

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física

Introdução ao Estudo dos Buracos Negros na Relatividade Geral

Cairo H. Duque da Silva

Orientador: Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro

São Carlos, Abril de 2022

Cairo H. Duque da Silva

Introdução ao Estudo dos Buracos Negros na Relatividade Geral

Trabalho apresentado à Coordenação do curso de Bacharelado em Física - Integral como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro

São Carlos
Abril/2022

Introdução

A ideia desta monografia surgiu do interesse do autor em compreender um dos objetos de estudo mais exóticos da Física: os buracos negros. Com isto em mente, este trabalho teve o objetivo de introduzir o estudo dos buracos negros no âmbito da relatividade geral e também da gravitação semiclássica através da radiação Hawking.

No primeiro capítulo, almejou-se discutir vários conceitos fundamentais da relatividade geral, importantes para o restante da monografia. Assim, na seção 2.1, foi feita uma introdução a teoria da relatividade geral por meio de sua motivação física e apresentação das equações de Einstein. Na seção 1.2, apresentou-se o método variacional para o cálculo de geodésicas em espaços-tempos curvos. Já na seção 1.3, foram introduzidos alguns conceitos da teoria da causalidade, indispensáveis para a análise do espaço-tempo de Kruskal-Szekeres na seção 2.4 e para a elaboração da definição formal de um buraco negro na seção 3.1.

O capítulo 2 teve o intuito de estudar o espaço-tempo de Schwarzschild e começa, na seção 2.1, com a dedução da métrica de Schwarzschild a partir das equações de Einstein no vácuo. Na seção 2.2, estudou-se o movimento de partículas teste neste espaço e na seção 2.3 apresentou-se a dedução de dois importantes resultados: o avanço do periastro dos astros e a deflexão dos raios de luz sob a ação de fortes campos gravitacionais. Na última seção do capítulo, foi obtida a extensão máxima do espaço-tempo de Schwarzschild, onde foi possível observar uma região de buraco negro.

No capítulo 3, vários aspectos da teoria de buracos negros foram estudados. Na seção 3.1, foi construída a definição formal de buraco negro e foi apresentado as métricas que descrevem o espaço-tempo a sua volta. Na seção 3.2, foi feita uma análise das geodésicas no espaço-tempo de Kerr, sendo apresentada a solução exata da equação orbital de Schwarzschild como um importante subproduto. Na seção 3.3, foi vista a analogia formal existente entre as leis dinâmicas dos buracos negros com as leis da termodinâmica clássica enquanto, na seção 3.4, estudou-se a radiação Hawking em um buraco negro de Schwarzschild como uma transição da abordagem clássica para a semiclássica. Por fim, a conclusão do trabalho foi realizada no capítulo 4.

Assumiu-se que o leitor já tenha familiaridade com algumas definições básicas de geometria diferencial – e.g., variedade Lorentziana, campos vetoriais e tensoriais, conexões afins, símbolos de Christoffel, derivadas covariante e de Lie, tensor de curvatura, etc. Dentre outras, as referências [4] e [7] são ótimas fontes para o estudo de tais conceitos na medida em que apresentam uma discussão a parte de geometria diferencial.

Com exceção de alguns trechos, onde se discutiu conceitos no âmbito da gravitação Newtoniana, ao longo de todo o texto, foram utilizadas as unidades de Planck em que

$$c = \hbar = G = k_B = 1,$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo, \hbar a constante de Planck reduzida, G a constante gravitacional de Newton e k_B a constante de Boltzmann. Além disso, a convenção da soma de Einstein também foi utilizada sistematicamente neste trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer ao apoio de minha família e de meus amigos durante toda a graduação como também a orientação e a paciência do prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro ao longo deste projeto de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Sumário

1	Conceitos de Relatividade Geral	7
1.1	Relatividade Geral e as Equações de Einstein	8
1.1.1	Princípios Físicos da Relatividade Geral	8
1.1.2	As Equações de Einstein	9
1.2	Geodésicas	10
1.3	Causalidade	12
1.3.1	Cones de Luz	12
1.3.2	Espaços Globalmente Hiperbólicos	13
1.3.3	Aplicações Conformes	14
2	A Geometria de Schwarzschild	15
2.1	A Métrica de Schwarzschild	15
2.2	O Movimento no Espaço-tempo de Schwarzschild	18
2.2.1	Órbitas Circulares	20
2.3	Aplicações da Métrica de Schwarzschild	22
2.3.1	Avanço do Periastro	22
2.3.2	Deflexão dos Raios de Luz	24
2.4	A Extensão de Kruskal-Szekeres do Espaço-tempo de Schwarzschild	27
2.4.1	Fronteira Causal do Espaço-tempo de Kruskal-Szekeres	31
3	Buracos Negros	33
3.1	Buracos Negros e a Relatividade Geral	35
3.1.1	O limite estático na métrica de Kerr-Newman	37
3.1.2	A Ergosfera e o Mecanismo de Penrose	39
3.2	Geodésicas do Espaço-tempo de Kerr	41
3.2.1	As Três Primeiras Integrais de Movimento	41
3.2.2	A Constante de Carter	42
3.2.3	Redução a Equações de Primeira Ordem	44
3.2.4	Solução Exata da Equação Orbital de Schwarzschild	45
3.3	Dinâmica de Buracos Negros: As Quatro Leis	46
3.4	A Radiação Hawking	48
3.4.1	Teoria Quântica de Campos no Espaço-tempo de Minkowski	49
3.4.2	Aspectos da Gravitação Semiclássica	50
3.4.3	A Radiação Hawking do Buraco Negro de Schwarzschild	52

6

SUMÁRIO

4 **Conclusão**

57

Capítulo 1

Conceitos de Relatividade Geral

Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.

John Archibald Wheeler, em “Geons, Black Holes & Quantum Foam: A Life in Physics”

A teoria da relatividade geral, formulada pelo físico teórico alemão Albert Einstein (1879 - 1955) em 1915, tenta conciliar a teoria de Newton da gravitação com a relatividade especial já que a interação gravitacional instantânea – característica da gravitação Newtoniana – não é concebível na relatividade especial devido à preconização de que nada pode superar a velocidade finita da luz. Na teoria de Einstein, a informação é transmitida pelas ondas gravitacionais que também viajam na velocidade da luz. Naturalmente, a relatividade geral coincide com a especial na ausência de gravidade e recai na teoria gravitacional Newtoniana quando os campos gravitacionais são relativamente fracos e as velocidades dos corpos são baixas em comparação com a da luz.

A teoria de Einstein predisse vários fenômenos que, atualmente, já foram verificados direta ou indiretamente, como a expansão do Universo, as lentes e ondas gravitacionais e os buracos negros. Por sua vez, a teoria gravitacional Newtoniana continua sendo importante para o estudo de vários fenômenos – e.g., a estrutura interna do Sol e a evolução de galáxias [1] –, no entanto, os efeitos relativísticos devem ser cada vez mais considerados quanto maior for o chamado *fator de correção relativístico* ε :

$$\varepsilon \sim \frac{GM}{c^2 r} \sim \frac{v^2}{c^2}, \quad (1.1)$$

em que G é a constante gravitacional Newtoniana, c é a velocidade da luz no vácuo e M , r e v denotam, respectivamente, a massa, o tamanho e a velocidade característica do sistema considerado. Os efeitos relativísticos se tornam importantes quando ε é uma fração significativa da unidade [1].

A teoria de Einstein substitui o potencial escalar Newtoniano Φ definido no espaço Euclidiano por um tensor simétrico de segunda ordem $g_{\mu\nu}$, que constitui a *métrica* em um espaço-tempo quadridimensional \mathcal{M} . Neste contexto, a métrica assume um caráter dinâmico, influenciando e sendo influenciada pelos processos físicos e, como resultado da curvatura do espaço-tempo, surge a gravidade. Geometricamente, um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana tempo-orientada, i.e., no qual foi escolhida uma orientação temporal. Deve-se

lembrar que uma variedade Lorentziana (\mathcal{M}, g) é tempo-orientável se \mathcal{M} admite um campo vetorial contínuo X do tipo tempo – i.e., no qual

$$g(X(p), X(p)) < 0, \forall p \in \mathcal{M} \quad - \quad (1.2)$$

que não se anula em toda a variedade. Neste caso, (\mathcal{M}, g) admite duas orientações temporais definidas por X e $-X$. A gravitação Newtoniana também pode ser expressa em termos geométricos através da perturbação da métrica de Minkowski para que esta deixe de ser plana ou pela modificação do espaço-tempo de Schwarzschild – estudado no capítulo 2 – para que este seja apenas ligeiramente curvo.

1.1 Relatividade Geral e as Equações de Einstein

1.1.1 Princípios Físicos da Relatividade Geral

Em sua tentativa de reconciliar a relatividade especial com a teoria gravitacional Newtoniana, Einstein foi guiado por dois importantes princípios físicos: o *princípio da covariância geral* e o *princípio da equivalência*. O primeiro diz que os fenômenos físicos em si não dependem do sistema de referência no qual são expressas suas leis. Em termos matemáticos, geralmente, isso é feito lançando-se mão dos campos tensoriais na medida em que são objetos geométricos intrínsecos de uma variedade suave. O segundo reflete a coincidente equivalência Newtoniana das massas gravitacional e inercial, testada experimentalmente com grande acurácia pelo próprio Newton. Esta equivalência é expressa no fato da aceleração – devido à gravidade – de uma partícula teste situada em um determinado ponto do espaço independem da natureza desta partícula. Em sua versão mais fraca, ela pode ser enunciada da seguinte forma:

Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, o movimento de partículas em queda livre é o mesmo tanto em um campo gravitacional quanto em um referencial uniformemente acelerado.

Princípio Fraco da Equivalência

Extrapolando o princípio fraco da equivalência, Einstein ainda postulou o seguinte:

Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da física reduzem-se àquelas da relatividade especial; é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por meio de experimentos locais.

Princípio da Equivalência de Einstein

É preciso observar que, em regiões suficientemente grandes do espaço-tempo, geralmente, há inomogeneidades do campo gravitacional que dão origem às forças de maré de tal forma que tais princípios não são mais válidos neste caso. Além disso, já que a aceleração local que uma partícula teste, localizada em um determinado ponto $p \in \mathcal{M}$ de sua linha de mundo, é expressa em termos dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(p)$, matematicamente, o princípio da equivalência está ligado ao seguinte lema [5].

Lema 1.1. Sejam (\mathcal{M}, g) uma variedade pseudo-Riemanniana n -dimensional e U uma vizinhança de um ponto arbitrário $p \in \mathcal{M}$ descrita pelas coordenadas x^μ . Pode-se construir um novo sistema de coordenadas \bar{x}^μ – dito *localmente inercial* – com as seguintes propriedades:

- (i) $\bar{x}^\mu(p) = 0$;
- (ii) nas novas coordenadas \bar{x}^μ , os símbolos de Christoffel se anulam em p : $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho(p) = 0$;
- (iii) nas coordenadas \bar{x}^μ , o valor da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ é igual a sua assinatura:

$$\bar{g}_{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

1.1.2 As Equações de Einstein

Na teoria Newtoniana, o potencial escalar Φ satisfaz a equação de Poisson enquanto, na relatividade geral, a métrica $g_{\mu\nu}$ deve satisfazer as famosas *equações de campo de Einstein*, um conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares acopladas que não podem ser deduzidas dentro da teoria da relatividade geral mas são postuladas e testadas experimentalmente. Elas permitem a ligação entre a curvatura do espaço-tempo e o conteúdo de matéria e energia nele contido (Figura 1.1) e devem recair na equação de Poisson quando no limite Newtoniano de um espaço-tempo com pequena curvatura produzida por fontes de matéria com baixas velocidades comparadas à da luz.

Para medir a curvatura do universo, são utilizados o tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\gamma\delta}$ – que pode ser calculado explicitamente a partir dos símbolos de Christoffel que, por sua vez, são dados em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ – e os tensores e escalares derivados dele. Por outro lado, o conteúdo de matéria e energia do Universo é representado pelo *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$, um tensor simétrico de segunda ordem. A generalização para espaços-tempos curvos da conservação local de energia-momento é escrita em termos da derivada covariante da seguinte forma [1, 2, 7]:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

Com tudo isso em mente, uma relação candidata a dinamizar a métrica é dada por

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

em que $R_{\mu\nu} := R^\gamma_{\mu\gamma\nu}$ é o tensor de Ricci, $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é a curvatura escalar e tanto λ como κ são constantes reais. Aplicando a derivada covariante em ambos os lados da Equação (1.5) tem-se que, devido a conservação de energia e momento, o termo da direita é nulo. Daí, considerando a *identidade de Bianchi contraída* [1, 2, 7]

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \quad (1.6)$$

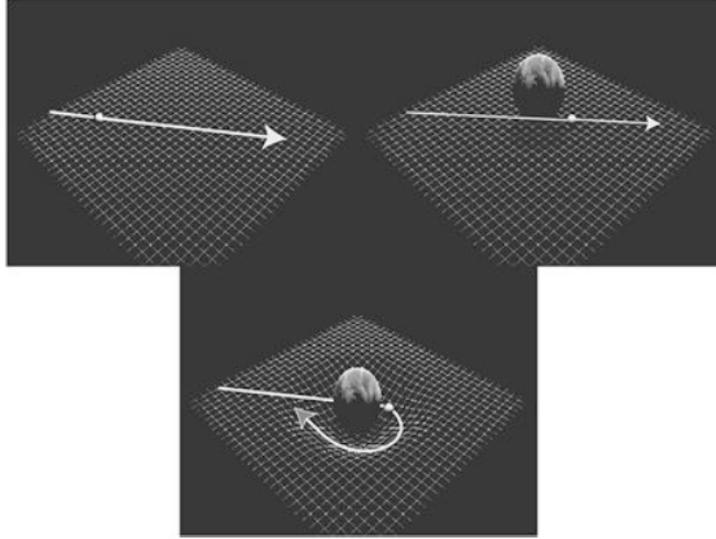


Figura 1.1: Metáfora da folha de Eddington ilustrando a relação entre espaço-tempo e matéria e energia codificada nas equações de Einstein. Nesta analogia, um objeto colocado sobre uma folha de papel esticada altera sua topologia e, conseqüentemente, modifica a trajetória de outros corpos que se movem sobre ela. (Reproduzida de [5])

deve-se ter $\lambda = -\frac{1}{2}$. Além disso, comparações com o limite Newtoniano resulta no valor $\kappa = 8\pi$, nas unidades de Planck [1, 2, 7]. Dessa forma, as equações de Einstein são dadas por

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é conhecido como o *tensor de Einstein*. Deve-se levar em conta que, devido a identidade de Bianchi, das dez equações representadas em (1.7), apenas seis são independentes. Além disso, observa-se que é possível adicionar um termo da forma $\Lambda g_{\mu\nu}$, sendo Λ uma constante real denominada *constante cosmológica*, na medida em que a derivada covariante da métrica é sempre zero [1, 2, 7]. De forma equivalente, pode-se interpretar este termo como a energia do vácuo e incluí-lo do lado direito da equação como uma contribuição para o tensor de energia-momento. As soluções das equações de Einstein com a constante cosmológica são conhecidas como *espaços de Sitter* no caso em que $\Lambda > 0$ e *anti-de Sitter* quando $\Lambda < 0$. Neste trabalho, a constante cosmológica será desconsiderada e tais espaços não serão estudados.

1.2 Geodésicas

As retas do espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 são estendidas para uma variedade suave \mathcal{M} através do conceito de *geodésicas*. Formalmente, uma geodésica é uma curva $\gamma: J \rightarrow \mathcal{M}$, sendo J um intervalo da reta, na qual seu campo velocidade $\dot{\gamma}$ é paralelo ao longo de γ , i.e.,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0, \quad (1.8)$$

em que ∇ é uma conexão afim em \mathcal{M} . Em uma carta local $(U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ de \mathcal{M} na qual o campo velocidade de uma geodésica γ é escrito como

$$\dot{\gamma} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu, \quad (1.9)$$

a Equação (1.8) traduz-se na chamada *equação da geodésica* [4, 5, 7]

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (1.10)$$

em que $\dot{x}^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ são os símbolos de Christoffel da conexão afim ∇ . A solução deste sistema de equações diferenciais é completamente determinada dadas $2n$ condições iniciais: o ponto inicial $x^\rho(0)$ da curva e o vetor tangente $\frac{dx^\rho}{d\lambda}(0)$ neste ponto. Dessa forma, em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, existe uma geodésica que parte em uma determinada direção.

Considerando agora uma variedade pseudo-Riemanniana (\mathcal{M}, g) , o comprimento de uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ é dado por [5]

$$S(\gamma) = \int_a^b g(\dot{\gamma}(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda)) d\lambda. \quad (1.11)$$

No caso em que a conexão afim em consideração é a de Levi-Civita, a curva de comprimento extremal – em geral, mínimo – entre dois pontos fixos é uma geodésica [5] e, para utilizar o princípio variacional a fim de encontrar trajetórias de partículas, as equações de Euler-Lagrange da lagrangiana do sistema deve coincidir com a equação da geodésica já que, na teoria da relatividade geral, as trajetórias das partículas livres são tais curvas. Um cálculo direto, que pode ser encontrado em [4], mostra que isto acontece quando a lagrangiana e a ação são definidas, respectivamente, por

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (1.12)$$

e

$$\mathfrak{s} \equiv \int \sqrt{2\mathcal{L}} d\lambda. \quad (1.13)$$

No entanto, enquanto em uma variedade Riemanniana existe apenas um tipo de geodésica devido a positividade da métrica, em uma variedade Lorentziana, existem três tipos:

- i. geodésicas do *tipo tempo* são aquelas tais que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$;
- ii. geodésicas do *tipo espaço* são aquelas tais que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) > 0$;
- iii. geodésicas do *tipo luz* são aquelas tais que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$.

Na teoria da relatividade geral, a trajetória das partículas massivas são geodésicas do tipo tempo enquanto o caminho percorrido pelas partículas sem massa que viajam na velocidade da luz são geodésicas do tipo luz. Nenhuma partícula física percorre uma geodésica do tipo espaço na medida em que, neste caso, ela teria uma velocidade superluminal e haveria violação da causalidade [5]. Já os *parâmetros afins*, em cada caso, são definidos, respectivamente, pelas condições

$$2\mathcal{L} = -1, \quad 2\mathcal{L} = 1 \quad \text{e} \quad 2\mathcal{L} = 0. \quad (1.14)$$

1.3 Causalidade

O objetivo desta seção é introduzir conceitos indispensáveis para o estudo das relações causais globais em espaços-tempos curvos que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

1.3.1 Cones de Luz

Enquanto na teoria da relatividade especial um *cone de luz* pode ser definido globalmente, em um espaço-tempo curvo \mathcal{M} , sua definição é feita apenas localmente – em cada ponto da variedade – na medida que, para todo $p \in \mathcal{M}$, o plano tangente a p , $T_p\mathcal{M}$, é isomorfo ao espaço de Minkowski [6, 7]. Assim, o conjunto de todos estes cones de luz descreve a estrutura causal do espaço-tempo e gera a noção de causalidade global na variedade.

O cone de luz \mathcal{C}_p definido em um ponto $p \in \mathcal{M}$ é composto pelo conjunto de vetores tangentes $t \in T_p\mathcal{M}$ do tipo tempo ou do tipo luz, i.e., tais que $g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \leq 0$ (Figura 1.2). O cone de luz forma uma subvariedade e pode ser decomposto como a união dos cones de luz futuro \mathcal{C}_p^+ e passado \mathcal{C}_p^- :

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p^+ \cup \mathcal{C}_p^-, \quad \text{sendo} \quad \mathcal{C}_p^+ := \{t \in \mathcal{C}_p : t^0 > 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_p^- := \{t \in \mathcal{C}_p : t^0 < 0\}, \quad (1.15)$$

cujos vetores são ditos *direcionados para o futuro* ou *para o passado*, respectivamente.

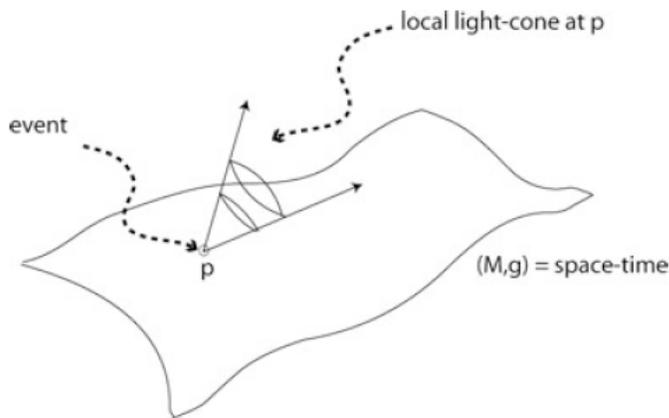


Figura 1.2: Cone de luz local de um ponto p de um espaço-tempo curvo \mathcal{M} . (Reproduzida de [6])

A noção de orientação temporal pode ser estendida naturalmente para curvas: uma curva do tipo tempo direcionada para o futuro em um espaço-tempo \mathcal{M} é uma curva suave $\gamma(\lambda)$ em \mathcal{M} na qual, em cada ponto $p \in \gamma$, o vetor tangente $\dot{\gamma}$ a curva é do tipo tempo direcionado para o futuro. Da mesma forma, $\gamma(\lambda)$ é do tipo tempo direcionada para o passado se $\dot{\gamma}$ também o é. Já uma curva causal direcionada para o futuro (respect., passado) é uma curva suave $\gamma(\lambda)$ cujo vetor tangente a curva $\dot{\gamma}$ em cada ponto $p \in \gamma$ é do tipo tempo ou do tipo luz direcionado para o futuro (respect., passado).

Dados dois pontos $p, q \in \mathcal{M}$, utiliza-se a notação convencional $p \ll q$ para denotar a existência de uma curva suave do tipo tempo direcionada para o futuro de p a q e também

$p \leq q$ se $p = q$ ou se existe uma curva suave causal direcionada para o futuro de p a q . Além disso, denota-se $p < q$ se $p \leq q$ e $p \neq q$. Dessa forma, o passado e o futuro cronológicos de um ponto p são os conjuntos definidos, respectivamente, por

$$I^-(p) := \{q \in M : q \ll p\} \quad \text{e} \quad I^+(p) := \{q \in M : p \ll q\}. \quad (1.16)$$

Já o passado e o futuro causais de p são definidos, respectivamente, como os conjuntos

$$J^-(p) := \{q \in M : q \leq p\} \quad \text{e} \quad J^+(p) := \{q \in M : p \leq q\}. \quad (1.17)$$

Enquanto os conjuntos $I^-(p)$ e $I^+(p)$ são sempre abertos em qualquer espaço-tempo, os conjuntos $J^-(p)$ e $J^+(p)$, em geral, não são necessariamente abertos nem fechados [6]. Ainda mais, ambos os conceitos podem ser estendidos para uma região $S \subset \mathcal{M}$. Com efeito, o futuro (passado) cronológico ou o futuro (passado) causal da região S são definidos, respectivamente, por

$$I^\pm(S) := \bigcup_{p \in S} I^\pm(p) \quad \text{e} \quad J^\pm(S) := \bigcup_{p \in S} J^\pm(p). \quad (1.18)$$

Por sua vez, as superfícies são classificadas da seguinte forma: uma superfície Σ é do tipo tempo (respect., espaço) se seu vetor normal n^μ em cada ponto da superfície é do tipo espaço (respect., tempo) ao passo que as superfícies do tipo luz são aquelas cujos vetores normais também são do tipo luz.

1.3.2 Espaços Globalmente Hiperbólicos

Uma região $S \subset \mathcal{M}$ de um dado espaço-tempo é dita *acronal* se

$$I^+(S) \cap S = \emptyset. \quad (1.19)$$

Neste caso, os eventos em S não possuem relações causais entre si e, assim, pode-se especificar livremente sobre ela, de forma consistente, condições iniciais para campos clássicos ou quânticos. Pode-se mostrar que [6] se $S \subset \mathcal{M}$ é uma região conexa, a fronteira do futuro cronológico de S – denotada por $\partial I^+(S)$ – é uma subvariedade acronal de dimensão $n - 1$.

A *borda* de um conjunto acronal fechado S – denotada por $edge(S)$ – consiste no conjunto de pontos $p \in S$ tais que, para toda vizinhança U_p de p , existem dois pontos $q \in I^-(p)$ e $r \in I^+(p)$, ambos contidos em U_p e conectados por pelo menos uma curva do tipo tempo que não intercepta S . Assim, se $S \subset \mathcal{M}$ é uma região acronal fechada de um espaço-tempo n -dimensional (\mathcal{M}, g) tal que $edge(S) = \emptyset$, então S é uma subvariedade $(n - 1)$ -dimensional de \mathcal{M} [6].

O *domínio de dependência futuro (passado)* de um conjunto acronal fechado S é definido como o conjunto $D^\pm(S)$ de pontos $p \in \mathcal{M}$ nos quais toda curva do tipo tempo direcionada para o futuro (passado) que passa por p intersecta S . Dessa forma, o domínio de dependência futuro é uma subvariedade causalmente determinada pelo que acontece em S enquanto o domínio de dependência passado, por outro lado, determina causalmente o que acontece em S . Por sua vez, o *domínio de dependência completo* de um conjunto acronal S é o conjunto definido por

$$D(S) := D^+(S) \cup D^-(S). \quad (1.20)$$

Uma *superfície de Cauchy* é um conjunto acronal fechado $\Sigma \subset \mathcal{M}$ de um espaço-tempo (\mathcal{M}, g) se seu domínio de dependência coincide com toda a variedade:

$$D(\Sigma) = \mathcal{M}. \quad (1.21)$$

De acordo com as definições, observa-se que uma superfície de Cauchy não possui borda e, portanto, é uma hipersuperfície. Além disso, uma superfície de Cauchy é interceptada uma única vez por uma curva causal [14] e o conhecimento de condições iniciais sobre ela determina completamente o desenvolvimento temporal futuro dos processos físicos. Um espaço-tempo é dito *globalmente hiperbólico* se admite uma superfície de Cauchy. Tais espaços permitem uma formulação global consistente da causalidade e, por isso, são soluções não patológicas das equações de Einstein [6].

1.3.3 Aplicações Conformes

Sejam (\mathcal{M}, g) e $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ variedades pseudo-Riemannianas, ambas de dimensão n . Uma *aplicação conforme* de \mathcal{M} em $\tilde{\mathcal{M}}$ é uma aplicação diferenciável $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ na qual existe $\Omega \in C^\infty(\text{Im } \psi)$ – denominado *fator conforme* – tal que

$$\tilde{g}|_{\text{Im } \psi} = \Omega^2 \psi^* g, \quad (1.22)$$

em que $\psi^* g$ denota o pullback da métrica g . As transformações conformes preservam toda a estrutura causal entre as variedades. Com efeito, em $\psi(\mathcal{M}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$, existem duas métricas – \tilde{g} e $\psi^* g$ – tais que as curvas que são causais em relação a uma delas também são em relação à outra. As geodésicas do tipo luz também coincidem em relação a ambas as métricas, apesar disso não acontecer com as geodésicas em geral [6]. Ainda, as aplicações conformes ajudam a entender o comportamento das geodésicas no infinito com a ajuda dos *diagramas de Penrose* que expõem a estrutura causal dos eventos de um espaço-tempo por meio de sua extensão conforme. Assim, a fronteira de todos os espaços-tempos assintoticamente planos pode ser decomposta como a união dos seguintes elementos:

- O ponto final i^0 da imagem de todas as curvas do tipo espaço em (\mathcal{M}, g) é chamado *infinito tipo espaço*.
- O ponto final i^+ da imagem de todas as curvas do tipo tempo direcionadas para o futuro em (\mathcal{M}, g) é denominado *infinito futuro tipo tempo*.
- O ponto final i^- da imagem de todas as curvas do tipo tempo direcionadas para o passado em (\mathcal{M}, g) é chamado de *infinito passado tipo tempo*.
- O ponto final \mathcal{I}^+ da imagem de todas as curvas do tipo luz direcionadas para o futuro em (\mathcal{M}, g) é denominado *infinito futuro nulo*.
- O ponto final \mathcal{I}^- da imagem de todas as curvas do tipo luz direcionadas para o passado em (\mathcal{M}, g) é chamado de *infinito passado nulo*.

Capítulo 2

A Geometria de Schwarzschild

Imagine my joy at the feasibility of general covariance and the result that the equations give the perihelion motion of Mercury correctly. For a few days I was beside myself with joyous excitement.

Albert Einstein

Em 1916, o físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild (1873 - 1916) obteve a primeira e de mais vasta aplicabilidade prática solução exata das equações de Einstein no vácuo para a região exterior de uma distribuição esférica e estática (sem rotação) de massa m . Dessa forma, ela descreve objetos astrofísicos sem ou com pouca rotação sobre seu próprio eixo, como o Sol e outras estrelas. A métrica de Schwarzschild é a única solução da teoria da relatividade geral que foi completamente comprovada experimentalmente e seu sucesso, muitas vezes, confunde-se com o da teoria como um todo [11]. Dentre os testes clássicos providos por esta solução, está a previsão do avanço anual do periélio de Mercúrio, o cálculo do encurvamento da trajetória da luz ao passar nas proximidades de corpos com grande massa, o cálculo do desvio gravitacional para o vermelho e o atraso temporal de Shapiro.

Mais tarde, a solução de Schwarzschild foi reconhecida como a solução que representa a região tanto exterior como interior de um buraco negro sem rotação. De fato, apenas na década de 60 os buracos negros deixaram de ser considerados apenas um artefato matemático e ganharam significado físico com a extensão da métrica de Schwarzschild e a subsequente interpretação do chamado raio de Schwarzschild como um horizonte de eventos [14].

2.1 A Métrica de Schwarzschild

No vácuo, o tensor de energia-momento é identicamente nulo de tal maneira que as equações de Einstein (1.7) assumem a forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.1) pela inversa da métrica $g^{\mu\nu}$, conclui-se que $R \equiv 0$ porquanto $R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$. Como resultado, no vácuo, as equações de Einstein reduzem-se a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2)$$

Como foi dito anteriormente, Schwarzschild tentou resolver as Equações (2.2) no contexto mais simples possível: fora de uma fonte massiva estática com simetria esférica. A métrica de uma fonte estática deve ser independente da coordenada temporal t e o elemento de linha não pode conter termos da forma $dx^i dt$ na medida em que não são invariantes sob a transformação $t \mapsto -t$. Por sua vez, uma fonte com simetria esférica não pode gerar um espaço-tempo cujo elemento de linha contenha os termos $d\theta dr$ e $d\phi dr$. Levando tudo isso em consideração, pode-se demonstrar que uma métrica estática esfericamente simétrica pode ser escrita genericamente por [1, 3, 4]

$$ds^2 = -e^{A(r)} dt^2 + e^{B(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.3)$$

em que $A(r)$ e $B(r)$ são funções reais diferenciáveis da coordenada radial r . Para uma métrica desta forma, após o cálculo dos símbolos de Christoffel, encontra-se os seguintes valores para os tensores de Ricci [3, 4]:

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}A'' + \frac{1}{4}A'B' - \frac{1}{4}A'^2 + \frac{B'}{r}; \quad (2.4)$$

$$R_{tt} = e^{A-B} \left(\frac{1}{2}A'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}A'^2 + \frac{A'}{r} \right); \quad (2.5)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-B} \left[\frac{1}{2}r (B' - A') - 1 \right] + 1; \quad (2.6)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta; \quad (2.7)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu; \quad (2.8)$$

em que a plica denota a derivada em relação a r . Assim, considerando a Equação (2.2), tem-se das Equações (2.4) e (2.5) que

$$A' = -B', \quad \text{i.e.,} \quad A = -B + k, \quad (2.9)$$

sendo k uma constante de integração que, conquanto, pode ser absorvida na métrica (2.3) fazendo-se uma mudança na escala de tempo $t \mapsto e^{-\frac{k}{2}}t$, de tal forma que $A = -B$. Com isso, das Expressões (2.2) e (2.6), obtém-se

$$e^A(1 + rA') = 1 \quad (2.10)$$

que pode ser reescrita como

$$e^A + r(e^A)' = (re^A)' = 1. \quad (2.11)$$

Esta última equação, por sua vez, pode ser integrada facilmente, resultando em

$$e^A = 1 - \frac{r_S}{r}, \quad (2.12)$$

em que r_S é outra constante de integração, conhecida como *raio de Schwarzschild*. Por outro lado, tratando o espaço de Minkowski perturbativamente a fim de introduzir os efeitos gravitacionais Newtonianos, encontra-se que em uma região muito distante de um corpo

esférico de massa M – i.e., no limite de campo fraco – a componente g_{tt} da métrica que representa tal região pode ser escrita da seguinte forma [1, 2]

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.13)$$

Como o campo de Schwarzschild deve concordar assintoticamente com a teoria Newtoniana na região de um campo gravitacional fraco, pode-se fazer a identificação $r_S = 2M$ e, dessa forma, o parâmetro M é interpretado como a massa do corpo esférico central fonte da curvatura. É preciso salientar, no entanto, que fora do limite de campo fraco o parâmetro M engloba a energia de ligação gravitacional – energia que seria requerida para dispersar a matéria de uma estrela para o infinito – e não é simplesmente a soma das massas dos constituintes do corpo responsável pela curvatura do espaço-tempo [2, 4].

Portanto, a métrica de Schwarzschild é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.14)$$

É interessante notar que, da mesma forma da gravitação Newtoniana, o campo gravitacional externo não depende da maneira como a massa está radialmente distribuída e apenas a massa total importa. Além disso, observa-se que os coeficientes da métrica (2.14) divergem quando $r = 0$ ou $r = 2M$, i.e., tais pontos representam *singularidades* do espaço-tempo de Schwarzschild. Contudo, enquanto a singularidade localizada em $r = 2M$ pode ser removida através de uma mudança de coordenadas, a outra não. Um método prático que ajuda a decidir se uma singularidade é real ou removível consiste em analisar os escalares formados a partir do tensor de curvatura de Riemann já que tais tensores divergem apenas em singularidades reais [2]. Por exemplo, no caso da métrica de Schwarzschild, o chamado *escalar de Kretschmann* é dado por [2]

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.15)$$

confirmando que a singularidade na origem é real. Já a superfície $r = 2M$ é bem comportada e será interpretada como o horizonte de eventos de um buraco negro na seção 2.4.

Na verdade, o campo de Schwarzschild é gerado até mesmo por fontes não estáticas – isto é, que mudam com o tempo. De fato, o famoso *teorema de Birkhoff* – demonstrado pelo matemático estadunidense George David Birkhoff (1884 - 1944) em 1923 – diz que toda solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo é necessariamente estática. Para demonstrar este teorema basta adaptar a derivação de Schwarzschild feita acima para o caso em que A e B são funções reais diferenciáveis não somente do raio r mas também da coordenada temporal t . O leitor interessado pode encontrar a demonstração do teorema de Birkhoff nas referências [2, 4]. Uma consequência deste resultado é que uma estrela que pulsa radialmente gera o mesmo campo gravitacional externo do que uma estrela em repouso e, dessa forma, não emite radiação gravitacional [3, 4]. Com efeito, para que uma estrela emita ondas gravitacionais, ela deve oscilar de uma forma quadrupolar e este modo de oscilação não possui simetria esférica [4].

Outro importante resultado demonstrado pelo físico canadense Werner Israel diz que toda solução de buraco negro estática das equações de Einstein no vácuo é necessariamente esfericamente simétrica e, portanto, concorda com a solução de Schwarzschild [7].

2.2 O Movimento no Espaço-tempo de Schwarzschild

Nesta seção, a partir de uma abordagem variacional, serão encontradas as equações de movimento para uma partícula massiva que se desloca no espaço-tempo de Schwarzschild. Em acordo com as Expressões (1.12) e (2.14), a lagrangiana para uma geodésica do tipo tempo é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\right],\end{aligned}\quad (2.16)$$

em que o ponto denota a derivada com respeito ao tempo próprio τ . Neste caso, as equações de movimento podem ser simplificadas tendo em vista o fato de a métrica de Schwarzschild ser esfericamente simétrica. Com efeito, a equação de Euler-Lagrange para a coordenada angular θ resulta em

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\theta}\right) - \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.17)$$

Daí, observa-se que

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2}$$

é uma solução da equação anterior, i.e., como no caso Newtoniano, o movimento na geometria de Schwarzschild também é planar. Logo, devido à simetria esférica da métrica de Schwarzschild, pode-se fixar, sem perda de generalidade, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Além disso, tanto o tempo t quanto o ângulo azimutal ϕ são variáveis canônicas cíclicas e, assim, tem-se as seguintes respectivas integrais de movimento

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t} = E = \text{constante} \quad (2.18)$$

e

$$r^2\dot{\phi} = L = \text{constante}, \quad (2.19)$$

em que já foi utilizado o valor $\theta = \frac{\pi}{2}$. Em analogia com a aproximação Newtoniana, pode-se interpretar as constantes de movimento E e L , respectivamente, como a energia e o momento angular da partícula teste, ambos por unidade de massa [1, 2]. Ainda, lembrando que, por definição de tempo próprio, tem-se $2\mathcal{L} = -1$ ao longo da geodésica e isolando \dot{t} e $\dot{\phi}$ nas equações anteriores e substituindo em (2.16), obtém-se

$$\frac{E^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1-\frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 1 \quad (2.20)$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = E^2, \quad (2.21)$$

em que foi definido o potencial central efetivo

$$V_{\text{ef}} := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (2.22)$$

Este potencial, no caso em que $\frac{L}{M} > 2\sqrt{3}$, possui um máximo e um mínimo. Além disso, observa-se que o potencial efetivo

$$V_{\text{eff}} := \frac{1}{2}(V_{\text{ef}} - 1) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} \quad (2.23)$$

difere do Newtoniano apenas pela adição do último termo. Desta forma, para grandes valores de r onde o termo $\sim -\frac{1}{r}$ domina, o potencial V_{eff} tende ao Newtoniano enquanto a correção relativística atrativa $\sim -\frac{1}{r^3}$ se torna cada vez mais importante com o decrescimento de r (Figura 2.1).

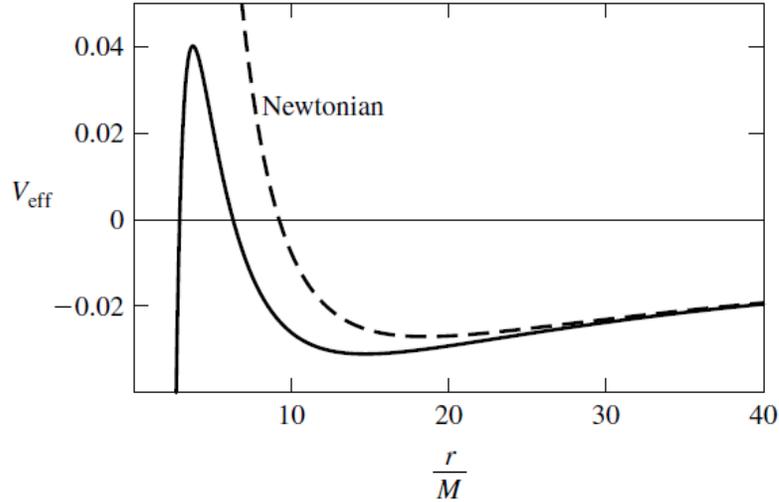


Figura 2.1: Comparação entre os potenciais efetivos relativístico e Newtoniano para um movimento radial no espaço-tempo gerado por um corpo esférico com parâmetro $\frac{L}{M} = 4.3$. Em particular, nota-se que a barreira centrífuga infinita da teoria Newtoniana é substituída por uma barreira de altura finita. (Reproduzida de [1])

Para encontrar a forma da órbita de Schwarzschild $r = r(\phi)$, será utilizada a notação usual $r' := \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$ e $u := \frac{1}{r}$, na qual a equação (2.20) é escrita como

$$u'^2 + u^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2M}{L^2}u + 2Mu^3. \quad (2.24)$$

Diferenciando a equação (2.24) em relação a coordenada angular ϕ , encontra-se

$$u' \left(u'' + u - 3Mu^2 - \frac{M}{L^2} \right) = 0. \quad (2.25)$$

Assim, uma partícula massiva no campo de Schwarzschild realiza um movimento circular – no caso em que $u' = 0$ – ou então realiza um movimento no qual é satisfeita a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$u'' + u = \frac{M}{L^2} + 3Mu^2. \quad (2.26)$$

Observa-se que a Equação (2.26) é idêntica a sua análoga Newtoniana mas com a adição do último termo não linear responsável pelos efeitos já mencionados. Cada uma das Figuras 2.2 e 2.3 mostra no plano (ϕ, r) dois tipos de órbitas, respectivamente, fechadas e abertas, que podem ocorrer na geometria de Schwarzschild.

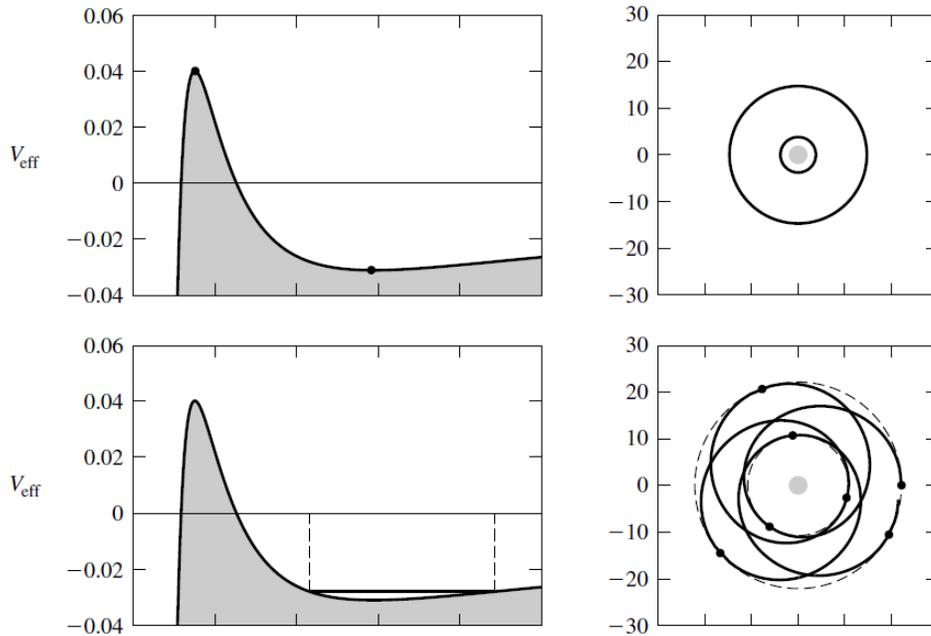


Figura 2.2: Dois tipos possíveis de órbitas fechadas com seus respectivos potenciais efetivos em função de $\frac{r}{M}$. Ambas as trajetórias são parametrizadas por $\frac{L}{M} = 4.3$ sendo que a linha horizontal representa o valor de $\mathcal{E} = \frac{E^2 - 1}{2}$. Na parte superior é mostrada duas órbitas circulares – uma estável e outra instável – indicadas pelos pontos no gráfico do potencial efetivo. Já a parte inferior mostra uma órbita fechada limitada pela circunferência tracejada. (Reproduzida de [1])

2.2.1 Órbitas Circulares

Para uma órbita circular, tem-se que $\dot{r} = 0$, com o raio $r = r_0$ sendo uma raiz da equação $V_{\text{ef}} = E^2$. Além disso, a órbita será estável se $V_{\text{ef}}(r_0)$ for um mínimo do potencial efetivo V_{ef} ou será instável caso for um máximo. A equação

$$\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{6ML^2}{r^4} = 0 \quad (2.27)$$

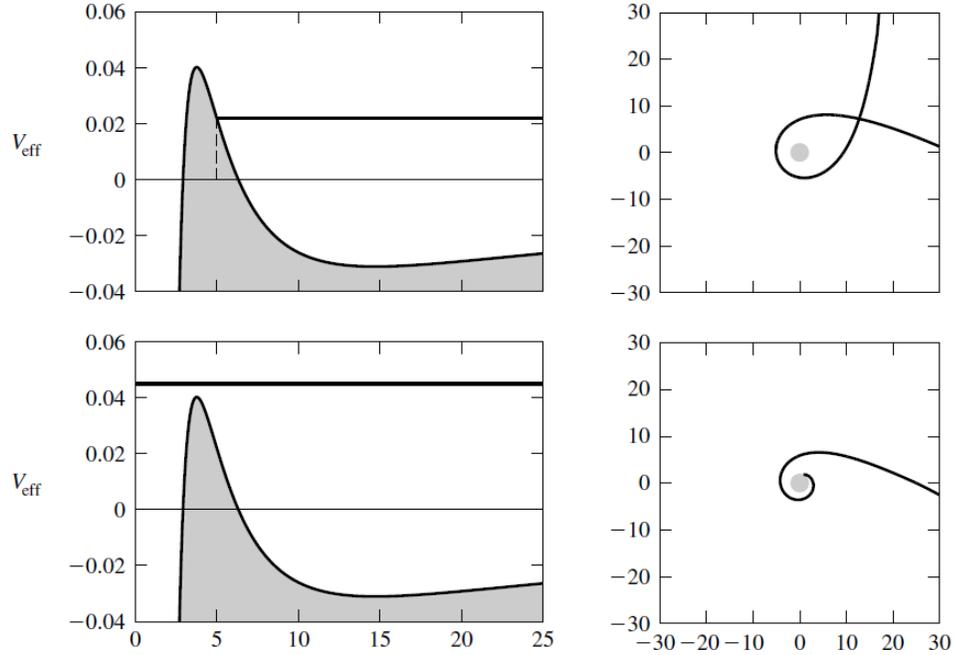


Figura 2.3: Dois tipos possíveis de órbitas abertas com seus respectivos potenciais efetivos em função de $\frac{r}{M}$. Ambas as trajetórias são parametrizadas por $\frac{L}{M} = 4.3$ sendo que as linhas horizontais representam os valores de $\mathcal{E} = \frac{E^2 - 1}{2}$. Na parte superior é mostrada a órbita de uma partícula que vem do infinito, rodeia o centro de atração e se afasta novamente para o infinito. Já a parte inferior mostra uma partícula que vem do infinito, rodeia a massa central mas, por sua vez, cai em direção ao centro. (Reproduzida de [1])

fornece os seguintes valores para os raios onde o potencial é um máximo ou um mínimo

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{L} \right)^2} \right]. \quad (2.28)$$

Dessa forma, quando $\frac{L}{M} < 2\sqrt{3}$, o potencial efetivo não possui pontos críticos, i.e., não existem órbitas estáveis (Figura 2.4). Inserindo os valores para o raio encontrados na Expressão (2.28) na segunda derivada do potencial efetivo em relação a r ,

$$J(r) := r^5 \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} = 6L^2 r - 4Mr^2 - 24ML^2, \quad (2.29)$$

tem-se que

$$J(r_+) > 0 \quad \text{e} \quad J(r_-) < 0, \quad (2.30)$$

de modo que $V_{\text{ef}}(r_+)$ é um mínimo enquanto $V_{\text{ef}}(r_-)$ é um máximo do potencial. Portanto, da Expressão (2.28), conclui-se que uma órbita estável existe somente para um raio $r > 6M$, sendo a órbita circular crítica que separa as trajetórias estáveis das instáveis chamada de *última órbita circular estável* (ISCO, na sigla em inglês). Por fim, isolando L^2 na

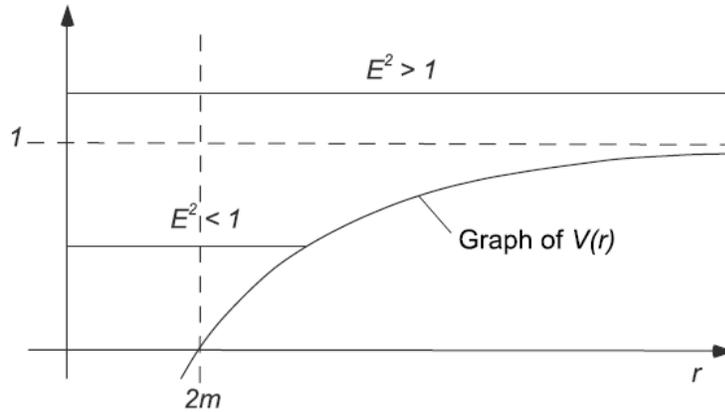


Figura 2.4: Potencial efetivo V_{ef} para um movimento radial no espaço-tempo gerado por um corpo esférico de massa m com parâmetro $\frac{L}{m} < 2\sqrt{3}$. (Reproduzida de [7])

Equação (2.27) e substituindo em (2.20), obtém-se a energia da partícula em função do raio:

$$E(r) = \frac{r - 2M}{\sqrt{r(r - 3M)}}. \quad (2.31)$$

Pode-se observar desta expressão que órbitas circulares são permitidas apenas na região $r > 3M$ e que a energia da última órbita circular estável é igual a $E_{\text{ISCO}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2.3 Aplicações da Métrica de Schwarzschild

Além de apresentar a solução das equações de Einstein no vácuo para a região exterior de um corpo esférico sem rotação de massa M , Schwarzschild também derivou a precessão do periélio de Mercúrio e a curvatura dos raios de luz próximo ao Sol, efeitos estes calculados por Einstein utilizando a aproximação pós-Newtoniana [7]. Como o espaço-tempo da região exterior ao Sol, em uma excelente aproximação, é representado pela geometria de Schwarzschild, historicamente, tais efeitos permitiram o teste experimental da relatividade geral e sua consolidação como uma teoria física bem sucedida. Nesta seção, estes dois importantes efeitos serão deduzidos utilizando a métrica de Schwarzschild.

2.3.1 Avanço do Periastro

A precessão da órbita de Mercúrio, anunciada pelo astrônomo e matemático francês Urbain Le Verrier (1811-1877) em 1859, era um dos problemas mais importantes da mecânica celestial no início do século XX e foi resolvido apenas com o advento da teoria de Einstein. Já que as correções para os planetas do sistema solar são pequenas, o termo não linear da Equação (2.26) será tratado como uma perturbação. Na teoria Newtoniana, a órbita de uma partícula massiva é uma elipse [5]

$$u(\phi) = \frac{1}{p}(1 + e \cos \phi), \quad (2.32)$$

com

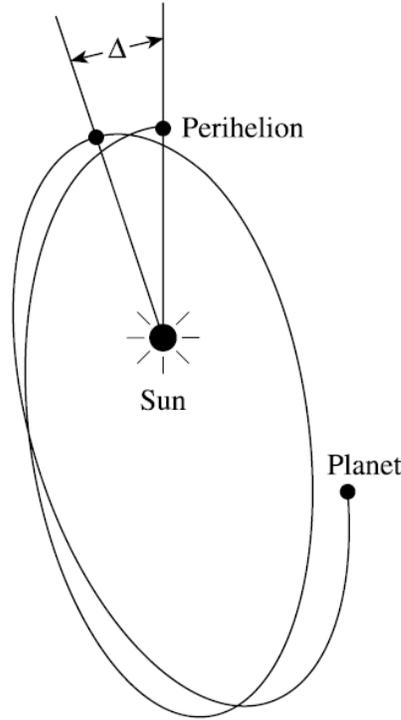


Figura 2.5: Avanço do periélio de um planeta do sistema solar. (Reproduzida de [3])

$$p = a(1 - e^2) = \frac{L^2}{M}, \quad (2.33)$$

em que a é o semieixo maior e e é a excentricidade da elipse. Agora, substituindo a Expressão (2.32) no termo perturbativo não linear da equação de movimento (2.26), obtém-se como uma primeira aproximação

$$u'' + u = \frac{M}{L^2} + \frac{3M^3}{L^4}(1 + e \cos \phi)^2, \quad (2.34)$$

cuja solução é dada por [3, 5, 7]

$$u(\phi) = \frac{M}{L^2}(1 + e \cos \phi) + \frac{3M^3}{L^4} \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi + e\phi \sin \phi \right). \quad (2.35)$$

Em comparação ao resultado Newtoniano, o único termo não periódico é o último da Expressão (2.35). Dessa forma, a fim de encontrar a precessão dos astros, a equação pode ser reduzida para

$$u(\phi) \approx \frac{Me}{L^2} \left(\cos \phi + \frac{3M^2}{L^2} \phi \sin \phi \right) \quad (2.36)$$

$$\approx \frac{Me}{L^2} \cos \left[\left(1 - \frac{3M^2}{L^2} \right) \phi \right], \quad (2.37)$$

em que foram utilizadas as aproximações $\cos \beta \approx 1$ e $\sin \beta \approx \beta$ para um suposto pequeno ângulo $\beta = \frac{3M^2\phi}{L^2}$ – de fato, este é o caso para os planetas do sistema solar – além da identidade trigonométrica

$$\cos(\phi - \beta) = \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta. \quad (2.38)$$

Assim, u é uma função periódica de período maior do que 2π e a órbita pode ser considerada uma elipse que rotaciona ao redor de um de seus focos por um ângulo (Figura 2.5)

$$\Delta = \frac{2\pi}{1 - \frac{3M^2}{L^2}} - 2\pi \approx \frac{6\pi M^2}{L^2} = \frac{6\pi M}{a(1 - e^2)}. \quad (2.39)$$

Nota-se que este efeito relativístico é mais pronunciado quando o semieixo maior da órbita é pequeno e a excentricidade é grande. Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e, assim, sua órbita apresenta a maior precessão do periélio. Substituindo os valores dos parâmetros para Mercúrio na Expressão (2.39), encontra-se o valor de 43 segundos de arco por século em total acordo com as observações experimentais.

2.3.2 Deflexão dos Raios de Luz

Neste momento, será calculada a equação de movimento dos fótons no campo de Schwarzschild a partir da lagrangiana de uma geodésica do tipo luz. Em acordo com as Expressões (1.12) e (2.14), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

em que λ é um parâmetro afim satisfazendo $\mathcal{L} = 0$. Da mesma forma que as partículas massivas, a partir das equações de Euler-Lagrange, conclui-se que a trajetória dos fótons também é planar ($\theta \equiv \frac{\pi}{2}$) e as variáveis canônicas cíclicas t e ϕ resultam, respectivamente, nas seguintes integrais de movimento

$$\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E = \text{constante} \quad (2.41)$$

e

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L = \text{constante}. \quad (2.42)$$

Dessa forma, a equação (2.20) é substituída por

$$\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 0 \quad (2.43)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{ef}^{\text{fóton}}(r) = E^2 \quad (2.44)$$

para o potencial efetivo

$$V_{ef}^{\text{fóton}}(r) := \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}. \quad (2.45)$$

Observa-se que o termo de atração Newtoniana $\sim -\frac{1}{r}$ não aparece neste caso, o que corresponde ao fato de na teoria de Newton os fótons não sentirem campos gravitacionais na medida em que não possuem massa. Por outro lado, a correção relativística $\sim -\frac{1}{r^3}$ se mantém e é a responsável pelo curvamento dos raios de luz em campos gravitacionais fortes (Figura 2.6).

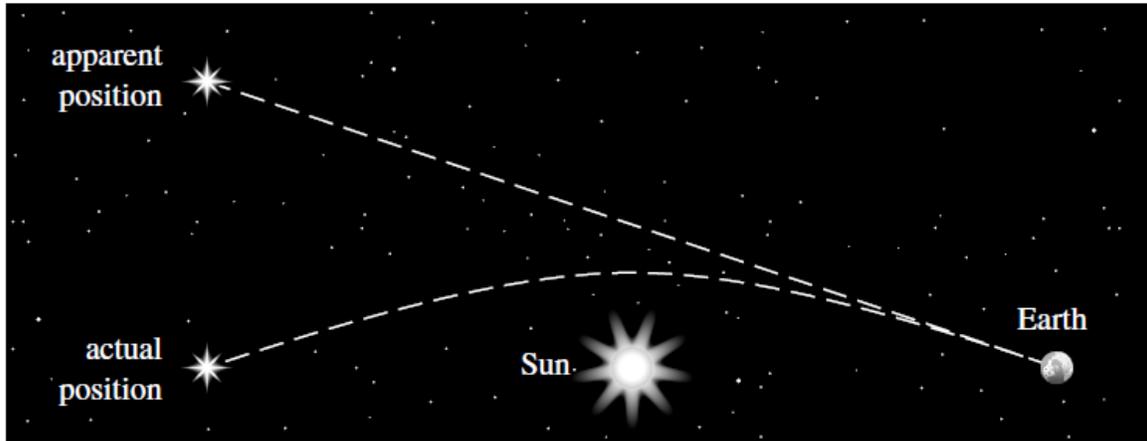


Figura 2.6: Deflexão da luz causada pelo Sol causando o deslocamento aparente da posição de uma estrela. (Reproduzida de [1])

Com isso, o análogo da Equação (2.26) para os fótons é dada por

$$u'^2 + u^2 = \frac{E^2}{L^2} + 2Mu^3. \quad (2.46)$$

Diferenciando esta última equação em relação a coordenada angular ϕ , chega-se na seguinte equação de movimento

$$u'' + u = 3Mu^2, \quad (2.47)$$

já que o caso $u' = 0$ é excluído na medida em que o potencial efetivo $V_{ef}^{\text{fóton}}$ não apresenta mínimo (Figura 2.7), i.e., não existem órbitas circulares estáveis para os fótons. Para o sistema solar, o termo não linear da Equação (2.47) é muito pequeno e, dessa forma, será considerado como uma perturbação. Se tal termo fosse negligenciado, a trajetória da luz seria uma reta:

$$u = b^{-1} \sin \phi, \quad (2.48)$$

sendo b uma constante conhecida como *parâmetro de impacto*. Inserindo este resultado no termo perturbativo não linear da Equação (2.47), tem-se

$$u'' + u = 3Mb^{-2} \sin^2 \phi \quad (2.49)$$

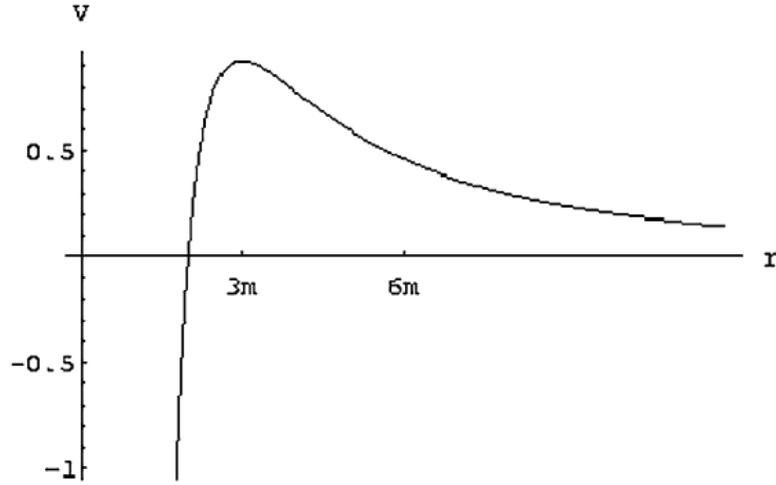


Figura 2.7: Potencial efetivo para o movimento de uma partícula sem massa no campo de Schwarzschild parametrizado por $L = 5$. (Reproduzida de [5])

cuja solução é dada por [7]

$$u = b^{-1} \sin \phi + \frac{3M}{2b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right). \quad (2.50)$$

Considerando a simetria esférica do problema, no caso em que $u \rightarrow 0$ – i.e., $r \rightarrow \infty$ – tem-se que $\phi_\infty = 0 - \delta$ ou $\phi_\infty = \pi + \delta$, sendo $\delta \ll 1$ muito pequeno. Com isso, fazendo as aproximações $\sin \phi_\infty \sim \phi_\infty = -\delta$ e $\cos(2\phi_\infty) \sim 1$, a Equação (2.50) se transforma em

$$0 = -\frac{\delta}{b} + \frac{3M}{2b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \quad (2.51)$$

da qual se conclui que

$$\delta = \frac{2M}{b}. \quad (2.52)$$

Assim, a deflexão angular total da luz (Figura 2.8) é igual a

$$\Delta\phi_{\text{luz}} = 2\delta = \frac{4M}{b}. \quad (2.53)$$

A Expressão (2.53) mostra que a deflexão é maior para estrelas mais próximas do Sol que, entretanto, podem ser vistas apenas em eclipses solares. Dessa forma, a predição da deflexão da luz foi verificada experimentalmente pela primeira vez em 1919 por duas expedições diferentes que analisaram as posições das estrelas em eclipses solares no Brasil e em São Tomé e Príncipe.

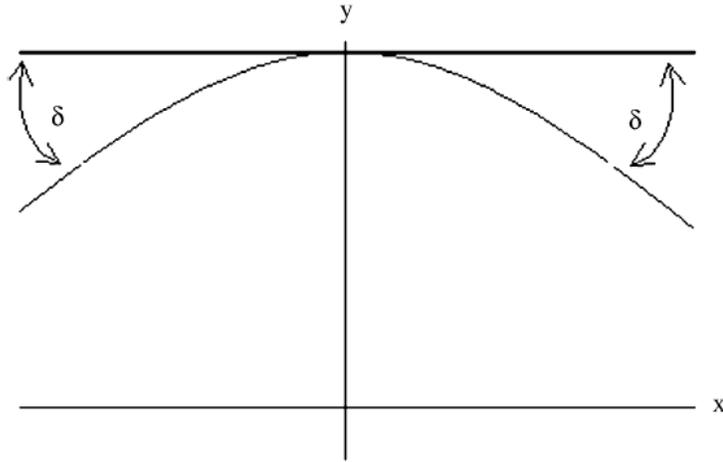


Figura 2.8: Deflexão total da luz. (Reproduzida de [5])

2.4 A Extensão de Kruskal-Szekeres do Espaço-tempo de Schwarzschild

Já foi visto que a métrica de Schwarzschild possui uma aparente singularidade em $r_S = 2M$ que pode ser removida com uma mudança de coordenadas. Nesta seção, será apresentada a máxima extensão da solução de Schwarzschild, conhecida como *espaço-tempo de Kruskal-Szekeres*. Vale ressaltar que as implicações físicas desta solução estendida são questionáveis já que buracos negros astrofísicos são formados a partir do colapso gravitacional enquanto a solução de Kruskal-Szekeres consiste em um espaço-tempo estático [8].

Para encontrar o espaço-tempo de Kruskal-Szekeres, será feita a continuação analítica de um sistema de coordenadas que serve como parâmetro afim para as geodésicas radiais do tipo luz. Fixando os valores das coordenadas angulares θ e ϕ (movimento radial), a métrica de Schwarzschild reduz-se a

$$ds_{\text{Sch}}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (2.54)$$

Neste espaço reduzido, conforme (1.14) e (2.16), as geodésicas do tipo luz devem satisfazer a equação

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \quad (2.55)$$

i.e.,

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r}{r - 2M}. \quad (2.56)$$

Dessa forma, tem-se que

$$t = \pm r_*(r), \quad (2.57)$$

sendo a integral indefinida

$$r_*(r) := \int \frac{r}{r-2M} dr = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (2.58)$$

conhecida como *coordenada tartaruga de Regge-Wheeler*. Como $r \in (2M, \infty)$, tem-se que $r_* \in (-\infty, \infty)$ já que $\lim_{r \rightarrow 2M} r_* \rightarrow -\infty$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} r_* \rightarrow \infty$. Com isso, pode-se introduzir as chamadas *coordenadas tartaruga do cone de luz*

$$\begin{cases} u = t - r_*(r) \\ v = t + r_*(r) \end{cases} \quad (2.59)$$

que, com u e v constantes, representam as geodésicas do tipo luz da métrica de Schwarzschild no plano (r, t) (Figura 2.9).

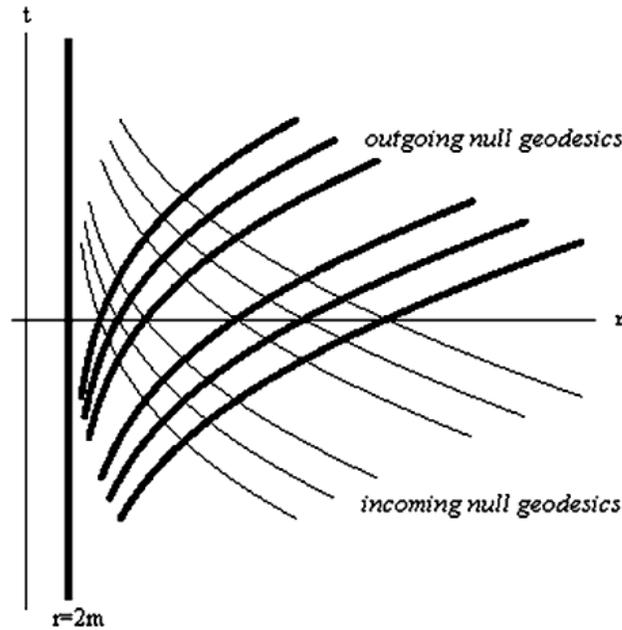


Figura 2.9: Geodésicas do tipo luz da métrica de Schwarzschild na 2-esfera. As linhas mais grossas são as geodésicas nas quais a coordenada u é constante enquanto as mais finas são aquelas tais que v é constante. Já a linha vertical representa a singularidade na superfície $r = 2M$. (Reproduzida de [6])

Diferenciando (2.58) e (2.59), obtém-se

$$dt = \frac{du + dv}{2} \quad \text{e} \quad dr = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{du - dv}{2}, \quad (2.60)$$

e, assim, a métrica reduzida de Schwarzschild pode ser escrita como

$$ds_{\text{TCN}}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) du dv. \quad (2.61)$$

Ainda, combinando a expressão da coordenada tartaruga de Regge-Wheeler com as novas coordenadas, tem-se

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r} \exp\left[-\frac{r}{2M}\right] \exp\left[\frac{v-u}{4M}\right], \quad (2.62)$$

de tal forma que o elemento de linha (2.61) se torna

$$ds_{\text{TCN}}^2 = -\frac{2M}{r} \exp\left[-\frac{r}{2M}\right] \exp\left[\frac{v-u}{4M}\right] du dv. \quad (2.63)$$

Agora, introduzindo-se as novas coordenadas afins ao longo das geodésicas radiais do tipo luz

$$\begin{cases} U = -\exp\left[-\frac{u}{4M}\right] \\ V = \exp\left[\frac{v}{4M}\right] \end{cases}, \quad (2.64)$$

com $U \in (-\infty, 0)$ e $V \in (0, \infty)$, conhecidas como *coordenadas do cone de luz*, a métrica de Schwarzschild reduzida (2.63) é reescrita como

$$ds_{\text{CN}}^2 = -\frac{32M^3}{r} \exp\left[-\frac{r}{2M}\right] dU dV, \quad (2.65)$$

sendo $r = r(U, V)$ implicitamente determinado pela equação transcendental

$$r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) = 2M \ln(-UV). \quad (2.66)$$

Por fim, fazendo uma última mudança de variáveis

$$\begin{cases} T = \frac{V+U}{2} \\ X = \frac{V-U}{2} \end{cases}, \quad (2.67)$$

com $X \in (-\infty, \infty)$ e $T^2 < X^2 - 1$, e reintroduzindo as coordenadas angulares θ e ϕ , a métrica de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Szekeres é escrita como

$$ds_{\text{KS}}^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left[-\frac{r}{2M}\right] (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.68)$$

sendo $r = r(X, T)$ e $t = t(X, T)$ implicitamente determinados, respectivamente, pelas equações transcendentais

$$\left(1 - \frac{r}{2M}\right) \exp\left[\frac{r}{2M}\right] = T^2 - X^2 \quad (2.69)$$

$$\frac{t}{2M} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right) = 2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{X}\right). \quad (2.70)$$

O elemento de linha (2.68) descreve o espaço-tempo tanto fora como dentro do raio de Schwarzschild, i.e., um observador não vê nada especial ao atravessá-lo. Além disso, é importante observar que a transformação de coordenadas realizada anteriormente não é sobrejetiva

mas sua imagem é uma subvariedade aberta do espaço-tempo de Kruskal-Szekeres [6]: no plano (X, T) , a variedade de Kruskal-Szekeres é a região infinita situada entre os dois ramos da hipérbole

$$T^2 - X^2 = 1, \quad (2.71)$$

que é a fronteira da variedade e, de acordo com (2.69), corresponde a imagem de $r = 0$ no plano (X, T) , que é uma genuína singularidade tanto da métrica de Schwarzschild como da de Kruskal-Szekeres. Usando novamente a Equação (2.69), observa-se que o par de retas $T = \pm X$ – que é uma hipersuperfície do tipo luz – corresponde ao raio de Schwarzschild $r_S = 2M$. De fato, como no caso de Minkowski, as geodésicas do tipo luz são dadas por $X = \pm T + k$, em que k é uma constante, e o vetor tangente a qualquer curva é do tipo luz ou do tipo tempo e orientado para o futuro se sua inclinação α com respeito ao eixo X satisfizer $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$. Já as superfícies dadas por r constante, representadas por hipérbolas na Figura 2.10, são do tipo espaço para $r < r_S$ e do tipo tempo para $r > r_S$ [6].

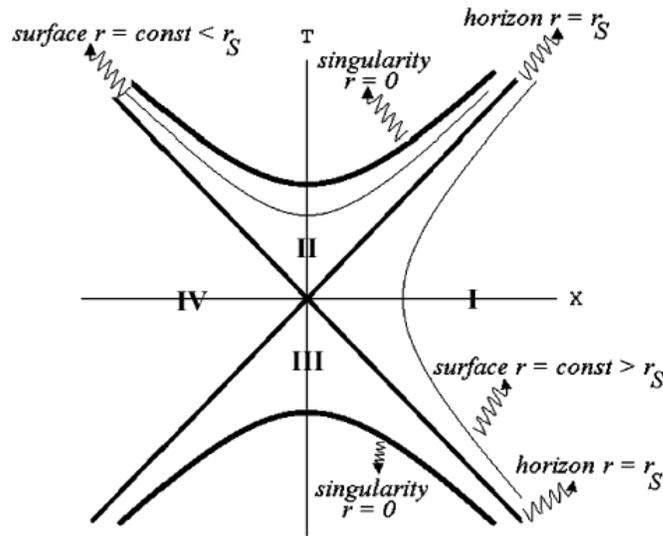


Figura 2.10: Diagrama bidimensional do espaço-tempo de Kruskal-Szekeres no qual cada ponto representa uma 2-esfera gerada pelas coordenadas angulares θ e ϕ . (Reproduzida de [6])

Toda curva que possui algum ponto dentro da região II não pode mais escapar para o infinito na medida em que, para que isso ocorresse, ela deveria ter vetores tangentes do tipo espaço, pelo menos em alguns de seus pontos (Figura 2.11). Com efeito, o ponto final de toda geodésica localizada na região II está localizado na hipérbole $T^2 - X^2 = 1$. Assim, uma curva nunca pode passar pelo horizonte da região II para a I, i.e., nenhum sinal que parte da região II pode alcançar um observador da região I e, dessa forma, esta região corresponde a um buraco negro.

Além do mais, pode-se observar que a região IV não é casualmente conectada a I e também que, ao contrário da região de buraco negro, nenhum sinal consegue adentrar a região III e, por isso, ela é chamada de *buraco branco*. Nela, toda curva causal direcionada para o passado começa na singularidade $r = 0$ e todas as curvas causais direcionadas para o

define uma aplicação conforme ψ de forma que o diagrama de Penrose construído no plano (η, χ) mostra a estrutura causal do espaço-tempo de Kruskal-Szekeres \mathcal{M}_{KS} (Figura 2.12). Nota-se que, como \mathcal{M}_{KS} é assintoticamente plano, sua fronteira pode ser decomposta da forma mostrada na seção 1.3:

$$\partial\psi(\mathcal{M}_{KS}) = i_0 \cup i^+ \cup i^- \cup \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-. \quad (2.73)$$

Além disso, as geodésicas do tipo luz do novo espaço-tempo coincidem com as da solução de Kruskal-Szekeres de modo que possuem inclinação igual a $\pm 45^\circ$ na Figura 2.12, sendo a imagem conforme do horizonte de eventos dada pelas duas linhas internas que dividem o hexágono em quatro regiões distintas (comparar com a Figura 2.10). Dessa forma, o passado causal do infinito futuro nulo é

$$J^-(\mathcal{I}^+) = I \cup III \cup IV \quad (2.74)$$

de tal forma que

$$M \setminus J^-(\mathcal{I}^+) = II \neq \emptyset. \quad (2.75)$$

Assim, a igualdade anterior pode ser usada para definir a região de um buraco negro em um espaço-tempo assintoticamente plano (ver seção 3.1).

Capítulo 3

Buracos Negros

(...) Other researchers argue that it's of utmost importance to unravel the nature of black holes, lest we someday begin to worship them. Sounds ridiculous, but whole segments of humankind have often revered the unknowable, venerating that which cannot be tested experimentally. Come to think of it, many still do in twenty-first-century society.

Eric Chaisson, em “Epic of Evolution: Seven Ages of the Cosmos”

A ideia da existência de objetos extremamente compactos no Universo que nem mesmo a luz poderia escapar de seu forte campo gravitacional – atualmente, chamados de *buracos negros* – remonta ao final do século XVIII quando os filósofos naturais John Michell (1724 - 1793) e Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), com base na teoria Newtoniana, independentemente, elaboraram tal hipótese [6, 8]. De fato, a energia E de uma partícula de massa m sujeita ao campo gravitacional de um corpo esfericamente simétrico de massa M e raio a é igual a

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}, \quad (3.1)$$

em que G é a constante gravitacional de Newton, v é a velocidade da partícula e r é a sua distância ao centro do corpo esférico. Se $E \geq 0$, a partícula pode escapar do campo gravitacional de M e, dessa forma, a velocidade mínima que uma partícula situada na superfície do corpo massivo deve ter para fugir do campo gravitacional deste – denominada *velocidade de escape* – é

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}. \quad (3.2)$$

Considerando a luz formada por pequenas partículas com velocidade finita e constante c , o corpo de massa M seria um buraco negro se

$$r < r_{\text{crit}} = \frac{2GM}{c^2}. \quad (3.3)$$

Como a velocidade da luz é extremamente alta e a constante gravitacional de Newton é pequena, o raio crítico r_{crit} é bem pequeno, da ordem de quilômetros para uma estrela [6]. A Figura 3.1 ilustra a visão atual de um buraco negro.

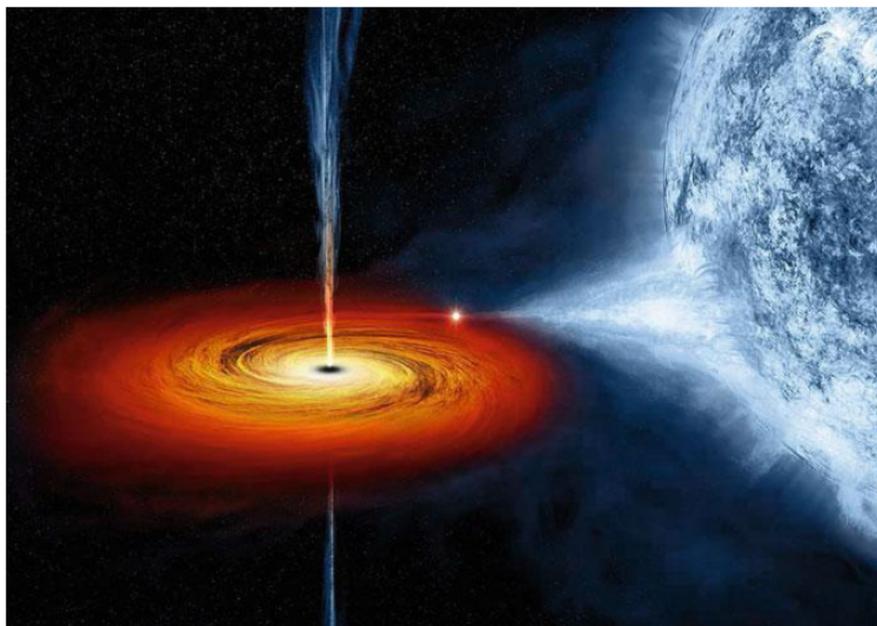


Figura 3.1: Ilustração artística de Cygnus X-1, primeiro objeto identificado como um buraco negro. Ele atrai matéria de uma estrela próxima (em azul) formando o disco de acreção alaranjado. (Reproduzida de [8])

Eles são indiretamente observados como fenômenos astrofísicos como, e.g., núcleos de galáxias ativos ou sistemas binários emissores de raios X. Assim, o buraco negro localizado no centro da Via Láctea, na constelação de Sagitário, é observado indiretamente a partir de seu efeito no movimento das estrelas próximas, que revela um objeto supermassivo em uma pequena região.

Os buracos negros podem ser formados pela colisão de *estrelas compactas* em sistemas binários ou podem ser o resultado final da evolução de uma estrela suficientemente massiva através de seu colapso gravitacional. Em seu estado estacionário, a força gravitacional que age sobre uma estrela é contrabalanceada pela pressão termonuclear gerada pela fusão primeiramente de hidrogênio. Já em seu estágio final, após o combustível termonuclear de uma estrela terminar, dependendo de sua massa ao alcançar a queima estável de hidrogênio, ela pode se tornar uma estrela compacta – uma *anã branca* ou uma *estrela de nêutrons* – ou um buraco negro. As estrelas compactas são muito menores e mais densas do que as ordinárias – uma anã branca pode ter uma massa da mesma ordem da do Sol mas com o raio de apenas alguns milhares de quilômetros enquanto uma estrela de nêutrons com a mesma massa do Sol pode ter um raio de 10 km [1] – e não queimam nenhum tipo de combustível nuclear: enquanto as anãs brancas são suportadas pela pressão de degenerescência dos elétrons (pressão de Fermi dos elétrons) as estrelas de nêutrons são suportadas pelas interações repulsivas entre os núcleos e pela pressão de Fermi dos nêutrons [1, 7].

Quando a massa da estrela é tão grande de modo que, no estágio final de sua evolução, não é possível contrabalancear a força gravitacional ocorre o colapso gravitacional. A Figura 3.2 mostra o espaço-tempo gerado pelo colapso esfericamente simétrico de uma estrela. Nela,

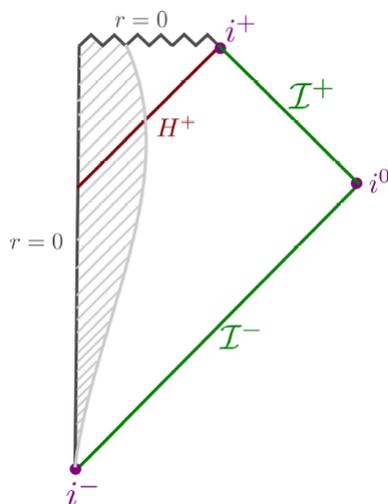


Figura 3.2: Diagrama de Penrose do colapso esférico de uma estrela. A região hachurada é onde acontece o colapso gravitacional esférico da estrela enquanto a região do buraco negro está localizada acima do horizonte de eventos H^+ . (Reproduzida de [14])

o infinito passado nulo \mathcal{I}^- representa uma superfície de Cauchy diferentemente do infinito futuro nulo \mathcal{I}^+ , pois não há curvas causais que saem de \mathcal{I}^+ e chegam ao buraco negro. Por sua vez, a união $\mathcal{I}^+ \cup H^+$ representa uma superfície de Cauchy [14].

3.1 Buracos Negros e a Relatividade Geral

Matematicamente, em termos dos conceitos vistos na Seção 1.3, um buraco negro em um espaço-tempo assintoticamente plano \mathcal{M} é o conjunto \mathfrak{B} que não pertence ao passado causal do infinito futuro do tipo luz $J^-(\mathcal{I}^+)$, i.e.,

$$\mathfrak{B} := \mathcal{M} \setminus J^-(\mathcal{I}^+) \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

O horizonte de eventos de um buraco negro é a sua fronteira $\partial\mathfrak{B}$, que é uma hipersuperfície do tipo luz na medida que é uma fronteira causal. Ela separa duas subvariedades – o buraco negro e seu exterior – e nenhum sinal produzido em \mathfrak{B} pode alcançar a região exterior.

Como foi visto no capítulo 2, no âmbito da relatividade geral, o espaço-tempo de um buraco negro não rotativo é descrito pela solução esfericamente simétrica de Schwarzschild das equações de Einstein no vácuo. No entanto, corpos astrofísicos possuem um momento angular não nulo de tal forma que o colapso gravitacional de tais corpos originam buracos negros rotativos. A solução para este último caso foi encontrada apenas em 1963 pelo matemático neozelandês Roy Kerr. Por sua vez, em 1965, o físico norte-americano Ezra Newman (1929 - 2021) e seus colaboradores encontraram a solução para um buraco negro rotativo e eletricamente carregado.

A solução de Kerr-Newman escrita nas chamadas coordenadas de Boyer-Lindquist é dada

por [6, 7]

$$ds_{\text{KN}}^2 = \left(-1 + \frac{2Mr - q^2}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\alpha \frac{2Mr - q^2}{\rho^2} \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (3.5)$$

em que

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta} \\ \Delta = r^2 + \alpha^2 - 2Mr + q^2 \\ \Sigma^2 = (r^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \Delta \sin^2 \theta \end{cases}. \quad (3.6)$$

Aqui, M é a massa, $J = \alpha M$ é o momento angular e q é a carga elétrica do buraco negro [6, 7]. Ela é uma solução de eletrovácuo – i.e., que satisfaz o sistema de equações acopladas de Maxwell-Einstein – estacionária com simetria axial e assintoticamente plana. Com efeito, os campos vetoriais

$$k \equiv \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \tilde{k} \equiv \frac{\partial}{\partial \phi} = (0, 0, 0, 1) \quad (3.7)$$

são campos de Killing já que suas derivadas de Lie são nulas $L_k g = L_{\tilde{k}} g = 0$. De fato, se $K \in \{k, \tilde{k}\}$, então

$$(L_K g)_{\mu\nu} = K^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu} K^\lambda_{,\mu} + g_{\mu\lambda} K^\lambda_{,\nu} = 0. \quad (3.8)$$

No caso em que $M = \alpha = q = 0$, a métrica de Kerr-Newman reduz-se a de Minkowski enquanto que se $\alpha = q = 0$ mas a massa M é não nula, a geometria (3.5) degenera-se na métrica de Schwarzschild. Agora, se q é o único parâmetro nulo, a métrica de Kerr-Newman reduz-se a de Kerr, com simetria axial e Ricci plana:

$$ds_{\text{Kerr}}^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_0} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{2Mr\alpha^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4Mr\alpha \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi, \quad (3.9)$$

em que

$$\Delta = \Delta_0 = r^2 + \alpha^2 - 2Mr. \quad (3.10)$$

Tem-se ainda o caso em que apenas α se anula, originando a chamada *métrica de Reissner-Nordström*, que é esfericamente simétrica mas não é Ricci plana, e descreve o campo gravitacional gerado por um corpo carregado. É uma solução do sistema de equações acopladas de Maxwell-Einstein [6], todavia, enquanto a solução de Kerr-Newman produz tanto um campo elétrico como um magnético, a de Reissner-Nordström possui apenas o campo elétrico [6].

Sob certas condições, os buracos negros da relatividade geral podem ser inteiramente caracterizados por um pequeno número de parâmetros: a massa M , o momento angular de spin J e a carga q do buraco negro. Este resultado é conhecido como *teorema no-hair*. Dessa forma, a métrica de Kerr-Newman descreve completamente o espaço-tempo de um buraco negro. Por outro lado, devido a um teorema de unicidade, tem-se que os buracos negros são apenas descritos pela solução de Kerr-Newman. Mais especificamente, no caso de um buraco não carregado, vale o seguinte teorema:

Teorema 3.1. Espaços-tempo estacionários – isto é, que possuem um campo de Killing do tipo tempo – com simetria axial que são soluções das equações de Einstein no vácuo são especificados unicamente por dois parâmetros – a massa M e o momento angular J – se eles possuem um horizonte de eventos regular, são suaves na região exterior do horizonte de eventos e são assintoticamente planos.

Os físicos britânicos Roger Penrose e Stephen Hawking (1942 - 2018), trabalhando com hipóteses bastante gerais dentro da relatividade geral, demonstraram a inevitabilidade da criação de singularidades em um colapso gravitacional. No entanto, Penrose propôs a chamada conjectura fraca da censura cósmica que afirma que tais singularidades devem estar contidas em um horizonte de eventos. As singularidades da métrica de Kerr-Newman ocorrem quando ρ e Δ se anulam. A singularidade que ocorre quando $\rho = 0$ é real enquanto a que ocorre se $\Delta = 0$ pode ser removida através de uma mudança de coordenadas. Assim, o horizonte de eventos da métrica de Kerr-Newman está localizado em [8]

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - q^2 - a^2} \quad (3.11)$$

de tal forma que este espaço-tempo representa um buraco negro rotativo eletricamente carregado quando

$$\sqrt{q^2 + a^2} \leq M. \quad (3.12)$$

Buracos negros de Kerr-Newman que satisfazem a condição limite de igualdade na Desigualdade (3.12) são ditos extremos. No caso da métrica de Schwarzschild – em que $\alpha = q = 0$ – a Desigualdade (3.12) sempre é satisfeita e tem-se um horizonte de eventos no raio de Schwarzschild $r_S = 2M$ como já foi visto. Apesar de existir contraexemplos fisicamente razoáveis da criação de singularidades nuas, acredita-se que alguma forma da conjectura seja válida. Por exemplo, pode-se destruir o horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman quase-extremo – i.e., no qual existe um parâmetro real positivo δ , com

$$\delta^2 = M^2 - \alpha^2 - q^2 > 0, \quad \frac{\delta}{M} \ll 1 \quad - \quad (3.13)$$

fazendo-o absorver uma partícula teste, isto é, cujos parâmetros são muito menores do que os do buraco negro de modo que se pode desprezar os efeitos da partícula sobre o espaço-tempo [10]. De fato, se a desigualdade (3.12) não for satisfeita teremos uma singularidade nua.

Ainda, a versão forte da conjectura da censura cósmica afirma que todos os espaços-tempos fisicamente aceitáveis são globalmente hiperbólicos de modo que nenhuma singularidade – a não ser pelo Big Bang – possa ser visível.

3.1.1 O limite estático na métrica de Kerr-Newman

Um observador que percorre uma órbita circular ao longo do plano equatorial de um buraco negro de Kerr-Newman percebe a geometria do espaço-tempo inalterada – por isso, recebe o nome de observador estacionário. Sua velocidade angular medida por um observador localizado no infinito é dada por

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \frac{u^\phi}{u^t}, \quad (3.14)$$

em que u é a 4-velocidade do observador estacionário. Daí, pode-se escrever

$$u = u^t(1, 0, 0, \omega) = u^t(k + \omega\tilde{k}). \quad (3.15)$$

Como a 4-velocidade de uma partícula física é do tipo tempo ou do tipo luz, sua norma é não positiva, i.e.,

$$\langle k + \omega\tilde{k}, k + \omega\tilde{k} \rangle = g_{tt} + 2\omega g_{t\phi} + \omega^2 g_{\phi\phi} \leq 0. \quad (3.16)$$

Da desigualdade anterior, conclui-se que a velocidade angular que um observador estacionário pode ter é limitada:

$$\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max} \quad (3.17)$$

em que

$$\omega_{min} \equiv \Omega - \sqrt{\Omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (3.18)$$

$$\omega_{max} \equiv \Omega + \sqrt{\Omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (3.19)$$

sendo definido

$$\Omega := -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \alpha \frac{2Mr - q^2}{\Sigma^2}. \quad (3.20)$$

A grandeza Ω representa a velocidade angular de um observador cuja 4-velocidade u é ortogonal as hipersuperfícies dadas por $t = \text{const}$, chamado de *observador localmente não rotante* (LNRO, da sigla em inglês) já que seu momento angular é nulo. De fato, a 4-velocidade de tais observadores é igual ao gradiente do tempo:

$$u^\mu = \nabla^{\mu t} = g^{\mu\nu} \partial_\nu t = g^{\mu t}. \quad (3.21)$$

Utilizando as equações de Euler-Lagrange em relação ao ângulo azimutal ϕ , obtém-se que o momento angular de um observador estacionário é dado por

$$L = g_{\phi\phi} \dot{\phi} + g_{\phi t} \dot{t}, \quad (3.22)$$

de modo que, como dito anteriormente, o momento angular de um observador localmente não rotante é nulo:

$$L_{LNRO} = g_{\phi\phi} g^{\phi t} + g_{\phi t} g^{tt} = \delta_\phi^t = 0. \quad (3.23)$$

No entanto, a velocidade angular de um observador localmente não rotante não se anula com respeito ao referencial das estrelas fixas, i.e., uma partícula teste com momento angular nulo rotaciona ao redor do buraco negro com uma velocidade angular igual a Ω vista por um observador distante que está em repouso. Nos polos Norte e Sul do buraco negro – quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ – não há um arrasto rotacional do sistema de referência – i.e., $\Omega = 0$ – enquanto Ω é máximo no plano equatorial. Na direção radial, Ω decresce com a distância r e se anula no infinito ($r = \infty$).

Já os observadores cuja velocidade angular em relação às estrelas fixas é nula são ditos *estáticos*. Neste caso, seu momento angular não é nulo: ao rotacionar, o buraco negro arrasta todos os sistemas de referência e, a fim de permanecer em repouso, a partícula teste precisa

ter um momento angular que contrabalanceie este arrasto. Isso acontece fora do chamado limite estático quando a 4-velocidade do observador tornar-se do tipo luz de tal forma que

$$\langle k, k \rangle = g_{tt} = 0 \quad \text{i.e.,} \quad r_{\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - q^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.24)$$

No caso em que $\Omega^2 = \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}$, tanto ω_{min} como ω_{max} são iguais a Ω e, usando a definição de Ω , encontra-se

$$\Delta = g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = r^2 + \alpha^2 - 2Mr + q^2 = 0. \quad (3.25)$$

cujas raízes são dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - (\alpha^2 + q^2)}, \quad (3.26)$$

sendo que $r_+ = r_H$ corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro. Com isso, qualquer partícula física situada no horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman necessariamente rotaciona com uma velocidade igual a

$$\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2}.$$

3.1.2 A Ergosfera e o Mecanismo de Penrose

A região situada entre o horizonte e o limite estático é denominada ergosfera (Figura 3.3). Ao entrar na ergosfera, todo sinal necessariamente gira na direção de rotação do buraco negro [13].

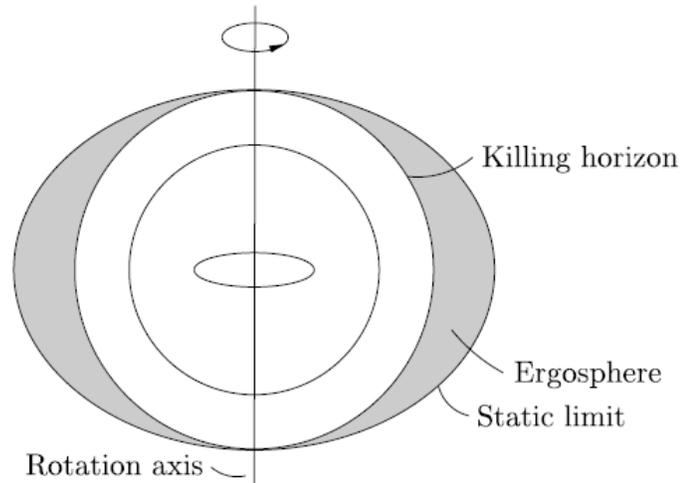


Figura 3.3: Seção da ergosfera de um buraco negro de Kerr-Newman. (Reproduzida de [7])

O campo de Killing k é do tipo espaço dentro da ergosfera de tal forma que a energia E de uma partícula massiva pode ser negativa nesta região. Dessa forma, pode-se extrair energia de um buraco negro fazendo-o absorver corpos com energia total negativa. Com efeito, suponha que um corpo com 4-momento p_0 e energia E_0 seja lançado de uma região assintoticamente plana muito longe do buraco negro, alcança a sua ergosfera, cai livremente uma grande distância dentro dela e é dividido em dois fragmentos tal que a energia de uma das

partículas é negativa. Como a energia total assintótica do sistema $E_0 = \langle p_0, k \rangle$ é constante ao longo de uma geodésica – já que o produto escalar de um vetor de Killing com o vetor tangente a uma geodésica é constante – e a energia do sistema deve ser conservada após a divisão, se a energia E_1 de um dos fragmentos é negativa, a energia E_2 do outro fragmento é positiva e maior do que a inicial:

$$E_2 = E_0 - E_1 > E_0. \quad (3.27)$$

Portanto, se há a absorção do corpo com energia negativa e o outro retorna para o infinito assintoticamente plano, então foi extraída energia do buraco negro. Se o momento angular da partícula absorvida é $L_1 = -\langle \tilde{k}, p_1 \rangle$, em que \tilde{k} é o vetor de Killing rotacional definido em (3.7), como o vetor de Killing $\xi(\Omega_H) = k + \Omega_H \tilde{k}$ é do tipo luz direcionado para o futuro no horizonte de eventos, qualquer partícula de momento p que atravessa o horizonte deve satisfazer

$$\langle p, \xi(\Omega_H) \rangle = E - \Omega_H L > 0, \quad \text{i.e.,} \quad L_1 < \frac{E_1}{\Omega_H} < 0, \quad (3.28)$$

isto é, o momento angular da partícula também deve ser negativo e a sua absorção pelo buraco negro também diminui seu momento angular. Portanto, este processo, conhecido como *mecanismo de Penrose*, faz com que o buraco negro perca massa e tenha uma menor velocidade angular (consequentemente, há uma redução do tamanho de sua ergosfera).

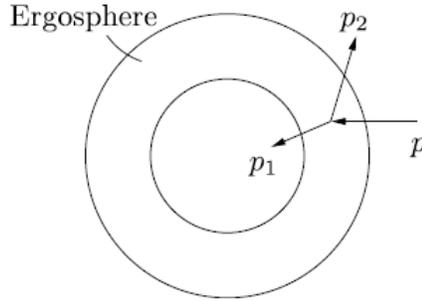


Figura 3.4: Visão esquemática do mecanismo de Penrose. (Reproduzida de [8])

A energia máxima que pode ser extraída é igual a [13]

$$\Delta E_{\max} = (M - M_{\text{irr}}) \quad (3.29)$$

em que

$$M_{\text{irr}} = \sqrt{\frac{M^2}{2} + \sqrt{\frac{M^4}{4} - \frac{J^2}{4}}} \quad (3.30)$$

é a *massa irreductível* do buraco negro. Ela recebe este nome pois pode-se mostrar que a massa de um buraco negro nunca é menor do que sua massa irreductível. Fazendo-se $J = 0$ na Equação (3.29), observa-se que não se pode extrair energia de buracos negros sem rotação.

3.2 Geodésicas do Espaço-tempo de Kerr

Como dito na seção anterior, no caso da métrica de Kerr, não se observa uma simetria totalmente esférica como no de Schwarzschild de tal forma que o ângulo θ não pode ser eliminado, i.e., as órbitas não são planares como naquele caso. Dessa forma, além das integrais de movimento dadas pela energia E , o momento angular L e a massa μ da partícula, necessita-se de mais uma constante de movimento a fim de reduzir o problema à quadratura. Nesta seção, utilizando a abordagem de Hamilton-Jacobi, será encontrada esta última integral de movimento, denominada *constante de Carter*, em homenagem ao físico teórico australiano Brandon Carter.

3.2.1 As Três Primeiras Integrais de Movimento

Primeiramente, será utilizado o método variacional com o intuito de encontrar as três primeiras constantes de movimento, de forma análoga a feita na seção 2.2 para a métrica de Schwarzschild. Em acordo com as Expressões (1.12) e (3.9), a lagrangiana efetiva do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left[-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_0}\dot{r}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{2Mr\alpha^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{4Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{t}\dot{\phi}\right].\end{aligned}\quad (3.31)$$

Como as coordenadas t e ϕ são cíclicas – devido a simetria axial da métrica de Kerr –, das equações de Euler-Lagrange, tem-se as seguintes integrais de movimento

$$-E \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t} - \frac{2Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{\phi}; \quad (3.32)$$

$$L \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = -\frac{2Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{t} + \frac{\Sigma^2}{\rho^2}\sin^2\theta\dot{\phi}; \quad (3.33)$$

que podem ser reescritas na forma matricial mostrada abaixo:

$$\begin{pmatrix} -E \\ L \end{pmatrix} = \mathfrak{M}(r, \theta) \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

sendo $\mathfrak{M}(r, \theta)$ a matriz simétrica de ordem 2 dada por

$$\mathfrak{M}(r, \theta) = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) & -\frac{2Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2} \\ -\frac{2Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2} & \frac{\Sigma^2}{\rho^2}\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Observa-se que se $\alpha = 0$, as Equações (3.32) e (3.33) recaem, respectivamente, nas Equações (2.18) e (2.19) de forma que as integrais de movimento E e L representam, respectivamente, a energia e o momento angular de uma partícula no espaço-tempo de Kerr,

ambos por unidade de massa caso tal partícula seja massiva. Assim, já que $\mathfrak{M}(r, \theta)$ é escrita apenas em termos de r e θ , conhecendo-se as funções $r = r(\tau, E, L)$ e $\theta = \theta(\tau, E, L)$, em que τ é o tempo próprio, a matriz inversa $\mathfrak{M}^{-1}(\tau)$ fica sendo conhecida como função apenas de τ e pode-se reduzir as variáveis cíclicas t e ϕ a quadraturas através do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \mathfrak{M}^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} -E \\ L \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

sendo que

$$\mathfrak{M}^{-1}(\tau) = \frac{-\rho^2}{4M^2r^2\alpha^2\sin^4\theta + (\rho^2 - 2Mr)\Sigma^2} \begin{pmatrix} \Sigma^2\sin^2\theta & 2Mr\alpha\sin^2\theta \\ 2Mr\alpha\sin^2\theta & 2Mr - \rho^2 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Já a constante de movimento μ – que representa a massa de repouso da partícula [7] – provêm dos vínculos (1.14), necessários para que as equações de Euler-Lagrange coincidam com as das geodésicas, i.e.,

$$2\mathcal{L} + \mu^2 = 0, \quad \text{com} \quad \begin{cases} \mu^2 = 1, & \text{para geodésicas do tipo tempo} \\ \mu^2 = 0, & \text{para geodésicas do tipo luz} \end{cases}. \quad (3.38)$$

Dessa forma, substituindo a lagrangiana efetiva em (3.38), obtém-se a terceira integral de movimento

$$\begin{aligned} \mu^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t}^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_0} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 - \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{2Mr\alpha^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) \sin^2\theta \dot{\phi}^2 \\ + \frac{4Mr\alpha\sin^2\theta}{\rho^2} \dot{t}\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.2.2 A Constante de Carter

Agora, utilizando o método de Hamilton-Jacobi, será encontrada a última integral de movimento – a constante de Carter – que faz com que o sistema de equações seja completamente integrável e, dessa forma, com que o movimento seja regular (não caótico). Tal método consiste em construir uma função geradora $S(\tau, x^\mu, P_\mu)$ de uma transformação canônica que reduz a hamiltoniana

$$H(x^\mu, p_\mu) = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (3.40)$$

em que

$$p_\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (3.41)$$

é o momento canônico, a uma nova hamiltoniana \tilde{H} identicamente nula das novas variáveis canônicas (y^μ, P_μ) de tal forma que estas variáveis sejam constantes. Com efeito, as equações canônicas de Hamilton resultam em

$$\dot{y}^\mu = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\mu} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{P}_\mu = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y^\mu} = 0. \quad (3.42)$$

Na descrição Hamiltoniana, as equações de Hamilton são equivalentes as da geodésica e conhecendo-se a função principal de Jacobi $S(\tau, x^\mu, P_\mu)$ – que é uma integral completa na medida em que envolve exatamente oito constantes de integração que nada mais são do que as novas variáveis canônicas –, a solução explícita do problema mecânico considerado pode ser obtida através do seguinte sistema de equações

$$p_\mu = \frac{\partial S(\tau, x^\mu, P_\mu)}{\partial x^\mu}; \quad (3.43)$$

$$y^\mu = \frac{\partial S(\tau, x^\mu, P_\mu)}{\partial P_\mu}. \quad (3.44)$$

Para a métrica de Kerr, em que

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{\Sigma^2}{\Delta_0 \rho^2} & 0 & 0 & -\frac{2Mr\alpha}{\Delta_0 \rho^2} \\ 0 & \frac{\Delta_0}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{2Mr\alpha}{\Delta_0 \rho^2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha^2 - \csc^2 \theta \Delta_0}{\Delta_0 \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

a hamiltoniana tem a forma

$$H = \frac{-\Sigma^2 p_t^2 + \Delta_0^2 p_r^2 + \Delta_0 p_\theta^2 - (\alpha^2 - \csc^2 \theta \Delta_0) p_\phi^2 - 4Mr\alpha p_t p_\phi}{2\Delta_0 \rho^2}. \quad (3.46)$$

Assumindo uma função geradora $S(\tau, x^\mu, P_\mu)$ cujas variáveis são separáveis e levando em conta as Expressões (3.32) e (3.33), pode-se introduzir o seguinte ansatz para a função principal de Jacobi

$$S(\tau, x^\mu, P_\mu) = \frac{1}{2}\mu^2 \tau - Et + L\phi + \sigma(\theta) + \varpi(r), \quad (3.47)$$

em que $\sigma(\theta)$ e $\varpi(r)$ são funções das variáveis θ e r , respectivamente. Com isso, da equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right) + \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0, \quad (3.48)$$

tem-se que

$$\mathfrak{h}_\theta(\theta) + \mathfrak{h}_r(r) = 0, \quad (3.49)$$

em que

$$\mathfrak{h}_\theta(\theta) = \alpha^2 \mu^2 \cos^2 \theta + (\alpha E \sin \theta - L \csc \theta)^2 + \sigma'(\theta)^2; \quad (3.50)$$

$$\mathfrak{h}_r(r) = r^2 \mu^2 - \frac{[(r^2 + \alpha^2)E - \alpha L]^2}{\Delta_0} + \Delta_0 \varpi'(r)^2. \quad (3.51)$$

Como \mathfrak{h}_θ depende apenas de θ e \mathfrak{h}_r é função exclusivamente de r , a Equação (3.49) é satisfeita apenas se, ao longo da geodésica, valer a condição

$$\mathfrak{h}_\theta(\theta) = \mathcal{C} = -\mathfrak{h}_r(r), \quad (3.52)$$

sendo \mathcal{C} a constante de Carter, a quarta integral de movimento que garante a integrabilidade do sistema mecânico.

3.2.3 Redução a Equações de Primeira Ordem

Agora, as equações das geodésicas serão reduzidas a um sistema de primeira ordem. Resolvendo as Equações (3.52) com

$$\varpi'(r) = p_r = \frac{\rho^2}{\Delta_0} \dot{r} \quad \text{e} \quad \sigma'(\theta) = p_\theta = \rho^2 \dot{\theta}, \quad (3.53)$$

obtem-se

$$\rho^2 \dot{r} = \pm \sqrt{E^2 - \mu^2} \sqrt{\mathfrak{p}(r)}; \quad (3.54)$$

$$\rho^2 \dot{\theta} = \pm \sqrt{\mathcal{C} - \alpha^2 \mu^2 \cos^2 \theta - (\alpha E \sin \theta - L \csc \theta)^2}; \quad (3.55)$$

sendo que $\mathfrak{p}(r)$ é um polinômio quártico em r cujos coeficientes dependem das integrais de movimento:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(r) := \frac{1}{E^2 - \mu^2} \{ & (E^2 - \mu^2)r^4 + 2M\mu^2 r^3 - [\mathcal{C} + \alpha(\alpha\mu^2 + 2LE - 2\alpha E^2)]r^2 + 2MCr \\ & + \alpha^2[(\alpha E - L)^2 - \mathcal{C}] \}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Fazendo a substituição $u = \cos \theta$ na Equação (3.55), pode-se reescrevê-la como

$$\rho^2 \dot{u} = \pm \alpha \sqrt{\mu^2 - E^2} \sqrt{\mathfrak{q}(u)}, \quad (3.57)$$

sendo $\mathfrak{q}(u)$ outro polinômio quártico dado por

$$\mathfrak{q}(u) := u^4 + \frac{\mathcal{C} + \alpha[2LE + \alpha(\mu^2 - 2E^2)]}{\alpha^2(E^2 - \mu^2)} u^2 + \frac{(L - \alpha E)^2 - \mathcal{C}}{\alpha^2(E^2 - \mu^2)}. \quad (3.58)$$

Do sistema de equações diferenciais (3.54) e (3.57), obtém-se

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{p}(r)}} = i\alpha \int \frac{du}{\sqrt{\mathfrak{q}(u)}} + \text{constante}. \quad (3.59)$$

As integrais que aparecem na Equação (3.59) podem ser expressas em termos da integral elíptica do primeiro tipo

$$F(\xi|k) \equiv \int_0^\xi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.60)$$

Com efeito, se e_i são as raízes do polinômio $\mathfrak{p}(r)$ e g_1, g_2 são duas raízes independentes do polinômio $\mathfrak{q}(u)$, i.e.,

$$\mathfrak{p}(r) = \prod_{i=1}^4 (r - e_i) \quad \text{e} \quad \mathfrak{q}(u) = \prod_{i=1}^2 (u^2 - g_i^2), \quad (3.61)$$

então [6]

$$\mathfrak{B}(r, e_i) := \int \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{p}(r)}} = \frac{2F \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{(r - e_2)(e_1 - e_4)}{(r - e_1)(e_2 - e_4)}} \right) \middle| \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_4)}{(e_2 - e_3)(e_1 - e_4)} \right)}{\sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_4)}} \quad (3.62)$$

$$\mathfrak{M}(u, g_i) := \int \frac{du}{\sqrt{\mathfrak{q}(u)}} = \frac{1}{g_2} F \left(\arcsin \frac{u}{g_1} \middle| \left(\frac{g_1}{g_2} \right)^2 \right) \quad (3.63)$$

e a Equação (3.59) fica sendo escrita na seguinte forma implícita

$$\mathfrak{B}(r, e_i) - i\alpha\mathfrak{M}(u, g_i) = \text{constante}. \quad (3.64)$$

Devido a forma implícita da solução, a classificação das geodésicas do tipo tempo e do tipo nula no espaço-tempo de Kerr é extremamente laboriosa e não será tratada nesta monografia. No resto desta seção, a Equação (3.64) será estudada no contexto do espaço-tempo de Schwarzschild.

3.2.4 Solução Exata da Equação Orbital de Schwarzschild

Para finalizar esta seção, será derivada a solução analítica exata da órbita de uma partícula teste massiva movendo-se ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, caso este em que $\alpha = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dessa forma, as Equações (3.36) se reduzem a

$$\dot{t} = \frac{r^2 E}{r^2 - 2Mr} \quad \text{e} \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (3.65)$$

enquanto a Equação (3.55) resulta em

$$0 = r^2 \dot{\theta} = \pm \sqrt{\mathcal{C} - L^2}. \quad (3.66)$$

Assim, com $\mu^2 = 1$ e $\mathcal{C} = L^2$, o polinômio quártico (3.56) é escrito como

$$\mathfrak{p}(r) = r^4 + \frac{2M}{E^2 - 1} r^3 - \frac{L^2}{E^2 - 1} r^2 + \frac{2ML^2}{E^2 - 1} r. \quad (3.67)$$

Observa-se que uma das raízes do polinômio (3.67) é $r = 0$. Se e_1 , e_2 e e_3 são as demais raízes deste polinômio, supostas reais e não nulas, utilizando as relações de Girard, encontra-se as relações de tais raízes com as integrais de movimento:

$$M = \frac{e_1 e_2 e_3}{2(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3)}; \quad (3.68)$$

$$E^2 = \frac{(e_1 + e_2)(e_1 + e_3)(e_2 + e_3)}{(e_2 + e_3)e_2 + (e_2^2 + 3e_2 e_3 + e_3^2)e_1 + (e_2 + e_3)e_2 e_3}; \quad (3.69)$$

$$L^2 = \frac{e_1 e_2 e_3}{e_1 + e_2 + e_3}. \quad (3.70)$$

Por fim, do sistema de equações formado por (3.54) e pela segunda expressão em (3.65), obtém-se a seguinte relação

$$\frac{E^2 - 1}{L} \int d\phi = \int \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{p}(r)}}, \quad (3.71)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{E^2 - 1}{L} \phi = - \frac{2F \left(\arcsin \sqrt{\frac{(\frac{e_1}{r} - 1)e_3}{e_1 - e_3}} \middle| \frac{e_2(e_1 - e_3)}{(e_1 - e_2)e_3} \right)}{\sqrt{(e_2 - e_1)e_3}}. \quad (3.72)$$

Em termos da função elíptica de Jacobi definida por

$$\operatorname{sn}(Y|z) = \sqrt{X} \Leftrightarrow F(\arcsin \sqrt{X}|z) = Y, \quad (3.73)$$

encontra-se, finalmente, a solução analítica exata das equações das geodésicas para a métrica de Schwarzschild:

$$r(\phi) = \frac{e_1 e_3}{(e_1 - e_3)[\operatorname{sn}(Y|z)]^2 + e_3}, \quad (3.74)$$

em que

$$Y = -\frac{\phi}{2} \frac{e_3 \sqrt{\frac{e_1 e_2 (e_2 - e_1)}{e_1 + e_2 + e_3}}}{e_2 e_3 + e_1 (e_2 + e_3)}; \quad (3.75)$$

$$z = \frac{e_2 (e_1 - e_3)}{(e_1 - e_2) e_3}. \quad (3.76)$$

No caso em que $E^2 < 1$, tem-se uma órbita fechada (Figura 3.5) enquanto que se $E^2 > 1$, a órbita resultante é aberta (Figura 3.6) [6].

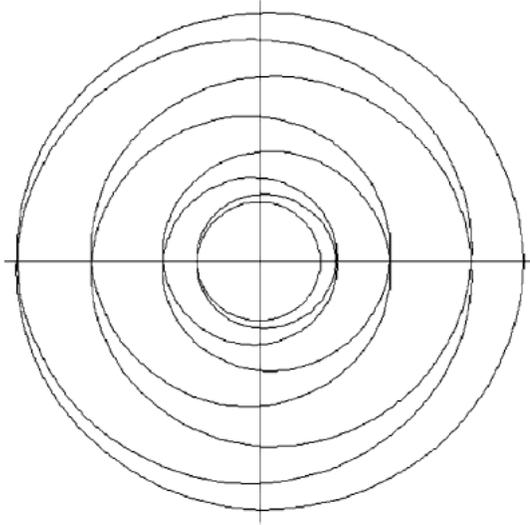


Figura 3.5: Exemplo de uma órbita fechada de uma partícula massiva no espaço-tempo de Schwarzschild descrita pela solução analítica (3.74) com os parâmetros $(e_1, e_2, e_3) = (2.7, 11.7, 25.6)$. Observa-se que, neste caso, o valor de $E^2 = 0.95$ é menor do que 1. (Reproduzida de [6])

3.3 Dinâmica de Buracos Negros: As Quatro Leis

Apesar de um buraco negro, do ponto de vista clássico, não emitir nenhum tipo de partícula e, portanto, não existir um espectro térmico de radiação que caracterize sua temperatura, existe uma analogia formal entre as leis que regem a dinâmica de buracos negros

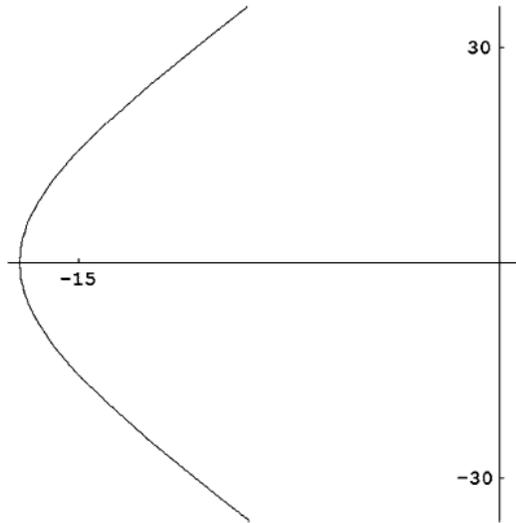


Figura 3.6: Exemplo de uma órbita aberta de uma partícula massiva no espaço-tempo de Schwarzschild descrita pela solução analítica (3.74) com os parâmetros $(e_1, e_2, e_3) = (-17.1, 2.1, 10.9)$. Observa-se que, neste caso, o valor de $E^2 = 1.5$ é maior do que 1. (Reproduzida de [6])

e as leis da termodinâmica e esta seção irá apresentá-la. No entanto, na última seção deste trabalho, em um âmbito semiclassico, esta analogia irá começar a ganhar realidade física através da chamada *radiação Hawking*.

Na física de buracos negros, o análogo do potencial termodinâmico U é a massa total M do buraco negro, dada em termos da área \mathcal{A} de seu horizonte de eventos, de seu momento angular J e de sua carga elétrica q . Para o buraco negro de Kerr-Newman, \mathcal{A} é igual a [6, 7]

$$\mathcal{A} := \int_{r=r_H} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = 4\pi(r_H^2 + \alpha^2) = 4\pi(2Mr_H - q^2). \quad (3.77)$$

Isolando M na equação acima e usando a abreviação $M_0^2 = \frac{\mathcal{A}}{16\pi}$, obtém-se

$$M(\mathcal{A}, J, q) = \left[\left(M_0 + \frac{q^2}{4M_0} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.78)$$

A diferencial de M , escrita como

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} d\mathcal{A} + \Omega_H dJ + \phi_H dq, \quad (3.79)$$

em que κ é a *gravidade superficial* – que representa a aceleração experimentada por uma partícula movendo-se no horizonte de eventos do buraco negro, vista por um observador no infinito [4, 7] – e ϕ_H é o *potencial elétrico* no horizonte de eventos, dados, respectivamente, por [6, 7]

$$\kappa = \frac{r_H - M}{r_H^2 + \alpha^2} = \frac{r_H - M}{2Mr_H - q^2} \quad (3.80)$$

e

$$\phi_H = \frac{qr_H}{r_H^2 + \alpha^2} = \frac{qr_H}{2Mr_H - q^2}, \quad (3.81)$$

é conhecida como a *primeira lei da dinâmica de buracos negros* em analogia com a primeira lei da termodinâmica através das correspondências

$$T \longleftrightarrow \kappa \quad \text{e} \quad S \longleftrightarrow \mathcal{A}.$$

Além disso, pode-se demonstrar que a gravidade superficial κ é constante sobre o horizonte de eventos de um buraco negro estacionário [4, 7]. Este resultado é conhecido como a *lei zero da dinâmica de buracos negros*.

A analogia entre a área do horizonte de eventos de um buraco negro e a entropia é confirmada pela chamada *segunda lei* [7]: foi demonstrado por S. Hawking que, em quaisquer interações clássicas tanto da matéria como da radiação com buracos negros, a área superficial do horizonte de eventos nunca pode decrescer, isto é,

$$d\mathcal{A} \geq 0. \quad (3.82)$$

Assim, a segunda lei da termodinâmica pode ser generalizada da seguinte forma [13]: seja

$$S' = \sum S_{\text{matéria}} + \sum S_{\text{bn}}, \quad (3.83)$$

em que $S_{\text{matéria}}$ é a entropia termodinâmica usual externa aos horizontes de eventos e S_{bn} é a entropia associada aos buracos negros, em qualquer processo físico, vale que $dS' \geq 0$.

Para completar a analogia com as leis da termodinâmica, tem-se também a *terceira lei da dinâmica de buracos negros* que, em sua proposta inicial formulada em 1973, afirma a impossibilidade de se reduzir a gravidade superficial de um buraco negro a zero por meio de uma sequência finita de operações, não importando quão idealizadas elas sejam. Apesar de vários contraexemplos da terceira lei terem sido encontrados, inúmeros exemplos apontam para a validade de uma forma mais adequada desta lei [12].

3.4 A Radiação Hawking

A analogia entre a dinâmica que rege os buracos negros e a termodinâmica clássica feita na seção anterior é confirmada pela teoria quântica de campos. De fato, a partir de uma abordagem semiclássica, S. Hawking mostrou que buracos negros emitem radiação térmica e podem evaporar, conquanto, não se sabe se eles evaporam completamente ou se permanece alguma estrutura estável no final [13]. Devido à radiação Hawking, associa-se a um buraco negro uma temperatura e uma entropia iguais a [7, 13]

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad \text{e} \quad S_{BH} = \frac{\mathcal{A}}{4}, \quad (3.84)$$

respectivamente, conhecidas como *temperatura Hawking* e *entropia de Bekenstein-Hawking*. Portanto, espera-se que, em qualquer teoria quântica da gravidade, buracos negros devam,

necessariamente, ser munidos com uma interpretação estatística em termos de algum tipo de microestados [6].

Antes de apresentar como ocorre a criação da radiação Hawking no buraco negro de Schwarzschild, serão introduzidos alguns conceitos de teoria quântica de campos tanto em espaços-tempos planos como em curvos. A apresentação desta seção segue a feita pela referência [14].

3.4.1 Teoria Quântica de Campos no Espaço-tempo de Minkowski

No espaço-tempo de Minkowski, um campo escalar real livre (sem interação) φ de massa m é descrito pela equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0, \quad \text{sendo} \quad \square := \partial_t^2 - \nabla^2, \quad (3.85)$$

que pode ser obtida a partir das equações de Euler-Lagrange para a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + m^2 \varphi^2). \quad (3.86)$$

Um produto interno é definido no espaço das soluções da equação de Klein-Gordon através da seguinte integral, realizada sobre uma hipersuperfície Σ_t com coordenada temporal t constante:

$$\langle f, g \rangle_{KG} := -i \int_{\Sigma_t} (f \partial_t g^* - g^* \partial_t f) d^3x. \quad (3.87)$$

Esta definição é consistente em vista de sua independência da escolha da hipersuperfície Σ_t [2]. Um cálculo direto [2] mostra que as soluções de onda plana normalizadas

$$f_k = \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}, \quad (3.88)$$

em que $k^\mu = (\omega_k, \mathbf{k})$ é o vetor de onda e $\omega_k := \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2}$ é a frequência de oscilação do campo – obtida através da substituição da solução (3.88) na equação de Klein-Gordon –, formam um conjunto ortonormal

$$\langle f_k, f_{k'} \rangle_{KG} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'); \quad \langle f_k, f_{k'}^* \rangle_{KG} = 0 \quad \text{e} \quad \langle f_k^*, f_{k'}^* \rangle_{KG} = -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.89)$$

sendo que os conjuntos $\{f_k\}$ e $\{f_k^*\}$ representam, para um referencial inercial no espaço-tempo de Minkowski, respectivamente, os modos de frequência positiva e negativa satisfazendo

$$\partial_t f_k = -i\omega_k f_k \quad \text{e} \quad \partial_t f_k^* = i\omega_k f_k^*, \quad \omega_k > 0. \quad (3.90)$$

Assim, pode-se expandir o campo $\varphi(x)$ em termos do conjunto completo e ortogonal $\{f_k, f_k^*\}$ com coeficientes de expansão a_k e a_k^* :

$$\varphi(x) = \int (a_k f_k + a_k^* f_k^*) d^3k = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a_k e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_k^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}]. \quad (3.91)$$

Na teoria quântica de campos, a segunda quantização consiste na promoção do campo $\varphi(x)$ e seu campo canonicamente conjugado $\pi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} = \partial_t \varphi$ a operadores $\hat{\varphi}(x)$ e $\hat{\pi}(x)$ em

um espaço de Hilbert satisfazendo as seguintes relações de comutação para um determinado instante de tempo

$$[\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\varphi}(t, \mathbf{y})] = [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.92)$$

Os coeficientes da expansão a_k e a_k^\dagger também são promovidos a operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger obedecendo

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.93)$$

Apesar dos operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger não possuírem uma interpretação física tão direta, pode-se interpretá-los como operadores de destruição e criação, análogos ao do oscilador harmônico encontrado em mecânica quântica. Com efeito, um campo livre (sem interações) no espaço-tempo de Minkowski é equivalente a um número infinito de osciladores harmônicos quânticos [2, 9].

O chamado estado de vácuo $|0\rangle$ representa um estado sem partículas e o operador densidade de destruição \hat{a}_k , qualquer que seja k , age sobre ele da seguinte forma

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (3.94)$$

Já o operador número é definido para cada vetor de onda k da mesma maneira feita para o oscilador harmônico quântico

$$\hat{N}_k := \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (3.95)$$

Os autoestados dos operadores número formam uma base para o espaço de Hilbert, conhecida como *base de Fock*, e as excitações desta base são interpretadas como partículas representadas pela aplicação repetida do operador densidade de criação \hat{a}_k^\dagger no estado de vácuo $|0\rangle$, formando um estado com partículas de mesmo momento k . O operador número fornece o número de partículas em um determinado estado e, como os operadores número e o estado de vácuo são invariantes sob a transformação de Lorentz [2], todos os observadores inerciais irão concordar com o número de partículas existentes e, conseqüentemente, com o estado de vácuo. Como será visto mais adiante, isso não é verdade no caso em que o espaço-tempo é curvo.

3.4.2 Aspectos da Gravitação Semiclássica

A teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos considera campos de matéria quantizados que se propagam em um determinado espaço curvo, i.e., é uma combinação entre a teoria quântica de campos e a relatividade geral. Neste caso, geralmente, se está interessado nos efeitos do espaço-tempo sobre os campos e não nas interações entre eles. A teoria clássica de campos no espaço-tempo de Minkowski pode ser generalizada para espaços curvos expressando a teoria em uma forma covariante através da (i) substituição da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pela genérica $g_{\mu\nu}$, (ii) troca das derivadas ordinárias ∂_μ pelas covariantes ∇_μ e (iii) substituição do elemento de volume d^4x pelo elemento de volume covariante $\sqrt{-g}d^4x$, sendo $g := \det[g_{\mu\nu}]$, de tal forma que a densidade lagrangiana (3.86) de um campo escalar é escrita em espaços-tempos curvos como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + m^2 \varphi^2). \quad (3.96)$$

Dessa forma, a equação de Klein-Gordon em um espaço tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}$ é dada por

$$(\square - m^2) \varphi := \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - m^2 \right] \varphi = 0. \quad (3.97)$$

Apesar da equação de Klein-Gordon possuir solução não trivial no espaço-tempo de Minkowski, isso não é sempre verdade: existem espaços em que a única solução possível é a trivial ($\varphi \equiv \text{constante}$). Felizmente, para a maior parte dos espaços-tempos fisicamente interessantes, as equações que descrevem os campos clássicos possuem solução [13]. Se Σ_t é uma superfície de Cauchy de parâmetro t com vetor normal n^μ e métrica induzida $\gamma_{\mu\nu}$, o produto interno definido no espaço das soluções da equação de Klein-Gordon é

$$\langle f, g \rangle_{KG} := -i \int_{\Sigma_t} \sqrt{\gamma} n^\mu (f \nabla_\mu g^* - g^* \nabla_\mu f) d^3x. \quad (3.98)$$

Pode-se mostrar que a definição acima está bem definida na medida em que independe da superfície de Cauchy escolhida. Com isso, é possível construir uma base ortonormal $\{f_i, f_i^*\}$ satisfazendo

$$\langle f_i, f_j \rangle_{KG} = \delta_{ij}, \quad \langle f_i^*, f_j^* \rangle_{KG} = -\delta_{ij} \quad \text{e} \quad \langle f_i, f_j^* \rangle_{KG} = 0, \quad (3.99)$$

sendo que os índices podem ser discretos ou contínuos - caso este em que o delta de Kronecker δ_{ij} é substituído pelo delta de Dirac $\delta^3(\mathbf{i} - \mathbf{j})$.

O momento π associado ao campo φ é definido como $\pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_t \varphi)}$ e a quantização do campo escalar em espaços-tempos globalmente hiperbólicos, da mesma forma que no espaço-tempo de Minkowski, acontece através da promoção dos campos $\varphi(x)$ e $\pi(x)$ a operadores em um espaço de Hilbert de modo que, sobre toda superfície de Cauchy Σ_t , são satisfeitas as relações de comutação canônicas

$$[\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\varphi}(t, \mathbf{y})]_{\Sigma_t} = [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})]_{\Sigma_t} = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})]_{\Sigma_t} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.100)$$

Com tudo isso em mente, da mesma forma que no caso plano, pode-se escrever o campo escalar quantizado $\hat{\varphi}$ em termos da base ortonormal $\{f_i, f_i^*\}$:

$$\hat{\varphi} = \sum_i \left(\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* \right), \quad (3.101)$$

sendo que os operadores de destruição \hat{a}_i e criação \hat{a}_i^\dagger satisfazem as relações de comutação (3.93). Naturalmente, pode-se escolher um sistema de coordenadas ligado a outro observador para descrever o campo $\hat{\varphi}$, i.e., é possível expandir $\hat{\varphi}$ usando outra base ortonormal completa $\{g_j, g_j^*\}$:

$$\hat{\varphi} = \sum_j \left(\hat{b}_j g_j + \hat{b}_j^\dagger g_j^* \right), \quad (3.102)$$

sendo as transformações que relacionam os coeficientes f_i 's e g_j 's e os operadores \hat{a}_i 's e \hat{b}_j 's conhecidas como *transformações de Bogoliubov* [2]:

$$\begin{cases} g_j = \sum_i (A_{ji} f_i + B_{ji} f_i^*) \\ g_j^* = \sum_i (B_{ji}^* f_i + A_{ji}^* f_i^*) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \hat{b}_j = \sum_i (A_{ji}^* \hat{a}_i - B_{ji}^* \hat{a}_i^\dagger) \\ \hat{b}_j^\dagger = \sum_i (-B_{ji} \hat{a}_i + A_{ji} \hat{a}_i^\dagger) \end{cases}. \quad (3.103)$$

Para poder haver a distinção entre os modos de frequência positiva e negativa é necessário que o espaço-tempo possua um campo de Killing global tipo tempo ∂_t [2, 13] e, quando isso acontece, de forma análoga ao do caso plano, define-se os modos de frequência positiva e negativa pelas Equações (3.90).

Além disso, para cada conjunto de modos ortonormais, define-se o estado de vácuo e o operador número também da mesma forma feita no espaço-tempo de Minkowski. Deve-se notar, entretanto, que, diferentemente do caso plano, observadores distintos podem discordar com o número de partículas observadas. Dessa forma, pode-se utilizar as transformações de Bogoliubov para encontrar o número de partículas N_j que o observador B – ligado ao conjunto ortonormal $\{g_j, g_j^*\}$ – observa no estado de vácuo do observador A – unido ao conjunto ortonormal $\{f_i, f_i^*\}$. Com efeito, com o auxílio de (3.103), tem-se

$$N_j = \langle 0_A | \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j | 0_A \rangle_{KG} = \left\langle 0_A \left| \sum_{p,q} B_{jp} B_{jq}^* \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger \right| 0_A \right\rangle_{KG} = \sum_q |B_{jq}|^2. \quad (3.104)$$

3.4.3 A Radiação Hawking do Buraco Negro de Schwarzschild

Em seu artigo, Hawking analisou a formação de um buraco negro de Schwarzschild através do colapso esfericamente simétrico de uma estrela interessado em estudar a formação de partículas no infinito futuro nulo \mathcal{I}^+ , em um instante muito após o colapso gravitacional e a subsequente estabilização do buraco negro, supondo um estado de vácuo muito antes da formação do buraco negro no infinito passado nulo \mathcal{I}^- . Devido ao colapso gravitacional, não existe um campo de Killing temporal global, entretanto, ambas as regiões assintóticas são estacionárias de tal forma que é possível definir partículas de forma consistente nelas.

No caso do espaço-tempo de Schwarzschild – que, graças ao teorema de Birkhoff descreve a região exterior ao colapso –, a equação de Klein-Gordon (3.97) para um campo escalar não massivo ($m = 0$) assume a seguinte forma

$$\partial_t \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t \varphi \right] + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \varphi \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \varphi] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \varphi = 0. \quad (3.105)$$

Para resolver tal equação, será utilizado o método de separação de variáveis através do ansatz

$$\varphi(t, r, \theta, \phi) = \frac{R(t, r_*)}{r} Y_m^l(\theta, \phi), \quad (3.106)$$

em que $Y_m^l(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos enquanto $R(t, r_*)$ é uma função escrita em termos da coordenada tartaruga r_* . Com a constante de separação dada por $l(l+1)$, obtém-se

$$- \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \partial_t^2 R + \frac{2M}{r^2} \left(\partial_r R - \frac{R}{r} \right) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r^2 R - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0 \quad (3.107)$$

e

$$\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y_m^l) + \partial_\phi^2 Y_m^l + l(l+1) \sin^2 \theta Y_m^l = 0, \quad (3.108)$$

senda esta última equação justamente a dos esféricos harmônicos enquanto a outra, após a mudança de coordenadas $\partial_r \mapsto \partial_{r_*}$ e a definição de $V(r)$ – uma espécie de barreira de potencial – como

$$V(r) := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right], \quad (3.109)$$

pode ser reescrita como

$$[-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2 - V(r)] R = 0. \quad (3.110)$$

A equação anterior é de difícil resolução, no entanto, próximo do horizonte de eventos – quando $r \rightarrow 2M$ – observa-se que $V(r) \rightarrow 0$. A mesma coisa acontece com $V(r)$ próximo do infinito passado e futuro nulos quando $r \rightarrow \infty$. Dessa forma, nestas regiões assintóticas, a equação de Klein-Gordon fica escrita como

$$(-\partial_t^2 + \partial_{r_*}^2) R(t, r_*) = 0 \quad (3.111)$$

cuja solução geral é dada por

$$R(t, r_*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - kr_*)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \begin{cases} e^{-i\omega u}, & k > 0 \\ e^{-i\omega v}, & k < 0 \end{cases}, \quad (3.112)$$

em que foram utilizadas as coordenadas de tartaruga do cone de luz (2.59). Sobre as superfícies de Cauchy \mathcal{I}^- e $H^+ \cup \mathcal{I}^+$, pode-se construir bases ortonormais completas dadas, respectivamente, por $\{f_\omega, f_\omega^*\}$ e $\{g_\Omega, g_\Omega^*\} \cup \{h_\Omega, h_\Omega^*\}$ de modo que g_Ω seja nulo no horizonte de eventos H^+ e h_ω seja nulo sobre o futuro infinito nulo \mathcal{I}^+ e ainda seja satisfeito que

$$\langle g_\Omega, h_\Omega \rangle = \langle g_\Omega^*, h_\Omega \rangle = \langle g_\Omega, h_\Omega^* \rangle = 0. \quad (3.113)$$

Assim, pode-se expandir os campos nas superfícies de Cauchy da seguinte forma

$$\hat{\varphi} = \sum_{l,m} \int (\hat{a}_\omega f_\omega + \hat{a}_\omega^\dagger f_\omega^*) d\omega; \quad (3.114)$$

$$\hat{\varphi} = \sum_{l,m} \int (\hat{b}_\Omega g_\Omega + \hat{b}_\Omega^\dagger g_\Omega^* + \hat{c}_\Omega h_\Omega + \hat{c}_\Omega^\dagger h_\Omega^*) d\Omega. \quad (3.115)$$

Entretanto, como o horizonte de eventos H^+ não possui um vetor de Killing temporal, não é possível definir os modos de frequência positiva com relação a essa superfície de forma não ambígua. Por sua vez, como é de interesse o cálculo de partículas que chegam nas regiões assintóticas e os modos h_Ω eventualmente atravessam o horizonte de eventos e não alcançam o infinito, eles serão desconsiderados enquanto os modos do passado f_ω , definidos sobre o infinito passado nulo \mathcal{I}^- , e os modos do futuro g_Ω , definidos sobre \mathcal{I}^+ , são dados, respectivamente, por

$$f_\omega := \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\omega v} \quad \text{e} \quad g_\Omega := \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \frac{Y_m^l}{r} e^{-i\Omega u}. \quad (3.116)$$

As geodésicas que partem do infinito passado nulo e atravessam a região do colapso da estrela em tempos cada vez mais próximos da formação do horizonte de eventos demoram

cada vez mais para escapar para o infinito até o momento no qual isso não é mais possível. Assim, enquanto algumas geodésicas ficam presas dentro do buraco negro, outras formam o horizonte de eventos e outras alcançam o infinito com um grande desvio para o vermelho. Para sobreviver a estes desvios, as geodésicas γ que alcançam o infinito futuro nulo \mathcal{I}^+ devem ter altas frequências próximas ao horizonte de eventos H^+ de modo que o potencial $V(r)$, definido em (3.109), possa ser negligenciado e seja desconsiderado o retroespalhamento dos modos g_Ω por ele.

Utilizando a *aproximação de óptica geométrica* – que consiste na consideração de uma solução geral da equação de onda $\Psi = ae^{iS}$ tal que a seja constante em relação à fase S – os modos f_ω e g_Ω percorrem geodésicas nulas com u ou v constante. Na Figura 3.7, tem-se uma geodésica nula parametrizada por $v = v_1$ entrando no buraco negro e outra parametrizada por $u = u_1$ saindo da região do colapso gravitacional. Já a geodésica nula γ_H sai do infinito passado nulo \mathcal{I}^- com parâmetro v_0 , passa pelo centro do colapso da estrela e forma o horizonte de eventos H^+ . É fácil ver que as geodésicas nulas que partem de \mathcal{I}^- com $v > v_0$ atravessam o horizonte de eventos e terminam na singularidade $r = 0$. Com isso, pode-se mostrar que a relação entre os parâmetros u e v é dada por

$$u(v) = -4M \ln \left(\frac{v_0 - v}{C} \right) = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{v_0 - v}{C} \right), \quad (3.117)$$

em que $C > 0$ é uma constante e $\kappa = \frac{1}{4M}$ é a gravidade superficial do buraco negro de Schwarzschild (ver Expressão (3.80)), de maneira que os modos g_Ω podem ser escritos em termos do parâmetro afim v em \mathcal{I}^- da seguinte forma

$$g_\Omega = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} e^{i\frac{\Omega}{\kappa} \ln \frac{v_0 - v}{C}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left(\frac{v_0 - v}{C} \right)^{i\frac{\Omega}{\kappa}}, & \text{para } v < v_0 \\ 0, & \text{para } v > v_0 \end{cases}. \quad (3.118)$$

Agora, utilizando as transformações de Bogoliubov no contínuo, pode-se escrever

$$g_\Omega(v) = \int_0^\infty (A_{\omega\Omega} f_\omega + B_{\omega\Omega} f_\omega^*) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} (A_{\omega\Omega} e^{-i\omega v} + B_{\omega\Omega} e^{i\omega v}) d\omega. \quad (3.119)$$

Ainda, a partir da expansão de Fourier de $g_\Omega(v)$, tem-se que

$$g_\Omega(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-i\omega v} \bar{g}_\Omega(\omega) + e^{i\omega v} \bar{g}_\Omega(-\omega)] d\omega, \quad (3.120)$$

em que

$$\bar{g}_\Omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega v} g_\Omega(v) dv. \quad (3.121)$$

Assim, comparando as equações (3.119) e (3.120), conclui-se que os coeficientes de Bogoliubov são iguais a

$$A_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \hat{g}_\Omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega v} g_\Omega(v) dv; \quad (3.122)$$

$$B_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \hat{g}_\Omega(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega v} g_\Omega(v) dv. \quad (3.123)$$

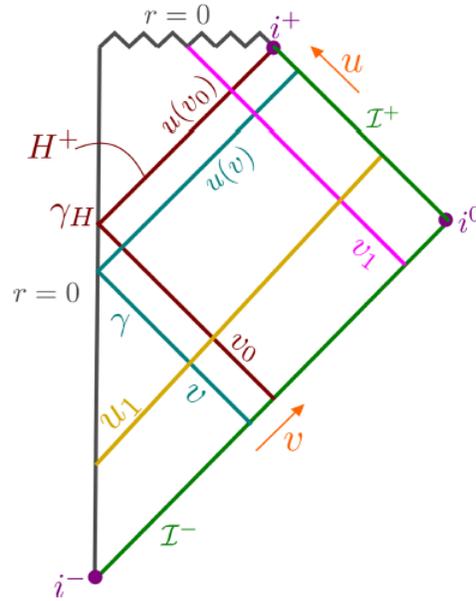


Figura 3.7: Diagrama de Penrose de um colapso gravitacional esféricamente simétrico de uma estrela mostrando geodésicas nulas com u ou v constantes. (Reproduzida de [14])

Substituindo a Expressão (3.118) nos coeficientes acima, obtém-se

$$A_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} e^{i\omega v} \left(\frac{v_0 - v}{C} \right)^{\frac{i\omega}{\kappa}} = \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{i\omega v_0} \left(\frac{\Omega}{|\omega|} \right) e^{-\frac{i\Omega}{\kappa} \ln |\omega|} e^{\frac{\pi\Omega}{2\kappa}} \Gamma \left(\frac{i\Omega}{\kappa} \right); \quad (3.124)$$

$$B_{\omega\Omega} = D \int_{-\infty}^{v_0} e^{-i\Omega v} \left(\frac{v_0 - v}{C} \right)^{\frac{i\Omega}{\kappa}} = \frac{D}{\kappa C^{\frac{i\Omega}{\kappa}}} e^{-i\omega v_0} \left(-\frac{\Omega}{|\omega|} \right) e^{-\frac{i\Omega}{\kappa} \ln |\omega|} e^{-\frac{\pi\Omega}{2\kappa}} \Gamma \left(\frac{i\Omega}{\kappa} \right); \quad (3.125)$$

sendo $D = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}}$ e Γ a função gama, de tal forma que os coeficientes de Bogoliubov $A_{\omega\Omega}$ e $B_{\omega\Omega}$ estão relacionados da seguinte forma

$$|A_{\omega\Omega}|^2 = e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} |B_{\omega\Omega}|^2. \quad (3.126)$$

Com isso, o número de partículas observado no futuro assintótico \mathcal{I}^+ no estado de vácuo $|0_{\text{pass}}\rangle$ do passado assintótico \mathcal{I}^- é igual a

$$N_{\Omega} = \langle 0_{\text{pass}} | \hat{b}_{\Omega}^{\dagger} \hat{b}_{\Omega} | 0_{\text{pass}} \rangle = \int_0^{\infty} |B_{\omega\Omega}|^2 d\omega = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{2\pi} \frac{1}{e^{2\pi\Omega/\kappa} - 1}. \quad (3.127)$$

Assim, a densidade média de partículas por unidade de volume e frequência fica sendo igual àquela de um corpo negro perfeito:

$$n_{\Omega} = \frac{N_{\Omega}}{V/2\pi} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{\kappa}} - 1}. \quad (3.128)$$

Portanto, um buraco negro de Schwarzschild emite partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein com temperatura Hawking igual a

$$T_H := \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} = 6.0 \times 10^{-8} K \frac{M_\odot}{M}, \quad (3.129)$$

sendo $M_\odot \sim 10^{33}g$ a massa do Sol. Observa-se que quanto menor o buraco negro, maior sua temperatura e mais rápida sua evaporação. Nota-se também que a temperatura Hawking de um buraco negro astrofísico real seria muito menor do que a temperatura da radiação cósmica de fundo e, portanto, seria inobservável.

Capítulo 4

Conclusão

Our imagination is stretched to the utmost, not, as in fiction, to imagine things which are not really there, but just to comprehend those things which are there.

Richard Feynman, em “The Character of Physical Law”

O fato de os buracos negros poderem evaporar devido à emissão de radiação Hawking mudou completamente a percepção dos físicos sobre eles, antes, vistos como passivos e indestrutíveis. Com efeito, no final da década de 60, Penrose e Hawking mostraram, no âmbito clássico, que buracos negros não podem ser destruídos nem bifurcados, todavia, quanticamente, isso foi contornado graças ao fato de o valor da densidade de energia do vácuo quântico ao redor de um buraco negro ser negativo [13]. No entanto, é interessante notar que a possível evaporação completa de um buraco negro geraria o chamado *paradoxo da perda de informação*, que consistiria no desaparecimento de toda a informação que passou pelo horizonte de eventos em direção à singularidade.

Além disso, sabe-se que a teoria da relatividade geral é incompleta na medida em que o Universo é governado essencialmente pela mecânica quântica e a existência de singularidades em um espaço-tempo que contém um buraco negro é um indicativo disso. Neste contexto, o estudo dos buracos negros no âmbito semiclassico – que enriqueceu muito a fenomenologia clássica – pode guiar os físicos na construção de uma teoria quântica da gravidade.

Referências Bibliográficas

- [1] HARTLE J. B. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. First Edition. Pearson, 2014.
- [2] CARROLL S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Pearson New International Edition. Pearson, 2014.
- [3] RINDLER, W. *Relativity: Special, General and Cosmological*. Second edition. Oxford University Press, 2006.
- [4] RYDER L. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] FRÈ P. G. *Gravity, a Geometrical Course. Volume 1: Development of the Theory and Basic Physical Applications*. Springer, 2013.
- [6] FRÈ P. G. *Gravity, a Geometrical Course. Volume 2: Black Holes, Cosmology and Introduction to Supergravity*. Springer, 2013.
- [7] STRAUMANN, N. *General Relativity*. Second edition. Springer, 2013.
- [8] BAMBI C. *Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity*. Springer, 2017.
- [9] MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [10] SANTARELLI, R. *Testando a Conjectura da Censura Cósmica em Buracos Negros*. 2012. 94 pág. Tese de Doutorado - Instituto de Física "Gleb Wataghin", UNICAMP, Campinas, 2012.
- [11] SOARES, D. *De Schwarzschild a Newton*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 42 (2020), e20190262.
- [12] SULLIVAN B. T.; ISRAEL W. *The Third Law of Black Hole Mechanics: What is it?*. Physics Letters. Volume 79A, number 5,6 (1980), p. 371-372.
- [13] MATSAS, G. E. A. *Gravitação Semiclássica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1 (2005), p. 137-145.
- [14] DE SANTI, N. S. M.; SANTARELLI, R. *Desvendando a Radiação Hawking*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41 (2019), nº 3, e20180312.