UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Gabriel Cardoso Pigozzi

A Formulação de Eisenhart para Teorias de Campos Escalares

SÃO CARLOS - SP
2022

Gabriel Cardoso Pigozzi

A Formulação de Eisenhart para Teorias de Campos Escalares

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de São Carlos, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Área de Concentração: Física

Orientador: Javier Fernando Ramos Caro

São Carlos - SP, Setembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Gabriel Cardoso Pigozzi

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Bacharel em Física, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador(a): Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Prof. Dr. -
Universidade -

Prof. Dr. -
Universidade -

Prof. Dr. -
Universidade -

São Carlos, DIA de Setembro de 2022

A Z, R, L, T e T, que entenderam a Natureza mais que qualquer homem jamais o fará.

Agradecimentos

Agradeço a todos os membros da comunidade da Universidade Federal de São Carlos, por seu trabalho que permitiu minha graduação.

Aos colegas de turma e ao Kaique, que me ajudaram com nos mais diversos momentos, e trouxeram discussões valiosas.

Ao Dr. Marcio Peron Franco de Godoy e, especialmente, ao Dr. Waldir Avansi Junior, pois, apenas graças à vossa dedicação e sensibilidade, ocorreu a abertura da turma da última disciplina restante para me graduar.

Ao Dr. Javier, meu orientador no presente trabalho, por ter proporcionado as condições e amparo à produção deste e por se envolver e promover minhas ambições de estudar as estruturas matemáticas importantes na Física.

Ao Dr. Alexandre Paiva Barreto, por ter me mostrado o caminho da Geometria Diferencial com sua maestria na área e humanidade.

Ao Jaum, por ser o Jaum. Aos demais da Turma, especialmente o Time 1 Ponto. Ao Conselho. Aos doadores de rins.

Aos meus pais, que fizeram com que tudo isso ocorresse.

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω μου την στέγην.

- Πλάτων

Convoar com Alabrá para virar lagarto azul. Está um bom preço de Well. Eu não sou boêmio porque eu zoo. Eles não Seiti graça. Matar camaleões com pá. Hamster Ball tem cabeça na geladeira pensar. Radicais são paradas conceituosas decompostas da 5ª série. x, 7, 17 e 5x é só para a minha conta funcionar só com tudo e assim por aberto não ata seria teria aqui qual gente radical deu junto com raiz. Para agora inglês velho chiclete amassado.

- Alabrá

Resumo

Neste trabalho, fazemos uma abordagem do levantamento de Eisenhart, introduzido por L. P. Eisenhart em 1928, no contexto de mecânica analítica. A questão central do levantamento é, dado um sistema mecânico ou de campos lagrangianos que originalmente se dá através da utilização de um termo de interação do tipo “acoplamento mínimo”, buscar-se expressões equivalentes do mesmo, em que a interação dá lugar a novos campos, puramente “livres”.

Abordamos os trabalhos de Eisenhart, K. Finn, S. Karamitsos e A. Plaftsis sobre o assunto, e introduzimos um novo olhar para a estrutura matemática do levantamento, em que permitimos maior flexibilidade sobre os novos espaços de campos. Além disso, obtemos uma equação diferencial geral para o problema, a qual se espera propiciar a obtenção de soluções legitimamente harmônicas, o que não era possível nos tratamentos anteriores.

Palavras-chave: Levantamento de Eisenhart. Funções harmônicas. Campos escalares. Sigma-modelos.

Abstract

In the present work, we discuss the Eisenhart lift, introduced by L. P. Eisenhart in 1928, when dealing with analytical mechanics. The core idea behind the lift is to look at a lagrangian mechanical or field system that is initially a “minimally-coupled” system with a corresponding interaction term, and look for equivalent expressions of it, in which the new fields are all “free”.

We make an exposition of the works by Eisenhart, K. Finn, S. Karamitsos e A. Plaftsis on the subject, and we also introduce a new viewpoint on the mathematical structure of said lifts, allowing for more fexibile choices of the new field spaces. We also obtain a general differential equation for the problem, which we hope to yield proper harmonic solutions for fields, as they weren’t possible in the previous approaches.

Keywords: Eisenhart lift. Harmonic maps. Scalar fields. Sigma-models.

Lista de símbolos

$f[A]$ Imagem do conjunto A pela função f.

$\mathscr{A}_M$ O atlas da variedade M em consideração no contexto. Se não discriminado, ele será suposto orientado e maximal.

$\mathrm{Dom}(f)$ Domínio da função f.

$\mathbb{N}$ Números naturais $0, 1, 2, ...$

proj_k A projeção

$$(x_1, ..., x_n, ...,) \in \prod_{n \in A \subseteq \mathbb{N}} X_n \mapsto x_k \in X_k$$

$f \times g$ Dadas funções $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$, seu produto é

$$f \times g : x \in X \mapsto (f(x), g(x)) \in Y \times Z$$

∇ Conexão de Levi-Civita de uma variedade pseudo-riemanniana.

$\mathcal{C}^k(X, Y)$ Funções k-diferenciáveis entre X e Y.

$f|_U$ Função f restrita a $U \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

$d\mu_g$ Forma de volume riemanniana da métrica g. Dada orientação, a única forma de volume em (M, g) tal que

$$g(d\mu_g, d\mu_g) = (\dim M)^2$$

Para carta $x \in \mathscr{A}_M$,

$$d\mu_g|_{\mathrm{Dom}(x)} = \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{\dim M}$$

$\mathcal{X}(M)$ Conjunto dos campos de vetores de M.

(TM, τ_M, M) Fibrado tangente da variedade M, sendo τ_M a projeção.

T_pM Espaço tangente a M em $p \in M$.

$\flat$ Isomorfismo

$$v \in TM \mapsto [w \in T_{\tau_M(v)}M \mapsto g(\tau_M(v))(v, w) \in \mathbb{R}] \in T^*M$$

$\mathcal{T}_M$ A topologia de M.

$\Lambda^k(M)$	Conjunto dos campos de k-formas diferenciais em M.
$f^*(T)$	Pullback do tensor T por f.
f_t	Dada uma função $f(t,x) : T \times X \to Y$, temos $$f_t : x \in X \to\mapsto f(t,x) \in Y$$
$\mathcal{L}_X T$	Derivada de Lie do tensor T na direção do campo vetorial X.
FKP	Finn, Karamitsos e Pilaftsis, autores do artigo central em torno do qual este trabalho se desenvolveu.

Sumário

1 Introdução

A Geometria Diferencial se estabeleceu ao longo do século passado como língua franca da Física. Enquanto grande atenção foi trazida ao tema pelo desenvolvimento da Relatividade Geral, a necessidade da “covariância” dos objetos matemáticos empregados nos formalismos em estudo tornou-se evidente, e mesmo dir-se-ia que argumentos formulados com base em expressões carentes de objetos “independentes de coordenadas” são simplesmente mal-definidos.

Assim, especialmente no contexto das Teorias de Campos, a Geometria Diferencial é onipresente: desde o formalismo simples e elegante do eletromagnetismo relativístico em termos de formas diferenciais e suas derivadas; a própria teoria da relatividade e a relação entre o tensor de energia-momento e os tensores de curvatura oriundos de uma métrica; e mesmo teorias de calibre, fazendo intenso uso de grupos de Lie, conexões e outras estruturas relacionadas.

Neste trabalho, desejamos fazer uma abordagem do Levantamento de Eisenhart, introduzido por L. P. Eisenhart em [Eisenhart 1928], enquanto exibindo um formalismo geométrico para a mecânica clássica e teorias clássicas de campos, com razoável profundidade dos detalhes matemáticos que o sustentam. Nisso, além de tornar precisos conceitos já conhecidos e clássicos da graduação, também damos fundamentação para estudos mais avançados nessas áreas, como sistemas dinâmicos, ou teorias clássicas e quânticas de campos. Além disso, como a cereja do bolo, apresentamos o formalismo de Eisenhart, que traz resultados interessantes e um novo olhar sobre como a métrica de um espaço se relaciona com o que pensamos serem interações físicas nele, de modo análogo à reinterpretação da gravitação trazida pela Relatividade Geral.

1.1 Inspiração

Um dos aspectos mais marcantes introduzidos pela Teoria da Relatividade Geral é a redefinição qualitativa da interação gravitacional da matéria. Nesse contexto, as trajetórias aceleradas de partículas no espaço newtoniano tornam-se geodésicas no espaço-tempo einsteniano.

Na mecânica newtoniana, as trajetórias ϕ satisfazem à definição de força tridimensional F de Newton, um campo vetorial ao longo da trajetória, que se relaciona com esta por

$$m[(\phi^k)'' + \Gamma^k_{ij}(\phi^i)'(\phi^j)'] = F^k, \tag{1.1}$$

em que m é a massa da partícula, F^k são as componentes do vetor força, f' indica a "derivada temporal" da quantidade f, e Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel da métrica do espaço.

Uma curva ϕ que satisfaz à equação

$$(\phi^k)'' + \Gamma^k_{ij}(\phi^i)'(\phi^j)' = 0 \tag{1.2}$$

é dita uma geodésica [Lee 1997]. Ela é a generalização para geometrias semi-riemannianas das retas euclidianas, ou "curvas de aceleração nula". Precisamente, chamamos de **aceleração** o termo à esquerda nessa equação.

Queremos agora relacionar isso com a Relatividade Geral.

Começamos considerando a mudança de uma partícula para um meio contínuo, de densidade ρ, cujo movimento é descrito como o fluxo de um campo vetorial v, sua velocidade, e que pode sofrer ação de uma força externa por volume f. Nesse contexto, a generalização de (1.1) para se dá como como [Marsden e Hughes 1994]

$$\partial_t(\rho v^i) + \nabla_j(v^i v^j) = f^i. \tag{1.3}$$

Na Relatividade Geral, equações análogas a essas se dão através das equações de Einstein [Carroll 2004]

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \tag{1.4}$$

com T o tensor de energia-momento da matéria, e G o tensor de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = \mathrm{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \tag{1.5}$$

em que Ric é a curvatura de Ricci, R é a curvatura escalar e g a métrica do espaço-tempo.

G depende apenas da métrica do espaço-tempo, e, por construção, sua divergência é nula: $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$. Logo, (1.4) implica que

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.6}$$

A equação (1.3) é o limite de baixas velocidades da equação (1.6), que descreve a conservação de energia-momento relativística, e se dá numa variedade de dimensão 4, em vez do espaço newtoniano tridimensional.

Consideremos o caso em que temos matéria que interage exclusivamente pela gravidade. Seu tensor de energia-momento é "puramente cinético", da forma

$$T^{\alpha\beta} = \rho v^\alpha v^\beta, \tag{1.7}$$

conhecido na literatura como "tensor do pó" [Carroll 2004], e v representa o análogo em 4 dimensões da velocidade. A equação dinâmica desta matéria, dada por (1.6), implica em todo ponto x do espaço-tempo tal que $\rho(x) \neq 0$,

$$v^j \nabla_j v^i(x) = 0. \tag{1.8}$$

Essa equação nos diz que as trajetórias no espaço-tempo de partículas sob a ação exclusiva da gravidade, que são curvas integrais de v, nos pontos x onde $\rho(x) \neq 0$, são geodésicas.

O ponto de interesse que obtemos desta discussão é, informalmente, que Einstein demonstrou que se pode descrever a gravidade, até então uma força que deforma geodésicas em 3 dimensões, equivalentemente como efeito da geometria em 4 dimensões.

1.2 Adicionando Dimensões

Em 1928, Luther Pfahler Eisenhart em [Eisenhart 1928] investigou se o mesmo tipo de mudança de paradigma poderia ser empregada para outras forças clássicas, ainda no contexto de mecânica de partículas.

Para exemplificarmos informalmente suas investigações, consideremos um sistema mecânico cujo estado é descrito por n coordenadas generalizadas x^i e suas velocidades $(x^i)'$ e cuja dinâmica é dada por uma lagrangiana da forma

$$L = \frac{m}{2}(x^i)'(x^i)' - V(x). \tag{1.9}$$

O que ele obteve é que, se adicionamos mais um grau de liberdade y ao sistema, e alteramos a lagrangiana para

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}(x^i)'(x^i)' - \frac{1}{2V(x)}y'y', \tag{1.10}$$

então podemos pensar numa métrica no espaço das coordenadas x e y, dada por

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{1.11}$$

$$g_{iy} = 0, \tag{1.12}$$

$$g_{yy} = \frac{1}{2V}, \tag{1.13}$$

e isso permite reescrevermos (1.10) como

$$L = \frac{1}{2}g_{IJ}(z^I)'(z^J)', \tag{1.14}$$

em que $z^I = x^i$ para $I = 1, 2, ..., n$ e $z^{n+1} = y$.

Isso é interessante, porque a equação de Euler-Lagrange dessa lagrangiana é exatamente a equação que caracteriza geodésicas (1.2). Ou seja, assim como Einstein, Eisenhart foi capaz de descrever o que pareciam ser forças e aceleração através da geometria do espaço, aumentando sua dimensão.

Seguindo Eisenhart, Kieran Finn, Sotirios Karamitsos, e Apostolos Pilaftsis (KFP) desenvolveram mais um trabalho [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018], em que eles exibem uma generalização do trabalho de Eisenhart para sigma-modelos.

Faremos no que segue uma exposição mais detalhada dos trabalhos de ambos Eisenhart e KFP, e tentaremos trazer algumas ideias novas.

2 Fibrados e Teorias Lagrangianas de Campos

Fazemos aqui uma exposição básica dos conceitos centrais que embasam as teorias de campos lagrangianas. Omitimos os detalhes de porque estes objetos estão bem-definidos. Caso o leitor julgue necessário, sugerimos a leitura de [Saunders 1989] [Olver 1993].

Definição 2.1. *(E, π, M) é um **fibrado** se*

i) E, M são variedades suaves;

ii) $\pi \in \mathcal{C}^\infty(E, M)$ é uma submersão sobrejetiva;

iii) Existe uma cobertura $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_M$ de M tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe uma variedade suave F_U e um difeomorfismo

$$t : \pi^{-1}[U] \to U \times F_U. \tag{2.1}$$

Denotamos por (E, π, M, F) um fibrado para o qual existe F, para todo U, com $F = F_U$. ♢

Usarenos π para representar (E, π, M) quando conveniente. Os difeomorfismos t são chamados **trivializações** de π.

Definição 2.2. *Seja (E, π, M, F) um fibrado. $x \times u \in \mathscr{A}_E$ é uma carta **adaptada a** π se existem uma trivialização de π*

$$t : \pi^{-1}[\pi[\mathrm{Dom}(x \times u)]] \mapsto \pi[\mathrm{Dom}(x \times u)] \times F, \tag{2.2}$$

e cartas $x \in \mathscr{A}_M$ e $u \in \mathscr{A}_F$ tais que $\mathrm{Dom}(x) = \mathrm{proj}_1 \circ t[\mathrm{Dom}(x \times u)]$, $\mathrm{Dom}(u) = \mathrm{proj}_2 \circ t[\mathrm{Dom}(x \times u)]$ e

$$x \times u = (x \circ \mathrm{proj}_1 \circ t) \times (u \circ \mathrm{proj}_2 \circ t). \tag{2.3}$$

♢

Definição 2.3. *Seja (E, π, M) um fibrado.*

$$\Gamma(\pi) := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M, E) : \mathrm{id}_M = \pi \circ \phi\} \tag{2.4}$$

*é o conjunto das **seções** de π.* ♢

Definição 2.4. *Seja (E, π, M, F) um fibrado.*

Sejam $\phi \in \Gamma(\pi)$, $1 \leqslant k \in \mathbb{N}$ e $p \in M$. $\psi \in \Gamma(\pi)$ é k-equivalente a ϕ em p se $\phi(p) = \psi(p)$ e, para todas as cartas adaptadas $x \times u$ com $p \in \mathrm{Dom}(x)$,

$$\frac{\partial^k \phi^i}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_k}}(p) = \frac{\partial^k \psi^i}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_k}}(p), \tag{2.5}$$

para todos $0 < \alpha_1, ..., \alpha_k \leqslant \dim M$.

$j^k_p\phi$ é o conjunto das funções k-equivalentes a ϕ em p.

*O conjunto $J^k\pi$ dos **k-jatos** de π é*

$$J^k_p\pi = \{j^k_p\phi : p \in M \ e \ \phi \in \Gamma(\pi)\}. \tag{2.6}$$

Definimos ainda

$$\pi_{1,0} : j^1_p\phi \in J^1\pi \mapsto \phi(p) \in E, \tag{2.7}$$

$$\pi_{k,k-1} : j^k_p\phi \in J^k\pi \mapsto j^{k-1}_p\phi \in J^{k-1}\pi \ \ ; \ \ k > 1, \tag{2.8}$$

e

$$\pi_k : j^k_p\phi \in J^k\pi \mapsto p \in M \ \ ; \ \ k \geqslant 1. \tag{2.9}$$

*O k**-ésimo prolongamento** de ϕ é*

$$j^k\phi : p \in M \mapsto j^k_p\phi \in J^k\pi \tag{2.10}$$

$\diamondsuit$

Pode-se demonstrar que, definindo-se

$$u^i_{\alpha_1,...,\alpha_k} : j^k_p\phi \in J^k \mapsto \frac{\partial^k \phi^i}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_k}}(p) \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

o conjunto das funções

$$j^k_p\phi \in J^k\pi \mapsto (x^\alpha(p), u^i(\phi(p)), u^i_{\alpha_1}(j^k_p\phi), u^i_{\alpha_1,\alpha_2}(j^k_p\phi), ..., u^i_{\alpha_1,...,\alpha_k}(j^k_p\phi)), \tag{2.12}$$

em que se considera apenas $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant ... \leqslant \alpha_k$, constitui um atlas de $J^k\pi$, com a topologia induzida por essas cartas.

Definição 2.5. *Seja (E, π, M) um fibrado. Uma **lagrangiana de ordem** k em π é um campo de $\dim M$-formas diferenciais*

$$L = \mathscr{L}\pi^*_k(d\mu) \in \Lambda^{\dim M}(J^k\pi), \tag{2.13}$$

em que $\mathscr{L} \in \mathcal{C}^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$ e $d\mu \in \Lambda^{\dim M}(M)$.

Em uma carta adaptada $x \times u$, temos

$$L(j^k_p\phi) = \mathscr{L}(j^k_p\phi)\mu_{1,...,m}(p)dx^1 \wedge .... \wedge dx^m \tag{2.14}$$

*Nesse caso, dizemos que (E, π, M, L) é uma **teoria de campos lagrangiana**.* $\diamondsuit$

Exemplo A lagrangiana de Einstein-Hilbert, com expressão global e local como seguem,

$$L = R\pi_2^*(d\mu_g) = R\sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{\dim M}, \tag{2.15}$$

é uma lagrangiana de ordem 2 no fibrado (Lor^+, l, M) das métricas lorentzianas sobre M que concordam com uma dada orientação temporal em M, em que a curvatura escalar $R \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ é vista uma função definida em $J^2 l$, $R = R \circ \pi_2$, uma vez que depende das segundas derivadas da métrica.

São comuns na Física, e, portanto, objetos de interesse, as lagrangianas que são obtidas a partir de estruturas pseudo-riemannianas. Dentre elas, este trabalho trata de dois tipos em particular.

Definição 2.6. *Sejam (E, π, M) um fibrado e $f : J^k\pi \to \mathbb{R}$. Definimos, em cada $x \times u$ carta adaptada a π, as **derivadas totais** por*

$$\frac{d}{dx^\alpha}(f)(j_p^k\phi) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f \circ j^{k-1}\phi)(p). \tag{2.16}$$

Seja $V \in \mathcal{X}(E)$ um campo vetorial tal que $d\pi(V) = 0$, i.e., tal que V é da forma

$$V = V^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{2.17}$$

e seja $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \mapsto M$ seu fluxo. Definimos $V^{(1)} \in \mathcal{X}(J^1\pi)$, com fluxo $\psi^{(1)}$, como o único campo vetorial que satisfaz

$$\frac{d}{ds}j^1(\psi_s \circ \phi)(0) = \frac{d}{ds}(\psi_s^{(1)} \circ j^1\phi)(0). \tag{2.18}$$

para toda $\phi \in \Gamma(\pi)$. ◊

No caso $k = 2$, além de estar bem definido em seu domínio [Olver 1993] $\pi_2^{-1}[\mathrm{Dom}(x)]$, $\frac{d}{dx^\alpha}$ é um campo vetorial em $J^k\pi$, e sua expressão em coordenadas é [Saunders 1989]

$$\frac{d}{dx^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u_\alpha^i\frac{\partial}{\partial u^i} + u_{\alpha\beta}^i\frac{\partial}{\partial u_\beta^i}. \tag{2.19}$$

Já $V^{(1)}$, nessas coordenadas, é expresso por [Saunders 1989]

$$V^{(1)} = V^i\frac{\partial}{\partial u^i} + \frac{dV^i}{dx^\alpha}\frac{\partial}{\partial u_\alpha^i}. \tag{2.20}$$

2.1 Equações Diferenciais

Definição 2.7. *Seja (E, π, M) um fibrado. Uma **equação diferencial de ordem (até)** k em π é uma subvariedade $\mathcal{S}$ de $J^k\pi$.*

*$\phi \in \Gamma(\pi)$ é uma **solução** de $\mathcal{S}$ se $j^k\phi \in \Gamma(\pi_k)$.* ◊

É comum se definir equações diferenciais como pré-imagens de valores regulares de funções $f : J^k\pi \to \mathbb{R}$.

Embora isto não seja sempre necessário, assumiremos que $\pi_k[\mathcal{S}] = M$, i.e., que as equações diferenciais das quais trataremos estão globalmente definidas, para evitar eventuais problemas de indefinição.

Exemplo Uma equação diferencial que será fundamental para este trabalho é a equação de Laplace. No fibrado $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathrm{proj}_1, \mathbb{R}^m)$, ela se define por

$$\Delta = \{(x^\alpha, u^i, u^i_\alpha, u^i_{\alpha\beta}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{nm(m-1)/2} : u^1_{\alpha\alpha} = u^2_{\alpha\alpha} = ... = u^n_{\alpha\alpha} = 0\}. \tag{2.21}$$

A equação de Laplace se estende para espaços mais gerais, em que ela depende de uma estrutura pseudo-riemanniana para ser definida. Quando temos essa estrutura no domínio, e o contradomínio é $\mathbb{R}$, ela se dá como descreveremos agora; consideraremos mais tarde a generalização para permitir contradomínio pseudo-riemanniano, após exibirmos as ferramentas necessárias para tratá-lo.

Aproveitamos para introduzir, ou relembrar, mais algumas definições que nos serão úteis.

Definição 2.8. *Seja (M, g) uma variedade pseudo-riemanniana. Definimos o* ***diferencial***

$$\mathrm{d} : f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{d}f \in \Lambda^1(M), \tag{2.22}$$

a ***hessiana***

$$\mathrm{Hess} : f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \nabla^2 f \in \mathcal{T}^2(M), \tag{2.23}$$

e o ***laplaciano***

$$\Delta : f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}_g \mathrm{Hess}(f) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}). \tag{2.24}$$

♢

Dada uma carta $x \in \mathscr{A}_M$, temos

$$\mathrm{d}f = \nabla f = \partial_\alpha(f)\mathrm{d}x^\alpha \tag{2.25}$$

$$\mathrm{Hess}(f) = \left(\partial_\alpha\partial_\beta f - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma f\right) \mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta \tag{2.26}$$

$$\Delta(f) = g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta f - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma f\right) \tag{2.27}$$

Observamos que o laplaciano assim escrito dá uma equação diferencial quando consideramos o fibrado $(M \times \mathbb{R}, \mathrm{proj}_1, M)$, se, além disso, utilizamos duas vezes o mesmo símbolo para as funções

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \pi_2, \tag{2.28}$$

sendo a função à esquerda definida em $J^2\mathrm{proj}_1$, e a da direita em M, como usual. Esse tipo de composição implícita é prática comum para tornar a notação mais leve, mas é necessário cuidado para garantir que essas composições sempre possam ser definidas de modo que os domínios das funções consideradas em cada situação sejam adequados.

Por outro lado, em Física, estamos interessados também em outro mecanismo que gera equações diferenciais, o "cálculo variacional", de que relembramos o básico, também para acostumar o leitor com o formalismo.

Supomos M orientável com forma de volume $d\mu$, embora E não o precise ser.

Definição 2.9. *Seja (E, π, M, L) uma teoria de campos lagrangiana.*

*Uma **variação de primeira ordem** em π é um campo vetorial $V \in \mathcal{X}(E)$ tal que $d\pi(V) = 0$.*

*Seja $\phi \in \Gamma(\pi)$. ϕ é **extremo de** L se, para todas subvariedades compactas $K \subseteq M$ e toda variação de primeira ordem V com $V|_{\partial K} = 0$, temos*

$$\frac{d}{ds}\left(s \mapsto \int_K [j^1(\psi_s \circ \phi)]^* L\right)(0) = 0. \tag{2.29}$$

$\diamondsuit$

Como é amplamente conhecido, um campo ser extremo no sentido acima nos diz que ele é solução de uma equação diferencial de (até) segunda ordem, a equação de Euler-Lagrange de L. Nesta demonstração, seguimos [Saunders 1989] e [Eells e Sampson 1964].

Teorema 2.10 (Euler-Lagrange)**.** *Seja $(E, \pi, (M, g), L)$ uma teoria de campos lagrangiana, com $L = \mathscr{L}\pi_1^*(d\mu_g)$. Se $\phi \in \Gamma(\pi)$ é extremo de L, então ϕ é solução da equação diferencial $\mathcal{E}_L \subseteq J^2\pi$, que é a união dos conjuntos*

$$\left\{ j_p^2\phi \in \pi_2^{-1}[\mathrm{Dom}(x)] : \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i}\right) + \Gamma_{\alpha\beta}^{(g)\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i} = 0 \right\}, \tag{2.30}$$

definidos na preimagem de toda carta adaptada $x \times u$ de E.

Demonstração. Como as equações difereiciais são escritas localmente (dependem de uma função apenas numa vizinhança de um ponto), podemos supor que quando consideramos um compacto K, este está contido no domínio de uma única carta.

Começamos observando que, como $V|_{\partial K} = 0$, então

$$0 = \int_{\partial K} (j^1\phi)^* \left(V^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \lrcorner \pi_1^*(d\mu_g) \right). \tag{2.31}$$

Usando o Teorema de Stokes,

$$0 = \int_K \mathrm{d}(j^1\phi)^* \left(V^i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \lrcorner \pi_1^*(d\mu_g) \right). \tag{2.32}$$

Usando propriedades do diferencial de de Rham,

$$0=\int_K \frac{\partial}{\partial x^\delta}\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\circ j^1\phi\right)dx^\delta\wedge\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\lrcorner\pi_1^*(d\mu_g)+(j^1\phi)^*\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\pi_1^*\left(\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\lrcorner d\mu_g\right)\right)\right). \tag{2.33}$$

No seguinte, usamos 2.6 e que $dx^\delta\wedge\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\lrcorner=\delta^\delta_\alpha$. Também podemos ver que $(j^k\phi)^*(\pi_k)^*(d\mu_g)=(\pi_k\circ j^k\phi)^*(d\mu_g)=\mathrm{id}_M^*(d\mu_g)=d\mu_g$.

$$0=\int_K (j^2\phi)^*\left(\frac{d}{dx^\alpha}\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)\pi_2^*(d\mu_g)\right)+(j^2\phi)^*\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\pi_2^*\left(\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\lrcorner d\mu_g\right)\right)\right). \tag{2.34}$$

Usamos também a “Fórmula Mágica de Cartan”, que nos diz que todo campo $X\in\mathcal{X}(M)$, $\mathrm{d}(X\lrcorner d\mu_g)=\mathcal{L}_X d\mu_g=\mathrm{div}(X)d\mu_g$ [Lee 2002]. Além disso, sabemos a divergência $\mathrm{div}(\partial_\alpha)=\Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}$.

$$0=\int_K (j^2\phi)^*\left[\frac{d}{dx^\alpha}\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)+V^i\Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right]d\mu_g. \tag{2.35}$$

Explicitando a derivada do produto, temos

$$0=\int_K (j^2\phi)^*\left[\frac{dV^i}{dx^\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}+V^i\frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)+V^i\Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right]d\mu_g. \tag{2.36}$$

Por outro lado, usando $V^{(1)}$ definido em 2.6, do Teorema de Reynolds [Flanders 1973], temos

$$0=\frac{d}{ds}\left(s\mapsto\int_K [j^1(\psi_s\circ\phi)]^*L\right)(0)=\int_K (j^1\phi)^*\left(\mathcal{L}_{V^{(1)}}L\right). \tag{2.37}$$

Usando a “regra do produto para a derivada de Lie” [Lee 2002],

$$0=\int_K (j^1\phi)^*[\mathcal{L}_{V^{(1)}}(\mathscr{L})\pi_1^*(d\mu_g)+\mathscr{L}\mathcal{L}_{V^{(1)}}\pi_1^*(d\mu_g)]. \tag{2.38}$$

Como V é uma variação, então $\mathcal{L}_{V^{(1)}}\pi_1^*(d\mu_g)=0$. Segue que

$$0=\int_K (j^1\phi)^*\left(V^i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i}+\frac{dV^i}{dx^\alpha}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)\pi_1^*(d\mu_g). \tag{2.39}$$

De (2.40) e (2.39), comparando seus termos, segue que

$$0=\int_K (j^2\phi)^*V^i\left[\frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)+\Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i}\right]d\mu_g. \tag{2.40}$$

Como cada V^i é uma função suave qualquer, então podemos escolhê-las de modo que, para a igualdade ser satisfeita, os termos que elas multiplicam são necessariamente nulos. Assim, para $i=1,...,n$, temos

$$\frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}\right)+\Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i_\alpha}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i}=0, \tag{2.41}$$

e isso define a equação diferencial desejada. ■

$\mathcal{E}_L$ é a **equação de Euler-Lagrange** da teoria.

Terminamos esta seção observando um resultado útil e desejável, a aditividade das lagrangianas.

Proposição 2.11. *Na notação do teorema anterior, se* $L = \mathscr{L}\pi_1^*(d\mu_g)$ *e* $K = \mathscr{K}\pi_1^*(d\mu_g)$, *então* $\mathcal{E}_{L+K}$ *é a união dos conjuntos*

$$\left\{ j_p^2\phi \in \pi_2^{-1}[\mathrm{Dom}(x)] : \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i}\right) + \Gamma_{\alpha\beta}^{(g)\beta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha^i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u^i} \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u_\alpha^i}\right) + \Gamma_{\alpha\beta}^{(g)\beta}\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u_\alpha^i} - \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u^i} = 0 \right\} \tag{2.42}$$

Demonstração. Esse fato segue diretamente da linearidade das derivadas parciais (e, portanto, totais). ■

3 Três Teorias de Campos

3.1 Sigma-Modelos Minimamente Acoplados

Consideramos primeiramente a teoria de campos conhecida como **sigma-modelo para campos com acoplamento mínimo**, que chamaremos simplesmente de sigma-modelo por brevidade.

Definição 3.1. *Uma teoria de campos $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ é um **sigma-modelo** se*

i) (M, g) *e* (F, h) *são variedades pseudo-riemannianas;*

ii) $E = M \times F$ *e* $\pi = \mathrm{proj}_1$*;*

iii) Para cada $x \times u$ *carta de* E *adaptada a* π*, temos em* $U = \pi_{1,0}^{-1}[\mathrm{Dom}(x \times u)]$,

$$L|_U = \left(\frac{1}{2} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^i_\alpha u^j_\beta - V\right) \pi_1^*(d\mu_g), \tag{3.1}$$

em que $V \in \mathcal{C}^\infty(F, \mathbb{R})$.

$\Diamond$

Proposição 3.2. *Se* $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *é um sigma-modelo, então*

$$\mathcal{E}_L = \left\{ j^2_p\phi \in J^2\pi : g^{\alpha\beta}\left(u^i_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha} u^i_\gamma + \Gamma^{(h)i}_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta\right) = -h^{ij} \frac{\partial V}{\partial u^j} \right\}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Basta computarmos as equações de Euler-Lagrange com $\mathscr{L} = \frac{1}{2} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^i_\alpha u^j_\beta - V$.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx^\alpha}\left(h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta\right) + \Gamma^{(g)\gamma}_{\alpha\gamma} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} u^k_\alpha u^j_\beta \frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial V}{\partial u^i} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u^k_\alpha \frac{\partial}{\partial u^k} + u^k_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial u^k_\gamma}\right)\left(h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta\right) + \Gamma^{(g)\gamma}_{\alpha\gamma} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} u^k_\alpha u^j_\beta \frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial V}{\partial u^i} \\
&= \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} h_{ij} u^j_\beta + u^k_\alpha \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} g^{\alpha\beta} u^j_\beta + u^k_{\alpha\gamma} \frac{\partial u^j_\beta}{\partial u^k_\gamma} h_{ij} g^{\alpha\beta} + \Gamma^{(g)\gamma}_{\alpha\gamma} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} u^k_\alpha u^j_\beta \frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial V}{\partial u^i}.
\end{aligned}$$

Usando as identidades $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = g_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\gamma\beta} + g_{\beta\eta}\Gamma^\eta_{\gamma\alpha}$ e $\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = -g^{\alpha\eta}\Gamma^\beta_{\eta\gamma} - g^{\beta\eta}\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}$, ambas consequências diretas da definição da conexão de Levi-Civita, temos

$$\begin{aligned}
&-g^{\alpha\eta}\Gamma^{(g)\beta}_{\eta\alpha} h_{ij} u^j_\beta - g^{\beta\eta}\Gamma^{(g)\alpha}_{\eta\alpha} h_{ij} u^j_\beta + u^k_\alpha \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} g^{\alpha\beta} u^j_\beta \\
&+u^j_{\alpha\beta} h_{ij} g^{\alpha\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^j_\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} u^k_\alpha u^j_\beta \frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial V}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g^{\alpha\eta}\Gamma^{(g)\beta}_{\eta\alpha}h_{ij}u^j_\beta + u^k_\alpha\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k}g^{\alpha\beta}u^j_\beta + u^j_{\alpha\beta}h_{ij}g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u^k_\alpha u^j_\beta\frac{\partial h_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial V}{\partial u^i}\\
&= u^j_{\alpha\beta}h_{ij}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\eta}\Gamma^{(g)\beta}_{\eta\alpha}h_{ij}u^j_\beta + h_{il}\Gamma^{(h)l}_{kj}g^{\alpha\beta}u^j_\beta u^k_\alpha + h_{jl}\Gamma^{(h)l}_{ki}g^{\alpha\beta}u^j_\beta u^k_\alpha\\
&\quad -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u^k_\alpha u^j_\beta h_{kl}\Gamma^{(h)l}_{ij} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u^k_\alpha u^j_\beta h_{jl}\Gamma^{(h)l}_{ik} + \frac{\partial V}{\partial u^i}\\
&= u^j_{\alpha\beta}h_{ij}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\eta}\Gamma^{(g)\beta}_{\eta\alpha}h_{ij}u^j_\beta + h_{il}\Gamma^{(h)l}_{kj}g^{\alpha\beta}u^j_\beta u^k_\alpha + \frac{\partial V}{\partial u^i}\\
&= g^{\alpha\beta}h_{ij}\left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl}u^k_\alpha u^l_\beta\right) + \frac{\partial V}{\partial u^i} = 0.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos os lados por h^{ij}, obtemos

$$
g^{\alpha\beta}\left(u^i_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}u^i_\gamma + \Gamma^{(h)i}_{kl}u^k_\alpha u^l_\beta\right) = -h^{ij}\frac{\partial V}{\partial u^j}.
$$

■

Um exemplo de estudo que considera uma tal teoria de campos é o estudo da inflação no universo jovem, em que o campo **inflatão** a satisfaz [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018] [Finn 2020], além de modelar píons e ter diversas aplicações em Teoria das Cordas [Buchbinder e Shapiro 2021].

3.2 Campos Harmônicos

Consideramos agora o que chamaremos de Teoria de Campos Harmônicos.

Definição 3.3. *Uma teoria de campos $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ é* ***harmônica*** *se*

i) (M, g) *e* (F, h) *são variedades pseudo-riemannianas;*

ii) Para cada $x \times u$ *carta de* E *adaptada a* π*, temos em* $U = \pi^{-1}_{1,0}[\mathrm{Dom}(x \times u)]$,

$$
L|_U = \left(\frac{1}{2}h_{ij}g^{\alpha\beta}u^i_\alpha u^j_\beta\right)\pi_1^*(d\mu_g). \tag{3.3}
$$

♢

Essa teoria de campos é um caso especial dos sigma-modelos. Sua lagrangiana é conhecida como **Lagrangiana de Dirichlet** [Helein 2002].

Segue diretamente de 3.2 que a equação de Euler-Lagrange dos campos harmônicos é

$$
\mathcal{E}_L = \left\{j^2_p\phi \in J^2\pi : g^{\alpha\beta}\left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl}u^k_\alpha u^l_\beta\right) = 0\right\} \tag{3.4}
$$

Analisemos a função / operador diferencial

$$
\Delta = g^{\alpha\beta}\left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl}u^k_\alpha u^l_\beta\right), \tag{3.5}
$$

definida em $J^2\mathrm{proj}_1$, no fibrado $(M \times F, \mathrm{proj}_1, M)$.

No caso em que $(F, h_{ij}) = (\mathbb{R}, \delta_{ij})$, obtemos

$$\Delta = g^{\alpha\beta}\left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha} u^j_\gamma\right). \tag{3.6}$$

As soluções de $\mathcal{E}_L$ são então as funções $\phi : M \to \mathbb{R}$ associadas a seções $\tilde{\phi} \in \Gamma$ tais que

$$g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}\partial_\gamma\phi\right) = 0. \tag{3.7}$$

Comparando-se com a equação (2.27), vemos que este é exatamente o laplaciano em M, para funções reais.

Consideremos agora $(M, g) = (\mathbb{R}, \delta)$, mantendo (F, h) genérico. Obtemos

$$\Delta = u^j_{\alpha\beta} + \Gamma^{(h)j}_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta. \tag{3.8}$$

Neste caso, $\mathcal{E}_L$ descreve as curvas $\phi : M \to \mathbb{R}$ tais que

$$(\phi^j)''\phi + \Gamma^{(h)j}_{kl}(\phi^k)'(\phi^l)' = 0, \tag{3.9}$$

e essas curvas são, por definição, as geodésicas de (F, h).

Mais ainda, o leitor familiar com a teoria variacional de subvariedades riemannianas poderá reconhecer que

$$\Delta(\phi) = g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\phi^j - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}\partial_\gamma\phi^j + \Gamma^{(h)j}_{kl}(\partial_\alpha\phi^k)(\partial_\beta\phi^l)\right)\partial_j \tag{3.10}$$

é a segunda forma fundamental de uma imersão, e que uma imersão isométrica satisfazendo $\mathcal{E}_L$ é dita mínima [Helein 2002].

Em vista de tudo isso, consideramos a seguinte

Definição 3.4. *Sejam (M, g) e (F, h) variedades pseudo-riemannianas e $f \in \mathcal{C}^\infty(M, F)$. A* ***hessiana*** *de f é*

$$\mathrm{Hess}(f) = \left(\partial_\alpha\partial_\beta f^j - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}\partial_\gamma f^j + \Gamma^{(h)j}_{kl}(\partial_\alpha f^k)(\partial_\beta f^l)\right)\partial_j \otimes \mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta, \tag{3.11}$$

e o ***laplaciano*** *de f é*

$$\Delta(f) = g^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\partial_\beta f^j - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha}\partial_\gamma f^j + \Gamma^{(h)j}_{kl}(\partial_\alpha f^k)(\partial_\beta f^l)\right)\partial_j. \tag{3.12}$$

$\Diamond$

que é a prometida generalização de 2.8.

Observamos ainda que, para quaisquer $V, W \in \mathcal{X}(M)$, $\mathrm{Hess}(f)$ satisfaz a

$$f = \tau_F \circ \mathrm{Hess}(f)(V, W).$$

3.3 Campos FKP

O que chamaremos de campos FKP são os campos descritos no artigo [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018], introduzidos por Finn, Karamitsos e Pilaftsis em sua abordagem da generalização do levantamento de Eisenhart.

Definição 3.5 (Teoria de Campos FKP)**.** *Uma teoria de campos* $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *é* ***FKP*** *se*

i) (M, g) *e* (F, h) *são variedades pseudo-riemannianas;*

ii) Temos $E = \bigcup_{p \in M} F \times T_pM$ *e* $\pi(f, v) = \tau_M(v)$*.*

iii) Para cada $x \times (u \times \dot{x})$ *carta de* E *adaptada a* π*, sendo* $x \times \dot{x}$ *a carta tangente associada a* x*, temos em* $U = \pi_{1,0}^{-1}[\mathrm{Dom}(x \times (u \times \dot{x}))]$*,*

$$L|_U = \left(\frac{1}{2} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^i_\alpha u^j_\beta + \frac{1}{2} f (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)^2 \right) \pi_1^*(d\mu_g) \tag{3.13}$$

em que $f \in \mathcal{C}^\infty(F, \mathbb{R})$*.*

$\Diamond$

Proposição 3.6. *Se* $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *é uma teoria de campos FKP, então* $\mathcal{E}_L$ *é a união dos subconjuntos de* $J^2\pi$ *em que se verificam*

$$h_{ij} g^{\alpha\beta} \left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha} u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u^i} (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)^2 = 0 \tag{3.14}$$

e

$$\frac{d}{dx^\eta} (f (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)) = 0 \tag{3.15}$$

Demonstração. Para obtermos (3.14), definimos

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^i_\alpha u^j_\beta$$

e

$$\mathscr{K} = \frac{1}{2} f (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)^2$$

Com isso, segue de 2.11 que podemos somar as equações de Euler-Lagrange dadas por $\mathscr{L}$ e $\mathscr{K}$, sendo que já sabemos (3.4). Ficamos com

$$0 = h_{ij} g^{\alpha\beta} \left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha} u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta \right) + \frac{d}{dx^\alpha} \left(\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u^i_\alpha} \right) + \Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u^i_\alpha} - \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial u^i}$$

$$= h_{ij} g^{\alpha\beta} \left(u^j_{\alpha\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\beta\alpha} u^j_\gamma + \Gamma^{(h)j}_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u^i} (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)^2.$$

Para obtermos (3.15), usamos diretamente 2.10. Se

$$\mathscr{J} = \frac{1}{2}h_{ij}g^{\alpha\beta}u^i_\alpha u^j_\beta + \frac{1}{2}f(\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha}\dot{x}^\beta)^2$$

então

$$0 = \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial\mathscr{J}}{\partial\dot{x}^\gamma_\alpha}\right) + \Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathscr{J}}{\partial\dot{x}^\gamma_\alpha} - \frac{\partial\mathscr{J}}{\partial\dot{x}^\gamma}$$

$$= \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{1}{2}f(\dot{x}^\eta_\eta + \Gamma^{(g)\eta}_{\nu\eta}\dot{x}^\nu)\delta^\alpha_\gamma\right) + \Gamma^{(g)\beta}_{\alpha\beta}\frac{1}{2}f(\dot{x}^\eta_\eta + \Gamma^{(g)\eta}_{\nu\eta}\dot{x}^\nu)\delta^\alpha_\gamma - \frac{1}{2}f(\dot{x}^\eta_\eta + \Gamma^{(g)\eta}_{\nu\eta}\dot{x}^\nu)\Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta}\delta^\beta_\alpha$$

$$= \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{1}{2}f(\dot{x}^\eta_\eta + \Gamma^{(g)\eta}_{\nu\eta}\dot{x}^\nu)\right)$$

como desejado. ■

4 O Levantamento de Eisenhart

4.1 O Levantamento de Eisernhart na Mecânica Clássica

4.1.1 Sistemas Mecânicos

Um sistema mecânico clássico é uma teoria de campos, no sentido da Definição 2.5. Para vermos isso concretamente, basta considerarmos o caso $M = \mathbb{R}$, e tomarmos F adequado para o que queremos expressar. Assim, construímos o fibrado $(\mathbb{R} \times F, t, \mathbb{R})$, em que $t = \mathrm{proj}_1$ é o tempo. Podemos pensar em fibrados mais gerais que este. De toda forma, parece adequado não tentar misturar as nomenclaturas além disto, e as chamaremos de **sistemas mecânicos**.

Estamos interessados aqui no caso de sistemas mecânicos **conservativos**.

Definição 4.1. *Uma teoria de campos $(E, \pi, \mathbb{R}, (F, h), L)$ é um* ***sistema mecânico conservativo*** *se*

i) (F, h) *é uma variedade riemanniana,* $E = \mathbb{R} \times F$ *e* $\pi = \mathrm{proj}_1$*;*

ii) Para cada $t \times u$ *carta de* E *adaptada a* π*,* L *é definida por*

$$L = \left(\frac{1}{2} h_{ij} u_t^i u_t^j - V\right) \pi_1^*(dt), \tag{4.1}$$

em que $V \in \mathcal{C}^\infty(F, \mathbb{R})$*, e* dt *é a forma de volume da medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}$*.*

$\Diamond$

Essa é a forma típica da lagrangiana de um sistema conservativo de $\dim F$ graus de liberdade, com as massas das partículas dadas através da métrica h_{ij}, e V uma energia potencial.

Com essa expressão, fica evidente que as teorias mecânicas conservativas são sigma-modelos, e, portanto, suas equações de Euler-Lagrange são (3.2), com $g_{\alpha\beta} = 1$:

$$h_{ij}(u_{tt}^j + \Gamma^{(h)j}_{kl} u_t^k u_t^l) = -\frac{\partial V}{\partial u^i}. \tag{4.2}$$

A interpretação usual dessa equação é que, dada uma curva ϕ em F tal que $s \mapsto (s, \phi)$ é seção de t, a 1-forma $h_{ij}((\phi^j)'' + \Gamma^{(h)j}_{kl} (\phi^k)'(\phi^l)')dx^i$ ao longo de ϕ é "massa vezes aceleração" na Segunda Lei de Newton, ou, mais adequadamente neste contexto, a variação do momento, enquanto $-\frac{\partial V}{\partial u^i} dx^i$, também uma 1-forma ao longo de ϕ, é a força agindo sobre o sistema.

Como de costume, queremos dizer que uma partícula com aceleração nula é livre.

Definição 4.2. *Seja $\pi \equiv (E, \pi, \mathbb{R}, (F, h), L)$ um sistema mecânico. π é dito **livre** se toda solução $\phi \in \Gamma(\pi)$ de suas equações de Euler-Lagrange satisfizer*

$$(\phi^j)'' + \Gamma^{(h)j}_{kl}(\phi^k)'(\phi^l)' = 0. \tag{4.3}$$

$\Diamond$

4.1.2 O Levantamento

Buscamos agora precisar o que se entende por um levantamento de Eisenhart de um sistema mecânico. Nas palavras de Eisenhart,

> *"In this paper we show that the trajectories of a general holonomic conservative system in classical dynamics can be put into correspondence with the geodesics of a suitable Riemannian manifold."* [Eisenhart 1928]

Com base nisso, e nas exposições do formalismo em [Eisenhart 1928], [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018] e [Cariglia e Alves 2015], formulamos a seguinte definição do que se trata o levantamento.

Definição 4.3. *Seja $(E, \pi, \mathbb{R}, (F, h), L)$ um sistema mecânico conservativo. Seu **levantamento de Eisenhart** é o sistema mecânico $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, \mathbb{R}, (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L})$ em que*

i) *$(\tilde{F}, \tilde{h})$ é a variedade riemanniana dada por $\tilde{F} = F \times \mathbb{R}$, e, para todos $(f, r) \in F \times \mathbb{R}$ e todos $(v, w), (v', w') \in T_{(f,r)}F \times \mathbb{R}$,*

$$\tilde{h}(f, r)((v, w), (v', w')) = h(f)(v, v') + \frac{1}{2V(f)}\delta(r)(w, w'), \tag{4.4}$$

em que δ denota o produto interno em $\mathbb{R}$;

ii) *$\tilde{E} = \mathbb{R} \times \tilde{F}$ e $\tilde{\pi} = \mathrm{proj}_1$;*

iii) *Para cada $t \times (u \times y)$ carta de $\tilde{E}$ adaptada a $\tilde{\pi}$, $\tilde{L}$ é definida por*

$$L = \left(\frac{1}{2}h_{ij}u^i_t u^j_t + \frac{1}{2V}y^2_t\right)\pi^*_1(dt). \tag{4.5}$$

$\Diamond$

O item $i)$ na definição nos descreve a métrica $\tilde{h}$ em $\tilde{F}$, que pode ser escrita na carta $t \times (u \times y)$ como

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} \tag{4.6}$$

$$\tilde{h}_{iy} = 0 \tag{4.7}$$

$$\tilde{h}_{yy} = \frac{1}{2V} \tag{4.8}$$

Ela faz com que F e $\mathbb{R}$ dentro de $\tilde{F}$ sejam ortogonais.

Incidentalmente, um levantamento de Eisenhart é uma teoria de campos harmônica e também uma teoria de campos FKP, como se pode perceber comparando (4.5) com (3.3) e (4.24), e considerando que espaços vetoriais podem ser identificados com seus espaços tangentes. Suas equações de Euler-Lagrange podem ser calculadas a partir de 3.6, e são

$$u^i_{tt} + \Gamma^{(h)i}_{kl} u^k_t u^l_t - \frac{1}{2V^2} h^{ij} \frac{\partial V}{\partial u^j} (y_t)^2 = 0 \tag{4.9}$$

e

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2V} y_t\right) = -\frac{1}{2V^2} \frac{\partial V}{\partial u^j} u^j_t y_t + \frac{1}{2V} y_{tt}, \tag{4.10}$$

dando

$$y_{tt} - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial u^j} u^j_t y_t = 0 \tag{4.11}$$

Como as equações (4.9) e (4.11) são equações das geodésicas de $\tilde{h}$, elas nos dizem diretamente os símbolos de Christoffel dessa métrica

$$\Gamma^{(\tilde{h})i}_{kl} = \Gamma^{(h)i}_{kl} \tag{4.12}$$

$$\Gamma^{(\tilde{h})i}_{ky} = 0 \tag{4.13}$$

$$\Gamma^{(\tilde{h})i}_{yy} = -\frac{1}{2} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \tag{4.14}$$

$$\Gamma^{(\tilde{h})y}_{kl} = 0 \tag{4.15}$$

$$\Gamma^{(\tilde{h})y}_{ky} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial u^k} \tag{4.16}$$

$$\Gamma^{(\tilde{h})y}_{yy} = 0 \tag{4.17}$$

Em posse dessas informações, vamos entender o interesse na construção de Eisenhart.

Como dissemos anteriormente, o objetivo do levantamento é obter uma nova teoria de campos / sistema mecânico $\tilde{\pi}$, sendo este caracterizado por ser livre, e ainda preservar a física do sistema original. Mais precisamente, essa relação pode ser representada através do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (F \times \mathbb{R}, \tilde{h}) \arrow[dd, "\epsilon"] \\
\mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{\phi}"] \arrow[dr, "\phi"'] & \\
 & (F, h)
\end{tikzcd}$$

em que a função $\epsilon(f, r) = f$ nos diz a relação entre as curvas $\tilde{\phi}$ associadas a soluções do sistema mecânico $\tilde{\pi}$, que são geodésicas por construção, e as curvas ϕ associadas a soluções de π. Como as $\tilde{\phi}$ são geodésicas de $\tilde{h}$, essas curvas satisfazem às equações

$$(\tilde{\phi}^i)'' + \Gamma^{(\tilde{h})i}_{kl}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^l)' + 2\Gamma^{(\tilde{h})i}_{ky}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^y)' + \Gamma^{(\tilde{h})i}_{yy}((\tilde{\phi}^y)')^2 = 0 \tag{4.18}$$

$$(\tilde{\phi}^y)'' + \Gamma^{(\tilde{h})y}_{kl}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^l)' + 2\Gamma^{(\tilde{h})y}_{ky}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^y)' + \Gamma^{(\tilde{h})y}_{yy}((\tilde{\phi}^y)')^2 = 0 \tag{4.19}$$

Por outro lado, a função ϵ e o diagrama nos dizem que $\tilde{\phi}^i = \phi^i$ e, como ϕ é associada a uma solução de π,

$$(\tilde{\phi}^i)'' + \Gamma^{(\tilde{h})i}_{kl}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^l)' = -h^{ij}\frac{\partial V}{\partial u^j} \tag{4.20}$$

Substituindo (4.20) em (4.18), obtemos

$$2\Gamma^{(\tilde{h})i}_{ky}(\tilde{\phi}^k)'(\tilde{\phi}^y)' + \Gamma^{(\tilde{h})i}_{yy}((\tilde{\phi}^y)')^2 = h^{ij}\frac{\partial V}{\partial u^j} \tag{4.21}$$

A escolha da métrica $\tilde{h}$ do levantamento de Eisenhart, quando aplicada a (4.21), dá

$$\frac{1}{2V^2}h^{ij}\frac{\partial V}{\partial u^j}((\tilde{\phi}^y)')^2 = h^{ij}\frac{\partial V}{\partial u^j}, \tag{4.22}$$

i.e.,

$$((\tilde{\phi}^y)')^2 = 2V^2 \tag{4.23}$$

Graças a isso, vemos que essa escolha de métrica $\tilde{h}$, juntamente com a condição de projeção ϵ, transforma as equações (4.18) e (4.19) em, respectivamente, (4.9) e (4.11). Com isso, recupera-se a dinâmica original ϕ, de aceleração possivelmente não-nula, através da projeção das geodésicas $\tilde{\phi}$ por ϵ.

4.2 O Levantamento de Eisenhart-FKP

Em [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018], Finn, Karamitsos e Pilaftsis buscaram uma generalização adequada do levantamento de Eisenhart discutido na seção anterior para o contexto mais geral, em que, em vez de inicialmente termos um sistema mecânico conservativo, temos um sigma-modelo qualquer.

A resposta por eles apresentada é que, dado um sigma-modelo, seu levantamento, que chamaremos de **levantamento de Eisenhart-FKP**, é um que torna a teoria de campos escalares original em uma teoria de campos escalares e vetoriais. Além disso, ele é unicamente determinado por construção de sua forma explícita, através da escolha de invariantes diferenciais adequados.

Definição 4.4 (Levantamento de Eisenhart-KFP)**.** *Seja* $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *um sigma-modelo. Seu* ***levantamento de Eisenhart-FKP*** *é a teoria de campos* $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, (M, g), (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L})$ *em que*

i) $\tilde{E} = \bigcup_{p \in M} F \times T_pM$

ii) $\tilde{\pi} : (f, v) \in \tilde{E} \mapsto \tau_M(v) \in M$

iii) Para cada $x \times (u \times \dot{x})$ carta de $\tilde{E}$ adaptada a $\tilde{\pi}$, $\tilde{L}$ é definida por

$$\tilde{L}|_U = \left(\frac{1}{2} h_{ij} g^{\alpha\beta} u^i_\alpha u^j_\beta + \frac{1}{2V} (\dot{x}^\alpha_\alpha + \Gamma^{(g)\alpha}_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta)^2 \right) \pi_1^*(d\mu_g) \tag{4.24}$$

$\Diamond$

Dessa definição, vemos imediatamente que o levantamento de Eisenhart-FKP de um sigma-modelo é uma teoria de campos FKP, como visto em 3.5.

4.3 Discussão e Alternativas

Há uma diferença importante entre o levantamento de Eisenhart-FKP e o levantamento original, observada pelos próprios FKP, que a expressam como segue:

> *"There is a fundamental difference between this result and the one obtained in the previous formulation for one-dimensional fields. In one dimension, we were able to recreate the effects of a potential by simply extending the field space. However, in four dimensions, we must fundamentally alter the form of the kinetic terms, since $H^{\mu\nu}_{AB}$ cannot be factorized into a spacetime metric $g_{\mu\nu}$ and a field space metric G_{AB}, i.e., $H^{\mu\nu}_{AB} \neq g^{\mu\nu} G_{AB}$."* [Finn, Karamitsos e Pilaftsis 2018]

Nesse artigo, eles escrevem a lagrangiana do seu levantamento de Eisenhart-KFP como

$$L = \frac{1}{2} H^{\mu\nu}_{AB} \phi^A_\mu \phi^B_\nu \pi_1^*(d\mu_g) \tag{4.25}$$

em que as coordenadas ϕ^A correspondem, na notação deste trabalho, a todas as coordenadas u^i e $\dot{x}^\alpha$.

Com isso, eles querem dizer que a teoria de campos dada em 3.5 não necessariamente admite um espaço $(\tilde{F}, \tilde{h})$ de campos escalares, tal que o fibrado da teoria tenha a forma $\tilde{E} = M \times \tilde{F}$ para algum espaço de campos $\tilde{F}$. Isso acontece no levantamento original, em que $\tilde{F} = F \times \mathbb{R}$.

Assim, embora, do ponto de vista do formalismo, a teoria de campos FKP seja perfeitamente válida como teoria de campos, nem todas as propriedades originais do sigma-modelo são capturadas pela sua generalização proposta. Isso leva ao questionamento se as propriedades não preservadas são, em algum sentido, tão relevantes quanto as que de fato são preservadas. I.e., quais as propriedades fundamentais que descrevem o levantamento?

Movidos por isso, buscamos responder à pergunta se existe outra generalização do levantamento de Eisenhart, diferente do levantamento de Eisenhart-FKP, na qual o fibrado $\tilde{E}$ seja da forma $\tilde{E} = M \times \tilde{F}$, para algum $\tilde{F}$.

Para podermos explorar as possibilidades de outros levantamentos de Eisenhart, precisamos primeiro entender com clareza o que é *um* "levantamento de Eisenhart". Decidimos explorar o que poderia ser uma generalização que permanece tratando apenas de campos escalares. Propomos a seguinte

Definição 4.5 (Levantamento de Eisenhart)**.** *Seja* $\pi \equiv (E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *um sigma-modelo. Um* ***levantamento de Eisenhart*** *de* π *é um par* $((\tilde{E}, \tilde{\pi}, (M, g), (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L}), \epsilon)$*, em que*

i) $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, (M, g), (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L})$ *é uma teoria de campos harmônicos;*

ii) $\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{F}, F)$ *é tal que, para toda solução* ϕ *de* $\mathcal{E}_L$*, existe uma solução* $\tilde{\phi}$ *de* $\mathcal{E}_{\tilde{L}}$ *satisfazendo*

$$\phi = \epsilon \circ \tilde{\phi}. \tag{4.26}$$

$\lozenge$

Algumas observações são necessárias.

O objetivo do levantamento é produzir uma teoria de campos "livres". Entretanto, diferentemente de quando lidamos com mecânica, não há *uma* definição universal de quais lagrangianas caracterizam campos livres.

Na definição anterior, requeremos que o levantamento seja uma teoria de campos harmônicos, e através disso, estamos também definindo o que se entende por campo livre, nesse contexto. O que gostaríamos de dizer é

i') $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, (M, g), (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L})$ *é uma teoria de campos* livres*;*

Uma escolha similar também foi implicitamente feita por FKP, mas nunca explicitada. Por que uma teoria de campos FKP (Definição 3.5) caracteriza campos "livres"?

Entendemos que existem caracterizações de campos livres como campos cujas lagrangianas são quadráticas nas primeiras derivadas [Folland 2008] [Buchbinder e Shapiro 2021]. Elas podem assumir algumas diferentes formas. Por exemplo,

$$L = \frac{1}{4}[\mathrm{d}A]_{\alpha\beta}[\mathrm{d}A]^{\alpha\beta}\pi_1^*(d\mu_g) := \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}[(u^\alpha)_\beta - (u^\beta)_\alpha]g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}[(u^\gamma)_\delta - (u^\delta)_\gamma]\pi_1^*(d\mu_g), \tag{4.27}$$

para o campo eletromagnético $A \in \Lambda^1(M)$ (ou, mais geralmente, "campos de Yang-Mills", que são 1-formas de conexões A em fibrados principais; neste caso é necessário a escolha de um produto interno adequado $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na álgebra de lie do grupo de calibre, nos permitindo escrever $L = \frac{1}{4}\langle[\mathrm{d}A]_{\alpha\beta}, [\mathrm{d}A]^{\alpha\beta}\rangle\pi_1^*(d\mu_g)$ [Folland 2008]). Outro exemplo são os campos de Klein-Gordon, para os quais consideramos que $F = \mathbb{R}^n$, e

$$L = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta}u^i_\alpha u^j_\beta - m^2(u^i)^2\right)\pi_1^*(d\mu_g), \tag{4.28}$$

é sua lagrangiana [Buchbinder e Shapiro 2021] [Folland 2008], que também é um sigma-modelo.

Entretanto, neste trabalho, nos restringiremos ao significado de “campo escalar livre” como campo harmônico.

O segundo item da definição descreve o mesmo diagrama comutativo que tínhamos no levantamento de Eisenhart, no contexto da mecânica. Entretanto, ele permite que escolhamos a função ϵ em vez de termos sempre $\epsilon : (f, r) \in F \times \mathbb{R} \mapsto f \in F$.

Agora, buscamos uma teoria de campos, que seja um levantamento de Eisenhart, no sentido da usaremos a Definição 4.5.

Graças à liberdade de escolha de ϵ, podemos estudar o sistema em termos gerais e tentar encontrar soluções.

No que segue, denotaremos por $x \times u$ uma carta de E adaptada a π e por $x \times v$ uma carta de $\tilde{E}$ adaptada a $\tilde{\pi}$, distinguindo também entre u^i com índices minúsculos e v^I com índices maiúsculos.

Proposição 4.6. *Se* $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ *é um sigma-modelo e* $((\tilde{E}, \tilde{\pi}, (M, g), (\tilde{F}, \tilde{h}), \tilde{L}), \epsilon)$ *é um levantamento de Eisenhart seu, então, para toda* ϕ *solução de* $\mathcal{E}_L$*, se* $\tilde{\phi}$ *é solução de* $\mathcal{E}_{\tilde{L}}$ *satisfazendo* (4.26)*, então*

$$\left(\frac{\partial^2 \epsilon^k}{\partial v^I \partial v^J} - \Gamma^{(\tilde{h})K}_{IJ} \frac{\partial \epsilon^k}{\partial v^K} + \Gamma^{(h)k}_{ij} \frac{\partial \epsilon^i}{\partial v^I} \frac{\partial \epsilon^j}{\partial v^J}\right) \frac{\partial \tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}^J}{\partial x^\beta} = -h^{kl} \partial_l V. \tag{4.29}$$

Demonstração. Se $(E, \pi, (M, g), (F, h), L)$ é um sigma-modelo e ϕ é uma solução de suas equações de Euler-Lagrange. De 3.2, temos que

$$g^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta (\phi^k) - \Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta} \partial_\alpha (\phi^k) + \Gamma^{(h)k}_{ij} \partial_\beta (\phi^j) \partial_\beta (\phi^j)\right) = -h^{kl} \partial_l V. \tag{4.30}$$

Como $(\tilde{\pi}, \epsilon)$ é um levantamento de Eisenhart de π, então existe $\tilde{\phi}$ satisfazendo

$$\phi = \epsilon \circ \tilde{\phi} \tag{4.31}$$

e

$$g^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha \partial_\beta \tilde{\phi}^K) - \Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta} \partial_\alpha \tilde{\phi}^K + \Gamma^{(\tilde{h})K}_{IJ} \partial_\alpha (\tilde{\phi}^I) \partial_\beta (\tilde{\phi}^J)\right) = 0. \tag{4.32}$$

De (4.30) e (4.31), segue que

$$g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 (\epsilon \circ \tilde{\phi})^k}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta} \frac{\partial (\epsilon \circ \tilde{\phi})^k}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{(h)k}_{ij} \frac{\partial (\epsilon \circ \tilde{\phi})^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (\epsilon \circ \tilde{\phi})^j}{\partial x^\beta}\right) = -h^{kl} \partial_l V, \tag{4.33}$$

de que segue

$$g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \epsilon^k}{\partial v^I \partial v^J} \frac{\partial \tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{\phi}^J}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \epsilon^k}{\partial v^I} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta} \frac{\partial \epsilon^k}{\partial v^I} \frac{\partial \tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{(h)k}_{ij} \frac{\partial \epsilon^i}{\partial v^I} \frac{\partial \tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \epsilon^j}{\partial v^J} \frac{\partial \tilde{\phi}^J}{\partial x^\beta}\right) = -h^{kl} \partial_l V, \tag{4.34}$$

e

$$g^{\alpha\beta}\left[\left(\frac{\partial^2\epsilon^k}{\partial v^I\partial v^J}+\Gamma^{(h)k}_{ij}\frac{\partial\epsilon^i}{\partial v^I}\frac{\partial\epsilon^j}{\partial v^J}\right)\frac{\partial\tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tilde{\phi}^J}{\partial x^\beta}+\frac{\partial\epsilon^k}{\partial v^I}\left(\frac{\partial^2\tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}-\Gamma^{(g)\gamma}_{\gamma\beta}\frac{\partial\tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha}\right)\right]=-h^{kl}\partial_l V, \tag{4.35}$$

Usando (4.32), substituimos o termo no segundo parênteses e obtemos

$$\left(\frac{\partial^2\epsilon^k}{\partial v^I\partial v^J}-\Gamma^{(\tilde{h})K}_{IJ}\frac{\partial\epsilon^k}{\partial v^K}+\Gamma^{(h)k}_{ij}\frac{\partial\epsilon^i}{\partial v^I}\frac{\partial\epsilon^j}{\partial v^J}\right)\frac{\partial\tilde{\phi}^I}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\tilde{\phi}^J}{\partial x^\beta}=-h^{kl}\partial_l V, \tag{4.36}$$

como desejado. ■

A equação (4.29) não nos é estranha. O termo entre parênteses é exatamente a hessiana de ϵ. Essa hessiana pode ser interpretada como um tensor no produto tensorial do pullback do fibrado tangente de $\tilde{F}$ por ϵ com os tensores 2-covariantes em F. Nesse caso, uma notação mais compacta para a equação (4.29) poderia ser que as funções ϕ, $\tilde{\phi}$ e ϵ, e as métricas h e $\tilde{h}$ devem satisfazer a

$$\tilde{\phi}^*(\mathrm{Hess}(\epsilon))=-\mathrm{grad}V\circ\phi. \tag{4.37}$$

Podemos então interpretar a nova formulação como segue: dados o sigma-modelo $(E,\pi,(M,g),(F,h),L)$, a existência de um levantamento de Eisenhart dependerá se existem

- Uma variedade $\tilde{F}$;
- Uma métrica pseudo-riemanniana $\tilde{h}$ em $\tilde{F}$;
- Uma função $\epsilon:\tilde{F}\to F$;
- Uma família Φ de funções $\tilde{\phi}:M\to\tilde{F}$

satisfazendo (4.29). O problema pode ser colocado dessa forma, mas ainda admite variações: por exemplo, podemos supor que conhecemos $\tilde{F}$, ϵ e Φ, e tentar com isso achar a métrica $\tilde{h}$.

Notamos ainda que (4.29) pode permitir ou não a existência de levantamentos de Eisenhart com $\tilde{F}$ de dimensão qualquer, não necessariamente maior que a dimensão de F, como foi o caso com Eisenhart e Eisenhart-FKP.

Um caso especial do levantamento com essas definições, que consideramos ser de particular interesse geométrico, é quando $F=\tilde{F}$, $M=\mathbb{R}$, $\epsilon=\mathrm{id}_F$, e nos é dada uma família de curvas Φ em F, que são soluções de um sistema mecânico conservativo. Nesse caso, a pergunta de existência de soluções de (4.29) passa a ser “com esses dados, é possível encontrar uma métrica $\tilde{h}$ *na própria* F, tal que essas curvas são uma família de geodésicas suas?”

Em suma, aqui temos um ponto de partida para investigar outras possíveis abordagens dos levantamentos.

5 Conclusão

O estudo desenvolvido para este trabalho atinge um objetivo triplo, que consideramos muito importante.

O primeiro, é o entendimento das estruturas matemáticas fundamentais associadas às teorias de campos. Esse entendimento permite a formulação de questionamentos que podem não estar claros ou passar despercebidos quando não se pensa sobre as propriedades dos objetos geométricos que se está empregando na análise de sistemas físicos.

Além disso, conseguimos aplicar esse entendimento para estudar sob um novo olhar o que os levantamentos de Eisenhart já considerados na literatura representam, suas diferentes propriedades. Apesar dos sigma-modelos serem principalmente introduzidos como "modelos-brinquedo", eles têm aplicações em pesquisa contemporânea, tanto fundamental quanto efetiva.

Finalmente, como um Trabalho de Conclusão de Curso, acreditamos que este texto represente uma demonstração do empenho de seu autor em buscar clareza no seu entendimento dos conceitos físicos e matemáticos pertinentes, bem como desenvolver e dialogar acerca deles.

Apesar disso, existem ainda ideias não completamente claras, e ideias não discutidas. Por exemplo, emergindo diretamente da própria ideia de se generalizar o levantamento para teorias de campos, ainda não se sabe se existem levantamentos de Eisenhart para teorias de campos que não são sigma-modelos, e qual o seu significado. Pode ser ainda que a Definição 4.5 não se mostre a mais adequada no futuro, e precise ser reformulada. Ou, com essa mesma definição, haja uma terceira maneira de generalizar o levantamento de Eisenhart. No caso especial da Equação de Klein-Gordon, o que a existência de soluções da equação (4.29) implicaria para o conceito de massa de um campo?

Responder a essas e outras questões será fundamental para entendermos o escopo completo da ideia dos levantamentos.

A Alguns Conceitos de Geometria Diferencial e Riemanniana

Embora não seja prático nem possível assumir que o leitor tenha familiaridade com todos os conceitos de geometria diferencial, relegamos a este apêndice o que consideramos ser mais comumente tratado na literatura básica sobre Geometria Diferencial almejada aos físicos, para a finalidade de consulta e notação, caso necessário. Se isto eventualmente não for suficiente, recomendamos a consulta a [Lee 2002] e [Lee 1997].

Usamos algumas vezes o conceito da **derivada de deRham**, apenas em coordenadas, o que nos será suficiente. Dada uma k-forma diferencial $\omega = f\mathrm{d}x^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\alpha_k}$, em que $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, sua derivada de deRham é

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\alpha_k} \tag{A.1}$$

Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ e T um tensor r-covariante em N **pullback** de T por f é o tensor r-covariante em M dado por

$$f^*(T)(V_1, ..., V_r) = T(df(V_1), ..., df(V_r)) \tag{A.2}$$

para todos os campos vetoriais $V_1, ..., V_r$ em M, em que df denota a derivada de f.

Uma **métrica** pseudo-riemanniana g é um tensor 2-covariante numa variedade M, satisfazendo, para todos os pontos $p \in M$ e vetores tangentes $v, w \in T_pM$, a

i) $g(v, w) = g(w, v)$

ii) A função $\flat : v \in T_pM \mapsto (w \in T_pM \mapsto g(v, w) \in \mathbb{R}) \in T_p^*M$ é um isomorfismo.

O isomorfismo do item ii) garante que a matriz $g_{\alpha\beta}$ possui uma inversa $g^{\alpha\beta}$ e permite, entre outras coisas, as usuais manipulações de índices do tipo

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \tag{A.3}$$

definindo, por exemplo, um vetor associado ao campo eletromagnético, que é uma 1-forma.

Uma **conexão de Koszul** ∇ é um operador que, atuando sobre campos vetoriais X, Y, Z e funções reais f definidos numa variedade, satisfaz a

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_X fY = \mathrm{d}f(X)Y + f\nabla_X Y$

iii) $\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$

e pode ser estendida a atuar sobre tensores T r-covariantes e s-contravariantes por

$$\nabla_X T(V_1, ..., V_r, \omega_1, ..., \omega_s) = X(T(V_1, ..., V_r, \omega_1, ..., \omega_s))$$

$$-T(\nabla_X V_1, ..., V_r, \omega_1, ..., \omega_s)$$

$$-...$$

$$-T(V_1, ..., \nabla_X V_r, \omega_1, ..., \omega_s)$$

$$+T(V_1, ..., V_r, \nabla_X \omega_1, ..., \omega_s)$$

$$+...$$

$$+T(V_1, ..., V_r, \omega_1, ..., \nabla_X \omega_s)$$

para todos os campos vetoriais $V_1, ..., V_r$ e 1-formas $\omega_1, ..., \omega_s$.

Se X, Y são campos vetoriais, $\nabla_X Y$ é também um campo vetorial. Os **símbolos de Christoffel** de uma conexão são definidos por

$$\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma \tag{A.4}$$

A notação comum para conexões em textos de física é facilmente entendida se escrevemos $\nabla_\alpha X^\beta := [\nabla_{\partial_\alpha} X]^\beta$.

A **conexão de Levi-Civita** associada a uma variedade pseudo-riemanniana (M, g) é a única conexão de Koszul que, para todos os campos vetoriais X, Y em M, satisfaz ainda a

i) $\nabla_X g = 0$

ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

em que $[X, Y]$ denota o colchete de Lie. Essa conexão é descrita em qualquer carta de M por

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \tag{A.5}$$

Referências

BUCHBINDER, I.; SHAPIRO, I. *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*. [S.l.]: Oxford University Press, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 34, 44 e 45.

CARIGLIA, M.; ALVES, F. K. The eisenhart lift: a didactical introduction of modern geometrical concepts from hamiltonian dynamics. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 36, n. 2, p. 025018, fev. 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/2/025018>. Citado na página 40.

CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1SKFQgAACAAJ>. Citado na página 22.

EELLS, J.; SAMPSON, J. H. Harmonic mappings of riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 86, n. 1, p. 109, jan. 1964. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2373037>. Citado na página 29.

EISENHART, L. P. Dynamical trajectories and geodesics. *The Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 30, n. 1/4, p. 591, 1928. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1968307>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 23 e 40.

FINN, K. Initial conditions of inflation in a Bianchi I universe. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 6, mar. 2020. Disponível em: <https://link.aps.org/licenses/aps-default-license>. Citado na página 34.

FINN, K.; KARAMITSOS, S.; PILAFTSIS, A. Eisenhart lift for field theories. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 1, jul. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.016015>. Citado 6 vezes nas páginas 23, 34, 36, 40, 42 e 43.

FLANDERS, H. Differentiation under the integral sign. *The American Mathematical Monthly*, JSTOR, v. 80, n. 6, p. 615, jun. 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2319163>. Citado na página 30.

FOLLAND, G. *Quantum Field Theory*. American Mathematical Society, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/surv/149>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

HELEIN, F. *Harmonic Maps, Conservation Laws and Moving Frames*. 2. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

LEE, J. M. *Riemannian Manifolds -An Introduction to Curvature*. [S.l.]: Springer, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 51.

LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 51.

MARSDEN, J.; HUGHES, T. *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York: Dover, 1994. Citado na página 22.

OLVER, P. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. 2. ed. New York: Springer, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.

SAUNDERS, D. *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 29.