

Henrique Matheus Gauy

**Autogravitação para espaços-tempos estáticos e  
isotrópicos com aplicações a modelos de  
interesse astrofísico**

Brasil

30 de janeiro de 2017



Henrique Matheus Gauy

**Autogravitação para espaços-tempos estáticos e  
isotrópicos com aplicações a modelos de interesse  
astrofísico**

Monografia a respeito de sistemas autogravitantes no contexto da teoria da relatividade geral e aplicações a modelos de interesse astrofísico.

Universidade Federal de São Carlos – UFSCAR

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro

Brasil

30 de janeiro de 2017

Henrique Matheus Gauy

**Autogravitação para espaços-tempos estáticos e isotrópicos com aplicações a modelos de interesse astrofísico**

Monografia a respeito de sistemas autogravitantes no contexto da teoria da relatividade geral e aplicações a modelos de interesse astrofísico.

Trabalho aprovado. Brasil, 24 de novembro de 2012:

---

**Prof. Dr. Javier Fernando Ramos**  
Caro  
Orientador

---

**Professor**  
Convidado 1

---

**Professor**  
Convidado 2

Brasil  
30 de janeiro de 2017

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família pelo incentivo e apoio incondicional. Ao meu orientador Javier Fernando Ramos Caro pela orientação, correções e incentivos. E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.



# Resumo

Neste trabalho considero as equações da autogravitação para sistemas sem colisões, estáticos e isotrópicos no contexto da teoria da relatividade geral. A partir destas apresento a forma da função de distribuição quando consideramos duas equações de estado, e demonstro a impossibilidade de modelos auto consistentes com equações de estado da forma  $P^T = kP^r$  e  $P^r = w\rho$ , quando  $k$  for um semi inteiro. Como uma aplicação de interesse na astrofísica, pretendo estender os modelos newtonianos pertencentes a família Hypervirial para a relatividade geral, dando um enfoque ao modelo de Hernquist. Para tal utilizo uma solução análoga às soluções de fluidos perfeitos estáticos com simetria esférica, a qual, através das equações da autogravitação, permite obter uma função de distribuição consistente com a mencionada métrica. Apresento como estabelecer um limite para a massa do sistema usando esta função de distribuição.

**Palavras-chave:** Autogravitação. Relatividade. Hypervirial.





# Lista de ilustrações

Figura 1 –  $\tilde{F}_n = 2^5 m^5 \pi^3 G \phi_0^{2n} a^n \mathcal{F}_n$ , para a extensão relativística da família Hypervirial como função de  $\epsilon = E/m$  e  $l = L/m = 2$ , para diferentes valores de  $n$ :  $n = 1$  (Vermelha),  $n = 2$  (Azul),  $n = 3$  (Verde),  $n = 5$  (Laranja),  $n = 7$  (Roxa),  $n = 9$  (Marrom). . . . . 50



# Lista de símbolos

$\mathcal{F}$	Função de distribuição
$\mathcal{H}$	Hamiltoniana
$\mathcal{L}$	Lagrangiana
$\mathcal{P}$	Momento linear
$E$	Energia
$L$	Momento angular
$c$	Velocidade da Luz
$m$	Massa
$M_{\text{total}}$	Massa Total
$G$	Constante Gravitacional
$\rho$	densidade de massa ou de energia
$\phi$	potencial gravitacional
$t$	Coordenada Temporal
$r$	Coordenada radial
$\theta$ e $\psi$	Coordenadas angulares
$J$	Jacobiano
$\sigma_{ij}^2$	Dispersão de Velocidades
$P^r$	Pressão Radial
$P^T$	Pressão Transversal
$g_{\mu\nu}$	Métrica
$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$	Conexão da Métrica
$R_{\mu\nu\sigma\kappa}$	Tensor de Curvatura
$T^{\mu\nu}$	Tensor de Energia Momento

$\tau$	Tempo Próprio
$\Gamma$	Função Gama
$\mathbf{I}_{(x,1)}^u$	Integral Fracionária
$\mathbf{D}_{(t,1)}^\mu$	Derivada Fracionária

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>AUTOGRAVITAÇÃO NEWTONIANA</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>AUTOGRAVITAÇÃO NA TEORIA NEWTONIANA</b>	<b>17</b>
2.1	Sistema de Vlasov-Poisson	17
2.2	Equações de Movimento e Integrais de Movimento	18
2.3	Simplificando a Equação de Autogravitação	19
2.4	Velocidade Média e o Tensor de Dispersão de Velocidades	20
2.5	Família Hypervirial	22
2.5.1	Modelo de Hernquist	23
<b>II</b>	<b>AUTOGRAVITAÇÃO RELATIVÍSTICA</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>O ESPAÇO TEMPO ESTÁTICO E ISOTRÓPICO</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução a relatividade	27
3.2	A métrica isotrópica e estática	27
3.3	Integrais de Movimento para a queda livre	28
3.3.1	Integral de movimento do tipo energia	29
3.3.2	Integral de movimento do tipo momento angular	31
3.3.3	Equações de Movimento	32
3.4	Condições de Energia	32
<b>4</b>	<b>AUTOGRAVITAÇÃO NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>35</b>
4.1	Sistema de Vlasov-Einstein	35
4.2	As equações da autogravitação	36
4.3	Determinando a DF por meio de equações de estado	39
4.3.1	Conservação do tensor de energia momento	39
4.3.2	Modelos com $P^T = kP^r$	39
4.3.3	Modelos com $P^T = kP^r$ e $P^r = w(r)\rho$	42
<b>5</b>	<b>FAMÍLIA HYPERVIRIAL NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>45</b>
<b>5.1</b>	<b>A Métrica</b>	<b>45</b>
5.1.1	Tensor de energia e momento	46
5.1.2	Condições de energia	47

5.2	Função de distribuição . . . . .	47
5.3	Determinando o valor máximo de $\phi_0$ e a massa total do sistema . .	50
6	CONCLUSÃO . . . . .	53
	REFERÊNCIAS . . . . .	55

# 1 Introdução

Na tentativa de descrever galáxias nos deparamos com a imensidão do número de componentes, sendo algumas galáxias compostas por mais de  $10^{12}$  estrelas. Tal quantidade astronômica de constituintes torna impraticável tratá-la como uma coleção de pontos massivos, portanto por praticidade trataremos tais problemas de uma forma estatística. Mas do ponto de vista estatístico, tal problema pode ser interpretado de uma forma contínua, assim como faríamos com um fluido, a densidade de massa e o potencial que descrevem o sistema serão contínuos e suaves por toda a região, tal aproximação permite desenvolver modelos analíticos que representem sistemas astrofísicos com boa precisão, e a partir deste momento chamaremos estes por autogravitantes já que consideraremos sua evolução apenas governados por forças gravitacionais. Modelaremos tais sistemas por meio da teoria cinética, cuja proposta é determinar a evolução de sistemas de muitos componentes, em geral, governados por uma equação cinética ou de fluido. Nos casos em que trataremos a equação governante será a de Vlasov, já que desconsideraremos colisões, que em conjunto com a equação de Poisson ou de Einstein caracterizam nosso sistema autogravitante.

Para simplificar os modelos consideraremos sistemas de simetria esférica, estes não são apenas boas ferramentas para entendermos a estrutura, que podem ser estendidos a simetrias mais gerais, de modelos autogravitantes, mas também por que muitos objetos de estudo da astrofísica e cosmologia apresentam, com boa aproximação, simetria esférica, por exemplo clusters de galáxias, clusters globulares e até mesmo algumas galáxias elípticas, e por não termos muitas informações a respeito das distribuições do conteúdo escuro de galáxias estes são tomados como tendo simetria esférica (EVANS; AN, 2005; EVANS; AN, 2006; AN; EVANS, 2005; NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996; HERNQUIST, 1990). E em geral, o comportamento de sistema estelares é satisfatoriamente descrito pelas leis de Newton, portanto muitos modelos atuais ainda são feitos no contexto da gravitação newtoniana. Porém em alguns casos os modelos newtonianos se mostram inadequados, como por exemplo para o núcleo galáctico ou clusters globulares, onde efeitos relativísticos se tornam relevantes. Mas mesmo no contexto relativístico não descartaremos o sucesso da teoria newtoniana, então construiremos extensões relativísticas de modelos já muito estudados na literatura, como é o caso da família Hypervirial, que entraremos em mais detalhes a frente.

Para termos uma descrição estatística completa devemos determinar a função densidade de probabilidade ou função de distribuição (DF), como a chamaremos no decorrer deste trabalho, o qual representa a densidade de probabilidade de uma única partícula ser encontrada no espaço de fase em um tempo  $t$  com posição e momento linear

$x$  e  $\mathcal{P}$ , respectivamente. No caso de interesse deste trabalho, onde sistemas sem colisões serão considerados, a DF deve satisfazer a equação sem colisões de Boltzmann ou de Vlasov. Para construirmos um modelo poderíamos supor uma DF e depois, a partir desta, determinar o par densidade-potencial (tal abordagem é conhecida como " $f$  to  $\rho$ "), ou poderíamos supor o par densidade-potencial e determinarmos a DF (tal abordagem é conhecida como " $\rho$  to  $f$ "), independente da abordagem escolhida deve ser resolvido o sistema de Vlasov-Poisson ou Vlasov-Einstein, dependendo se tratamos casos newtonianos ou relativísticos, respectivamente.

Este trabalho é dividido da seguinte forma. No capítulo 2 desenvolvo a teoria de modelos auto consistentes na teoria Newtoniana, em geral tomando como base [BINNEY; TREMAINE, 2008](#), e neste mesmo capítulo apresento os modelos da família Hypervirial. O capítulo 3 é totalmente devotado a uma introdução a teoria da relatividade geral, com o intuito de estabelecer a estrutura de espaços tempo estático e isotrópico que necessito para desenvolver os capítulos seguintes. No capítulo 4 desenvolvo as equações de autogravitação para sistemas estáticos e esféricos sem colisões na teoria da relatividade geral, e já estabeleço algumas condições sobre o tensor de energia momento. Aplico também as equações de autogravitação quando conhecemos as equações de estado do sistema e assim demonstro duas proposições. E finalmente no capítulo 5 aplico as equações da autogravitação para desenvolver uma versão relativística da família Hypervirial, ou seja, completaremos a descrição da família de modelos já estudadas por [NGUYEN; LINGAM e VOGT; LETELIER](#) por meio da determinação da função de distribuição, tornando assim tais modelos auto consistentes.



# Parte I

## Autogravitação Newtoniana



## 2 Autogravitação na teoria Newtoniana

Neste capítulo apresento os principais resultados da teoria de gravitação Newtoniana que serviram de base para a construção dos modelos de interesse astrofísico mais a frente. Tratarei apenas casos estáticos e de simetria esférica para poder simplificar as equações de autogravitação, mas o mesmo pode ser feito as demais simetrias. Também, por simplicidade, consideraremos apenas um tipo de população contidos nestes sistemas, ou seja, todas as partículas serão idênticas, e portanto apenas a DF de uma única partícula necessitará ser modelada, já que esta possui toda a informação estatística relevante.

Nas últimas subseções apresento a família Hypervirial, esta constitui num conjunto de modelos que obedecem o teorema do virial localmente. A importância desta família de modelos se encontra no comportamento da densidade de massa nas regiões centrais, apresentando uma forma  $\rho \approx r^{-\gamma}$  (BAES; DEJONGHE, 2002), e tal comportamento é esperado em galáxias elípticas e para a distribuição de matéria escura. Um dos integrantes desta família é o modelo de Hernquist (HERNQUIST, 1990), este é interessante por ser extremamente simples é por apresentar um perfil da densidade perto do centro da forma  $\rho \approx r^{-1}$ , também por obedecer a lei de Vaucouleurs para a luminosidade. Por causa do perfil central da forma  $\rho \approx r^{-1}$  o modelo de Hernquist é bom candidato ao conteúdo escuro de galáxias.

### 2.1 Sistema de Vlasov-Poisson

A equação de Vlasov descreve um sistema de muitas partículas quando colisões são desconsideradas, ou seja, a única interação entre as partículas é a gravidade suavizada pela coleção de partículas que compõem o sistema, e por isso o chamamos de autogravitante. A equação de Vlasov é nada mais que um caso particular do Teorema de Liouville, a equação de Liouville se reduz a de Vlasov quando consideramos uma grande quantidade de partículas idênticas que não se colidem (BINNEY; TREMAINE, 2008). Considerando tal estrutura a descrição do sistema é dado pela determinação da DF, que se trata de uma função das coordenadas, dos momentos lineares e do tempo, sendo interpretada como uma densidade de probabilidade no espaço de fase. A determinação da DF, no contexto newtoniano, se dá por meio da solução do sistema de Vlasov-Poisson.

A equação de poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

quando é considerado a conexão entre a densidade de massa com a DF, que é dado por

$$\rho = \int \mathcal{F}(t, x, \mathcal{P}) d^3\mathcal{P},$$

se torna equação de autogravitação newtoniana (BINNEY; TREMAINE, 2008):

$$\nabla^2\phi = 4\pi G \int \mathcal{F}(t, x, \mathcal{P}) d^3\mathcal{P}. \quad (2.1)$$

Para completarmos o sistema, e definirmos unicamente a DF, precisamos da equação de Vlasov ou sem colisões de Boltzmann, esta pode ser escrita como:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial \mathcal{P}_i} \frac{d\mathcal{P}_i}{dt} \right) = 0. \quad (2.2)$$

A união de (2.1) e (2.2) forma o sistema de Vlasov-Poisson.

## 2.2 Equações de Movimento e Integrais de Movimento

Da equação (2.2) vemos que DF é uma integral de movimento, e pelo teorema de Jeans (BINNEY; TREMAINE, 2008) podemos considerar que DF é função das demais integrais de movimento. Devido a simetria esférica que consideraremos as demais integrais de movimento são  $E$ ,  $L$  e  $L_z$ , então deveremos ter que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, L, L_z)$ . Tal modificação faz com que DF já satisfaça (2.2), e algumas simplificações na equação (2.1) podem ser conquistadas por meio desta.

As integrais de movimento podem ser escritos, já considerando coordenadas esféricas por simplicidade, como função das variáveis do espaço de fase da forma:

$$E = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} + \phi(r),$$

$$L = r^2 \sqrt{\mathcal{P}_\theta^2 + \mathcal{P}_\psi^2 \sin^2\theta},$$

$$L_z = r^2 \sin^2\theta \mathcal{P}_\psi.$$

Invertendo as expressões, teremos as equações de movimento

$$\mathcal{P}_\psi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} L_z, \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{P}_\theta =_{-}^{+} \frac{1}{r^2} \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (2.3b)$$

$$\mathcal{P}_r =_{-}^{+} \sqrt{2m [E - \phi(r)] - \frac{L^2}{r^2}}, \quad (2.3c)$$

usaremos estas expressões para modificar as variáveis de integração para a equação (2.1).

## 2.3 Simplificando a Equação de Autogravitação

Como já explicado previamente usaremos as equações (2.3) para simplificar a equação (2.1), ou seja, mudaremos das variáveis  $(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_\theta, \mathcal{P}_\psi)$  para  $(E, L, L_z)$ . Devemos tomar certo cuidado devido aos sinais nas equações (2.3), e deveremos separar entre os diferentes sinais para  $\mathcal{P}_r$  e  $\mathcal{P}_\theta$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F} d^3 \mathcal{P} &= \int \mathcal{F} r^2 \sin \theta d\mathcal{P}_r^+ d\mathcal{P}_\theta^+ d\mathcal{P}_\psi + \int \mathcal{F} r^2 \sin \theta d\mathcal{P}_r^- d\mathcal{P}_\theta^+ d\mathcal{P}_\psi \\ &\quad + \int \mathcal{F} r^2 \sin \theta d\mathcal{P}_r^+ d\mathcal{P}_\theta^- d\mathcal{P}_\psi + \int \mathcal{F} r^2 \sin \theta d\mathcal{P}_r^- d\mathcal{P}_\theta^- d\mathcal{P}_\psi, \end{aligned}$$

mas o Jacobiano para todas as partes será o mesmo

$$J = \left| \frac{\partial(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_\theta, \mathcal{P}_\psi)}{\partial(E, L, L_z)} \right| = \frac{mL}{r^6 \sin^2 \theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+},$$

então cada parte contribuirá com o mesmo, concluindo:

$$\int \mathcal{F} d^3 \mathcal{P} = 4 \int \int \int \frac{mL\mathcal{F}}{r^4 \sin \theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+} dE dL dL_z.$$

Tal escolha de variáveis também se justifica pela facilidade de encontrarmos os limites de integração, pelas equações (2.3) temos:

$$-L \sin \theta \leq L_z \leq L \sin \theta,$$

$$0 \leq L \leq r \sqrt{2m(E - \phi)},$$

$$\phi(r) \leq E \leq 0,$$

sendo a última determinada pela energia máxima que uma partícula pode ter neste sistema sem escapar, supondo que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$ . Assim concluímos:

$$\rho(r) = 4 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{mL\mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+} dL_z dL dE.$$

Como trataremos de casos de simetria esférica, podemos considerar que a DF só dependa de E e L, então podemos simplificar ainda mais nossa expressão:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 4 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{mL\mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+} dL dE \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{1}{\mathcal{P}_\theta^+} dL_z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(r) = \frac{4m\pi}{r^2} \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{L\mathcal{F}}{\mathcal{P}_r^+} dL dE. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Então ao definirmos o par densidade-potencial podemos, por meio da equação acima, determinar a função de distribuição.

## 2.4 Velocidade Média e o Tensor de Dispersão de Velocidades

A conexão da teoria e a observação se dá por meio do calculo de  $v_{\parallel}$  e  $\sigma_{\parallel}^2$  (BINNEY; TREMAINE, 2008), mas para tal precisamos estabelecer a velocidade média  $\bar{\mathbf{v}}$  e o tensor de dispersão de velocidades  $\sigma_{ij}^2$ . Determinar  $\bar{\mathbf{v}}$  é o mesmo que  $\bar{\mathcal{P}}$ , então teremos para cada componente:

$$\bar{\mathcal{P}}_r = \frac{1}{\rho(r)} \int \mathcal{P}_r \mathcal{F} d^3\mathcal{P},$$

a integral novamente pode ser expandida como anteriormente:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{P}_r \mathcal{F} d^3\mathcal{P} &= \int \mathcal{P}_r^+ \mathcal{F} r^2 \text{sen}\theta d\mathcal{P}_r^+ d\mathcal{P}_\theta^+ d\mathcal{P}_\psi + \int \mathcal{P}_r^- \mathcal{F} r^2 \text{sen}\theta d\mathcal{P}_r^- d\mathcal{P}_\theta^+ d\mathcal{P}_\psi \\ &+ \int \mathcal{P}_r^+ \mathcal{F} r^2 \text{sen}\theta d\mathcal{P}_r^+ d\mathcal{P}_\theta^- d\mathcal{P}_\psi + \int \mathcal{P}_r^- \mathcal{F} r^2 \text{sen}\theta d\mathcal{P}_r^- d\mathcal{P}_\theta^- d\mathcal{P}_\psi. \end{aligned}$$

E quando modificarmos as variáveis de integração para as integrais de movimento, como já o fizemos anteriormente, teremos a expressão

$$\begin{aligned} \int \mathcal{P}_r \mathcal{F} d^3\mathcal{P} &= 2 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{\mathcal{P}_r^+ mL\mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+} dL_z dL dE \\ &+ 2 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{\mathcal{P}_r^- mL\mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+} dL_z dL dE, \end{aligned}$$

mas como  $\mathcal{P}_r^+ = -\mathcal{P}_r^-$  temos que a integral é zero independente da escolha da DF, portanto  $\bar{\mathcal{P}}_r = 0$ . O mesmo ocorre com  $\mathcal{P}_\theta$ , então  $\bar{\mathcal{P}}_\theta = 0$ . Para  $\mathcal{P}_\psi$  a integração não é tão simples, e escrevendo a expressão:

$$\overline{\mathcal{P}}_\psi = \int \mathcal{P}_\psi \mathcal{F} d^3\mathcal{P} = 4 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{\mathcal{P}_\psi m L \mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+ \mathcal{P}_\theta^+} dL_z dL dE.$$

Assim como anteriormente consideraremos  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, L)$ , portanto

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_\psi &= 4 \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{m L \mathcal{F}}{r^4 \text{sen}\theta \mathcal{P}_r^+} dL dE \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{\mathcal{P}_\psi}{\mathcal{P}_\theta^+} dL_z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{\mathcal{P}_\psi}{\mathcal{P}_\theta^+} dL_z = \int_{-L\text{sen}\theta}^{L\text{sen}\theta} \frac{L_z}{\text{sen}^2\theta \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\text{sen}^2\theta}}} dL_z = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\overline{\mathcal{P}}_\psi = 0$ .

Este resultado nos permite concluir que para qualquer sistema, sob nossas suposições, vai possuir velocidade média  $\bar{\mathbf{v}} = 0$ .

O tensor de dispersão de velocidades  $\sigma_{ij}^2$  é determinado pela expressão:

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{m^2 \rho(r)} \int (\mathcal{P}_i - \overline{\mathcal{P}}_i) (\mathcal{P}_j - \overline{\mathcal{P}}_j) \mathcal{F} d^3\mathcal{P} = \frac{1}{m^2 \rho(r)} \int \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j \mathcal{F} d^3\mathcal{P}.$$

Segue desta que as únicas componentes não nulas de  $\sigma_{ij}^2$  são os elementos da diagonal, ou seja,  $\sigma_{ij}^2 = 0$  se  $i \neq j$ . Após alguns cálculos temos as componentes não nulas de  $\sigma_{ij}^2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^2 &= \frac{4\pi}{mr^2 \rho(r)} \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} L \mathcal{F} \mathcal{P}_r^+ dL dE, \\ \sigma_{\theta\theta}^2 &= \frac{2\pi}{mr^6 \rho(r)} \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_r^+} dL dE, \\ \sigma_{\psi\psi}^2 &= \frac{2\pi}{mr^6 \text{sen}^2\theta \rho(r)} \int_{\phi(r)}^0 \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_r^+} dL dE = \frac{\sigma_{\theta\theta}^2}{\text{sen}^2\theta}. \end{aligned}$$

Também os elementos de  $\sigma_{ij}^2$  possuem uma relação direta com a pressão, dado por:

$$P_r = \rho(r) \sigma_{rr}^2, \quad P_\theta = P_\psi = \rho(r) r^2 \sigma_{\theta\theta}^2.$$

Tais resultados nos ajudarão conectar os modelos newtonianos aos relativísticos.

## 2.5 Família Hypervirial

A família Hypervirial (NGUYEN; LINGAM, 2013; EVANS; AN, 2005; AN; EVANS, 2005) é um conjunto de modelos estáticos de simetria esférica cujo par densidade-potencial é dado por:

$$\phi(r) = -\frac{\phi_0}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad ; \quad \rho(r) = \frac{\phi_0(\gamma + 1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma-2}}{4\pi G a^2 \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}+2}}.$$

Supondo a DF (EVANS; AN, 2005) como

$$\mathcal{F} = A(-E)^\beta (L)^{2\alpha},$$

e substituindo em (2.4), teremos:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{4m\pi A}{r^2} \int_{\phi(r)}^0 (-E)^\beta \int_0^{r\sqrt{2m(E-\phi)}} \frac{L^{2\alpha+1}}{\mathcal{P}_r^+} dE dL = \\ &= \frac{4m\pi A}{r^2} \int_{\phi(r)}^0 (-E)^\beta r \left[r\sqrt{2m(E-\phi)}\right]^{2\alpha+1} dE \int_0^1 \frac{x^{2\alpha+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi A (2m)^{\alpha+\frac{3}{2}} r^{2\alpha} \phi(r)^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}} \int_1^0 (-x)^\beta (x-1)^{\alpha+\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{x^{2\alpha+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= C r^{2\alpha} \phi(r)^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

onde

$$C = 2\pi A (2m)^{\alpha+\frac{3}{2}} \int_1^0 (-x)^\beta (x-1)^{\alpha+\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{x^{2\alpha+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ao reescrevermos a equação da densidade de forma a identificarmos mais facilmente os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , teremos

$$\rho(r) = -\frac{(\gamma+1)r^{\gamma-2}\phi(r)^{2\gamma+1}}{4\pi G a^\gamma \phi_0^{2\gamma}} = C r^{2\alpha} \phi(r)^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}},$$

assim concluímos que  $\alpha = \gamma/2 - 1$  e  $\beta = (3\gamma + 1)/2$ , o que nos permite determinar a constante  $A$ :

$$\begin{aligned} -\frac{(\gamma+1)}{4\pi G a^\gamma \phi_0^{2\gamma}} &= -\pi A (2m)^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= \frac{(\gamma+1)\Gamma(2\gamma+2)}{4\pi^{\frac{5}{2}} (2m)^{\frac{\gamma+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right) G a^\gamma \phi_0^{2\gamma}}. \end{aligned}$$



Resumindo, temos a família Hypervirial descrita pela função de distribuição, densidade e potencial gravitacional abaixo, estes são equivalentes aos resultados encontrados por [NGUYEN; LINGAM; EVANS; AN; AN; EVANS](#),

$$\mathcal{F}(E, L) = \frac{(\gamma + 1)\Gamma(2\gamma + 2)}{4\pi^{\frac{5}{2}} (2m)^{\frac{\gamma+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right) Ga\gamma\phi_0^{2\gamma}} (-E)^{\frac{3\gamma+1}{2}} (L)^{\gamma-2}, \quad (2.5)$$

$$\phi(r) = -\frac{\phi_0}{\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (2.6)$$

$$\rho(r) = \frac{\phi_0(\gamma + 1) \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma-2}}{4\pi Ga^2 \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}+2}}. \quad (2.7)$$

Agora que sabemos a DF podemos determinar o tensor de dispersão de velocidades, que após alguns cálculos:

$$\sigma_{rr}^2 = \frac{-\phi(r)}{2m(\gamma + 1)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^2 = \frac{-\gamma \phi(r)}{4m(\gamma + 1)r^2}.$$

### 2.5.1 Modelo de Hernquist

O modelo de Hernquist ([HERNQUIST, 1990](#)) é um constituinte da família Hypervirial, cujo potencial gravitacional é dado por

$$\phi(r) = -\frac{\phi_0}{1 + \frac{r}{a}},$$

ou seja, é modelo no qual  $\gamma = 1$ , portanto seguindo as expressões (2.5), (2.6) e (2.7) ([BAES; DEJONGHE, 2002](#)), temos em resumo o modelo auto consistente de Hernquist:

$$\mathcal{F}(E, L) = \frac{3}{4m\pi^3 Ga\phi_0^2} E^2 L^{-1},$$

$$\phi(r) = -\frac{\phi_0}{1 + \frac{r}{a}},$$

$$\rho(r) = \frac{\phi_0}{2\pi Gar \left[1 + \frac{r}{a}\right]^3}.$$



## Parte II

# Autogravitação Relativística



## 3 O espaço tempo estático e isotrópico

### 3.1 Introdução a relatividade

Nesta seção apresento os principais resultados da teoria da relatividade geral que serão utilizados posteriormente, serão considerados unidades onde  $c = 1$ , sendo  $c$  a velocidade da luz e adotaremos a convenção de Einstein para somas.

Seja um espaço quadridimensional caracterizado por uma métrica  $g_{\mu\nu}$  de assinatura  $(-, +, +, +)$ , onde a primeira coordenada  $x^0$  tem características temporais e as demais  $x^i$  são coordenadas ordinárias como no caso newtoniano. Assim distâncias neste espaço são determinados pela equação:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

A teoria da relatividade geral se baseia no princípio da equivalência, esse expressa a indiferença das leis físicas quanto a um movimento uniformemente acelerado e um campo gravitacional uniforme, (WEINBERG, 1972). A partir do princípio da equivalência temos as equações de movimento de uma partícula pontual em queda livre:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (3.2)$$

estas equações representam as geodésicas deste espaço, onde  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  é a conexão e sua relação com a métrica é dado por (WEINBERG, 1972):

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\nu\lambda,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}). \quad (3.3)$$

Outro tensor importante que caracteriza a curvatura do espaço é o tensor de Ricci (WEINBERG, 1972):

$$R_{\mu\sigma} = \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\sigma\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda. \quad (3.4)$$

Deste podemos determinar o escalar de Ricci por meio de  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Assim a equação de campo de Einstein é (WEINBERG, 1972):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento, este contém a informação sobre o conteúdo material do sistema, seu análogo clássico é a densidade.

### 3.2 A métrica isotrópica e estática

Uma métrica estática é aquela no qual suas componentes não dependem da variável temporal, sendo simetria esférica descrita pela isotropia da métrica pelo espaço, ou seja,

rotações não modificam a métrica, qualquer que seja a direção observada a geometria do tempo espaço será a mesma. Com essas considerações, de forma geral, podemos escrever o tempo próprio em termos das variáveis invariantes  $r$ ,  $d\mathbf{x}^2$  e  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  (WEINBERG, 1972):

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - D(r)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 - C(r)(d\mathbf{x})^2$$

Tomando uma mudança nas coordenadas espaciais da forma

$$x_1 = r \cos \psi \sin \theta,$$

$$x_2 = r \sin \psi \sin \theta,$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

e assim teremos o tempo próprio escrito segundo

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dtdr - r^2D(r)dr^2 - C(r) \left( dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right).$$

Podemos redefinir nossa variável temporal de forma que

$$t' = t + \phi(r) \text{ e } \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}.$$

Com estas considerações teremos o tempo próprio da forma

$$d\tau^2 = F(r)dt'^2 - G(r)dr^2 - C(r) \left( dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right).$$

Temos liberdade na escolha da coordenada radial, então definindo

$$r'' = \exp \int \left[ \frac{G(r)}{C(r)} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r},$$

teremos

$$d\tau^2 = H(r'')dt'^2 - J(r'') \left( dr''^2 + r''^2d\theta^2 + r''^2 \sin^2 \theta d\psi^2 \right).$$

Então neste formato, alterando a nomenclatura, por simplicidade, das coordenadas temporal de  $t'$  para  $t$  e radial de  $r''$  para  $r$ , as componentes da métrica não nulas são:

$$g_{tt} = -H(r); g_{rr} = J(r); g_{\theta\theta} = J(r)r^2; g_{\psi\psi} = J(r)r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.6)$$

Será para uma métrica nesta forma que construirei toda a teoria.

### 3.3 Integrais de Movimento para a queda livre

Nesta seção determinaremos as integrais de movimento em queda livre para uma métrica isotrópica e estática, tais resultados são válidos para qualquer métrica satisfazendo as condições da seção anterior. Para facilitar a notação, posteriormente, denotamos as integrais de movimento por  $E$ ,  $L_z$  e  $L^2$ , tal notação também facilita a identificação com as integrais de movimento newtonianas.

### 3.3.1 Integral de movimento do tipo energia

A integral de movimento de tipo energia pode ser obtida ao considerarmos uma hamiltoniana que leve as equações de movimentos para a queda livre, ou seja, as equações da geodésica. Para isto começamos de uma ação bem específica  $S = \int m d\tau$ , onde  $\tau$  obedece a relação  $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  e a portanto nos permite expressar

$$m d\tau = -g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} dt,$$

consequentemente

$$S = - \int g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} dt = - \int (g_{tt} \mathcal{P}^t + g_{ij} \mathcal{P}^i \frac{dx^j}{dt}) dt.$$

Tal expressão nos leva a considerar a variável  $t$  como o parâmetro de evolução, ao invés do tempo próprio  $\tau$ , e, consequentemente, podemos interpretar, associada a ação, como a Langrangiana a expressão

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i(t), v^i(t), t) = g_{tt} \mathcal{P}^t + g_{ij} \mathcal{P}^i \frac{dx^j}{dt} = \mathcal{P}_t + \mathcal{P}_i v^i \quad (3.7)$$

onde definimos  $v^i(t) = dx^i/dt$ . Então as componentes espaciais do quadrivetor  $\mathcal{P}_\mu$  podem ser expressas por

$$\mathcal{P}_i = m \frac{dx_i}{d\tau} = m \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \mathcal{P}^t \frac{dx_i}{dt} = \mathcal{P}^t g_{ij} v^j(t).$$

enquanto que, a componente temporal é dado por  $\mathcal{P}_t = g_{tt} \mathcal{P}^t$ , onde  $\mathcal{P}^t$  pode ser expresso em termos de  $v^i$  por meio da condição de casca:

$$g_{tt} \mathcal{P}^t \mathcal{P}^t = -m^2 - g_{ij} \mathcal{P}^i \mathcal{P}^j = -m^2 - g_{ij} \mathcal{P}^t \mathcal{P}^t v^i v^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^t = \sqrt{\frac{-m^2}{g_{tt} + g_{ij} v^i v^j}}.$$

Voltando a equação (3.7) teremos

$$\mathcal{L}(x^i, v^i, t) = m \sqrt{-g_{tt} - g_{ij} v^i v^j}. \quad (3.8)$$

Tal expressão, como já era esperado, leva as corretas equações de movimento, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow \frac{dU^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\lambda\nu}^\mu U^\lambda U^\nu.$$

Para construirmos a Hamiltoniana,  $\mathcal{H}(x^k, p_k, t) = p_k v^k - \mathcal{L}$ , primeiros determinaremos o momento covariante generalizado  $p_k$  usando (3.8)

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^k} = -\frac{mv_k}{\sqrt{-g_{tt} - g_{ij}v^i v^j}},$$

levantando o índice temos sua forma contravariante

$$p^k = -\frac{mv^k}{\sqrt{-g_{tt} - g_{ij}v^i v^j}}.$$

Também, segundo a expressão da Hamiltoniana, precisamos de  $v^k(p_k, x^k)$ , o qual pode ser determinado de

$$p_k p^k = -\frac{m^2 v_k v^k}{g_{tt} + v_k v^k},$$

assim

$$v_k v^k = \frac{-g_{tt} p_k p^k}{m^2 + p_k p^k}. \quad (3.9)$$

A expressão (3.9) é útil para a obtenção de  $p_k v^k$ , este pode ser expresso por

$$p_k v^k = -\frac{mv_k}{\sqrt{-g_{tt} - v_k v^k}} v^k = -\frac{\sqrt{-g_{tt}} p_k p^k}{\sqrt{m^2 + p_k p^k}}. \quad (3.10)$$

Tal expressão (3.9) também nos ajuda a escrever (3.8) de uma nova forma

$$\mathcal{L} = \frac{m^2 \sqrt{-g_{tt}}}{\sqrt{m^2 + p_k p^k}},$$

e, finalmente, obtemos

$$\mathcal{H}(x^k, p_k, t) = -\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g^{ki} p_k p_i + m^2} = g_{tt} \mathcal{P}^t = \mathcal{P}_t. \quad (3.11)$$

Já que a métrica não depende da coordenada de tipo tempo explicitamente, então

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x^k, p_k, t)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{H}(x^k, p_k, t)}{dt} = 0,$$

o que implica

$$\frac{d\mathcal{H}(x^k, p_k, t)}{d\tau} = \frac{d\mathcal{H}(x^k, p_k, t)}{dt} \frac{dt}{d\tau} = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{H} = \mathcal{P}_t$  é integral de movimento. Poderíamos ser mais diretos por meio da derivada  $d\mathcal{P}_t/d\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_t}{d\tau} &= \frac{dg_{tt} \mathcal{P}^t}{d\tau} = \mathcal{P}^t \frac{dg_{tt}}{d\tau} + g_{tt} \frac{d\mathcal{P}^t}{d\tau} = \\ &= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - g_{tt} \Gamma_{\mu\nu}^t \mathcal{P}^\mu U^\nu = \\ &= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - g_{tt} \left[ \frac{1}{2} g^{t\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\nu\mu,\alpha}) \right] \mathcal{P}^\mu U^\nu = \\ &= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - g_{tt} \left[ \frac{1}{2} g^{tt} (g_{\mu t,\nu} + g_{\nu t,\mu} - g_{\nu\mu,t}) \right] \mathcal{P}^\mu U^\nu = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - \frac{1}{2} g_{\mu t,\nu} \mathcal{P}^\mu U^\nu - \frac{1}{2} g_{\nu t,\mu} \mathcal{P}^\mu U^\nu = \\
&= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - \frac{1}{2} g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - \frac{1}{2} g_{tt,\mu} \mathcal{P}^\mu U^t = \\
&= g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - \frac{1}{2} g_{tt,\nu} \mathcal{P}^t U^\nu - \frac{1}{2} g_{tt,\mu} U^\mu \mathcal{P}^t = 0.
\end{aligned}$$

Como concluímos o mesmo resultado, vamos identificar  $\mathcal{P}_t$  como sendo a nossa integral de movimento tipo energia.

### 3.3.2 Integral de movimento do tipo momento angular

Já relacionamos a energia  $E$  com  $\mathcal{P}_t$ , então esperamos conseguir relacionar as demais componentes do quadrimomento com outras integrais de movimento, é direto demonstrar que  $\mathcal{P}_\psi$  é uma quantidade conservada:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}_\psi}{d\tau} &= \frac{d(g_{\psi\psi} \mathcal{P}^\psi)}{d\tau} = \mathcal{P}^\psi \frac{dg_{\psi\psi}}{d\tau} + g_{\psi\psi} \frac{d\mathcal{P}^\psi}{d\tau} = \\
&= g_{\psi\psi,\mu} \mathcal{P}^\psi U^\mu - g_{\psi\psi} \Gamma_{\mu\nu}^\psi U^\mu \mathcal{P}^\nu = \\
&= g_{\psi\psi,\mu} \mathcal{P}^\psi U^\mu - g_{\psi\psi} \left[ \frac{1}{2} g^{\psi\psi} (g_{\mu\psi,\nu} + g_{\nu\psi,\mu} - g_{\mu\nu,\psi}) \right] U^\mu \mathcal{P}^\nu = \\
&= g_{\psi\psi,\mu} \mathcal{P}^\psi U^\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\psi,\nu} U^\mu \mathcal{P}^\nu - \frac{1}{2} g_{\nu\psi,\mu} U^\mu \mathcal{P}^\nu = \\
&= g_{\psi\psi,\mu} \mathcal{P}^\psi U^\mu - \frac{1}{2} g_{\psi\psi,\nu} U^\psi \mathcal{P}^\nu - \frac{1}{2} g_{\psi\psi,\mu} U^\mu \mathcal{P}^\psi = 0
\end{aligned}$$

Então já possuímos nossa segunda integral de movimento, e a identificaremos por  $L_z$ , para completar nossa análise devemos encontrar uma terceira integral de movimento. Retornando a equação de movimento para coordenada  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{dU^\theta}{d\tau} + 2\Gamma_{r\theta}^\theta U^r U^\theta + \Gamma_{\psi\psi}^\theta U^\psi U^\psi &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d(g_{\theta\theta} U^\theta)}{d\tau} - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} g^{\theta\theta} (U_\psi)^2 &= 0. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

De (3.12) é simples demonstrar que  $(\mathcal{P}_\theta)^2 + (\mathcal{P}_\psi)^2 / \sin^2 \theta$  é uma quantidade conservada, ou seja:

$$\frac{d \left[ (\mathcal{P}_\theta)^2 + \frac{(\mathcal{P}_\psi)^2}{\sin^2 \theta} \right]}{d\tau} = 0.$$

Para demonstrar esta afirmação de forma mais completa basta determinar esta derivada

$$\frac{d \left[ (\mathcal{P}_\theta)^2 + \frac{(\mathcal{P}_\psi)^2}{\sin^2 \theta} \right]}{d\tau} = \frac{d(\mathcal{P}_\theta)^2}{d\tau} + \frac{d \left( \frac{(\mathcal{P}_\psi)^2}{\sin^2 \theta} \right)}{d\tau} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\mathcal{P}_\theta \frac{d\mathcal{P}_\theta}{d\tau} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} (\mathcal{P}_\psi)^2 U^\theta = \\
&= 2U_\theta \left[ m \frac{d(g_{\theta\theta} \mathcal{P}^\theta)}{d\tau} - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} g^{\theta\theta} (\mathcal{P}_\psi)^2 \right] = 0 \\
&= 2U_\theta m^2 \left[ \frac{d(g_{\theta\theta} U^\theta)}{d\tau} - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} g^{\theta\theta} (U_\psi)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Assim concluímos que  $\mathcal{P}_\psi = L_z$  e  $(\mathcal{P}_\theta)^2 + (\mathcal{P}_\psi)^2/\sin^2 \theta = L^2$  são integrais de movimento, que juntas com  $\mathcal{P}_t = E$  e  $g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu = -m^2$  dão de forma completa a descrição do movimento de uma partícula.

### 3.3.3 Equações de Movimento

Sabendo as integrais de movimento podemos construir as equações de movimento para a queda livre, assim de forma similar ao caso newtoniano temos:

$$m \frac{dt}{d\tau} = \mathcal{P}^t = -g^{tt} E, \quad (3.13a)$$

$$m \frac{d\psi}{d\tau} = \mathcal{P}^\psi = g^{\psi\psi} L_z, \quad (3.13b)$$

$$m \frac{d\theta}{d\tau} = \mathcal{P}^\theta = \pm g^{\theta\theta} \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (3.13c)$$

$$m \frac{dr}{d\tau} = \mathcal{P}^r = \pm \sqrt{\frac{-g^{tt} E^2 - g^{\theta\theta} L^2 - m^2}{g_{rr}}}. \quad (3.13d)$$

Estas equações nos ajudarão a construir as equações de autogravitação mais adiante. Podemos, ao tomar o limite newtoniano, perceber que tais equações se reduzem corretamente as equações de movimento do caso newtoniano, o que de certa forma comprova a forma escolhida para a métrica.

## 3.4 Condições de Energia

Para que um modelo seja fisicamente aceitável ele deve satisfazer algumas condições. No caso newtoniano, em geral, a massa é considerada uma quantidade positiva, e portanto os modelos construídos devem satisfazer  $\rho \geq 0$ . Outra imposição, relevante em alguns casos, é a de pressão positiva. Ou seja, devemos impor condições sobre a matéria ou fonte do potencial gravitacional.

O mesmo ocorre em relatividade geral, uma série de condições deve ser impostas sobre o conteúdo da matéria fonte, com o intuito de garantir que o tensor de energia

momento, ou a nossa teoria material, é fisicamente aceitável. Estas formam um conjunto de desigualdades sobre o tensor de energia momento que se reduzem de forma razoável as condições já impostas sobre a teoria newtoniana. Existem várias condições já desenvolvidas para relatividade, as mais utilizadas na literatura, e a que utilizaremos neste trabalho, são as condições nula, fraca, forte e dominante de energia (POISSON, 2004), dadas por:

1. Condição nula de energia

Seja  $l^\alpha$  um vetor de tipo luz, ou seja, aquele no qual a relação

$$g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = 0$$

é satisfeita. Assim a condição de energia nula afirma:

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0.$$

2. Condição fraca de energia

Seja  $u^t$  um vetor do tipo tempo, ou seja, aquele que a relação

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu < 0$$

é satisfeita. A condição fraca de energia afirma que

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0.$$

3. Condição dominante de energia

Seja  $y^\alpha$  um vetor casual (tipo tempo ou luz) que aponta para um tempo futuro, ou seja,

$$g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu \leq 0 \quad \text{e} \quad y^t > 0.$$

A condição dominante de energia afirma que além da condição fraca de energia seja válida também deve ser satisfeito:

$$g_{\mu\nu} \left( T^\mu{}_\alpha y^\alpha T^\nu{}_\beta y^\beta \right) \leq 0.$$

4. Condição forte de energia A condição forte de energia afirma:

$$\left[ T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right] u^a u^b = \bar{T}_{ab}u^a u^b \geq 0$$

onde  $u^a$  é um vetor do tipo tempo que aponta para o futuro, ou seja:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu < 0 \quad \text{e} \quad u^t > 0.$$



## 4 Autogravitação na teoria da relatividade geral

Neste capítulo apresento o sistema de Vlasov-Einstein, que governará os modelos autogravitantes que construiremos adiante. A seguir a partir das equações de movimento construo uma forma simplificada para as equações de autogravitação quando consideramos espaços-tempos estáticos de simetria esférica. E a partir de tal simplificação apresento condições necessárias sobre o tensor de energia momento para termos auto consistência.

### 4.1 Sistema de Vlasov-Einstein

Novamente, supomos um sistema de partículas idênticas sem colisões, e a equação de Vlasov nos dá a descrição da cinética, mas agora escrita dentro do formalismo relativístico. Por tratarmos agora de modelos relativísticos acoplaremos a equação de Vlasov as equações de campos de Einstein, dado por

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi GT^{\mu\nu}.$$

A relação entre o tensor de energia momento,  $T^{\mu\nu}$ , e a DF, associado a um sistema autogravitante ([FACKERELL, 1968](#)), é dado por

$$T^{\mu\nu} = \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} \sqrt{-g} d^4\mathcal{P}$$

onde  $g = \det(g_{\mu\kappa})$ ,  $\mathcal{P}^\mu = m dx^\mu / d\tau$  é o vetor quadrimomento e  $\tau$  é tempo próprio. Escolhemos, por conveniência,  $\mathcal{P}^t > 0$  e a integral é definida em toda região do espaço de fase onde  $\mathcal{F} > 0$ , sendo  $x^\mu$  e  $\mathcal{P}^\mu$  interpretados como coordenadas independentes do espaço de fase. A região do espaço de fase associado a uma partícula de massa  $m$  é determinado pela condição de casca ("shell condition"), dado por

$$g_{\mu\kappa} \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\kappa = -m^2, \quad (4.1)$$

onde podemos expressar  $\mathcal{P}^t$  como função das demais coordenadas do espaço de fase,  $\mathcal{P}^t = \mathcal{P}^t(\mathcal{P}^i, x^\mu)$ .

Substituindo a conexão entre o tensor de energia momento e a DF na equação de Einstein, concluímos a equações de autogravitação para sistemas relativísticos:

$$\frac{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - R^{\mu\nu}}{8\pi G} = \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} \sqrt{-g} d^4\mathcal{P}. \quad (4.2)$$

O sistema é completo quando unimos esta a equação de Vlasov (FACKERELL, 1968), que na estrutura relativística tem a forma:

$$\left( \mathcal{P}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}^\lambda} \right) \mathcal{F} = 0. \quad (4.3)$$

A equação (4.3) é equivalente a  $d\mathcal{F}/d\tau = 0$ , portanto novamente a DF é uma integral de movimento, e portanto o teorema Jeans é válido (BINNEY; TREMAINE, 2008).

## 4.2 As equações da autogravitação

Pelo teorema de Jeans podemos escrever a DF como uma função das demais integrais de movimento  $m$ ,  $E$ ,  $L$  e  $L_z$ , fazendo com que seja conveniente a mudança de coordenadas na integração de  $(\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^r, \mathcal{P}^\theta, \mathcal{P}^\psi)$  para  $(m, E, L_z, L)$ . Tal transformação se da pelas equações de movimento (3.13), mas devemos ter um certo cuidado já que as transformações de  $\mathcal{P}^r$  e  $\mathcal{P}^\theta$  apresentam duas formas diferentes:

$$\mathcal{P}_+^r = \sqrt{\frac{L_m^2 - L^2}{J^2 r^2}}, \quad \mathcal{P}_-^r = -\mathcal{P}_+^r, \quad (4.4)$$

onde

$$L_m = \sqrt{Jr^2 \left( \frac{E^2}{H} - m^2 \right)}, \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{P}_+^\theta = \frac{L}{Jr^2} \sqrt{1 - \frac{L_z^2}{L^2 \sin^2 \theta}}, \quad \mathcal{P}_-^\theta = -\mathcal{P}_+^\theta. \quad (4.6)$$

Assim temos as equações de autogravitação escrita na forma:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[ \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} d\mathcal{P}^t d\mathcal{P}_+^r d\mathcal{P}_+^\theta d\mathcal{P}^\psi \right. \\ + \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} d\mathcal{P}^t d\mathcal{P}_-^r d\mathcal{P}_+^\theta d\mathcal{P}^\psi \\ + \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} d\mathcal{P}^t d\mathcal{P}_+^r d\mathcal{P}_-^\theta d\mathcal{P}^\psi \\ \left. + \int \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \mathcal{F} d\mathcal{P}^t d\mathcal{P}_-^r d\mathcal{P}_-^\theta d\mathcal{P}^\psi \right]. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Desta forma, devemos concordar a escolha de  $\mathcal{P}^\mu$  com a variável de integração, ou seja, particularmente o termo de  $T^{r\theta}$  que envolve  $d\mathcal{P}_+^r d\mathcal{P}_-^\theta$  requer que  $\mathcal{P}^r \rightarrow \mathcal{P}_+^r$  e  $\mathcal{P}^\theta \rightarrow \mathcal{P}_-^\theta$ . Note que em todos os casos o Jacobiano da transformação é

$$\left| \frac{\partial(\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^r, \mathcal{P}^\theta, \mathcal{P}^\psi)}{\partial(m, E, L, L_z)} \right| = \frac{mL}{\mathcal{P}_+^\theta \mathcal{P}_+^r H J^4 r^6 \sin^2 \theta},$$

e o domínio de integração, já nas novas coordenadas, é dado por

$$\begin{cases} -L \sin \theta \leq L_z \leq L \sin \theta \\ 0 \leq L \leq L_m, \\ m\sqrt{H} \leq E \leq m, \\ 0 \leq m \leq \infty, \end{cases} \quad (4.8)$$

Onde podemos justificar os limites de  $E$  por meio da condição de casca (4.1) e da energia de escape do sistema, o que pode ser encontrada por meio de (3.13d). Em  $r \rightarrow \infty$  temos  $H = J = 1$  (como tomamos como suposição que a métrica (3.6) tende assintoticamente para a métrica de Minkowsky) o que nos da

$$|\mathcal{P}^r| = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad r \rightarrow \infty$$

Portanto a energia de escape, em  $r \rightarrow \infty$ , é  $E = m$ , já que escolhemos a energia como positiva, correspondendo ao valor  $|\mathcal{P}^r| = 0$ . Partículas com energia maiores que  $m$  não ficarão presos ao sistema.

Pela forma da métrica (3.6) podemos mostrar que as únicas componentes não nulas do tensor de energia momento são  $T^{tt}$ ,  $T^{rr}$ ,  $T^{\theta\theta}$  and  $T^{\psi\psi}$ , as demais componentes são todas nulas. Por outro lado, este fato poderia ser checado diretamente por meio das equações (4.7), exceto para a componente  $T^{t\psi}$  que nos faz impor sobre a DF a equação

$$\int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \int_{-L \sin \theta}^{L \sin \theta} \frac{\mathcal{P}^t \mathcal{P}^\psi m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r \mathcal{P}_+^\theta} dL_z dL dE dm = 0,$$

para que tenhamos  $T^{t\psi} = 0$ , por consistência.

Para todas as demais componentes não nulas temos

$$\begin{aligned} T^{tt} &= \frac{4}{H^{\frac{5}{2}} J^{\frac{5}{2}} r^4 \sin \theta} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \int_{-L_\theta}^{L_\theta} \frac{E^2 m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r \mathcal{P}_+^\theta} dL_z dL dE dm, \\ T^{rr} &= \frac{4}{H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{5}{2}} r^4 \sin \theta} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \int_{-L_\theta}^{L_\theta} \frac{\mathcal{P}_+^r m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^\theta} dL_z dL dE dm, \\ T^{\theta\theta} &= \frac{4}{H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{5}{2}} r^4 \sin \theta} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \int_{-L_\theta}^{L_\theta} \frac{\mathcal{P}_+^\theta m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL_z dL dE dm, \\ T^{\psi\psi} &= \frac{4}{H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{9}{2}} r^8 \sin^5 \theta} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \int_{-L_\theta}^{L_\theta} \frac{L_z^2 m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r \mathcal{P}_+^\theta} dL_z dL dE dm, \end{aligned}$$

onde definimos  $L_\theta = L \sin \theta$ , para simplificar as expressões. Como sabemos que a forma da métrica demanda que as componentes  $T^{tt}$ ,  $T^{rr}$  e  $T^{\theta\theta}$  sejam funções apenas do raio  $r$ , assim devemos esperar que a integral em  $L_z$  não leve a nenhuma dependência em  $\theta$ , mas

$$\frac{1}{\sin \theta} \int_{-L_\theta}^{L_\theta} \frac{\mathcal{F}(m, E, L, L_z)}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_z}{L_\theta}\right)^2}} dL_z = \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{F}(m, E, L, xL \sin \theta)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Assim a DF não pode ter dependência em  $L_z$ , ou seja,

$$\mathcal{F}(m, E, L, L_z) = \mathcal{F}(m, E, L),$$

e as expressões para  $T^{\mu\nu}$  são simplificadas,

$$T^{tt} = \frac{4\pi}{r^2 H^{5/2} J^{3/2}} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{E^2 m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE dm, \quad (4.9)$$

$$T^{rr} = \frac{4\pi}{r^2 H^{1/2} J^{3/2}} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \mathcal{P}_+^r m L \mathcal{F} dL dE dm, \quad (4.10)$$

$$T^{\theta\theta} = \frac{2\pi}{r^6 H^{1/2} J^{7/2}} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{m L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE dm, \quad (4.11)$$

$$T^{\psi\psi} = \frac{2\pi}{r^6 H^{1/2} J^{7/2} \sin^2 \theta} \int_0^\infty \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{m L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE dm, \quad (4.12)$$

As equações (4.11) e (4.12) são exatamente as mesmas para um espaço estático e isotrópico, já que  $T^{\psi\psi} = T^{\theta\theta} / \sin^2 \theta$ , também não mais necessitamos de condições para a DF já que  $T^{t\psi} = 0$ .

Como supomos as massas de todos os constituintes são as mesmas, portanto podemos simplificar ainda mais as expressões de (4.9), (4.10) e (4.11):

$$T^{tt} = \frac{4\pi m}{r^2 H^{5/2} J^{3/2}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{E^2 m L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE, \quad (4.13)$$

$$T^{rr} = \frac{4\pi m}{r^2 H^{1/2} J^{3/2}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \mathcal{P}_+^r m L \mathcal{F} dL dE, \quad (4.14)$$

$$T^{\theta\theta} = \frac{2\pi m}{r^6 H^{1/2} J^{7/2}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{m L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE, \quad (4.15)$$

Assim construímos por meio deste raciocínio as equações de autogravitação para uma métrica estática e isotrópica, uma construção parecida foi feita por [FACKERELL, 1968](#), mas para uma métrica na forma padrão. Então, ao definirmos as funções  $H(r)$  e  $J(r)$  nas equações de (3.6), podemos determinar em princípio a DF por meio das equações (4.13), (4.14) e (4.15).

As equações (4.13), (4.14) e (4.15) impõe sobre o tensor de energia momento algumas condições. Devido ao fato de  $\mathcal{F} \geq 0$  teremos  $T^{tt} \geq 0$ ,  $T^{rr} \geq 0$  e  $T^{\theta\theta} \geq 0$ , ou seja,  $T^{\mu\nu} \geq 0$ . E Ao determinarmos

$$T = -\frac{4\pi m^3}{H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{3}{2}} r^2} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE,$$

portanto  $T \leq 0$ .

Assim, vemos que  $\mathcal{F} \geq 0$  implica na validade das condições de energia, já que  $T^{\mu\nu} \geq 0$  e  $T \leq 0$  são condições mais fortes que as condições de energia.



### 4.3 Determinando a DF por meio de equações de estado

Mostro nesta seção como estabelecer o espaço-tempo completamente, e portanto a DF, por meio de duas equações de estado. E demonstro duas proposições que estabelecem o comportamento de sistema auto consistentes quando tratamos de equações de estado  $P^T = kP^r$  e  $P^r = w\rho$ , sendo  $k$  e  $w$  constantes.

#### 4.3.1 Conservação do tensor de energia momento

Em primeiro lugar podemos encontrar uma equação que relacione as funções  $H$  e  $J$  com a densidade  $\rho$  e as pressões  $P^r$  e  $P^T$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{r^3 H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{5}{2}} T^{rr}}{4\pi m} &= \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} L \mathcal{F} \sqrt{L_m^2 - L^2} dL dE \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi m} \frac{d\left(r^3 H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{5}{2}} T^{rr}\right)}{dr} &= \int_{m\sqrt{H}}^m L_m \frac{\partial L_m}{\partial r} \int_0^{L_m} \frac{L \mathcal{F}}{\sqrt{L_m^2 - L^2}} dL dE = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{d\left(r^2 J H^{-1}\right)}{dr} \frac{r H^{\frac{5}{2}} J^{\frac{1}{2}} T^{tt}}{4\pi m} + \frac{d\left(r^2 J\right)}{dr} \frac{r H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} T}{4\pi m} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \frac{d\left(r^3 H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{5}{2}} T^{rr}\right)}{dr} &= \frac{d\left(r^2 J H^{-1}\right)}{dr} r H^{\frac{5}{2}} J^{\frac{1}{2}} T^{tt} + \frac{d\left(r^2 J\right)}{dr} r H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} T \end{aligned}$$

Aqui definimos  $\rho = -T^t_t$ ,  $P^r = T^r_r$  e  $P^T = T^\theta_\theta$ , portanto

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\left(r^3 H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{3}{2}} P^r\right)}{dr} &= \frac{d\left(r^2 J H^{-1}\right)}{dr} r H^{\frac{3}{2}} J^{\frac{1}{2}} \rho + \frac{d\left(r^2 J\right)}{dr} r H^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}} \left(P^r - \rho + 2P^T\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -(\rho + P^r) \frac{1}{2H} \frac{dH}{dr} &= \frac{dP^r}{dr} + \frac{1}{Jr^2} \frac{dJr^2}{dr} \left(P^r - P^T\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esta última é exatamente a equação de conservação do tensor de energia momento ( $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ ) (RIAZI et al., 2016), e se reduz a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939) quando consideramos um fluido perfeito ( $P = P^r = P^T$ ). Pela equação (4.16) temos que ao definirmos duas equações de estado entre  $\rho$ ,  $P^r$  e  $P^T$  o espaço-tempo estará completamente definido.

#### 4.3.2 Modelos com $P^T = kP^r$

Como expressamos anteriormente ao definirmos duas equações de estado teremos o espaço tempo totalmente definido, e por consequência a DF definida. O intuito desta seção é mostrar que para uma escolha bem específica da equação de estado entre  $P^T$  e  $P^r$  teremos a DF parcialmente definida.

Escrevendo as equação de autogravitação para a densidade, pressão radial ( $P^r$ ) e tangencial ( $P^T$ ):

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4\pi m}{r^2(JH)^{\frac{3}{2}}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{E^2 L \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE, \\ P^r &= \frac{4\pi m}{r^2 \sqrt{JH}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \mathcal{P}_+^r L \mathcal{F} dL dE, \\ P^T &= \frac{2\pi m}{r^4 J^{\frac{5}{2}} \sqrt{H}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE.\end{aligned}$$

Destas equações podemos concluir a Proposição 1:

**Proposição 1.** *Seja  $k$  uma constante e  $\mathcal{F}$  uma função que satisfaça as equações de autogravitação, então  $P^T = kP^r$  se e somente se  $\mathcal{F} = \xi(E)L^{2(k-1)}$ .*

Antes de demonstrarmos tal proposição necessitamos de um resultado intermediário que chamarei de Lema 1:

**Lema 1.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma função que satisfaça as equações de autogravitação, então  $\lim_{L \rightarrow 0} (L^2 \mathcal{F}) = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\lim_{L \rightarrow 0} (L^2 \mathcal{F}) \neq 0$ , então pela definição de limite deve existir um  $C(E) > 0$  para todo  $\delta > 0$  de tal forma que  $\mathcal{F} > C(E)L^{-2}$  sempre que  $0 < L < \delta$ , para todo  $E$ . Ou seja, podemos escolher  $L_m$  pequeno o bastante (menor que  $\delta$ ) de forma que

$$\int_0^{L_m} \frac{L \mathcal{F}}{\sqrt{L_m^2 - L^2}} dL \geq C(E) \int_0^{L_m} \frac{1}{L \sqrt{L_m^2 - L^2}} dL \geq 0,$$

mas

$$\int_0^{L_m} \frac{1}{L \sqrt{L_m^2 - L^2}} dL \text{ não converge} \Rightarrow \int_0^{L_m} \frac{L \mathcal{F}}{\sqrt{L_m^2 - L^2}} dL \text{ não converge.}$$

O que é um absurdo já que este último deve convergir, pois  $\rho$  deve ser expresso por integrais convergentes, portanto  $\lim_{L \rightarrow 0} (L^2 \mathcal{F}) = 0$ .  $\square$

Com este resultado podemos demonstrar a Proposição 1:

*Demonstração.* A proposição afirma basicamente  $\mathcal{F} = \xi(E)L^{2(k-1)} \Leftrightarrow P^T = kP^r$ , a ida é trivial, basta usarmos as equações de autogravitação. Para a volta precisamos comparar a equação de  $P^T$  com a de  $P^r$ , ou seja:

$$P^T = kP^r = \frac{2\pi m}{r^4 J^{\frac{5}{2}} \sqrt{H}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\mathcal{P}_+^r} dL dE = \frac{4k\pi m}{r^2 \sqrt{JH}} \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \mathcal{P}_+^r L \mathcal{F} dL dE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\sqrt{L_m^2 - L^2}} dL dE = 2k \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} L \mathcal{F} \sqrt{L_m^2 - L^2} dL dE \quad (4.17)$$

Integrando por partes o lado direito de (4.17):

$$2 \int_0^{L_m} L \mathcal{F} \sqrt{L_m^2 - L^2} dL = \int_0^{L_m} \frac{L^3 \mathcal{F}}{\sqrt{L_m^2 - L^2}} dL - \int_0^{L_m} \sqrt{L_m^2 - L^2} L^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} dL - L_m \lim_{L \rightarrow 0} (L^2 \mathcal{F})$$

Pelo Lema 1 temos que  $\lim_{L \rightarrow 0} (L^2 \mathcal{F}) = 0$ , portanto podemos voltar a equação (4.17):

$$\begin{aligned} 2(k-1) \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} L \mathcal{F} \sqrt{L_m^2 - L^2} dL dE &= \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} L^2 \sqrt{L_m^2 - L^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} dL dE \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{m\sqrt{H}}^m \int_0^{L_m} L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] dL dE = 0 \end{aligned}$$

Como esta expressão deve ser válida para todo  $r$  e nosso espaço é assintoticamente plano, devemos poder escolher  $r$  grande o bastante de tal forma que  $-g_{tt}$  se aproxime de 1 de tal sorte que

$$\int_0^{L_m} L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] dL \geq 0$$

ou

$$\int_0^{L_m} L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] dL \leq 0.$$

Em ambos os casos temos que

$$\begin{aligned} \int_{m\sqrt{H}}^m \left| \int_0^{L_m} L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] dL \right| dE &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^{L_m} L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] dL = 0. \end{aligned}$$

Novamente devemos ter a expressão anterior válida para qualquer  $L_m$ , portanto escolhendo  $L_m$  pequeno o bastante de forma que

$$L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] \geq 0$$

ou

$$L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] \leq 0.$$

Em ambos os casos temos que

$$\int_0^{L_m} \left| L \sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1) \mathcal{F} - L \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right] \right| dL = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L\sqrt{L_m^2 - L^2} \left[ 2(k-1)\mathcal{F} - L\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial L} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(k-1)\mathcal{F} - L\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial L} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{F} &= \xi(E)L^{2(k-1)}. \end{aligned}$$

Portanto  $\mathcal{F} = \xi(E)L^{2(k-1)} \Leftrightarrow P^T = kP^r$ . □

### 4.3.3 Modelos com $P^T = kP^r$ e $P^r = w(r)\rho$

Suponha que

$$P^T = kP^r \text{ e } P^r = w(r)\rho,$$

onde  $k$  é constante. Usando a equação (4.16) podemos determinar a densidade como função de  $H$ ,  $J$ ,  $w$  e  $r$ :

$$\begin{aligned} -(\rho + w\rho)\frac{1}{2H}\frac{dH}{dr} &= \frac{dw\rho}{dr} + \frac{1}{Jr^2}\frac{dJr^2}{dr}(w\rho - kw\rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{(1+w)}{2wH}\frac{dH}{dr} &= \frac{d\ln(w\rho)}{dr} + \frac{d\ln(Jr^2)}{dr}(1-k) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{(1+w)}{wH}dH &= \ln(w\rho) + \ln(Jr^2)(1-k) + c \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{1}{wH}dH &= \ln(w\rho) + \ln(Jr^2)(1-k) + \frac{1}{2}\ln(H) + c \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{wH}dH} &= Cw\rho(Jr^2)^{1-k}\sqrt{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \frac{de^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{wH}dH}}{w(Jr^2)^{1-k}\sqrt{H}}, \text{ onde } d \text{ é uma constante.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por outro lado, usando a Proposição 1 e as equação de autogravitação para a densidade temos:

$$\rho = \frac{4\pi B_1 m}{H^{\frac{3}{2}}(Jr^2)^{1-k}} \int_{m\sqrt{H}}^m \xi(E)E^2 \left( \frac{E^2}{H} - m^2 \right)^{k-\frac{1}{2}} dE$$

Comparando as expressões para a densidade, concluímos a equação integral:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{H}}^1 \xi(m\epsilon)\epsilon^2 \left( \frac{\epsilon^2}{H} - 1 \right)^{k-\frac{1}{2}} d\epsilon &= \frac{uHe^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{wH}dH}}{w} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_H^1 \frac{\xi(m\sqrt{t})\sqrt{t}}{2} (t-H)^{k-\frac{1}{2}} dt &= \frac{uH^{k+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{wH}dH}}{w} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \int_H^1 \frac{\xi(m\sqrt{t})\sqrt{t}}{2} (t-H)^{k-\frac{1}{2}} dt &= \frac{uH^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{wH} dH}}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) w} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{I}_{(H,1)}^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{\xi(m\sqrt{t})\sqrt{t}}{2} \right] &= \frac{uH^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{wH} dH}}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) w}, \end{aligned}$$

onde  $u$  é uma constante e definimos a integral fracionária (POLYANIN; MANZHIROV, 2008) como

$$\mathbf{I}_{(x,1)}^u g(t) = \frac{1}{\Gamma(u)} \int_x^1 g(t) (t-x)^{u-1} dt.$$

A inversão da expressão anterior é dada por

$$\xi(m\sqrt{t}) = \frac{2u}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \sqrt{t}} \mathbf{D}_{(t,1)}^{\frac{2k+1}{2}} \left[ \frac{H^{\frac{2k+1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{wH} dH}}{w} \right], \quad (4.19)$$

onde definimos a derivada fracionária (POLYANIN; MANZHIROV, 2008) como

$$\mathbf{D}_{(t,1)}^\mu g(x) = \frac{(-1)^{[\mu]+1}}{\Gamma(1 - \{\mu\})} \left( \frac{d}{dt} \right)^{[\mu]+1} \int_t^1 \frac{g(x)}{(x-t)^{\{\mu\}}} dx,$$

onde  $\mu = [\mu] + \{\mu\}$ , sendo que  $[\mu]$  representa a parte inteira do número real  $\mu$  e  $\{\mu\}$  representa o resto, ou seja,  $0 \leq \{\mu\} < 1$ . Assim ao escolhermos a função  $w(r)$  poderemos por meio de (4.19) determinar a função  $\xi(E)$ .

Suponha agora que estamos tratando de um sistema onde  $w$  é constante, então teremos uma simplificação drástica nas equações de  $\rho$  e  $\xi$ :

$$\rho = \frac{dH^{-\frac{(1+w)}{2w}}}{w (Jr^2)^{1-k}}, \quad (4.20)$$

$$\xi(m\sqrt{t}) = \frac{2u}{w\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \sqrt{t}} \mathbf{D}_{(t,1)}^{\frac{2k+1}{2}} \left[ H^{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2w}} \right].$$

Estas duas expressões nos permitem concluir a Proposição 2:

**Proposição 2.** *Não existe modelo auto consistente de um sistema autogravitante sem colisões com equações de estado  $P^T = kP^r$  e  $P^r = w\rho$ , onde  $w$  é uma constante e  $k$  é um semi-inteiro.*

*Demonstração.* Tal proposição será demonstrado por absurdo. Suponha que exista  $\mathcal{F}$  que construa o  $\rho$  dado por (4.20), como temos que  $k$  é semi-inteiro então devemos ter

$$\mathbf{D}_{(t,1)}^{k+\frac{1}{2}} = \left( -\frac{d}{dt} \right)^{k+\frac{1}{2}},$$

e assim

$$\xi(m\sqrt{t}) = \frac{2u}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \sqrt{t}} \left( -\frac{d}{dt} \right)^{k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{t^{k+\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2w}}}{w} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi(E) = U(-1)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{m}\right)^{-\frac{(1+w)}{w}}.$$

Calculando pela equação de autogravitação teremos a densidade dada por:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4\pi B_1 m}{H^{\frac{3}{2}} (Jr^2)^{1-k}} \int_{m\sqrt{H}}^m U(-1)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{m}\right)^{-\frac{(1+w)}{w}} E^2 \left(\frac{E^2}{H} - m^2\right)^{\frac{2k-1}{2}} dE = \\ &= \frac{4\pi B_1 U(-1)^{k+\frac{1}{2}} m^{2k+3}}{H^{\frac{3}{2}} (Jr^2)^{1-k}} \int_{\sqrt{H}}^1 \varepsilon^{\frac{w-1}{w}} H^{\frac{1}{2}-k} (\varepsilon^2 - H)^{\frac{2k-1}{2}} d\varepsilon = \\ &= \frac{2\pi B_1 U(-1)^{k+\frac{1}{2}} m^{2k+3}}{H^{k+1} (Jr^2)^{1-k}} \int_H^1 u^{-\frac{1}{2w}} (u - H)^{k-\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{2\pi B_1 U(-1)^{k+\frac{1}{2}} m^{2k+3}}{(Jr^2)^{1-k}} \left[ H^{-\frac{(w+1)}{2w}} \sum_{n=0}^{n=k-\frac{1}{2}} \frac{\binom{k-\frac{1}{2}}{n} (-1)^{n+1}}{n+1-\frac{1}{2w}} - \sum_{n=0}^{n=k-\frac{1}{2}} \frac{\binom{k-\frac{1}{2}}{n} (-1)^{n+1}}{n+1-\frac{1}{2w}} H^{-\frac{3}{2}-n} \right] \end{aligned}$$

O que é um absurdo, pois  $\rho$  é dado por (4.20), portanto nossa suposição inicial de que existe uma DF que construa esta densidade só pode ser falsa.  $\square$

## 5 Família Hypervirial na teoria da relatividade geral

Na seção anterior estudamos características gerais de modelos autogravitantes construídos por meio das equações (4.13), (4.14) e (4.15), e mostrando como estas se relacionam a equações de estado. Nesta seção focaremos em construir modelos mais concretos, usaremos as equações (4.13), (4.14) e (4.15) para determinar a DF para uma extensão relativística da família Hypervirial proposta por [NGUYEN; LINGAM](#).

### 5.1 A Métrica

Como mencionado anteriormente devemos determinar a métrica do espaço-tempo e depois aplicar as equações de autogravitação, tal métrica deve ser uma extensão razoável do potencial newtoniano, ou seja, o limite newtoniano do par densidade-potencial e da pressão devem ser equivalentes aos do sistema estendido. [NGUYEN; LINGAM](#) propõe que tal extensão pode ser feita por meio de uma generalização da métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas, ou seja, teremos uma métrica da seguinte forma

$$ds^2 = - \left( \frac{1-f}{1+f} \right)^2 dt^2 + (1+f)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2). \quad (5.1)$$

Onde  $f$  é um função de  $r$ , de tal forma que  $f(r) = -\phi(r)/2$ , sendo  $\phi(r)$  o potencial newtoniano que queremos estender. De fato, se escolhermos  $\phi(r) = -GM/r$  recuperaremos a métrica de Schwarzschild (em coordenadas isotrópicas, obviamente). Tal escolha é apropriada, já que o limite newtoniano é equivalente ao potencial de interesse, e como mostraremos em 5.1.1 a pressão e a densidade também serão equivalentes.

Como já apresentamos o potencial da família Hypervirial tem a forma (2.5), então teremos que a escolha de  $f$  deve ser

$$f(r) = \frac{\phi_0}{2 \left( 1 + \left( \frac{r}{a} \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (5.2)$$

tal escolha de  $f(r)$  já foi extensamente estudada por [NGUYEN; LINGAM](#) e [VOGT; LETELIER](#). Como tal métrica é estática e de simetria esférica todos os desenvolvimentos dos capítulos 3 e 4 são válidos.

### 5.1.1 Tensor de energia e momento

A partir da extensão anterior é possível determinar o tensor de energia momento pelas equações de Einstein, mas para isto precisamos determinar a conexão e o tensor de Ricci por meio de (3.3) e (3.4), respectivamente. Com estes, por meio da equação de Einstein (3.5), podemos determinar as expressões das componentes não nulas do tensor de energia momento:

$$T^{tt} = -\frac{2\frac{df}{dr} + r\frac{d^2f}{dr^2}}{2\pi Gr(1+f)^3(1-f)^2},$$

$$T^{rr} = -\frac{f\frac{df}{dr} + r\left(\frac{df}{dr}\right)^2}{2\pi Gr(1-f)(1+f)^9},$$

$$T^{\theta\theta} = -\frac{\left[f\frac{df}{dr} - r\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + rf\frac{d^2f}{dr^2}\right]}{4\pi Gr^3(1-f)(1+f)^9},$$

lembrando que  $T^{\psi\psi} = T^{\theta\theta}/\sin^2\theta$ .

Retomando agora o  $f(r)$  da família Hypervirial, teremos

$$f(r) = \frac{\phi_0}{2\left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\frac{df}{dr} = -\left(\frac{2rf}{a\phi_0}\right)^\gamma \frac{f}{r},$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} = -\left(\frac{2rf}{a\phi_0}\right)^\gamma \frac{f}{r^2} \left[\gamma - 1 - (\gamma + 1)\left(\frac{2rf}{a\phi_0}\right)^\gamma\right],$$

$$\left(\frac{2rf}{a\phi_0}\right)^\gamma = 1 - \left(\frac{2f}{\phi_0}\right)^\gamma,$$

assim retornando tais resultados as expressões para o tensor de energia momento, teremos

$$T^{tt} = \frac{2^{2\gamma-1}(\gamma+1)f^{2\gamma+1}}{\pi a^\gamma \phi_0^{2\gamma} Gr^{2-\gamma}(1+f)^3(1-f)^2},$$

$$T^{rr} = \frac{2^{2\gamma-1}f^{2\gamma+2}}{\pi a^\gamma \phi_0^{2\gamma} Gr^{2-\gamma}(1-f)(1+f)^9},$$

$$T^{\theta\theta} = \frac{2^{2\gamma-2}\gamma f^{2\gamma+2}}{\pi a^\gamma \phi_0^{2\gamma} Gr^{4-\gamma}(1-f)(1+f)^9}.$$



A partir destes podemos determinar  $T^t_t$ ,  $T^r_r$  e  $T^\theta_\theta$  que usaremos para comparar com os resultados newtonianos, já que  $T^r_r = P^r$ ,  $T^\theta_\theta = P^\theta$  e  $T^t_t = -\rho$ , portanto temos:

$$\rho = \frac{2^{2\gamma-1} f^{2\gamma+1} (\gamma + 1)}{\pi a^\gamma \phi_0^{2\gamma} G r^{2-\gamma} (1+f)^5},$$

$$P^r = \frac{2}{\gamma} P^T = \frac{2^{2\gamma-1} f^{2\gamma+2}}{\pi a^\gamma \phi_0^{2\gamma} G r^{2-\gamma} (1-f)(1+f)^5},$$

Os limites newtonianos destes se reduzem corretamente as expressões que encontramos para o caso newtoniano (Capítulo 2; NGUYEN; LINGAM, 2013).

### 5.1.2 Condições de energia

Com a escolha da métrica temos o tensor de energia momento estabelecido, porém não necessariamente tal tensor representa um sistema fisicamente aceitável, e portanto devemos aplicar as condições de energia sobre este. Porém como queremos posteriormente usar as equações de autogravitação para determinarmos a DF, aplicaremos as condições necessárias da seção 4.2, ou seja, teremos:

$$0 \leq f \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\phi_0}{2 \left[ 1 + \left( \frac{r}{a} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow r \geq a (\phi_0^\gamma - 1)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Então as equações de autogravitação são válidas para este tensor de energia momento para toda a região aonde o raio  $r$  é maior que  $a (\phi_0^\gamma - 1)^{1/\gamma}$ , assim para que seja válida para todo o espaço basta que  $0 \leq \phi_0 \leq 1$ .

## 5.2 Função de distribuição

Ao compararmos as componentes do tensor de energia momento vemos que  $P^T = \gamma P^r / 2$  e  $P^r = w(r)\rho$ , mas como já sabemos as expressões de  $P^r$  e  $\rho$  não necessitamos usar os resultados da subseção 4.3.3, pois podemos encontrar a DF de forma mais simples. Pela Proposição 1, temos:

$$\mathcal{F} = A \xi(E) L^{\gamma-2},$$

onde  $A$  é uma constante, que será tomada de forma a simplificar expressões posteriores, e  $\xi(E)$  é uma função a ser determinada pelas equações (4.13), (4.14) e (4.15). Assim após alguns cálculos teremos

$$\rho = \frac{4\pi AB_1 m}{H^{\frac{3}{2}} (Jr^2)^{\frac{2-\gamma}{2}}} \int_{m\sqrt{H}}^m \xi(E) E^2 \left( \frac{E^2}{H} - m^2 \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} dE,$$

$$P^r = \frac{4\pi AB_2 m}{\sqrt{H} (Jr^2)^{\frac{2-\gamma}{2}}} \int_{m\sqrt{H}}^m \xi(E) \left( \frac{E^2}{H} - m^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} dE,$$

onde

$$B_1 = \int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)},$$

$$B_2 = \int_0^1 x^{\gamma-1}\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)} = \frac{1}{\gamma+1}B_1.$$

Como as integrais para a densidade e a pressão radial envolvem  $\sqrt{H}$ , então para simplificar a resolução das próximas equações integrais tomaremos a expressão de inversão

$$f = \frac{1 - \sqrt{H}}{1 + \sqrt{H}},$$

não precisamos nos preocupar com a outra possível inversão, pois esta não satisfaz as condições de energia. Ao usarmos tal inversão e tomando

$$A = \frac{\gamma + 1}{2^5 \pi^2 a^\gamma \phi_0^{2\gamma} G B_1 m}$$

teremos as equações integrais

$$\int_{m\sqrt{H}}^m \xi(E) E^2 \left(\frac{E^2}{H} - m^2\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} dE = 2H^{\frac{3}{2}} (1 - \sqrt{H})^{2\gamma+1}, \quad (5.3)$$

$$\int_{m\sqrt{H}}^m \xi(E) \left(\frac{E^2}{H} - m^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} dE = (1 - \sqrt{H})^{2\gamma+2}. \quad (5.4)$$

Não precisamos destas duas equações, ao tomarmos a primeira derivada de (5.4) temos (5.3), portanto toda solução de (5.4) também é de (5.3). Então escolheremos (5.4) como a equação integral que vamos resolver. Assim tomando, por simplicidade,  $\sqrt{H} = x$ , temos

$$\int_{mx}^m \xi(E) \left(\frac{E^2}{x^2} - m^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} dE = (1-x)^{2\gamma+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{mx}^m \xi(E) \left[\left(\frac{E}{m}\right)^2 - x^2\right]^{\frac{\gamma+1}{2}} dE = \left(\frac{x}{m}\right)^{\gamma+1} (1-x)^{2\gamma+2}.$$

Para simplificar a solução considere o caso onde  $\gamma = 2p + 1$ , portanto podemos tomar  $p + 2$  derivadas em  $x$  é determinar:

$$\xi(mx) = -\frac{1}{m} \frac{d}{dx} \left[ \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{p+1} \frac{\left(\frac{x}{m}\right)^{2p+2} (1-x)^{4p+4}}{(-2)^{p+1} (p+1)!} \right].$$

Podemos simplificar tal expressão usando

$$x^{2p+2} (1-x)^{4p+4} = \sum_{n=0}^{4p+4} (-1)^n \binom{4p+4}{n} x^{n+2p+2}.$$

Aplicando  $p + 1$  vezes o operador  $d/dx$  encontramos a expressão para  $\xi$  expressa em termos de  $E$ :

$$\xi(E) = \sum_{n=1}^{4p+4} \binom{4p+4}{n} \frac{(-1)^{n+p} n(n+2p+2)!!}{m^{2p+3} n! (2p+2)!!} \left(\frac{E}{m}\right)^{n-1}.$$

Podemos agora encontrar a DF de um modelo relativístico de Hernquist ao escolhermos  $p = 0$ , chamando esta DF por  $\xi_1$ :

$$\xi_1(E) = \frac{6}{m^3} \left(1 - \frac{E}{m}\right)^2 \left(2\frac{E}{m} - 1\right)$$

Separamos os casos de  $\gamma$  ímpar por motivos de praticidade, já que sua resolução é bem trivial, os demais casos não apresentam  $\xi$  polinomial, portanto sua resolução não será tão trivial. De forma geral podemos determinar a DF por meio de (4.19), como caso de interesse vamos nos especializar em casos onde  $\gamma$  é par. A função  $\xi$  para tais casos pode ser expressa por:

$$\xi_\gamma(E) = \frac{E}{\pi m^{\gamma+3}} \sum_{k=0}^{2\gamma+2} b_{\gamma k} \int_{\frac{E}{m}}^1 \frac{x^{k-2}}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{E}{m}\right)^2}} dx,$$

onde

$$b_{\gamma 0} = 2(-1)^{1-\frac{\gamma}{2}},$$

$$b_{\gamma 1} = 0,$$

$$b_{\gamma k} = \frac{2(k + \gamma + 1)!! (-1)^{k-\frac{\gamma}{2}} (k-1) \binom{2\gamma+2}{k}}{(k-1)!! (\gamma+1)!!}, \quad k \geq 2.$$

Considerando o caso onde  $\gamma = 2$  concluímos a expressão de  $\xi$  para o modelo de Plummer (PLUMMER, 1911; DEJONGHE, 1987):

$$\xi_2(E) = \frac{8\sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2}} + \frac{E^2}{m^2} \sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2}} \left(1733\frac{E^2}{m^2} + 1274\right)}{4\pi E m^3} - \frac{15 \left(21\frac{E^6}{m^6} + 140\frac{E^4}{m^4} + 40\frac{E^2}{m^2}\right) \log \left[ \frac{\left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2}} + 1\right)}{\frac{E}{m}} \right]}{4\pi E m^3}$$

Em resumo, podemos escrever a DF de forma a não apresentar constantes de dimensionabilidade do sistema, a chamaremos de  $\tilde{F}_n$ , e sua expressão é:

$$\tilde{F}_n = 2^5 \pi^3 a^n \phi_0^{2n} G m^5 \mathcal{F}_n(\epsilon, l).$$

Então para  $n$  ímpar, teremos:

$$\tilde{F}_{n,\text{ímpar}} = \frac{2(n+1)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} l^{n-2} \sum_{k=1}^{2n+2} a_{nk} \epsilon^{k-1}, \quad (5.5)$$

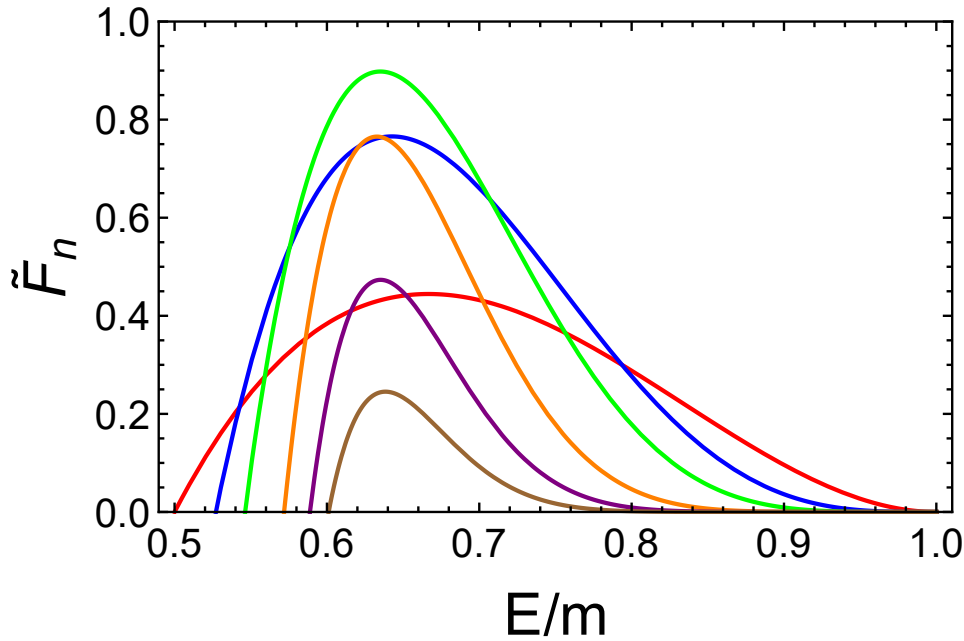


Figura 1 –  $\tilde{F}_n = 2^5 m^5 \pi^3 G \phi_0^{2n} a^n \mathcal{F}_n$ , para a extensão relativística da família Hypervirial como função de  $\epsilon = E/m$  e  $l = L/m = 2$ , para diferentes valores de  $n$ :  $n = 1$  (Vermelha),  $n = 2$  (Azul),  $n = 3$  (Verde),  $n = 5$  (Laranja),  $n = 7$  (Roxa),  $n = 9$  (Marrom).

onde

$$a_{nk} = \binom{2n+2}{k} \frac{(-1)^{k+\frac{n-1}{2}} k(k+n+1)!!}{k!!(n+1)!!}.$$

E para  $n$  par, teremos:

$$\tilde{F}_{n,\text{par}} = \frac{2(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} l^{n-2} \epsilon \sum_{k=0}^{2n+2} b_{nk} \int_{\epsilon}^1 \frac{x^{k-2}}{\sqrt{x^2 - \epsilon^2}} dx. \quad (5.6)$$

### 5.3 Determinando o valor máximo de $\phi_0$ e a massa total do sistema

O modelo de Hernquist é um caso particular da família Hypervirial, caracterizado por  $\gamma = 1$ , ou seja, a função de distribuição é dada por:

$$\mathcal{F} = \frac{3}{4\pi^3 a \phi_0^2 G m^4} \left(1 - \frac{E}{m}\right)^2 \left(2\frac{E}{m} - 1\right) L^{-1} \quad (5.7)$$

Pelas condições de energia, impostas pelas equações de autogravitação, temos uma região que permite encontrar a DF, no caso,  $r \geq a(\phi_0 - 1)$ . Porém a expressão para a DF que encontramos, possui uma região negativa no espaço de fase determinada por  $2E/m - 1 < 0$ , ou seja, a DF é negativa para energias  $E < m/2$ . E como a energia mínima para uma partícula neste sistema é dado por  $m\sqrt{H}$  teremos  $E_{\min} = m\sqrt{H} < m/2$ , ou

seja, situações onde  $\sqrt{H} < 1/2$  ou  $r < a(3\phi_0/2 - 1)$  não caracterizarão uma DF positiva. Portanto teremos uma DF positiva descrita por (5.7) somente na região onde

$$r \geq a \left( \frac{3\phi_0}{2} - 1 \right),$$

portanto se queremos garantir que seja válida para todo o espaço basta impormos  $\phi_0 \leq 2/3$ , que passa a substituir a o limite para  $\phi_0$  que previamente tínhamos estabelecidos por meio das condições de energia.

Assim pela figura 1 temos que os demais membros da família Hypervirial apresentam regiões onde a DF, assim como no caso de Hernquist, se tornam negativas, e o ponto onde elas atingem o zero aumenta com  $\gamma$ , portanto é de se esperar que o valor máximo de  $\phi_0$ , para que estas DFs sejam positivas para todo  $r$ , deva diminuir para valores maiores de  $\gamma$ , desconhecemos alguma forma de mostrar para qual valor máximo  $\phi_0$  deve convergir quando  $\gamma \rightarrow \infty$ .

A massa total do sistema (NGUYEN; LINGAM, 2013) é dada por:

$$M_{\text{total}} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{J^3 r^4} \rho d\Omega dr = \frac{\phi_0 a}{G} + \frac{\phi_0^2 a}{2G} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{2}{\gamma}\right)},$$

ou seja, a massa total do sistema esta diretamente relacionada com  $\phi_0$ , portanto a massa dos modelos que tratamos neste capítulo é sempre limitado. Por exemplo, para o modelo relativístico de Hernquist:

$$M_{\text{total}} \leq \frac{20a}{27G}.$$



## 6 Conclusão

Neste trabalho apresento a derivação das equações de autogravitação para espaços tempos estáticos e isotrópicos assintoticamente planos, que nos permitem determinar a DF assim que definirmos o espaço tempo. Mostro que por meio destas equações podemos determinar a equação de conservação do tensor de energia momento (equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff anisotrópica) e assim determinar o espaço tempo, e portanto a DF, por meio de equações de estado. Considero o caso onde  $P^T = kP^r$ ,  $k$  constante, e demonstro a proposição 1, que estabelece  $\mathcal{F} = \xi(E)L^{2(k-1)} \Leftrightarrow P^T = kP^r$ . Por meio de tal proposição estabeleço a forma geral da DF para casos onde  $P^r = w\rho$ ,  $w$  é constante, e demonstro a proposição 2, esta afirma que não existem modelos auto consistentes de sistemas autogravitantes com equações de estado  $P^T = kP^r$  e  $P^r = w\rho$ , com  $w$  constante e  $k$  semi inteiro.

Na última seção, apresento a derivação da DF para a extensão relativística da família Hypervirial, proposta previamente por NGUYEN; LINGAM. Para essa extensão temos que  $P^T = \gamma P^r/2$  e assim a proposição 1 é válida, ou seja,  $\mathcal{F} = AL^{2-\gamma}\xi(E)$ . Por meio dessa forma da DF encontramos duas equações integrais, para simplificar sua solução tomei a única possível inversão entre  $f$  e  $H$ , e o que permite escrever  $\rho = g_1(\sqrt{H})/r^{2-\gamma}$  e  $P^r = g_2(\sqrt{H})/r^{2-\gamma}$ . Mostro que as duas equações integrais são equivalente, e portanto posso escolher uma delas como a equação a resolver. A solução para tal equação integral foi apresentada e a DF para a família Hypervirial foi plotada para diversos valores de  $\gamma$ . É possível notar que o valor aonde a DF vai a zero cresce com  $\gamma$ , assim ao ser considerado o caso do modelo de Hernquist vemos que a DF ao ir a zero estabelece um limite para o valor de  $\phi_0$  e este está ligado a massa total do modelo, pelo gráfico 1 vemos que a massa total para os demais modelos deve ser ainda mais limitada, já que o valor máximo de  $\phi_0$  é ainda menor. Agora podemos considerar a família Hypervirial como sendo auto consistente no contexto da teoria da relatividade geral.





## Referências

- AN, J.; EVANS, N. W. Simple models for the distribution of dark matter. *A&A*, v. 444, n. 1, p. 45 – 50, Dezembro 2005. Citado 3 vezes nas páginas 13, 22 e 23.
- BAES, M.; DEJONGHE, H. The hernquist model revisited: Completely analytical anisotropic dynamical models. *A&A*, v. 393, n. 2, p. 485 – 497, October 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.
- BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 14, 17, 18, 20 e 36.
- DEJONGHE, H. A completely analytical family of anisotropic plummer models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 224, n. 1, p. 13, 1987. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1093/mnras/224.1.13](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/224.1.13)>. Citado na página 49.
- EVANS, N. W.; AN, J. Hypervirial models of stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 360, n. 2, p. 492, 2005. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09078.x](http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09078.x)>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 22 e 23.
- EVANS, N. W.; AN, J. H. Distribution function of dark matter. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 73, p. 023524, Jan 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.023524>>. Citado na página 13.
- FACKERELL, E. D. Relativistic stellar dynamics. *Astrophysical Journal*, vol. 153, p. p.643, fevereiro 1968. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 38.
- HERNQUIST, L. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *The Astrophysical Journal*, v. 356, p. 359–364, Junho 1990. Citado 3 vezes nas páginas 13, 17 e 23.
- NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, v. 462, p. 563–575, 1996. Citado na página 13.
- NGUYEN, P. H.; LINGAM, M. Analytical families of two-component anisotropic polytropes and their relativistic extensions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 436, n. 3, p. 2014, 2013. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt1719](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt1719)>. Citado 7 vezes nas páginas 14, 22, 23, 45, 47, 51 e 53.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb 1939. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>>. Citado na página 39.
- PLUMMER, H. C. On the problem of distribution in globular star clusters: (plate 8.). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 71, n. 5, p. 460, 1911. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1093/mnras/71.5.460](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/71.5.460)>. Citado na página 49.
- POISSON, E. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 33.

POLYANIN, A. D.; MANZHIROV, A. V. *Handbook of Integral Equations*. Second edition. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2008. Citado na página 43.

RIAZI, N. et al. A new class of anisotropic solutions of the generalized tov equation. *Canadian Journal of Physics*, v. 94, n. 10, p. 1093–1101, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1139/cjp-2016-0365>>. Citado na página 39.

VOGT, D.; LETELIER, P. S. Newtonian and general relativistic models of spherical shells. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 402, n. 2, p. 1313, 2010. Disponível em: <[+http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x](http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15967.x)>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 45.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and sons, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.