecimento que me foi transmitido ao longo do projeto e na minha trajetória acadêmica pelo PPGMec. Agradeço também por toda a paciência que o senhor teve comigo devido as minhas limitações técnicas, acadêmicas e problemas pessoais que tive que enfrentar ao longo do projeto.

Os professores doutores Sidney Bruce Shiki e Vitor Ramos Franco agradeço por todas as contribuições para o o meu crescimento acadêmico. E por toda a cordialidade, respeito pelo trabalho e motivação empregada para com os alunos no campo da ciência da Engenharia Mecânica.

Deixo um agradecimento especial ao pessoal do Laboratório de Otimização de Sistemas Multifísicos (MSOL) da Universidade Politécnica de São Paulo devido a toda a colaboração nas implementações no pacote FEniCS. Com a ajuda do dr. Diego Hayashi Alonso consegui realizar: 1) a instalação da biblioteca Dolfin Adjoint em um ambiente Docker e 2) a instalação do solver IPOPT, que utiliza o método dos Pontos Interiores para a resolução de sistemas não-lineares. Com o apoio do doutorando André Ferreira da Silva consegui implementar: 1) o filtro de densidade de *Helmholtz* no meu segundo modelo do presente trabalho obtendo resultados excelentes, 2) resolver o primeiro modelo de Otimização Topológica por um método exato, através do método

dos pontos interiores (última seção de testes computacionais deste trabalho) e 3) obter *insights* de como debugar e explorar as sensibilidades das condições de contorno dos modelos, bem como utilizar o *software* Paraview para o apoio na visualização e análises dos resultados. Agradeço também ao Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva que também apoiou as implementações. Com iniciativas como a colaboração de todos estes pesquisadores é que a ciência brasileira alcança avanços cada vez maiores.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) deixo os meus sinceros agradecimentos pelo fomento e financiamento do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSCar.

Por fim, aos meus colegas de turma, deixo a minha enorme admiração e carinho por toda ajuda dada nos meus primeiros passos na área da Engenharia Mecânica, suporte nos trabalhos acadêmicos e desafios na área.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”

“This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001”

Resumo

Um dos grandes desafios enfrentados pela medicina ortopédica regenerativa se encontra na produção de próteses e implantes buscando obter um comportamento próximo ao dos ossos danificados ou perdidos. A complexidade da tarefa se deve à composição orgânica dos ossos e a sua contínua, porém finita, capacidade de renovação biológica e conseqüentemente limitação da regeneração. Com isso, o dano na estrutura óssea pode chegar a duas situações: atingir um nível baixo e o osso consegue se regenerar e o caso inverso. Quando o primeiro caso ocorre, o osso consegue se regenerar com um auxílio externo (talas e gesso). Já no segundo caso, existem três possíveis abordagens: 1) realizar um autoenxerto com o material biológico do próprio paciente, 2) realizar um enxerto com materiais ósseos de outra pessoa e 3) a inserção de uma prótese. Este último é o contexto em que se desenvolve este trabalho. Considera-se a utilização da Otimização Topológica no projeto de próteses a fim de obter soluções mais eficientes do ponto de vista da distribuição de material e esforços internos. Testes computacionais foram realizados avaliando três métodos de solução: Critério de Otimalidade, Minimização Alternada e Pontos Interiores, respectivamente buscando explorar as características mecânicas elásticas de quatro fases de vida dos ossos. Duas formulações do problema de Mínima Flexibilidade foram implementados no ambiente FEniCS. São utilizados dois filtros para tratar pseudo-densidades e dependência de malha na distribuição de material propostos por Andreassen e Lazarov, respectivamente. São apresentados exemplos numéricos para verificar a generalidade dos métodos propostos. Os resultados indicaram que: (i) a fase de vida em que o tecido ósseo se encontra afetam diretamente suas propriedades mecânicas e (ii) os métodos exatos com o filtro de densidades proposto por Lazarov viabilizam a manufatura das geometrias geradas através da técnica de Otimização Topológica.

Palavras-chave: Próteses Humanas. Bio-fabricação. Otimização Topológica. Método dos Elementos Finitos.

Abstract

One of the great challenges faced by regenerative orthopedic medicine is the production of prostheses and implants seeking to achieve a behavior close to that of damaged or lost bones. The complexity of the task is due to the organic composition of bones and their continuous, but finite, capacity for biological renewal and, consequently, the limitation of regeneration. With this, the damage to the bone structure can reach two situations: it comes at a low level and the bone is able to regenerate, and the opposite case. When the first case occurs, the bone is able to regenerate itself with an external aid (splints and plaster). In the second case, there are three possible approaches: 1) performing an autograft with the patient's own biological material, 2) performing a graft with bone materials from another person, and 3) inserting a prosthesis. The latter is the context in which this work is developed. The use of Topological Optimization is considered in the design of prostheses in order to obtain more efficient solutions from the point of view of material distribution and internal efforts. Computational tests were carried out evaluating three solution methods: Optimality Criterion, Alternating Minimization, and Interior Points, respectively seeking to explore the elastic mechanical characteristics of four life stages of bones. Two formulations of the Minimum Compliance problem were implemented in the FEniCS environment. Two filters are used to handle pseudo-densities and mesh dependence in the material distribution proposed by Andreassen and Lazarov, respectively. Numerical examples are presented to verify the generality of the proposed methods. The results indicated that: (i) the life stage in which the bone tissue is directly affected its mechanical properties and (ii) the exact methods with the density filter proposed by Lazarov enable the manufacture of the geometries generated through the Topology Optimization technique.

Keywords: Human Prostheses. Bio-Manufacturing. Topology Optimization. Finite Element Method.

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de treliças das células unitárias.	21
2.2	Análise dos cenários simulados: à esquerda: fêmur saudável, ao meio prótese tradicional e à direita a prótese otimizada.	22
2.3	Prótese para cirurgia de quadril otimizada via TO.	23
2.4	Região projetada pela TO - primeiro ciclo.	24
2.5	Região projetada pela TO - segundo ciclo.	24
2.6	Comparação entre os dois ciclos de TO: à direita - primeiro ciclo, à es- querda - segundo ciclo.	25
2.7	Osso trabecular: (a) modelo esquemático do osso trabecular, (b) estru- tura de <i>Voronoi</i> escaneada de um microscópio eletrônico.	26
2.8	Estruturas naturais: (a) modelo esquemático da estrutura das asas da borboleta, (b) modelo esquemático da estrutura da casca do besouro <i>L.</i> <i>Augustus</i>	27
3.1	Problema de TO por meio da distribuição de material isotrópico.	35
3.2	Análise de sensibilidade geométrica em função do refino das malhas.	41
3.3	Padrão de instabilidade de tabuleiro em uma viga simplesmente apoiada.	42
3.4	Topologias otimizadas considerando filtro de densidades: (a) 300; (b) 1200; (c) 4800; (d) 19200 elementos.	47
4.1	<i>Framework</i> do método Critério de Otimalidade.	56
4.2	<i>Framework</i> de implementação do método exato para os modelos de TO.	60
4.3	Desenho esquemático da teoria da Homogeneização.	62
4.4	Topologia admissível Ω no domínio D	64
5.1	Diferentes modos para obtenção do código para implementação do sis- tema de equações adjuntas.	74
5.2	Viga MBB parcial.	77
5.3	Resultados para o problema de Mínima Flexibilidade.	78
5.4	Avaliação da Redução de Peso no problema Flexibilidade Mínima - Te- cido ósseo.	79
5.5	Viga Engastada com carregamento frontal.	81
5.6	Análise das densidades finais- Tecido ósseo.	82

5.7	Análise das densidades finais- Cartilagem.	82
5.8	Análise das densidades finais- Cartilagem Calcificada.	83
5.9	Análise das densidades finais- Tecido Fibroso.	83
5.10	Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística- Tecido ósseo - 300 x 100 elementos.	85
5.11	Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística.	86
5.12	Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística - 5000 iterações.	87
5.13	Análise das densidades finais filtradas - Tecido ósseo.	88
5.14	Análise das densidades finais filtradas - Cartilagem.	88
5.15	Análise das densidades finais filtradas - Cartilagem Calcificada.	89
5.16	Análise das densidades finais filtradas - Tecido Fibroso.	89
5.17	Viga Engastada com carregamento paralelo.	93
5.18	Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Tecido ósseo.	94
5.19	Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Cartilagem.	94
5.20	Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Cartilagem Calcificada.	94
5.21	Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Tecido Fibroso.	95
5.22	Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Tecido ósseo.	96
5.23	Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Cartilagem.	97
5.24	Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Cartilagem Calcificada.	97
5.25	Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Tecido Fi- broso.	97
5.26	Análise dos raios do filtro de Helmholtz.	99
5.27	Análise dos resultados da viga MBB via IPOPT.	101

Lista de Tabelas

5.1	Composição estrutural das fases de formação do tecido ósseo.	75
5.2	Módulo de <i>Young</i> e coeficiente de <i>Poisson</i> das fases de formação do tecido ósseo.	76
5.3	Análise dos resultados do filtro de Helmholtz.	91

Lista de Siglas

- AM - *Additive Manufacturing*
- DfAM - *Design for Additive Manufacturing*
- ESO - *Evolutionary Structural Optimization*
- FEM - *Finite Element Method*
- FFC - *Fenics Form Compiler*
- FS - *Fatores de Segurança*
- MBB - *Messerschmidt-Bölkow-Blohm*
- PDEs - *Partial Differential Equations*
- SIMP - *Solid Isotropic Material with Penalization*
- TO - *Topology Optimization*
- UFC - *Unified Form-Assembly Code)*
- UFL - *Unified Form Language)*

Lista de Símbolos

Símbolos Gregos

- ϕ - Penalizador de *Lagrange*
- σ - Tensor de tensões
- σ_1, σ_2 - autovalores de σ
- Ω - Domínio de design de projeto
- λ, μ - Parâmetros de *Lamé*
- ϵ - Tensor de deformações infinitesimais
- Θ - Variável binária de seleção de densidades
- $\dot{\epsilon}$ - Tensor simétrico da taxa de deformação

Operadores

- ∇ - Operador Nabla
- $\bigcup_{e=1}^{N_e}$ - Operador do método de Superposição
- $(:)$ - Produto duplamente contraído entre os tensores
- \otimes - Produto tensorial

Símbolos Latinos

- d - Domínio microscópico
- f - Parâmetro que determina a proporção de redução de volume da estrutura
- g, h - Funções genéricas
- k - Módulo de compressão
- \bar{n} - Versor normal ao contorno do domínio Ω
- u - Vetor do campo de deslocamentos
- x, y - Coordenadas cartesianas do elemento
- \hat{x} - Vetor de coordenadas da posição do elemento
- \bar{x}_e - Variável contínua que representa a densidade do elemento

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

r	- Comprimento do raio do filtro de Helmholtz
\mathbb{B}_R	- é um círculo em um domínio plano e uma esfera em um caso de três dimensões com raio R na posição \dot{x}
A	- Fase com material
B	- Fase sem material
D	- Domínio macroscópico
E^0	- Módulo de <i>Young</i> inicial do material
E^*	- Módulo de <i>Young</i> ideal
J^0	- Tensor de rigidez inicial do material
J^*	- Tensor de rigidez ótimo
F	- Vetor das forças externas atuantes no sistema global
G	- Módulo de cisalhamento
$HS(\sigma)$	- Limitante de Hashin-Shtrikman
$K(\bar{x})$	- Matriz de rigidez global do sistema
\mathcal{L}	- Lagrangiano
$M(\Theta)$	- Conjunto de todos os tensores homogenizados
N_e	- Número de elementos da malha
T	- Vetor de tração
$U(\bar{x})$	- Vetor de deslocamentos nodais dos elementos
V^0	- Volume atual do objeto
$V(\Omega)$	- Volume restrito ao domínio Ω
$V(\bar{x})$	- Volume de toda estrutura em função das densidades de cada elemento
Y	- Domínio da microestrutura

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Contextualização	15
1.2	Objetivo	17
1.3	Descrição do problema	17
1.4	Limitações da Pesquisa	18
1.5	Estrutura do Trabalho	18
2	Revisão bibliográfica	19
2.1	Aplicações de TO no contexto da AM	19
2.2	TO no contexto da AM aplicada em próteses humanas	21
2.3	Aplicação da TO em diversos contextos	27
2.4	Síntese do Capítulo	31
3	Fundamentação teórica	32
3.1	Elasticidade linear	32
3.1.1	Formulação Variacional para o Problema Geral da Elasticidade	33
3.2	Conceitos básicos de TO	35
3.2.1	Dependência da malha	40
3.2.2	Instabilidade de tabuleiro	42
3.2.3	Análise de sensibilidades	42
3.2.4	Filtros de densidade	45
4	Modelos de TO	50
4.1	Modelo de Mínima Flexibilidade	50
4.1.1	Critério de Otimalidade	53
4.1.2	Método dos Pontos Interiores	56
4.2	Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade	61
4.2.1	Conceitos básicos de Homogeneização	61
4.2.2	Problema Geral da Elasticidade Homogeneizado	64
4.2.3	Algoritmo de Minimização Alternada	69

5	Testes Computacionais	73
5.1	Dados utilizados nos testes computacionais	75
5.2	Resultados Computacionais para Viga MBB via Critério de Otimalidade .	76
5.3	Resultados Computacionais para Viga Engastada via Método de Minimi- zação Alternada	80
5.4	Resultados Computacionais via IPOPT	92
5.5	Resultados Computacionais da Viga em Balanço com Ação Transversal via IPOPT	93
5.5.1	Resultados Computacionais da Viga Engastada com Carga Axial via IPOPT	96
5.6	Resultados Computacionais da MBB via IPOPT	98
6	Conclusões e Próximos Passos	102
6.1	Conclusões	102
6.2	Pesquisas Futuras	104
	Referências	105

1 Introdução

Um dos grandes desafios enfrentados pela medicina ortopédica regenerativa é a produção de próteses e implantes buscando obter um comportamento próximo dos ossos danificados ou perdidos. Isso ocorre devido à complexidade da composição orgânica dos ossos e a sua renovação biológica. O processo de renovação biológica é dinâmico e ocorre de forma contínua onde os osteoclastos, que são as células responsáveis pela síntese da matriz óssea, reabsorvem tecido ósseo desgastado, e posteriormente, este tecido é absorvido e regenerado pelos osteoblastos. Este processo deve ocorrer continuamente para a manutenção saudável do metabolismo ósseo (CURREY, 2002).

Devido ao processo de renovação biológica, os ossos possuem uma característica única de se autorrenovar. Porém, esta renovação é finita, podendo não ser possível a regeneração completa de dano. Com isso, um dano na estrutura óssea pode chegar a duas situações: atingir um nível baixo e o osso consegue se regenerar e o caso inverso. Quando o primeiro caso ocorre o osso consegue se regenerar com um auxílio externo (talas e gesso). Já no segundo caso, existem três possíveis abordagens: 1) realizar um autoenxerto com o material biológico do próprio paciente, 2) realizar um enxerto com materiais ósseos de uma outra pessoa e 3) a inserção de uma prótese (WANG et al., 2016).

O autoenxerto possui a desvantagem de tornar restrita a área do enxerto para uma possível segunda cirurgia de outro órgão ou tecido futuramente. Já o enxerto com materiais ósseos de uma outra pessoa carrega: (i) um risco de contaminação devido às circunstâncias logísticas e sanitárias envolvidas em todo o processo; (ii) um risco de falta de compatibilidade dos ossos recebidos pelo paciente (WANG et al., 2016).

Todo este contexto aponta que as próteses são uma alternativa atrativa para este tipo de situação. Com isso, a utilização de próteses, pode ser vantajosa em relação as outras duas formas de correção óssea (autoenxerto e enxerto) em alguns pontos:

(i) em ambos os casos, são necessárias duas cirurgias, uma para retirada do enxerto e outra para implante na pessoa que vai receber o material ósseo. (ii) inconveniência da morbidade cirúrgica do doador e os riscos de contaminação da pessoa receptora e (iii) disponibilidade limitada de doares nas filas de espera dos bancos médicos (ROQUE et al., 2021).

Entretanto, na utilização das próteses tradicionais existem alguns pontos que devem ser considerados. Primeiramente, as próteses tradicionais foram criadas através de estudos de uma população padrão, onde uma geometria foi obtida para ser produzida em escala industrial. Dada esta razão, o usuário deve se adaptar à geometria padrão oferecida pela prótese. Isso gera uma implicação na rotina de vida do portador da prótese que o restringe à realização de apenas rotinas leves para não causar nenhum dano ósseo na região (ROCHA, 2010) (OSHKOUR et al., 2014).

Outro ponto relevante é que um percentual, que varia entre 10% a 20% das cirurgias de próteses tradicionais têm que ser retrabalhadas. O insucesso da primeira cirurgia se dá pela falta de biocompatibilidade da prótese com o usuário e o processo de absorção do osso (osteoblastos), tornando a prótese menos ajustada em sua montagem, potencializando o risco de novas fraturas na região e tornando a nova cirurgia mais complexa (HE et al., 2018).

Este cenário impulsionou diversos esforços para o desenvolvimento de uma nova área de pesquisa conhecida como biofabricação. A biofabricação é subdividida em duas grandes classes: produção de dispositivos - que ocorrem em sua maioria via processo de Manufatura Aditiva (AM, do inglês *Additive Manufacturing*) e produção de bioelementos - que consistem na produção de: (i) materiais biocompatíveis e biodegradáveis e (ii) células e fatores de crescimento. O objetivo das duas classes é a produção de soluções através de esforços multidisciplinares para a resolução de problemas biológicos. Esta interação entre bioelementos e dispositivos pode ocorrer em ambientes *in vivo* ou *in vitro*. Com isso, os três principais pilares da biofabricação consistem em: (i) biofabricação, (ii) biomecatrônica e biodesign, e (iii) montagem (BARTOLO et al., 2012).

Como materiais biocompatíveis neste contexto podemos destacar, em escala de utilização: 1) ligas metálicas: titânio puro e suas ligas: aços inoxidáveis, alumínio, zircônio e fosfato de cálcio. 2) ligas de memória: em sua maioria nitinol puro, porém podem possuir aditivos de: cobre, nióbio e titânio. 3) cerâmicas: alumina e zircônio (WANG et al., 2016) (SOLA et al., 2016).

Conforme adiantado anteriormente, uma classe de biofabricação que merece ser destacada é a produção de dispositivos, em especial a AM, que consiste em um dispositivo que recebe uma geometria digitalizada através de uma interface gráfica e a produz via deposição de material. Atualmente, existem várias técnicas desenvolvidas para AM com o objetivo do atendimento de todas as necessidades das mais variadas aplicações (ALFAIFY et al., 2020).

A AM no contexto de próteses humanas, requer a construção de uma geometria elementar sintética conhecida como *scaffold*. Em sua concepção original (material orgânico), os *scaffolds* podem ser definidos como: matrizes extracelulares compostas por uma complexa rede não estrutural celular que auxilia a ligação das células para a formação dos tecidos, sendo que esta matriz desempenha importante papel no controle da crescimento e diferenciação celular. Com base nisso, *scaffolds* impressos via AM podem ser usados como modelos para ancoragem celular inicial e formação de tecido, como, por exemplo, na engenharia de tecidos ósseos. Eles também podem ser utilizados para fixação de prótese por meio de osseointegração. Além disso, a bioimpressão 3D pode ser aplicada aos *scaffolds* para posterior celularização e formação de um novo tecido e regeneração (ROQUE et al., 2021).

A contínua evolução nas pesquisas em AM permite que atualmente geometrias complexas possam ser produzidas: 1) nos mais diversos materiais: variando entre polímeros, metais e materiais cerâmicos e 2) nas mais diversas cores: podendo ter uma cor específica para cada componente do conjunto ou variar as cores para um único componente. Toda essa evolução, levou a AM alcançar novos nichos de mercado como: móveis, joias, acessórios femininos e acessórios em geral, implantes e próteses humanas (THOMPSON et al., 2016).

1.1 Contextualização

O panorama da medicina ortopédica regenerativa possui diversos casos de sucesso no contexto deste estudo. Em 2011, a AM foi utilizada para produzir uma prótese que substituiria totalmente uma mandíbula de uma senhora de 83 anos, vítima de uma séria infecção local. (XILLO, 2012). Em 2013, na Alemanha, foi realizada uma reconstrução parcial de um crânio humano visando eliminar um tumor facial de um senhor de 50 anos (MERTENS et al., 2013). Já em 2014, uma equipe de cientistas brasileiros realizou uma reconstrução de uma grande região craniana de um jovem de

28 anos, vítima de acidente de moto (JARDINI et al., 2014).

Todos estes avanços foram casos de sucesso que reabilitaram os usuários às suas respectivas rotinas diárias antes dos danos. Porém, todos os enxertos produzidos nestes estudos foram impressos em ligas metálicas (titânio e Ti6Al4V) cujas densidades são superiores às dos ossos, o que resulta em um peso maior que a parte substituída. O osso é formado por componentes orgânicos e inorgânicos, todos com densidades inferiores à das ligas metálicas. Na parte orgânica predomina o colágeno tipo I e em menor proporção os colágenos dos tipos III, IV e a fibrina. Já na parte inorgânica prevalece a hidroxiapatita formada por fosfatos de cálcio cristalino (CURREY, 2002).

Analisando a estrutura de osso é possível realizar uma analogia com o concreto armado utilizado na construção civil. Os cristais de hidroxiapatita atuam como os vergalhões de aço para fornecer resistência à tração. Já os componentes orgânicos atuam como o cimento que é um aglutinante e possui resistência à compressão. Estas características específicas tornam os ossos estruturas singulares com atuação estrutural em funções biológicas, químicas e mecânicas (WANG et al., 2016).

Então, para um implante conseguir suprir todas as necessidades do osso danificado, são necessárias algumas características fundamentais: 1) biocompatibilidade. 2) uma interface de tamanho ideal para as células realizarem os processos de fixação, proliferação e diferenciação. 3) superfície altamente porosa para ligar através dos poros: crescimento intracelular, transporte de nutrientes, perda metabólica. 4) propriedades mecânicas: para suprir toda a demanda da região danificada, para eliminar ou reduzir o fenômeno de *stress-shielding* na região da prótese (BARTOLO et al., 2012). O conceito de *stress-shielding* será abordado na seção 1.3 do presente trabalho.

Todo este cenário motivou o direcionamento das pesquisas para a busca do material biocompatível poroso ideal para que todas as características fossem atendidas. Porém, a porosidade necessária traz algumas desvantagens mecânicas que devem ser consideradas. O tamanho dos poros e interconectividade dos canais dos poros são fatores-chave que irão influenciar significativamente nas propriedades de rigidez e resistência da prótese, afetando: 1) o desempenho biológico da prótese. 2) o crescimento interno dos ossos adjacentes que fazem interface com a prótese. 3) o transporte de nutrientes e perda metabólica (WANG et al., 2016).

Para atender o melhor cenário apresentado, os esforços das pesquisas foram direcionados para a busca da topologia ideal buscando a redução de massa necessária

para que as próteses atendessem todas as características necessárias. Esta busca se inicia através de módulos elementares, que simulam o tecido ósseo e são conhecidos como *scaffolds*. Analisando o comportamento mecânico e biológico destes módulos, é possível simular o comportamento da prótese em um indivíduo. Inicialmente são realizadas simulações numéricas adequadas aos tecidos ósseos utilizando programas baseados no Métodos Elementos Finitos (FEM, do inglês *Finite Element Method*), e o seus resultados são confrontados com aqueles obtidos através de ensaios mecânicos (MONTAZERIAN et al., 2017).

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é avaliar através de um estudo computacional a técnica de Otimização Topológica (TO, do inglês *Topology Optimization*) aplicada no contexto de próteses humanas, viabilizando a manufatura via AM. Investigando a seguinte questão de pesquisa: -como a TO pode apoiar a produção de próteses humanas customizadas? Este tipo de análise é complexa pois envolve restrições mecânicas e biológicas por estar inserida em um ambiente de biofabricação. Outro ponto relevante é que o projeto inadequado da geometria da prótese pode trazer consequências gravíssimas à vida do portador desta prótese.

A simulação computacional colabora para melhorar e acelerar o projeto de dispositivos da medicina regenerativa. No escopo deste trabalho está o propósito de mostrar, através de exemplos didáticos, o que podem ser as vantagens da aplicação da TO. Para isso serão utilizados os seguintes programas: (i) Python para a implementação do algoritmo Critério de Otimalidade apresentado no trabalho de Andreassen et al. (2011). (ii) FEniCS para a adaptação implementação do trabalho de Bleyer (2018) e uma adaptação do trabalho de Silva (2020).

1.3 Descrição do problema

Como já foi visto anteriormente, os materiais mais utilizados para a produção de próteses são em sua maioria ligas metálicas cujas densidades são maiores que a dos ossos humanos, alterando a distribuição de tensões na região do implante de uma forma em que o sistema não costuma atuar adequadamente.

Este ponto gera um fenômeno onde o sistema ósseo adjacente à prótese identi-

fica que a prótese é um “*corpo estranho*” e promove uma remodelação óssea proximal adaptativa conhecida como *stress-shielding*. Este fenômeno consiste na seguinte situação: quando tensões são aplicadas na região do implante, os ossos adjacentes tentam eliminar o “*corpo estranho*” direcionando todo o impacto sobre ele. A concentração de tensões no implante com um alto módulo de *Young* altera o fluxo de tensões, o que reduz os estímulos e prejudica o desgaste natural do ossos adjacentes, gatilho que ativa o metabolismo responsável pela renovação desses tecidos ósseos. Sem essa renovação a densidade dos ossos adjacentes sofre uma diminuição nociva (NOYAMA et al., 2012).

Para contornar esta situação, a modelagem matemática que descreve a geometria da prótese, precisa além de atender todas as restrições mecânicas, deve também levar em consideração a porosidade dos ossos favorecendo o fluxo de: crescimento intracelular, transporte de nutrientes e perda metabólica (restrições biológicas). Isso é possível através da aplicação de equações de *Navier-Stokes* visando maximizar a permeabilidade dos materiais (DIAS et al., 2014).

1.4 Limitações da Pesquisa

Devido a limitações de recursos, no escopo do presente trabalho, a permeabilidade dos materiais não pôde ser considerada. Com isso, o escopo se resume as restrições mecânicas do problema, visando a redução de volume.

Outra limitação desta pesquisa ocorre em função dos exemplares analisados. Devido ao esforço computacional para o processamento de exemplares de grande porte que representam o problema real e os recursos computacionais disponíveis para a realização desta pesquisa, foram somente analisados exemplares de pequeno porte em um domínio de duas dimensões.

1.5 Estrutura do Trabalho

O trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma breve apresentação de trabalhos relacionados de aplicações da TO e AM em alguns contextos; o Capítulo 3 apresenta alguns métodos de solução para o problema proposto; o Capítulo 4 apresenta os modelos de TO, o Capítulo 5 os experimentos computacionais e, por fim, Capítulo 6 apresenta as conclusões e pesquisas futuras.

2 Revisão bibliográfica

Neste capítulo se apresenta uma breve revisão bibliográfica sobre a TO e a AM. Primeiramente são apresentadas algumas aplicações desta união em contextos gerais, visando o aperfeiçoamento de materiais, geometrias e *scaffolds*. Em um segundo momento, é apresentado um panorama de aplicações voltadas para à área de biofabricação, em especial, em um contexto de próteses humanas, e por fim, são apresentados os esforços computacionais apresentados pela literatura nos últimos anos para o avanço da ciência em benefício da sociedade, visando a otimização desta união.

Os trabalhos apresentados estão todos interligados ao tema da biofabricação. Na primeira parte do capítulo os trabalhos se referem a evolução dos materiais, buscando otimizar as suas respectivas geometrias em cada aplicação para suportar problemas de engenharia. Já na segunda parte do capítulo, são apresentados trabalhos direcionados no nicho de pesquisa de próteses humanas e os resultados obtidos são bastante promissores, indicando a evolução da pesquisa no campo da biofabricação. Por fim, na última parte são apresentados os esforços computacionais que estão contribuindo para o avanço tecnológico das pesquisas no tema, bem como, os *gaps* a serem preenchidos nestes campos.

2.1 Aplicações de TO no contexto da AM

No trabalho de [Mirzendehtel e Suresh \(2016\)](#) é proposto um *framework* de TO para a condução de *designs* da geometria para a redução de custo. Neste contexto, os autores propõem a introdução de uma nova abordagem para avaliar a sensibilidade da função objetivo e das restrições topológicas com áreas quando o volume é restrito. A eficácia do *framework* foi demonstrada através de vários exemplos numéricos utilizando a tecnologia AM no processo de Modelagem de Deposição Fundida (FDM, do inglês *Fused Deposition Modeling*). As simulações das direções de construção da geometria estruturais via FDM foram assumidas como verticais para simplificação das

análises, porém os autores acreditam que a metodologia pode ser estendida para lidar com estruturas com as direções de construção das geometrias não verticais.

Outra aplicação que merece destaque é apresentada no trabalho [McEwen et al. \(2018\)](#), onde se incorpora à AM via processo de Sinterização Seletiva por Laser (SLS, do inglês *Selective Laser Sintering*), às técnicas de: TO, simulação mecânica, fabricação e validação por tomografia computadorizada. No trabalho, é considerado como objeto de estudo uma manivela de bicicleta para corridas de alto desempenho, projetada para uma competição na França, visando a transformação em um projeto escalável para a indústria em larga escala. Este projeto é definido como inovador pelos autores por estar utilizando novos materiais e procedimentos não previstos na norma vigente. O *design* da manivela foi obtido pelo método de TO, utilizando o *software Solidworks © em sua versão 2015 (Dassault Systèmes)*, gerando um projeto ideal de acordo com os limites de carga pré estabelecidos, modelos biomecânicos anteriores de força-ângulo da manivela e as respectivas restrições do sistema.

Algumas modificações do projeto paramétrico foram necessárias para atender às condições de *Design for Additive Manufacturing (DfAM)* para SLS. Esta estratégia foi adotada com o objetivo de reduzir tempo de impressão, uso de material e mão de obra pós-processamento. O teste estático comprovou um desempenho próximo dos atuais líderes de mercado. A manivela fabricada através do método proposto resultou uma manivela mais rígida em relação ao *design* de referência. Com isso, os autores avaliaram que o mecanismo de falha foi robusto em sua forma e localização, porém a geometria deve ser aperfeiçoada. Por fim, se pode considerar que esta pesquisa é valiosa e inovadora pois uniu diversas técnicas e utilizou componentes em sua aplicação que podem ser utilizados em diversos setores como: aeroespacial, biomédica, esportes automotivos, espaço e geração de energia.

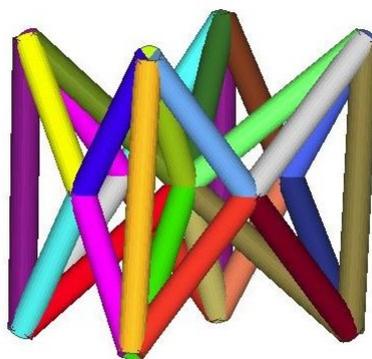
Por fim, no trabalho de [Daynes et al. \(2019\)](#) é apresentada uma nova metodologia de otimização de rede que adapta o tamanho, forma e orientação de treliças no espaço tridimensional usando campos de deformação principais obtidos através da TO. Neste método uma mesma barra de treliça pode responder com diferentes tensões em função da posição do ponto espacial considerado. O método é capaz de gerar estruturas de rede com rigidez e resistência muito melhoradas em comparação com estruturas de rede com um preenchimento de rede uniforme. Limites de densidade relativa superior e inferior e tamanhos mínimos de membros de treliça estão incluídos no fluxo de trabalho de otimização para garantir que os projetos de rede otimizados sejam compatíveis com o processo de AM com restrições. O método é capaz de ge-

rar estruturas de rede conformadas em três dimensões, mesmo para condições de carregamento complexas e limites de volume arbitrários.

2.2 TO no contexto da AM aplicada em próteses humanas

No trabalho de (HE et al., 2018) foram produzidos implantes para cirurgia de quadril customizados para que o portador do implante não tivesse nenhuma restrição ao praticar esportes ou atividades que demandem maior esforço físico. A união da AM e TO proporcionou a criação de implantes com geometrias mais leves e resistentes através da obtenção de geometrias orgânicas que utilizam células unitárias em formato de treliça espacial com barras orientadas a 45° no corpo da célula (Figura (2.1)).

Figura 2.1 – Estrutura de treliças das células unitárias.

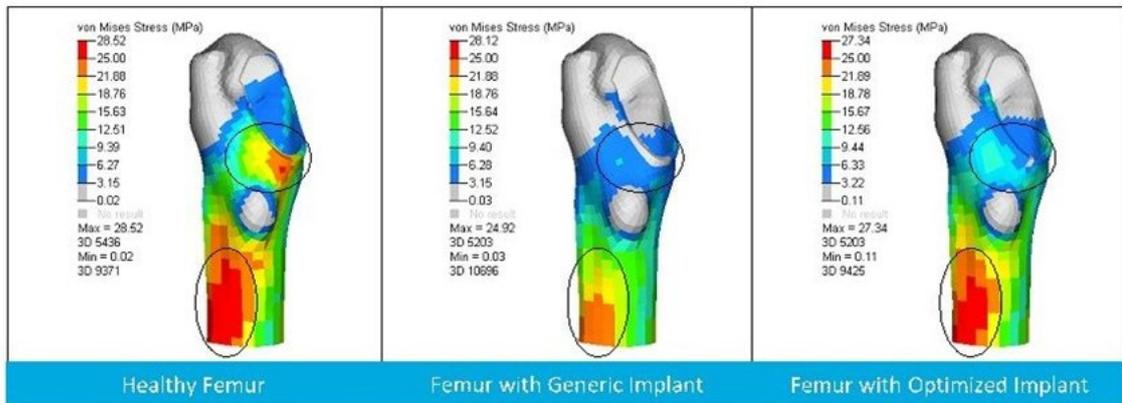


Fonte: He et al. (2018)

O tipo de célula unitária sugerida permitiu a melhor osteo-integração da prótese, pela redução dos efeitos da mudança de densidade na interface com o osso natural, acompanhada de uma adequada rigidez do conjunto ósseo. O estudo foi realizado comparando um fêmur intacto, um implante convencional e o implante impresso por AM utilizando a abordagem de TO (Figura(2.2)). E os resultados obtidos foram que a *stress-shielding* foi reduzida para o implante otimizado em relação ao implante convencional em 57,3% em todos os cenários analisados.

Outras simulações foram realizadas para verificar a análise de sensibilidade das

Figura 2.2 – Análise dos cenários simulados: à esquerda: fêmur saudável, ao meio prótese tradicional e à direita a prótese otimizada.



Fonte: [He et al. \(2018\)](#)

três amostras, e os resultados apresentaram que, em todos os cenários, a prótese otimizada foi superior à prótese tradicional em 50,7% em média adotando o critério de tensão de *von Mises* obtendo o comportamento muito próximo ao de um osso de fêmur saudável. A versão impressa do modelo é apresentada pela Figura (2.3).

O critério de tensão de *von Mises* é baseado na determinação da energia de distorção em um determinado material, ou seja, da energia associada a mudanças na forma desse material, como a energia associada a variações de volume. De acordo com esse critério, um determinado componente estrutural é considerado seguro desde que o valor máximo da energia de distorção por unidade de volume naquele material permaneça menor que a energia de distorção por unidade de volume necessária para causar escoamento em uma amostra de teste de tração do mesmo material ([BEER et al., 2009](#)).

Figura 2.3 – Prótese para cirurgia de quadril otimizada via TO.

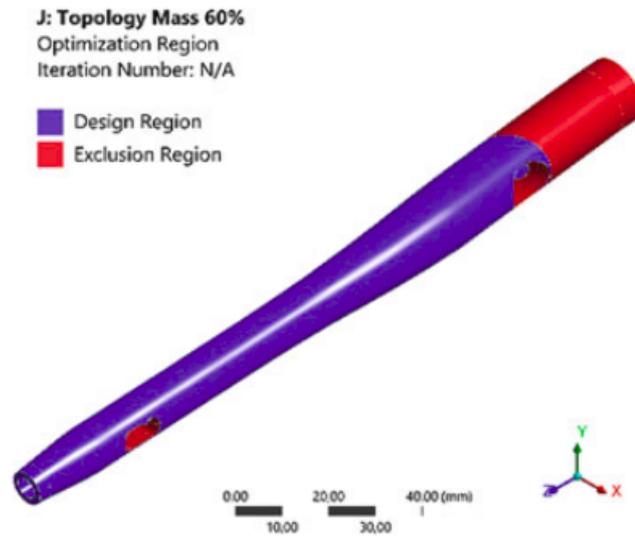


Fonte: [He et al. \(2018\)](#).

Em [Cucinotta et al. \(2019\)](#) uma equipe médica realizou um estudo semelhante com um olhar mais crítico em relação a outros aspectos, a respeito de um implante de fêmur convencional que foi escaneado em três dimensões e posteriormente convertido a um modelo de CAD com precisão até centésimo de milímetro. As medidas obtidas com o modelo de implante de fêmur são: de 180 mm, diâmetro ao longo da haste de 15,5 mm, diâmetro da zona distal de 10,0 mm, entre outras medidas. E foi possível determinar o material ideal para a aplicação que foi o titânio anodizado tipo III (ASTM Grade 3). Após a coleta de todos os dados, foi realizada uma etapa de TO com a restrição de redução de massa fixada em 60% como limite máximo, obtendo uma geometria intermediária que é apresentada pela Figura (2.4), onde as regiões na cor azul indicam as novas topologias geradas e as regiões na cor vermelha indicam onde o material deve ser eliminado de acordo com as restrições impostas.

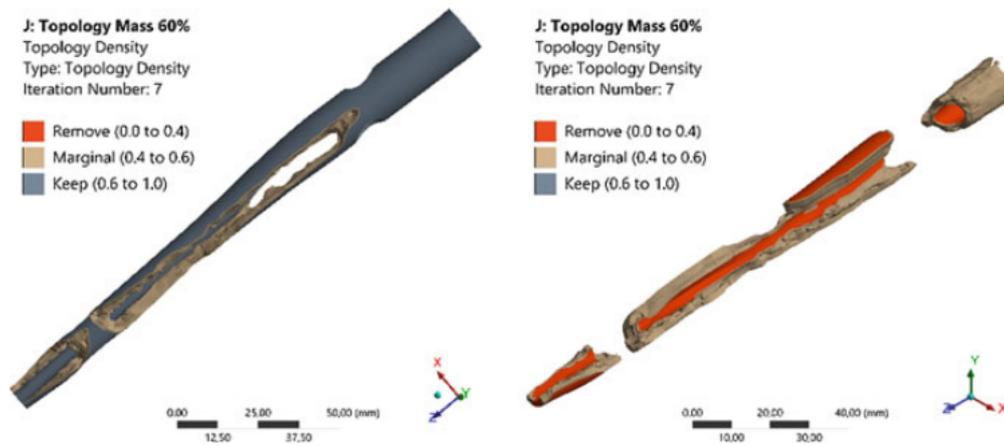
As simulações indicaram que a massa da prótese foi reduzida em 32,3% devido às restrições do modelo de TO. Com isso o componente Gama da Haste sofreu uma redução de massa de $7,83 \times 10^{-2}$ kg para $5,30 \times 10^{-2}$ kg demonstrada pelas regiões que estão coloridas com a cor vermelha na imagem da direita da Figura (2.5). Não satisfeitos com o resultado obtido, os autores propuseram um novo ciclo de TO, adotando o critério de *von Mises* obtendo uma nova geometria mais leve, porém com alguns pontos críticos que devem ser analisados em pesquisas futuras (Figura (2.6)).

Figura 2.4 – Região projetada pela TO - primeiro ciclo.



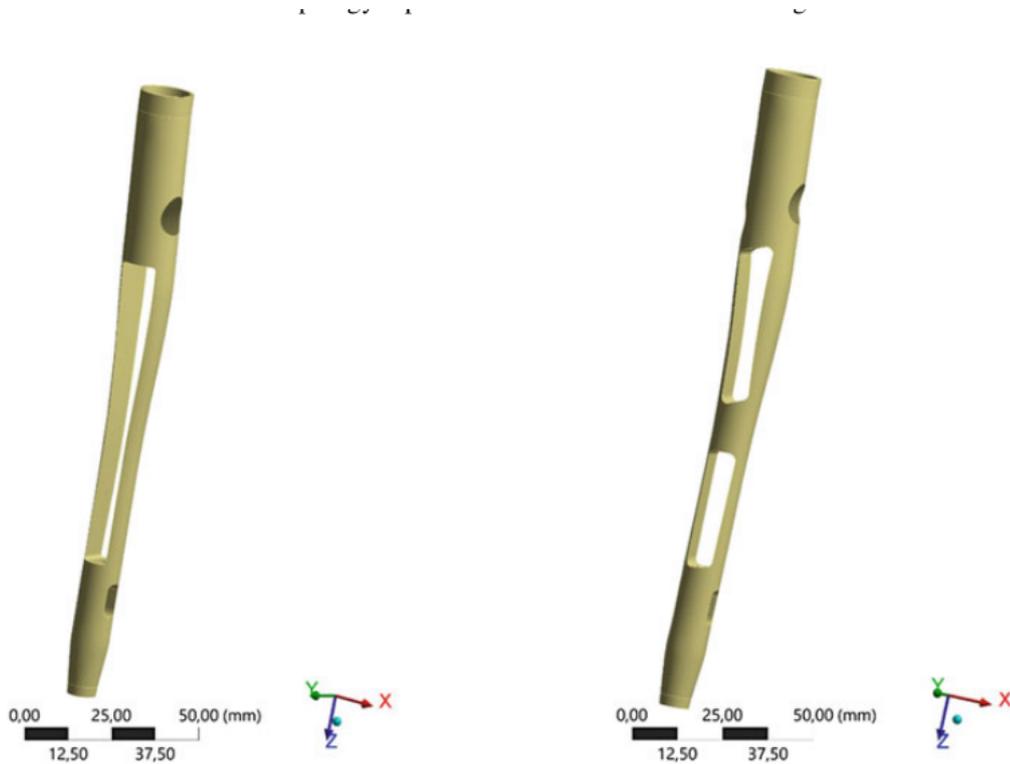
Fonte: Cucinotta et al. (2019).

Figura 2.5 – Região projetada pela TO - segundo ciclo.



Fonte: Cucinotta et al. (2019).

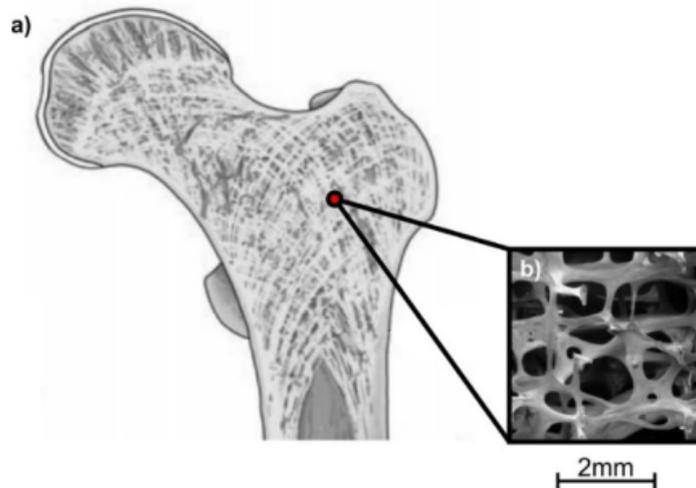
Figura 2.6 – Comparação entre os dois ciclos de TO: à direita - primeiro ciclo, à esquerda - segundo ciclo.



Fonte: [Cucinotta et al. \(2019\)](#).

Por fim, no trabalho de [Kladovasilakis et al. \(2020\)](#), é apresentada uma modelagem estrutural utilizando a técnica de TO inspirada em seres vivos para alcançar a diminuição de massa das próteses de quadril. No trabalho são avaliadas três estruturas: *Voronoi*, *Gyroid* e *Schwarz-Diamond*. *Voronoi* resulta em uma geometria muito parecida ao tecido ósseo trabecular. A estrutura gerada pelo modelo de *Gyroid* é adequada a estruturas que são susceptíveis a ações de flexão. Por fim, a estrutura gerada pelo modelo de *Schwarz-Diamond* produz estruturas semelhantes a cascas reforçadas (Figuras (2.7) e (2.8)).

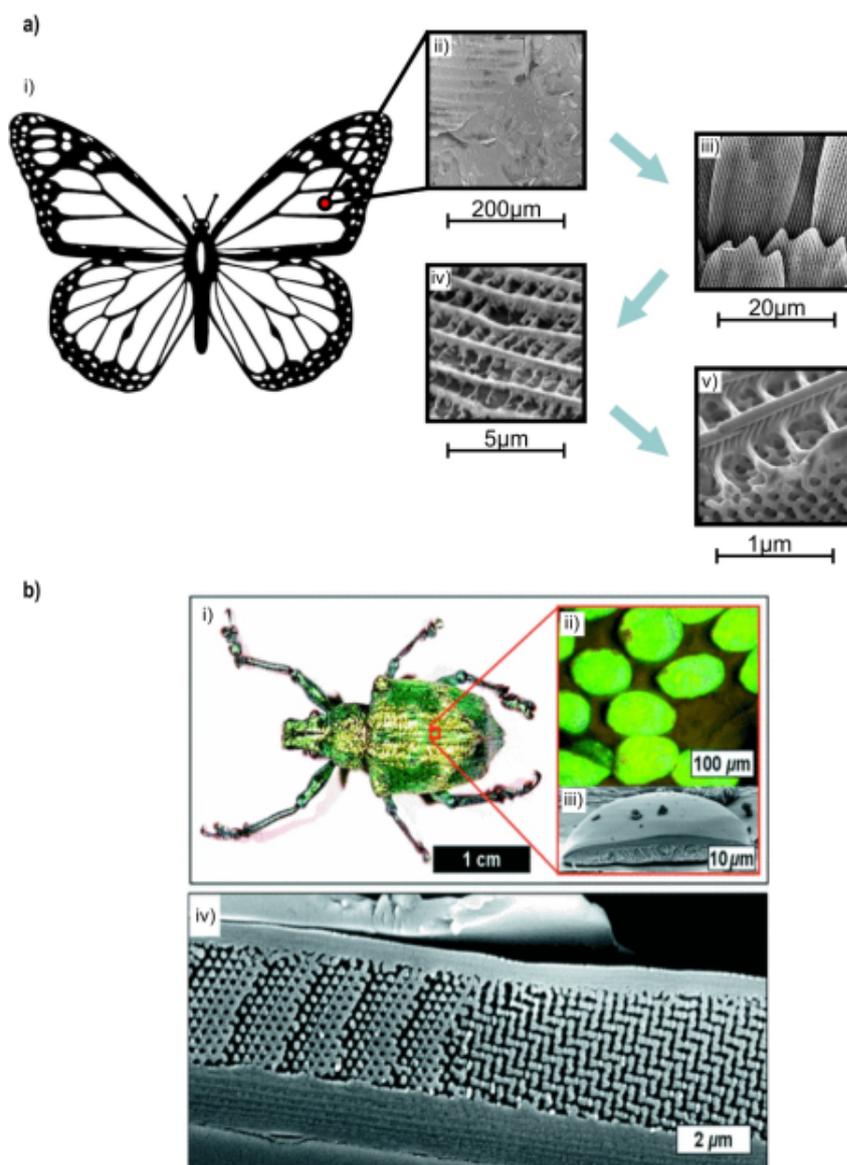
Figura 2.7 – Osso trabecular: (a) modelo esquemático do osso trabecular, (b) estrutura de *Voronoi* escaneada de um microscópio eletrônico.



Fonte: [Kladovasilakis et al. \(2020\)](#).

Para o desenvolvimento de seu trabalho, [Kladovasilakis et al. \(2020\)](#) seguiram os seguintes passos: (i) primeiramente todos os modelos foram resolvidos via TO e utilizando as três geometrias propostas e, (ii) posteriormente, foi realizado um novo ciclo de TO simulando a degradação natural do osso em situações reais, de uma pessoa com 75 kg, como: caminhada lenta, subida de escadas, descida de escadas e tropeço. Os resultados alcançados nas três geometrias foram uma redução de 38% na massa do implante e 50% de aumento dos poros do *scaffold*, aumentando o fluxo de nutrientes e perda metabólica. Porém, nas simulações de degradação do osso, foram contabilizados os fatores de segurança (FS) para cada caso, sendo que as geometrias: *Voronoi*, *Gyroid* e *Schwarz-Diamond*, obtiveram os seguintes resultados respectivamente: $\{1,01; 1,79; 2,09\}$. Em função disso, os autores concluem que a geometria de *Schwarz-Diamond* é mais indicada para a aplicação.

Figura 2.8 – Estruturas naturais: (a) modelo esquemático da estrutura das asas da borboleta, (b) modelo esquemático da estrutura da casca do besouro *L. Augustus*.



Fonte: [Kladovasilakis et al. \(2020\)](#).

2.3 Aplicação da TO em diversos contextos

No trabalho de [Dias et al. \(2014\)](#), é apresentada uma ferramenta computacional que visa a redução de massa dos *scaffolds* das próteses através de uma formulação FEM aplicada em uma abordagem direcionada para mecânica dos fluídos. A solução otimizada atende as restrições mecânicas e biológicas, combinando resistência mecânica e permeabilidade, para reduzir a massa dos *scaffolds*. A TO aqui consiste em estabelecer uma determinada fração volumétrica de material (ou inversamente sua

porosidade) para um certo projeto. Em seguida se utiliza uma técnica de homogeneização assintótica para levar em conta os efeitos combinados da permeabilidade e resistência mecânica no domínio de uma célula unitária que se analisa a posteriori via FEM. As propriedades dessa célula unitária são então utilizadas para resolver problemas reais.

A modelagem do escoamento de fluídos foi feita através de um programa FEM onde se considera a equação constitutiva conhecida como lei de *Darcy*. O método *Simple Isotropic Material with Penalization* (SIMP) também foi utilizado para tornar o modelo de TO relaxado. O modelo SIMP será abordado em detalhes no Capítulo 3 deste trabalho. Os resultados obtidos nas geometrias internas foram : 1) aumento em 14% do nível de porosidade da região inteira dos *scaffolds*. 2) aumento de 40% de porosidade na área da haste da prótese. 3) aumento em 55% de porosidade na região dos poros de alimentação intracelular. 4) aumento de 17% no diâmetro dos poros.

Em [Palmas \(2018\)](#), é proposta uma interpolação SIMP no contexto de uma formulação multi-material de TO com o objetivo de redução do custo computacional e redução do peso global da estrutura avaliada. Para tal, são realizadas análises estáticas de problemas de elasticidade para diversas geometrias e condições de contorno com materiais intermediários. As variáveis consideradas na função objetivo, para cada material, são: densidades, módulos de elasticidade e custo. Também são utilizadas funções de potência com coeficientes de escala e de translação para interpolar o módulo de elasticidade e as propriedades de custo para múltiplos materiais.

Neste contexto, a densidade do material foi considerada como a variável de projeto independente e escolhida a partir de um intervalo contínuo de valores de densidade discreta dos materiais candidatos. As outras propriedades (módulo de elasticidade e custo), foram consideradas funções contínuas em relação à densidade, obtidas pela interpolação dos respectivos valores para cada material candidato.

Os resultados obtidos foram: 1) estrutura de ponte simétrica: redução de 21,68% de massa em toda estrutura. 2) viga *Messerschmidt-Bölkow-Blohm* (MBB) que é uma viga bi-apoiada com uma carga $F = 1\text{N}$ aplicada no centro: observou-se que raios maiores proporcionam distribuição de mais material com menor rigidez nas áreas em que o raio atua, além de estabelecerem uma ordem de contato entre os materiais de sua face superior. 3) viga duplamente engastada: as diferentes dimensões de malhas utilizadas nos exemplos numéricos apontaram que a presença de material intermediário é diminuída à medida em que são utilizadas malhas mais refinadas aliadas a raios

menores.

No trabalho de [Paulino \(2019\)](#) se aplica o FEM posicional à solução de problemas de estados planos de tensão considerando a não-linearidade geométrica, nesse trabalho a resposta constitutiva é obtida considerando dois métodos de resolução da TO: SIMP e o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO).

Resumidamente o ESO é um método iterativo baseado no conceito de remoção gradual de porções do material da estrutura que não apresentam contribuições significativas à estrutura de acordo com o parâmetro considerado, que pode ser definido em função de tensão ou deslocamentos. No trabalho a autora considerou a tensão de *von Mises* como parâmetro principal. Como a tensão *von Mises* utiliza o critério da energia de distorção, o colapso por meio desse critério é governado pela energia de distorção máxima, sendo eliminada a parcela de energia associada às tensões máximas [Paulino \(2019\)](#).

Desta maneira, no ESO a retirada de elementos da malha ocorre pela definição de um parâmetro $RR = \{0, 1\}$ conhecido como razão de rejeição, definido pelos elementos que apresentam valores de tensão inferiores a uma tensão máxima estabelecida. Para evitar a retirada excessiva de elementos em cada iteração é indicado a criação de mais um parâmetro que restrinja o número máximo de elementos à serem retirados a cada iteração (RR_{max}). Por fim, para atingir a geometria ótima do projeto, o valor de RR é incrementado para que haja uma remoção contínua de elementos a cada iteração dado um novo parâmetro ER, conhecido por razão de evolução [Paulino \(2019\)](#).

Como resultados iniciais obtidos a autora aponta que o método SIMP foi o método de solução que gerou soluções mais eficientes, uma vez que: (i) na aplicação do ESO não foram considerados filtros de sensibilidades e (ii) é necessário realizar a calibragem adequada dos parâmetros RR e ER e RR_{max} . Com isso o SIMP obteve destaque, pois, na implementação: (i) é necessário calibrar um parâmetro e não três e (ii) foi aplicado um filtro de densidades baseado em gradientes para tratar o problema de pseudo-densidades.

Outro ponto relevante foi que o custo computacional para encontrar as geometrias via método SIMP sempre foi menor. Em função disso, os testes computacionais só utilizaram o método SIMP para os resultados finais. Porém, a autora recomenda a implementação de filtros de sensibilidades no método ESO para superar os problemas de instabilidades numéricas, como: a instabilidade tabuleiro e a dependência de malha. Estes são conceitos que serão vistos mais adiante neste trabalho. No entanto,

os testes computacionais finais apontaram que para a viga engastada, ocorrem duas situações: 1) as topologias finais são diferentes para diferentes magnitudes de carregamento. 2) foi verificado que a topologia final perde a simetria à medida que há um aumento de magnitude no carregamento.

Por fim, o trabalho de [Silva \(2019\)](#) assume que a TO pode ter dados incertos nas tensões de carregamento. Nas abordagens onde carregamentos determinísticos são considerados, as soluções geradas podem ser soluções não-ótimas, ou até mesmo inviáveis, podendo levar a falha da estrutura otimizada. Pequenas variações de: inclinação do carregamento, posição do carregamento e intensidade de carregamento, que são aderentes com aplicações no mundo real, podem levar a uma falha na estrutura devido a sensibilidade do modelo de TO em relação à este parâmetro [Silva \(2019\)](#).

Com isso, o autor propõe quatro formulações para suportar este tipo de decisão. As quatro formulações são: robusta probabilística, baseada em confiabilidade, robusta não probabilística e robusta de três campos. Para comparar o desempenho de cada formulação foram utilizadas soluções determinísticas (sem incerteza) de modelos conhecidos da literatura da área. O método Lagrangiano Aumentado foi empregado para lidar com o número alto de restrições e convexidade.

A ideia essencial associada ao método do Lagrangiano aumentado consiste na decomposição do problema de otimização restrito original em subproblemas relaxados. A função objetivo dos subproblemas é uma soma ponderada da função objetivo do problema original e as restrições relaxadas, penalizadas por um multiplicador de Lagrange que corresponde ao custo de violação da restrição relaxada. O método do Lagrangiano aumentado consiste então em uma abordagem sequencial: após a solução dos subproblemas de otimização atuais através de um método de máxima descida, modificado para lidar com as restrições laterais, os multiplicadores de Lagrange são atualizados; então, o problema mestre (problema original) é resolvido com estas soluções e parâmetros, de forma iterativa, até que a solução do problema de otimização original seja obtida ([SILVA, 2019](#)).

Nos testes computacionais, foi constatado que a última formulação que utiliza Otimização Robusta que é uma otimização de incertezas no pior cenário possível, foi a mais conservadora, uma vez que, fica à cargo do tomador de decisão assumir o risco e preço pago pela robustez do modelo neste tipo de cenário. Para maiores detalhes sobre a Otimização Robusta consultar [Tavares \(2019\)](#). Esta abordagem leva em conta

a combinação de extremos dos intervalos, garantindo a viabilidade de tensão também para estes casos, ao contrário do que acontece nas abordagens probabilísticas, onde as combinações de extremos são probabilidades de ocorrência (SILVA, 2019).

Simulações de *Monte Carlo* foram realizadas para a expansão do espaço amostral de soluções de todas as abordagens, não havendo grandes alterações nos resultados obtidos, confirmando a concordância de desempenho alcançado por cada formulação nos testes anteriores.

2.4 Síntese do Capítulo

Neste capítulo, na primeira parte, foram apresentados alguns trabalhos que realizam aplicações de TO e AM em contextos gerais, visando o aperfeiçoamento de materiais, geometrias e *scaffolds*. Esta primeira parte contribuiu para este trabalho, aproximando o autor do estado-da-arte de integração dos dois contextos.

Na segunda parte do capítulo, foi apresentado um panorama de aplicações voltadas para a área de biofabricação, em especial, em um contexto de próteses humanas. Esta segunda parte contribuiu para este trabalho, aproximando o autor do estado-da-arte da produção de próteses customizadas.

Por fim, na terceira parte do capítulo, foram apresentados os esforços computacionais apresentados pela literatura nos últimos anos para o avanço da ciência em benefício da sociedade, visando a otimização desta união. Esta última parte contribuiu para este trabalho, aproximando o autor do estado-da-arte dos desafios inerentes a implementação de TO, bem como, os métodos de solução empregados.

3 Fundamentação teórica

Este capítulo apresenta uma visão geral sobre os métodos que serão empregados para a busca da resposta ao problema de pesquisa. Este capítulo é subdividido em três partes. Na primeira parte do capítulo é apresentada uma visão geral da teoria da Elasticidade. Na segunda parte são apresentados os conceitos básicos de TO, posteriormente são apresentadas algumas dificuldades enfrentadas para implementar a TO, e por fim, é apresentado um método para superar estas dificuldades.

3.1 Elasticidade linear

Uma das aplicações mais populares no universo da engenharia moderna de análise de estruturas consiste na utilização de equações parciais diferenciais (PDEs do inglês, *partial differential equations*) na modelagem de corpos que seguem o regime elástico de deformação. O conjunto de equações de governo de um domínio Ω sujeito a pequenas deformações no regime elástico é definido por:

$$-(\nabla \cdot \sigma) = f, \quad \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\sigma = \lambda \text{tr}\{\varepsilon\}I + 2\mu\varepsilon \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3.3)$$

Onde σ é o tensor de tensões, f é a força por unidade de volume, λ e μ são as constantes de *Lamé*, I é o tensor identidade de segunda ordem, tr é o traço do tensor, ε é o tensor de deformações infinitesimais, u é o vetor campo de deslocamentos e T indica operador matricial transposto.

A equação (3.1) é a de equilíbrio local de *Cauchy*. Já a equação (3.2) é a equação

constitutiva para materiais isotrópicos. Combinando as equações (3.2) e (3.3), obtém-se:

$$\sigma = \lambda \text{tr}\{\varepsilon\}I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3.4)$$

3.1.1 Formulação Variacional para o Problema Geral da Elasticidade

A formulação variacional aplicada às equações (3.1) a (3.3) consiste na integral no domínio Ω da multiplicação da equação (3.1) por uma função arbitrária $v \in \hat{V}$, onde \hat{V} é o espaço dessas funções arbitrárias.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (3.5)$$

Desde que o $\nabla \cdot \sigma$ contenha as derivadas de segunda ordem do vetor não conhecido a priori u , pode-se integrar este termo por partes:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot v dx = \int_{\Omega} \sigma : \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \bar{n}) \cdot v ds \quad (3.6)$$

Onde o operador de dois pontos ($:$) é o produto duplamente contraído entre os tensores (produto dos pares somados de todos os elementos), e \bar{n} é um versor normal ao contorno do domínio Ω orientado para fora. A porção $\sigma \cdot \bar{n}$ é conhecida como o vetor de *tração* no contorno e é frequentemente utilizada como uma condição de contorno. Para esta modelagem, assume-se que em alguma parcela $\partial\Omega_T$ do contorno tem-se: $\sigma \cdot \bar{n} = T$. Nas outras regiões do contorno assume-se que os deslocamentos são dados pelas condições de contorno de *Dirichlet* e, portanto, a integral nessas partes do contorno desaparecem de onde vem que:

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega_s} T \cdot v ds \quad (3.7)$$

A formulação variacional da Eq. (3.7) corresponde ao problema de encontrar $u \in V$:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \hat{V} \quad (3.8)$$

Onde V é o espaço das funções admissíveis u e \hat{V} representa o espaço vetorial das funções arbitrárias v . Já o termo $a(u, v)$ é uma *forma bilinear* ($a : V \times \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$) dos termos desconhecidos do problema e o termo $L(v)$ uma forma *linear* ($L : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$) das funções conhecidas do problema:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma : \nabla v dx \quad (3.9)$$

$$\sigma(u) = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (3.10)$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega_T} T \cdot v ds \quad (3.11)$$

Lembrando da propriedade algébrica onde o produto de um tensor simétrico A por um tensor anti-simétrico B se anula. Se for considerado ∇v como uma soma de suas partes simétrica e anti-simétrica, apenas a parte simétrica resta do produto $\sigma : \nabla v$ visto que σ é um tensor simétrico. Então, substituindo ∇v pelo seu tensor $\varepsilon(v)$ simétrico obtém-se uma formulação variacional ligeiramente diferente:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx \quad (3.12)$$

Onde $\varepsilon(v)$ é dado por:

$$\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) \quad (3.13)$$

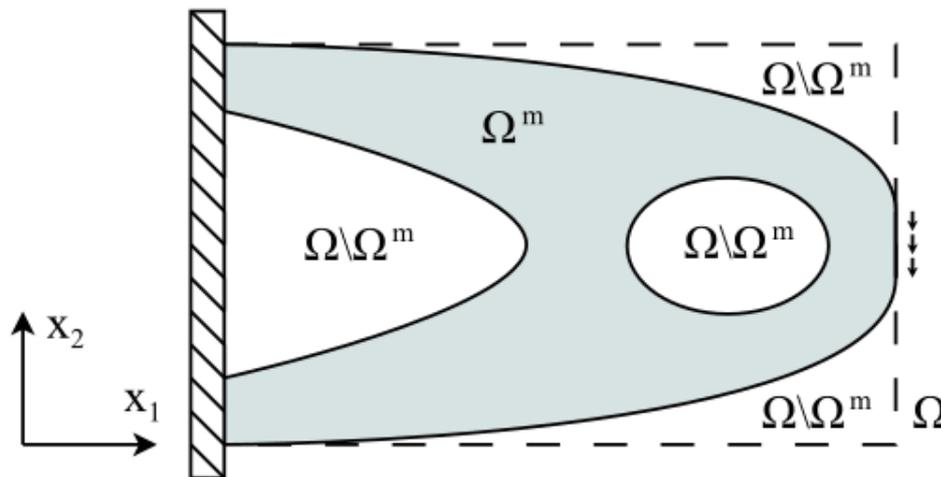
A formulação apresentada em (3.12) resulta também da minimização do potencial elástico e é a forma mais conhecida se comparada a (3.9) (LOGG et al., 2012), (LANGTANGEN; LOGG, 2017).

3.2 Conceitos básicos de TO

A TO consiste na busca da melhor distribuição de materiais (topologia) para atender uma série de restrições e medidas de desempenho que se deseja otimizar, de um projeto em um dado domínio (Ω) (PAULINO, 2019). Neste trabalho a TO considera a evolução das densidades relaxando o espaço da solução por meio de uma parametrização discreta. Esta relaxação é empregada com o objetivo de permitir uma variação contínua entre as fases sólida e vazia, permitindo o cálculo de derivadas e, conseqüentemente, a otimização com métodos baseados em gradiente.

Nesta abordagem, o domínio fixo de projeto é discretizado com uma malha fixa de elementos finitos, e cada elemento da malha é então associado a uma densidade relativa, que varia no intervalo contínuo, de 0 (fase vazia = sem material = $\frac{\Omega}{\Omega_m}$) até 1 (fase sólida = com material = Ω_m). Grandezas como rigidez, tensão e volume são então calculadas com base na densidade relativa associada a cada elemento da malha (BENDSØE; SIGMUND, 2003)(SILVA, 2019). Para melhor percepção do contexto é apresentada a Figura que apresenta as condições necessárias para aplicar a TO em um material isotrópico.

Figura 3.1 – Problema de TO por meio da distribuição de material isotrópico.



Fonte: Silva (2019).

A TO está presente nas mais diversas aplicações como: indústria aeronáutica, indústria automotiva, no design de componentes eletromagnéticos, eletroquímicos e acústicos, entre outras aplicações. Sendo aplicada em dois grandes níveis: 1) macroscópico: criando geometrias complexas explorando os limites dos projeto e suas respectivas espessuras e 2) no nível micromecânico: explorando influência da variação

da microestrutura no comportamento macroscópico (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Um ponto que deve ser levado em consideração é que a TO permite a inserção ou remoção de materiais em determinadas regiões não previstas originalmente no projeto, para a otimização da medida de desempenho apontada pelo tomador de decisão. Neste ponto a TO permite que, por exemplo, regiões que apresentam ausência de material não previstos no projeto original sejam adicionadas para a minimização do peso do componente (PALMAS, 2018).

O problema geral da TO é um problema de otimização, onde a medida de desempenho que se deseja otimizar pode ser minimizada/maximizada dependendo do contexto, e um domínio bem definido e restrições de projeto. A formulação geral é apresentada pelo conjunto de Eqs. (3.14) -(3.18) a seguir.

$$\min c(x) \tag{3.14}$$

sujeito a:

$$V^0 \leq V(\Omega) \tag{3.15}$$

$$V = \int_{\Omega} \Theta(x) d\Omega \tag{3.16}$$

$$E = (\Theta(x))E^0 \tag{3.17}$$

$$\Theta(x) \in \{0, 1\} \tag{3.18}$$

Onde $c(x)$ é uma função da medida de desempenho que se deseja otimizar, V^0 representa o volume atual do objeto, $V(\Omega)$ representa o restrito ao domínio Ω , E^0 é módulo de *Young* inicial do objeto, E é o módulo de *Young* ideal do objeto no domínio Ω , e por fim, $\Theta(x)$ é a função de decisão que se deseja otimizar, sendo que x representa a variável de projeto.

A equação (3.14) apresenta a função objetivo, onde se deseja encontrar a geometria ótima do objeto, minimizando a medida de desempenho desejada (volume, peso, rigidez, entre outras) pelo tomador de decisão. Em (3.15) o volume ótimo da nova geometria é restrito à ser inferior ao volume atual (redução de peso), enquanto a equação (3.16) demonstra como o volume é calculado dentro do domínio Ω do projeto. A equação (3.17) apresenta que o módulo de *Young* final depende do inicial e as

novas densidades dos elementos, e por fim, a equação (3.18) apresenta o domínio da função indicativa ($\Theta(x)$).

O modelo (3.14) - (3.18) consiste na determinação da existência ($\Theta(x) = 1$) ou não ($\Theta(x) = 0$) de material, através da avaliação de todos os pontos do domínio. Em outras palavras, após a discretização do domínio via FEM, a variável $\Theta(x)$ determina se o elemento finito vai pertencer a topologia final ou não (BENDSØE; SIGMUND, 2003). A solução do modelo (3.14)-(3.18) possui dois grandes problemas: (i) o custo computacional de realizar a busca exaustiva em todo domínio - onde muitas vezes a solução não é obtida. (ii) a presença de múltiplos ótimos locais indicando a não convexidade do modelo (SIGMUND; PETERSON, 1998).

Para iniciar o processo de solução do modelo (3.14)-(3.18) é necessário realizar a discretização do domínio principal, uma vez que todos os problemas práticos são impossíveis de resolver no domínio contínuo. Porém esta discretização transforma o espaço de busca da solução original de convexo em um espaço de busca não-convexo. Isso ocorre devido ao processo iterativo de criação de espaços vazios (sem material), com o objetivo de eliminar elementos da malha que não contribuem para a geometria, respeitando todas as restrições impostas pelo modelo. Neste processo de transformação do espaço de busca são criados múltiplos ótimos locais, tornando a tarefa de encontrar o ótimo global uma busca exaustiva em todo o espaço de busca, abordagem conhecida como “força bruta”, gerando um custo computacional muito elevado (ABDELHAMID; CZEKANSKI, 2022).

Sendo assim, uma abordagem com melhor custo computacional é a estratégia de relaxar as variáveis inteiras do modelo para variáveis do tipo contínuas e alterar o módulo de *Young* (E) para uma função de densidade do material dos elementos ($x(e)$), que se torna a variável de projeto do modelo relaxado que se deseja otimizar. Neste ponto, o modelo se torna mais flexível, podendo realizar buscas em certas regiões de soluções, e podendo utilizar métodos de resolução mais variados como: Pontos Interiores, Buscas Locais, Gradientes, entre outros (BENDSØE; SIGMUND, 2003). A estratégia destes métodos consiste em algoritmos de otimização que realizam de forma incremental a conversão de um problema não convexo (original) em um problema convexo (artificial) de forma iterativa. Em cada etapa, um algoritmo de otimização baseado em gradiente é usado até a convergência (SIGMUND; PETERSON, 1998).

Neste contexto, uma estratégia muito explorada na literatura é o método de reso-

lução *Simple Isotropic Material with Penalization* (SIMP) que consiste em uma estratégia de homogeneização do material para que ele seja considerado isotrópico, se valendo de pseudo-densidades contínuas ($\bar{x}(e)$). O termo pseudo-densidades é empregado pois, o relaxamento nesta estratégia faz com que a densidade perca o seu sentido físico (SIGMUND; PETERSON, 1998). O relaxamento da variável x_e , alterando o seu domínio no espaço binário para contínuo, gera soluções intermediárias que são consideradas ineficazes do ponto de vista da manufatura, denominadas *pseudo-densidades* (ANDREASSEN et al., 2011). Esta problema ocorre no intervalo contínuo $\{0,1\}$, onde 0 equivale à não existência de material naquela região do domínio e 1 caso contrário. Porém por ser um meio contínuo, a estratégia relaxada permite que existam densidades intermediárias entre estas condições (PAULINO, 2019).

Com isso, o novo domínio deve ser tratado de forma discreta para que as densidades intermediárias sejam eliminadas da solução. A estratégia mais utilizada para este propósito é a discretização por elementos finitos (SILVA, 2019). Um forma geral de apresentação de um modelo que busca a minimização da flexibilidade da estrutura é apresentado pela Eq. (3.19) e o conjunto de restrições (3.20) - (3.23).

$$\min c(x) = F^T U(\bar{x}) \quad (3.19)$$

sujeito a:

$$F = K(\bar{x})U(\bar{x}) \quad (3.20)$$

$$V(\bar{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \bar{x}_e \quad (3.21)$$

$$V(\bar{x}) \leq V(\Omega) \quad (3.22)$$

$$0 \leq \bar{x}(e) \leq 1 \quad (3.23)$$

Onde $c(x)$ é função de flexibilidade da estrutura (medida de desempenho que se deseja minimizar), F representa o vetor das forças externas atuantes no sistema global, $U(\bar{x})$ é o vetor de deslocamentos nodais dos elementos, N_e representa o número de elementos finitos da malha, $V(\bar{x})$ representa o volume de toda estrutura em função das densidades de cada elemento, $K(\bar{x})$ é a matriz de rigidez global do sistema, e, por fim, $\bar{x}(e)$ representa a densidade específica de cada elemento e .

A função objetivo (3.19) busca minimizar a flexibilidade da estrutura da topologia em função das forças atuantes (F) e dos deslocamentos nodais ($U(\bar{x})$). O equilíbrio

considerada a hipótese de elasticidade linear se traduz pela equação (3.20).

O volume total da estrutura, dado pela equação (3.21), é obtido pela somatória de todos os volumes específicos de cada elemento (V_e), ponderados pelas suas respectivas densidades ($\bar{x}(e)$). E é também restrito em função do volume máximo permitido para a estrutura dentro do domínio Ω_d (equação (3.22)). Já na equação (3.23), é apresentada o domínio da variável ($\bar{x}(e)$).

Um ponto fundamental para que os modelos de TO já apresentados atinjam o nível de performance esperada, se encontra na matriz de rigidez global do sistema ($K(\bar{x})$). Esta matriz é obtida pelo método da Superposição, que compõe uma das etapas no FEM. De forma sucinta, este método consiste em uma agregação de nível global, das matrizes de rigidez locais de cada elemento da malha (VAZ, 2011). Com isso, se pode escrever o método da Superposição através da equação (3.24).

$$K(\bar{x}) \leftarrow \bigoplus_{e=1}^{N_e} k_e(\bar{x}_e) \quad (3.24)$$

Já a matriz de rigidez local de cada elemento da malha, é obtida através da relação entre: o domínio (Ω_e), a matriz de transformação deformação-deslocamento (B_e) e o módulo de *Young* ($E(\bar{x}_e)$) de cada elemento (e) (VAZ, 2011). E é apresentada pela equação (3.25).

$$k_e(\bar{x}_e) = \int_{\Omega_e} (B_e)^T E(\bar{x}_e) B_e d\Omega_e \quad (3.25)$$

Por fim, o módulo de *Young* ($E(\bar{x}_e)$) é obtido conforme as parametrizações necessárias para o SIMP. E a computação dos seus valores que envolve três parâmetros: o módulo de *Young* inicial do material base (E^0), uma variável artificial, necessária para evitar singularidades durante a solução das equações de equilíbrio e um parâmetro de penalização (p) necessário para evitar instabilidades numéricas, que pode variar no intervalo inteiro de $\{1, 2, 3\}$, mas usualmente é adotado com o valor igual a 3 (SILVA, 2019).

De modo que, o cálculo do valor do módulo de *Young* ($E(x_e)$) para cada elemento é apresentado pela equação (3.26).

$$E(\bar{x}_e) = (x_{min} + (1 - x_{min})(x_e)^{-p})E^0 \quad (3.26)$$

Onde E^0 é módulo de *Young* inicial do material base, x_{min} é uma constante de valor pequeno incluída para evitar instabilidades numéricas e p é o parâmetro da penalização SIMP, que geralmente assume o valor entre 1 e 3.

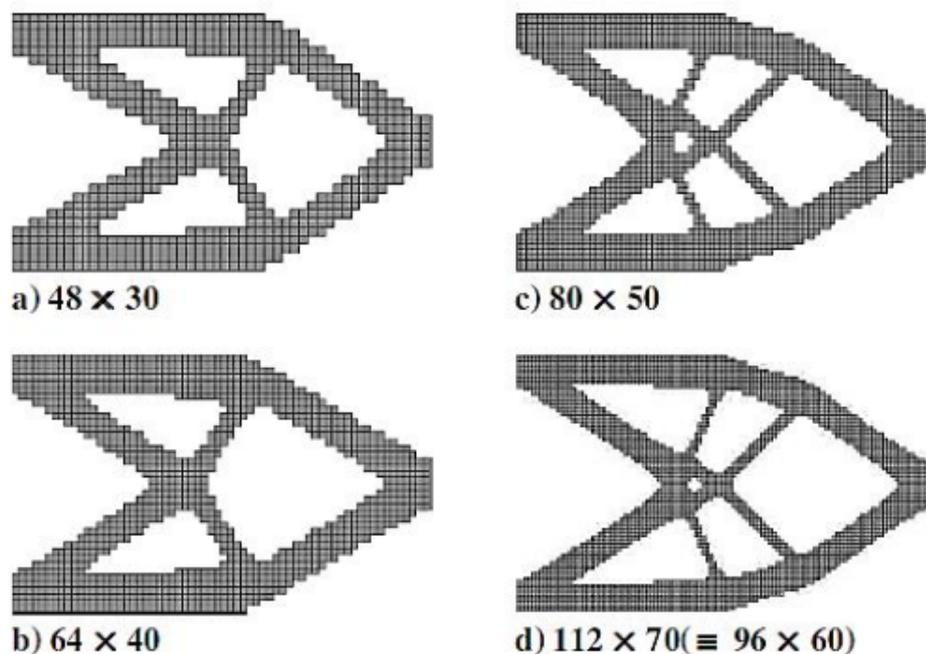
Um fator crítico no método TO são as instabilidades numéricas geradas pela relaxação do modelo, gerando dois pontos de dificuldade: 1) dependência da parametrização da malha do FEM e 2) instabilidade de tabuleiro. Como estas dificuldades podem influenciar o custo computacional dos modelos, estes dois pontos serão tratados à seguir (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

3.2.1 Dependência da malha

Conforme apresentado na seção anterior, o processo iterativo para a resolução do modelo de TO apresentado pelo conjunto de equações (3.19) - (3.23), e a discretização do domínio original, transformam o espaço de busca original de convexo em não-convexo, através da remoção de elementos que não contribuem para a topologia, gerando múltiplos ótimos locais. No limite deste processo a forma microestrutural da geometria é otimizada. Estas formas microestruturais normalmente não são isotrópicas e não podem ser representadas no domínio original do projeto que possui apenas materiais isotrópicos (aplicação do SIMP). Isso promove a geração de cavidades no *design* da topologia, muitas vezes não admitidas no escopo do projeto da topologia. No contexto das implementações computacionais este efeito é conhecido como *dependência de malha* e pode ser interpretado como uma instabilidade numérica onde um maior número de cavidades surge quando uma malha de elementos finitos mais fina é empregada (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Esta dificuldade está ilustrada pela Figura 3.2, que demonstra o aumento de cavidades no modelo nas malhas 80 x 50 (c) e 112 x 70 (d).

Devido a: (i) não convexidade do problema e (ii) a criação de múltiplos mínimos locais pelo processo de relaxação do domínio da variável de projeto, é gerada uma dificuldade associada a TO conhecida como dependência de malha, onde diferentes configurações de malha, geram soluções diferentes. Em outras palavras as topologias geradas por malhas refinadas e malhas grosseiras divergem em muitos pontos (SILVA,

Figura 3.2 – Análise de sensibilidade geométrica em função do refino das malhas.



Fonte: Kim et al. (2000).

2019).

Esta dificuldade pode ser evitada de duas maneiras: 1) utilizando a estratégia de homogeneização (SIMP) para que o espaço de solução seja relaxado. 2) restringir o espaço de busca de solução do modelo em apenas regiões factíveis do modelo.

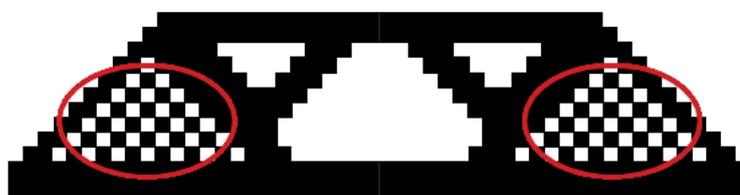
Na primeira alternativa, existem mais dois fatores críticos: 1) a estratégia de homogeneização permite que materiais ortotrópicos ou anisotrópicos sejam incorporados à solução do modelo, violando a premissa fundamental do SIMP, onde é realizada uma distribuição de materiais isotrópicos de forma homogênea no domínio do objeto. 2) a relação do espaço de busca fornecido pela parametrização SIMP não é suficiente para evitar o problema da não existência da quantidade elevada de múltiplos ótimos locais (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

Já na segunda alternativa, são empregadas mais restrições para tornar o espaço de busca menor, buscando torná-lo um envoltório convexo. Obviamente que esta inserção de restrições adicionais, alteram o modelo original, e conseqüentemente, a sua solução e custo computacional (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

3.2.2 Instabilidade de tabuleiro

Devido à falhas nas escolhas das funções de interpolação dos campos de densidade relativas e dos seus respectivos deslocamentos nodais, são geradas instabilidades numéricas (SILVA, 2019). Estas instabilidades, apresentam-se de forma muito semelhante à um tabuleiro de xadrez, onde em certas regiões, existe uma alternância entre quadrantes vizinhos de regiões sólidas e sem material (vazio) (PAULINO, 2019). A ilustração geométrica deste fenômeno é apresentada pela Figura 3.3 para uma melhor compreensão.

Figura 3.3 – Padrão de instabilidade de tabuleiro em uma viga simplesmente apoiada.



Fonte: Silva (2020).

A instabilidade de tabuleiro está normalmente associada a utilização de elementos finitos de baixa ordem. Porém quando na modelagem são utilizados elementos de ordem maior (8 ou 9 nós), o efeito da instabilidade de tabuleiro ainda não é totalmente superado. Regiões que apresentam geometrias semelhantes à um tabuleiro de xadrez, não podem ser consideradas como soluções mínimas locais, pois não possuem significado físico, além disso, a sua elevada rigidez é puramente artificial (SILVA, 2019).

Uma forma de superar as dificuldades apresentadas pelas seções (3.2.1) e (3.2.2) simultaneamente é a aplicação de métodos de restrição do espaço de solução, conhecidos como métodos de filtragem (PALMAS, 2018).

3.2.3 Análise de sensibilidades

Como já apresentado na subseção 3.2 do presente trabalho, os métodos de otimização baseados em gradientes são os mais utilizados para superar a dificuldade da não-convexidade apresentada nos problemas de TO. Estes métodos utilizam as sensibilidades das variáveis para saber se os valores atingiram um mínimo local, isso pode ser obtido pelas derivadas parciais das variáveis (SIGMUND; PETERSON, 1998).

Como as implementações presentes neste trabalho utilizam métodos baseados

em gradientes, as análises das sensibilidades da função objetivo e das restrições são fundamentais e podem ser obtidas através do Método Adjunto.

Para os testes realizados na subseção 5.2 foram calculadas as sensibilidades através das Eqs (3.34) - (3.35), sendo a Eq. (3.34) é função adjunta. Já a equação de estado utilizada foi a de equilíbrio da estrutura, apresentada pela Eq (3.20).

Já para os testes da subseção 5.4 novamente a equação de estado utilizada foi a Eq (3.20) e também foi utilizado o *Método Adjunto*. Este método basicamente consiste na construção do Lagrangiano (\mathcal{L}) do problema original. Para maiores detalhes sobre como estruturar estes procedimentos, recomenda-se a leitura de Arenales et al. (2015). Para a construção do Lagrangiano, as restrições do problema original são relaxadas e penalizadas na função objetivo por um penalizador ϕ_n . O modelo relaxado de Mínima Flexibilidade Estrutural na forma discretizada é apresentado a seguir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_e, \phi_n) = \{ \min_{c(x_e, \phi_n)} = & \sum_{e=1}^{N_e} E_e(\bar{x}_e) u_e^T k_0 u_e + \phi_1 \left(\sum_{e=1}^{N_e} k(\bar{x}_e) u(\bar{x}_e) - F \right) \\ & + \phi_2 \left(\sum_{e=1}^{N_e} V(\bar{x}_e) \right) - \sum_{e=1}^{N_e} V_e \bar{x}_e + \phi_3 \left(\sum_{e=1}^{N_e} V(\bar{x}_e) / V(\Omega) - f \right) \\ & + \phi_4 (\bar{x}_{min} - \bar{x}_e) + \phi_5 (\bar{x}_e - \bar{x}_{max}) \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Onde $c(x_e, \phi_n)$ representa os trabalhos virtuais, \bar{x}_{min} e \bar{x}_{max} são os limites do domínio da variável \bar{x}_e da Eq. (3.23). Após a construção do \mathcal{L} , atribui-se um índice F_n para cada termo que possui o penalizador (ϕ_n), aplica-se a derivada parcial em relação a variável \bar{x}_e e iguala-se o Lagrangiano a zero (SILVA, 2020).

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{x}_e} - \phi_1 \frac{F_1}{\partial \bar{x}_e} - \phi_2 \frac{F_2}{\partial \bar{x}_e} - \phi_3 \frac{F_3}{\partial \bar{x}_e} - \phi_4 \frac{F_4}{\partial \bar{x}_e} - \phi_5 \frac{F_5}{\partial \bar{x}_e} = 0 \quad (3.28)$$

Onde ($\phi_n \in n = (1, \dots, 5)$) devem respeitar todos os critérios de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) que serão definidos na subseção 4.1.2. Basicamente o Lagrangiano não altera o problema original, sendo apenas uma nova forma de reescrevê-lo. Neste ponto o desafio é encontrar os multiplicadoras de Lagrange que (ϕ_n) que satisfaçam a Eq. (3.28) (ARENALES et al., 2015).

Como o deslocamento da estrutura exerce um peso significativo no valor da função

objetivo, se torna atrativo avaliar a sua sensibilidade. Para tal, primeiramente, se deve reescrever a função objetivo (Eq. (3.19)) e relaxar a restrição da Eq. (3.20), correspondente a equação de estado de equilíbrio, e aplicar o método Lagrangiano, levando esta restrição para a nova função objetivo, penalizada por um multiplicador de Lagrange (ϕ) (PICELLI et al., 2021).

$$\hat{c} = U(\bar{x})^T K(\bar{x})U(\bar{x}) + \phi^T (K(\bar{x})U(\bar{x}) - F) \quad (3.29)$$

Onde \hat{c} é o novo valor da função objetivo e T é o operador transposto. Após isso é necessário analisar a sensibilidade da função objetivo (Eq. (3.29)) em relação a variável de projeto (\bar{x}_e).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \bar{x}_e} = 2U(\bar{x})^T K(\bar{x}) \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} + U(\bar{x})^T \frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) + \phi^T \frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) + \phi^T \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_e} \quad (3.30)$$

No caso apresentado pela Eq. (3.30) o valor da derivada de F é igual a zero, desde que o carregamento não altere as densidades dos elementos \bar{x}_e . Outro ponto que deve ser levado em consideração é que o custo computacional para calcular a derivada das variáveis de estado $\frac{\partial U}{\partial \bar{x}_e}$ é muito elevado. A equação de equilíbrio auxilia na extração deste termo da expressão de forma analítica. Com isso, se pode analisar somente os termos dependentes de $\frac{\partial U}{\partial \bar{x}_e}$, aplicando a equação de equilíbrio na Eq. (3.29) (PICELLI et al., 2021).

$$2U(\bar{x})^T K(\bar{x}) \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) + \phi^T K(\bar{x}) \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} = 0 \quad (3.31)$$

Analisando a Eq. (3.31), se pode concluir que $\phi = -2U(\bar{x})$ para satisfazer a Eq. (3.31). Sem perda de generalidade essa substituição pode ser realizada uma vez que a função objetivo de flexibilidade mínima é uma *função-adjunta*. Com isso, impondo $\phi = -2U(\bar{x})$ e tornando todos os termos dependentes $\frac{\partial U}{\partial \bar{x}_e}$ nulos nas equações. A Eq. (3.30) pode ser reescrita da seguinte forma (PICELLI et al., 2021).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \bar{x}_e} = U(\bar{x})^T \frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) - 2U(\bar{x})^T \frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) = -U(\bar{x})^T \frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e} U(\bar{x}) \quad (3.32)$$

Para obter o valor analítico do termo $\frac{\partial K(\bar{x})}{\partial \bar{x}_e}$ é necessário realizar a interpolação da rigidez dos elementos.

$$K(\bar{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} E_e(\bar{x}_e) k_0 \quad (3.33)$$

Por fim, para obter o valor da sensibilidade da função objetivo do modelo de Mínima Flexibilidade, é necessário derivar a Eq. (3.26) em relação à variável de projeto x_e e realizar substituição destes valores no último termo da Eq. (3.32), obtendo a função adjunta da Eq. (3.19) (PICELLI et al., 2021).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \bar{x}_e} = \frac{1}{2} p \bar{x}_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) u_e^T k_0 u_e \quad (3.34)$$

No presente trabalho também é necessário conhecer o problema adjunto (sensibilidades) relacionado a restrição volume para as aplicações do Capítulo 5. Neste trabalho foi utilizado o método semi-analítico através de uma operação de diferença finita, considerando o volume do elemento finito (V_e) (PICELLI et al., 2021).

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}_e} = \frac{1}{V_0} \frac{V(\bar{x}_e = 1) - V(\bar{x}_e = 0)}{1 - 0} = \frac{V_e}{V_0} \quad (3.35)$$

3.2.4 Filtros de densidade

Uma maneira eficiente de garantir a independência de malha é através de filtros de densidade. Este processo ocorre através de uma construção de uma densidade ponderada para cada elemento finito, se baseando na média dos seus respectivos elementos vizinhos. Através deste processo, o modelo alcança a independência em relação à densidade das malhas do FEM (SIGMUND, 2007).

Em seu trabalho, [Sigmund \(2007\)](#) aponta que existem quatro categorias de filtros de densidade: 1) métodos de filtragem que independem dos parâmetros da malha do FEM, como os filtros de densidade ou de gradiente. 2) métodos de restrição, como o controle de perímetro. 3) métodos baseados em abordagens *level-set*. 4) métodos híbridos entre as categorias 1 e 2. Mas recentemente foram propostos filtros utilizados em métodos de projeção como o de [Lazarov e Sigmund \(2010\)](#) que será abordado mais a frente no texto.

Devido à eficiência computacional e facilidade de implementação dos métodos de filtragem da primeira categoria, entre os demais métodos, esta categoria se tornou a mais popular, e conseqüentemente, difundida pela literatura ([SIGMUND, 2007](#)).

Uma das abordagens de filtro de densidades pertencente à primeira categoria e adotado nos testes computacionais deste trabalho foi apresentado por [Sigmund \(2007\)](#) e relaciona as variáveis de projeto (x_i) de cada elemento (e) com a sua respectiva posição (R) na vizinhança circular de nós (ϑ_e), bem como, o volume de cada elemento (V_i), ponderado dos elementos vizinhos ($w(x_i)$). Com isso, a densidade filtrada (\tilde{x}_e) é apresentada pela equação (3.36).

$$\tilde{x}_e = \frac{\sum_{i \in \vartheta} (w(x_i) V_i x_i)}{\sum_{i \in \vartheta} (w(x_i) V_i)} \quad (3.36)$$

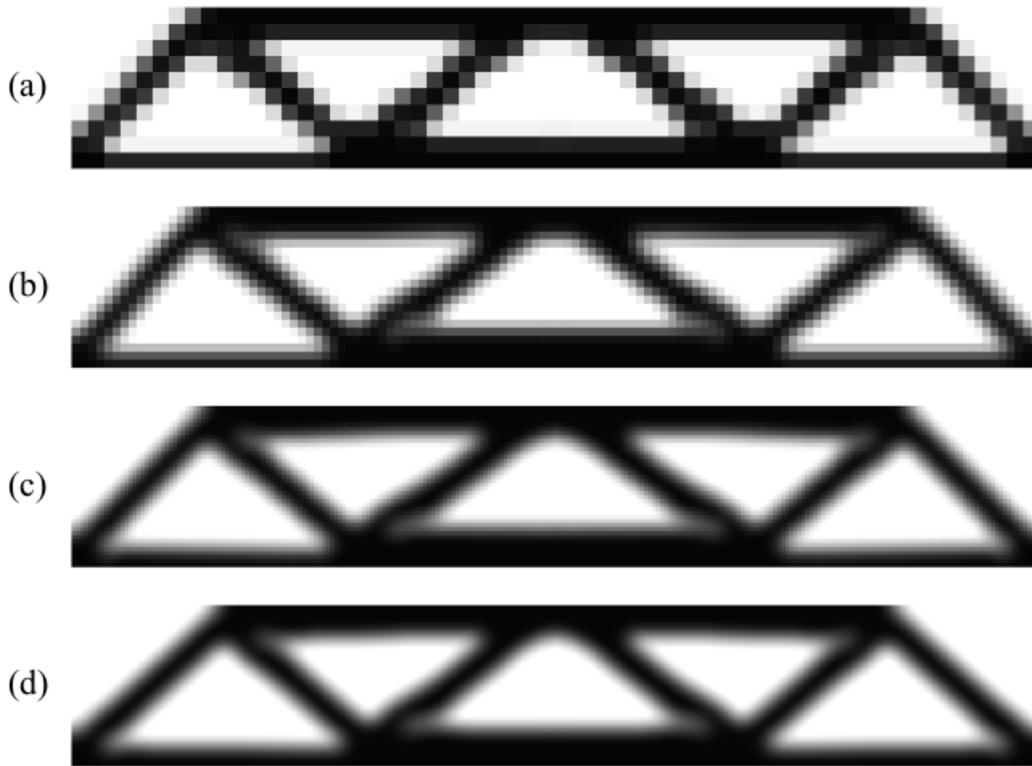
Onde a ponderação entre os elementos vizinhos ($w(x_i)$) é definida pela equação (3.37) e relaciona as coordenadas do centro do elemento (x_i) com as suas respectivas coordenadas até o centro da vizinhança (x_e) em que o elemento está localizado.

$$w(x_i) = \max(R - \|x_i - x_e\|, 0.0) \quad (3.37)$$

Conforme discutido por [Sigmund \(2007\)](#), a utilização deste tipo de filtro pode apresentar elevados níveis de material de densidades intermediárias, em função de altos valores do coeficiente de penalização (p) que aparece na Eq. (3.36). Então o autor conclui que em certos casos, este fenômeno não carrega um problema grande, uma vez que, ele pode ser tratado por pós-processamentos baseados em curvas de nível. Já quando não é possível empregar esta estratégia, os filtros que utilizam métodos

de projeção são necessários. A Figura (3.4) apresenta o desempenho do filtro de densidades do método abordado sob alguns cenários para melhor compreensão.

Figura 3.4 – Topologias otimizadas considerando filtro de densidades: (a) 300; (b) 1200; (c) 4800; (d) 19200 elementos.



Fonte: [Silva \(2016\)](#).

Outra abordagem de filtro de densidades utilizada no presente trabalho é apresentada no trabalho de [Lazarov e Sigmund \(2010\)](#). Esta abordagem foi proposta com base nas equações diferenciais de *Helmholtz*, e, por isso, é denominada neste trabalho como filtro de *Helmholtz*. Este filtro utiliza técnicas de processamento de imagens, conhecidas como *blurring*, onde a modificação da densidade de uma célula equivale a alteração da rigidez de um dado elemento da malha, a fim de tornar este elemento dependente do campo de densidades de sua vizinhança. Em linhas gerais a aplicação deste filtro consiste na utilização de um produto de convolução entre uma função de filtragem e a pseudo-densidade do elemento apresentadas pelas Eqs (3.38) - (3.39).

$$\tilde{x} = (g \cdot \tilde{x})(\dot{x}) = \int_{\mathbb{B}_R} g(x-y) \tilde{y} dy \quad (3.38)$$

$$\int_{\mathbb{B}_R} g(x) dx = 1 \quad (3.39)$$

Onde g é a função de filtragem, \hat{x} é o vetor de coordenadas da posição do elemento, x, y são as coordenadas cartesianas do elemento e \mathbb{B}_R é um círculo em um domínio plano e uma esfera em um caso de três dimensões com raio R na posição \hat{x} (SILVA, 2020).

A ideia geral da integral de convolução neste contexto é conhecer a correlação entre as duas funções (Eqs. (3.38) e (3.39)). Para tal, é necessário defasar uma função, que neste caso foi a Eq. (3.38), defasada em $x - y$ no domínio espacial, e verificar a correlação a partir do cálculo da integral. Como o comportamento de uma função (Eq. (3.39)) é conhecido, é possível prever o comportamento do sistema (correlação entre as duas funções), para qualquer entrada (SHIN; HAMMOND, 2008).

Neste trabalho, em lugar da integral de convolução na forma explícita se implementou no *software* FEniCS uma solução de uma equação modificada de *Helmholtz* com condições de contorno naturais homogêneas (ver Eqs. (3.40)-(3.41)) Silva (2020).

$$-r^2 \nabla^2 \tilde{a} + \tilde{a} = a \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (3.41)$$

Nas Eqs.(3.40)-(3.41) a representa uma variável de projeto e \tilde{a} representa a variável de projeto filtrada, r é o parâmetro de alcance do raio de filtragem, similar o R da Eq.(3.37). Avaliando a Eq.(3.40) se observa que (i) se $r = 0$, a variável filtrada \tilde{a} é equivalente a variável de projeto a e (ii) quanto maior o valor do parâmetro r , maior é a influência do gradiente da variável filtrada na solução da Eq.(3.40) (SILVA, 2020).

Para determinar a solução do conjunto de Eqs.(3.40)-(3.41) (Formulação Forte do problema) tem-se que desenvolver uma Formulação Fraca para a utilização do FEM. Para tal, é necessário multiplicar ambos os lados da Eq.(3.40) por uma função teste v e realizar a integração em todo o seu domínio, conforme apresentado na Eq.(3.42)(SILVA, 2020).

$$\int_v -r^2 \nabla^2 \tilde{a} \cdot v dV + \int_v \tilde{a} \cdot v dV = \int_v a \cdot v dV \quad (3.42)$$

Realizando a integração por partes e impondo a condição de contorno natural dada

pela Eq.(3.41), pode-se reescrever a Eq.(3.42) como:

$$\int_v -r^2 \nabla \tilde{a} \cdot \nabla v dV + \int_v \tilde{a} \cdot v dV = \int_v a \cdot v dV \quad (3.43)$$

4 Modelos de TO

Neste capítulo serão apresentados os modelos de TO que combinam várias características dos problemas tradicionais de otimização de projetos estruturais. Com o objetivo de encontrar a topologia ideal dado um domínio restrito e conhecido *a priori*. Como dados de entrada do problema (parâmetros), também são conhecidos: carregamentos, condições de contorno e as restrições do projeto como: localização de furos já existentes no domínio, subdomínios, áreas solidas no domínio que não podem ser alteradas, entre outras. Neste tipo de problema estrutural são desconhecidos: a geometria final do *design*, bem como, a quantidade dos elementos da malha que estarão presentes na geometria final, uma vez que, no processo iterativo da técnica, elementos finitos que não contribuem para a geometria, são eliminados (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Neste sentido, a topologia, forma e tamanho da estrutura não são modeladas por funções paramétricas convencionais, e sim, por um conjunto de funções distribuídas e definidas em um domínio de projeto fixo. Essas funções, por sua vez, representam uma parametrização do tensor de rigidez do contínuo que leva à formulação de projeto adequada para TO (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

4.1 Modelo de Mínima Flexibilidade

O modelo possui como objetivo encontrar a melhor distribuição de materiais dentro de um domínio (Ω), dadas as condições de contorno em deslocamentos e ações aplicadas. Como o domínio é restrito e deve ser respeitado, duas variáveis de interesse vem ao caso, sendo elas o deslocamento (u) e o módulo de *Young* ideal (E^*). Neste sentido, o modelo busca maximizar a rigidez da estrutura para que haja o deslocamento mínimo possível, atendendo todas as restrições do projeto. A maximização da rigidez será obtida minimizando a grandeza inversa que é a flexibilidade. Com isso, se torna mais atrativo para os métodos de solução a busca por mínimos locais, conforme

já discutido anteriormente. Dada esta razão, neste trabalho serão abordados modelos que buscam a minimização da flexibilidade através da busca de mínimos locais (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Conforme foi apresentado no Capítulo 3, para dar início ao processo de modelagem matemática em TO, normalmente duas condições iniciais são necessárias: (i) o relaxamento da variável de decisão da inclusão de material na topologia. (ii) homogeneização do material para que ele possa ser considerado isotrópico. Para atender a primeira condição, se faz necessário o relaxamento do domínio da equação (3.18) do domínio do material para o domínio das densidades. Já para atender a segunda condição, uma das alternativas para tratar esta dificuldade é a SIMP, que nesta modelagem foi utilizada a formulação apresentada em Andreassen et al. (2011), onde para cada densidade do elemento e é atribuída uma densidade \bar{x}_e que determina o seu módulo de Young (E_e).

$$E_e(\bar{x}(e)) = E_{min} + \bar{x}(e)^p (E^0 - E_{min}), \quad \bar{x}(e) \in \{0, 1\} \quad (4.1)$$

Onde E^0 é o módulo de Young isotrópico inicial do material. E_{min} é um coeficiente do módulo de Young com um valor muito baixo, afim de evitar que a matriz de rigidez se torne singular, geralmente definido por 1^{-9} (ANDREASSEN et al., 2011). Por fim, p é o coeficiente de penalização SIMP (geralmente assume o valor 3), introduzido para garantir as soluções (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Com isso, o problema de Minimização da Flexibilidade do Material pode ser definido pelo modelo abaixo Bendsøe e Sigmund (2003):

$$\min c(x) = U^T K U = \sum_{e=1}^{N_e} E_e(\bar{x}(e)) u_e^T k_0 u_e \quad (4.2)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} F = K(\bar{x})U(\bar{x}) \\ V(\bar{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \bar{x}_e \\ V(\bar{x}) \leq V(\Omega) \\ 0 \leq \bar{x}(e) \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$V(x(e))/V(\Omega) = f \quad (4.4)$$

Na função objetivo (4.2), $c(x)$ quantifica a flexibilidade da estrutura da topologia. A Eq. (4.3) é equivalente ao conjunto das Eqs. (3.20) - (3.23) e só foi reescrita para maior fluidez na leitura do texto. U e F são os vetores de deslocamento e de forças globais do sistema, respectivamente. K é a matriz de rigidez global do sistema, u_e é o vetor de deslocamento de cada elemento, k_0 é a matriz de rigidez para um elemento com o módulo de *Young* unitário, x é o vetor das variáveis de decisão (densidades dos elementos), N é o número total de elementos utilizado no domínio discretizado. $E_e(x(e))$ é o módulo de *Young* do elemento após a aplicação do SIMP via Eq. (4.1). A equação (4.4) representa a imposição de redução de volume de material. $V(x)$ e $V(\Omega)$ são os volumes de *design* do material e do domínio, respectivamente e o parâmetro f determina a redução de volume necessária para o alcance da geometria desejada.

Dois pontos muito importantes podem ser observados na segunda parcela da função objetivo (4.2) que corresponde a forma discretizada. O primeiro deles é que u não é uma variável de decisão e sim, uma variável de estado (obtida através da solução da equação de equilíbrio, Eq. (3.20)) e seu domínio não é definido explicitamente no modelo, apesar de estar definido apenas em Ω . O segundo ponto é que se u é uma variável, o termo $\sum_{e=1}^{N_e} E_e(x(e))u_e^T k_0 u_e$ define o modelo como não-linear quadrático pela multiplicação $u_e^T k_0 u_e$. Tornando a tarefa de encontrar a solução ótima do modelo muito desafiadora.

Contudo existem algumas alternativas como: método de *Lagrange*, método de *Lagrange* Aumentado, Algoritmo Genético, Algoritmos de *Design* Evolutivo, método de Pontos Interiores, método do Enxame de Partículas, método do Recozimento Simulado entre outras abordagens (DIAS, 2013), (SILVA, 2019) (SILVA, 2020). Vale destacar um novo método criado por um pesquisador brasileiro *Topology Optimiza-*

tion of Binary Structures (TOBS) que utiliza técnicas de linearização para resolver o modelo de TO (PICELLI et al., 2021). No presente trabalho, serão utilizados: método Critério de Otimalidade na forma apresentada em Andreassen et al. (2011) e o método dos Pontos Interiores na forma apresentada em Silva (2020), Salas et al. (2021) e Alonso (2022).

4.1.1 Critério de Otimalidade

Este método é iterativo e consiste na parametrização da relação entre *design* do domínio e o domínio da matriz de rigidez, através de uma interpolação adequada de cenários, bem como, a sua respectiva atualização de densidades que são baseadas em critério de otimalidade, como o nome do método sugere. A atualização do cenário é baseada na resolução de equações de equilíbrio, através do FEM.

O método utiliza os valores dos deslocamentos obtidos do FEM como critério para atualizar as densidades dos elementos. Para isso, é necessário: (i) computar os deslocamentos e as forças de reação via FEM, (ii) calcular a flexibilidade do *design* do domínio obtido e realizar a seguinte análise: -se somente o valor marginal da Flexibilidade, obtido pela análise de sensibilidades aumentar (ver Eqs. (4.7) - (4.8)) em relação à iteração anterior, pare. Caso contrário as iterações continuam. (iii) calcular a atualização da variável de densidade através das Eqs. (4.5)-(4.6) onde é necessário encontrar o multiplicador de *Lagrange* (ϕ) adequado para a Eq. (4.6) dada uma restrição de volume Eq. (4.4).

$$x_e^{novo} = \begin{cases} \max(0, x_e - m) & \text{if } x_e B_e^\eta \leq \max(0, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{if } x_e B_e^\eta \geq \min(1, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), m representa o passo do movimento positivo da solução, $\eta (= \frac{1}{2})$ é um coeficiente de amortecimento e B_e é obtido através do critério de otimalidade apresentado a seguir (ANDREASSEN et al., 2011).

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\frac{\partial V}{\partial x_e} \phi} \quad (4.6)$$

Onde o multiplicador de *Lagrange* (ϕ) deve ser selecionado seguindo critérios para que a restrição de volume (Eq. (4.4)) seja respeitada. Uma maneira comumente utilizada para encontrar o seu valor é através do algoritmo da Bisseção. Basicamente, o algoritmo de Bisseção é inicializado com a definição de limites superiores e inferiores para o multiplicador de *Lagrange* (ϕ). Após isso, o intervalo que limita (ϕ) (limite superior - limite inferior) é repetidamente reduzido pela metade até que seu tamanho seja inferior aos critérios de convergência (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

As sensibilidades da função objetivo c e do volume material V com as respectivas densidades dos elementos x_e são obtidas pelo conjunto de Eqs. (4.7) - (4.8), ressaltando que as sensibilidades dos deslocamentos não são calculadas explicitamente. O processo para a obtenção da sensibilidade do volume foi apresentado pela Eq. (3.35), já o processo de obtenção da sensibilidade da função objetivo é análogo a Eq. (3.34) (ANDREASSEN et al., 2011).

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) u_e^T k_0 u_e \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = 1 \quad (4.8)$$

O filtro de sensibilidades para evitar o problema de dependência de malha utilizado neste método é o mesmo descrito em Andreassen et al. (2011), apresentado pelas Eqs. (4.9) - (4.10).

$$\widehat{\frac{\partial c}{\partial x_e}} = \frac{1}{\max(x_{min}, x_e) \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (4.9)$$

$$H_{ei} = \max(0, r_{min} - \Delta(e, i)) \quad (4.10)$$

Este filtro considera um conjunto (N_e) de elementos vizinhos (i) que possuem uma distância de centro a centro ($\Delta(e, i)$) até o centro do elemento (e), raio mínimo (r_{min}) e um parâmetro penalizador de distâncias (H_{ei}) que possui como função a modificação da densidade de uma variável de projeto, se baseando na média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos considerando uma vizinhança fixa (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O parâmetro $x_{min}(= 10^{-9})$ faz com que se evite a divisão por zero na equação (4.9) quando o operador *max* é aplicado (ANDREASSEN et al., 2011). Já o penalizador de distâncias H_{ei} é igual a zero fora da área de filtragem e o seu valor vai decaindo linearmente de acordo com a distância dos elementos vizinhos i (SIGMUND, 2001).

Por fim, o filtro de densidades que transforma a densidade original é dado por:

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} x_i \quad (4.11)$$

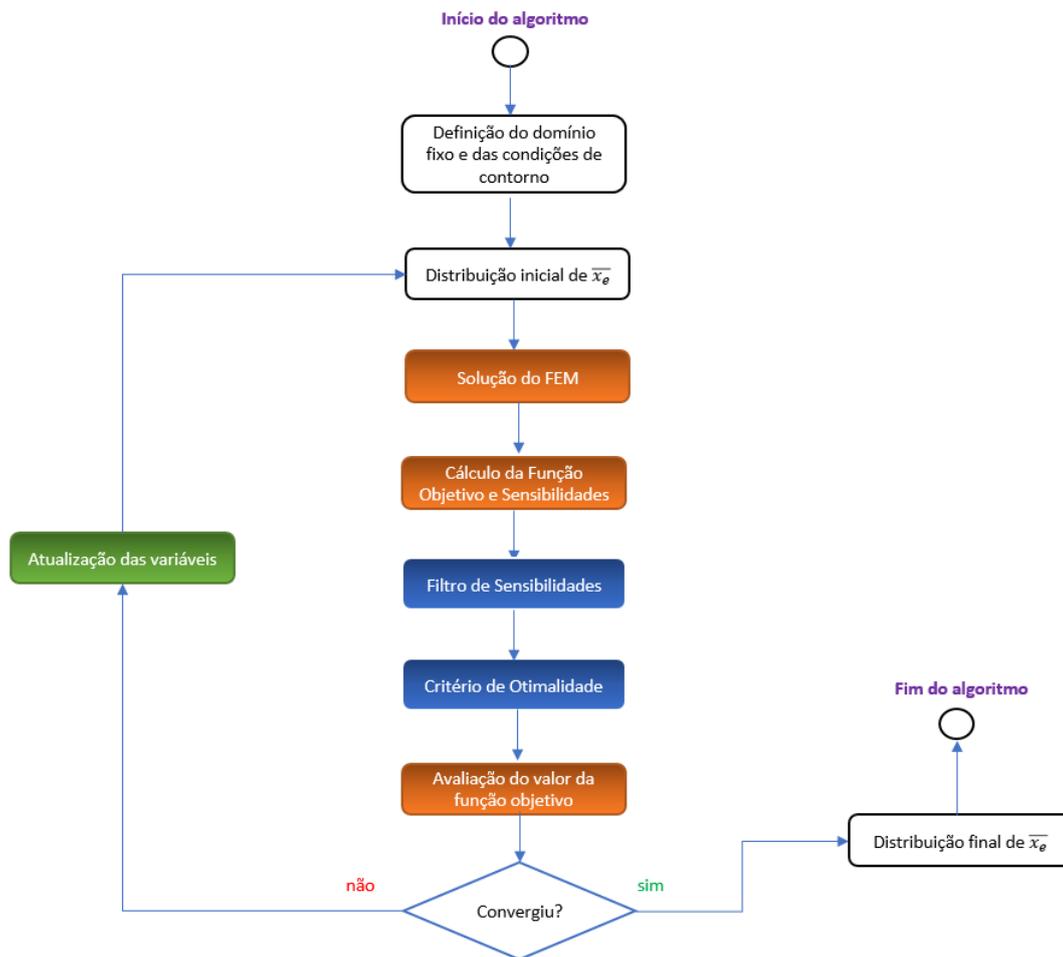
A partir deste ponto no texto, as densidades originais x_e são referidas como as variáveis de projeto e as densidades filtradas \tilde{x}_e são referidas como as densidades físicas. Esta terminologia é usada para enfatizar que a aplicação de um filtro de densidade faz com que as densidades originais x_e percam seu significado físico. Com isso, os modelos de TO relaxados através da SIMP, devem sempre apresentar como solução para o problema de otimização, o campo de densidade filtrado \tilde{x}_e e no lugar do campo de densidade original x_e (SIGMUND, 2007) (ANDREASSEN et al., 2011).

Após a aplicação do filtro de densidade é necessário realizar os cálculos das sensibilidades do modelo para analisar a convergência do algoritmo. Isso é necessário devido a não convexidade da função objetivo, conforme apontado na subseção (3.2). Com isso, a sensibilidade em relação a densidade física é dada pela Eq.(4.7), a sensibilidade em relação ao volume é dada pela Eq.(4.8), por fim, a sensibilidade da função objetivo $c(x)$ em relação às densidades filtradas \tilde{x}_e é obtida através da derivada da regra da cadeia. Considerando um novo parâmetro ψ que representa a função objetivo c , a sensibilidade da função objetivo em relação a variável de projeto é dada pela Eq.(4.12) (ANDREASSEN et al., 2011).

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \sum_{e=1}^{N_j} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e=1}^{N_j} \frac{1}{\sum_{e=1}^{N_j} H_{ei}} H_{je} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}_e} \quad (4.12)$$

Para melhor percepção do *framework* do Método Critério de Otimalidade, é apresentada a Figura 4.3 a seguir.

Figura 4.1 – *Framework* do método Critério de Otimalidade.



4.1.2 Método dos Pontos Interiores

Um dos métodos presentes na maioria dos *solvers* atualmente é o Método dos Pontos Interiores ou Método da Barreira [Arenales et al. \(2015\)](#). Como ele pode ser utilizado em problemas de otimização não-convexos [Conejo et al. \(2006\)](#) é uma opção atrativa no contexto do presente trabalho.

A ideia principal desse método é buscar soluções ótimas (locais e globais) por

meio de trajetórias de soluções, que percorrem o centro do domínio do espaço de soluções. Este método difere dos métodos de otimização linear que buscam por pontos extremos, percorrendo seu espaço de busca pelo limite do espaço de solução. Por esta razão, para alguns determinados tipos problemas, em termos de otimização, o método dos Pontos Interiores pode ser bem competitivo em termos computacionais (ARENALES et al., 2015).

Para o início da aplicação do método, é necessário reescrever o modelo de Minimização de Flexibilidade apresentado pelo conjunto de Eqs. (3.14) - (3.18) de uma forma genérica, sem perda de generalidade, dada pelas Eqs. (4.13) - (4.16) (ALONSO, 2022).

$$\min c(x) \tag{4.13}$$

sujeito a:

$$g(x(i)) = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \dots n_{eq} \tag{4.14}$$

$$h(x(i)) \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, 3 \dots n_{ineq} \tag{4.15}$$

$$LB \leq x \leq UB \tag{4.16}$$

No conjunto de Eqs. (4.13) - (4.16), x é a variável de projeto, $c(x)$ é a função objetivo ou multi-objetivo do modelo, (4.14) e (4.15) representam os conjuntos de restrições i dos tipos de igualdades e desigualdades, respectivamente, definidas por um número total (n_{eq}) e (n_{ineq}) de restrições. Por fim, LB e UB representam os limitantes mínimos (*lower bound*) e máximos (*upper bound*), respectivamente do domínio da variável de projeto x . Analisando o conjunto de Eqs. (4.13) - (4.16) é possível observar que o número de variáveis depende da quantidade de valores positivos da variável x que estão distribuídos ao longo da malha de elementos (domínio) e são obtidos utilizando o FEM (n_x).

O Método dos Pontos Interiores ou Método da Barreira, impõe uma barreira logarítmica através de uma restrição para garantir que a busca pelos pontos candidatos a entrarem no conjunto da solução ocorra no espaço factível da solução, satisfazendo as Eqs. (4.14) - (4.16), assumindo que as Eqs. (4.14) - (4.15) são diferenciáveis e obedecem a todos os critérios de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT).

Resumidamente, estes critérios são considerados o maior marco teórico no campo da otimização não-linear até o momento. E satisfazem qualquer ótimo restrito, local ou global, de qualquer problema de programação linear e maioria dos problemas de programação não-linear. Além disso, estes critérios são muito utilizados como critérios de parada de algoritmos, especificamente, para reconhecer se para uma dada restrição um ótimo local foi alcançado, utilizando as derivadas das funções (gradientes). Em problemas diferenciáveis irrestritos, o gradiente é igual a zero no local de mínimo valor da função. Em problemas diferenciáveis restritos, o gradiente não é necessariamente igual a zero, isso se deve às limitações do problema. Detalhes sobre estes critérios se encontram em [Conejo et al. \(2006\)](#).

No contexto do presente trabalho o Método dos Pontos Interiores utilizado, está implementado na biblioteca IPOPT, do inglês *Interior-Point OPTimizer* que utiliza além da implementação tradicional do método, um algoritmo de filtragem baseado na direção de busca, para potencializar a redução do espaço de busca, e conseqüentemente, redução no custo computacional. Para maiores detalhes sobre o método completo, favor consultar [Wächter e Biegler \(2006\)](#). A vantagem do método é que o aumento dos valores dos pontos candidatos à entrarem no conjunto de solução ocorre utilizando um método de busca linear, evitando a busca pelo valor exato, obtendo ganho computacional ([ALONSO, 2022](#)).

Em linhas gerais, o IPOPT para o problema abordado neste trabalho, converte a restrição de volume dada pela Eq. (4.4) em termo que contém barreira logarítmica que vai gradualmente aproximando o valor do termo a zero durante o processo de otimização. A convergência da otimização depende da parametrização da tolerância do erro em relação à otimalidade especificada. Com isso o método corresponde ao valor máximo da norma seguindo as condições de KKT. Com isso, o conjunto de Eqs. (4.13) - (4.16) pode ser reescrito da forma abaixo ([ALONSO, 2022](#)).

$$\min_{(x, S_{bound})} c(x) - \mu_{IPOPT} + \sum_{i=1}^{2n_x + n_{ineq}} \ln(h_{bound,i}(x, S_{bound})) \quad (4.17)$$

sujeito a:

$$g(x, S_{bound}) = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, (n_{eq} + n_{ineq}) \quad (4.18)$$

Onde μ_{IPOPT} representa a barreira logarítmica que gradualmente vai sendo reduzida ao valor zero durante o processo de otimização, $2n_x$ são os limitantes das variáveis x . $s_{bound,i}$ são folgas artificiais para cada restrição i , S_{bound} é conjunto de todas as folgas artificiais, $h_{bound,i}$ são restrições do tipo caixa (limitam o domínio).

No IPOPT $2n_x$ são representados por: (i) $g_{bound,i}(\alpha, S_{bound}) = x_i - LB \geq 0$ e por (ii) $g_{bound,n_x+i}(x, S_{bound}) = UB - x_i \geq 0$, onde x_i é o valor da variável x do nó i da malha de elementos finitos.

As restrições de desigualdade são convertidas para igualdades no IPOPT por meio de folgas artificiais $s_{bound,i}$, que são representadas pelo conjunto S_{bound} . Isto significa que a Eq. (4.15) se torna uma restrição do tipo $h_{bound,2n_x+i}(x, S_{bound}) = -s_{bound,i} \geq 0$ e a Eq.(4.14) se torna uma restrição do tipo $g_{2n_{eq}+i}(x, S_{bound}) = g_i(x) - s_{bound,i} = 0$.

A solução do conjunto de Eqs. (4.17) - (4.18) na biblioteca IPOPT, é possível pelo método de *Newton-Raphson* aumentado, amortecido com um método de filtragem de linha.(WÄCHTER; BIEGLER, 2006).

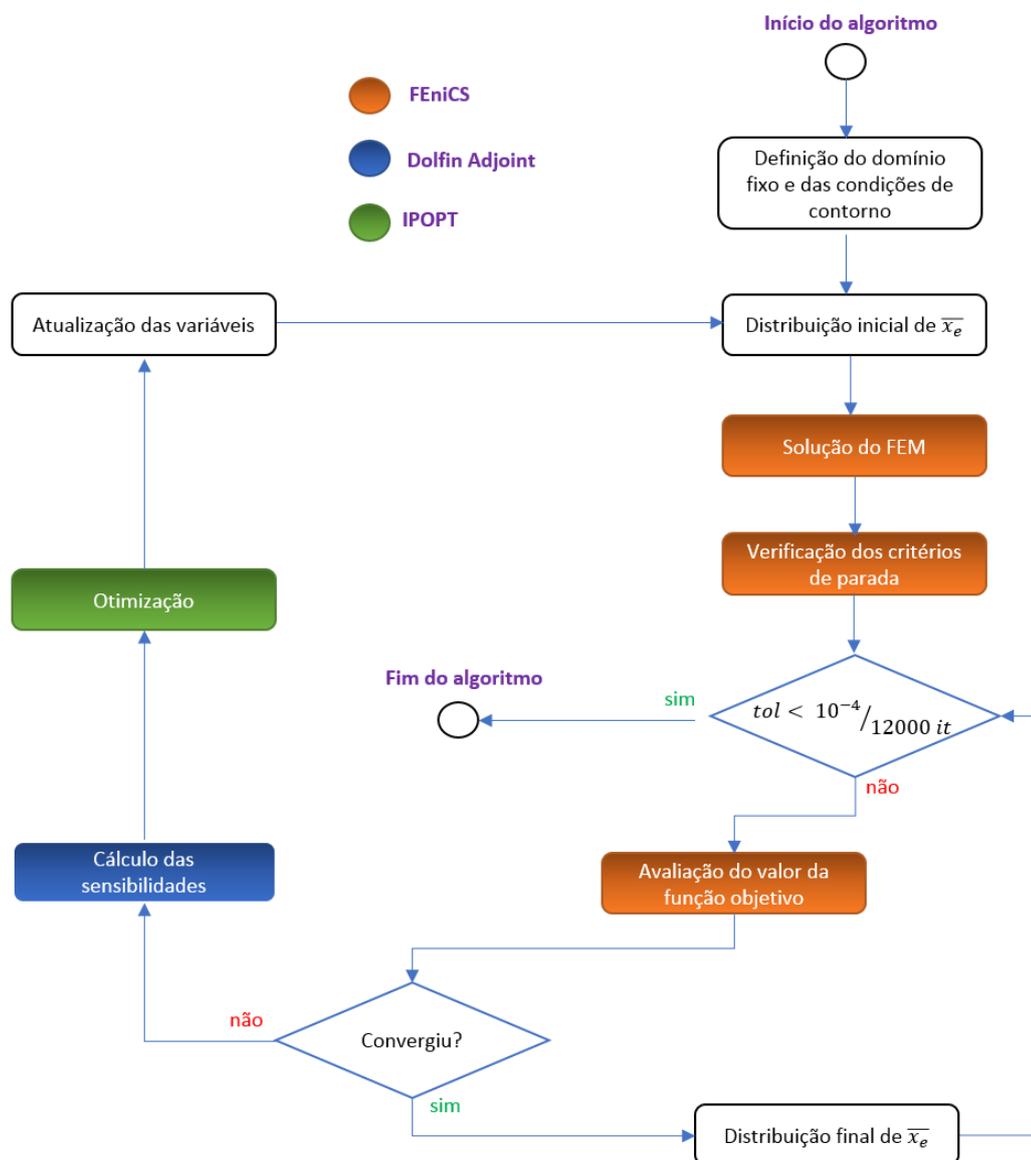
Para a aplicação do método *Newton-Raphson* aumentado é necessário escrever o problema dual do modelo de Eqs. (4.17) - (4.18) relaxado, isto é, após a aplicação das folgas artificiais. Em seguida se cria uma variável δ para cada equação, obtendo a tríade $(x(\delta), \lambda(\delta), \mu(\delta))$, onde $x(\delta)$ é a função objetivo do problema dual, $\lambda(\delta)$ são as restrições relaxadas do problema dual e $\mu(\delta)$ são as folgas artificiais. A convergência do método depende de uma aproximação inicial ser razoavelmente próxima da solução de $(x(\delta), \lambda(\delta), \mu(\delta))$ e δ é o ponto de referência, que deve ser iniciado com um valor compatível com uma aproximação disponível, para então ser diminuído gradativamente. Com isso, a estratégia do método busca perturbar δ , tornando a perturbação uma incógnita, podendo assim desprezar as partes não lineares do sistema, resolvendo somente sistemas lineares (ARENALES et al., 2015).

O filtro de busca linear consiste na combinação dos valores permitidos que não promovem a violação das restrições do problema dual, nas resoluções dos sistemas lineares. Com isso, o filtro contém apenas os valores da função objetivo factíveis, filtrando os valores possíveis entre os permitidos, forçando o algoritmo a permanecer na trajetória de solução ótima. O método de filtragem de linha da biblioteca IPOPT leva em conta a matriz de rigidez tangente que deve ser definida positiva e função de $(x(\delta), \lambda(\delta), \mu(\delta))$, para garantir as propriedades de descendência na direção de busca dos ótimos locais. Além disso, tem-se que garantir que $x(\delta)$ possuí transposta, caso contrário a solução do sistema linear pode não existir. Portanto, pode ser necessário

modificar a matriz de iteração, para que todas as premissas sejam atendidas [Wächter e Biegler \(2006\)](#).

Para a aplicação do método, é necessário estabelecer um critério de parada que pode ser: número máximo de iterações, erro máximo permitido para conversão do método (tolerância), número máximo de restrições que podem ser violadas para satisfazer o objetivo, entre outros. Os critérios adotados neste trabalho foram dois: limite de 12000 iterações ou a tolerância atingir o valor menor que 10^{-4} , onde qualquer limite que seja atendido realiza a parada do algoritmo de solução.

Figura 4.2 – *Framework* de implementação do método exato para os modelos de TO.



Para a implementação do método de Mínima Flexibilidade, primeiramente é necessário definir o domínio (malha e número de elementos), carregamentos e graus de

liberdade fixos (condições de contorno). Em segundo lugar se faz necessário informar os valores iniciais de \bar{x}_e . De posse destas informações é possível encontrar a solução da equação de estado (Eq. (3.20)) através da biblioteca Dolfin Adjoint. Mediante a solução do Sistema Adjunto (Eq. (3.27)), é possível obter: os valores dos deslocamentos ($u(x)$), o valor da função objetivo (c) e a sensibilidade da função objetivo ($\frac{\partial c}{\partial x_e}$). A partir destas informações é possível estabelecer novos valores para \bar{x}_e no novo domínio obtido via IPOPT. E este ciclo se repete até que algum dos critérios de parada utilizados neste trabalho sejam atendidos. A Figura 4.2 apresenta todo o *framework* utilizado em detalhes.

4.2 Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade

O modelo de Mínima Flexibilidade apresentado na seção anterior, pode ser reformulado em uma estratégia de minimização de energia de deformação através de um processo de homogeneização de duas fases do material, onde uma fase é considerada a existência de material (corpo rígido) e a outra fase é considerada a ausência de material (vazio) (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Basicamente a técnica de homogeneização consiste em substituir o domínio heterogêneo por um domínio equivalente, sem perda de generalidade (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007).

4.2.1 Conceitos básicos de Homogeneização

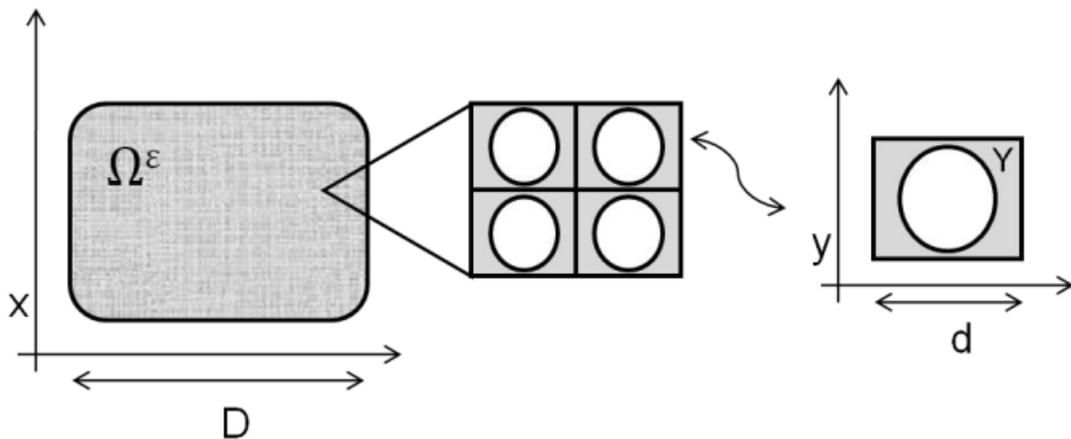
A técnica de homogeneização considera uma *estrutura unitária celular* que consiste nos valores médios das amostras do domínio, levando em consideração, a influência da estrutura da célula de material no novo domínio. Esta estratégia evita a tarefa complexa da análise periódica do material por trechos, porém pode ser que em certas regiões, os pressupostos iniciais não possam ser verificados em sua totalidade (DIAS, 2013).

Mediante isso, é necessário que três pressupostos iniciais básicos sejam verificados para a utilização da abordagem de homogeneização:

1. Periodicidade - as características heterogênicas do material devem ser periodicamente distribuídas;
2. Uniformidade - os campos macroscópicos devem ser uniformes para todos os volumes representativos do domínio macroscópico e

3. Escala de separação - a medida de comprimento local (d) devem ser muito menor do que a medida do domínio macroscópico (D). Esta característica é demonstrada pela Figura 4.3 para a melhor compreensão do pressuposto.

Figura 4.3 – Desenho esquemático da teoria da Homogeneização.



Fonte: Dias (2013).

Na Figura 4.3, é demonstrada a conversão de domínios para a aplicação da técnica, onde são apresentados: 1) o domínio macroscópico (Ω^ϵ), 2) o domínio local (Y), 3) as características de escala do domínio macroscópico (D) e 4) as características de escala do domínio microscópico (d). A técnica se inicia no domínio macroscópico (Ω^ϵ), onde é retirada uma amostra uniforme (*estrutura unitária celular*) que representa as características principais do domínio inicial, e por fim, é criado um novo domínio heterogêneo (Y), mantendo-se a proporcionalidade das escalas ($x \times D$ e $y \times d$), para evitar a perda de generalidade.

Para a realização do processo de homogeneização de duas fases do material, deve-se considerar as fases A e B , sendo as fases com e sem material, respectivamente. Também se deve considerar uma função de atribuição para o material naquela região do domínio (Y), para tal, considere uma função $\Theta(y)$ definida pela equação (3.18). Com isso, se pode formalizar a lei de Hooke para a mistura, através de um tensor de rigidez $J(y)$ que modela a relação entre as fases (ALLAIRE; SCHOENAU, 2007).

$$J(y) = A\Theta(y) + B(1 - \Theta(y)) \quad (4.19)$$

Outro ponto que deve-se ser definido é o conjunto M_Θ de todos os tensores de rigidez locais homogeneizados obtidos pela Eq. (4.19) admissíveis no domínio. Em outras palavras, M_Θ é o conjunto de topologias feitas pela mistura de A e B em proporções equivalentes a Θ e $(1 - \Theta)$, respectivamente (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007).

O conjunto M_Θ pode ser generalizado para o caso não periódico, da seguinte forma: seja $\chi_\epsilon(x)$ uma sequência de funções definidas em $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$, onde o parâmetro ϵ tende a zero, mas que não indica necessariamente um período ou mesmo comprimento característico. Se pode definir o *coeficiente de condutividade* homogeneizado correspondente a material obtido por homogeneização periódica da mistura das fases A e B (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007):

$$J_\epsilon(x) = A\chi_\epsilon(x) + B(1 - \chi_\epsilon(x)) \quad (4.20)$$

Para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe uma solução u_ϵ que satisfaça:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(J_\epsilon(x)) \nabla u_\epsilon = f, & \in \Omega \\ u_\epsilon = 0, & \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.21)$$

Com estas definições prévias, se pode definir o *Teorema da Convergência na Direção da Homogeneização* (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007).

Teorema 4.2.1 *Existe uma subsequência, sempre denotada por ϵ , uma densidade $\Theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ e um tensor de rigidez homogeneizado simétrico $J^* \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N=2})$ tal que χ_ϵ converge em média para Θ , J_ϵ **converge no sentido da homogeneização** para J^* , ou seja, para todo $f \in L^2(\Omega)$ a solução de u_ϵ da Eq. (4.21) converge em $L^2(\Omega)$ para a solução u do problema homogeneizado.*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(J^*(x)) \nabla u = f, & \in \Omega \\ u = 0, & \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.22)$$

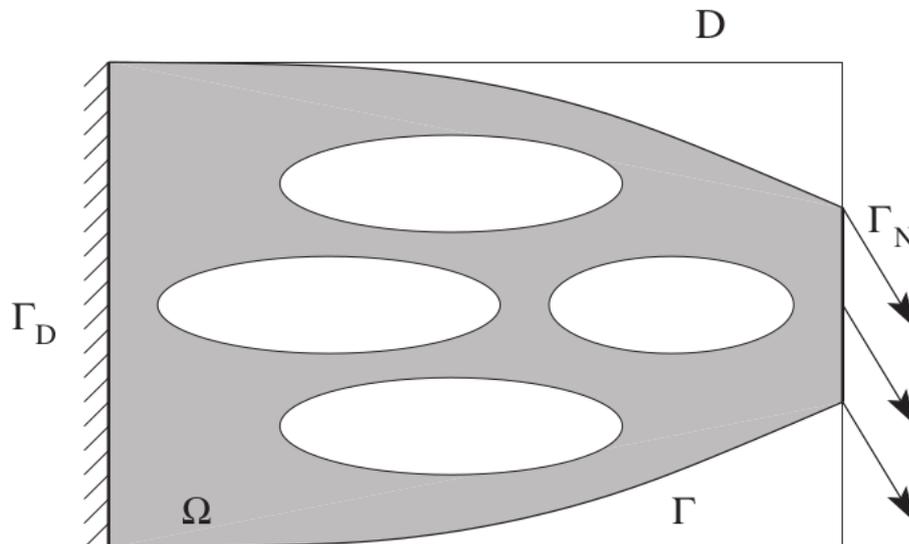
Além disso, para quase todo $x \in \Omega$, $J^*(x)$ pertence a M_Θ . Outro ponto que deve ser destacado é que uma sequência de funções χ_ε converge em média ou de forma fraca a um limite Θ em $L^\infty(\Omega)$ se, para qualquer função de teste $\phi \in L^1(\Omega)$ em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_\varepsilon \phi dx = \int_{\Omega} \phi dx \quad (4.23)$$

4.2.2 Problema Geral da Elasticidade Homogeneizado

Para a modelagem do problema, se deve considerar um domínio de trabalho limitado $D \in \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$ é a dimensão espaço), na qual se busca uma topologia ótima $\Omega \subset D$. Seja $\Gamma_D \neq \emptyset$ e $\Gamma_N \neq \emptyset$ duas partes da fronteira de D às quais se aplica uma condição de contorno de *Dirichlet* (as condições de contorno fixas em Γ_D) e uma condição nos limites de *Neumann* (tensões de superfície são aplicadas a Γ_N), conforme apresentado Figura 4.4.

Figura 4.4 – Topologia admissível Ω no domínio D .



Fonte: [Allaire e Schoenaue \(2007\)](#).

Analisando a Figura 4.4 se pode observar que o limite de contorno de Ω é composto de três partes:

$$\Gamma\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D \quad \text{com} \quad \Gamma_N \cup \Gamma_D \subset \partial D \quad (4.24)$$

Onde Γ é uma fronteira livre de esforço. A topologia Ω é ocupada por um material em regime elástico, linear e isotrópico, que segue a lei de *Hooke*. Com estas definições é possível escrever o conjunto de topologias admissíveis (U_{ad}):

$$U_{ad} = \{\Omega \subset D, \Gamma_N \cup \Gamma_D \subset \Gamma\Omega\} \quad (4.25)$$

Se escrevem as equações da elasticidade linear, substituindo: (i) o tensor de rigidez (J) pelo o tensor de rigidez ótimo (J^*) para a topologia, (ii) o novo domínio de $\sigma\vec{n} \in \partial D(\Gamma_D \cup \Gamma_N)$ (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007) e (iii) o novo domínio de $div\sigma = 0 \in D$. A equação a seguir apresenta o cálculo de (J^*) em um ambiente homogêneo com dimensão ≥ 2 .

$$J^* \leq \int_Y J(y)dy \quad (4.26)$$

Uma última definição necessária para a definição do modelo de Mínima Flexibilidade Homogeneizado é a releitura do Problema Geral da Elasticidade apresentado no Capítulo 3. Como o domínio neste problema possui três componentes (Eq. (4.25)), é necessário revisar este problema com pequenas alterações. Como basicamente as alterações são nos domínios das equações, o modelo será sintetizado pelo conjunto de equações a seguir.

$$\mathcal{W} = \begin{cases} \sigma(u) = \Theta(y)J\varepsilon(u) \\ \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) \\ div\sigma = 0, & \in D \\ \sigma\vec{n} = g, & \in \Gamma_N \\ \sigma\vec{n} = 0, & \in \partial D \quad \text{com} \quad (\Gamma_N \cup \Gamma_D) \end{cases} \quad (4.27)$$

Com todas as definições formalizadas, neste momento é possível apresentar o modelo de Mínima Flexibilidade Homogeneizado pode ser definido por:

$$\min_{c(\Theta, J^*)} = \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds = \min_W \int_D J^{*-1} \sigma \cdot \sigma dx \quad (4.28)$$

sujeito a

$$\Theta(x) \in \{0, 1\}$$

A Eq. (4.28) é a função objetivo do modelo homogeneizado. A escolha particular de minimização da flexibilidade na função objetivo torna possível dispensar o conhecimento completo de todo o conjunto M_Θ . Com isso as decisões do modelo passam a ser a determinação de limites ótimos na energia homogeneizada. Uma alternativa elegante para definição destes limites, no caso da elasticidade, são os limitantes de Hashin-Shtrikman (ALLAIRE, 2015).

Teorema 4.2.1 *Considere J^* um tensor de rigidez homogeneizado pertencente ao conjunto M_Θ , supondo que o conjunto pertence a um domínio isótropo limitado, a Eq. (4.29) abaixo, valerá para tensores simétricos de quarta ordem:*

$$J^* = 2G_* I_4 + \left(k_* - \frac{2G_*}{N}\right) I_2 \otimes I_2 \quad (4.29)$$

Onde k_* e G_* são os módulos de compressão e cisalhamento do material, respectivamente. I_2 e I_4 são os tensores de identidade de segunda ordem e quarta ordem, respectivamente. N é a dimensão do problema e \otimes é o operador de produto tensorial.

Contudo, é necessário que k_* e G_* satisfaçam as seguintes restrições:

$$\frac{1 - \Theta}{k_A - k_*} \leq \frac{1}{k_A - k_B} + \frac{\Theta}{2G_A + \lambda_A} \quad (4.30)$$

$$\frac{1 - \Theta}{2(G_A - G_*)} \leq \frac{1}{2(G_A - G_B)} + \frac{\Theta(N - 1)(k_A + 2G_A)}{(N^2 + N - 2)G_A(2G_A + \lambda_A)} \quad (4.31)$$

$$\frac{\Theta}{k_* - k_B} \leq \frac{1}{k_A - k_B} + \frac{1 - \Theta}{2G_B + \lambda_B} \quad (4.32)$$

$$\frac{1 - \Theta}{2(G_* - G_B)} \leq \frac{1}{2(G_A - G_B)} - \frac{(1 - \Theta)(N - 1)(k_B + 2G_B)}{(N^2 + N - 2)G_B(2G_B + \lambda_B)} \quad (4.33)$$

Onde A e B são as fases com e sem a presença de material, respectivamente. λ é a constante de Lamé. Com isso é possível definir um subconjunto L_Θ do conjunto M_Θ onde todos os tensores satisfazem o conjunto de eqs.(4.29)-(4.33) para toda tensão σ .

$$HS(\sigma) = \min_{(J^* \in M_\Theta)} J^{*-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{(J^* \in L_\Theta)} J^{*-1} \sigma \cdot \sigma \quad (4.34)$$

Onde $HS(\sigma)$ é o limite de energia ótimo de *Hashin-Shtrikman*. Na eq. (4.34), J^* pode ser interpretado como o tensor de maior rigidez apto para suportar a tensão σ estabelecida no carregamento da estrutura. Quando não há presença de material na mistura ($B = 0$) o limitante de *Hashin-Shtrikman* pode ser obtido de forma explícita, e será apresentado a seguir para o caso $N = 2$.

$$HS(\sigma) = J^{*-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1 - \Theta}{\Theta} g^*(\sigma) \quad (4.35)$$

$$g^*(\sigma) = \frac{k + \mu}{4\mu k} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2 \quad (4.36)$$

Onde σ_1 e σ_2 são os autovalores de σ e $g^*(\sigma)$ é uma função genérica que minimiza o valor de σ . Para maiores detalhes sobre: autovetores, autovalores e tensores, sugere-se consultar [Sánchez \(2007\)](#).

Mediante estas definição, se pode inverter a ordem das minimizações na Eq. (4.28), alterando a ordem dos termos σ e (Θ, J^*) . Como a homogeneização é um fenômeno local, a minimização em (Θ, J^*) deve ser realizada de forma independentemente em cada ponto x do domínio ([ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007](#)). Dadas estas definições, podemos então reescrever Eq. (4.28) da seguinte forma:

$$\min_{c(\Theta, J^*)} = \min_{(\Theta, J^*)} \int_D (J^{*-1} \sigma \cdot \sigma + \phi \Theta) dx \quad (4.37)$$

sujeito a

$$\Theta(x) \in \{0, 1\}$$

conj. Eqs. \mathcal{W}

A Eq. (4.37) é a nova função objetivo que agora representa os trabalhos virtuais. O primeiro termo da integral representa a minimização da flexibilidade, buscando o tensor de rigidez mais adequado para suportar os tensores de tensão estaticamente admissíveis. Já o segundo termo da integral representa a minimização do volume, sendo que, $\phi \Theta dx$ é a Relaxação Lagrangiana equação (4.4) que representa a imposição de redução de volume de material, sendo ϕ o multiplicador de *Lagrange* que penaliza esta relaxação. E o valor ótimo da variável de decisão Θ^* é obtido conforme a Eq.(4.38) apresentada a seguir.

$$\Theta^* = \min\left\{1, \left(\sqrt{\frac{k + \mu}{4\mu k \phi}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)\right)\right\} \quad (4.38)$$

Na Eq. (4.38) apenas a minimização no último termo $(|\sigma_1| + |\sigma_2|)$ continua a ser realizada numericamente via FEM. Com as definições apresentadas pelo conjunto de Eqs. (4.36) - (4.38), demonstrando os limitantes elásticos do problema de homogeneização e o conjunto de tensores de rigidez candidatos à solução, se pode formular um novo teorema que define o Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade apresentado em [Allaire e Schoenaue \(2007\)](#).

Teorema 4.2.1 *A formulação homogeneizada apresentada pela Eq. (4.38) é a formulação relaxada do modelo apresentado pela Eq. (4.28) no sentido de que: (i) existe, pelo menos uma topologia, ótima composta pelo par (Θ, J^*) que minimiza (4.38), (ii) qualquer sequência minimizadora no domínio Ω da Eq. (4.28) converge, no sentido de homogeneização, na trajetória de solução que minimize o par (Θ, J^*) na Eq. (4.38) e (iii) os valores de energia mínimas do modelo original e do modelo homogeneizado coincidem.*

$$\min_{\Omega \in U_{ad}} c(\Omega) = \min_{(\Theta, J^*)} c(\Theta, J^*) \quad (4.39)$$

Com a apresentação deste teorema, se pode formalizar um algoritmo de otimização numérica, apresentado na seção a seguir conhecido como Algoritmo de Minimização Alternada ou Dupla Minimização. Este algoritmo possui menor complexidade na

implementação do que o Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade, porém devido as suas características, pode apresentar resultados não satisfatórios em relação ao método da homogenização [Allaire e Schoenaue \(2007\)](#) e [Allaire \(2015\)](#).

Vale ressaltar que o algoritmo somente consegue apresentar uma solução numérica para $\min_{(\Theta, J^*)}$ devido a relaxação do modelo de Minimização da Flexibilidade devido ao limite ótimo de *Hashin-Shtrikman* que permite substituir o conjunto M_Θ por L_Θ . Esta possibilidade é válida somente para o modelo de TO de Minimização da Flexibilidade pois sua função objetivo é uma função adjunta. Infelizmente, para outro tipo de formulação de função objetivo esta troca não é possível e, portanto, não se pode obter uma formulação homogeneizada explícita, com isso, o teorema apresentado não é válido. Porém é apresentado em [Allaire \(2002\)](#) uma forma de relaxamento parcial.

4.2.3 Algoritmo de Minimização Alternada

Proposto em [Allaire et al. \(1997\)](#), este método consiste em encontrar uma topologia quase ótima para a formulação homogeneizada Eq. (4.38), através da busca por ótimos locais, para a formulação original do modelo (Eq. (4.28)). Como já vimos no Capítulo 3, o modelo (4.28) possui múltiplos ótimos locais. Já o modelo homogeneizado (Eq. (4.38)) possui um mínimo global bem definido ([ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007](#)).

Como já foi visto na subseção anterior a formulação homogeneizada Eq. (4.38) é constituída por uma dupla minimização de (Θ, J^*) , bem como a sua relação com os tensores de tensão estaticamente admissíveis σ . Neste sentido, o algoritmo descrito a seguir foi batizado de Minimizações Alternadas por [Allaire et al. \(1997\)](#), devido a sua característica de propor a estratégia de minimização alternada e iterativa sobre o par (Θ, J^*) . Já em [Allaire \(2015\)](#) ele é batizado como Dupla Minimização.

Para a aplicação do método, novamente deve-se relaxar o domínio da variável de atribuição da existência de material $\Theta \in \{0, 1\}$, passando da decisão discreta, se há ou não material em um determinado ponto do domínio, para um domínio contínuo baseado nas densidades dos elementos $\bar{x}_e \in \{0, 1\}$, conforme procedimento apresentado no Capítulo 3. Com isso o funcional passa de $c(\Theta, J^*)$ para $c(\bar{x}, J^*)$. Neste ponto, a Eq.(4.37) pode ser reescrita como:

$$\min_{\mathcal{W}} \int_D \min_{(\bar{x}, J^*)} \int_D (\bar{x} J^{-1}) \sigma \cdot \sigma dx + \int_D \min_{\bar{x}} \int_D \phi(V(\bar{x})) dx \quad (4.40)$$

Onde a segunda integral busca minimizar a flexibilidade da estrutura, e a quarta integral busca minimizar o volume da estrutura. Devido à relaxação do domínio da variável de decisão, ocorrem os problemas de densidades intermediárias, que são pontos entre os limites do intervalo contínuo $\bar{x}_e \in \{0, 1\}$. Como estas regiões não podem ser manufaturadas devida a incerteza da presença do material, são classificadas como pseudo-densidades (ANDREASSEN et al., 2011).

Para superar esta dificuldade, o método propõe a estratégia de realizar um processo de penalização, forçando as densidades a permanecerem nos extremos do intervalo contínuo ($\bar{x}_e \in \{0, 1\}$). A estratégia é a seguinte: após convergência do algoritmo para uma topologia com pseudo-densidades, são realizadas mais algumas iterações do algoritmo penalizando as densidades intermediárias. Este processo de penalização foi utilizado neste trabalho através do método SIMP, apresentado no Capítulo 3.

Como o problema (4.40) já está apresentado em uma formulação convexa, é possível minimizar a variável σ se fixarmos \bar{x} , encontrando a solução para o conjunto de Eqs.(4.27) que são as equações do Problema Geral da Elasticidade. Com a solução do conjunto de Eqs.(4.27) é possível obter os deslocamentos sofridos pela estrutura. Neste ponto se torna atrativo modelar uma equação que atualiza os valores dos deslocamentos, através dos valores obtidos de σ , como o procedimento é iterativo, as variáveis serão indexadas por n (BLEYER, 2018).

$$\sigma_{n+1} = (\bar{x}_n)^{p_n} J : \nabla u_{n+1} \quad (4.41)$$

Onde σ_{n+1} representa o tensor de tensões da próxima iteração, \bar{x}_n representa a densidade da interação atual, ∇u_{n+1} representa a aplicação do operador ∇ sobre o campo de deslocamentos u na iteração $n + 1$. Um ponto que vale a pena ressaltar é a substituição do tensor de rigidez J^* por $\bar{x}J$ que será mais preciso. Por fim, p_n é o penalizador SIMP interação atual n , definido pela Eq. (4.41) (BLEYER, 2018).

$$-p_n \bar{x}_{n+1}^{-p_n-1} \sigma_{n+1} + \phi = 0 \quad (4.42)$$

Na Eq. (4.42) o penalizador de *Lagrange* (ϕ) deve ser selecionado adequadamente para satisfazer a igualdade. O procedimento para encontrar o seu valor adequado é obtido pelo método da Bissecção, descrito na subseção 4.1.1 deste trabalho.

O critério de otimalidade adotado para atualizar a variável de projeto é apresentado pela Eq. (4.43) onde é necessário criar um parâmetro de densidade mínima $x_{min} = 10^{-3}$ para evitar degeneração numérica do método. Novamente, o penalizador de *Lagrange* (ϕ) deve ser selecionado adequadamente pelo método da Bissecção (BLEYER, 2018).

$$x_{n+1} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \max \left\{ \begin{array}{l} x_{min} \\ \left(\frac{p_n \sigma_{n+1}}{\phi} \right)^{\frac{1}{(p_n+1)}} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Por fim, a função objetivo (Eq. (4.40)) do modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade pode ser redefinida como:

$$\min_{\bar{x}} \int_D (\bar{x})^{-p_n} \sigma_{n+1} dx + \phi \left(\int_D \bar{x} dx - fVol(D) dx \right) \quad (4.44)$$

Com isso, se pode formalizar os passos do algoritmo. Na iteração $n + 1$ do método, conhecendo um par anterior de soluções (\bar{x}_n, σ_n) de $c(\bar{x}, J^*)$ e um determinado valor do expoente de penalidade p_n , é possível obter os valores da soluções abaixo (BLEYER, 2018):

1. Fixar o valor de \bar{x} , minimizar σ em $c(\bar{x}, J^*)$ através da Eq. (4.41), utilizando o algoritmo da Bissecção (apresentado na subseção 4.1.1).
2. Fixar o valor de σ obtido no passo anterior, minimizar \bar{x} em $c(\bar{x}_{n+1}, J_{n+1}^*)$ através da Eq. (4.43), utilizando o algoritmo da Bissecção.
3. Atualizar o valor do penalizador SIMP (p_n) através da Eq. (4.42).

O algoritmo deve ser iniciado com o domínio D completo, ou seja $\bar{x}_e = 1, \forall e \in N_e$. Dada uma topologia com a solução $c(\bar{x}, J^*)$, são calculadas as restrições do tensor de tensões σ_n para o problema de elasticidade linear, através do conjunto de Eqs. (4.27) via FEM. Após isso, são realizados os passos 1-3 do algoritmo. Este processo se repete até a convergência do método (ALLAIRE; SCHOENAUE, 2007).

A convergência é detectada pelo método quando a sequência de soluções dos parâmetros de forma $c(\bar{x}, J^*)$ se tornam estacionárias (não há melhora na solução). Em geral, algumas dezenas de iterações são suficientes para obter uma topologia quase ótima, pois o método é heurístico. Como cada etapa deste processo iterativa e com minimizações alternadas, o valor da função objetivo sempre diminui, o que garante a convergência do método para um ponto estacionário do domínio da função objetivo.

A parte de otimização dos parâmetros de forma ($c(\bar{x}, J^*)$) é local e de baixa dificuldade na implementação graças ao conjunto de fórmulas explícitas apresentadas pelo conjunto de Eqs. (4.41) - (4.44). Com isso, todo o esforço computacional é direcionado em resolver a sucessão de problemas de elasticidade linear. Novamente, é válido destacar que devido as simplificações realizadas para a implementação do algoritmo, as suas respectivas topologias podem apresentar resultados não satisfatórios em relação ao método da Homogenização Allaire e Schoenaue (2007) e Allaire (2015).

5 Testes Computacionais

Os testes computacionais foram feitos com o software de ambiente *OpenSource* FEniCS combinado com a biblioteca Dolfin-Adjoint (FARRELL et al., 2013). Os exemplos de aplicação são uma adaptação de modelos consolidados na literatura para o contexto do trabalho. Adaptando os resultados obtidos por Andreassen et al. (2011) (subseção 5.2), Bleyer (2018) (subseção 5.3) e Silva (2020) (subseção 5.4), todos escritos na linguagem Python em sua versão 3.10. As duas primeiras subseções dos testes computacionais foram realizadas em um ambiente tipo console, através do Visual Basic Studio ©, já a última subseção de testes foi realizada em um ambiente isolado tipo Docker para que todas as interfaces das bibliotecas pudessem interagir sem causar algum tipo de interferência no sistema operacional da máquina onde foram realizados os testes computacionais.

O *software* FEniCS é fruto de um desenvolvimento em conjunto de diversas universidades em várias partes do mundo compondo uma comunidade global. Esta comunidade possui entusiastas, cientistas, engenheiros e desenvolvedores que colaboram para a manutenção e desenvolvimento da ferramenta Basicamente o FEniCS permite a automação da resolução de modelos matemáticos baseados em PDEs através de uma vasta biblioteca de rotinas de solução via FEM (LANGTANGEN; LOGG, 2017).

O *software* FEniCS se vale do compilador *FEniCS Form Compiler* (FFC) para escrever a forma fraca das equações diferenciais de governo de acordo com o *Unified Form-Assembly Code* (UFC) e gerando códigos na linguagem C++ padronizados que compõem o que se chama *Unified Form Language* (UFL) (LOGG et al., 2012). Todo estas informações são gerenciadas pela biblioteca DOLFIN que atua na interface com o FEniCS, permitindo ainda a integração com novas bibliotecas, obtendo novas funcionalidades (SILVA, 2020).

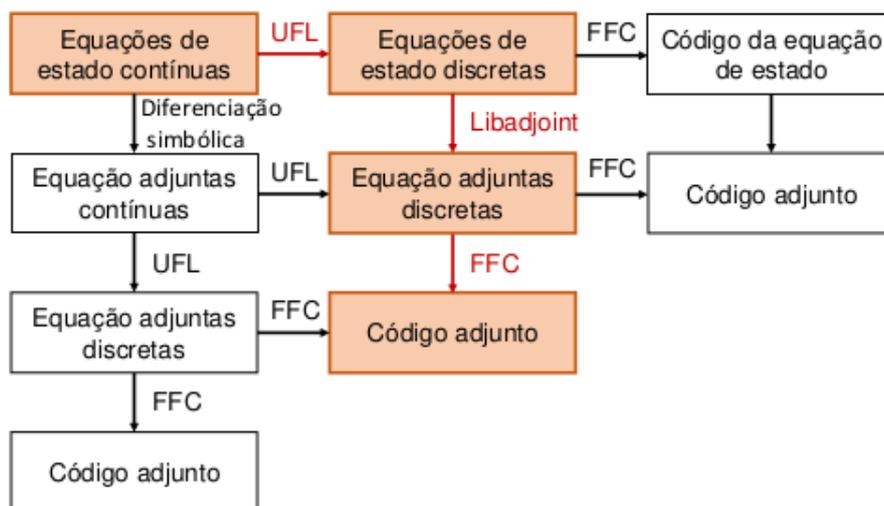
O recurso utilizado foi um computador com 15,9 GB de memória RAM, processador Intel® Core™ i7-3537U 2.00 GHz e sistema operacional Ubuntu 20.04.3 LTS. Para o processamento de imagens para avaliação dos resultados dois recursos foram utili-

zados. Para a visualização dos resultados, nos testes computacionais das subseções 5.2 e 5.3 foi utilizada a biblioteca Matplotlib do Python, já na nos testes computacionais da subseção 5.4 o *software* Paraview©em sua versão 5.10 foi utilizado.

A solução do Sistema Adjunto na subseção 5.2 foi calculada de forma analítica, via conjunto de Eqs.(4.7) - (4.9). Já na subseção 5.4 a solução do Sistema Adjunto foi executada utilizando a biblioteca *libadjoint* que permite a derivação e a solução do sistema de forma automática. Esta biblioteca define a representação simbólica da equação de estado e, a partir disso, determina a representação simbólica do sistema de equações adjuntas. A biblioteca Dolfin Adjoint realiza a interface entre as bibliotecas Dolfin e *libadjoint*, realizando todo o processo de interpretação do modelo do Sistema Adjunto (FARRELL et al., 2014).

Neste trabalho aplica-se o *framework* utilizado em Silva (2020), Salas et al. (2021) e Alonso (2022) para a implementação dos modelos a partir da subseção 5.3. O *framework* é apresentado pela Figura 5.1 que traz algumas outras possibilidades de implementação não utilizadas no presente trabalho, destacando o caminho utilizado para a resolução dos modelos.

Figura 5.1 – Diferentes modos para obtenção do código para implementação do sistema de equações adjuntas.



Fonte: Silva (2020).

5.1 Dados utilizados nos testes computacionais

A composição mista dos ossos possui partes orgânicas e inorgânicas. Esta composição mista deve ser levada em conta na formação das propriedades mecânicas a considerar nas simulações numéricas, de modo a que estas reflitam com boa precisão o comportamento real. A regeneração do tecido ósseo quando há algum tipo de fratura ocorre de forma sequencial passando pelas seguintes fases: tecido fibroso, cartilagem, cartilagem calcificada e tecido ósseo (GORRIZ, 2014). A Tabela 5.1 mostra a proporção de cada substância na composição nas fases de formação do tecido ósseo.

Como se pode observar na Tabela 5.1 cada fase de formação do tecido ósseo possui diferentes proporções dos elementos. Estas diferentes proporções afetam as propriedades mecânicas de cada estágio de vida do osso, como coeficiente de *Poisson* e o módulo de *Young* que podem ser obtidas utilizando as equações abaixo:

$$E(MPa) = 2000p_{mi} + 430p_{cI} + 200p_{cII} + 100p_{cIII} + 0,7p_{gs} \quad (5.1)$$

$$\nu = 0,33p_{mi} + 0,48(p_{cI} + p_{cII} + p_{cIII}) + 0,49p_{gs} \quad (5.2)$$

Tabela 5.1 – Composição estrutural das fases de formação do tecido ósseo.

Volume	Tecido Ósseo	Cartilagem	Cartilagem Calcificada	Tecido Fibroso
Colágeno I (c_I)	0,2848			0,1861
Colágeno II (c_{II})		0,135	0,135	
Colágeno III (c_{III})				
Substâncias fundamentais (g_s)	0,0352	0,079	0,079	0,07885
Minerais (mi)	0,43		0,015	

Fonte: Gorriz (2014).

As substâncias fundamentais dos ossos consistem em uma classe de proteína chamada proteoglicanos (anteriormente chamados de mucopolissacarídeos). Duas espécies desta classe encontradas na composição dos ossos são: *decorina* e *biglicano*. Ambos podem regular a construção das fibras de colágeno e sua mineralização, e atuam na diferenciação das células responsáveis pela formação óssea (osteoblastos) (MARTIN et al., 2015).

Cruzando os dados da Tabela 5.1 com as equações 5.1 e 5.2, foi possível avaliar quatro cenários de comportamento mecânico ósseo em função da sua fase de vida: tecido ósseo, cartilagem, cartilagem calcificada e tecido fibroso. A Tabela 5.2 apresenta o resultado do cálculo, bem como, os respectivos módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* das fases de formação do tecido ósseo.

Tabela 5.2 – Módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* das fases de formação do tecido ósseo.

	Tecido Ósseo	Cartilagem	Cartilagem Calcificada	Tecido Fibroso
E(MPa)	982,489	27,055	57,055	80,078
ν	0,296	0,104	0,108	0,128

Fonte: [Gorritz \(2014\)](#).

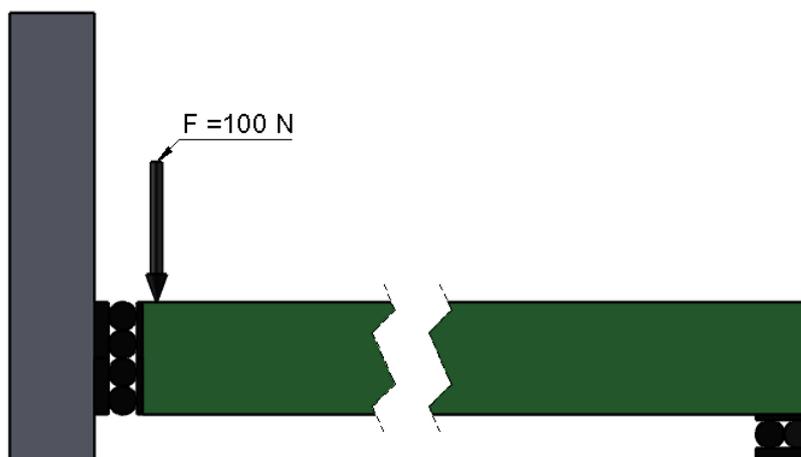
Para todos os experimentos computacionais foram avaliadas três malhas diferentes: 60 x 20 elementos, 150 x 50 elementos e 300 x 100 elementos, respectivamente, conforme proposto em [Andreassen et al. \(2011\)](#). Como geometria de domínio, foram avaliados três domínios: viga *Messerschmidt-Bölkow-Blohm* (MBB) parcial na subseções 5.2 e 5.6, viga engastada com ação transversal na subseção 5.5 e viga engastada em compressão axial na subseção 5.5.1.

As geometrias estudadas sugerem uma correlação com os esforços exercidos no fêmur humano em duas situações: sustentação do corpo em uma posição estacionária e os carregamentos em um movimento de caminhada ([BELINHA et al., 2012](#)).

5.2 Resultados Computacionais para Viga MBB via Critério de Otimalidade

Nesta subseção foi avaliada a parte simétrica de uma viga MBB, apresentado pela Figura 5.2, através do método Critério de Otimalidade, conforme subseção 4.1.1 do presente trabalho. Uma força perpendicular de 100 N foi utilizada em três malhas (60 x 20 elementos, 150 x 50 elementos e 300 x 100 elementos) utilizando elementos quadriláteros isoparamétricos para as quatro fases de formação do tecido ósseo estudadas.

Figura 5.2 – Viga MBB parcial.



Como os elementos quadriláteros são unitários conforme proposto em [Andreassen et al. \(2011\)](#), estes testes computacionais possuem aplicabilidade real limitada devido ao tamanho das malhas utilizadas. Então, somente as duas primeiras classes de malhas (60 x 20 elementos e 150 x 50 elementos) podem fazer sentido em aplicações reais. Portanto o maior objetivo deste teste é no aspecto educacional para conhecer os mecanismos da TO. Por fim, a exemplificação do domínio, os graus de liberdade fixos e carregamento são apresentados pela Figura 5.2.

Os parâmetros adotados foram: o valor do r_{min} considerado foi 1,5 mm, o valor de f da restrição de redução de volume de material (Eq. 4.4) foi fixado em 50% e o coeficiente de penalização SIMP foi definido com o valor $p = 3$, conforme em [Andreassen et al. \(2011\)](#). Foi estipulado um limite de 2000 iterações, foi adotada o método Critério de Otimalidade (Eqs. (4.5) -(4.8)) como estratégia de método de solução, e por fim, como filtro de sensibilidades, foram utilizadas o conjunto de Eqs. (4.9) -(4.11).

A síntese dos resultados obtidos é apresentado pela Figura 5.3, onde cada linha apresenta a fase de vida óssea que está sendo avaliada e cada coluna apresenta as malhas avaliadas. Em cada célula são apresentados: a geometria final obtida, o valor da função objetivo c (flexibilidade) e o tempo total para o processamento do exemplar Δt , expresso em segundos.

Analisando a Figura 5.3 se pode observar que a medida que o refinamento das malhas vai progredindo, a resolução final das imagens é melhorada, bem como o problema de densidades intermediárias apresentadas em todos os exemplares, conforme resultado esperado. Outro ponto que deve ser levado em consideração são as condi-

Figura 5.3 – Resultados para o problema de Mínima Flexibilidade.

	Malha 60 x 20	Malha 150 x 50	Malha 300 x 100
Tecido ósseo			
	$c = 2227 \Delta t = 10,43s$	$c = 2017 \Delta t = 211,72s$	$c = 1990 \Delta t = 1800,85s$
Cartilagem			
	$c = 80892 \Delta t = 10,43s$	$c = 73314 \Delta t = 351,58s$	$C = 72049 \Delta t = 2453,58s$
Cartilagem Calcificada			
	$c = 38348 \Delta t = 25,09s$	$c = 73314 \Delta t = 372,75s$	$c = 34153 \Delta t = 8814,58$
Tecido fibroso			
	$c = 27344 \Delta t = 20,34s$	$c = 24801 \Delta t = 203,89s$	$c = 24391 \Delta t = 2179,52s$

ções de contorno e carregamento que modificam a geometria final de forma acentuada na extremidade superior direita em todos os casos analisados. Observando todos os resultados, é possível verificar que a malha passa por um processo de suavização do efeito do carregamento na região em questão, eliminando diversos nós da rede de elementos presentes na região, para atender todas as restrições impostas pelo modelo.

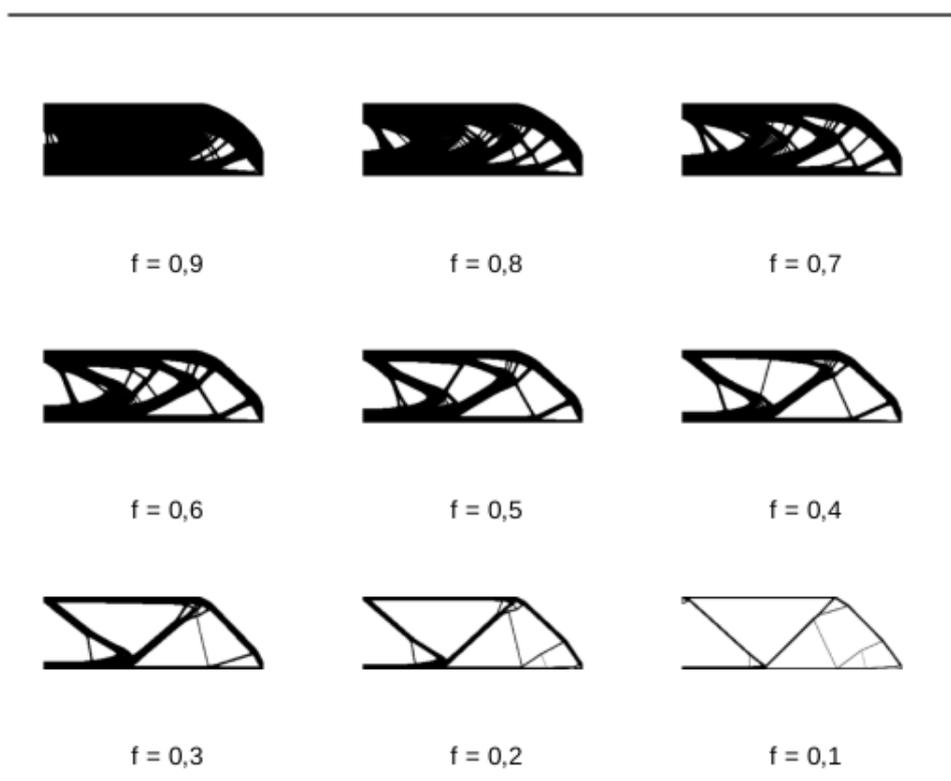
Analisando os valores obtidos pelas funções objetivo, a fase de vida tecido ósseo obteve melhor desempenho as demais fases de vida em função dos seu parâmetros: Módulo de *Young* e coeficiente de *Poison*, apresentados na Tabela 5.2. Outro ponto que deve ser ressaltado são os tempos computacionais gastos para a resolução de cada exemplar (custo computacional). Mais uma vez, a fase de vida óssea tecido ósseo obteve os melhores resultados em todos os cenários, porém a fase de vida

óssea cartilagem obteve um empate neste quesito na resolução da malha 60 x 20 elementos.

Na análise das geometrias finais, se pode observar que a classe de malhas de 150 x 50 elementos possui um desempenho muito satisfatório. Com isso, a próxima classe de malha (300 x 100 elementos), apesar de apresentar melhor valor da função objetivo e maior custo computacional em relação à classe anterior, não apresenta tantas vantagens em função da confecção da geometria física do exemplar, pois em diversas regiões o modelo acaba realizando subdivisões de uma geometria já existente, gerando dificuldades para a impressão do exemplar via AM.

Em vista destes resultados obtidos, uma segunda análise foi realizada com o objetivo de avaliar a evolução do atendimento da restrição de redução de volume material, dada pela (Eq. 4.4). Nesta análise foram avaliados os cenários onde o parâmetro f foi variado no intervalo de 0.1; 0.9, onde $f = 0,9$ representa que 90% do volume original será mantido na geometria final e $f = 0,1$ representa que somente 10% do volume original será mantido na geometria final. Os resultados obtidos são apresentados pela Figura (5.4).

Figura 5.4 – Avaliação da Redução de Peso no problema Flexibilidade Mínima - Tecido ósseo.

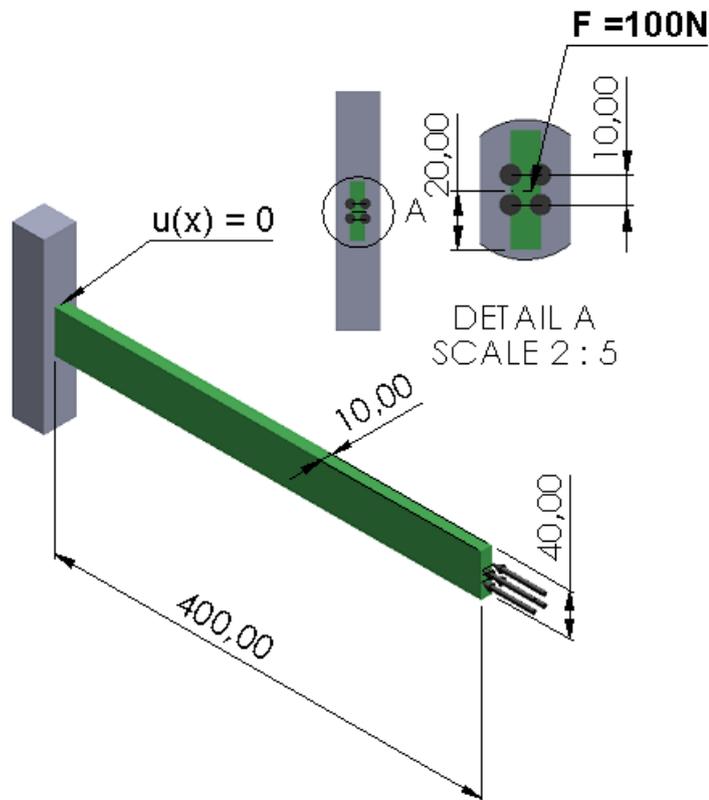


Analisando a Figura (5.4) onde é apresentada a evolução do comportamento da redução de volume de material, restrito pelo parâmetro f na restrição (4.4), se pode observar que em termos de impressão via AM, o cenário onde a redução é de 60% se destaca em relação ao cenário onde a redução é de 50% em termos de manufatura, devido ao menor número de subdivisões em pequenas regiões. Outro ponto importante que merece destaque é que em cenários de aplicabilidade real, somente os cenários onde $f = 0,4; 0,5; 0,6$ podem ser considerados por duas razões: 1) nos cenários onde $f = 0,7; 0,8; 0,9$ não é obtida uma vantagem econômica na fabricação da prótese em função dos ganhos obtidos, uma vez que o processo de MA possui um valor de processamento superior aos processos de metalurgia convencional. e 2) não foi considerado coeficiente de segurança nos testes computacionais realizados, com isso os cenários onde $f = 0,1; 0,2; 0,3$ são ineficazes na viabilidade da impressão da prótese.

5.3 Resultados Computacionais para Viga Engastada via Método de Minimização Alternada

Neste item é simulada a viga engastada, apresentada pela Figura 5.5, com as seguintes dimensões: comprimento = 400mm, largura = 40mm e espessura = 10mm, respectivamente. Este domínio foi avaliado com um carregamento de 100 N distribuído em um comprimento de 10mm, avaliando o comportamento das três malhas (60 x 20 elementos, 150 x 50 elementos e 300 x 100 elementos) utilizando elementos finitos triangulares para as quatro fases de formação do tecido ósseo estudadas.

Figura 5.5 – Viga Engastada com carregamento frontal.



Nos primeiros testes foi avaliado o impacto no valor de convergência do modelo quando o penalizador SIMP é ativado. Como parâmetros foram considerados: número total de iterações = 80, número de iterações não penalizadas (SIMP não-ativo) = 20, o coeficiente penalizador SIMP p_n foi considerado como uma variável contínua no domínio $\{0,4\}$, o valor da densidade mínima para evitar degeneração numérica do método foi de $x_{min} = 10^{-3}$. Novamente, para a análise de desempenho do método, no valor de redução de material foi imposto em $f = 50\%$. O método de solução utilizado para a resolução do modelo é apresentada pela subseção 4.2.3 deste trabalho.

Os resultados obtidos são apresentados pelo conjunto de Figuras (5.6) - (5.9), onde cada figura é apresentada a fase de vida óssea que está sendo avaliada e cada linha são apresentadas as malhas avaliadas. Em cada célula são apresentados: a geometria final obtida, o valor da função objetivo c (flexibilidade) e o tempo total para o processamento do exemplar Δt , expresso em segundos.

Figura 5.6 – Análise das densidades finais- Tecido ósseo.

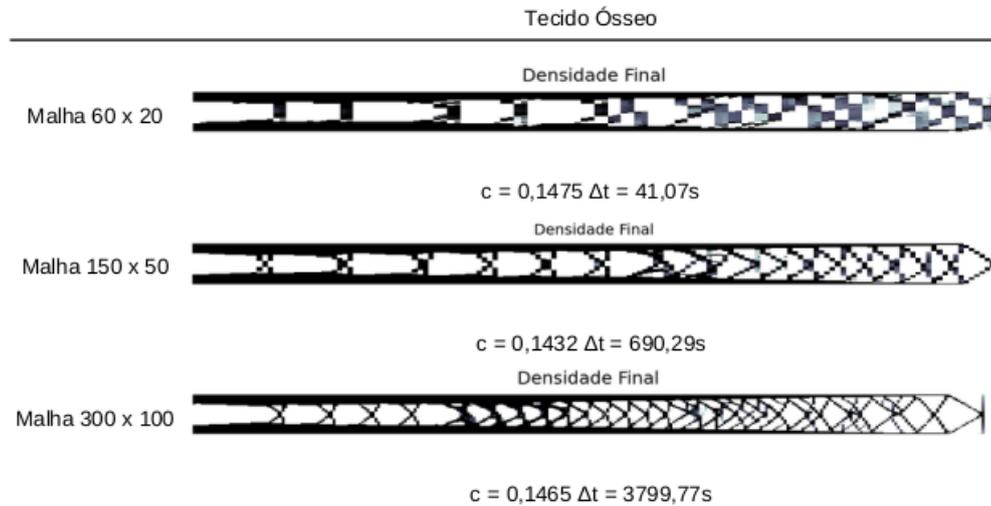


Figura 5.7 – Análise das densidades finais- Cartilagem.

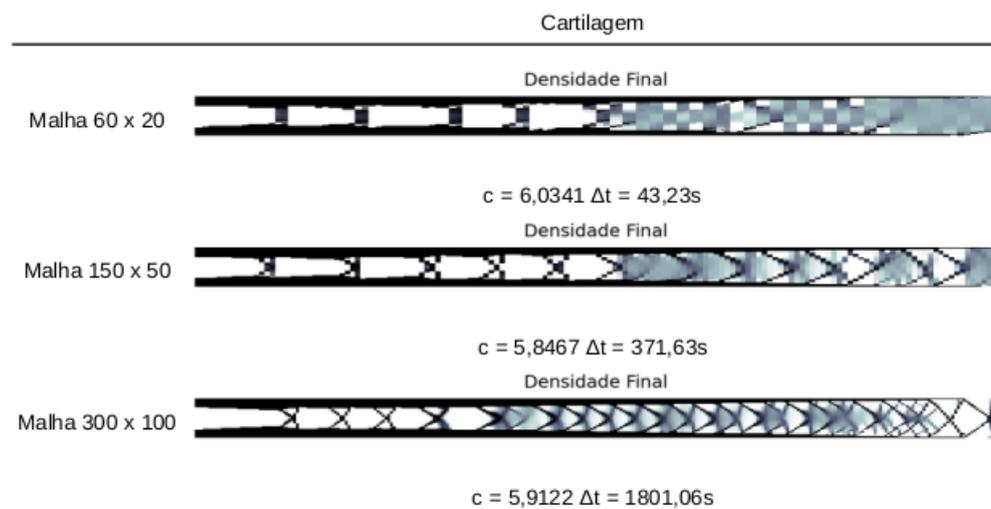


Figura 5.8 – Análise das densidades finais- Cartilagem Calcificada.

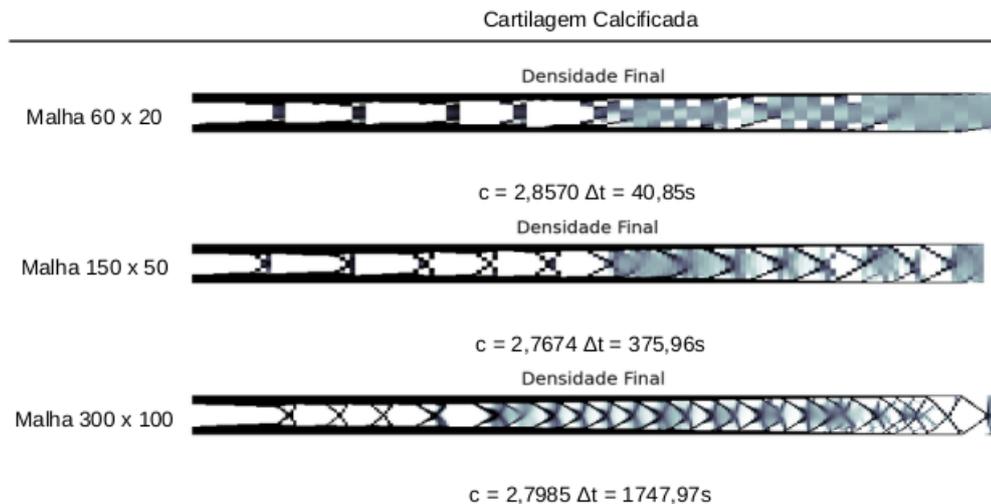
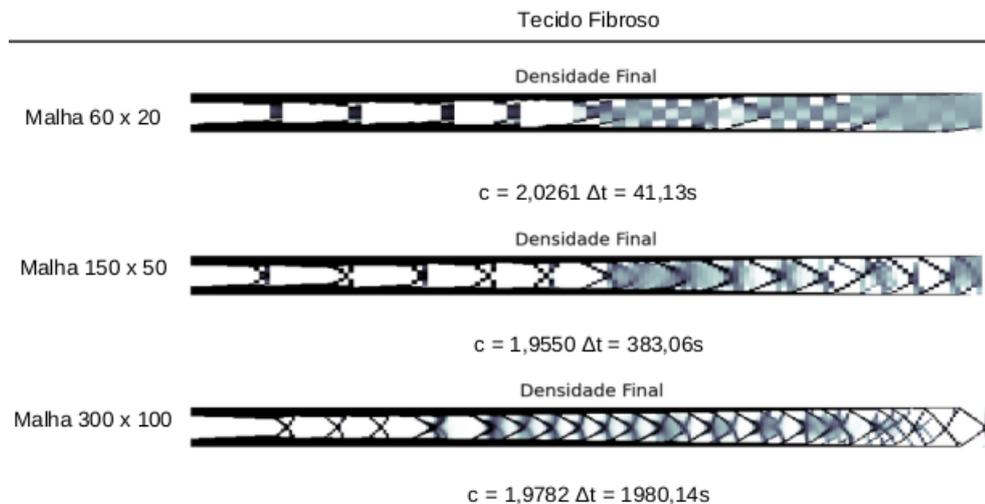


Figura 5.9 – Análise das densidades finais- Tecido Fibroso.



Analisando o conjunto de Figuras (5.6) - (5.9) se pode observar que o problema de densidades intermediárias prejudica acentuadamente o desempenho do método, uma vez que, (i) filtros de densidade não foram aplicados e (ii) todas as simplificações descritas na subseção 4.2.3 deste trabalho. Um ponto que vale ser destacado é que como o modelo possui duas parcelas na sua função objetivo Eq. (4.44), onde a primeira parcela minimiza a flexibilidade da estrutura e a segunda parcela minimiza o volume utilizado na geometria, devido a isso, é possível visualizar em uma imagem simultaneamente: redução de volume e deslocamentos sofridos pela estrutura.

Analisando as geometrias de maneira geral, o único exemplar que apresentou viabilidade em sua confecção via AM, foi o de malha 300 x 100 da fase de vida Tecido

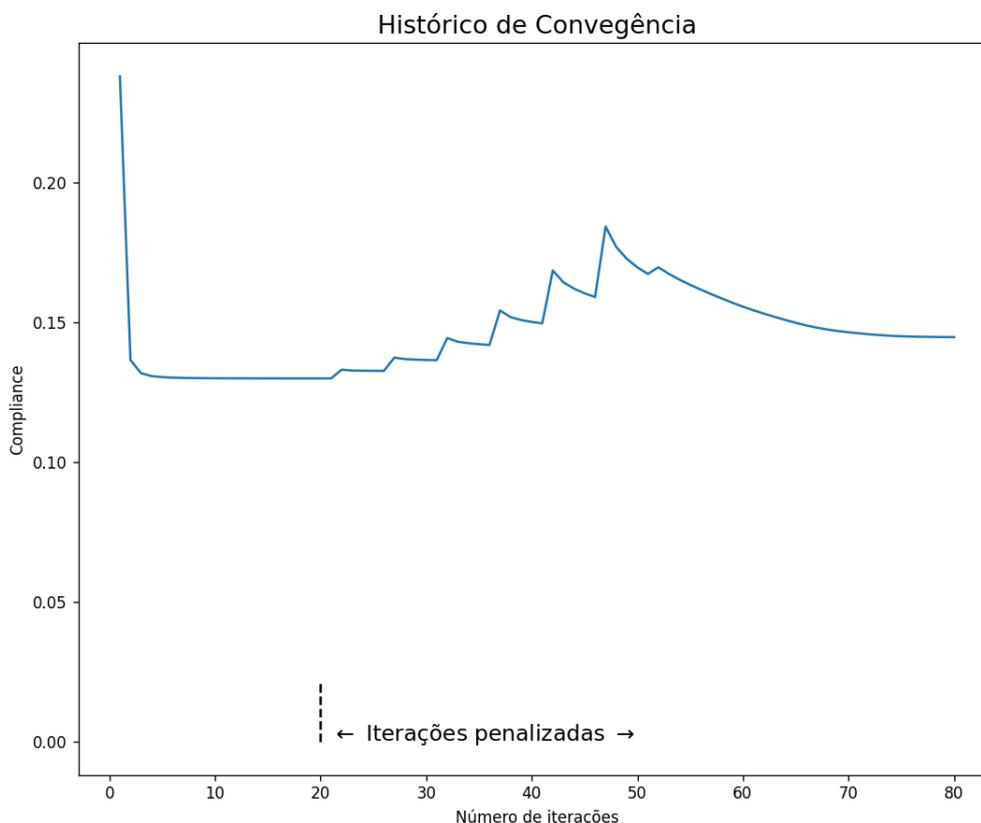
Ósseo, não apresentando densidades intermediárias. Comprovando que foi apontado em [Allaire e Schoenaue \(2007\)](#) e [Allaire \(2015\)](#): "*Devido as simplificações realizadas para a implementação do algoritmo, as suas respectivas topologias podem apresentar resultados não satisfatórios em relação ao método da Homogeneização.*"

Analisando os valores obtidos pelas funções objetivo, novamente a fase de vida óssea que obteve os melhores desempenhos foi a tecido ósseo, justificado pelos valores dos coeficientes de *Poisson* e Módulo de *Young*. A superioridade para o segundo melhor desempenho (fase de vida tecido fibroso) foi de: 13,74 vezes menor analisando a malha 60 x 20 elementos, 13,65 vezes menor analisando a malha 150 x 50 elementos.

Analisando o custo computacional gasto para a resolução de cada exemplar se pode observar que: na malha 60 x 20 elementos a fase Cartilagem Calcificada obteve o melhor resultado e nas outras malhas, a fase Cartilagem Calcificada obteve os melhores resultados. O maior custo computacional foi obtido pela fase de vida tecido ósseo na resolução da malha 300 x 100 elementos, atingindo o valor de 3799,77 segundos que é 2,17 vezes superior ao segundo maior (1747,97 segundos). Vale a pena ressaltar que, apesar dos custos computacionais gastos para a resolução dos exemplares da fase de vida tecido ósseo serem altos comparados aos demais, o valor da função objetivo (muito inferior aos demais), justifica o seu custo computacional.

Uma segunda análise foi realizada para avaliar o impacto da Otimização SIMP no desempenho computacional da heurística. Esta análise é exemplificada através da [Figura 5.10](#), onde no eixo vertical é apresentado o valor da função objetivo e no eixo horizontal o número de alterações destacando a iteração onde o penalizador SIMP se torna ativo (a partir da vigésima iteração). Já na [Figura 5.11](#) é apresentada uma síntese de todos os resultados obtidos.

Figura 5.10 – Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística- Tecido ósseo - 300 x 100 elementos.



Analisando a Figura 5.11 se pode observar que em nenhum dos casos avaliados, o comportamento da curva se mostrou divergente. Em todos os casos o valor da função objetivo decai ao início da heurística e, à medida em que o penalizador SIMP é ativado (vigésima iteração), os valores da função objetivo começam a oscilar em um movimento similar a "*dentes de serra*". Este tipo de comportamento é justificado por dois fatores: (i) a heurística é iterativa e com memória (depende do resultado da iteração anterior para atualização das variáveis) e (ii) eliminação de densidades artificiais geradas não penalizadas nas iterações anteriores.

Como o objetivo da análise foi avaliar o impacto do penalizador SIMP na heurística, o resultado apresentado ao final da iteração 80 é superior ao obtido ao valor encontrado pela heurística antes da ativação do penalizador SIMP, apontando um número elevado de elementos com densidades artificiais presentes na rede antes da ativação do penalizador. Um ponto importante que deve ser ressaltado, como o procedimento adotado é heurístico, nada se pode afirmar se a solução encontrada na iteração 80

está próxima da solução ótima do problema. Neste sentido foi proposto um novo experimento onde foi avaliada a fase de vida Tecido Ósseo, com uma malha de 300 x 100 elementos, deixando como limite de iterações o valor de 500 iterações devido aos limitantes de recurso computacional disponíveis. Este novo experimento é apresentado pela Figura 5.12.

Figura 5.11 – Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística.

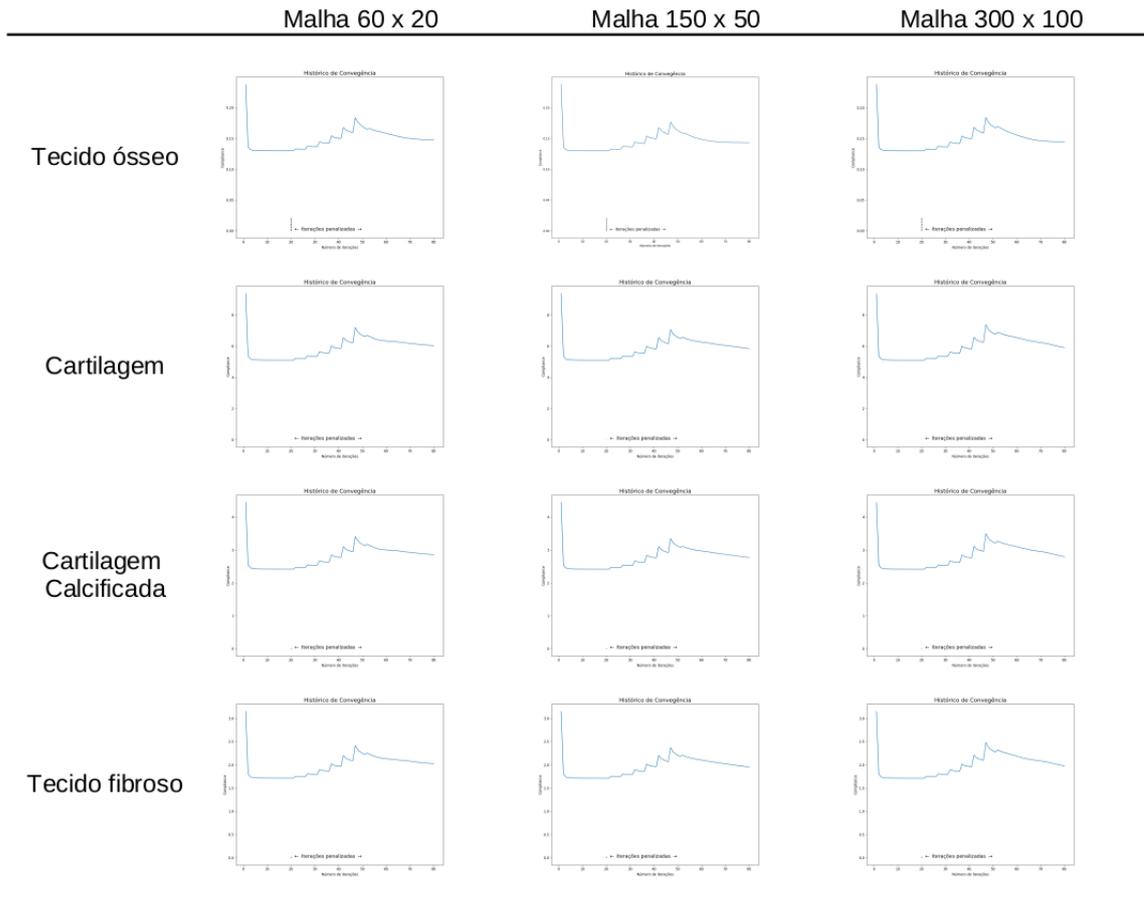
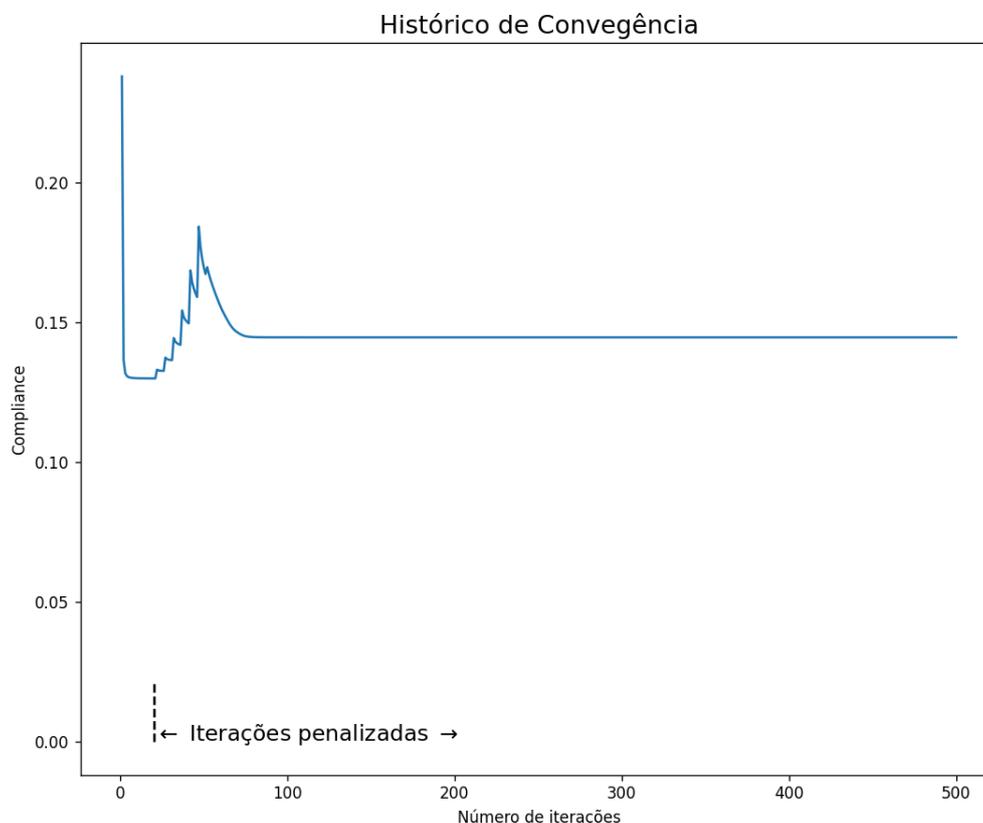


Figura 5.12 – Análise do impacto do penalizador SIMP na convergência da heurística - 5000 iterações.



Analisando a Figura 5.12 se pode observar que é uma estabilização em volta do valor $c = 0,1465$ além da iteração 80. Analisando os resultados de cada iteração, a heurística realiza uma busca contínua por valores melhores, porém as alterações ocorrem na sétima casa após a vírgula. Não sendo tão atrativo em custo computacional, pois a geometria não é alterada significativamente.

Devido aos primeiros resultados apresentados pelo conjunto de Figuras (5.6) - (5.9) não ser considerado satisfatório do ponto de vista de fabricação via AM, novos testes computacionais foram realizados, mantendo os critérios de parada de 2000 iterações para o método, aplicando o filtro de *Helmholz*, descrito na subseção 3.2.4. Como demais parâmetros se adota o valor do raio do filtro igual a $r = 1,5$ elementos e a restrição de volume foi fixada em 50%. O valor do raio do filtro *Helmholz* foi selecionado como *benchmark* do trabalho de [Andreassen et al. \(2011\)](#). Estes testes tiveram como objetivo de avaliar os impactos: computacionais e de viabilidade de fabricação com a aplicação do filtro de *Helmholz* e são apresentados pelo conjunto de

Figuras (5.13) - (5.16).

Novamente, em cada figura é apresentada a fase de vida óssea que está sendo avaliada e cada linha são apresentadas as malhas avaliadas. Em cada célula são apresentados: a geometria final obtida, o valor da função objetivo c (flexibilidade) e o tempo total para o processamento do exemplar Δt , expresso em segundos.

Figura 5.13 – Análise das densidades finais filtradas - Tecido ósseo.

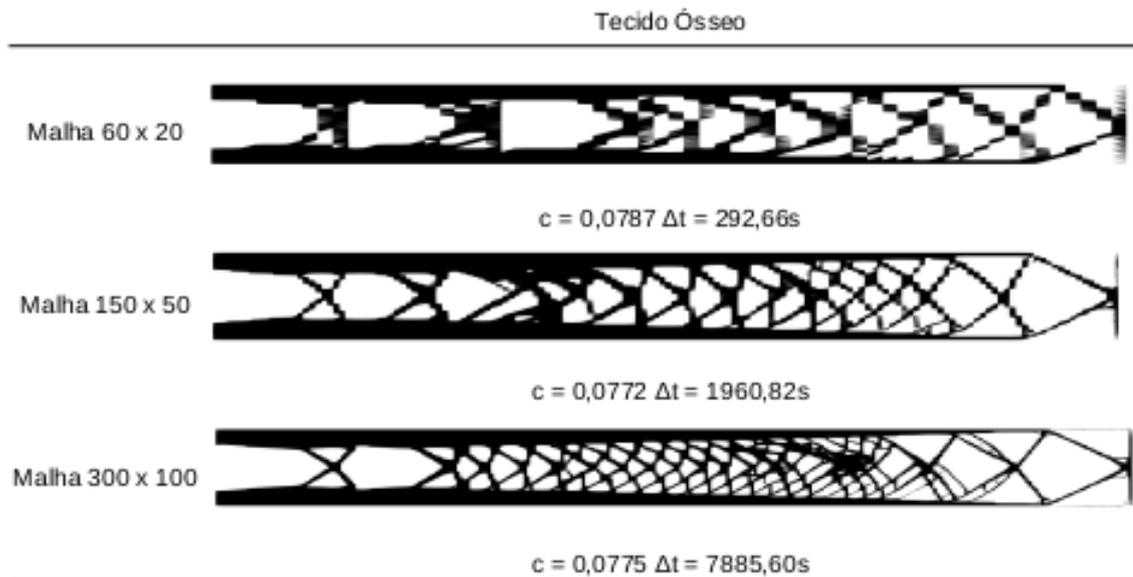


Figura 5.14 – Análise das densidades finais filtradas - Cartilagem.

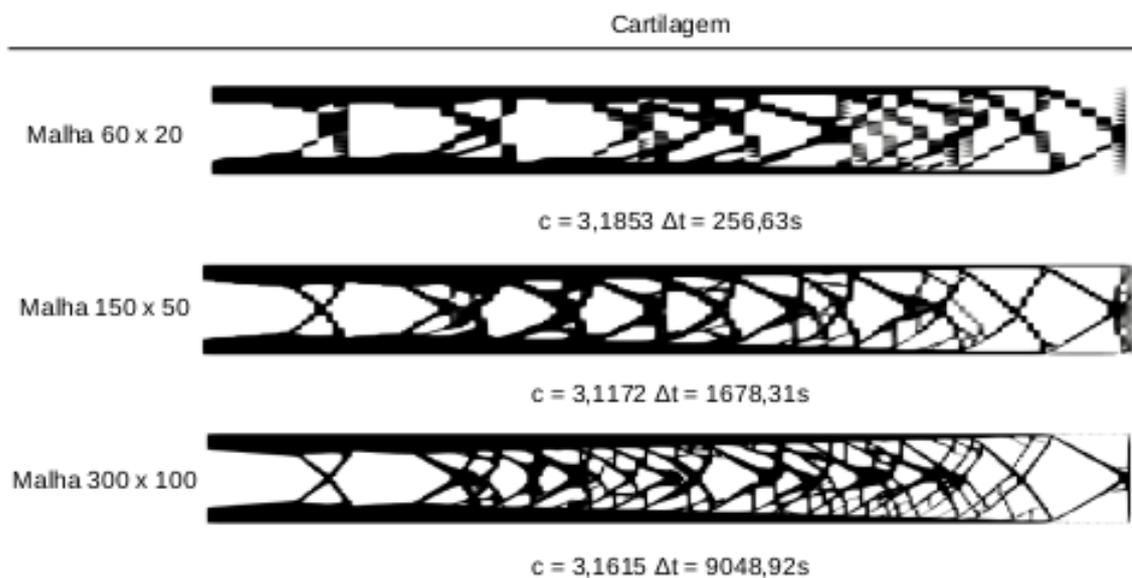


Figura 5.15 – Análise das densidades finais filtradas - Cartilagem Calcificada.

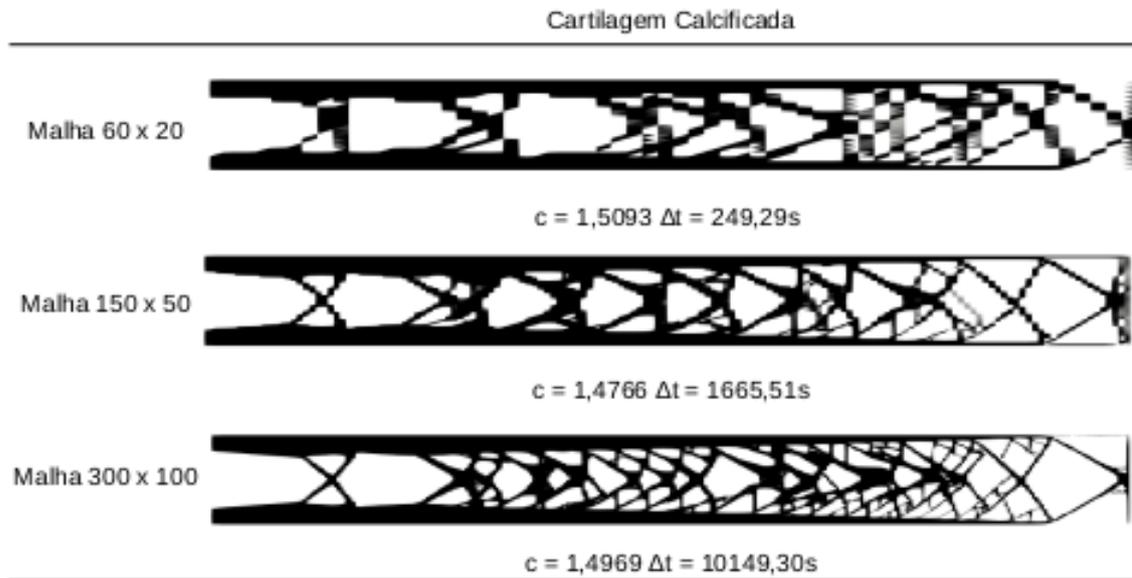
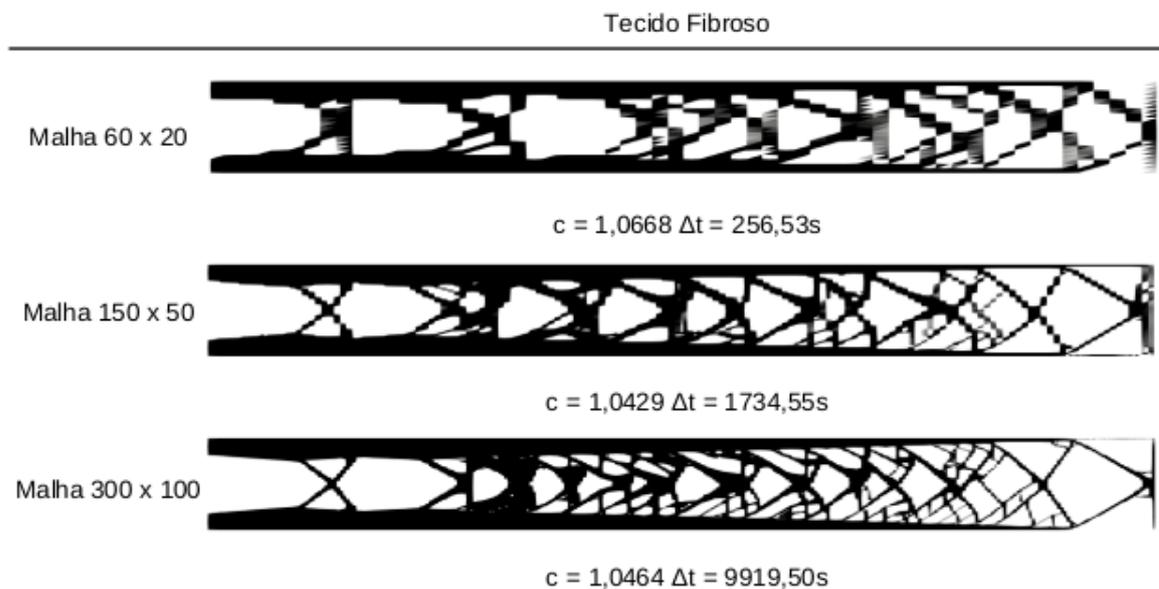


Figura 5.16 – Análise das densidades finais filtradas - Tecido Fibroso.



Analisando o conjunto de Figuras (5.13) - (5.16) já pode ser observado que a aplicação do filtro de *Helmholz* contribuiu para a viabilidade de fabricação dos exemplares via AM, com a exceção das malhas de 60 x 20 elementos, onde as densidades intermediárias ainda possuem grande abrangência. Em todos os exemplares nota-se na extremidade direita que necessitaria ser rebarbada caso o exemplar fosse impresso via AM, apontando uma ineficiência do método.

Em todos os casos, uma grande parcela do material é direcionada para a extremi-

dade esquerda dos exemplares, de forma espelhada. Isso ocorre pois esta é a face que apresenta o engastamento (condição de contorno $u(x) = 0$) e é a região que sofre o maior esforço de acúmulo de tensões durante o carregamento. Esta estratégia é justificada pelo tipo de carregamento apresentado pela Figura 5.17.

Analisando os valores das funções objetivo, novamente a fase de vida tecido ósseo obteve os melhores resultados em função dos valores dos seu coeficiente de *Poisson* e módulo de *Young*, atingindo os valores de $\{0,0787; 0,0772; 0,0075\}$. Já o piores desempenhos foram obtidos com a fase de vida óssea cartilagem, obtendo os valores de $\{3,1853; 3,1172; 3,1615\}$ justificado pelos valores dos seu coeficiente de *Poisson* e módulo de *Young* (menores valores analisados).

Já na análise em relação ao custo computacional, os resultados apresentaram um aumento esperado, uma vez que o filtro de *Helmholtz* utiliza o FEM em sua abordagem, gerando maior esforço computacional, porém este custo é justificado pelo ganho na obtenção da geometria e redução do valor da flexibilidade. O menor tempo foi alcançado no processamento do exemplar da fase de vida Cartilagem Calcificada com a malha 60 x 20 elementos, obtendo o valor de 249,29 segundos. Já o maior tempo computacional também foi obtido pela mesma fase de vida óssea, no processamento da malha de 300 x 100 elementos, obtendo o valor de 10149,3 segundos.

Todo este contexto motivou a análise geral da evolução dos resultados antes e depois da aplicação do filtro. Esta análise foi compilada na Tabela 5.3 onde são apresentadas as porcentagens de redução do valor da função objetivo e a porcentagem de piora no tempo computacional, que pode ser entendido como o custo computacional pago para aquele nível de solução.

Na primeira coluna da Tabela 5.3 são apresentadas as malhas que foram avaliadas, na segunda coluna são apresentados os valores das funções objetivo sem o filtro de *Helmholtz*, já na terceira coluna são apresentados os valores da função objetivo após a aplicação do filtro. Na quarta coluna é apresentado o percentual de redução no valor da função objetivo, que foi calculado da seguinte forma: $\frac{c_{sem\ filtro}}{c_{com\ filtro}}$. Na quinta e sexta colunas são apresentados os tempos computacionais pagos nos processamento dos exemplares, sem e com o filtro, respectivamente. E por fim, na sétima coluna é apresentada a porcentagem de piora no tempo computacional dedicado para a resolução do exemplar, que foi calculado da seguinte forma: $\frac{\Delta_{com\ filtro}}{\Delta_{sem\ filtro}}$.

Tabela 5.3 – Análise dos resultados do filtro de Helmholtz.

Análise dos resultados do filtro de Helmholtz						
	Tecido Ósseo					
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	0,1475	0,0787	187,42%	41,07	292,66	712,59%
Malha 150 x 50	0,1432	0,0772	185,49%	690,29	1960,82	284,06%
Malha 300 x 100	0,1465	0,0775	189,03%	3799,77	7885,6	207,53%
	Cartilagem					
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	6,0341	3,1853	189,44%	43,23	256,63	593,64%
Malha 150 x 50	5,8467	3,1172	187,56%	371,63	1678,31	451,61%
Malha 300 x 100	5,9122	3,1615	187,01%	1801,06	9048,92	502,42%
	Cartilagem Calcificada					
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	6,0341	1,5093	399,79%	43,23	249,29	576,66%
Malha 150 x 50	5,8467	1,4766	395,96%	371,63	1665,51	448,16%
Malha 300 x 100	5,9122	1,4969	394,96%	1801,06	10149,3	563,52%
	Tecido Fibroso					
	c sem filtro	c com filtro	% redução	Δt sem filtro	Δt com filtro	% piora
Malha 60 x 20	2,0261	1,0668	189,92%	41,13	256,53	623,71%
Malha 150 x 50	1,955	1,0429	187,46%	383,06	1734,55	452,81%
Malha 300 x 100	1,9782	1,0464	189,05%	1980,14	9919,5	500,95%

Analisando os dados da Tabela 5.3 se pode observar que no cenário geral, o valor da função objetivo foi reduzido em 240,26%, realizando uma média simples de todos os valores da coluna % redução da Tabela 5.3. Os valores das fases Tecido Ósseo, Cartilagem e Tecido Fibroso, ficaram na média de 188,04% de redução. Como a fase de vida Cartilagem Calcificada obteve valores muito discrepantes, a sua análise foi tratada de maneira separada. Com isso, a média do valor de redução no valor da função objetivo nesta fase foi de 396,90%.

Já na análise da porcentagem de piora no custo computacional, apresentado pela coluna % piora da Tabela 5.3 os cenários foram divididos em função do esforço computacional. Com isso as malhas foram analisadas separadamente. Na análise da Malha 60 x 20 elementos foi observado que o custo computacional obteve uma piora

de 626,65%, destacando a fase Tecido Ósseo com o maior percentual 712,59% e a fase Cartilagem Calcificada com o menor percentual 576,66%. Analisando a Malha 150 x 50 elementos o custo computacional obteve uma piora em média de 409,16%, destacando a fase Tecido Fibroso com 452,81% (maior valor) e a fase Tecido Ósseo (menor valor). Por fim, analisando os valores da Malha de 300 x 100 elementos se observa uma piora média de 443,60%, com destaque para a fase de vida Cartilagem Calcificada com 563,52% (maior valor) e a fase de vida Tecido Ósseo com 207,53% (menor valor).

5.4 Resultados Computacionais via IPOPT

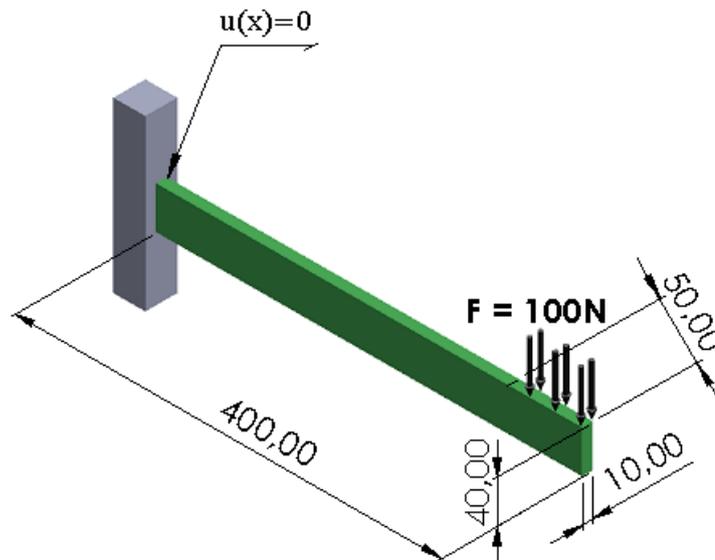
Um método de solução atrativo para o modelo de Mínima Flexibilidade, apresentado na subseção 5.2 é o IPOPT apresentado na subseção 4.1.2 do presente trabalho. Como o problema investigado não é convexo, conforme apresentado na seção 3.2, no processo de busca pela solução dos modelos de TO através do IPOPT não se pode afirmar que as soluções encontradas são ótimos globais, pois o problema pode ter múltiplas soluções locais e o algoritmo pode traçar uma trajetória de solução em direção à um ótimo local e permanecer nesta trajetória, para maiores detalhes sobre esta discussão ver [Tyburec et al. \(2021\)](#).

Nos testes iniciais, já foi constatado que o método não consegue resolver os exemplares com malha de elementos finitos menos densidade (Malha 60 x 20) e que em alguns exemplares a solução ótima não foi encontrada. Com isso, a partir deste ponto do texto, serão apresentados os valores obtidos na última iteração do algoritmo e se a solução foi ótima, será representada por c^* , caso contrário, será apenas representada por c apenas. Neste contexto, outra medida de desempenho será apresentada nas imagens, que é o número de iterações (it) que o método de solução utilizou para as saídas apresentadas. Novamente, todas as medidas de tempo estão em segundos e a força aplicada em todos os testes é de 100 N. Em todos os testes desta seção foram utilizados elementos finitos triangulares regulares.

5.5 Resultados Computacionais da Viga em Balanço com Ação Transversal via IPOPT

Nesta subseção foi avaliada a geometria apresentada na Figura 5.17, com um carregamento de 100N e com as seguintes dimensões: comprimento = 400mm, largura = 40mm e espessura = 10mm, respectivamente. Os critérios de parada do método adotados neste trabalho foram dois: limite de 12000 iterações ou a tolerância atingir o valor menor que 10^{-4} , onde qualquer limite que seja atendido realiza a parada do algoritmo de solução.

Figura 5.17 – Viga Engastada com carregamento paralelo.



O parâmetro f da restrição de volume (Eq. (4.4)) foi fixado em 0,7, ou seja, o IPOPT busca a redução de 70% de material nos casos analisados. Nos testes realizados o filtro de densidades utilizado foi o de *Helmholtz*, onde o parâmetro r foi fixado em 1,5. Como este filtro utiliza o tamanho dos elementos, esta imposição significa que o comprimento do filtro é de 1,5 vezes a dimensão dos elementos. O conjunto de Figuras (5.18) - (5.21) apresentam os resultados obtidos nos testes computacionais.

Figura 5.18 – Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Tecido ósseo.

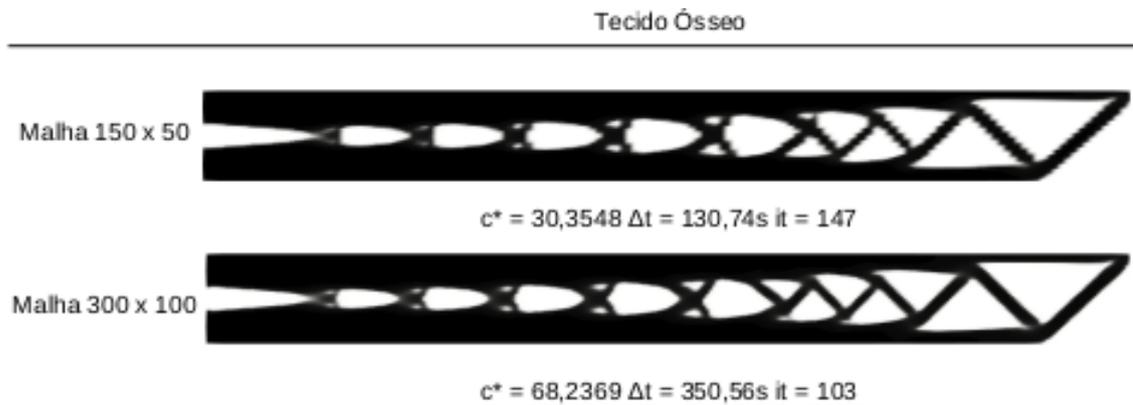


Figura 5.19 – Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Cartilagem.

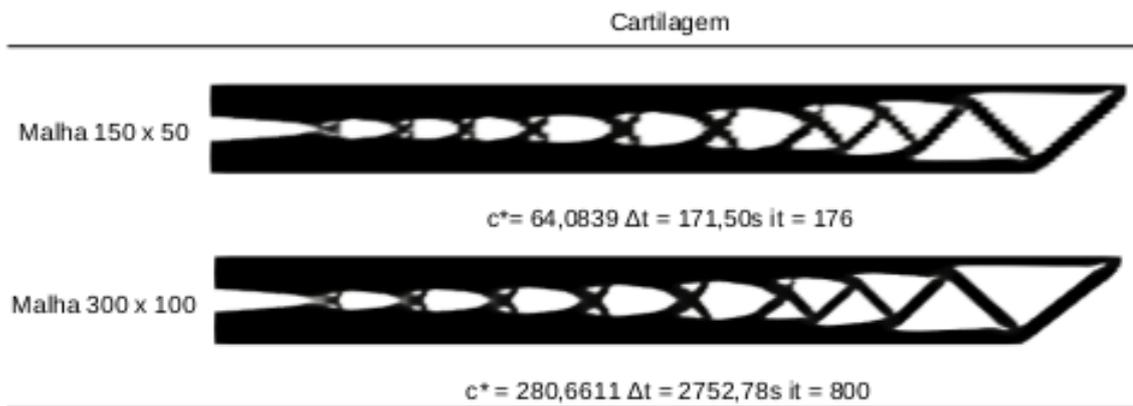


Figura 5.20 – Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Cartilagem Calcificada.

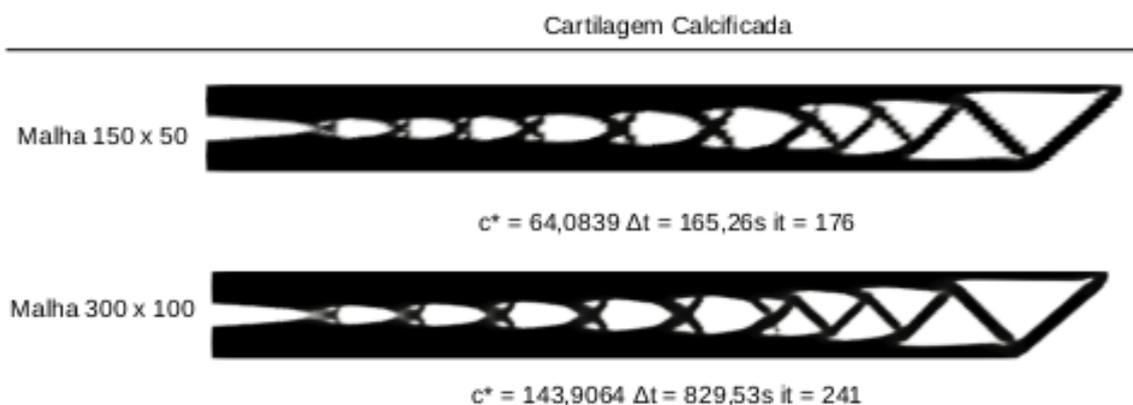
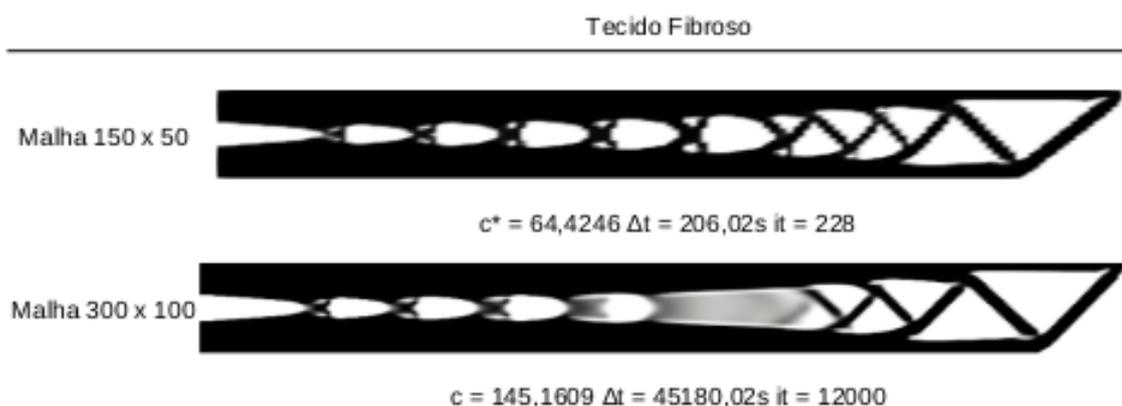


Figura 5.21 – Análise das densidades finais - Viga em Balanço - Tecido Fibroso.



Analisando o conjunto de Figuras (5.18) - (5.21) se pode observar que apenas a fase de vida Tecido Fibroso com a Malha 300 x 100 não conseguiu atingir a solução ótima local dentro dos critérios de parada estabelecidos. Como a solução ótima global não é conhecida para o exemplar, não se torna possível calcular o *gap* relativo da solução, para indicar qual distante esta solução ficou de um ótimo local/global. Para maiores detalhes da discussão sobre *gaps* favor consultar Arenales et al. (2015).

Realizando uma análise da geometria gerada ao final de cada processamento dos exemplares, se pode observar que o comportamento é igual em todos os casos e com concentração de material à esquerda, mais próximo à seção do engastamento. E em relação aos valores das funções objetivo, os valores mais que dobram quando quando são avaliadas malhas diferente para um mesmo exemplar. Isso aponta que o IPOPT escolheu trajetórias de solução diferentes, conforme apontado no início da subseção 5.4, para os dois casos (Malha 150 x 50 elementos e Malha 300 x 100 elementos). Um ponto que merece destaque são os valores das funções objetivo da classe Cartilagem. De uma malha para outra, houve um incremento de 437,96%. Neste caso houveram trajetórias de solução muito diferentes entre si. Devido a disparidade dos valores das soluções encontradas nas fases de vida: (i) Tecido Ósseo (menor valor da função objetivo no processamento da Malha de 150 x 50 elementos) e (ii) Cartilagem (maior incremento no valor da função objetivo quando as malhas vão evoluindo) testes computacionais foram realizados em duplicata para assegurar que os resultados estavam coerentes.

Analisando os tempos computacionais a classe de Malha 150 x 50 elementos levou em média 168,38 segundos para ser processada, destacando a fase de vida Tecido Ósseo com o menor valor (130,74s) e a fase de vida Tecido Fibroso com o maior valor (206,02s). Já na classe de Malha de 300 x 100 elementos encontra-se uma dis-

paridade acentuada nos valores dos processamentos: Tecido Ósseo levou 350,56s e 103 iterações para ser processada, Cartilagem levou 2752,78s e 800 iterações para ser processada, Cartilagem Calcificada levou 829,53s e 241 iterações para ser processada, e por fim, Tecido Fibroso levou 45.180,02s e 12.000 iterações. Na análise dos valores da função objetivo da fase Tecido Fibroso verificou-se que a solução estava realmente convergindo e que se houvessem mais iterações disponíveis, o IPOPT encontraria uma solução ótima local.

5.5.1 Resultados Computacionais da Viga Engastada com Carga Axial via IPOPT

Nesta subseção foi avaliada a geometria apresentada na Figura 5.5, com carregamento de 100N e com as seguintes dimensões: comprimento = 400mm, largura = 40mm e espessura = 10mm, respectivamente. Novamente, (i) o parâmetro f da restrição de volume (Eq. (4.4)) foi fixado em 0,7, ou seja, o IPOPT busca a redução de 70% de material nos casos analisados e (ii) o valor de r foi fixado em 1,5 na utilização do filtro de densidades de *Helmholtz*. O conjunto de Figuras (5.22) - (5.26) apresentam os resultados obtidos nos testes computacionais.

Figura 5.22 – Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Tecido ósseo.

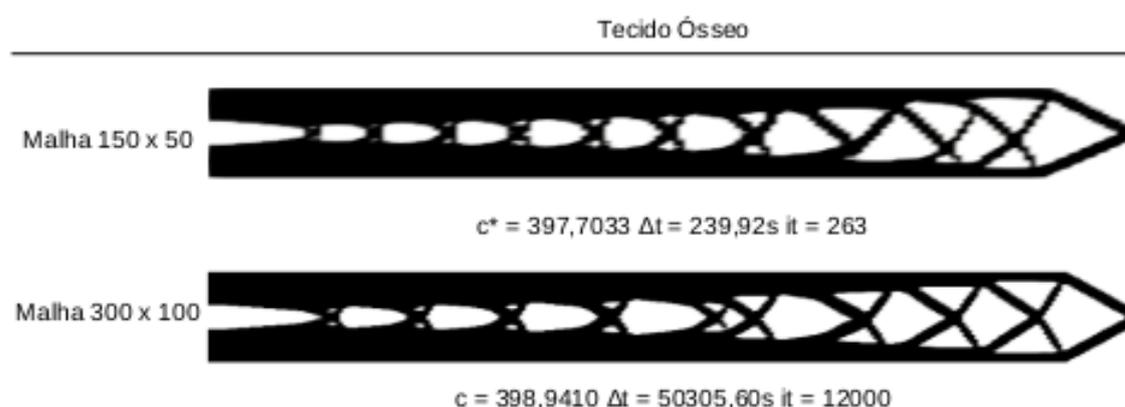


Figura 5.23 – Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Cartilagem.

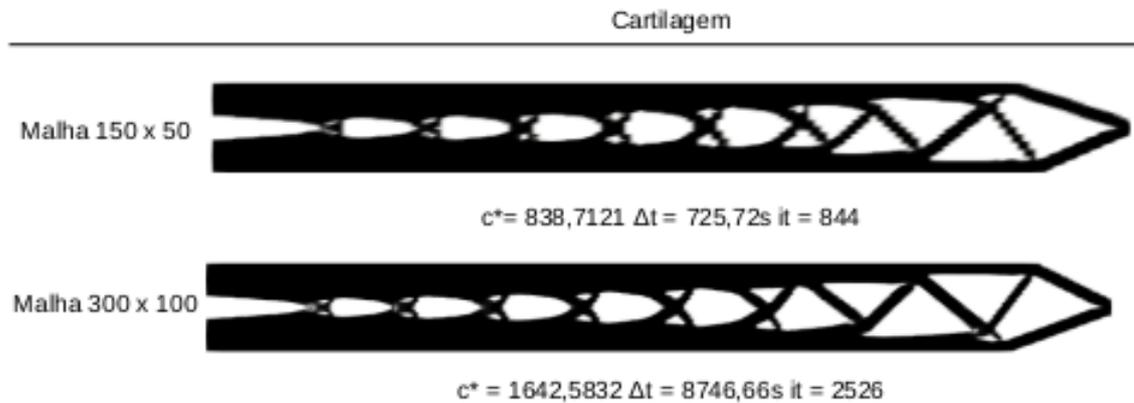


Figura 5.24 – Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Cartilagem Calcificada.

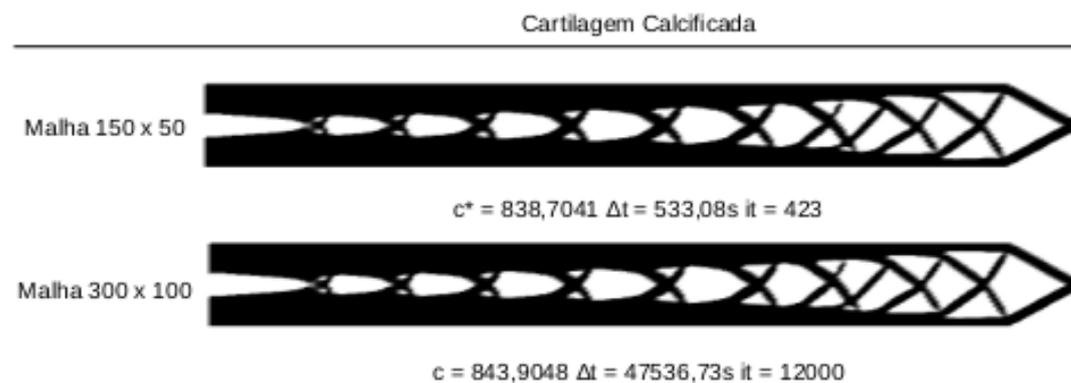
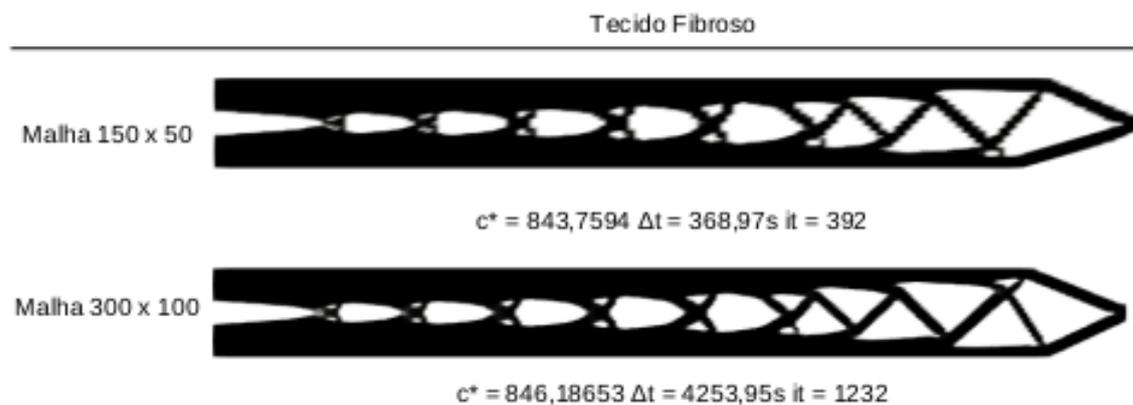


Figura 5.25 – Análise das densidades finais - Viga Carregamento Frontal - Tecido Fibroso.



Realizando uma análise da geometria gerada ao final de cada processamento dos exemplares, se pode observar que o comportamento é em todos os casos similar

aos da subseção 4.2 devido às condições de contorno e carregamento. Porém um ponto que deve ser evidenciado é que apesar de ambas as abordagens estarem resolvendo o mesmo domínio (Figura 5.6), as soluções obtidas pelos métodos não são diretamente comparáveis, pois as funções objetivos não são exatamente as mesmas.

Analisando os valores das funções objetivo, somente dois exemplares não conseguiram encontrar soluções ótimas dentro dos critérios de parada pré estabelecidos. Os dois exemplares são da classe de Malha 300 x 100 elementos e são das fases de vida Tecido Ósseo e Cartilagem Calcificada, respectivamente. Sobre os valores obtidos, as classes Tecido Ósseo, Cartilagem Calcificada e Tecido Fibroso obtiveram valores das funções objetivo na última iteração muito próximas nas duas classes de malhas, indicando que as soluções percorreram a mesma trajetória. Já na classe Cartilagem, houve um incremento de 195,85% nos valores das funções objetivo de uma classe para outra, indicando que uma trajetória de solução diferente foi traçada pelo IPOPT na solução dos dois exemplares da classe.

Na análise dos tempos de processamento dos exemplares, a classe de Malha 150 x 50 elementos levou em média 466,92s para ser processada, com destaque para a fase de vida Tecido Ósseo com o menor valor (239,92s) e Cartilagem com o maior valor (725,72s). Na classe de Malha 300 x 100 os tempos foram mais divergentes: Tecido Ósseo levou 5.0305,60s e 12.000 iterações, Cartilagem levou 8.746,66s e 2526 iterações, Cartilagem Calcificada levou 47.536,73s e 12.000 iterações, por fim, Tecido Fibroso levou 4.253,95s e 1.232 iterações para ser processada.

5.6 Resultados Computacionais da MBB via IPOPT

Nestes testes computacionais, o domínio avaliado foi o mesmo apresentado na Figura 5.2 proposta em [Andreassen et al. \(2011\)](#). Novamente, devido as característica destes testes computacionais (domínio), as aplicações reais ficam restritas apenas a Malha 150 x 50 elementos, uma vez que: (i) conforme apresentado no início da subseção 5.4 o método IPOPT não conseguiu resolver os exemplares da Malha de 60 x 20 elementos, e (ii) a Malha de 300 x 100 elementos pode não refletir tamanhos de ossos humanos reais devido a altura do domínio.

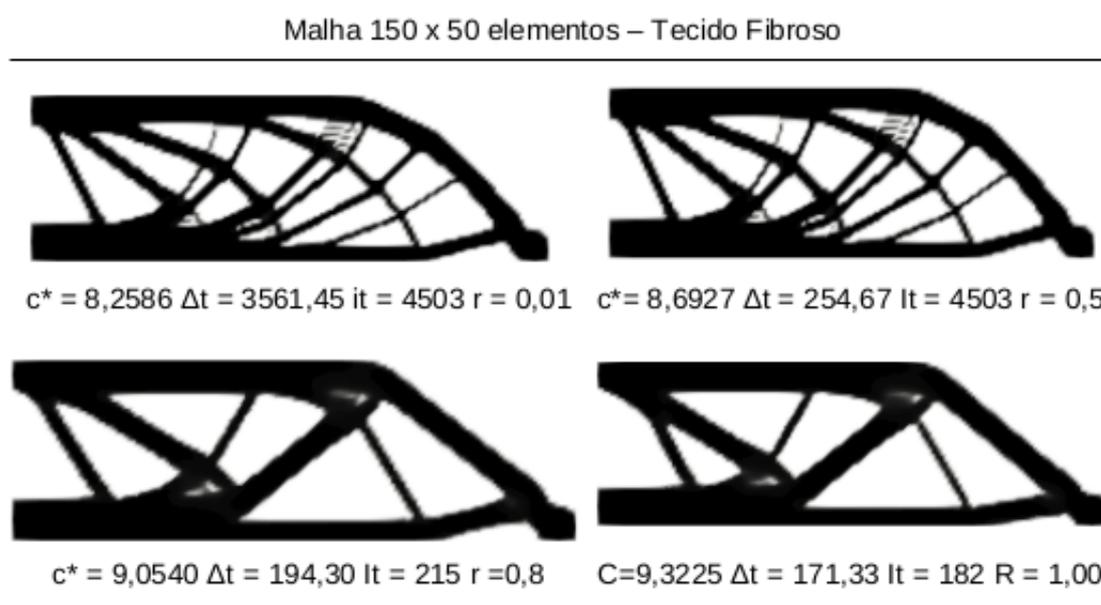
Se destacada que os resultados obtidos pelo método IPOPT não são comparáveis com os resultados do método Critério de Otimalidade cujos resultados foram apresentados na subseção 5.2 pois: (i) os métodos de cálculo dos valores das funções

objetivos (ii) os filtros de densidade e (iii) os elementos finitos, não são os mesmos.

Como foi apontado, o método de filtragem utilizado, foi o mesmo dos testes computacionais desta seção, ou seja, o filtro de *Helmholtz*. Afim de obter uma análise da influência do filtro nos resultados, foram realizados alguns testes para a definição do tamanho de raio (r) do filtro de *Helmholtz* mais adequado para a aplicação conforme Lazarov e Sigmund (2010).

Com isso, a fase de vida óssea Tecido Fibroso e a malha de 150 x 50 elementos foram selecionadas. Foram realizados testes computacionais com alguns valores de r que são apresentados pela Figura 5.26. Nos testes foram avaliadas quatro variáveis: *design* final obtido pelo método, o valor da função objetivo (c^*), o tempo computacional gasto para o processamento do exemplar (Δt) e o número de interações (it).

Figura 5.26 – Análise dos raios do filtro de Helmholtz.



Analisando a Figura 5.26 se pode observar que o valor onde $r \leq 0,5$ os valores das funções objetivo tiveram os melhores desempenhos, porém existem pseudo-densidades na parte superior da estrutura que não foram solucionadas. Por estas razões os valores de $r = 0,01$ e $r = 0,05$ foram descartados. Analisando os dois raios restantes se observa um comportamento muito similar, porém o valor da função objetivo de $r = 0,8$ é menor que o valor de $r = 1,00$. Por esta razão, o valor do raio selecionado foi $r = 0,8$. Cabe destacar que outros valores de r foram avaliados e não estão sendo reportados, por exemplo, quando $r = 0,7$ foi avaliado, o método não conseguiu encontrar uma solução ótima em 12.000 iterações, levando 36.828s para ser

processada.

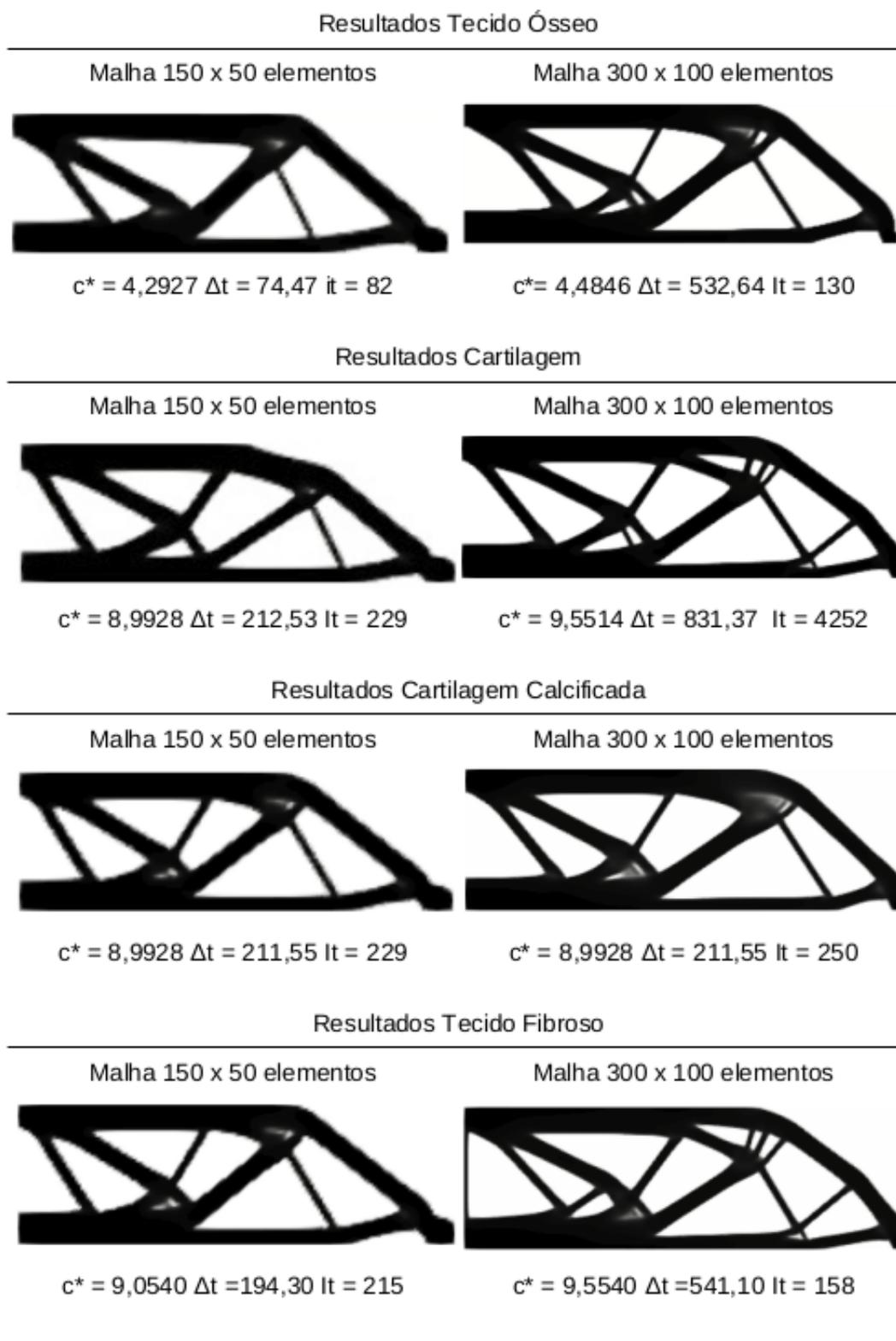
Após a definição do valor do raio, os exemplares das quatro fases de vida do osso foram avaliados em duas classes de malhas 150 x 50 elementos e 300 x 100 elementos, respectivamente, sendo apresentados pela Figura 5.27.

Analisando as geometrias finais apresentadas pela Figura 5.27 se pode observar que: (i) o comportamento da estrutura foi diferente das geometrias geradas pela heurística Critério de Otimalidade e (ii) o problema de pseudo-densidades não foi totalmente corrigido para todos os exemplares. No primeiro ponto levantado, a maior divergência se dá no canto inferior direito de todos os exemplares. Há um amassamento das extremidades, na região do apoio móvel, enquanto na heurística esta parcela de material é eliminada, o que seria mais aderente com uma aplicação prática. Já no segundo ponto, existem na maioria dos exemplares duas pequenas regiões que apresentam a presença de pseudo-densidades que prejudicam a viabilidade para a manufatura dos exemplares via AM e necessitam de maiores esforços na definição do raio do filtro para que a dificuldade seja superada.

Analisando os valores das funções objetivo, todos os exemplares parecem ter sido processados via IPOPT em trajetórias de solução muito similares ou equivalentes, pois os valores das classes estão muito próximos. Vale o destaque da fase de vida Cartilagem Calcificada pois nas duas classes de malhas, o método conseguiu convergir exatamente para a mesma solução, no mesmo tempo computacional, somente divergindo em 21 iterações de uma classe para outra.

Realizando uma análise dos custos computacionais, analisando a classe de Malha 150 x 50 elementos, houve um tempo médio de processamento de 173s com destaque para a fase de vida Tecido Ósseo com o menor valor (74s) e a fase de vida Cartilagem Calcificada com o maior valor (212s). Analisando a classe de Malha 300 x 100 elementos, houve uma discrepância muito elevada nos tempos de processamento, sendo que: Tecido Ósseo levou 532s e 130 iterações, Cartilagem levou 831s e 4252 iterações, Cartilagem Calcificada levou 211s e 250 iterações e Tecido Fibroso levou 541s e 158 iterações.

Figura 5.27 – Análise dos resultados da viga MBB via IPOPT.



6 Conclusões e Próximos Passos

Neste capítulo, são resumidos os principais resultados obtidos neste trabalho e discutidos os possíveis rumos para continuação desta pesquisa.

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi realizado um estudo computacional buscando avaliar o desempenho da Otimização Topológica (TO, do inglês *Topology Optimization*) aplicada em um contexto de prótese humanas em exemplos de pequeno porte. Para tal, dois modelos de Minimização de Flexibilidade foram avaliados: (i) uma formulação foi avaliada através dos métodos: Critério de Otimalidade e Pontos Interiores. (ii) Já a segunda formulação que compreende o Modelo Homogeneizado de Mínima Flexibilidade, foi avaliada através do método de Minimizações Alternadas.

Quando o método Critério de Otimalidade foi avaliado, foi possível notar a velocidade de convergência que o método fornece, na busca dos ótimos locais, através dos gradientes das funções. No entanto, o escopo oferecido pelo trabalho de ([ANDREASSEN et al., 2011](#)) pode ser considerado limitado, devido ao programa utilizar somente elementos quadriláteros unitários. Este ponto negativo não oferece flexibilidade para avaliar outras dimensões de elementos finitos e o impacto da razão de proporção destes elementos em relação às dimensões da malha de elementos, que constitui o domínio. Outro ponto que foi evidenciado é que alguns perfis são gerados inviáveis para a manufatura.

Já quando o método de Minimizações Alternadas foi avaliado, foi observado que os resultados obtidos não foram satisfatórios devido: (i) a relaxação da restrição de volume e (ii) todas as simplificações necessárias para implementação do método em relação ao método da Homogeneização, conforme sugerido em ([ALLAIRE; SCHOENAUER, 2007](#)) e ([ALLAIRE, 2015](#)). Um ponto que merece destaque é a formulação da função objetivo avaliada nestes testes computacionais. Como ela possui duas par-

celas, minimizando a flexibilidade e o volume, respectivamente, foi possível observar em uma só topologia os deslocamentos sofridos pela estrutura e redirecionamento do material para áreas mais solicitadas pelo carregamento imposto. Um ponto negativo que deve ser evidenciado são as pseudo-densidades geradas pelo relaxamento da variável de decisão (\bar{x}_e) que afetaram a maioria dos exemplares avaliados, com exceção da fase de vida Tecido Ósseo com malha de 300 x 100 elementos. Devido a proporção elevada de regiões das topologias possuindo pseudo-densidades, inviabilizando o processo de manufatura, o filtro de *Helmholtz* foi empregado, gerando resultados satisfatórios do ponto de vista de viabilidade de manufatura e alinhados com os resultados apresentados por (HE et al., 2018).

Nos testes computacionais que avaliaram o método exato IPOPT se pode observar que o método exige um refinamento de malhas, uma vez que a primeira classe de malha (60 x 20 elementos) não foi possível de ser resolvida pelo método. A medida que as outras duas classes de malha foram avaliadas, o método ofereceu soluções muito satisfatórias do ponto de vista de manufatura, porém um exemplar não conseguiu encontrar uma topologia dentro dos critérios de parada impostos. Este exemplar foi o Tecido Fibroso com a malha de 300 x 100 elementos. Devido à isso, o experimento computacional foi repetido mais duas vezes para avaliar as trajetórias de solução encontradas pelo método, obtendo os mesmos resultados em todas as situações. Em relação as trajetórias de solução do método, nos experimentos computacionais evidenciaram os múltiplos ótimos locais, discutidos no Capítulo 3 do presente trabalho. Estes ótimos locais puderam ser evidenciados nos resultados: (i) Viga em Balanço - Tecido Fibroso - Malha 300 x 100 elementos e (ii) Viga Carregamento Frontal - Cartilagem - Malha 300 x 100 elementos. Em ambos os casos é possível observar que a trajetória de solução percorreu um caminho diferente da classe de malha anterior (150 x 50 elementos), por dois motivos: topologia final e custo computacional.

Por fim, se pode observar que o método IPOPT obteve os melhores resultados por ser um método exato, sendo considerado o mais adequado para a aplicação. Neste sentido, a união do método IPOPT aliado na linguagem *software* FEniCS, utilizando a biblioteca Dofin-Adjoint e o filtro de *Helmholtz* oferece bons resultados analisando os pontos de vista: viabilidade de manufatura, custo da função objetivo (deslocamento da estrutura) e tempo computacional.

6.2 Pesquisas Futuras

Para a aproximação da aplicação em um contexto real, primeiramente se faz necessária a estruturação e avaliação do método IPOPT em um ambiente 3D, utilizando as geometrias, condições de contorno e carregamentos presentes no trabalho de (BELINHA et al., 2012), onde foram avaliados todos os desgastes sofridos por um fêmur em diversas situações.

Outro ponto que deve ser levado em consideração para a aproximação de um contexto real é a consideração da porosidade que pelo escopo do presente trabalho não pode ser considerada devido a limitação de recursos, apresentada na subseção 1.4 . Isso é possível através de: (i) aplicação da Homogenização em Meios Porosos descrita em: (ALLAIRE et al., 1997), (ALLAIRE, 2002), (ALLAIRE; SCHOENAU, 2007), (ALLAIRE, 2015), (GORRIZ, 2014), (DIAS et al., 2014), entre outros trabalhos e (ii) inserir na modelagem as equações de *Navier-Stokes* para contemplar a maximização da permeabilidade nos modelos conforme apresentado no trabalho de (DIAS, 2013) e (DIAS et al., 2014).

Devido as características específicas dos ossos onde todo exemplar deve possuir alta porosidade necessária para a diminuição de densidade, transporte de nutrientes e perda metabólica, a inserção da permeabilidade do modelo se torna vital para a aproximação do modelo à uma aplicação real e a minimização do risco de *stress shielding*.

Neste contexto, uma abordagem que deve ser explorada para a minimização do risco de *stress shielding* é aplicação de TO com restrições de tensão apresentada nos trabalhos de (SILVA et al., 2018a), (SILVA; BECK, 2018b), (SILVA et al., 2019), (SILVA et al., 2020a), (SILVA et al., 2020b), (SILVA et al., 2021a) e (SILVA et al., 2021b).

Por fim, para viabilizar o processo de manufatura da prótese via processo de Manufatura Aditiva (AM, do inglês *Additive Manufacturing*), restrições relacionadas ao processo de AM deve ser consideradas, conforme apresentado no trabalho de (HAVEROTH et al., 2022), onde foi definido um problema de minimização multiobjetivo, considerando o desempenho e o custo das geometrias finais e parcialmente fabricados e permitindo considerar questões relacionadas à AM, como saliência e tensões residuais geradas no processo de otimização. Após todas estas incorporações, realizar testes de avaliação de bancada das próteses.

Referências

- ABDELHAMID, M.; CZEKANSKI, A. Revisiting Non-Convexity in Topology Optimization of Compliance Minimization Problems. **Engineering Computations**, Emerald Publishing Limited, v. 39, p. 893--915, 2022.
- ALFAIFY, A.; SALEH, M.; ABDULLAH, F. M.; AL-AHMARI, A. M. Design for additive manufacturing: A systematic review. **Sustainability**, v. 12, n. 19, p. 448 -- 457, 2020. ISSN 1350-4533. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2071-1050/12/19/7936cite>>.
- ALLAIRE, G. **Shape optimization by the homogenization method**. 1ªed.. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2002. ISBN 978-0-387-95298-7.
- ALLAIRE, G. **Topology Optimization by the Homogenization Method - École Polytechnique**. Feb 2015. Disponível em: <<http://www.cmap.polytechnique.fr/~MAP562/archives/slides/lesson8-.pdf>><http://www.cmap.polytechnique.fr/ MAP562/archives/slides/lesson8.pdf>.
- ALLAIRE, G.; BONNETIER, E.; FRANCFORT, G.; JOUVE, F. Shape optimization by the homogenization method. **Numerische Mathematik**, v. 76, n. 1, p. 27--68p, 1997.
- ALLAIRE, G.; SCHOENAU, M. **Conception optimale de structures**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg New York, 2007. ISBN ISBN-13: 978-3-540-36710-9.
- ALONSO, D. H. Topology optimization for 2D swirl flows with application in the design of a ventricular assist device. **Universidade de São Paulo**, PhD. Thesys, 2022.
- ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. **Struct Multidisc Optim**, v. 1, n. 43, p. 1--16, 2011.
- ARENALES, M.; MORABITO, R.; ARMENTANO, V.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional: Para cursos de engenharia**. Elsevier Brasil, 2015. ISBN 9788535281835. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aZbpCgAAQBAJ>>.
- BARTOLO, P.; KRUTH, J.; SILVA, J.; LEVY, G.; MALSHE, A.; RAJURKAR, K.; MITSUISHI, M.; CIURANA, J.; LEU, M. Biomedical production of implants by additive electro-chemical and physical processes. **CIRP Annals**, v. 61, n. 2, p. 635 -- 655, 2012. ISSN 0007-8506. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850612002041>><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850612002041>.
- BEER, F. P.; JR., E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mechanics of Materials**. 5ªed.. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2009. ISBN 978-0-07-352938-7.
- BELINHA, J.; JORGE, R. N.; DINIS, L. Bone tissue remodelling analysis considering a radial point interpolator meshless method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, p. 1660--1670, 2012.

- BENDSØE, B. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. 2^ªed.. ed. [S.I.]: Springer, 2003. ISBN 978-3-642-07698-5.
- BENDSØE, M.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization , [On elsevier. **Archive of Applied Mechanics**, v. 1, n. 69, p. 635---654, 1999.
- BLEYER, J. **Numerical Tours of Computational Mechanics with FEniCS**. [S.I.], 2018.
- CONEJO, A. J.; CASTILLO, E.; MÍNGUEZ, R.; GARCÍA-BERTRAND, R. **Decomposition Techniques in Mathematical Programming**. [S.I.]: Springer Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-27686-9.
- CUCINOTTA, F.; GUGLIELMINO, E.; LONGO, G.; RISITANO, G. Topology Optimization Additive Manufacturing-Oriented for a Biomedical Application , [On springer charm.]. **Advances on Mechanics, Design Engineering and Manufacturing II**, Lecture Notes in Mechanical Engineering, n. 1, p. 184--193, 2019.
- CURREY, J. D. **Bones: structure and mechanics**. 1^ªed.. ed. [S.I.]: Princeton University Press, 2002. ISBN 0-61-09096-3.
- DAYNES, S.; FEIH, S.; LU, W. F.; J.WEI. Design concepts for generating optimised lattice structures aligned with strain trajectories
[On elsevier]. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 354, n. 1, p. 689--705, 2019.
- DIAS, M. R.; GUEDES, J. M.; FLANAGAN, C. L.; HOLLISTER, S. J.; FERNANDES, P. R. Optimization of scaffold design for bone tissue engineering: A computational and experimental study. **Medical Engineering Physics**, v. 36, n. 4, p. 448 -- 457, 2014. ISSN 1350-4533. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350453314000320>><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350453314000320>.
- DIAS, M. R. B. Scaffold Design for Bone Tissue Engineering. **Universidade Técnica de Lisboa**, Thesys, 2013.
- FARRELL, P. E.; COTTER, C. J.; FUNKE, S. W. A framework for the automation of generalized stability theory. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 36, n. 1, p. C25--C48, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/120900745>>.
- FARRELL, P. E.; HAM, D. A.; F., S. W.; ROGNES, M. E. Automated derivation of the adjoint of high-level transient finite element programs. **Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 35.4, p. 369--393, 2013.
- GORRIZ, C. I. A. V. Computational Modeling of the Biodegradation Process in a Scaffold for Tissue Engineering. **Universidade Técnica de Lisboa**, Dissertation, 2014.
- HAVEROOTH, G.; THORE, C.-J.; CORREA, M.; AUSAS, R.; JAKOBSSON, S.; CUMINATO, J.; KLARBRING, A. Topology optimization including a model of the layer-by-layer additive manufacturing process. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 398, p. 115203, 2022. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522003528>>.

HE, Y.; BURKHALTER, D.; DUROCHER, D.; GILBERT, J. M. Solid-Lattice Hip Prosthesis Design: Applying Topology and Lattice Optimization to Reduce Stress Shielding from Hip Implants

, [On asme 2018]. **Proceedings of the 2018 Design of Medical Devices Conference**, p. 184--193, 2018.

JARDINI, A. L.; LAROSA, M. A.; ZAVAGLIA, C. A. C.; BERNARDES, L. F.; LAMBERT, C. S.; KHARMANDAYAN, P.; D.CALDERONI; FILHO, R. M. Customised titanium implant fabricated in additive manufacturing for craniomaxillofacial surgery, Virtual and Physical Prototyping

, [On elsevier. **Virtual and Physical Prototyping**, v. 9, n. 2, p. 115--125, 2014.

KIM, H.; QUERIN, O.; STEVEN, G.; XIE, Y. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities

, [On precedings of 8th symposium on multidisciplinary analysis and optimization. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 40, n. 4, p. 11 pages, 2000.

KLADOVASILAKIS, N.; K.TSONGAS; TZETZIS, D. Finite Element Analysis of Orthopedic Hip Implant with Functionally Graded Bioinspired Lattice Structures

, [On mdpi. **Biomimetics**., v. 5, n. 44, p. 16 pages, 2020.

LANGTANGEN, H. P.; LOGG, A. **Solving PDEs in Python**. [S.I.]: Springer, 2017. ISBN 978-3-319-52461-0.

LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations. **Numerical Methods in Engineering**, v. 86, p. 765--781, 2010.

LOGG, A.; MARDAL, K.-A.; WELLS, G. N. et al. **Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method**. [S.I.]: Springer, 2012. ISBN 978-3-642-23098-1.

MARTIN, R. B.; BURR, D. B.; SHARKEY, N. A.; FYHRIE, D. P. **Skeletal Tissue Mechanics**. 2^aed.. ed. [S.I.]: Springer, 2015. ISBN 978-1493930012.

MCEWEN, I.; COOPER, D. E.; WARNETT, J.; KOURA, N.; WILLIAMS, M. A.; GIBBONS, G. J. Design Manufacture of a High-Performance Bicycle Crank by Additive Manufacturing. **Applied Sciences**, Elsevier, 2018.

MERTENS, C.; LÖWENHEIM, H.; HOFFMANN, J. Image data based reconstruction of the midface using a patient-specific implant in combination with a vascularized osteomyocutaneous scapular flap. **Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery**, v. 41, n. 3, p. 219 -- 225, 2013. ISSN 1010-5182. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1010518212001965>><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1010518212001965>.

MIRZENDEHDEL, A. M.; SURESH, K. Support structure constrained topology optimization for additive manufacturing

[On elsevier]. **Computer-Aided Design**, 2016.

MONTAZERIAN, H.; DAVOODI, E.; ASADI-EYDIVAND, M.; KADKHO-
 DAPOUR, J.; SOLATI-HASHJIN, M. Porous scaffold internal architecture
 design based on minimal surfaces: A compromise between permeability
 and elastic properties. **Materials Design**, v. 126, p. 98 -- 114, 2017. ISSN
 0264-1275. Disponível em: <[http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-
 /S0264127517303593](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264127517303593)><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264127517303593>.

NOYAMA, Y.; MIURA, T.; ISHIMOTO, T.; ITAYA, T.; NIINOMI, M.; NAKANO, T. Bone
 loss and reduced bone quality of the human femur after total hip arthroplasty under
 stress-shielding effects by titanium-based implant. **MATERIALS TRANSACTIONS**,
 v. 53, n. 3, p. 565--570, 2012.

OSHKOUR, A. A.; TALEBI, H.; SHIRAZI, S. F. S.; BAYAT, M.; YAU, Y. H.;
 TARLOCHAN, F.; OSMAN, N. A. A. Comparison of Various Functionally Graded
 Femoral Prostheses by Finite Element Analysis
 , [On hindawi publishing corporation. **The Scientific World Journal**, v. 2014, n. 1, p.
 17 pages, 2014.

PALMAS, L. F. Estudos complementares sobre Otimização Topológica Multimaterial
 utilizando interpolação SIMP ordenada. **Federal University of Santa Catarina**,
 Dissertation, 2018.

PAULINO, D. M. S. Otimização Topológica de Estruturas Planas Considerando
 Comportamento Não Linear Geométrico. **Escola de Engenharia da Universidade
 de São Paulo**, Dissertation, 2019.

PICELLI, R.; SIVAPURAM, R.; XIE, Y. M. A 101-line MATLAB code for topology
 optimization using binary variables and integer programming. **Struct Multidisc Optim**,
 Springer, v. 63, p. 935–954, 2021.

ROCHA, B. A. S. Desenvolvimento do processo de produção de próteses em ligas de
 Titânio. **Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**, Dissertation, 2010.

ROQUE, R.; BARBOSA, G. F.; GUASTALDI, A. C. Design and 3d bioprinting of
 interconnected porous scaffolds for bone regeneration. an additive manufacturing
 approach. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 64, p. 655--663, 2021. ISSN
 1526-6125. Disponível em: <[https://www.sciencedirect.com/science/article/pii-
 /S1526612521001006](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1526612521001006)>.

SALAS, R. A.; SILVA, A. L. F. da; SILVA, E. C. N. Hyimfo: Hybrid method for
 optimizing fiber orientation angles in laminated piezocomposite actuators. **Computer
 Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 385, p. 114010, 2021.
 ISSN 0045-7825. Disponível em: <[https://www.sciencedirect.com/science/article/pii-
 /S0045782521003418](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782521003418)>.

SHIN, K.; HAMMOND, J. K. **Fundamentals of Signal for Sound and Vibration
 Engineers**. 1ªed.. ed. [S.l.]: John Wiley Sons Ltd,, 2008. ISBN 978-0470-51188-6.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Struct Multidisc
 Optim**, v. 1, n. 21, p. 120--127, 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization , [On springer. **Structural and Multidisciplinary Optimization volume**, v. 1, n. 33, p. 401---424, 2007.

SIGMUND, O.; PETERSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, Springer-Verlag, v. 16, p. 68--75, 1998.

SILVA, A. L. F. Otimização Topológica de Estruturas de Pórtico Laminado Considerando Orientação de Fibra e Regime Linear. **Universidade de São Paulo**, Dissertation, 2020.

SILVA, G. A. Otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas. **Universidade do Estado de Santa Catarina**, Dissertation, 2016.

SILVA, G. A. Otimização topológica considerando incertezas com critério de falha em tensão. **Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo**, Thesys, 2019.

SILVA, G. A. da; AAGE, N.; BECK, A. T.; SIGMUND, O. Three-dimensional manufacturing tolerant topology optimization with hundreds of millions of local stress constraints. **Int J Numer Methods Eng**, John Wiley Sons, Ltd., v. 122, n. 1, p. 548--578, 2021a. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.6548>>.

SILVA, G. A. da; AAGE, N.; BECK, A. T.; SIGMUND, O. Local versus global stress constraint strategies in topology optimization: A comparative study. **Int J Numer Methods Eng**, John Wiley Sons, Ltd., v. 122, n. 1, p. 6003--6036, 2021b. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.6781>>.

SILVA, G. A. da; BECK, A. T. Reliability-based topology optimization of continuum structures subject to local stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 113, n. 1, p. 153--178, 2018b. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-017-1865-3>>.

SILVA, G. A. da; BECK, A. T.; CARDOSO, E. L. Topology optimization of continuum structures with stress constraints and uncertainties in loading. **Int J Numer Meth Engng**, John Wiley Sons, Ltd., v. 113, n. 1, p. 153--178, 2018a. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.5607>>.

SILVA, G. A. da; BECK, A. T.; SIGMUND, O. Stress-constrained topology optimization considering uniform manufacturing uncertainties. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, v. 344, n. 1, p. 512--537, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.10.020>>.

SILVA, G. A. da; BECK, A. T.; SIGMUND, O. Topology optimization of compliant mechanisms considering stress constraints, manufacturing uncertainty and geometric nonlinearity. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, Elsevier, v. 365, n. 1, p. 112972, 2020a. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112972>>.

SILVA, G. A. da; CARDOSO, E. L.; BECK, A. T. Comparison of robust, reliability-based and non-probabilistic topology optimization under uncertain loads and stress constraints. **Probabilistic Engineering Mechanics**, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 103039, 2020b. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112972>>.

SOLA, A.; BELLUCCI, D.; CANNILLO, V. Functionally graded materials for orthopedic applications – An update on design and manufacturing

, [On elsevier. **Biotechnology Advances**, v. 34, n. 5, p. 504--531, 2016.

SÁNCHEZ, E. **Tensores**. 1ªed.. ed. [S.l.]: Editora Interciência, 2007. ISBN 978-85-7193-178-7.

TAVARES, C. S. Seleção de Fornecedores sob Incertezas via Otimização Robusta. **Universidade Federal de São Carlos**, Dissertation, p. 117p, 2019.

THOMPSON, M. K.; MORONI, G.; VANEKER, T.; FADEL, G.; CAMPBELL, R. I.; I.GIBSON; BERNARD, A.; SCHULZ, J.; GRAF, P.; AHUJA, B.; MARTINA, F. Design for Additive Manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints

[On elsevier]. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v. 65, n. 1, p. 737--760, 2016.

TYBUREC, M.; ZEMAN, J.; KRUŽÍK, M.; HENRION, D. Global optimality in minimum compliance topology optimization of frames and shells by moment-sum-of-squares hierarchy. **14th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimizati**, HAL Open Science, p. 17p, 2021. Disponível em: <<https://hal.laas.fr/hal-02949791>>.

VAZ, L. E. **Métodos dos elementos finitos em análises de estruturas**. 1ªed.. ed. [S.l.]: Elsevier, 2011. ISBN 978-85-352-3929-4.

WANG, X.; XU, S.; ZHOU, S.; XU, W.; LEARY, M.; CHOONG, P.; QIAN, M.; BRANDT, M.; XIE, Y. M. Topological design and additive manufacturing of porous metals for bone scaffolds and orthopaedic implants: A review. **Biomaterials**, v. 83, p. 127 -- 141, 2016. ISSN 0142-9612. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142961216000144>><http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142961216000144>.

WÄCHTER, A.; BIEGLER, T. L. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, Springer, v. 106, p. 25–57, 2006.

XILLO. The world's first 3d printed total jaw reconstruction. 2012. Disponível em: <<https://www.xilloc.com/patients/stories/total-mandibular-implant/> (accessed: 07.01.2021)>.